



UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

TESI DI DOTTORATO IN  
INGEGNERIA STRUTTURALE ED IDRAULICA

CICLO XXV

SETTORE SCIENTIFICO-DISCIPLINARE ICAR/08  
SETTORE CONCORSUALE 08/B2

**Travi in parete sottile con  
deformabilità a taglio e distorsione  
di sezione: formulazione teorica,  
modellazione numerica e  
applicazioni**

*Dottorando:*

Rosario MILETTA

*Relatore:*

Prof. Ing. Francesco UBERTINI

*Coordinatore:*

Prof. Ing. Erasmo VIOLA

*Correlatore:*

Ing. Stefano DE MIRANDA

ESAME FINALE ANNO 2013

# Indice

<b>INTRODUZIONE</b>	<b>9</b>
<b>CAPITOLO 1 Profili formati a freddo</b>	<b>13</b>
1.1 Profili formati a freddo . . . . .	14
1.1.1 Processo produttivo . . . . .	15
1.1.2 Fenomeni di instabilità . . . . .	18
1.2 Progettazione di profili formati a freddo . . . . .	19
1.2.1 Normativa europea . . . . .	21
1.2.2 Normativa americana . . . . .	32
<b>CAPITOLO 2 La Generalized Beam Theory</b>	<b>37</b>
2.1 La Generalized Beam Theory convenzionale . . . . .	38
2.2 Cinematica proposta . . . . .	48
2.3 Deformazioni generalizzate . . . . .	49
2.3.1 Alcune osservazioni . . . . .	51
2.4 Forze e sforzi generalizzati . . . . .	51
2.5 Equazioni di equilibrio . . . . .	54
2.6 Equazioni costitutive . . . . .	56
2.7 Modi flesso-taglianti . . . . .	57
2.8 Modi con ingobbamento non lineare . . . . .	62
2.9 Cross Section Analysis . . . . .	64
2.9.1 Decomposizione modale dei modi flesso-taglianti . . . . .	65
2.9.2 Decomposizione modale dei modi con ingobbamento non lineare . . . . .	66
2.9.3 Matrice di rigidezza della sezione e deformazioni generalizzate nello spazio modale . . . . .	66
2.10 Ricostruzione dello stato tensionale . . . . .	69
2.11 Formulazione non lineare . . . . .	71

<b>CAPITOLO 3</b>	<b>Recupero delle teorie classiche di trave</b>	<b>73</b>
3.1	Relazioni geometriche . . . . .	74
3.2	Torsione non uniforme con deformabilità tagliante . . . . .	76
3.2.1	Alcune osservazioni . . . . .	82
3.3	Teoria di Capurso . . . . .	84
3.4	Trave indeformabile a taglio . . . . .	86
3.5	Esempio di torsione non uniforme con deformabilità tagliante . . . . .	87
3.5.1	Esempio numerico . . . . .	90
<b>CAPITOLO 4</b>	<b>Modellazione agli elementi finiti</b>	<b>93</b>
4.1	Formulazione compatibile . . . . .	94
4.2	Alcuni esempi . . . . .	94
4.2.1	Esempio 1 . . . . .	95
4.2.2	Esempio 2 . . . . .	99
4.2.3	Esempio 3 . . . . .	101
4.2.4	Esempio 4 . . . . .	104
4.2.5	Esempio 5 . . . . .	109
4.2.6	Esempio 6 . . . . .	112
<b>CAPITOLO 5</b>	<b>Progettazione di sistemi di copertura formati a freddo</b>	<b>121</b>
5.1	Sistemi di copertura formati a freddo . . . . .	122
5.2	Approccio progettuale EC 3 . . . . .	124
5.3	Approccio RM . . . . .	127
5.4	Alcuni esempi di progettazione . . . . .	131
<b>CAPITOLO 6</b>	<b>Progettazione di profili di classe 4</b>	<b>139</b>
6.1	Procedura ESA . . . . .	141
6.2	Procedura EC . . . . .	144
6.3	Confronto approccio ESA - EC . . . . .	144
6.4	Confronto ESA-cFSM . . . . .	148
<b>CONCLUSIONI</b>		<b>161</b>
<b>Appendice A</b>	<b>Procedura di decomposizione modale</b>	<b>169</b>



# Introduction

During the last decades, an increasingly important percentage of the steel production used in civil structures belongs to cold formed profiles. Such diffusion is ever increasing as a result of both the profiles themselves and their production process representing significant savings in the building business [1]. In their most common use, these profiles are classified in the current standards [2]-[7] as Class 4; that is, profiles in which to determine resistance it is necessary to take into account local instability of the compressed parts of the cross-section. For cold formed profiles specifically, it is also required to take into account distortional instability [8]-[12]. It is clear then that even if these profiles are widely used due to their simplicity of both production and application, the same cannot be said about their design. Indeed, the design standards for these elements are relatively recent and not valid in general cases. In Europe, the standard refers to the Effective Width Method (EFW) [13], while the United States standard revolves around the Direct Strength Method which itself is based on the Constrained Finite Strip Method (cFSM)[14]-[21]. However, both of these approaches have several limitations.

For this reason, a significant amount of research has been conducted toward the development of analysis tools, which combine an easy usage and good predictive capabilities, to evaluate the structural behavior of simple structural systems that use cold formed profiles [22]. In particular, the approach that would best fit this objective is based on the Finite Element Method. The contributions in this respect can be subdivided in two main categories: one toward an effective three-dimensional modeling using bidimensional elements [23], and the other toward the formulation and development of mono-dimensional beam models with enriched cross-section kinematics. In this second category the first important contribution was the theory of Vlasov [24]. Later on, Capurso [25][26] developed in the 60s a generalization of this theory that introduces shear deformation along the section midline by enriching the warping description while imposing null in-plane displacements. This formulation has been recently extended to the case of materials that are transversally isotropic

and applied to pultruded beams [27]-[28]. In the other hand we have the Generalized Beam Theory (GBT) [29]- [30] proposed by Schardt in the 80s. The GBT, by allowing for deformation of the cross section in its own plane, is a model that allows taking into account section distortion, which is essential to the design of cold formed profiles. Following the work of Schardt, many authors have contributed to the improvement of the GBT by extending it beyond its original formulation for open branched cross-sections [31]-[33] and by adding nonlinear effects for the analysis of buckling problems [34]-[38]. Moreover, in the spirit of the Kantorovich's semi-variational method, a new approach for the selection of the cross-section deformation modes has been presented in [39]. Recently in [40]-[48], the application of the GBT to analyze cold-formed roof systems has been presented as well. As regards the shear deformation, Silvestre and Camotim were the first that removed the Vlasov constraint introducing the shear deformation in the GBT [49]-[51]. Later, much effort has been devoted to the extension of their formulation to analyze composite thin-walled beams. In particular, the extension of the formulation to analyze the local and global vibration behavior of arbitrary loaded lipped channel columns and beams with cross-ply orthotropy has been presented in [52]. The linear and buckling behaviors of FRP composite thin-walled members have been extensively analyzed in [53]-[55].

In this context, the present work revolves around a theoretical formulation, a numeric model and a series of applications of the GBT in the study of thin walled profiles and particularly of cold formed steel members. In particular, this work proposes a new set of GBT kinematics that takes into account in an original way the shear deformability of the section. This formulation preserves the format of the classical GBT while adding an additional linear warping displacement along the wall thickness, thus guaranteeing perfect coherence between bending and shear behavior. It will be shown how such formulation allows easy recovering of classical beam theories including those that are shear deformable [56]. Moreover, a procedure to reconstruct tridimensional stresses which recovers the reactive stress resulting from the internal constraints typical of reduced kinematics is introduced [57]-[58]. On the base of these elements, a design approach for class 4 profiles, called Embedded Stability Analysis (ESA) will be proposed to duly consider all aspects of the current standards. The thesis is organized in six parts. In the first chapter a general introduction on cold formed profiles is presented along with the currently used design approaches. In the second chapter, after a quick description of the state of the art on GBT, the new set of kinematics is presented. In the third chapter it is shown how from the proposed GBT formulation it is possible to completely recover classical beam theories included those that are shear deformable. In the fourth chapter a GBT finite element is presented. In the same chapter the procedure to recover

the tridimensional stress state is showned. In the fifth chapter the RM approach is presented and a series of roof systems are designed following the different available approaches. Finally, in the sixth chapter the ESA procedure is proposed.





# Introduzione

Ormai già da qualche decennio, una percentuale rilevante della produzione di acciaio impiegato nelle costruzioni civili è rappresentata da profili in parete sottile ottenuti molto spesso attraverso il processo di formatura a freddo, nota in ambito anglosassone come cold-forming. Tale diffusione è in continua crescita in quanto tanto il processo produttivo quanto le peculiarità di questi prodotti consentono di ottenere elevate economie di costruzione [1]. Nei loro più svariati impieghi, tali elementi sono molto spesso classificati dalla norma vigente [2]-[7] come profili in classe 4 ovvero profili per i quali nella determinazione delle resistenze è necessario tener conto degli effetti dell'instabilità locale delle parti compresse della sezione trasversale. Nei casi in cui il profilo sia anche stato ottenuto attraverso un processo di formatura a freddo è inoltre prescritto che anche l'instabilità distorsionale [8]-[12] debba essere debitamente tenuta in conto.

Appare quindi chiaro che se da un lato tali elementi devono la loro diffusione alla semplicità di produzione e di montaggio, non può dirsi altrettanto per quanto concerne il loro calcolo e la loro progettazione. Le norme che standardizzano la progettazione di tali elementi infatti, sono relativamente recenti e non sempre generalmente applicabili. In particolare, in ambito europeo la norma fa riferimento all'Effective Width Method (EWM), noto in ambito nazionale come metodo delle larghezze efficaci [13], mentre le norme statunitensi si rifanno al Direct Strength Method basato sul Constrained Finite Strip Method (cFSM) [14]-[21]. Tali approcci presentano però una serie di limitazioni.

Per questo, una significativa quantità di ricerche scientifiche è rivolta verso lo sviluppo di strumenti di calcolo che combinino un utilizzo agevole a buone capacità predittive per l'analisi del comportamento strutturale di sistemi, anche semplici, che prevedono di impiegare profili in acciaio sagomati a freddo [22].

In particolare, l'approccio che sembrerebbe meglio prestarsi a questo scopo è basato sul metodo degli elementi finiti. In questo contesto i contributi possono essere suddivisi in due categorie principali: una che mira ad una effettiva modellazione

tridimensionale, a base di elementi bidimensionali [23], e l'altra invece che punta alla formulazione e lo sviluppo di elementi finiti mono-dimensionali sulla base di modelli di trave con cinematica arricchita.

In quest'ultimo filone, il primo importante contributo è stata la ben nota teoria di Vlasov [24]. In seguito Capurso [25]-[26] ha generalizzato tale teoria, introducendo la deformabilità tagliante lungo la linea media. In particolare, ciò è stato ottenuto mediante un arricchimento della descrizione del warping a cui sono associati spostamenti nulli nel piano della sezione. Tale formulazione è stata recentemente estesa anche al caso di materiali trasversalmente isotropi e applicata per l'analisi di travi in parete sottile pultruse [27]-[28]. D'altra parte, negli anni 80', Schardt propose la Generalized Beam Theory (GBT) [29]- [30] che, rimuovendo l'ipotesi di indeformabilità della sezione nel proprio piano, è in grado di cogliere fenomeni di distorsione della sezione trasversale e che ben si presta, per questo, ad essere impiegata per lo studio e la progettazione di profili in acciaio sagomati a freddo. A seguito dei lavori di Schardt, molti autori hanno contribuito al miglioramento della teoria, estendendo la sua formulazione al caso di sezioni con nodi in cui convergono più di due pareti e al caso di sezioni chiuse [31]-[33] e aggiungendo effetti non lineari per svolgere analisi di stabilità [34]-[38]. Inoltre, nello spirito del metodo semi-variazionale di Kantorovich, è stato presentato in [39] un nuovo approccio per l'analisi dei modi deformativi ammissibili per la sezione trasversale. Recentemente, in [40]-[48] sono state presentate alcune applicazioni della GBT a sistemi di copertura realizzati con profili formati a freddo.

Relativamente all'introduzione della deformabilità tagliante, Silvestre e Camotim furono i primi che, rimuovendo il vincolo Vlasov, proposero una GBT deformabile a taglio [49]-[51]. In seguito, molti sono stati gli sforzi dedicati all'estensione della teoria al caso di materiali ortotropi. In particolare, l'estensione della formulazione impiegata per analizzare il comportamento locale e globale di colonne compresse realizzate con materiale ortotropo a sezione arbitraria è stata presentata in [52]. Il comportamento lineare e di buckling per elementi caricati di punta realizzati con materiali compositi in FRP è stato invece ampiamente analizzato in [53]-[55].

In questo contesto, nel presente lavoro di tesi vengono discussi alcuni aspetti relativi alla formulazione teorica, alla modellazione numerica e alle applicazioni di travi a parete sottile, ed in special modo dei profili in acciaio formati a freddo, nell'ambito della GBT. In particolare, con riferimento agli aspetti di formulazione teorica, viene presentata una riscrittura della cinematica GBT che introduce in forma originale la deformabilità a taglio della sezione. La nuova formulazione, che conserva il formato della GBT classica e introduce la deformabilità tagliante lungo lo spessore della parete oltre che lungo la linea media della sezione, garantisce la piena coerenza tra le deformazioni flessionali e taglienti della trave [56]. Si mostra poi come tale riscrit-

tura consenta in maniera agevole di ricondursi alle teorie classiche di trave, anche deformabili a taglio. Infine, viene presentata una procedura di ricostruzione del regime tensionale tridimensionale in grado recuperare la parte reattiva delle componenti di sforzo dovuta al vincolamento interno proprio del modello a cinematica ridotta [57]-[58]. Con riferimento alla modellazione numerica e alle applicazioni, viene sviluppato e validato un elemento finito di trave GBT, basato su un approccio di tipo compatibile ed impiegato per mettere a punto un modello strutturale definito "roof model" (RM) dedicato alla progettazione di sistemi di copertura formati a freddo. Infine, viene proposto un approccio progettuale dedicato ai profili in classe 4, definito ESA (Embedded Stability Analysis), in grado di svolgere le verifiche coerentemente con quanto prescritto dalle normative vigenti superandone alcune limitazioni.

La tesi è organizzata in sei capitoli.

Nel primo capitolo viene esposta una introduzione generale sui profili formati a freddo e vengono riassunti gli approcci consolidati e disponibili per la loro progettazione. Nel secondo capitolo viene presentata la nuova formulazione della GBT. Nel terzo capitolo si mostra come, a partire dalla formulazione proposta, sia possibile recuperare completamente le teorie classiche di trave, anche con deformabilità tagliante. Nel quarto capitolo viene presentato e validato un elemento finito GBT. Inoltre, nello stesso capitolo, viene anche presentata la procedura dedicata alla ricostruzione dello stato tensionale tridimensionale. Nel quinto capitolo viene presentato l'approccio RM e sono confrontati una serie di sistemi di copertura progettati secondo i differenti approcci disponibili. Infine nel sesto capitolo 6 viene proposta la procedura ESA.



# Capitolo 1

## Profili formati a freddo

### Abstract

In this chapter, steel cold manufactured structural elements, known in literature as cold formed members, are presented. The main peculiarities these members exhibit are briefly described while paying special attention to instability phenomena. In the second part of this chapter the standard approaches to design of cold formed members, available in both the American AISI code and the EuroCode, are described.

### Sommario

In questo capitolo vengono presentati gli elementi in acciaio formati a freddo impiegati per uso strutturale, noti in letteratura come cold formed members. Sono messe in evidenza le principali peculiarità che caratterizzano tali prodotti dedicando particolare attenzione ai fenomeni di instabilità.

Nella seconda parte del capitolo sono descritti gli approcci progettuali disponibili nelle norme americane AISI e negli Eurocodici dedicati alla progettazione di elementi e sistemi strutturali realizzati con elementi in acciaio sagomati a freddo.

## 1.1 Profili formati a freddo

I primi utilizzi dei profili in acciaio sagomati a freddo nelle costruzioni risalgono al 1850, negli Stati Uniti e in Gran Bretagna, anche se la loro diffusione rimase molto limitata fino al 1940.

Nel 1939, infatti l' AISI - American Iron Steel Institute - sponsorizzò la ricerca in tale settore presso la Cornell University sotto la direzione di George Winter, il quale portò alla pubblicazione, nel 1946, della prima edizione delle "Specifications for the Design of Cold- Formed Steel Structural Members" e al successivo sviluppo dei sagomati a freddo.

Sul versante europeo, agli inizi degli anni 80, l'European Convention for Constructural Steelwork, pubblicò: "Good practice in steel cladding and roofing", nel quale erano invece contenute le prescrizioni comunitarie per l'impiego di pannelli di copertura e di rivestimento in acciaio formati a freddo.

Da allora, i progressi conoscitivi derivanti dalla esponenziale diffusione delle applicazioni di profili sottili accompagnata dall' intensa attività della ricerca scientifica, hanno portato e contribuiscono tuttora ad un continuo aggiornamento del settore. Correntemente i profilati formati a freddo sono prodotti in barre (fig. 1.1), lastre (fig. 1.2) e pannelli sandwich.

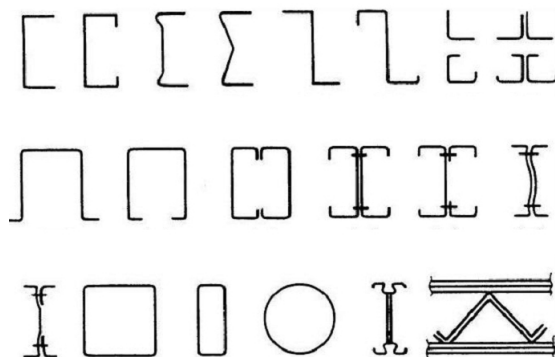


Figura 1.1: *Sezioni tipici di profili formati a freddo*

Realizzati con le geometrie più svariate, sono caratterizzati da uno spessore ridotto e sono largamente impiegati nelle più comuni strutture in carpenteria pesante come tipici componenti strutturali (arcarecci e travi di attacco dei tamponamenti Fig. 1.3), ma anche come sistemi portanti per esempio di scaffalature metalliche

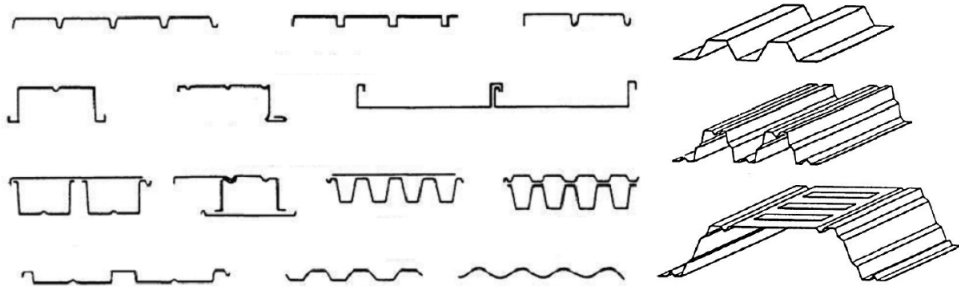


Figura 1.2: *Profili tipici di lamiere formate a freddo*

utilizzate per lo stoccaggio delle merci (Fig. 1.4) oppure come elementi di sistemi modulari per l'edilizia residenziale (Fig. 1.5) o anche per soluzioni abitative di emergenza.



Figura 1.3: Coperture realizzate con profili cold-formed

### 1.1.1 Processo produttivo

Le diverse sezioni degli elementi formati a freddo possono essere ottenute sostanzialmente attraverso due diverse filosofie produttive: una di produzione continua, detta cold rolling (Fig. 1.6), altre di produzione discontinua definite correntemente



Figura 1.4: Scaffalature industriali



Figura 1.5: Struttura per edilizia residenziale interamente realizzata con profili cold formed



di press braking o folding.

La prima tipologia, generalmente usata per la produzione di barre e lastre corrugate, consente di ottenere la sezione finale desiderata, attraverso una operazione di piegatura continua esercitata da coppie di rulli posti in successione. Di solito a una delle estremità è posta una macchina tagliatrice che trancia l'elemento alla lunghezza richiesta, in modo da non arrestare la produzione, consentendo una notevole precisione dimensionale e possibilità di sagomare lamiere già verniciate o rivestite. Le macchine press braking anche dette pressatrici sono invece composte da una parte fissa e da una parte mobile sulla quale si applicano stampi della forma desiderata. Mediante un processo di pressatura si ottiene quindi la sezione desiderata. Questa tecnica è da preferire alla precedente, nei casi di piccole serie con lunghezze inferiori ai 6 m o per sezioni trasversali aventi semplice configurazione.

Riassumendo la scelta della metodologia produttiva, economicamente più vantaggiosa è legata alla complessità del profilo e la quantità da produrre.

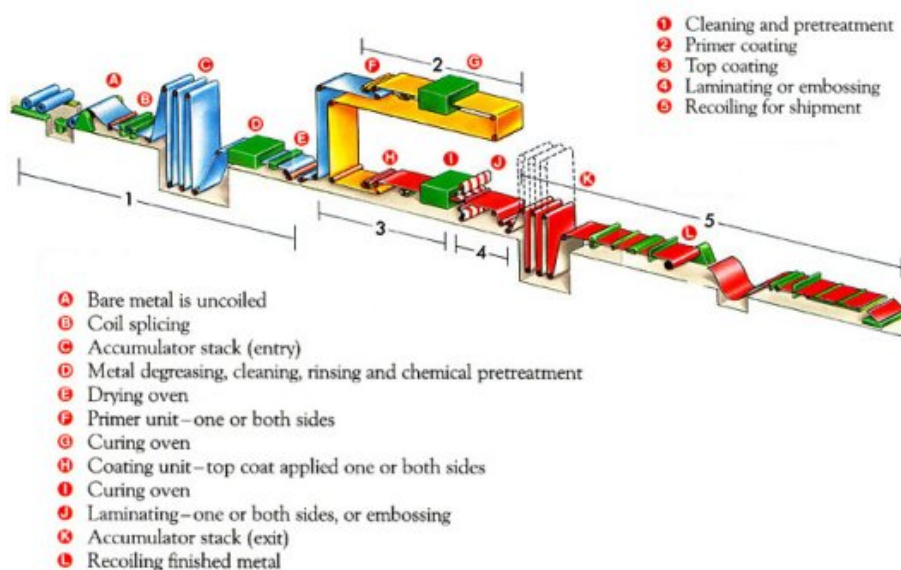


Figura 1.6: Principio di funzionamento di una macchina cold-rolling

### 1.1.2 Fenomeni di instabilità

Problemi particolarmente rilevanti nel comportamento dei profili in parete sottile formati a freddo, sono rappresentati, dalla bassa rigidezza torsionale, (in funzione del fatto che questa è proporzionale al cubo dello spessore e che in molti casi peggiori a causa della scelta di sezioni aperte e prive di assi di simmetria); dalla ridotta resistenza al rifollamento nei collegamenti bullonati; dalla corrosione, (pericolo però facilmente superabile con opportuni trattamenti della superficie es. zincatura) e dai fenomeni di instabilità, che possono presentarsi in forme diversificate, rispetto a quanto avviene per i profili a sezione compatta. Relativamente a quest'ultimo aspetto, infatti, questi profili oltre a manifestare fenomeni di instabilità globale o Euleriana, (esempio di tipo flessionale o flesso-torsionale) sono spesso soggetti a fenomeni di instabilità localizzata (Fig. 1.7-1.8-1.9), definiti correntemente in letteratura come instabilità di tipo locale o distorsionale.

In via del tutto teorica, considerando una sezione in parete sottile come un



Figura 1.7: *Esempio instabilità localizzate*

assemblaggio di piastre, si definiscono correntemente in letteratura:

- instabilità globali, forme che interessano il profilo per l'intera lunghezza e tali per cui le sezioni si mantengono indeformate nel proprio piano (fig. 1.10-a);
- instabilità locali, forme per le quali si verificano deformazioni che possono interessare il profilo in corrispondenza di zone concentrate e che spesso prevedono imbozzamenti locali delle pareti della sezione (fig. 1.10-b);



Figura 1.8: *Esempio instabilità localizzate*

- instabilità con distorsione di sezione, in cui invece, per tratti più o meno estesi del profilo, la sezione trasversale non si mantiene rigida nel proprio piano. (fig. 1.10-c).

Appare chiaro che riconoscere su casi reali tali fenomeni in maniera chiara e disgiunta non è sempre possibile, in ragione della reciproca interazione che tali fenomeni hanno sul comportamento globale del profilo. Tale aspetto è fortemente accentuato nei casi in cui si verificano fenomeni di instabilità locale con distorsione di sezione. Tale peculiarità è rilevante nella valutazione del comportamento strutturale dei profili formati a freddo, in quanto rispetto a quanto avviene per le sezioni compatte, forme di instabilità locali o che prevedono distorsione di sezione possono manifestarsi precocemente rispetto a forme di instabilità globali.

## 1.2 Progettazione di profili formati a freddo

La progettazione di elementi formati a freddo, seppur molto spesso usati anche in sistemi strutturali molto semplici, come per esempio le coperture, non è immediata ed agevole in quanto è necessario tenere in considerazione le problematiche sopra descritte. A tal proposito si riscontra infatti che nel corso degli anni sono stati e sono tuttora molti gli approcci proposti dai gruppi di ricerca che lavorano in tale



Figura 1.9: Esempio instabilità localizzate

ambito. Facendo una rapida rassegna degli approcci oggi disponibili, dedicati allo studio dei profili in parete sottile in acciaio, possono essere distinte quattro categorie principali [22]: i cosiddetti metodi analitici, i *metodi semi-analitici*, i *metodi semi-empirici* e gli *approcci numerici*.

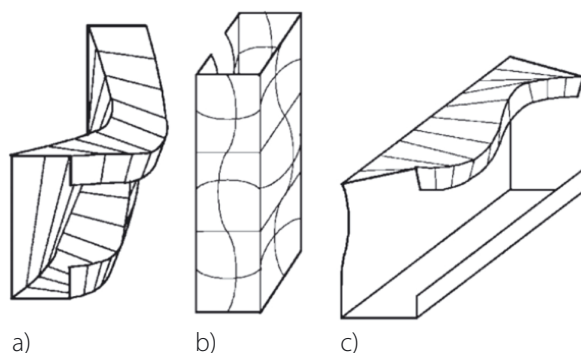
In particolare, i metodi analitici si basano su analisi asintotiche o perturbative del comportamento post critico dei profili e sono generalmente impiegati esclusivamente per applicazioni teoriche e di ricerca.

Nei metodi semi-analitici invece, il carico critico relativo al buckling locale è determinato a partire dalla teoria delle piastre e mediante equazioni non lineari viene descritto il comportamento della trave.

I metodi semi-empirici invece si basano sull'idea di tenere in conto i fenomeni di instabilità che possono caratterizzare il comportamento del profilo, attraverso una riduzione delle caratteristiche geometriche della sezione del profilo stesso, secondo il cosiddetto "Effective Width Method". Tale approccio comunemente noto come metodo delle "larghezze efficaci" è attualmente codificato nelle normative europee e quindi nelle norme nazionali [2][6].

Infine sono impiegati correntemente anche approcci numerici. Questi, si basano su modellazioni agli elementi finiti (FEM) oppure su modellazioni alle strisce finite (FSM). Tali approcci, prevedono attraverso analisi di buckling lineari o non lineari di determinare il carico critico dell'elemento o del sistema strutturale. La norma americana [7] consente di impiegare tale approccio.

I principali enti Normativi, su scala comunitaria la Commissione Eurocodice e in ambito anglosassone l'American Iron Steel Institute, sono oggi un punto di riferimento

Figura 1.10: *Tipologie di instabilità*

importante, non solo nelle rispettive aree di competenze, ma a livello globale, relativamente alla progettazione di profili cold formed. Di seguito saranno quindi presi in rassegna e meglio descritti i metodi precedentemente menzionati e disponibili nelle normative [2]-[7].

### 1.2.1 Normativa europea

La procedura di progettazione proposta dagli Eurocodici [2]-[5] si basa su un procedimento iterativo definito Effective Width Method (EWM). Come già detto, tale approccio, noto in ambito nazionale come metodo delle larghezze efficaci è un approccio di tipo semi empirico. In particolare, consiste nel considerare la perdita di efficacia di porzioni di pareti compresse che compongono la sezione trasversale dell'elemento in esame. Pertanto in fase di verifica, non vengono utilizzate le caratteristiche cosiddette lorde della sezione, ma delle caratteristiche geometriche ridotte, dette appunto efficaci.

Considerando la generica parete piana di larghezza  $b$  e spessore  $t$ , soggetta a compressione uniforme, questa raggiunge la crisi con una distribuzione di tensioni non uniformi, qualitativamente simile a quella riportata in Fig. 1.11, caratterizzata da valori massimi in corrispondenza delle sezioni di estremità e minimi nelle zone di maggiore distanza da queste. Tale distribuzione può essere approssimabile o con una distribuzione di tensioni costanti pari a  $\sigma_{av}$ , oppure definendo una larghezza efficace  $b_{eff}$ , tale per cui la parete in esame raggiunge la crisi per il valore di tensione

massimo rilevato agli estremi. In tal caso quindi, una parte di sezione si considera efficace, mentre una parte non viene considerata. Le regole di dimensionamento

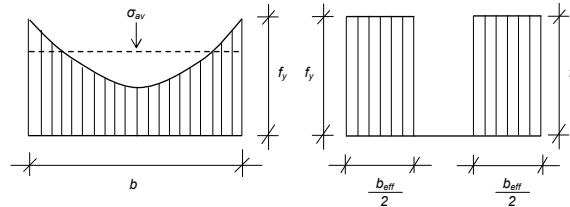


Figura 1.11: (a) Tensioni di compressione a collasso nella lastra industriale; (b) modello di calcolo

per i profili in parete sottile sviluppate prima da Von Kàrmàn (1932) [17] e successivamente da Winter [18] fanno riferimento al concetto di larghezza efficace  $b_{eff}$  piuttosto che a quello di tensione media  $\sigma_{av}$  e ciò è dovuto alla maggiore praticità del primo approccio rispetto al secondo.

In particolare definita la snellezza  $\bar{\lambda}_p$ , relativa della generica parete compressa, attraverso la seguente espressione:

$$\bar{\lambda}_p = 1.052 \frac{b}{t} \sqrt{\frac{f_y}{E k_\sigma}} \quad (1.1)$$

in cui  $f_y$  è la tensione di snervamento del materiale,  $E$  è il modulo elastico e  $k_\sigma$  è un coefficiente tabellato che dipende dalle condizioni di vincolo e dalle distribuzioni di tensioni, tali autori giunsero a definire le curve riportate in Fig. 1.12. In tale grafico  $\sigma_L$  rappresenta la massima tensione a cui il piatto può essere sottoposto prima che lo stesso si instabilizzi. In particolare l'approccio proposto da Von Kàrmàn è basato sull'ipotesi di lastra priva di imperfezioni. Tali difetti modificano sensibilmente la risposta strutturale, soprattutto in campo post-critico. Nel 1947, è stata pertanto proposta da Winter una espressione, che sulla base di studi sperimentali, fornisce l'espressione per la valutazione della larghezza efficace che tiene in conto della presenza di imperfezioni.

Gli Eurocodici consentono di impiegare tale approccio, basato sulle larghezze efficaci, per la progettazione dei profili in classe 4. In particolare, l'area effettiva dei segmenti piani che compongono la sezione, chiamata  $A_{c,eff}$ , è definita al punto 4.4 della EN 1993-1-5, pari al prodotto dell'area lorda della componente sezionale per un coefficiente di riduzione  $\rho$  minore di 1, come di seguito riportato:

$$A_{c,eff} = \rho A_c \quad (1.2)$$

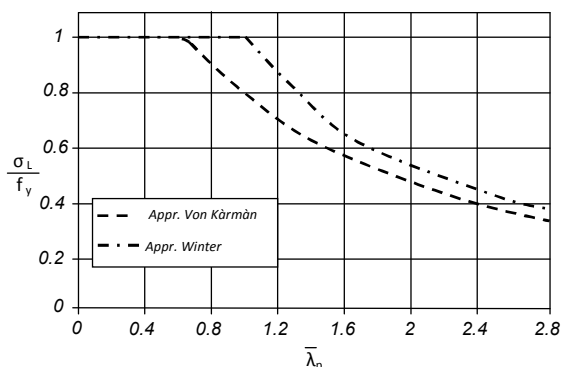


Figura 1.12: Relazione tra la tensione limite adimensionalizzata e la snellezza del piatto

La larghezza efficace della singola parete compressa  $b_{eff}$ , che costituisce la sezione trasversale, viene quindi calcolata a partire dalla sua dimensione nominale  $b_p$ , mediante la seguente relazione:

$$b_{eff} = \rho b_p \quad (1.3)$$

Il primo passo per la determinazione della lunghezza efficace della parete considerata è relativo alla modellazione dell'elemento stesso e delle sue condizioni di vincolo. In particolare, la norma fornisce un'ampia casistica riportata in Fig. 1.13, in cui si distinguono (non considerando i casi di irrigidimenti interni sulle pareti) elementi vincolati ad un estremo oppure ad entrambi. Definito quindi il modello, introdotto il materiale acciaio ( $E=210.000$  MPa) e il coefficiente  $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$ , la snellezza del piatto viene calcolata mediante la seguente relazione:

$$\bar{\lambda}_p = \frac{b/t}{28.4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}} \quad (1.4)$$

in cui il coefficiente di imbozzamento  $k_\sigma$  viene ricavato sulla base delle indicazioni delle Figs. 1.14-1.15.

Il termine  $\rho$  viene quindi ottenuto, nel caso di componente vincolata ai due estremi mediante le seguenti relazioni:

$$\rho = 1 \quad \text{se} \quad \bar{\lambda}_p \leq 0.5 + \sqrt{0.085 - 0.055\psi} \quad (1.5)$$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.055(3 + \psi)}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad \text{se} \quad \bar{\lambda}_p > 0.5 - \sqrt{0.085 - 0.055\psi} \quad (1.6)$$

Tipo di elemento	Modello	Tipo di elemento	Modello

Figura 1.13: Modellazione delle pareti di una sezione trasversale

dove  $(3 + \psi) \geq 0$ . Il parametro  $\psi$  dipende dalla distribuzione di tensioni agenti sull'elemento considerato come mostrato in Figs. 1.14-1.15.

Nel caso di elemento vincolato ad un solo estremo,  $\rho$  dipende solo da  $\bar{\lambda}_p$  ed è valutato secondo le relazioni riportate di seguito:

$$\rho = 1 \quad (1.7)$$

se  $\bar{\lambda}_p \leq 0.748$

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}_p - 0.188}{\bar{\lambda}_p^2} \leq 1 \quad (1.8)$$

se  $\bar{\lambda}_p > 0.748$ . La procedura fin qui descritta è una procedura iterativa di cui in Fig. 1.16 sono state riassunte le principali fasi, necessarie alla determinazione delle quantità efficaci da impiegare in fase di verifica di un profilo di classe 4 secondo quanto prescritto dall'EWM per tenere in conto dell'instabilità locale. Nel caso di



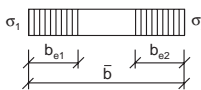
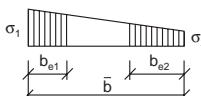
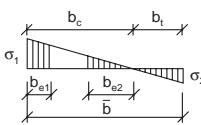
Stress distribution (compression positive)		Effective <sup>P</sup> width $b_{eff}$				
		$\psi = 1$ : $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = 0.5b_{eff}$ $b_{e2} = 0.5b_{eff}$				
		$1 > \psi > 0$ : $b_{eff} = \rho \bar{b}$ $b_{e1} = \frac{2}{5 - \psi} b_{eff}$ $b_{e2} = b_{eff} - b_{e1}$				
		$\psi < 0$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho \bar{b} / (1 - \psi)$ $b_{e1} = 0.4b_{eff}$ $b_{e2} = 0.6b_{eff}$				
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1	$-1 > \psi > -3$
Buckling factor $k_\sigma$	4.0	$8.2 / (1.05 + \psi)$	7.8	$7.81 - 6.29\psi + 9.78\psi^2$	23.9	$5.98(1 - \psi)^2$

Figura 1.14: Piatto interno compresso

profili compressi, inflessi o presso-inflessi aventi sezioni trasversali interessate dall'instabilità distorsionale, tipicamente profili aperti con irrigidimenti, la determinazione delle caratteristiche efficaci secondo quanto previsto dagli Eurocodici risulta più articolata. In particolare le norme consentono di svolgere analisi numeriche oppure di impiegare una procedura semplificata limitatamente a certe tipologie di sezione. Nel caso di compressione uniforme, la procedura semplificata per il calcolo delle lunghezze efficaci viene integrata sulla base dei seguenti passaggi:

- identificazione delle zone interessate da instabilità distorsionale e determinazione dello spessore equivalente ridotto di tali zone;
- determinazione delle caratteristiche geometriche efficaci della sezione penalizzata per instabilità locale e distorsionale.

Con riferimento alla Fig. 1.17 si rileva come una parete possa essere dotata di un singolo (Fig. 1.17.a) oppure doppio (Fig. 1.17.b) irrigidimento. La quantificazione degli effetti legati all'instabilità distorsionale, dovuta alla presenza di irrigidimenti al bordo, viene basata su un modello di calcolo nel quale l'elemento di interesse ha un vincolo di parziale continuità, con rigidità elastica dipendente dalle condizioni al contorno e dalla rigidità degli elementi piani adiacenti (Fig. 1.18).

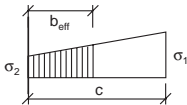
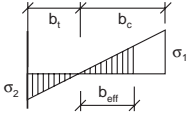
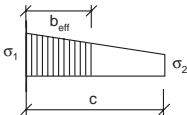
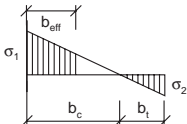
Stress distribution (compression positive)		Effective <sup>p</sup> width $b_{eff}$			
		$1 > \psi > 0$ : $b_{eff} = \rho c$			
		$\psi < 0$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	0	-1	$1 > \psi > -3$	
Buckling factor $k_\sigma$	0.43	0.57	0.85	$0.57 - 0.21\psi + 0.07\psi^2$	
		$1 > \psi > 0$ : $b_{eff} = \rho c$			
		$\psi < 0$ : $b_{eff} = \rho b_c = \rho c / (1 - \psi)$			
$\psi = \sigma_2 / \sigma_1$	1	$1 > \psi > 0$	0	$0 > \psi > -1$	-1
Buckling factor $k_\sigma$	0.43	$0.578 / (\psi + 0.34)$	1.70	$1.7 - 5\psi + 17.1\psi^2$	23.8

Figura 1.15: Piatto esterno compresso

Da un punto di vista operativo la procedura per calcolare una sezione efficace che tenga conto anche dell'instabilità distorsionale si sviluppa in 3 fasi.

La prima, prevede di calcolare le caratteristiche efficaci a partire dalla sezione lorda soggetta a sola instabilità locale, assumendo come mostrato in Fig. 1.17 che gli irrigidimenti agiscano come punti nodali. La determinazione delle larghezze efficaci iniziali ( $b_{e1}$  e  $b_{e2}$ ) per le componenti della sezione vincolate agli estremi può essere quindi eseguita seguendo le prescrizioni della EN 1993-1-5. I valori iniziali delle larghezze efficaci per componenti vincolate ad un solo estremo vengono calcolate come per l'instabilità locale. Nel caso di irrigidimento con singola piega, la larghezza efficace dell'irrigidimento definita  $c_{eff}$  (Fig. 1.17) viene calcolato impiegando il

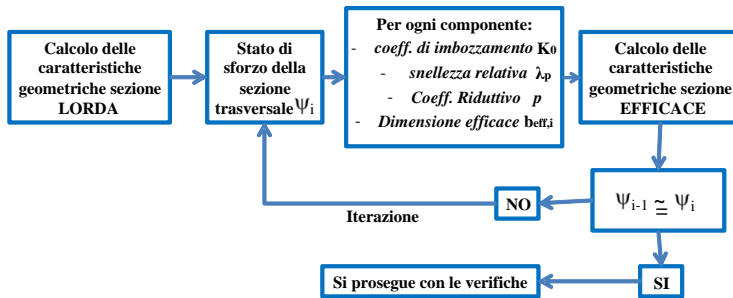


Figura 1.16: - Schema delle operazioni legate all'instabilità locale

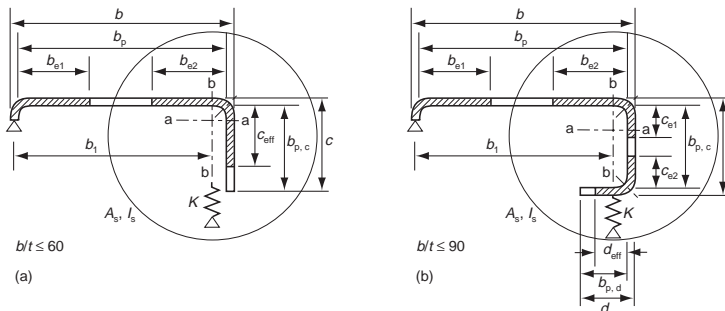


Figura 1.17: - Irrigidimenti come punti nodali, geometria

coefficiente di imbozzamento  $k_\sigma$  di seguito riportato:

$$k_\sigma = 0.5 \quad \text{per} \quad b_{p,c} \leq 0.35 \quad (1.9)$$

$$k_\sigma = 0.5 + 0.83 \sqrt[3]{[(b_{p,c}/b_p) - 0.35]^2} \quad \text{per} \quad 0.35 \leq b_{p,c}/b_p \leq 0.6 \quad (1.10)$$

Nel caso di un irrigidimento con due pieghe,  $c_{eff}$  può essere ricavato calcolando  $k_\sigma$  come un elemento doppiamente vincolato, mentre la quantità  $d_{eff}$  che rappresenta la lunghezza efficace del secondo irrigidimento (Fig. 1.17) si può ricavare calcolando  $k_\sigma$  come componente vincolata ad un solo estremo.

Nella fase due si considera l'irrigidimento isolato dal resto della sezione. Il fattore di riduzione di questa sotto-sezione è calcolato considerando che l'instabilità flessionale della sezione dell'irrigidimento rappresenti l'instabilità distorsionale di tutto

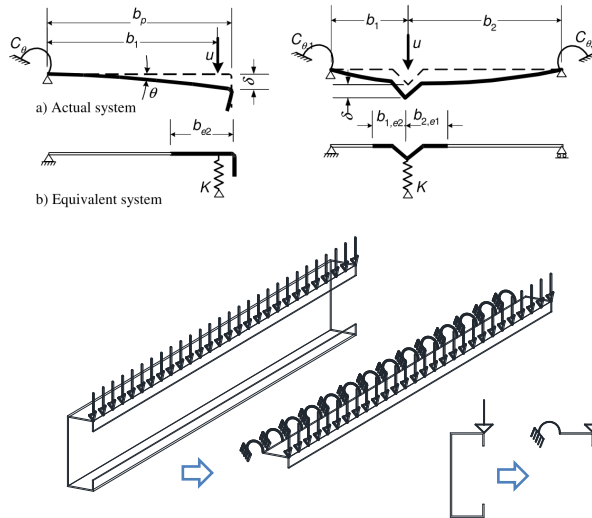


Figura 1.18: - Modello adottato per lo studio dell'instabilità distorsionale

l'elemento irrigidito. La tensione critica elastica è calcolata mediante la formula seguente:

$$\sigma_{cr} = \frac{2\sqrt{KEI_s}}{A_s} \quad (1.11)$$

dove:

$K$  è la rigidezza della molla opportunamente valutata (Fig. 1.17)

$I_s$  è il momento d'inerzia della sezione effettiva dell'irrigidimento rispetto alla retta passante per il baricentro a-a

$A_s$  è l'area effettiva della sezione dell'irrigidimento

Il fattore di riduzione  $\chi_d$  può essere calcolato utilizzando la snellezza adimensionale  $\bar{\lambda}_d$  tramite le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \chi_d &= 1 & \text{per} & \bar{\lambda}_d \leq 0.65 \\ \chi_d &= 1.47 - 0.723\bar{\lambda}_d & \text{per} & 0.65 < \bar{\lambda}_d < 1.38 \\ \chi_d &= 0.66/\bar{\lambda}_d & \text{per} & \bar{\lambda}_d \geq 1.38 \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove

$$\bar{\lambda}_d = \sqrt{f_{yb}/\sigma_{cr,s}} \quad (1.13)$$

Si calcola quindi l'area della sezione di irrigidimento effettiva dato il valore del fattore di riduzione  $\chi_d$  tramite l'espressione seguente:

$$A_{s,red} = \chi_d A_s \frac{f_{yb}/\gamma_{M0}}{\sigma_{com,Ed}} \quad \text{con} \quad A_{s,red} \leq A_s \quad (1.14)$$

in cui  $\sigma_{com,Ed}$  è la tensione di compressione applicata.

Nella determinazione delle proprietà della sezione efficace, l'area ridotta  $A_{s,red}$  dovrebbe rappresentarsi utilizzando lo spessore ridotto (Fig. 1.19) per tutti gli elementi inclusi in  $A_s$ :

$$t_{red} = t A_{s,red} / A_s \quad (1.15)$$

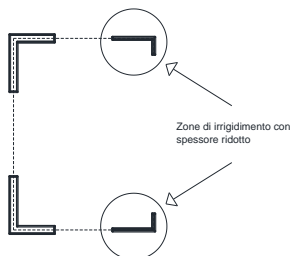


Figura 1.19: - Sezione efficace considerando l'instabilità distorsionale

Una procedura iterativa consente di approssimare accuratamente il valore del coefficiente di riduzione per l'instabilità dell'irrigidimento. In particolare sulla base del termine  $\chi_d$  (denominato  $\chi_{d,n}$  in cui il pedice  $n$  individua il numero dell'iterazione) si ipotizza una nuova distribuzione di tensione e si procede alla conseguente penalizzazione della sezione (in accordo a quanto illustrato nella fase 2) ottenendo un nuovo valore di  $\chi_d$  (denominato  $\chi_{d,n+1}$ ). La procedura iterativa termina quando  $\chi_{d,n} \cong \chi_{d,n+1}$ .

Analogamente a quanto mostrato precedentemente in Fig. 1.20, è riportato lo schema riassuntivo relativo alle fasi necessarie per tenere in conto dell'instabilità distorsionale nella verifica di un profilo di classe 4 secondo quanto previsto dall'EVM.

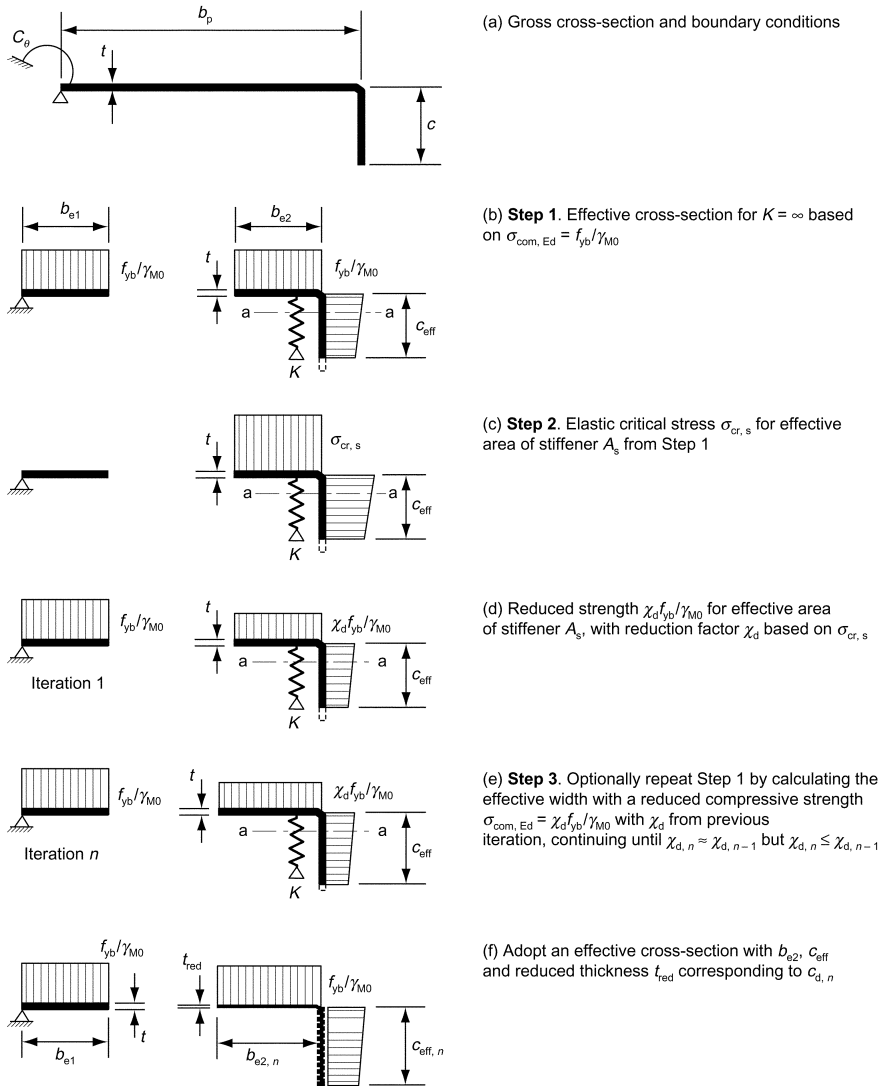


Figura 1.20: Procedura di calcolo da seguire per il calcolo dell'instabilità distortionale

## Osservazioni

Il procedimento descritto rappresenta una delle possibili metodologie desumibili dalla norma. In particolare di seguito, si riportano le possibili scelte e le possibili interpretazioni.

- Contemporaneità delle sollecitazioni. La normativa permette di eseguire il calcolo dell'area efficace con un'unica analisi considerando agenti contemporaneamente le 3 sollecitazioni  $(N, M_y, M_z)$ . Il risultato è un'unica forma sezionale efficace  $\Theta_{N,M_y,M_z}$ .

$$(N, M_y, M_z) \Rightarrow \Theta_{N,M_y,M_z} \quad (1.16)$$

Questo procedimento però implica un calcolo iterativo molto complesso. In alternativa è possibile eseguire 3 analisi differenti, ognuna caratterizzata da una determinata sollecitazione e forma sezionale efficace:

$$\begin{aligned} (N, 0, 0) &\rightarrow \Theta_N \\ (0, M_y, 0) &\rightarrow \Theta_{M_y} \\ (0, 0, M_z) &\rightarrow \Theta_{M_z} \end{aligned} \quad (1.17)$$

- Stato di sollecitazione. Le grandezze geometriche efficaci possono essere calcolate con riferimento alla situazione limite in cui è raggiunto il valore massimo di tensione ammesso per la classe di acciaio del profilo. In alternativa è possibile fare riferimento allo stato tensionale generato dalle azioni interne effettivamente agenti e pertanto riferirsi alla distribuzione delle tensioni associate e alla condizione di carico effettivamente agente.
- Iterazione sulla forma sezionale efficace. La normativa consente lo sviluppo di una procedura iterativa per meglio approssimare la geometria efficace della sezione. Sulla base del termine  $\chi_d$  si ipotizza una nuova distribuzione di tensione e si procede alla penalizzazione ottenendo un nuovo valore di  $\chi_d$ . La procedura iterativa viene terminata quando  $\chi_{d,n} \cong \chi_{d,n+1}$  (con  $\chi_{d,n}$  coefficiente riduttivo legato all'instabilità distorsionale al passo n).
- Momento parassita. Dopo il calcolo di una sezione efficace sottoposta a semplice sforzo normale può variare la posizione del baricentro. L'eccentricità del nuovo baricentro rispetto alla posizione iniziale di applicazione del carico genera momenti flettenti parassiti che dovrebbero essere considerati.

## 1.2.2 Normativa americana

Le norme americane AISI prescrivono di impiegare, relativamente alla progettazione di profili in acciaio formati a freddo, il Direct Strength Method (DSM). Il DSM in particolare, consente di svolgere le analisi di buckling impiegando il Finite Strip Method (FSM).

Il FSM, o Metodo alle Strisce Finite [14] si basa su un approccio variazionale che può essere considerato un ibrido tra il metodo di Rayleigh-Ritz e il metodo agli elementi finiti. L'applicazione del Finite Strip Method, come mostrato in Fig. 1.22,

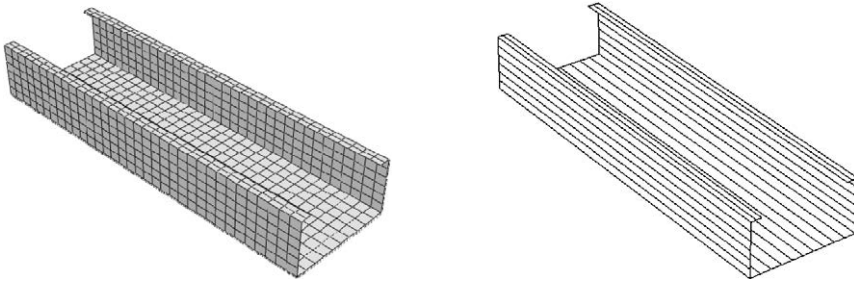


Figura 1.21: FEM vs. FSM

prevede una discretizzazione in strisce del profilo considerato nella direzione dell'asse. In Fig. 1.22 vengono mostrati per la generica striscia, i gradi di libertà, le sue

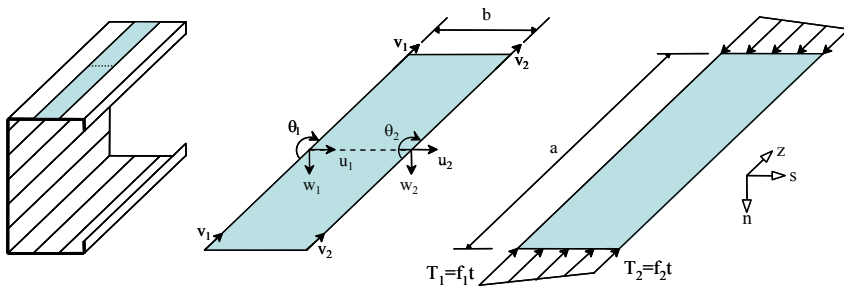


Figura 1.22: - Modello alla base del metodo FSM

dimensioni ed i carichi su questa applicati.

Il FSM prevede che per ogni striscia, assumendo l'ipotesi di stato piano di tensione



e valida la teoria di piastra alla Kirchhoff, vengano calcolate le matrici di rigidezza elastica e geometrica (relativa alle deformazioni di ordine superiore) e che vengano quindi ottenute dopo una opportuna trasformazione dal riferimento locale delle strisce ad un riferimento globale, le matrici di rigidezza elastica  $\mathbf{K}_e$  e geometrica  $\mathbf{K}_g$  globali del sistema. Sia quindi risolto il seguente problema agli autovalori:

$$(\mathbf{K}_e - \Lambda \mathbf{K}_g) \phi = 0 \tag{1.18}$$

determinando la matrice diagonale  $\Lambda$  che contiene i valori dei moltiplicatori del carico critico e la matrice  $\phi$  che invece consente di descrivere la deformata associata a ciascun carico critico per il problema considerato. Entrambe le matrici  $\mathbf{K}_e$  e  $\mathbf{K}_g$ , sono funzioni della lunghezza della stringa  $a$ , come anche l' autovalore ed i modi di buckling. Il problema può essere risolto per più valori di  $a$  così da costruire una curva come mostrato in Fig. 1.23. Il valore minimo di tale curva definisce il carico critico di buckling e la semi-lunghezza d'onda ad esso associata.

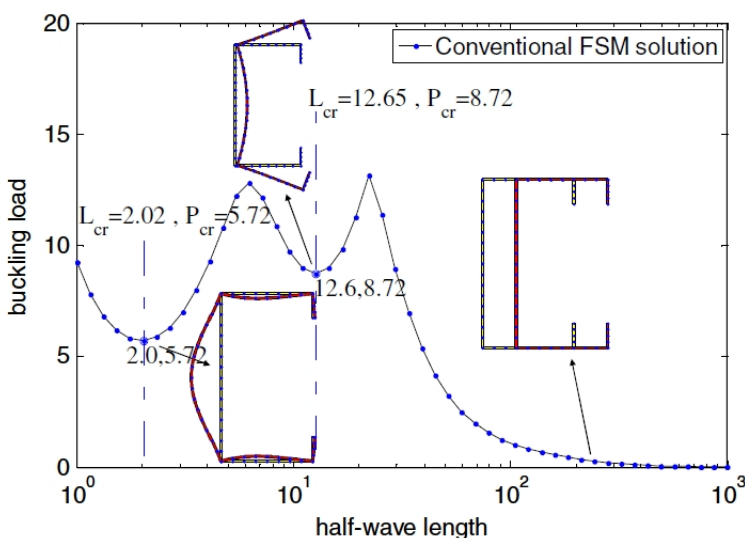


Figura 1.23: - Tipica curva di stabilità ottenuta con FSM

In particolare, la procedura appena descritta è valida per elementi semplicemente appoggiati e liberi di ingobbarsi alle estremità. Ricordando che la stabilità degli elementi cold-formed può essere distinta in tre classi: globale (G), locale (L) o

distorsionale (D), un metodo conveniente per la classificazione delle tipologie di instabilità è rappresentato dallo studio dei valori minimi ottenuti. Tale metodo però non è di generale applicazione in quanto spesso i valori minimi della curva risultante non sono presenti oppure possono essere presenti più valori minimi.

Pertanto per avere una classificazione rigorosa basata su precise definizioni meccaniche si applica la Constrained Finite Strip Analysis (cFSM). Il concetto su cui si basa tale analisi è quello di vincolare opportunamente classi di modi deformativi della sezione, al fine di poter calcolare separatamente i contributi alla curva, delle varie tipologie di buckling G, D, L oppure O (altri modi deformativi) (Fig. 1.24).

Un esempio di applicazione di cFSM è riportato in Fig. 1.25 in cui è presa in esame una sezione a C uniformemente compressa. Dal confronto tra le soluzioni ottenute con il cFSM e il FSM si può osservare che:

- la soluzione legata ai modi locali (L) evidenzia una ottima corrispondenza tra i risultati;
- la soluzione legata ai modi distorsionali (D) ottenuta con il cFSM evidenzia una maggiore rigidità del modello rispetto alla soluzione conventional, mostrando anche una minore flessione dell'anima (Fig. 1.25);
- la soluzione legata ai modi globali (G) tende ad eguagliarsi all'aumentare della lunghezza dell'elemento.

Concludendo, il DSM presenta le seguenti limitazioni:

- non ammette la possibilità di inserire condizioni al contorno complesse, come ad esempio vincoli/ritegni elastici continui lungo la lunghezza della trave o condizioni al contorno arbitrarie;
- non prevede al momento verifiche con casi combinati di sollecitazione (ad esempio compressione-flessione, flessione-taglio);
- è applicabile solo per profili che rispettano determinate forme e limiti geometrici.

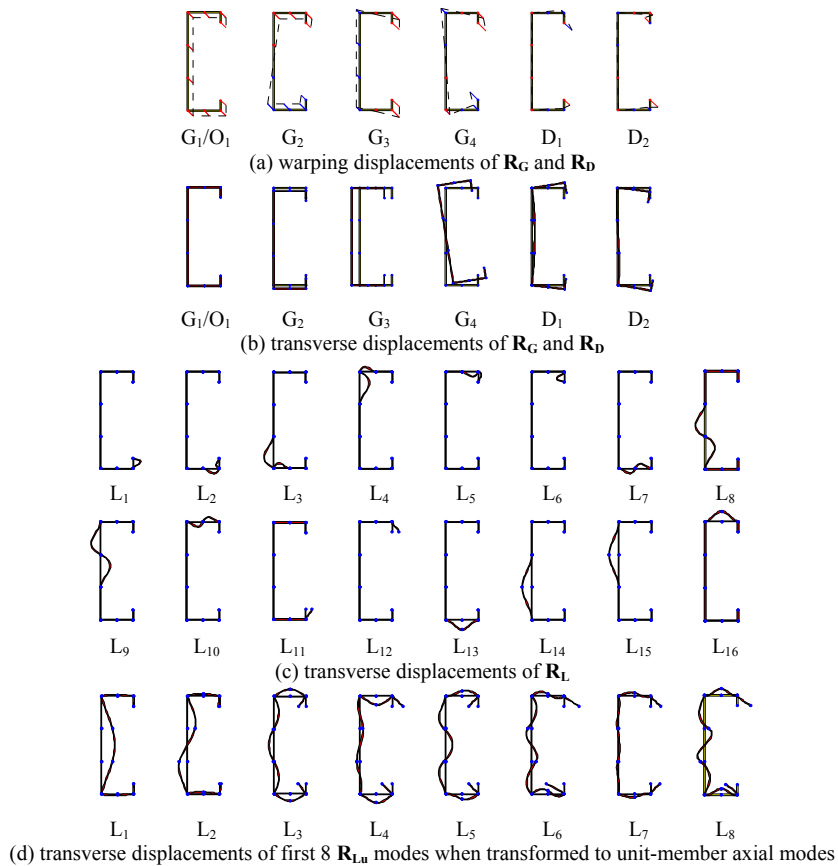


Figura 1.24: - Contributi di buckling

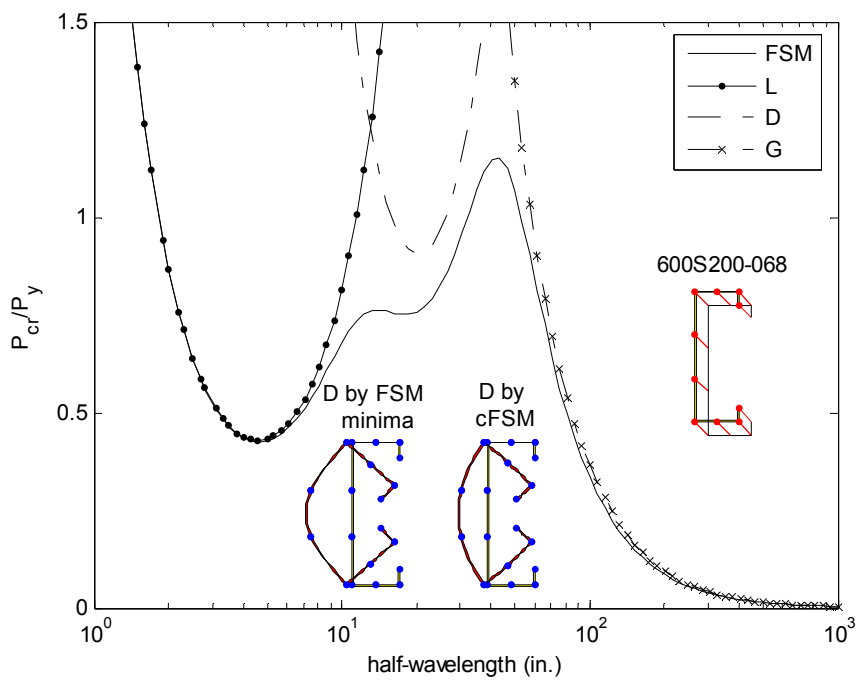


Figura 1.25: - Confronto dei risultati conventional-constrained FSM

## Capitolo 2

# La Generalized Beam Theory

### Abstract

In this chapter, after a quick description of the conventional GBT, a new Generalized Beam Theory formulation is presented which allows taking shear deformability into account.

It is worth remembering the Generalized Beam Theory as originally proposed by Schardt [29][30], assuming Vlasov's hypothesis as valid, neglects shear deformability along the midline of the cross section. Indeed, shear deformability was only introduced afterwards by means of a method similar to that of early proposed by Capurso [25][26], which enriches the kinematics by means of warping functions that are non-linear along the wall length and constant along the wall thickness. Such an approach still carries, however, a series of inconveniences both from the theoretical and the practical standpoints which make it fundamentally impossible to recover some deformation parameters typical of classic beam theories.

In this respect, the new formulation will be presented along with a modified version of the kinematics in which shear deformation is introduced in a novel manner.

Additionally, a procedure to recover the tridimensional stress state is presented. This procedure is based on the indefinite equilibrium equations.

### Sommario

In questo capitolo dopo una rapida descrizione della Generalized Beam Theory convenzionale è presentata una nuova formulazione della GBT in grado di tenere in

conto la deformabilità a taglio della sezione.

Vale la pena ricordare che la Generalized Beam Theory originariamente proposta da Schardt [29][30], assumendo valida l'ipotesi di Vlasov, trascura la deformabilità a taglio lungo la linea media della sezione. Questa infatti è stata introdotta da altri autori solo successivamente impiegando una metodologia simile a quella proposta da Capurso [25][26], che prevede un arricchimento della cinematica mediante funzioni di ingobbamento non lineari lungo le pareti e costanti nello spessore. Tale scelta comporta tuttavia, una serie di inconvenienti, sia da un punto di vista pratico che teorico che si traducono fondamentalmente nell'impossibilità di recuperare alcuni parametri deformativi tipici delle teorie classiche di trave.

Verrà quindi descritta la nuova formulazione e presentata la versione modificata della cinematica in cui la deformabilità tagliante è introdotta in forma originale. Verrà inoltre presentata una procedura di ricostruzione dello stato tensionale tridimensionale ottenuta impiegando le equazioni indefinite di equilibrio.

## 2.1 La Generalized Beam Theory convenzionale

La Generalized Beam Theory, meglio nota in letteratura, con l'acronimo GBT è una teoria di trave con cinematica arricchita che rispetto alla nota teoria di Vlasov, rimuovendo l'ipotesi di sezione rigida nel proprio piano, ammette distorsione di sezione. Tale teoria è stata proposta negli anni 80' da Schardt [29][30].

L'idea base è considerare una trave in parete sottile come un assemblaggio di piastre sottili ed assumere che il campo di spostamento della trave sia descritto come combinazione lineare di predefiniti modi deformativi (noti a priori e definiti sulla sezione trasversale) pesati da funzioni dipendenti solo dalla coordinata d'asse della trave, definite come parametri cinematici o spostamenti generalizzati.

Nella formulazione originariamente proposta da Schardt, la Generalized Beam Theory (GBT), per l' $i$ -esima parete appartenente alla generica sezione trasversale (Fig. 2.1), assume nel riferimento locale  $onsz$  il seguente campo di spostamento:

$$d_n(n, s, z) = \psi(s)\mathbf{v}(z), \quad (2.1)$$

$$d_s(n, s, z) = \left[ \boldsymbol{\mu}(s) - n\overset{\circ}{\psi}(s) \right] \mathbf{v}(z), \quad (2.2)$$

$$d_z(n, s, z) = [\varphi(s) - n\psi(s)] \mathbf{v}'(z), \quad (2.3)$$

dove:

$d_n$  è lo spostamento in direzione ortogonale alla linea media della parete,

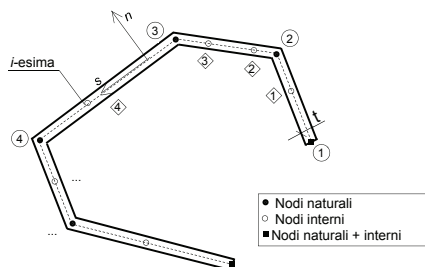


Figura 2.1: Generica sezione trasversale.

$d_s$  è lo spostamento tangente alla stessa,  
 $d_z$  è lo spostamento nella direzione dell'asse della trave,  
 $\psi$ ,  $\mu$  e  $\varphi$  collezionano i modi deformativi (dipendenti solo da  $s$ ),  
 $\mathbf{v}$  è il vettore che raccoglie i parametri cinematici incogniti (dipendenti solo  $z$ ).

Come si farà nel proseguo, nelle equazioni precedenti si è impiegata la seguente notazione:

$$\overset{\circ}{(\ )} = \partial_s, \quad \overset{\times}{(\ )} = \partial_n, \quad (\ )' = \partial_z, \quad (2.4)$$

per indicare rispettivamente la derivata rispetto alla ascissa curvilinea  $s$ , la derivata rispetto a  $n$ , direzione ortogonale alla linea media nel piano della sezione e la derivata rispetto a  $z$ , coordinata della linea d'asse della trave.

Come detto precedentemente quindi, la GBT richiede che siano definiti a priori un certo insieme di modi deformativi per la sezione trasversale. La loro scelta costituisce un punto delicato, in quanto consente di descrivere in maniera più o meno ricca il campo deformativo che la teoria è in grado di cogliere. In particolare, la procedura impiegata per la costruzione di tali modi, definita nella letteratura corrente Cross Section Analysis (CSA), assicura che i modi calcolati siano tra loro ortogonali e quindi non ridondanti. La Cross Section Analysis inizialmente proposta da Schardt, prevede di considerare due classi di modi, distinguendo i cosiddetti modi flessionali fondamentali dai modi flessionali locali. Entrambe trascurano la deformabilità a taglio delle pareti.

Prima di passare alla descrizione di tali classi è necessario chiarire che nel proseguo sulla generica sezione trasversale si definiranno nodi naturali, i vertici cui convergono

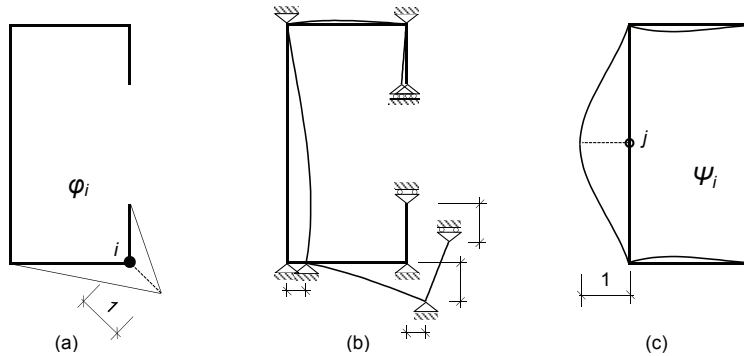


Figura 2.2: Modi flessionali: (a) e (b) fondamentali; (c) locali.

pareti non allineate, mentre per nodi interni si intenderanno i nodi intermedi posti lungo la parete stessa (come mostrato in Fig. 2.1). Per quanto appena detto, la numerosità e la posizione dei nodi naturali è strettamente legata alla sezione trasversale scelta, mentre la numerosità e la posizione dei nodi interni è indipendente da questa.

La procedura di Cross Section Analysis proposta in letteratura definisce ciascun *modo fondamentale flessionale* imponendo in ogni nodo naturale della sezione trasversale uno spostamento fuori piano  $\varphi$  unitario che varia linearmente esclusivamente lungo le pareti che convergono a quel nodo (Fig. 2.2a), e assumendo in perfetto accordo con la teoria di Vlasov, nullo lo scorrimento  $\gamma_{zs}$  lungo la linea media. Tale assunzione consente di determinare le funzioni  $\mu$ , mentre le funzioni  $\psi$  sono ottenute imponendo la compatibilità lungo le pareti, considerate in flessione cilindrica (Fig. 2.2b). Riassumendo quindi, sulla generica sezione trasversale si assumono le seguenti funzioni:

$$\varphi(s) \text{ lineari,} \quad (2.5)$$

$$\mu(s) = -\dot{\varphi}(s) \Rightarrow \text{costanti,} \quad (2.6)$$

$$\psi(s) \text{ cubiche.} \quad (2.7)$$

I modi così ottenuti consentono di recuperare completamente la cinematica della teoria di Vlasov, arricchita di  $N_n - 4$  modi distorsivi, essendo  $N_n$  il numero dei nodi naturali della sezione. Tali modi sono definiti fondamentali, proprio perchè recuperando completamente i modi deformativi tipici di una teoria di trave classica devono essere necessariamente considerati. Tuttavia affinché i modi deformativi



siano facilmente riconoscibili come modi deformativi classici, è necessario effettuare una trasformazione di base delle Eqs. (2.1)-(2.3). Tale trasformazione, definita decomposizione modale, verrà descritta successivamente.

A titolo esemplificativo si mostrano in Fig.2.3 e in Fig.2.4 gli spostamenti nel piano e fuori piano della sezione, corrispondenti ai sei modi flessionali fondamentali di una sezione a C rispettivamente prima e dopo la decomposizione modale. Si può osservare come dopo la decomposizione, i classici modi deformativi di una trave alla Vlasov sono completamente recuperati. In particolare riferendosi agli spostamenti nel piano e fuori piano della sezione si fa notare come:

- il Modo 1 rappresenta lo spostamento assiale;
- il Modi 2 e il Modo 3, le rotazioni rispetto agli assi principali di inerzia;
- il Modo 4, la rotazione torsionale.

I modi 5 e 6 sono invece tipici modi di ordine superiore che prevedono distorsione di sezione.

In modo del tutto analogo, possono essere determinati anche i modi flessionali locali, assumendo in particolare per ogni nodo interno:

$$\varphi(s) = \mu(s) = \mathbf{0}, \quad \psi(s) \text{ cubica a tratti}, \quad (2.8)$$

che vale a dire, assumere spostamenti fuori piano nulli, deformabilità tagliante  $\gamma_{zs}$  nulla e spostamenti lungo la linea media cubici a tratti in direzione ortogonale alla parete.

Più in particolare, tale classe di modi è ottenuta imponendo spostamento unitario nel piano della sezione, in direzione normale alla generica parete in corrispondenza di ciascun nodo interno e imponendo uno spostamento nullo negli altri nodi (interni e naturali, Fig. 2.2c). In analogia a quanto fatto per i modi fondamentali, considerando le pareti in flessione cilindrica, vengono quindi determinate le funzioni  $\psi$ . In Fig. 2.5 e Fig. 2.6 sono riportati a titolo esemplificativo alcuni modi locali prima e dopo la decomposizione. In particolare il modo locale 1 e il modo locale 5 sono ottenuti imponendo uno spostamento ortogonale alla parete sui nodi estremi (che sono nodi particolari in quanto sono considerati sia naturali che interni), mentre i rimanenti sono stati ottenuti aggiungendo un nodo interno sull'anima e sulle ali della sezione. Per quanto detto quindi, appare chiaro che la formulazione originariamente proposta da Schardt, sulla scia della teoria di Vlasov, rappresentandone a tutti gli effetti una naturale estensione, assume l'indeforabilità a taglio delle pareti costituenti la sezione trasversale.

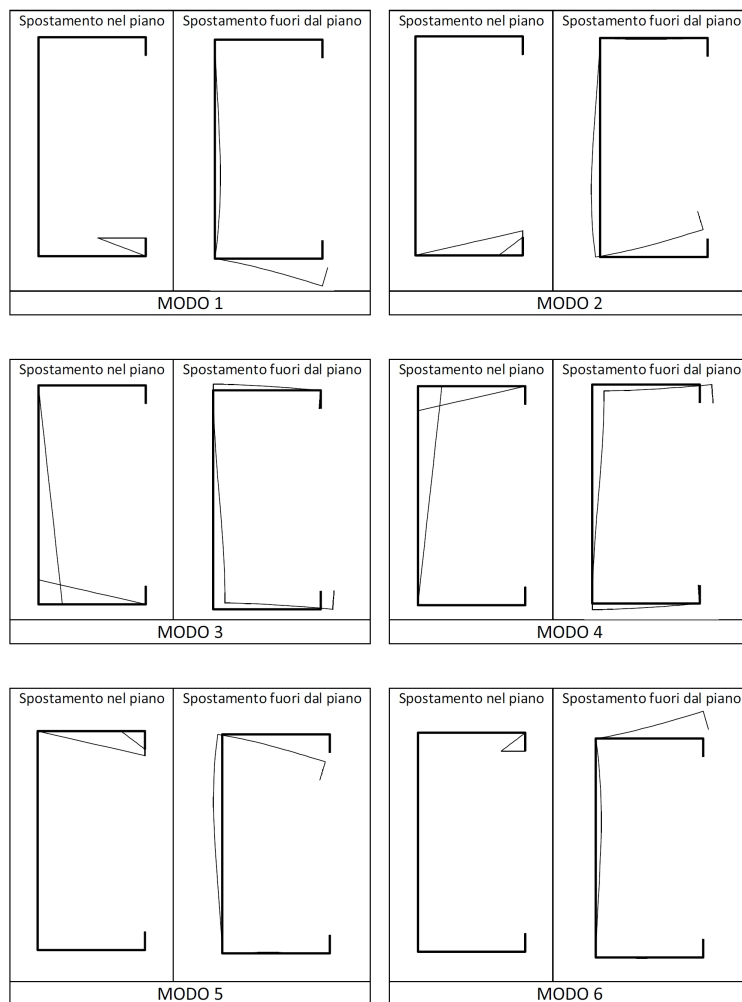


Figura 2.3: Sezione a C: spostamenti nel piano e fuori piano corrispondenti ai sei modi flessionali fondamentali prima della decomposizione modale.

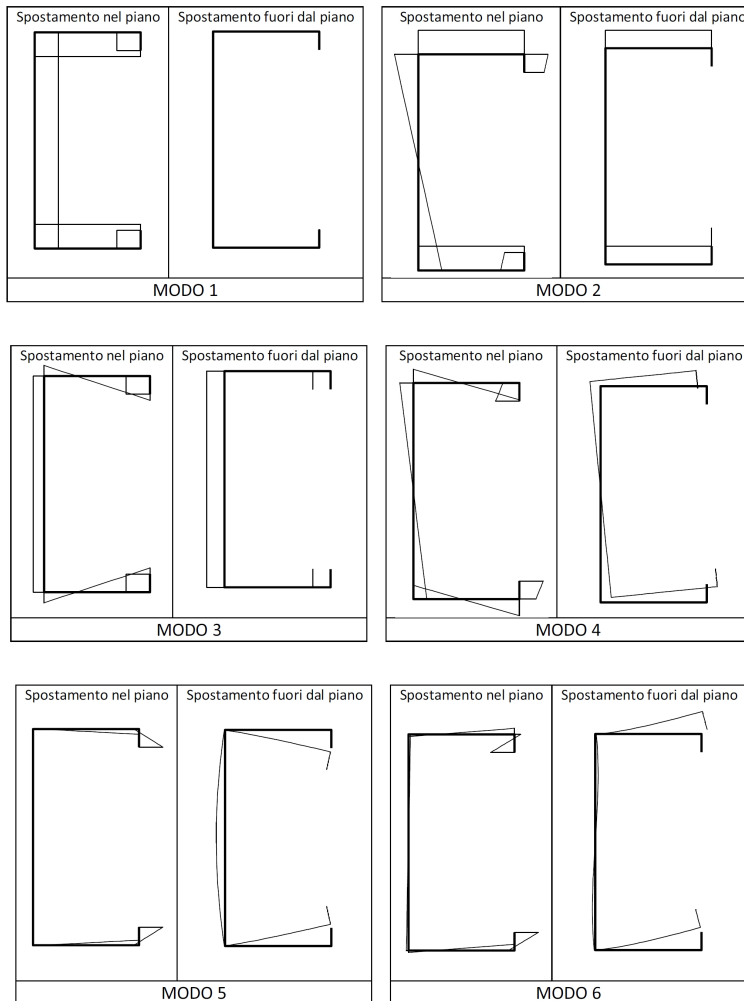


Figura 2.4: Sezione a C: spostamenti nel piano e fuori piano corrispondenti ai sei modi flessionali fondamentali dopo la decomposizione modale.

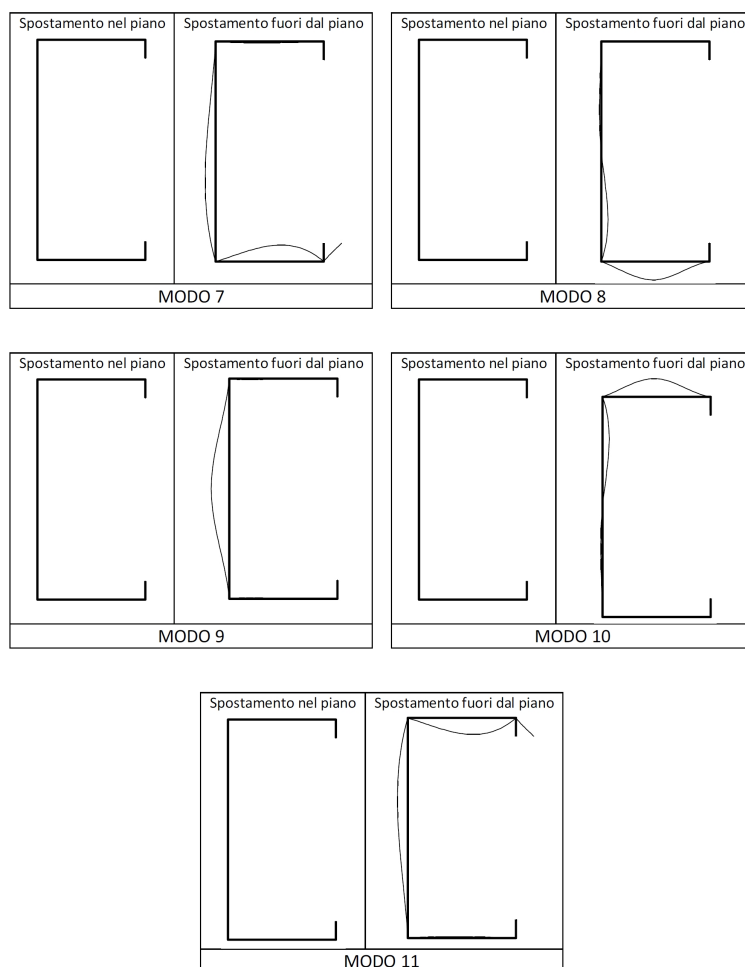


Figura 2.5: Sezione a C: spostamenti nel piano e fuori piano corrispondenti a cinque modi flessionali locali prima della decomposizione modale.

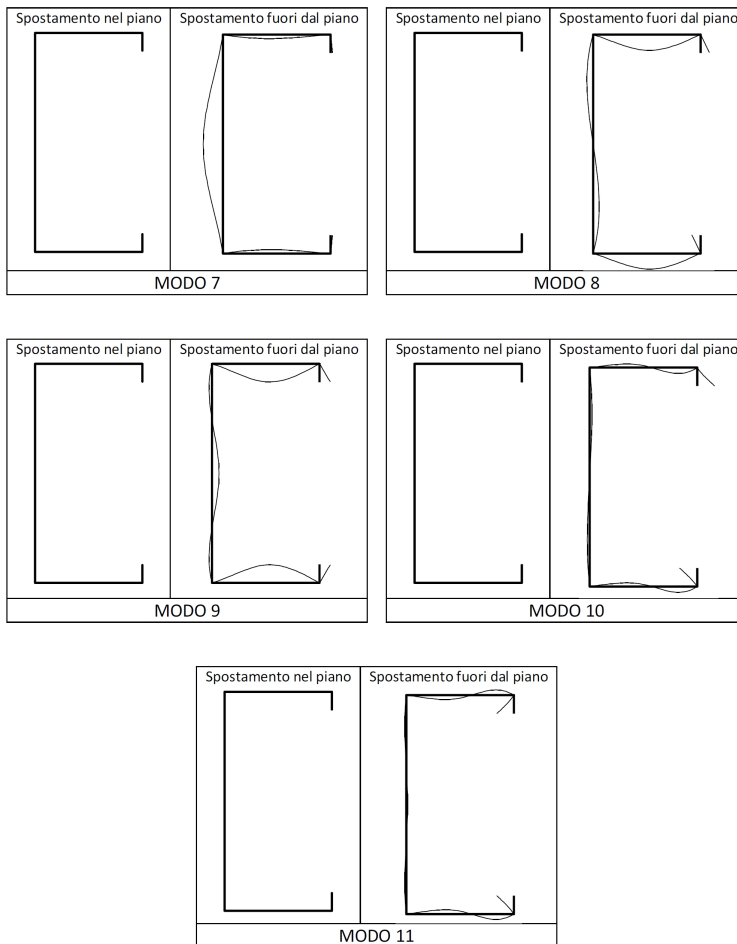


Figura 2.6: Sezione a C: spostamenti nel piano e fuori piano corrispondenti a cinque modi flessionali locali dopo la decomposizione modale.

Furono, infatti, successivamente altri autori, ed in particolare Camotim e Silvestre [51] [49], ad introdurre il concetto di deformabilità tagliante nella teoria GBT, mediante un arricchimento di warping a cui sono associati spostamenti nulli nel piano della sezione. Questa nuova classe di modi deformativi, così introdotta, è stata quindi associata a nuovi parametri cinematici, raccolti nelle Eqs. 2.9-2.11 nel vettore  $\delta$ .

Il campo di spostamento proposto per una trave GBT deformabile a taglio è conseguentemente espresso come di seguito riportato [52]-[55],[50]:

$$d_n(n, s, z) = \psi(s)\mathbf{v}(z), \quad (2.9)$$

$$d_s(n, s, z) = \left[ \boldsymbol{\mu}(s) - n\overset{\circ}{\psi}(s) \right] \mathbf{v}(z), \quad (2.10)$$

$$d_z(n, s, z) = [\boldsymbol{\varphi}(s) - n\psi(s)] \mathbf{v}'(z) + \boldsymbol{\varphi}_s(s)\boldsymbol{\delta}(z). \quad (2.11)$$

Dal confronto con le Eqs. 2.1-2.3 si rileva l'aggiunta dei termini  $\boldsymbol{\varphi}_s(s)\boldsymbol{\delta}(z)$  nell'espressione dello spostamento  $d_z$ . Come mostrato in [55], a partire dalla cinematica sopra riportata, la classe di modi con deformabilità taglio viene introdotta assumendo:

$$\boldsymbol{\varphi}(s) = \psi(s) = \boldsymbol{\mu}(s) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\varphi}_s(s) \neq \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Si osservi come i modi deformativi associati alle funzioni  $\boldsymbol{\varphi}_s$ , introducano una variazione non lineare dello spostamento di warping lungo la linea media della sezione, ma assumano, che tale spostamento sia costante lungo lo spessore della parete stessa. Oltretutto può essere utile rilevare che tale scelta, risulta formalmente analoga a quanto proposto da Capurso in [25] e [26].

Tali modi deformativi, rilassando le ipotesi di Vlasov, ammettono quindi uno scorrimento  $\gamma_{zs}$  diverso da zero lungo la linea media della sezione. Al contrario assumere costante lo spostamento di warping lungo lo spessore della parete implica che la componente di scorrimento  $\gamma_{zn}$ , tra la direzione dell'asse della trave e quella normale alla linea media continua ad essere nulla.

Tale scelta comporta però una serie di inconvenienti sia da un punto di vista pratico che teorico. In primo luogo infatti ciò richiede che sia impiegata una procedura di decomposizione modale *ad hoc* per i modi a taglio differente da quella impiegata per i modi flessionali.

Altro aspetto non trascurabile è relativo al fatto che ad ogni modo con deformabilità tagliante sono associati due parametri deformativi [51], mentre, riguardo alle teorie di trave, ne sarebbe atteso uno soltanto. Oltre a quanto detto, la teoria

classica di trave deformabile a taglio non è esattamente recuperata. Dopo la decomposizione modale, infatti, non sono chiaramente identificabili le componenti deformative tipiche di una trave, in quanto per esempio, la componente flessionale non è chiaramente distinguibile dalla deflessione dovuta alla deformabilità tagliante e di conseguenza quindi, la rotazione non emerge quale parametro cinematico del modello. Con l'obiettivo di chiarire e fissare quest'ultimo aspetto, in Fig. 2.7 sono

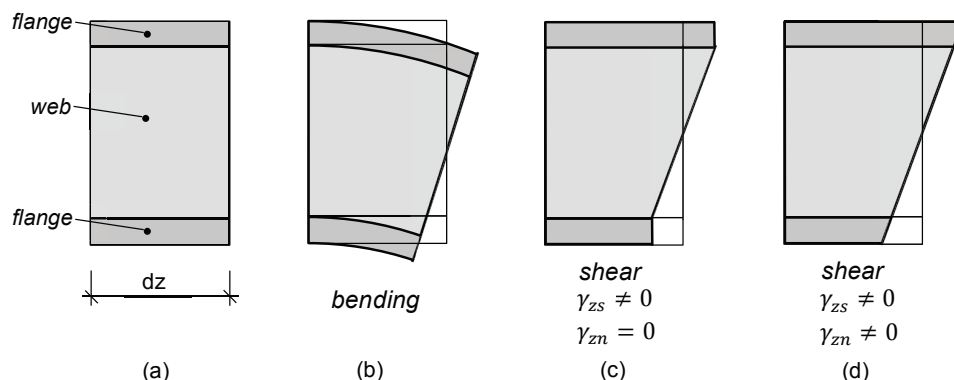


Figura 2.7: Schema delle principali differenze tra la classica trave GBT deformabile a taglio e la nuova formulazione proposta: (a) concio di trave indeformato, (b) concio di trave inflesso, (c) corrispondente componente tagliante nella GBT classica, (d) corrispondente componente tagliante per una trave alla Timoshenko e per la formulazione proposta.

riportate e confrontate le componenti deformative flessionali e taglianti di un concio elementare di trave, relative alla GBT deformabile a taglio e alla teoria di trave alla Timoshenko. Nel dettaglio, in Fig. 2.7.a è rappresentato il generico concio infinitesimo di trave e in 2.7.b la componente deformativa flessionale. Vengono quindi riportate le corrispondenti componenti deformative taglianti, relative alla GBT classica (Fig. 2.7.c) ed alla trave di Timoshenko (Fig.2.7.d). Si può osservare come lo scorrimento  $\gamma_{zn}$  nullo nella GBT classica deformabile a taglio non sia perfettamente coerente con la componente flessionale associata.

Con l'obiettivo di risolvere tali incongruenze, si è giunti a formulare una versione modificata della cinematica, in cui la deformabilità tagliante è introdotta in una forma diversa ed originale.

## 2.2 Cinematica proposta

Considerando la  $i$ -esima parete (Fig. 2.1) si assume nel sistema di riferimento locale, il seguente campo di spostamento:

$$d_n(n, s, z) = \psi(s)\mathbf{v}(z), \quad (2.13)$$

$$d_s(n, s, z) = \xi(s, n)\mathbf{v}(z), \quad (2.14)$$

$$d_z(n, s, z) = \omega(s, n)\mathbf{w}(z). \quad (2.15)$$

La cinematica sopra riportata è ottenuta a partire dalla cinematica classica (Eqs. 2.9-2.11), in cui, con l'obiettivo di disporre di una riscrittura sintetica, sono state fatte le seguenti posizioni:

$$\xi(n, s) = \mu(s) - n\dot{\psi}(s) \quad (2.16)$$

$$\omega(n, s) = \varphi(s) - n\psi(s) \quad (2.17)$$

Si noti che lo spostamento in direzione assiale non dipende dalla derivata di  $\mathbf{v}$ , ma da parametri indipendenti, indicati con  $\mathbf{w}$ .

Definiti il vettore spostamento  $\mathbf{d} = [d_n, d_s, d_z]^T$  e il vettore degli spostamenti generalizzati  $\mathbf{u} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]^T$ , le 2.13-2.15 assumono la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} d_n \\ d_s \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(s) & \mathbf{0} \\ \xi(s, n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega(s, n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

che in forma compatta risulta:

$$\mathbf{d}(n, s, z) = \mathbf{U}(s, n)\mathbf{u}(z). \quad (2.19)$$

Dal confronto con quanto visto nel paragrafo 2.1, si può però osservare come i parametri cinematici incogniti  $\mathbf{v}$  e  $\delta$  che comparivano nella definizione dello spostamento lungo l'asse longitudinale  $z$ , nella formulazione qui proposta, siano stati condensati in un unico parametro  $\mathbf{w}$ . In particolare, da un confronto tra le 2.9-2.11 e 2.13-2.15 si fa osservare come ponendo  $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \delta$  è possibile ricondursi agevolmente alla cinematica con deformabilità a taglio convenzionale, a meno che si trascuri un contributo  $-n\psi$  associato ai parametri  $\delta$ . Tale contributo, introduce una variabilità dello spostamento trasversale lungo  $n$ , che equivale ad assumere lo spostamento di warping non costante lungo lo spessore della parete.



## 2.3 Deformazioni generalizzate

Le deformazioni calcolate attraverso l'operatore di compatibilità a partire dalle Eqs.(2.13)-(2.15) sono riportate di seguito:

$$\varepsilon_{ss} = \overset{\circ}{\xi}(s, n)\mathbf{v}(z), \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = \omega(s, n)\mathbf{w}'(z), \quad (2.21)$$

$$\gamma_{zs} = \overset{\circ}{\omega}(s, n)\mathbf{w}(z) + \xi(s, n)\mathbf{v}'(z), \quad (2.22)$$

$$\gamma_{zn} = \overset{x}{\omega}(s, n)\mathbf{w}(z) + \psi(s)\mathbf{v}'(z), \quad (2.23)$$

e

$$\varepsilon_{nn} = 0, \quad \gamma_{sn} = 0. \quad (2.24)$$

Si fa notare come rispetto alla GBT convenzionale, lo scorrimento  $\gamma_{zn}$  sia diverso da zero. Raccolti i parametri deformativi generalizzati nel vettore  $\mathbf{e} = [\alpha \ \chi \ \beta \ \gamma]^T$  le rispettive componenti sono espresse come di seguito:

$$\alpha = \mathbf{v}, \quad (2.25)$$

$$\chi = \mathbf{w}', \quad (2.26)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{v}' + \mathbf{w}), \quad (2.27)$$

$$\gamma = \mathbf{v}' - \mathbf{w}. \quad (2.28)$$

In forma matriciale le stesse componenti possono essere espresse nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \chi \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial_z \\ \frac{\partial_z}{2} & \frac{1}{2} \\ \partial_z & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ed in forma compatta si può scrivere:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.30)$$

Si precisa che nel vettore  $\mathbf{e}$  compaiono anche i modi rigidi della sezione. Questo non implica che alcune componenti del vettore siano nulle, ma che il vettore  $\mathbf{e}$  non sia propriamente una misura di deformazione.

Andando quindi a sostituire le relazioni 2.25-2.28 in 2.20-2.23, le deformazioni scritte in forma matriciale, risultano:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{zs} \\ \gamma_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2n\overset{\circ}{\psi} + \overset{\circ}{\varphi} + \mu & \frac{1}{2}(\mu - \overset{\circ}{\varphi}) \\ 0 & 0 & 0 & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \chi \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Assumendo  $\boldsymbol{\varepsilon} = [ \varepsilon_{ss} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{zs} \quad \gamma_{zn} ]^T$  le Eq. 2.31 possono essere scritte in formato compatto come:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n, s, z) = \mathbf{E}(s, n)\mathbf{e}(z) \quad (2.32)$$

Tali deformazioni, possono essere distinte in una parte *membranale* indicata con apice ( $M$ ) che è funzione solo di  $s$  ovvero dell'ascissa curvilinea lungo la linea media della sezione ed in una parte *flessionale* indicata con apice ( $B$ ) dipendente da  $s$  e proporzionale ad  $n$ , direzione normale alla parete. Secondo tale posizione risulta quindi:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n, s, z) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(M)}(s, z) + \boldsymbol{\varepsilon}^{(B)}(n, s, z), \quad (2.33)$$

con:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(M)}(s, z) &= \mathbf{E}^{(M)}(s)\mathbf{e}(z), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(B)}(n, s, z) &= n\mathbf{E}^{(B)}(s)\mathbf{e}(z). \end{aligned}$$

Gli operatori  $\mathbf{E}$  sono stati definiti come di seguito riportato:

$$\mathbf{E}^{(M)} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{\varphi} + \mu & \frac{1}{2}(\mu - \overset{\circ}{\varphi}) \\ 0 & 0 & 0 & \psi \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{E}^{(B)} = \begin{bmatrix} -\overset{\circ\circ}{\psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\overset{\circ}{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

### 2.3.1 Alcune osservazioni

La cinematica proposta assume i seguenti vincoli interni:

$$\nabla_n \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad (2.36)$$

$$\nabla_n \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_s + \nabla_s \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_n = 0, \quad (2.37)$$

$$\nabla_n^2 \mathbf{d} = 0, \quad (2.38)$$

$$\partial_n (\nabla_n \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z + \nabla_z \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_n) = 0. \quad (2.39)$$

In particolare:

- la 2.36 assicura che non siano ammissibili dilatazioni lungo lo spessore della parete ( $\overset{\times}{d}_n = 0, \epsilon_{nn} = 0$ ),
- la 2.37 che lo scorrimento tra le direzione  $n$  ed  $s$  non sia consentito ( $\overset{\circ}{d}_n + \overset{\times}{d}_s = 0, \gamma_{ns} = 0$ ),
- la 2.38 assume uno spostamento lineare in direzione  $n$ ,
- la 2.39 impone che lo scorrimento  $\gamma_{zn}$  sia al più lineare lungo  $n$  ( $\overset{\times\times}{d}_z + \overset{\times}{d}'_n = 0, \gamma'_{zn} = 0$ ).

In ragione di tali condizioni di vincolo, si anticipa che per via elasto-cinematica, sarà possibile ottenere solo alcune componenti del campo tensionale tridimensionale, ed in particolare solo la parte "attiva" dello stesso. Si mostrerà nei capitoli successivi, come per recuperare completamente e correttamente tutte le componenti di tensione sia necessario ricorrere ad una procedura di ricostruzione dello stato tensionale tridimensionale basata sull'utilizzo delle equazioni indefinite di equilibrio.

## 2.4 Forze e sforzi generalizzati

I carichi di volume applicati sulla  $i$ -esima parete possono essere definiti nel sistema di riferimento  $onsz$  come:

$$\mathbf{b} = [ b_n, b_s, b_z ]^T. \quad (2.40)$$

Scrivendo il contributo al lavoro virtuale esterno per unità di lunghezza della trave dei soli carichi di volume (indicato con l'apice  $b$ ) come:

$$W_e^{(b)} = \int_A \mathbf{b}^T \mathbf{d} \, dA = \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{(b)}, \quad (2.41)$$

si ottiene:

$$\mathbf{f}^{(b)} = \int_A \mathbf{U}^T \mathbf{b} \, dA. \quad (2.42)$$

Il vettore  $\mathbf{f}^{(b)} = [\mathbf{f}_v^{(b)}, \mathbf{f}_w^{(b)}]^T$  rappresenta il vettore delle forze generalizzate equivalenti ai carichi di volume, e le rispettive componenti assumono la forma seguente:

$$\mathbf{f}_v^{(b)} = - \int_A (\boldsymbol{\psi}^T b_n + \boldsymbol{\xi}^T b_s) \, dA \quad (2.43)$$

$$= - \int_A (\boldsymbol{\mu}^T b_s + \boldsymbol{\psi}^T b_n) \, dA - \int_A n \boldsymbol{\psi}^{\circ T} b_s \, dA, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{f}_w^{(b)} = \int_A \boldsymbol{\omega}^T b_z \, dA. \quad (2.45)$$

Andando quindi a definire le risultanti lungo lo spessore:

$$q_z = \int_t b_z \, dn, \quad q_s = \int_t b_s \, dn, \quad q_n = \int_t b_n \, dn, \quad (2.46)$$

$$m_z = - \int_t n b_z \, dn, \quad m_s = \int_t n b_s \, dn, \quad (2.47)$$

il cui significato fisico è mostrato in Fig. 2.8, le componenti del vettore  $\mathbf{f}^{(b)}$  possono essere espresse nella forma seguente:

$$\mathbf{f}_v^{(b)} = \int_l (\boldsymbol{\mu}^T q_s + \boldsymbol{\psi}^T q_n) \, ds - \int_l \boldsymbol{\psi}^{\circ T} m_s \, ds, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{f}_w^{(b)} = \int_l \boldsymbol{\varphi}^T q_z \, ds + \int_l \boldsymbol{\psi}^T m_z \, ds, \quad (2.49)$$

dove  $l$  indica lo sviluppo della linea media.

Analogamente a quanto fatto in precedenza, definito il vettore dei carichi di superficie agenti sulle pareti come di seguito riportato:

$$\mathbf{p} = [p_n, p_s, p_z]^T, \quad (2.50)$$

si scrive il contributo al lavoro esterno per unità di lunghezza della trave relativo alle forze di superficie (indicato con l'apice  $p$ ) come:

$$W_e^{(p)} = \int_l (\mathbf{d}^T |_{n=t/2} \mathbf{p}^{(+)} + \mathbf{d}^T |_{n=-t/2} \mathbf{p}^{(-)}) \, ds. \quad (2.51)$$

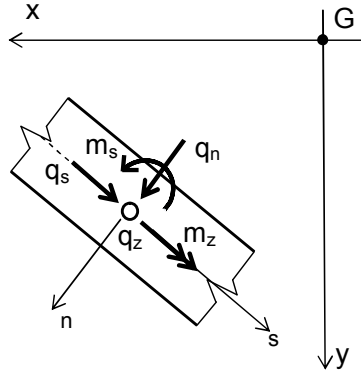


Figura 2.8: Carichi risultanti lungo lo spessore.

In particolare nella Eq. 2.51, così come mostrato in Fig. 2.9, si è indicato con  $\mathbf{p}^{(+)}$  il vettore dei carichi agente sulla superficie con  $n$  positiva e analogamente con  $\mathbf{p}^{(-)}$  il vettore dei carichi agente sulla superficie opposta.

Le componenti del vettore delle forze generalizzate dovuto alle forze di superficie possono quindi essere espresse come:

$$\mathbf{f}_v^{(p)} = - \int_l \left[ \boldsymbol{\mu}^T \left( \frac{p_s^{(+)} - p_s^{(-)}}{2} \right) + \boldsymbol{\psi}^T \left( \frac{p_n^{(+)} - p_n^{(-)}}{2} \right) \right] ds - \int_l \boldsymbol{\psi}^T \left( \frac{p_s^{(+)} - p_s^{(-)}}{2} \right) t ds \quad (2.52)$$

$$\mathbf{f}_w^{(p)} = \int_l \boldsymbol{\varphi}^T (p_z^{(+)} + p_z^{(-)}) ds + \int_l \boldsymbol{\psi}^T \left( \frac{p_z^{(+)} - p_z^{(-)}}{2} \right) t ds. \quad (2.53)$$

I vettori delle forze generalizzate compressive, dovuti ai carichi di volume e alle forze di superficie, risultano quindi essere espressi come mostrato nelle relazioni seguenti:

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{f}_v^{(b)} + \mathbf{f}_v^{(p)}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{f}_w = \mathbf{f}_w^{(b)} + \mathbf{f}_w^{(p)}. \quad (2.55)$$

Introducendo il vettore  $\boldsymbol{\sigma} = [ \sigma_{ss} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{zs} \quad \tau_{zn} ]^T$ , gli sforzi generalizzati  $s$  posso essere definiti mediante il principio di equivalenza dei lavori virtuali:

$$W_i = \int_A \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dA = \mathbf{s}^T \mathbf{e}, \quad (2.56)$$

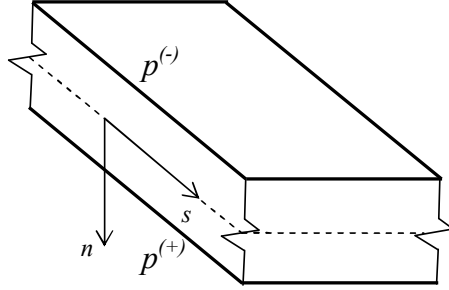


Figura 2.9: Forze di superficie

da cui:

$$\mathbf{s} = \int_A \mathbf{E}^T \boldsymbol{\sigma} dA. \quad (2.57)$$

Le componenti del vettore degli sforzi generalizzati possono quindi essere scritte come di seguito riportato:

$$\mathbf{S} = \int_A \overset{\circ}{\xi} \sigma_{ss} dA, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{M} = \int_A \boldsymbol{\omega} \sigma_{zz} dA, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{T} = \int_A (-2n\overset{\circ}{\psi} + \overset{\circ}{\varphi} + \boldsymbol{\mu}) \tau_{zs} dA, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{V} = \int_A -\frac{1}{2} (\overset{\circ}{\varphi} + \boldsymbol{\mu}) \tau_{zs} + \psi \tau_{zn} dA. \quad (2.61)$$

avendo fatto la seguente posizione:  $\mathbf{s} = [ \mathbf{S} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{T} \quad \mathbf{V} ]^T$ .

## 2.5 Equazioni di equilibrio

Invocando il principio dei lavori virtuali, si ottengono le equazioni indefinite di equilibrio che possono essere scritte in forma compatta come:

$$\mathbf{D}^* \mathbf{s} = \mathbf{f}. \quad (2.62)$$

L'operatore di equilibrio  $\mathbf{D}^*$ , aggiunto formale dell'operatore di compatibilità, è definito come:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial_z}{2} & -\partial_z \\ 0 & -\partial_z & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Andando quindi a sostituire le componenti dei vettori  $\mathbf{s}$  ed  $\mathbf{f}$  nella 2.62, le equazioni indefinite di equilibrio assumono la forma seguente:

$$\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{T}' - \mathbf{V}' - \mathbf{f}_v = \mathbf{0}, \quad (2.64)$$

$$-\mathbf{M}' + \frac{1}{2}\mathbf{T} - \mathbf{V} - \mathbf{f}_w = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Le equazioni al bordo che derivano dal principio dei lavori virtuali sono le seguenti:

$$\mathbf{M} = \pm \bar{\mathbf{W}} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}}, \quad (2.66)$$

$$\frac{\mathbf{T}}{2} + \mathbf{V} = \pm \bar{\mathbf{Q}} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}. \quad (2.67)$$

In particolare, nelle equazioni al contorno sopra riportate sono state fatte le seguenti posizioni:

$$\bar{\mathbf{W}} = \int_A \omega t_z dA, \quad (2.68)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \int_A (\psi t_n - \dot{\varphi} t_s) dA - \int_A n \psi t_s dA, \quad (2.69)$$

in cui si sono indicate con  $t_s$ ,  $t_n$  e  $t_z$  le forze di superficie applicate alle basi di estremità della trave, rispettivamente in direzione  $s$ ,  $n$  e  $z$ .

Facendo la posizione  $\mathbf{C} = \frac{\mathbf{T}}{2} + \mathbf{V}$ , le equazioni di equilibrio al bordo possono essere riscritte nella seguente forma:

$$\mathbf{S} - \mathbf{C}' - \mathbf{f}_v = \mathbf{0}, \quad (2.70)$$

$$-\mathbf{M}' + \mathbf{T} - \mathbf{C} - \mathbf{f}_w = \mathbf{0}. \quad (2.71)$$

Si mostrerà nel capitolo successivo, dedicato al recupero delle teorie classiche di trave, che la posizione 2.5, consentirà di riconoscere in una componente del vettore  $\mathbf{C}$  il momento torcente totale.

## 2.6 Equazioni costitutive

Il comportamento del materiale è assunto elastico lineare e governato dall'equazione costitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.72)$$

dove  $\mathbb{C}$  è la matrice di elasticità.

Poichè i modelli di trave si basano su una cinematica internamente vincolata, anche il modello di trave GBT tende ad essere troppo rigido. Analogamente a come si procede in letteratura, agendo sulle equazioni costitutive del modello, si introducono differenti assunzioni per le componenti di sforzo membranale (indicato con l'apice  $M$ ) e flessionale (indicato con l'apice  $B$ ). In particolare l' Eq. 2.72 può essere riscritta come di seguito:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{(M)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(M)} + \mathbb{C}^{(B)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(B)}. \quad (2.73)$$

in cui, posto  $\bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)}$  si è assunto:

$$\mathbb{C}^{(M)} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad \mathbb{C}^{(B)} = \begin{bmatrix} \bar{E} & \nu\bar{E} & 0 & 0 \\ \nu\bar{E} & \bar{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Si osservi che per descrivere il comportamento membranale si è considerato un legame monoassiale tipico delle teorie di trave, mentre per descrivere il comportamento flessionale, analogamente a quanto si fa nelle teorie delle piastre, si è assunto un legame di tipo biassiale.

La matrice di rigidità  $\mathbf{C}$  della sezione, può essere quindi ottenuta attraverso il principio dei lavori virtuali scritto nella seguente forma:

$$\int_A [\boldsymbol{\varepsilon}^{(M)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(B)}]^\text{T} [\mathbb{C}^{(M)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(M)} + \mathbb{C}^{(B)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(B)}] dA = \mathbf{e}^\text{T}\mathbf{C}\mathbf{e}. \quad (2.75)$$

Dalla relazione 2.75 si ottiene:

$$\mathbf{C} = \int_A \mathbf{E}^\text{T}\mathbb{C}\mathbf{E} dA \quad (2.76)$$

$$= \int_A (\mathbf{E}^{(M)\text{T}}\mathbb{C}^{(M)}\mathbf{E}^{(M)} + n^2\mathbf{E}^{(B)\text{T}}\mathbb{C}^{(B)}\mathbf{E}^{(B)}) dA. \quad (2.77)$$

I termini misti di accoppiamento tra comportamento membranale e flessionale sono stati omessi in quanto sono nulli nel caso di materiale isotropo, o più in generale nel



caso in cui la sezione considerata presenti una simmetria in termini di caratteristiche meccaniche rispetto alla linea media.

Di seguito è infine riportata la topologia della matrice di legame del modello

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S & \mathbf{C}_{SM} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{SM}^T & \mathbf{C}_M & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_T & \mathbf{C}_{TV} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{TV}^T & \mathbf{C}_V \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Questa è stata espressa come una matrice a blocchi le cui componenti possono essere ottenute mediante le seguenti relazioni:

$$\mathbf{C}_S = E \int_A (n^2 \overset{\circ}{\psi} \overset{\circ}{\psi}^T + \overset{\circ}{\boldsymbol{\mu}} \overset{\circ}{\boldsymbol{\mu}}^T) dA, \quad (2.79)$$

$$\mathbf{C}_{SM} = \nu \bar{E} \int_A n^2 \overset{\circ}{\psi} \psi dA, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{C}_M = E \int_A \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\boldsymbol{\omega}} dA = \int_A (\bar{E} n^2 \psi^T \psi + E \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi}) dA, \quad (2.81)$$

$$\mathbf{C}_T = 4G \int_A n^2 \overset{\circ}{\psi} \overset{\circ}{\psi}^T dA + G \int_A (\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\mu})^T (\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\mu}) dA, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{C}_V = G \int_A \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi} dA + \frac{G}{4} \int_A (\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\mu})^T (\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\mu}) dA, \quad (2.83)$$

$$\mathbf{C}_{TV} = G \int_A (\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\mu})^T (\overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\mu}) dA. \quad (2.84)$$

Nella relazione 2.81 si è fatta la seguente posizione:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varphi} - n \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} \boldsymbol{\psi}. \quad (2.85)$$

## 2.7 Modi flesso-taglienti

In questo paragrafo è proposta una classe di modi definiti di seguito flesso-tagliante in grado di considerare i modi deformativi flessionali classici in presenza di deformabilità a taglio delle pareti che compongono la sezione trasversale.

A differenza di quanto visto nel paragrafo 2.1, in cui la deformabilità a taglio viene introdotta nella GBT classica mediante l'arricchimento dell'analisi della sezione di una nuova classe di modi, viene quindi qui proposto l'impiego di un'unica classe di

modi, in grado di descrivere in maniera equivalente alla GBT classica, le classi dei modi deformativi flessionali e taglianti.

Analogamente a quanto visto precedentemente, per comodità espositiva può essere utile distinguere:

- modi flesso-taglianti fondamentali;
- modi flesso-taglianti locali.

Ribadendo, che tali modi prevedono anche componenti deformative tipo scorrimento, di seguito sono riportate le condizioni di vincolo con cui vengono costruiti. In particolare tali classi sono ottenute imponendo le seguenti condizioni:

$$\epsilon_{ss} = 0, \quad (2.86)$$

$$\overset{\circ}{\gamma}_{zs} = 0. \quad (2.87)$$

In particolare la 2.86 assicura che non siano ammissibili dilatazioni delle pareti nella direzione della linea media, mentre l'Eq. 2.87 assicura che lo scorrimento, tra le direzioni  $s$  e  $z$ , sia al più costante e quindi conseguentemente gli spostamenti di warping risultino al più lineari.

Vale la pena sottolineare che la procedura impiegata per la costruzione dei modi (CSA) è analoga a quanto proposto in letteratura, ma la nuova cinematica considerando i modi flessionali e locali deformabili a taglio consente di rilassare alcune posizioni.

Di seguito, verranno meglio descritte le principali assunzioni relative alla scelta dei modi deformativi considerati.

Il  $k$ -esimo modo flesso-tagliante fondamentale è ottenuto assumendo la funzione  $\varphi$  lineare a tratti: in particolare le funzioni  $\varphi_k$  sono assunte lineari, con valore unitario nel  $k$ -esimo nodo naturale e nullo negli altri. Per questa classe di modi, i nodi interni sono completamente ignorati.

Come mostrato in Fig. 2.10a la funzione  $\varphi_k$  è non nulla esclusivamente sulle pareti convergenti al nodo  $k$  ed in particolare tali funzioni sono assunte come di seguito riportato:

$$\varphi_k(s) = \frac{s}{l_{k-1}} \quad \text{parete } k-1, \quad (2.88)$$

$$\varphi_k(s) = 1 - \frac{s}{l_k} \quad \text{parete } k, \quad (2.89)$$

$$\varphi_j(s) = 0 \quad \text{altre pareti.} \quad (2.90)$$

Con  $l_k$  si è indicata la lunghezza della  $k$ -esima parete.

Al fine di assicurare rispettata la condizione 2.87, la funzione  $\mu$  può essere al più costante ed in particolare, come nella GBT classica, viene assunta:

$$\mu = -\dot{\varphi}. \quad (2.91)$$

A partire quindi dalle 2.88-2.90, si ottengono le funzioni  $\mu$  sulla  $k$ -esima parete nella forma seguente:

$$\mu_k = -\frac{1}{l_{k-1}} \quad \text{parete } k-1, \quad (2.92)$$

$$\mu_k = \frac{1}{l_k} \quad \text{parete } k, \quad (2.93)$$

$$\mu_k = 0 \quad \text{altre pareti}. \quad (2.94)$$

Nota la funzione  $\mu$ , come mostrato in Fig. 2.10.b, gli spostamenti dei nodi naturali nel piano della sezione sono definiti a meno della sola componente trasversale dei nodi di estremità che risulta per il momento indeterminata.

Assunte le funzioni  $\mu$  e  $\varphi$  come precedentemente mostrato, la funzione  $\psi$  è ottenuta imponendo equilibrio e congruenza in condizioni di flessione cilindrica per ciascuna parete.

Praticamente la funzione  $\psi$  può essere determinata, risolvendo, con una procedura standard agli elementi finiti, il telaio piano, opportunamente vincolato, composto dalle pareti della sezione trasversale a cui sono applicati componenti di spostamento in corrispondenza dei nodi naturali della sezione, secondo l'andamento delle funzioni  $\mu$ .

I modi flesso-taglianti locali sono propriamente detti, in quanto sono modi che colgono fenomeni flessionali locali sulle pareti della sezione.

Sono ottenuti in maniera completamente analoga a quanto mostrato nel paragrafo 2.1. Si ricorda che tali modi, associati ai nodi interni della sezione e anche ai due nodi naturali di estremità, sono ottenuti come mostrato in Fig. 2.2, imponendo uno spostamento unitario ortogonale alla parete nel  $j$ -esimo nodo interno e spostamenti nulli negli altri nodi naturali e interni della sezione. Le funzioni  $\mu$  e  $\varphi$  sono assunte nulle.

In analogia ai modi fondamentali, le funzioni  $\psi(s)$  sono ottenute risolvendo il telaio, rappresentato dalla sezione trasversale della sezione, a cui sono imposti gli spostamenti precedentemente descritti.

Conseguentemente, quindi, alle assunzioni fatte sulle funzioni  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\mu$  le componenti di deformazione dovute ai modi flesso-taglianti ottenute dalle Eqs. 2.31 si

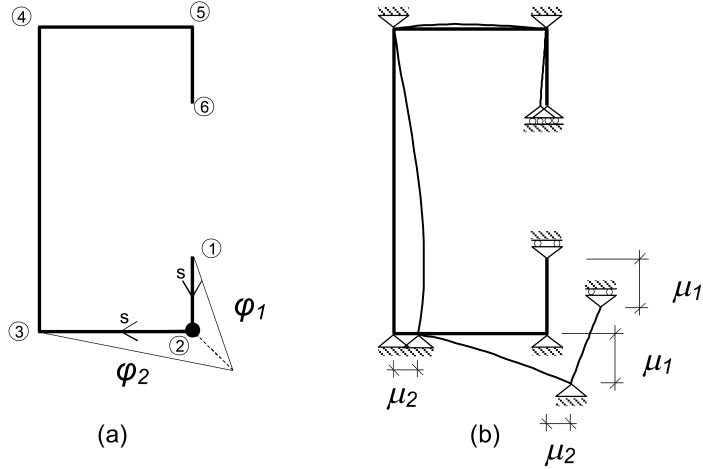


Figura 2.10: Modi flesso-taglianti.

riducono alla forma di seguito riportata:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{zs} \\ \gamma_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n\overset{\circ\circ}{\psi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n2\overset{\circ}{\psi} & -\overset{\circ}{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \chi \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Andando a sostituire la 2.95 in 2.58-2.61, si ottengono gli sforzi generalizzati che assumono per la classe dei modi in esame la seguente forma:

$$\mathbf{S} = - \int_A n\overset{\circ\circ}{\psi} \sigma_{ss} dA, \quad (2.96)$$

$$\mathbf{M} = \int_A \omega^T \sigma_{zz} dA, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{T} = - \int_A 2n\overset{\circ}{\psi} \tau_{zs} dA, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{V} = - \int_A (\overset{\circ}{\varphi}^T \tau_{zs} + \psi^T \tau_{zn}) dA = - \int_A \nabla \omega |_{n=0} \tau_z dA. \quad (2.99)$$

Nelle relazioni sopra si è indicato con  $\tau_z$  il vettore delle tensioni tangenziali totali. Con analoghe sostituzioni, a partire dalle Eqs. 2.43 e 2.52, le componenti delle forze generalizzate nel piano della sezione, relative ai carichi di volume (apice  $b$ ) e di superficie (apice  $s$ ) possono essere scritte come di seguito riportato:

$$\mathbf{f}_v^{(b)} = - \int_A (-\overset{\circ}{\varphi}^T b_s + \psi^T b_n) dA - \int_A n \overset{\circ}{\psi}^T b_s dA \quad (2.100)$$

$$= - \int_A \nabla \omega |_{n=0} \mathbf{b}_{in} dA - \int_A n \overset{\circ}{\psi}^T b_s dA \quad (2.101)$$

$$= \int_l \nabla \omega |_{n=0} \mathbf{q}_{in} ds - \int_l \overset{\circ}{\psi}^T m_s ds, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{f}_v^{(p)} = - \int_l \nabla \omega |_{n=0} (\mathbf{p}_{in}^{(+)} + \mathbf{p}_{in}^{(-)}) ds - \int_l \overset{\circ}{\psi}^T \left( \frac{p_s^{(+)} - p_s^{(-)}}{2} \right) t ds \quad (2.103)$$

Nelle relazioni sopra riportate le componenti delle forze di volume e di superficie nel piano della sezione sono state raccolte rispettivamente nei vettori  $\mathbf{b}_{in}$  e  $\mathbf{p}_{in}$ :

$$\mathbf{b}_{in} = [ b_s \quad b_n ]^T \quad (2.104)$$

$$\mathbf{p}_{in} = [ p_s \quad p_n ]^T \quad (2.105)$$

È stata inoltre introdotta la risultante di  $\mathbf{b}_{in}$  lungo lo spessore:

$$\mathbf{q}_{in} = \int_t \mathbf{b}_{in} dn. \quad (2.106)$$

Per la classe di modi in esame la matrice di legame del modello si riduce alla forma seguente:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S^{(f)} & \mathbf{C}_{SM}^{(f)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{SM}^{(f)} & \mathbf{C}_M^{(f)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{T(f)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_V^{(f)} \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Le sotto matrici sono ottenute come di seguito riportato:

$$\mathbf{C}_S^{(f)} = E \int_A n^2 \overset{\circ\circ}{\psi} \overset{\circ\circ}{\psi}^T dA, \quad (2.108)$$

$$\mathbf{C}_{SM}^{(f)} = \nu \bar{E} \int_A n^2 \overset{\circ\circ}{\psi} \overset{\circ\circ}{\psi}^T dA, \quad (2.109)$$

$$\mathbf{C}_M = E \int_A \bar{\omega}^T \bar{\omega} dA = \int_A (\bar{E} n^2 \psi^T \psi + E \varphi^T \varphi) dA, \quad (2.110)$$

$$\mathbf{C}_T^{(f)} = 4G \int_A n^2 \overset{\circ}{\psi} \overset{\circ}{\psi}^T dA = G \frac{t^3}{3} \int_l \overset{\circ}{\psi} \overset{\circ}{\psi}^T ds, \quad (2.111)$$

$$\mathbf{C}_V^{(f)} = G \int_A (\nabla \omega^T |_{n=0} \nabla \omega |_{n=0}) dA \quad (2.112)$$

$$= G \int_A (\overset{\circ}{\varphi}^T \overset{\circ}{\varphi} + \psi^T \psi) dA, \quad (2.113)$$

$$\mathbf{C}_{VT}^{(f)} = \mathbf{0}. \quad (2.114)$$

L'apice  $(f)$  è stato usato per riferire tali matrici ai modi flesso-taglianti.

## 2.8 Modi con ingobbamento non lineare

I modi con ingobbamento non lineare possono essere introdotti per arricchire ulteriormente la descrizione dello spostamento fuori piano della sezione. Analogamente alla scelta delle funzioni  $\varphi$  per i modi flesso-taglianti, le funzioni  $\varphi$  associate a tali modi deformativi e definite tenendo conto dei nodi interni, possono essere assunte lineari a tratti. Come comunemente avviene nella formulazione agli elementi finiti, può essere conveniente impiegare un approccio gerarchico per l'introduzione di tali modi. Relativamente alla loro costruzione, si assumono come detto, funzioni  $\varphi$  lineari a tratti e funzioni  $\psi$  e  $\mu$  nulle, come mostrato mostrato in Fig. 2.11. Conseguentemente a tali assunzioni, il relativo campo di spostamento è espresso come di seguito riportato:

$$d_n(n, s, z) = 0, \quad (2.115)$$

$$d_s(n, s, z) = 0, \quad (2.116)$$

$$d_z(n, s, z) = \varphi(s) \mathbf{w}(z). \quad (2.117)$$

Come atteso, tali modi prevedono un arricchimento cinematico solo dello spostamento lungo l'asse della trave ed in particolare tale contributo è costante lungo lo spessore delle pareti.

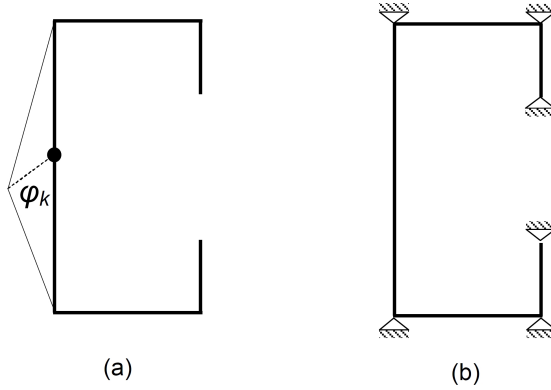


Figura 2.11: Modi con ingobbamento non lineare.

A partire dalle Eq. 2.31, le componenti di deformazione, associate a tali modi possono essere espresse come:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{zs} \\ \gamma_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi^\circ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \chi \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.118)$$

Si noti che  $\epsilon_{ss} = \gamma_{zn} = 0$ . Si fa osservare inoltre come per tale classi di modi risulti:

$$\gamma = -\mathbf{w}. \quad (2.119)$$

Gli sforzi generalizzati associati alle componenti deformative non nulle si riducono quindi alle componenti riportate di seguito:

$$\mathbf{M} = \int_A \boldsymbol{\varphi}^T \sigma_{zz} dA, \quad (2.120)$$

$$\mathbf{V} = - \int_A \varphi^\circ{}^T \tau_{zs} dA. \quad (2.121)$$

La matrice di rigidità, per la classe di modi in esame, si riduce alla seguente forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_M^{(w)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_V^{(w)} \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

le cui sotto-matrici sono ottenute mediante le relazioni di seguito riportate:

$$\mathbf{C}_M^{(w)} = E \int_A \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} dA, \quad (2.123)$$

$$\mathbf{C}_V^{(w)} = G \int_A \overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}}^T \overset{\circ}{\boldsymbol{\varphi}} dA. \quad (2.124)$$

L'apice  $(w)$  è stato usato per riferire le matrici ai modi con ingobbamento non lineare.

## 2.9 Cross Section Analysis

Determinate quindi le funzioni  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  e  $\boldsymbol{\mu}$ , per ciascuna classe di modi, può essere valutata la matrice di rigidità complessiva della sezione trasversale. In particolare considerando sia i modi flesso-taglianti che i modi con ingobbamento non lineare, la topologia della matrice assume la forma seguente:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_S^{(f)} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{SM}^{(f)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{C}_M^{(f)} & \mathbf{C}_M^{(fw)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \mathbf{C}_M^{(w)T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & sym & & \mathbf{C}_T^{(f)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & & & \mathbf{C}_V^{(f)} & \mathbf{C}_V^{(fw)} \\ & & & & & & & \mathbf{C}_V^{(w)} \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

Le matrici di accoppiamento tra i modi flessionali e i modi con ingobbamento non lineare indicate con l'apice  $(fw)$ , sono calcolate mediante le relazioni 2.123-2.124. In generale la matrice  $\mathbf{C}$  è una matrice in cui le deformazioni generalizzate risultano accoppiate tra loro. Inoltre l'interpretazione fisica di tali parametri non è immediata



ed in particolare non sono chiaramente identificabili i parametri deformativi di una teoria di trave classica.

Verrà mostrato nel seguito, come una trasformazione di base sia sufficiente a disaccoppiare parzialmente i parametri deformativi generalizzati e conseguentemente sia quindi possibile attribuire ad alcuni di essi un significato fisico noto. Tale base sarà definita base modale, mentre si farà riferimento alla trasformazione impiegata come procedura di decomposizione modale.

Nel proseguo, inoltre, il generico vettore o matrice, espressi nella basa modale, saranno indicati con il simbolo "  $\hat{\cdot}$  ".

### 2.9.1 Decomposizione modale dei modi flessio-taglianti

Analogamente a quanto avviene nella GBT classica, la procedura di decomposizione modale prevede come primo passo la risoluzione del problema generalizzato agli autovalori:

$$\left( \mathbf{C}_S^{(f)} - \lambda_i \mathbf{C}_M^{(f)} \right) \mathbf{\Lambda}_i = \mathbf{0}. \quad (2.126)$$

La matrice a blocchi  $\mathbf{C}_M^{(f)}$  è simmetrica e definita positiva e così come le altre sottomatrici, ha dimensione  $N \times N$ , in cui  $N$  è pari al numero di modi flessio-taglianti considerati. La matrice  $\mathbf{C}_S^{(f)}$  è simmetrica e semidefinita positiva. Come ampiamente noto dalla letteratura sulla GBT, i primi quattro autovalori del problema sono nulli ( $\lambda_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ) e corrispondono ai quattro moti rigidi della sezione. Gli altri, ( $\lambda_i > 0$ ,  $i = 5, \dots, N$ ) sono positivi e corrispondono a modi deformativi con distorsione della sezione trasversale.

Corrispondentemente, la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  distingue gli autovettori in:

$$\mathbf{\Lambda} = \left[ \mathbf{\Lambda}_R \quad \mathbf{\Lambda}_F \right], \quad (2.127)$$

dove  $\mathbf{\Lambda}_R$  è una matrice con dimensione  $(N \times 4)$  che raccoglie gli autovettori associati agli autovalori nulli. La matrice  $\mathbf{\Lambda}_F$  raccoglie in particolare, una generica combinazione lineare di moti rigidi della sezione, rappresentati dallo spostamento assiale, dalle due rotazioni rispetto agli assi principali di inerzia e dalla rotazione torsionale rispetto al centro di taglio. La loro chiara identificazione è un punto fondamentale della teoria che viene espletato attraverso la semplice procedura automatizzata, riportata nell'Appendice A. La procedura proposta differisce dalla procedura solitamente adottata in letteratura, poichè si basa solo sui termini presentati nel quadro delineato, senza la necessità di ricorrere ad ulteriori informazioni provenienti da contributi geometricamente non lineari.

Concordemente con alla GBT classica, gli spostamenti generalizzati  $\mathbf{u}$  sono legati

ai corrispondenti spostamenti generalizzati nella base modale  $\hat{\mathbf{u}}$  dalla relazione:

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{\Lambda} \hat{\mathbf{u}}(z). \quad (2.128)$$

## 2.9.2 Decomposizione modale dei modi con ingobbamento non lineare

La decomposizione modale dei parametri generalizzati associati ai modi con ingobbamento non lineare è ottenuta attraverso la seguente trasformazione:

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{\Gamma} \hat{\mathbf{u}}(z) \quad (2.129)$$

dove la matrice  $\mathbf{\Gamma}$  è definita mediante la condizione::

$$\left( \mathbf{C}_V^{(w)} - \lambda_i \mathbf{C}_M^{(w)} \right) \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{0}, \quad (2.130)$$

Si noti che la matrice  $\mathbf{C}_M^{(f)}$  è simmetrica e definita positiva, mentre la  $\mathbf{C}_V^{(w)}$  è simmetrica e semidefinita positiva.

## 2.9.3 Matrice di rigidezza della sezione e deformazioni generalizzate nello spazio modale

Le trasformazioni 2.128- 2.129 permettono di esprimere la cinematica della trave in termini dei parametri modali. In particolare la Fig. 2.12b mostra la matrice di rigidezza  $\hat{\mathbf{C}}$  nello spazio modale. A scopo illustrativo, è stato considerato il caso con un numero di modi flesso-taglienti  $N = 6$  e di modi con ingobbamento non lineare  $N_w = 2$ . Dal confronto tra le Figs. 2.12a e 2.12b si evidenzia la struttura della matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  e di conseguenza il disaccoppiamento relativo ottenuto passando dallo spazio naturale allo spazio modale. In particolare, infatti, da una attenta analisi della matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  possono essere fatte una serie di considerazioni.

1. La matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  ha  $8 + 2N_w$  righe e colonne nulle. Tali righe corrispondono alle componenti cui è associata energia di deformazione nulla. Tra queste si ritrovano anche quelle relative ai moti rigidi della sezione. Tutte le altre componenti di deformazione sono associate invece ad energia non nulla e possono essere effettivamente definite come deformazioni generalizzate.
2. La matrice  $\hat{\mathbf{C}}$  espressa nella base modale consente di riconoscere parametri deformativi che assumono significato fisico noto. In particolare,  $\hat{\alpha}_2$  e  $\hat{\alpha}_3$  rappresentano le traslazioni rigide della sezione trasversale rispetto alle direzioni

descritte dagli assi principali di inerzia, e  $\hat{\alpha}_4$  è la rotazione torsionale rispetto al centro di taglio. Come atteso, le righe e le colonne associate a tali parametri risultano nulle.

3. I parametri  $\hat{\gamma}_2$  e  $\hat{\gamma}_3$  rappresentano gli scorrimenti della classica teoria di trave alla Timoshenko, il parametro  $\hat{\gamma}_4$  rappresenta la deformazione tagliante dovuta alla torsione non uniforme, mentre i parametri  $\hat{\gamma}_i$ ,  $i = 5, \dots, N + N_w$  possono essere interpretati come componenti deformative taglianti di ordine superiore. Si fa notare che il parametro  $\hat{\gamma}_4$  non è presente nè nella teoria di De Saint Venant, nè nella teoria di Vlasov, mentre è presente nella teoria di trave alla Capurso.

Infine, si rileva che la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_V$  è in generale non diagonale poichè i parametri modali sono riferiti agli gli assi principali di inerzia della sezione trasversale, che come noto, non coincidono necessariamente con gli assi principali del taglio.

4. Il parametro  $\chi_1$  rappresenta la deformazione lungo l'asse della trave. Gli altri parametri del vettore  $\hat{\chi}$  rappresentano invece una generica curvatura. In particolare,  $\hat{\chi}_2$  e  $\hat{\chi}_3$  rappresentano le curvature flessionali.

Il parametro  $\hat{\chi}_4$  è la curvatura torsionale dovuta al warping non uniforme. Gli altri parametri,  $\hat{\chi}_i$ ,  $i = 5, \dots, N + N_w$ , possono essere interpretati come curvature di ordine superiore.

5. Come atteso, la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_M$  risulta essere diagonale e nelle prime quattro posizioni della diagonale si ritrovano esattamente le rigidità della trave classica: la rigidità assiale, le rigidità flessionali e la rigidezza di warping.
6. Le curvature flessionali sono accoppiate con le deformazioni nel piano della sezione attraverso la matrice  $\hat{\mathbf{C}}_{SM}$ .
7. Infine, si fa notare, come aggiungendo o eliminando modi deformativi, non viene in alcun modo modificata la topologia della matrice.

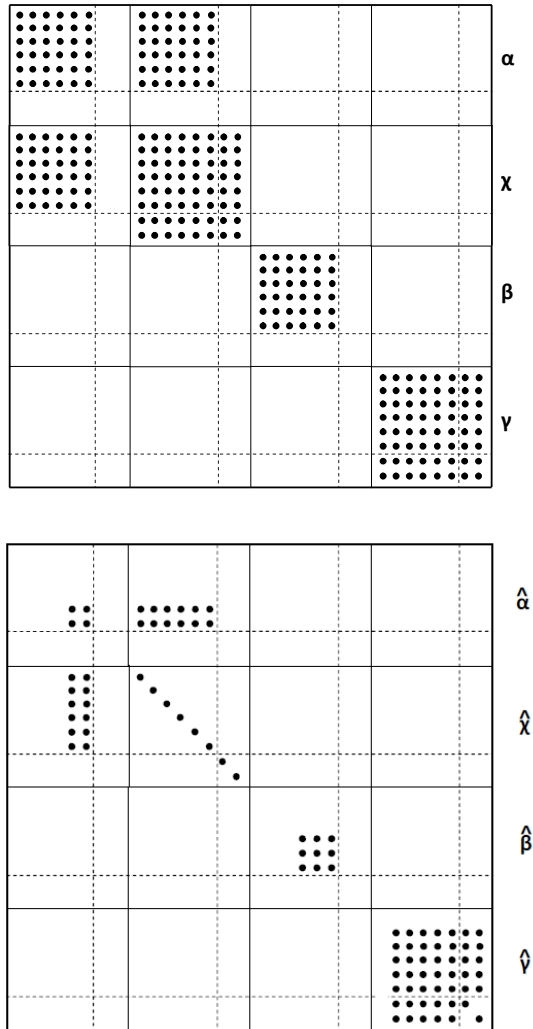


Figura 2.12: Topologia della matrice di rigidezza della sezione: (a) nello spazio naturale, (b) nello spazio modale, con  $N = 6$  e  $N_w = 2$

## 2.10 Ricostruzione dello stato tensionale

È comunemente noto che i modelli strutturali a cinematica ridotta, come ad esempio la trave GBT, possono condurre ad una valutazione poco accurata dello stato tensionale tridimensionale. Ad ogni modo, nel caso di travi in parete sottile, una valutazione dello stato tensionale tridimensionale può risultare cruciale per predire crisi dovute a fenomeni di instabilità locale. Invero, la difficoltà di ottenere una valutazione accurata delle componenti di tensione tridimensionali direttamente dal modello di trave GBT è attesa. Infatti, come anticipato nel Capitolo 2, il modello può essere visto come una rappresentazione del corpo tridimensionale sui cui spostamenti sono imposte alcune ipotesi cinematiche che restringono la classe delle deformazioni ammissibili. Le ipotesi cinematiche introdotte giocano il ruolo di vincoli interni imposti sul corpo tridimensionale al fine di ottenere il modello monodimensionale di trave. In presenza di vincoli interni, quindi il campo tensionale può essere decomposto in una parte attiva e una parte reattiva. In particolare, la parte attiva è legata alle deformazioni da un'equazione costitutiva mentre, la parte reattiva rappresentando le reazioni al vincolamento interno non compie lavoro per alcuna deformazione ammissibile. Pertanto solo la parte attiva è costitutivamente determinata a partire dalla soluzione del problema. È evidente che le componenti reattive possono essere utili per meglio approssimare il campo di tensioni tridimensionale ottenuto impiegando le sole componenti attive [57]. In particolare, la parte reattiva delle tensioni può essere determinata imponendo le condizioni di equilibrio tridimensionali. Pertanto è di seguito descritta una procedura di ricostruzione dello stato tensionale tridimensionale basata sulle equazioni indefinite di equilibrio. Indicando con apice (A) la parte attiva e con apice (R) quella reattiva, le varie componenti di sforzo tridimensionali sono scritte come:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{M(A)} + n\sigma_{zz}^{B(A)}, \quad (2.131)$$

$$\sigma_{ss} = \sigma_{ss}^{M(R)} + n\sigma_{ss}^{B(A)}, \quad (2.132)$$

$$\tau_{zs} = \tau_{zs}^{M(R)} + n\tau_{zs}^{B(A)}, \quad (2.133)$$

$$\tau_{zn} = g(n)\tau_{zn}^{B(R)}, \quad (2.134)$$

$$\tau_{sn} = g(n)\tau_{sn}^{B(R)}. \quad (2.135)$$

Mutuando dalla teoria delle piastre, nelle Eqs. 2.131-2.134 si è assunto che la tensione normale  $\sigma_{zz}$  sia completamente attiva, mentre al contrario le componenti tensionali  $\tau_{zn}$  e  $\tau_{sn}$  sono considerate completamente reattive. Le componenti  $\tau_{zs}$  e  $\sigma_{ss}$  sono invece assunte somma di un contributo attivo e di un contributo reattivo. Inoltre, la funzione  $g(n)$  dell'Eq. 2.135, che descrive la distribuzione delle tensioni

tangenziali 2.135 lungo lo spessore della parete, è assunta di forma parabolica e con area unitaria. La stessa funzione, al fine di soddisfare le condizioni al contorno, assume valori nulli agli estremi.

Le equazioni indefinite di equilibrio tridimensionali possono essere scritte nella forma:

$$\frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sn}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} = 0, \quad (2.136)$$

$$\frac{\partial \tau_{sn}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{zn}}{\partial z} = 0, \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial \tau_{sz}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{zn}}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0. \quad (2.138)$$

Sostituendo le Eqs. 2.131-2.135 nelle espressioni 2.136 - 2.138 risulta:

$$n \left( \frac{\partial \sigma_{ss}^{B(A)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sz}^{B(A)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma_{ss}^{M(R)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sz}^{M(R)}}{\partial z} + \frac{dg}{dn} \tau_{sn}^{B(R)} = 0, \quad (2.139)$$

$$n \left( \frac{\partial \tau_{sz}^{B(A)}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{B(A)}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tau_{sz}^{M(R)}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{M(A)}}{\partial z} + \frac{dg}{dn} \tau_{zn}^{B(R)} = 0. \quad (2.140)$$

Le equazioni sopra riportate devono essere soddisfatte per qualsiasi valore di  $n$ . Tale condizione consente di scrivere:

$$\frac{\partial \sigma_{ss}^{M(R)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sz}^{M(R)}}{\partial z} = 0, \quad (2.141)$$

$$\frac{\partial \tau_{sz}^{M(R)}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{M(A)}}{\partial z} = 0, \quad (2.142)$$

$$n \left( \frac{\partial \sigma_{ss}^{B(A)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sz}^{B(A)}}{\partial z} \right) + \frac{dg}{dn} \tau_{sn}^{B(R)} = 0, \quad (2.143)$$

$$n \left( \frac{\partial \sigma_{zz}^{B(A)}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{sz}^{B(A)}}{\partial s} \right) + \frac{dg}{dn} \tau_{zn}^{B(R)} = 0. \quad (2.144)$$

Infine, le Eqs. 2.141-2.144 consentono di ricavare le componenti reattive incognite, in funzione delle componenti attive delle tensioni, secondo le relazioni riportate di

seguito:

$$\tau_{zs}^{M(R)} = - \int_s \frac{\partial \sigma_{zz}^{M(A)}}{\partial z} + \alpha_1, \quad (2.145)$$

$$\sigma_{ss}^{M(R)} = - \int_s \frac{\partial \tau_{zs}^{M(R)}}{\partial z} + \alpha_2, \quad (2.146)$$

$$\tau_{zn}^{B(R)} = - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}^{B(A)}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}^{B(A)}}{\partial s} \right], \quad (2.147)$$

$$\tau_{sn}^{B(R)} = - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\partial \sigma_{ss}^{B(A)}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{zs}^{B(A)}}{\partial z} \right], \quad (2.148)$$

dove coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  rappresentano le costanti di integrazione che possono essere determinate mediante le condizioni al contorno.

Le Eqs.2.145-2.148 coinvolgono le derivate prime e seconde delle componenti di sforzo attive e, quindi, degli sforzi generalizzati ottenibili dalla soluzione agli elementi finiti. Pertanto, per garantire l'affidabilità della procedura illustrata, può essere necessario operare una preventiva ricostruzione degli sforzi generalizzati (impiegando ad esempio la procedura Recovery by Compatibility in Patches [58] estesa al caso corrente) che ne garantisca la derivabilità richiesta.

## 2.11 Formulazione non lineare

In questo paragrafo è presentata una formulazione non lineare basata sulla cosiddetta teoria al second'ordine. In particolare vengono impiegate le deformazioni al secondo ordine di Von Kàrmàn espresse nella forma seguente:

$${}^{2nd}\epsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial d_n}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_s}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.149)$$

$${}^{2nd}\epsilon_{ss} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial d_n}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_s}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial d_z}{\partial s} \right)^2 \right] \quad (2.150)$$

$${}^{2nd}\gamma_{zs} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_n}{\partial z} \frac{\partial d_n}{\partial s} + \frac{\partial d_s}{\partial z} \frac{\partial d_s}{\partial s} + \frac{\partial d_z}{\partial z} \frac{\partial d_z}{\partial s} \right) \quad (2.151)$$

$${}^{2nd}\gamma_{zn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_n}{\partial z} \frac{\partial d_n}{\partial n} + \frac{\partial d_s}{\partial z} \frac{\partial d_s}{\partial n} + \frac{\partial d_z}{\partial z} \frac{\partial d_z}{\partial n} \right) \quad (2.152)$$

Sostituendo quindi le Eq. 2.13-2.15 nelle Eq. 2.149-2.151 si ottengono le seguenti espressioni:

$${}^{2nd}\epsilon_{zz} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T (\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}) \mathbf{v}' + \frac{1}{2}\mathbf{w}'^T (\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{w}' \quad (2.153)$$

$${}^{2nd}\epsilon_{ss} = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T \left( \overset{\circ}{\boldsymbol{\psi}}^T \overset{\circ}{\boldsymbol{\psi}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}^T \overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \left( \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}^T \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}} \right) \mathbf{w} \quad (2.154)$$

$${}^{2nd}\gamma_{zs} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \left( \overset{\circ}{\boldsymbol{\omega}}^T \boldsymbol{\omega} \right) \mathbf{w}' + \frac{1}{2}\mathbf{v}^T \left( \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\psi} \right) \mathbf{v}' \quad (2.155)$$

$${}^{2nd}\gamma_{zn} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}'^T \left( \boldsymbol{\xi}^T \overset{\circ}{\boldsymbol{\psi}} \right) \mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^T (\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\psi}) \mathbf{w} \quad (2.156)$$

A partire da tali relazioni può quindi essere valutato il contributo al secondo ordine del lavoro virtuale, scritto come di seguito riportato:

$${}^{2nd}W_{int}^{(i)} = \int_V (\sigma_{zz} \delta^{2nd}\epsilon_{zz} + \sigma_{ss} \delta^{2nd}\epsilon_{ss} + \tau_{zs} \delta^{2nd}\gamma_{zs} + \tau_{zn} \delta^{2nd}\gamma_{zn}) dV \quad (2.157)$$

Le tensioni dell'Eq. 2.157 vengono ottenute a partire dalla soluzione lineare mediante le equazioni di legame costitutivo. In alternativa possono essere impiegate le tensioni ricostruite mediante l'imposizione delle condizioni di equilibrio, così come mostrato nel paragrafo precedente. A tal proposito, si fa notare che la formulazione classica GBT (che non considera la deformabilità tagliante) debba necessariamente ricorrere ad una procedura di recupero degli sforzi, in quanto altrimenti le componenti di tensione tangenziali risulterebbero, per via elasto cinematica, nulle.



## Capitolo 3

# Recupero delle teorie classiche di trave

### Abstract

In this chapter it is shown how it is possible to recover classical beam theories from the Generalized Beam Theory proposed in the previously. In particular, after introducing some geometric relations, it will be shown how it is possible to recover classical beam theories, also with shear deformation, taking as a reference the Vlasov shear deformable theory and the theory of Capurso; and also how these can be reduced to the classic theory of Vlasov without shear deformation. In this sense, an example is presented in which the influence of shear deformability on the torsional behavior of a beam is analyzed.

### Sommario

In questo capitolo verrà mostrato come è possibile recuperare le classiche teorie di trave a partire dalla Generalized Beam Theory proposta nel capitolo precedente. In particolare dopo aver introdotto alcune relazioni geometriche verrà mostrato come sia possibile recuperare le teorie classiche, anche quelle che prevedono deformabilità tagliante, facendo riferimento in particolar modo alla teoria di Vlasov arricchita con deformabilità tagliante e alla teoria di Capurso, e come da queste ci si possa ricondurre alla classica teoria di Vlasov non deformabile a taglio.

A tal proposito è presentato un esempio in cui verrà valutata l'influenza della deformabilità tagliante sul comportamento torsionale di una trave.

### 3.1 Relazioni geometriche

Si consideri la  $i$ -esima parete appartenente alla generica sezione trasversale riportata in Fig. 3.1. Sia quindi assunto oltre al sistema di riferimento locale della parete  $onsz$ , un altro sistema di riferimento esterno,  $Gxyz$ , detto globale e centrato nel baricentro  $G$  della sezione. Gli assi nel piano della sezione siano individuati rispettivamente dai versori  $e_n$  ed  $e_s$  per il riferimento locale, e da  $e_x$  ed  $e_y$  per il riferimento globale. In particolare i versori  $e_x$  ed  $e_y$  individuano le direzioni degli assi principali di inerzia della sezione considerata.

Indicato quindi con  $r$  il vettore posizione di un punto  $P$  sulla generica parete, rispetto

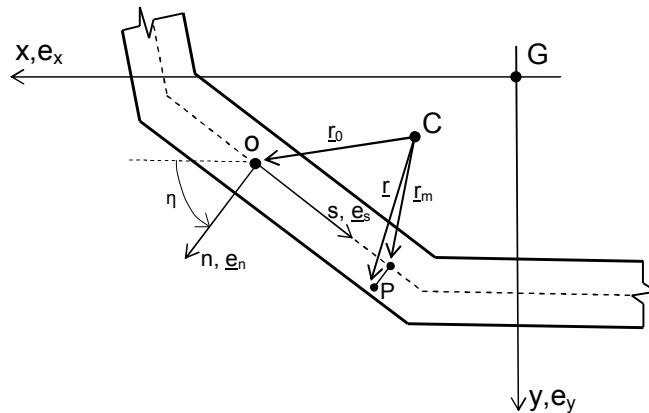


Figura 3.1: Sistema di riferimento locale  $onsz$  e sistema di riferimento globale  $Gxyz$

al centro di taglio  $C$  (Fig. 3.1), questo può essere scritto come:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m + n\mathbf{e}_n, \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{r}_m$  è il vettore posizione della proiezione del punto  $P$  sulla linea media. Definito invece  $\mathbf{r}_o$ , il vettore posizione dell'origine  $o$  del sistema di riferimento locale della parete, rispetto al centro di taglio  $C$ , e definite le sue proiezioni sugli assi locali  $s$

ed  $n$ ,

$$r_{os} = \mathbf{r}_o^T \mathbf{e}_s, \quad (3.2)$$

$$r_{on} = \mathbf{r}_o^T \mathbf{e}_n, \quad (3.3)$$

le proiezioni del generico vettore posizione  $\mathbf{r}$  sugli assi locali possono essere scritte come:

$$\mathbf{r}^T \mathbf{e}_s = r_{os} + s, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}^T \mathbf{e}_n = r_{on} + n. \quad (3.5)$$

Ricordando che si sta impiegando la seguente notazione:

$$\overset{\circ}{(\quad)} = \partial_s, \quad \overset{\times}{(\quad)} = \partial_n, \quad (\quad)' = \partial_z, \quad (3.6)$$

per indicare le derivate rispetto a  $s$ ,  $n$  e  $z$ , i versori del sistema locale  $ons$ , possono essere espressi nella forma seguente:

$$\mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} \overset{\times}{x} \\ \overset{\times}{y} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

mentre i versori relativi al sistema di riferimento globale possono essere scritti come:

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} \overset{\times}{x} \\ \overset{\circ}{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} \overset{\times}{y} \\ \overset{\circ}{y} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza, nel sistema di riferimento globale, la posizione del generico punto  $P$  può essere scritta mediante le seguenti espressioni:

$$x = x_0 - s \sin \eta + n \cos \eta = x_m + n \cos \eta, \quad (3.9)$$

$$y = y_0 + s \cos \eta + n \sin \eta = y_m + n \sin \eta. \quad (3.10)$$

Risultano inoltre valide le seguenti posizioni:

$$\overset{\circ}{x} = -\sin \eta, \quad \overset{\times}{x} = \cos \eta, \quad (3.11)$$

$$\overset{\circ}{y} = \cos \eta, \quad \overset{\times}{y} = \sin \eta. \quad (3.12)$$

Per semplicità di trattazione nei prossimi paragrafi verrà assunto un legame di tipo monoassiale oltre che per descrivere il comportamento membranale anche per descrivere il comportamento flessionale delle pareti. In particolare, ricordando la relazione 2.85, tale assunzione porta per i modi flesso-taglianti a considerare  $\omega = \bar{\omega}$ .

### 3.2 Torsione non uniforme con deformabilità tagliante

In questo paragrafo verrà mostrato come è possibile recuperare la teoria di trave con torsione non uniforme deformabile a taglio a partire dalla Generalized Beam Theory proposta nel capitolo precedente.

Si consideri una sezione trasversale qualsiasi con almeno quattro nodi naturali e siano considerati nella CSA solamente i modi deformativi flesso-taglienti fondamentali.

A partire dalle Eqs. 2.13-2.15, vengono esplicitati per componenti i vettori che collezionano i parametri cinematici incogniti  $\hat{\mathbf{v}}$  e  $\hat{\mathbf{w}}$  e le funzioni  $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  e  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  che descrivono i modi deformativi nello spazio modale (si ricorda che nello spazio modale le quantità sono indicate con il simbolo  $\hat{\phantom{x}}$ ), come di seguito riportato:

$$\hat{\mathbf{v}}(z) = \left[ \hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{v}_3 \quad \hat{v}_4 \quad \dots \right]^T \quad (3.13)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(z) = \left[ \hat{w}_1 \quad \hat{w}_2 \quad \hat{w}_3 \quad \hat{w}_4 \quad \dots \right]^T \quad (3.14)$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(s) = \left[ \hat{\psi}_1 \quad \hat{\psi}_2 \quad \hat{\psi}_3 \quad \hat{\psi}_4 \quad \dots \right] \quad (3.15)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(s, n) = \left[ \hat{\mu}_1 - n\hat{\psi}_1 \quad \hat{\mu}_2 - n\hat{\psi}_2 \quad \hat{\mu}_3 - n\hat{\psi}_3 \quad \hat{\mu}_4 - n\hat{\psi}_4 \quad \dots \right] \quad (3.16)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(s, n) = \left[ \hat{\varphi}_1 - n\hat{\psi}_1^\circ \quad \hat{\varphi}_2 - n\hat{\psi}_2^\circ \quad \hat{\varphi}_3 - n\hat{\psi}_3^\circ \quad \hat{\varphi}_4 - n\hat{\psi}_4^\circ \quad \dots \right] \quad (3.17)$$

Si assume per semplicità di trattazione, di trascurare i modi di ordine superiore e quindi di considerare solo i primi quattro modi flesso-taglienti fondamentali. Il campo di spostamento risulta pertanto essere espresso nella forma di seguito riportata:

$$\hat{d}_n(n, s, z) = \hat{\psi}_1 \hat{v}_1 + \hat{\psi}_2 \hat{v}_2 + \hat{\psi}_3 \hat{v}_3 + \hat{\psi}_4 \hat{v}_4, \quad (3.18)$$

$$\hat{d}_s(n, s, z) = \hat{\xi}_1 \hat{v}_1 + \hat{\xi}_2 \hat{v}_2 + \hat{\xi}_3 \hat{v}_3 + \hat{\xi}_4 \hat{v}_4, \quad (3.19)$$

$$\hat{d}_z(n, s, z) = \hat{\omega}_1 \hat{w}_1 + \hat{\omega}_2 \hat{w}_2 + \hat{\omega}_3 \hat{w}_3 + \hat{\omega}_4 \hat{w}_4 \quad (3.20)$$

Ribadendo che la cinematica sopra riportata è definita nello spazio modale, si può dimostrare che per i primi 4 modi flesso-taglienti, le componenti delle funzioni  $\boldsymbol{\psi}$ ,

$\varphi$ ,  $\mu$  assumono il seguente significato:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_1 &= 0, & \hat{\varphi}_1 - n\hat{\psi}_1 &= 1, & \hat{\psi}_1 &= 0, & \hat{\varphi}_1 &= 1, & \hat{\mu}_1 &= 0, & \hat{\psi}_1 &= 0, \\
 \hat{\mu}_2 &= \overset{\circ}{x}, & \hat{\varphi}_2 - n\hat{\psi}_2 &= -x, & \hat{\psi}_2 &= \overset{x}{x}, & \hat{\varphi}_3 &= -x_m, & \hat{\mu}_2 &= 0, & \hat{\psi}_2 &= 0, \\
 \hat{\mu}_3 &= \overset{\circ}{y}, & \hat{\varphi}_3 - n\hat{\psi}_3 &= -y, & \hat{\psi}_3 &= \overset{x}{y}, & \hat{\varphi}_3 &= -y_m, & \hat{\mu}_3 &= 0, & \hat{\psi}_3 &= 0, \\
 \hat{\mu}_4 &= \overset{\circ}{\phi}_m, & \hat{\varphi}_4 - n\hat{\psi}_4 &= -\phi, & \hat{\psi}_4 &= \overset{x}{\phi}, & \hat{\varphi}_4 &= -\phi_m, & \hat{\mu}_4 &= 0, & \hat{\psi}_4 &= -1,
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

dove  $\phi$  è la funzione di ingobbamento:

$$\phi(s, n) = \phi_m(s) - n\phi_t(s), \tag{3.22}$$

$$\text{con: } \overset{\circ}{\phi}_m = \mathbf{r}_m^T \mathbf{e}_n, \quad \phi_t = \mathbf{r}_m^T \mathbf{e}_s \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{\phi} = \mathbf{r}^T \mathbf{e}_n - 2n, \quad \overset{x}{\phi} = -\mathbf{r}^T \mathbf{e}_s.$$

Al fine di rendere immediata la comprensione, nel seguito, si andranno a rinominare i parametri cinematici come mostrato in Fig. 3.2 e come di seguito riportato:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_1 &\Rightarrow v_z \\
 \hat{v}_2 &\Rightarrow v_x & \hat{w}_2 &\Rightarrow \theta_y \\
 \hat{v}_3 &\Rightarrow v_y & \hat{w}_3 &\Rightarrow -\theta_x \\
 \hat{v}_4 &\Rightarrow \theta_z & \hat{w}_4 &\Rightarrow w_\phi
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Andando quindi a sostituire le posizioni 3.21 e 3.23 nelle Eqs. 3.18-3.20, la cinematica assume la forma seguente:

$$\hat{d}_n = \overset{x}{x} v_x + \overset{x}{y} v_y - \overset{x}{\phi} \theta_z, \tag{3.24}$$

$$\hat{d}_s = \overset{\circ}{x} v_x + \overset{\circ}{y} v_y + (\overset{\circ}{\phi} + n)\theta_z, \tag{3.25}$$

$$\hat{d}_z = v_z - x \theta_y + y \theta_x - \phi w_\phi. \tag{3.26}$$

Introducendo la definizione di  $e_{nx}$  e  $e_{ny}$  per indicare rispettivamente la componente  $x$  ed  $y$  del versore  $\mathbf{e}_n$ , e in maniera analoga  $e_{sx}$  e  $e_{sy}$  per le componenti del versore  $\mathbf{e}_s$ , la stessa cinematica può essere anche espressa come:

$$\hat{d}_n = e_{nx}v_x + e_{ny}v_y - \mathbf{r}^T \mathbf{e}_s \theta_z = v_n - \mathbf{r}^T \mathbf{e}_s \theta_z, \tag{3.27}$$

$$\hat{d}_s = e_{sx}v_x + e_{sy}v_y - \mathbf{r}^T \mathbf{e}_n \theta_z = v_s - \mathbf{r}^T \mathbf{e}_n \theta_z, \tag{3.28}$$

$$\hat{d}_z = v_z - x \theta_y + y \theta_x - \phi w_\phi. \tag{3.29}$$

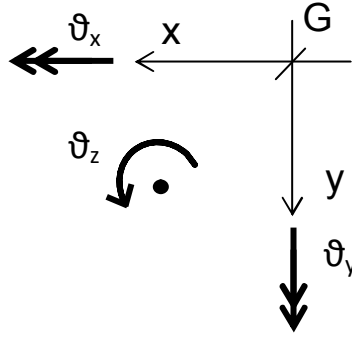


Figura 3.2: Significato fisico dei nuovi parametri

Nelle Eqs. 3.27-3.29 i termini  $v_n$  e  $v_s$  rappresentano gli spostamenti medi della sezione in direzione  $n$  ed  $s$ .

Si fa rilevare inoltre che a differenza della teoria classica alla Vlasov risulta  $\theta'_z \neq \omega_\phi$  in quanto  $\omega_\phi$  è la somma della derivata dell'angolo di rotazione torsionale e di uno scorrimento torsionale.

Conseguentemente alle posizioni fatte, le componenti non nulle del vettore delle deformazioni generalizzate  $\mathbf{e} = [ \boldsymbol{\chi} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\gamma} ]^T$ , risultano essere le seguenti:

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi_y \\ \chi_x \\ \chi_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_z \\ \theta'_y \\ \theta'_x \\ w'_\phi \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left[ \frac{1}{2}(\theta'_z + w_\phi) = \theta'_z - \frac{1}{2}\gamma_\phi \right], \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_x - \theta'_y \\ v'_y - \theta'_x \\ \theta'_z - w'_\phi \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

In particolare le componenti del vettore  $\boldsymbol{\alpha}$  non sono state riportate in quanto tutte nulle. Analogamente sono state omesse le componenti  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  del vettore  $\boldsymbol{\beta}$  e la componente  $\gamma_1$  del vettore  $\boldsymbol{\gamma}$ , in quanto corrispondenti a modi a deformazione nulla.

I sotto-vettori del vettore degli sforzi generalizzati  $\mathbf{s} = [ \mathbf{M} \quad \mathbf{T} \quad \mathbf{V} ]^T$  associati a deformazioni non nulle risultano quindi essere i seguenti:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = [ T ], \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_\phi \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

le cui componenti ottenute andando a sostituire le posizioni 3.21 nelle Eqs. 2.98-2.99 assumono la forma riportata di seguito:

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA, \quad M_y = \int_A -x \sigma_{zz} dA, \quad M_x = \int_A -y \sigma_{zz} dA, \quad (3.34)$$

$$B = \int_A -\phi \sigma_{zz} dA, \quad T = \int_A 2n \tau_{zs} dA, \quad (3.35)$$

$$V_x = \int_A (\overset{\circ}{x} \tau_{zs} + \overset{\times}{x} \tau_{zn}) dA = \int_A \boldsymbol{\tau}_z^T \mathbf{e}_x dA, \quad (3.36)$$

$$V_y = \int_A (\overset{\circ}{y} \tau_{zs} + \overset{\times}{y} \tau_{zn}) dA = \int_A \boldsymbol{\tau}_z^T \mathbf{e}_y dA, \quad (3.37)$$

$$V_\phi = \int_A (\overset{\circ}{\phi} |_{n=0} \tau_{zs} + \overset{\times}{\phi} |_{n=0} \tau_{zn}) dA = \int_l t (\mathbf{r} \times \bar{\boldsymbol{\tau}}_z)^T \mathbf{e}_z. \quad (3.38)$$

Si rileva come:

- le Eqs. 3.34 rappresentino le classiche definizioni di sforzo normale, e momento flettente nelle direzioni principali di inerzia della sezione,
- le Eqs. 3.35 siano rispettivamente l'espressione del bimomento alla Vlasov e l'espressione della torsione uniforme alla DSV,
- le Eqs. 3.36-3.37 siano le espressioni del taglio nelle due direzioni principali di inerzia,
- mentre l'Eq. 3.38 rappresenti il momento di warping ottenuto come prodotto vettore tra il vettore posizione  $\mathbf{r}$  rispetto al centro di taglio e le tensioni tangenziali medie  $\bar{\boldsymbol{\tau}}_z$  sullo spessore.

Una rappresentazione grafica di tali componenti è riportata in Fig. 3.3.

Nel caso in esame, i vettori delle forze generalizzate nel piano e fuori piano della sezione assumono la forma seguente:

$$\mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} f_v \\ f_y \\ c_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_w = \begin{bmatrix} f_z \\ c_y \\ c_x \\ c_\phi \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

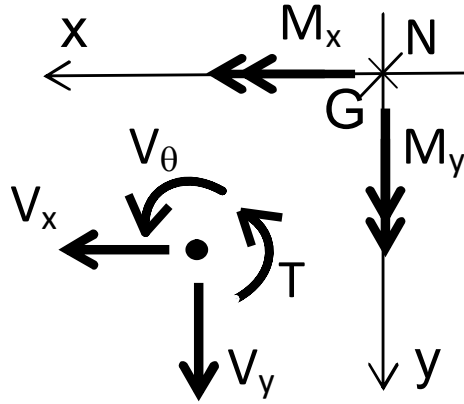


Figura 3.3: Rappresentazione grafica degli sforzi generalizzati.

e le rispettive componenti, rappresentate in Fig. 3.4, sono ottenute mediante le relazioni di seguito riportate:

$$f_x = \int_l (\dot{x}q_n + \dot{x}q_s) ds = \int_l \mathbf{q}_{in}^T \mathbf{e}_x ds, \quad (3.40)$$

$$f_y = \int_l (\dot{y}q_n + \dot{y}q_s) ds = \int_l \mathbf{q}_{in}^T \mathbf{e}_y ds, \quad (3.41)$$

$$c_z = \int_l (\dot{\phi} |_{n=0} q_n + \dot{\phi} |_{n=0} q_s) ds + \int_l m_s ds = \int_l [(\mathbf{r} \times \mathbf{q}_{in})^T \mathbf{e}_z + m_s] ds, \quad (3.42)$$

$$f_z = \int_A b_z dA, \quad c_y = \int_A -x b_z dA, \quad (3.43)$$

$$c_x = \int_A y b_z dA, \quad c_\phi = \int_A -\phi b_z dA. \quad (3.44)$$

Le equazioni di equilibrio possono essere scritte in forma estesa nella seguente forma:



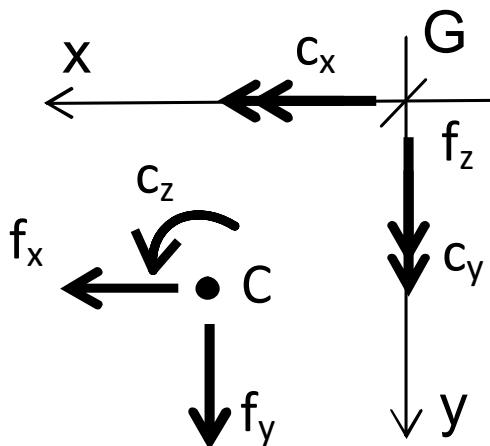


Figura 3.4: Rappresentazione grafica delle forze generalizzate.

$$-V'_x - f_x = 0, \quad (3.45)$$

$$-V'_y - f_y = 0, \quad (3.46)$$

$$-\frac{1}{2}T' - V'_\phi - c_z = 0, \quad (3.47)$$

$$-N' - f_z = 0, \quad (3.48)$$

$$-M'_y - V_x - c_y = 0, \quad (3.49)$$

$$-M'_x - V_y - c_x = 0, \quad (3.50)$$

$$-B' + \frac{1}{2}T - V_\phi - c_\phi = 0. \quad (3.51)$$

Definito il momento torcente totale come  $M_z = \frac{T}{2} + V_\phi$ , la relazione 3.51 può essere riscritta nella forma seguente:

$$-B' + T - M_z - c_\phi = 0. \quad (3.52)$$

Impiegando le equazioni costitutive, gli sforzi generalizzati possono essere scritti nella seguente forma:

$$N = \left( \int_A E dA \right) \epsilon = EA\epsilon, \quad (3.53)$$

$$M_x = \left( \int_A Ey^2 dA \right) \chi_x = EI_x \chi_x, \quad (3.54)$$

$$M_y = \left( \int_A Ex^2 dA \right) \chi_y = EI_y \chi_y, \quad (3.55)$$

$$B = \left( \int_A E\phi^2 dA \right) \chi_\omega = E\Gamma \chi_\phi, \quad (3.56)$$

$$T = \left( \int_A 4Gn^2 dA \right) \beta = GJ_t \beta, \quad (3.57)$$

$$V_x = \left( \int_A G\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x dA \right) \gamma_x - \left( \int_A G\mathbf{r}_m^T \mathbf{e}_y dA \right) \gamma_\phi = GA\gamma_x + GAy_c \gamma_\phi, \quad (3.58)$$

$$V_y = \left( \int_A G\mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_y dA \right) \gamma_y - \left( \int_A G\mathbf{r}_m^T \mathbf{e}_x dA \right) \gamma_\phi = GA\gamma_y - GAx_c \gamma_\phi, \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} V_\phi &= \left( \int_A G\mathbf{r}_m^T dA \right) \gamma_\phi - \left( \int_A G\mathbf{r}_m^T \mathbf{e}_y dA \right) \gamma_x + \left( \int_A G\mathbf{r}_m^T \mathbf{e}_x dA \right) \gamma_y = \\ &= G\bar{I}_c \gamma_\phi + GAy_c \gamma_x - GAx_c \gamma_y. \end{aligned} \quad (3.60)$$

con  $\bar{I}_c = \bar{I}_G + A(x_c^2 + y_c^2)$ . Nella relazione precedente si è indicato con  $\bar{I}_G$  il momento di inerzia polare della sezione rispetto al baricentro, calcolato assumendo l'approssimazione di sezione in parete sottile e con  $\bar{I}_C$  la stessa quantità rispetto al centro di taglio.

### 3.2.1 Alcune osservazioni

1. Il minore  $\mathbf{C}_V$  della matrice di legame, assume la forma di seguito riportata:

$$\mathbf{C}_V = G \begin{bmatrix} A & 0 & Ay_c \\ & A & -Ax_c \\ & & \bar{I}_c \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Nella decomposizione modale (Appendice A), i due assi principali possono essere individuati diagonalizzando il minore  $2 \times 2$  (in alto a sinistra) e normalizzando la sotto matrice in modo che sulla diagonale compaia l'area della sezione trasversale. Dai termini in terza colonna si ricava la posizione del centro di taglio.

2. Se nella procedura di decomposizione modale nella risoluzione del problema generalizzato agli autovalori  $(\mathbf{C}_S^{(f)} - \lambda_i \mathbf{C}_M^{(f)}) \mathbf{\Lambda}_i$  si sostituisce alla matrice  $\mathbf{C}_M$ , la matrice  $\mathbf{C}_V$ , si otterrebbero le quantità riferite al baricentro, invece che al centro di taglio. In questo modo non ci sarebbe più accoppiamento tra i tagli e il bi-taglio, tuttavia, in tale riferimento, chiaramente nascerebbero degli accoppiamenti tra i tagli e la torsione alla de Saint Venant. Indicando infatti le quantità riferite al baricentro con il simbolo "–", come mostrato in Fig. 3.5, il legame tra tagli, bitaglio e rispettivi scorrimenti risulta essere diagonale ed in particolare: seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_x \\ \bar{V}_y \\ \bar{V}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & & \\ & A & \\ & & \bar{I}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \\ \bar{\gamma}_\phi \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

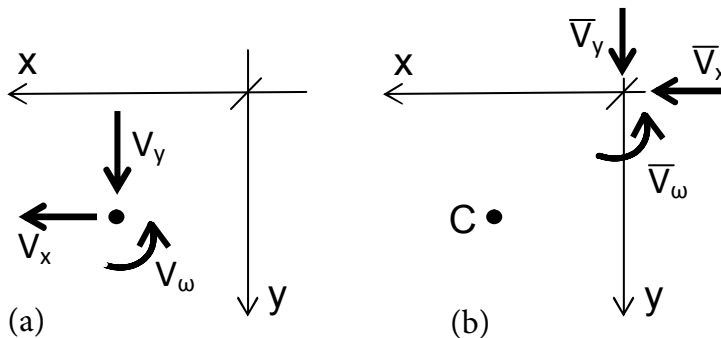


Figura 3.5: Tagli e bitaglio riferiti al centro di taglio (a) e al baricentro (b).

3. Come era lecito attendersi infine, nella matrice  $\mathbf{C}_V$  non compaiono i fattori di correzione a taglio ( $\kappa_x = \kappa_y = 1$  e  $\kappa_{xy} = 0$ ), indipendentemente dalla forma della sezione. La correzione a taglio viene infatti introdotta mediante l'arricchimento della descrizione del warping ottenuta aggiungendo i modi con ingobbimento non lineare. In tal caso infatti, nascono degli accoppiamenti tra il taglio e gli sforzi generalizzati associati a tali modi deformativi.

### 3.3 Teoria di Capurso

In questo paragrafo sulla base della cinematica proposta in precedenza, che come visto consente di recuperare completamente la teoria di trave alla Vlasov deformabile a taglio a partire dalla Generalized Beam Theory, verrà in maniera analoga, presentata la procedura che consente di ricondursi alla teoria di trave proposta da Capurso. A tal fine nella procedura di Cross Section Analysis necessaria nella GBT per definire i modi deformativi ammissibili per la trave, si considereranno oltre agli stessi modi flesso-taglianti fondamentali in precedenza impiegati, anche un certo numero di modi con ingobbamento non lineare definiti sui nodi interni della sezione. Sotto queste ipotesi, a partire dalle 3.27-3.29, la cinematica può quindi essere scritta come di seguito:

$$d_n(n, s, z) = v_n - \mathbf{r}^T \mathbf{e}_s \theta_z, \quad (3.64)$$

$$d_s(n, s, z) = v_s - \mathbf{r}^T \mathbf{e}_n \theta_z, \quad (3.65)$$

$$d_z(n, s, z) = v_z - x \theta_y + y \theta_x - \phi w_\phi + \sum_i \varphi_i w_i. \quad (3.66)$$

in cui come atteso, l'aggiunta di modi con ingobbamento non lineare non porta alcun contributo nella definizione degli spostamenti nel piano della sezione, ma solo un arricchimento dello spostamento lungo la linea d'asse. In particolare, tale contributo è definito come una sommatoria di combinazioni lineari tra le funzioni  $\varphi_i$  definite nel piano della sezione, e i parametri cinematici associati  $w_i$ .

È bene precisare, che in realtà rispetto alla teoria di Capurso le funzioni  $\varphi_i$  non sono auto funzioni del problema considerato, ma funzioni lineari a tratti. Rammentando però che i modi con ingobbamento non lineare, che consentono tale arricchimento, sono definiti sui nodi interni della sezione trasversale e quindi la loro posizione e la loro numerosità non dipende dalla geometria della sezione trasversale considerata, si può concludere dicendo che impiegando un certo numero di nodi interni e quindi di modi deformativi, questi recuperino e approssimino accuratamente le auto-funzioni impiegate nella classica teoria di Capurso. In alternativa, si potrebbero assumere come funzioni  $\varphi_i$  proprio le auto-funzioni.

Chiarito tale aspetto, dal campo di spostamento associato ai soli modi con ingobbamento non lineare, vengono ricavati i contributi al vettore deformazioni generalizzate

le cui  $i$ -esime componenti risultano essere le seguenti:

$$\alpha_i = 0, \quad (3.67)$$

$$\chi_i \neq 0, \quad (3.68)$$

$$\beta_i = 0, \quad (3.69)$$

$$\gamma_i \neq 0. \quad (3.70)$$

Le componenti di sforzo generalizzate non nulle, associate ai parametri relativi ai modi con ingobbamento non lineare, possono quindi essere scritte come di seguito riportato:

$$M_i = \int_A \varphi_i \sigma_{zz} dA, \quad V_i = - \int_A \overset{\circ}{\varphi}_i \tau_{zs} dA. \quad (3.71)$$

Analogamente le uniche componenti non nulle del vettore dei carichi generalizzati sono le seguenti:

$$c_i = \int_A \varphi_i b_z dA. \quad (3.72)$$

Le equazioni di equilibrio aggiuntive associate sono quindi del tipo:

$$-M'_i - V_i - c_i = 0. \quad (3.73)$$

La matrice di rigidità  $\mathbf{C}$  della sezione associata a tali sforzi può essere ottenuta attraverso il principio dei lavori virtuali ed in particolare il legame tra sforzi  $\mathbf{M}$  e deformazioni generalizzate relativi ai parametri  $\chi$  è del tipo:

$$M_i = EI_i \chi_i, \quad (3.74)$$

dove  $I_i = \int_A \varphi_i^2 dA$ .

Il legame tra le deformazioni generalizzate  $\gamma$  e gli sforzi generalizzati associati, posto  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_l, \mathbf{V}_h]$ , in cui si sono distinti con il pedice  $l$  le componenti di sforzo generalizzate associate ai quattro modi flessione-taglianti fondamentali e con il pedice  $h$  le componenti dello stesso vettore associate ai rimanenti parametri e ai modi con ingobbamento non lineare, viene espresso come mostrato di seguito:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_l \\ \mathbf{V}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v^{(l)} & \mathbf{C}_v^{(lh)} \\ sym & \mathbf{C}_v^{(h)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_l \\ \gamma_h \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Nelle relazioni precedenti in particolare sono state fatte le seguenti posizioni:

$$\gamma_l = [\gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_\phi]^T, \quad \gamma_h = [\gamma_i], \quad (3.76)$$

$$\mathbf{V}_l = [ V_x \quad V_y \quad V_\phi ]^T, \quad \mathbf{V}_h = [ V_i ]. \quad (3.77)$$

Le generiche componenti delle matrici  $\mathbf{C}_v^{(l)}$ ,  $\mathbf{C}_v^{(h)}$  e  $\mathbf{C}_v^{(lh)}$  sono ottenute mediante le seguenti equazioni :

$$\{ \mathbf{C}_v^{(h)} \}_{ii} = GA_i, \quad \text{con } A_i = \int_A \phi_i^{\circ 2} dA, \quad (3.78)$$

$$\{ \mathbf{C}_v^{(lh)} \}_{1i} = -G \int_A x_m^{\circ} \phi_i^{\circ} dA, \quad (3.79)$$

$$\{ \mathbf{C}_v^{(lh)} \}_{2i} = G \int_A y_m^{\circ} \phi_i^{\circ} dA, \quad (3.80)$$

$$\{ \mathbf{C}_v^{(lh)} \}_{3i} = -G \int_A \phi_m^{\circ} \phi_i^{\circ} dA. \quad (3.81)$$

In particolare si osserva che:

- la matrice  $\mathbf{C}_v^{(h)}$  risulta diagonale,
- ci sia accoppiamento tra le componenti  $\gamma_l$  e le componenti  $\gamma_h$ .

### 3.4 Trave indeformabile a taglio

In analogia a quanto fatto in precedenza in questo paragrafo si mostrerà come è possibile a partire dalla GBT scritta nella nuova formulazione, recuperare la teoria di trave GBT classica, indeformabile a taglio. In particolare a tal fine si assume che  $\gamma_{zn} = \gamma_{zs}^{(M)} = 0$ . Affinchè tale condizione sia soddisfatta, a partire da quanto mostrato nel paragrafo 3.2, è sufficiente porre:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

Conseguentemente risulta:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}', \quad (3.83)$$

e le componenti di deformazione generalizzate si riducono alla forma seguente:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\chi} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \partial_z^2 \\ \partial_z \end{bmatrix} [ \mathbf{v} ]. \quad (3.84)$$

Mediante l'operatore aggiunto formale dell'operatore differenziale delle 3.84, si ottengono le equazioni di equilibrio scritte come di seguito riportato:

$$\mathbf{S} + \mathbf{M}'' - \mathbf{T}' - \mathbf{f}_v = \mathbf{0}, \quad (3.85)$$

con le relative condizioni al contorno:

$$\mathbf{T} - \mathbf{M}' - \mathbf{f}_w = \pm \bar{\mathbf{Q}}, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.86)$$

$$\mathbf{M} = \pm \bar{\mathbf{W}}, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{v}' = \bar{\mathbf{w}}. \quad (3.87)$$

### 3.5 Esempio di torsione non uniforme con deformabilità tagliante

Si consideri una trave soggetta a torsione non uniforme. Per semplicità di trattazione, si assuma che la sezione trasversale abbia due assi di simmetria  $x_c = y_c = 0$ , e che  $c_\phi = c_z = 0$ .

Le relative equazioni di equilibrio, ottenute come mostrato nel paragrafo 3.2, possono quindi essere scritte nella seguente forma:

$$-E\Gamma\chi'_\phi + \frac{1}{2}GJ_t\beta - G\bar{I}_c\gamma_\phi = 0, \quad (3.88)$$

$$-\frac{1}{2}GJ_t\beta' - G\bar{I}_c\gamma'_\phi = 0. \quad (3.89)$$

Le relative condizioni al contorno sono di seguito riportate:

$$E\Gamma\chi_\phi = \pm \bar{W}, \quad \text{oppure} \quad w_z = \bar{w}, \quad (3.90)$$

$$\frac{1}{2}GJ_t\beta + G\bar{I}_c\gamma_\phi = \pm \bar{Q}, \quad \text{oppure} \quad \theta_z = \bar{\theta}_z. \quad (3.91)$$

Andando quindi a sostituire le equazioni di congruenza (Eqs. 2.25-2.28):

$$\chi_\phi = w'_\phi = (\theta'_z - \gamma_\phi)', \quad (3.92)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\theta'_z + w_\phi) = \theta'_z - \frac{1}{2}\gamma_\phi, \quad (3.93)$$

$$\gamma_\phi = \theta'_z - w_\phi, \quad (3.94)$$

nelle Eqs. 3.88-3.89 si ottengono le seguenti espressioni:

$$-E\Gamma w''_\phi + \frac{1}{4}GJ_t(\theta'_z + w_\phi) - G\bar{I}_c(\theta'_z - w_\phi) = 0, \quad (3.95)$$

$$\left[ -\frac{1}{4}GJ_t(\theta'_z + w_\phi) - G\bar{I}_c(\theta'_z - w_\phi) \right]' = 0. \quad (3.96)$$

A seguito di manipolazioni algebriche l'Eq. 3.95 si può quindi riscrivere come:

$$-E\Gamma w_\phi'' + \frac{1}{4}G\bar{I}_c \left(1 + \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right) w_\phi - G\bar{I}_c \left(1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right) \theta_z' = 0, \quad (3.97)$$

da cui si ottiene:

$$\theta_z' = \frac{1}{\beta} - \frac{E\Gamma}{G\bar{I}_c \left(1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right)} w_\phi'', \quad (3.98)$$

dove si è posto:

$$\beta = \frac{1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c}}{1 + \frac{J_t}{4\bar{I}_c}}. \quad (3.99)$$

Sostituendo la 3.98 nella 3.96 risulta:

$$\left[ \beta w_\phi - \frac{1}{\beta} w_\phi + \frac{E\Gamma}{G\bar{I}_c \left(1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right)} w_\phi'' \right]' = 0. \quad (3.100)$$

La relazione 3.100 può essere riscritta nella forma seguente:

$$\left[ \frac{\frac{J_t}{\bar{I}_c}}{\left(1 + \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right) \left(1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right)} w_\phi + \frac{E\Gamma}{G\bar{I}_c \left(1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right)} w_\phi'' \right]' = 0. \quad (3.101)$$

Posto quindi:

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{GJ_t}{E\Gamma \left(1 + \frac{J_t}{4\bar{I}_c}\right)}, \quad (3.102)$$

la 3.101 assume la forma compatta di seguito riportata:

$$w_\phi''' - \hat{\alpha}^2 w_\phi' = 0. \quad (3.103)$$

Per risolvere l'equazione differenziale 3.103 si assume una soluzione del tipo:

$$w_\phi = Ae^{\hat{\alpha}z} + Be^{-\hat{\alpha}z} + C, \quad (3.104)$$



per cui andando a sostituire la 3.104 nella 3.98 si ottiene:

$$\theta'_z = \frac{1}{\beta} (Ae^{\hat{\alpha}z} + Be^{-\hat{\alpha}z} + C) - \frac{E\Gamma\hat{\alpha}^2}{GJ_t \left(1 - \frac{J_t}{4I_c}\right)} (Ae^{\hat{\alpha}z} + Be^{-\hat{\alpha}z}), \quad (3.105)$$

da cui:

$$\theta'_z = \beta (Ae^{\hat{\alpha}z} + Be^{-\hat{\alpha}z}) + \frac{1}{\beta} C. \quad (3.106)$$

La relazione precedente si può quindi riscrivere come di seguito riportato:

$$\theta'_z = \beta (Ae^{\hat{\alpha}z} + Be^{-\hat{\alpha}z} + \hat{C}). \quad (3.107)$$

$$(3.108)$$

Nell'espressione precedente si è posto:

$$\hat{C} = \left( \frac{1 + \frac{J_t}{4I_c}}{1 - \frac{J_t}{4I_c}} \right)^2 C = \frac{1}{\beta^2}. \quad (3.109)$$

Integrando la 3.107 può quindi essere ottenuta l'espressione relativa alla rotazione torsionale nella forma seguente:

$$\theta_z = \beta \left( \frac{A}{\alpha} e^{\hat{\alpha}z} - \frac{B}{\alpha} e^{-\hat{\alpha}z} + \hat{C}z + D \right). \quad (3.110)$$

$$(3.111)$$

Per il problema in esame le condizioni al contorno risultano essere espresse dalle seguenti relazioni:

$$w_\phi = \bar{w}, \quad \text{oppure} \quad w_\phi = \pm \frac{\bar{w}}{E\Gamma}, \quad (3.112)$$

$$\theta_z = \bar{\theta}, \quad \text{oppure} \quad \left(1 + \frac{J_t}{4I_c}\right) \theta'_z - \left(1 - \frac{J_t}{4I_c}\right) w_\phi = \pm \frac{\bar{Q}}{GJ_t}, \quad (3.113)$$

mentre l'espressione degli sforzi generalizzati diversi sono:

$$M_z = GJ_t \left[ \left(1 + \frac{J_t}{4I_c}\right) \theta'_z - \left(1 - \frac{J_t}{4I_c}\right) w_\phi \right], \quad (3.114)$$

$$B = E\Gamma w'_\phi, \quad (3.115)$$

$$T = \frac{1}{2} GJ_t (\theta'_z + w_\phi). \quad (3.116)$$

### 3.5.1 Esempio numerico

Come mostrato in Fig. 3.6, si consideri una trave incastrata di lunghezza  $l$  soggetta ad un momento torcente concentrato  $\bar{Q}$ , applicato all'estremo libero. Le condizioni

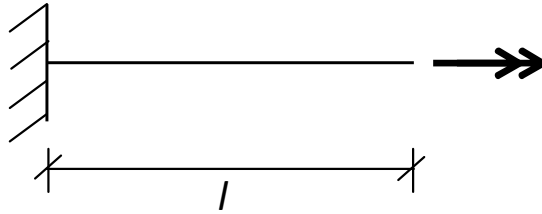


Figura 3.6: Esempio 1

al contorno possono quindi essere espresse come:

$$\theta_z(0) = 0, \quad M_z(l) = \bar{Q}, \quad (3.117)$$

$$w_\phi(0) = 0, \quad w'_\phi(l) = 0. \quad (3.118)$$

Nel caso particolare, le costanti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$  dell'Eq. 3.110 assumono la forma seguente:

$$C = \frac{\bar{Q}}{GJ_t} \left[ 1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c} \right] \quad A = -\frac{C}{1 + e^{2\hat{\alpha}l}} \quad (3.119)$$

$$B = -C \frac{e^{2\hat{\alpha}l}}{1 + e^{2\hat{\alpha}l}} \quad D = \frac{C}{\alpha} \frac{1 - e^{2\hat{\alpha}l}}{1 + e^{2\hat{\alpha}l}} \quad (3.120)$$

Andando a sostituire le relazioni 3.119-3.120 nella Eqs. 3.110 e 3.104 risulta:

$$\theta_z = \frac{\bar{Q}}{GJ_t} \left( 1 - \frac{J_t}{4\bar{I}_c} \right) \left[ z - \beta^2 \frac{e^{\hat{\alpha}z} + e^{2\hat{\alpha}l}(1 - e^{-\hat{\alpha}z}) - 1}{\hat{\alpha}(1 + e^{2\hat{\alpha}l})} \right], \quad (3.121)$$

$$w_\phi = \frac{\bar{Q}}{GJ_t} \left( 1 + \frac{J_t}{4\bar{I}_c} \right) \left[ \frac{1 - e^{\hat{\alpha}z} + e^{2\hat{\alpha}l}(1 - e^{-\hat{\alpha}z})}{1 + e^{2\hat{\alpha}l}} \right]. \quad (3.122)$$

L'angolo di torsione  $\theta_z$  secondo la teoria di Vlasov, che si rammenta considera la torsione non uniforme, ma non la deformabilità a taglio della trave, può essere

espresso come:

$$\theta_z = \frac{\bar{Q}}{GJ_t} \left( 1 - \frac{J}{4\bar{I}_c} \right) \left[ z - \frac{e^{\alpha z} + e^{2\alpha l}(1 - e^{-\alpha z}) - 1}{\alpha(1 + e^{2\alpha l})} \right]. \quad (3.123)$$

Dal confronto tra l'Eq. 3.123 e l'Eq. 3.121 si rileva come la differenza tra le due formulazioni sia dovuta ad un parametro "correttivo"  $\beta$  che compare nella 3.121. L'entità di tale parametro rappresenta l'influenza della deformabilità tagliante nella formulazione di trave alla Vlasov.

Con particolare riferimento alla sezione a doppio T di Fig. 3.7 verrà valutata l'entità di tale parametro. Si assume quindi:

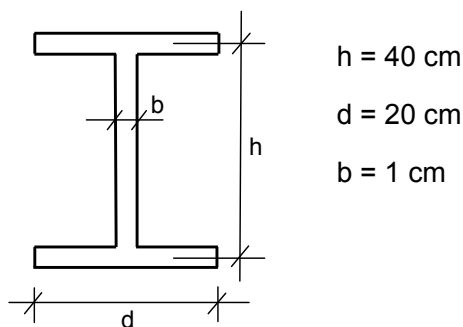


Figura 3.7: Caratteristiche sezione trasversale

$$\nu = 0.25 \quad \text{per cui risulta} \quad G = 0.4E. \quad (3.124)$$

Le rigidzze torsionali alla Saint Venant e alla Vlasov risultano quindi rispettivamente essere pari a:

$$J_t = \frac{80}{3} \text{ cm}^4, \quad (3.125)$$

$$\Gamma = \frac{1.6}{3} 10^6 \text{ cm}^6, \quad (3.126)$$

mentre il momento polare rispetto al centro di taglio  $I_c$  è ottenuto mediante l'espressione di seguito riportata:

$$I_c = \frac{2db^3}{12} + 2db\frac{h^2}{4} + \frac{bdh^3}{12} + \frac{2bd^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{372020}{3} \text{ cm}^4. \quad (3.127)$$

Richiamando la definizione del parametro, per la sezione considerata risulta:

$$\beta = \frac{1 - \frac{J_t}{4I_c}}{1 + \frac{J_t}{4I_c}} = 0.9999, \quad (3.128)$$

per cui  $\beta^2$  risulta pari a 0.9998. Si può rilevare, essendo il parametro  $\beta \approx 1$ , che la deformabilità tagliante per la sezione considerata è trascurabile.

Concludendo, in modo del tutto analogo a quanto fatto precedentemente si sono considerate altre due sezioni con caratteristiche geometriche differenti e si è calcolato il parametro  $\beta$ .

In particolare si è assunto nel primo caso:

$$h = 20 \text{ cm}, \quad d = 20 \text{ cm}, \quad b = 2 \text{ cm}. \quad (3.129)$$

Risulta che  $\frac{J_t}{4I_c} = 1.10 \cdot 10^{-3}$  per cui  $\beta = 0.998$ .

Nel secondo caso si è assunto:

$$h = 10 \text{ cm}, \quad d = 10 \text{ cm}, \quad b = 2 \text{ cm}. \quad (3.130)$$

Risulta che  $\frac{J_t}{4I_c} = 6.60 \cdot 10^{-3}$  per cui  $\beta = 0.999$ .

Concludendo si può dire che anche in questi casi la deformabilità tagliante nella formulazione di trave alla Vlasov può essere trascurata.

## Capitolo 4

# Modellazione agli elementi finiti

### Abstract

In this chapter a compatible formulation for a finite element based on the new Generalized Beam Theory proposed on chapter 3 is formulated.

The element has been implemented in a calculation engine called CAPS2. The approach used and the choices made in the formulation are described below. Finally, a series of numerical results will be shown, in which both previous works present in the literature and tridimensional FEM models developed using commercial software are used as references.

### Sommario

In questo capitolo verrà presentata la classica formulazione compatibile di un elemento finito basato sulla Generalized Beam Theory scritta nella nuova formulazione proposta nel Capitolo 3.

L'elemento è stato implementato in un codice di calcolo chiamato CAPS2. Di seguito, verrà descritto l'approccio e le scelte compiute in tale contesto.

Saranno infine mostrati una serie di risultati numerici, in cui si sono assunti come riferimento lavori presenti in letteratura e risultati forniti da modelli tridimensionali

ottenuti mediante software commerciali.

## 4.1 Formulazione compatibile

La trave è suddivisa in elementi finiti non sovrapposti e, su ciascun elemento, gli spostamenti generalizzati sono espressi come:

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{N}(z)\mathbf{q}, \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{q}$  è il vettore dei parametri nodali e  $\mathbf{N}$  invece, la matrice che colleziona le

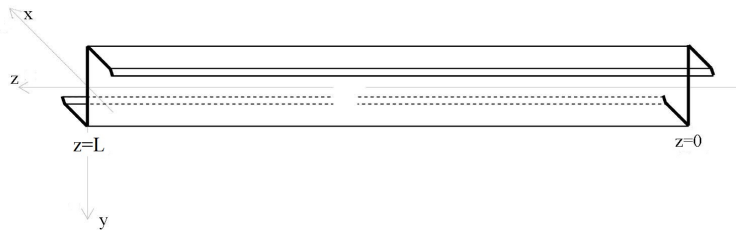


Figura 4.1: Geometria dell'elemento finito

funzioni di interpolazione.

Con tale assunzione, il principio dei lavori virtuali consente di ricavare, per il generico elemento finito, la relazione tra spostamenti nodali  $\mathbf{q}$  e carichi nodali equivalenti  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (4.2)$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidità:

$$\mathbf{K} = \int_0^{L_e} (\mathbf{DN})^T \mathbf{C}(\mathbf{DN}) dz \quad (4.3)$$

avendo indicato con  $L_e$  la lunghezza del generico elemento finito. Seguono le ordinarie procedure di assemblaggio e di imposizione delle condizioni al contorno.

## 4.2 Alcuni esempi

Nel seguito verranno mostrati alcuni esempi numerici. In particolare, si focalizzerà l'attenzione sull'influenza della deformabilità a taglio e della distorsione di sezione,

nonchè sulla ricostruzione dello stato tensionale tridimensionale, mediante il confronto tra i risultati ottenuti impiegando la GBT nella formulazione proposta, i risultati presenti in letteratura e i risultati ottenuti da modelli tridimensionali mediante software commerciali agli elementi finiti.

### 4.2.1 Esempio 1

Si consideri la trave a mensola soggetta ad un carico distribuito applicato così come mostrato in Fig. 4.2. Il materiale è acciaio e le dimensioni della sezione trasversale

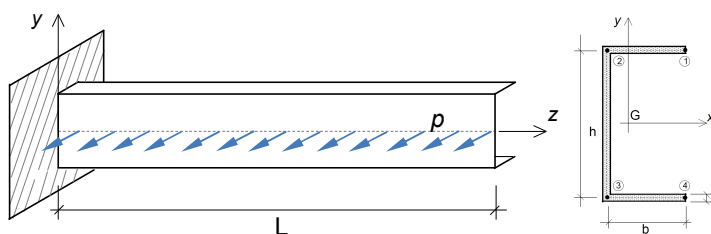


Figura 4.2: Trave a mensola soggetta con sezione a Z soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

sono come di seguito riportate:  $b = 120$  mm,  $h = 180$  mm,  $t = 2$  mm e  $L = 2000$  mm. Il carico distribuito  $p$  applicato è pari a  $10$  N/mm. Il test si prefigge l'obiettivo di valutare l'influenza della distorsione di sezione e sono per questo considerati e confrontati i risultati ottenuti considerando:

1. solo i quattro modi deformativi flesso-taglianti fondamentali, tali per cui la sezione rimane rigida nel proprio piano (nei grafici seguenti indicati con "GBT Fond.");
2. quattro modi deformativi flesso-taglianti fondamentali più due modi flesso-taglianti locali associati ai nodi di estremità (nei grafici seguenti indicati con "GBT Fond. + Ext. Loc");
3. quattro modi deformativi flesso-taglianti fondamentali più modi flesso-taglianti locali associati ai soli nodi interni (nei grafici seguenti indicati con "GBT Fond. + Int. Loc");

4. quattro modi deformativi flessio-taglianti fondamentali più modi flessio-taglianti locali associati ai nodi di estremità e a nodi interni (nei grafici seguenti indicati con "GBT Fond. + Ext. Loc + Int. Loc").

Si sono assunti come riferimento i risultati ottenuti mediante una modellazione tridimensionale a base di elementi shell ottenuta con il software commerciale Abaqus, Fig. 4.3.

Di seguito sono quindi mostrati i risultati delle analisi lineari statiche svolte, in ter-

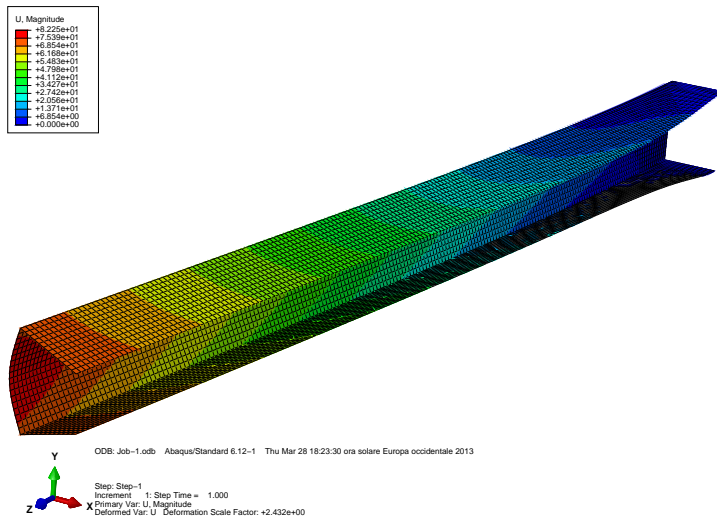


Figura 4.3: Deformata modello tridimensionale di Abaqus

mini di spostamento adimensionalizzato rispetto alla quantità  $\frac{pL^4}{dEI}$ . In particolare, sono mostrati in Fig. 4.5 e Fig. 4.4, i risultati relativi al nodo 4. Sono inoltre confrontati in Fig. 4.6 gli spostamenti in direzione  $x$  relativi al nodo in cui è applicato il carico esterno.

In particolare, dal grafico mostrato in Fig. 4.4 si rileva che, come atteso, lo spostamento in direzione  $y$  del nodo 4, relativo ad una GBT con i soli modi fondamentali "GBT Fond." risulti nullo, in quanto, essendo il carico applicato lungo la retta passante per il centro di taglio della sezione, questa non ruota e, mantenendosi rigida nel proprio piano, subisce una traslazione in direzione  $x$  (Fig. 4.5). Il modello



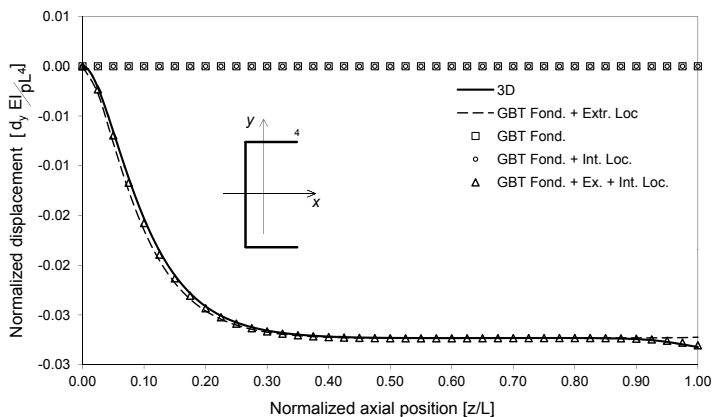


Figura 4.4: Spostamento in direzione  $y$  del nodo 4.

tridimensionale mostra però come tale spostamento in realtà sia diverso da zero, in quanto la sezione distorcendosi tende a "chiudersi". A tal proposito si nota l'ottimo accordo tra i risultati ottenuti con una GBT arricchita con i modi locali (GBT Fond.+Extr. Loc e GBT Fond.+Extr. Loc+ Int. Local) e i risultati di riferimento. In particolare nel caso in cui siano presenti modi locali relativi ai nodi estremi e ai nodi interni (GBT Fond.+Extr. Loc+ Int. Local) si rileva l'ottimo accordo con i risultati del modello tridimensionale anche nel caso di effetti localizzati che si verificano in corrispondenza dell'estremo libero della trave.

In Fig. 4.6 è riportato lo spostamento in direzione  $y$ , del nodo in corrispondenza del punto di applicazione del carico esterno. In particolare, si rileva come i risultati ottenuti con la GBT via via sempre più ricca in termini di modi deformativi tendono ad essere più prossimi a quelli di riferimento.

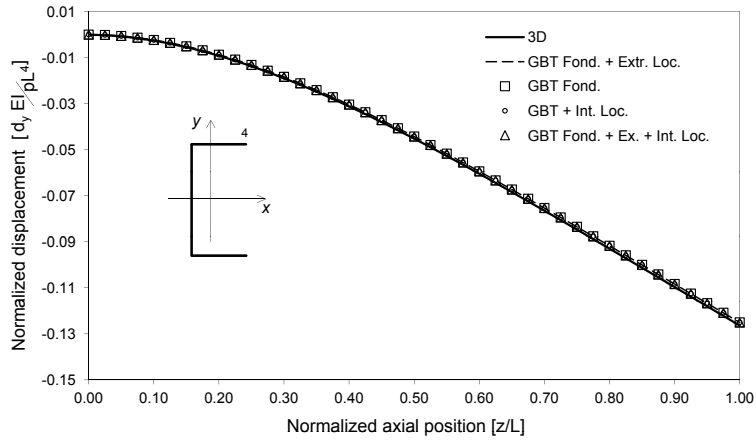


Figura 4.5: Spostamento in direzione  $x$  del nodo 4.

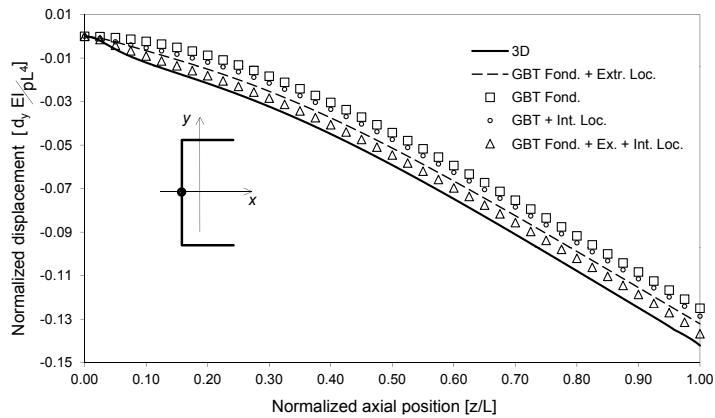


Figura 4.6: Spostamento in direzione  $x$  del punto di applicazione del carico.

## 4.2.2 Esempio 2

In questo caso è presa in esame una trave a mensola, con sezione C, al cui estremo libero è applicato un momento torcente concentrato  $T$ , così come mostrato in Fig.4.7. In particolare, seguendo l'esempio originale proposto da Capurso [26] si è assunto:  $b = 3.5$  m,  $h = 5$  m,  $t = 20$  cm e  $L = 20$  m, materiale calcestruzzo e momento torcente  $T$  applicato all'estremo libero pari a 1000 kNm.

Il test si prefigge l'obiettivo di valutare l'influenza della deformabilità tagliante.

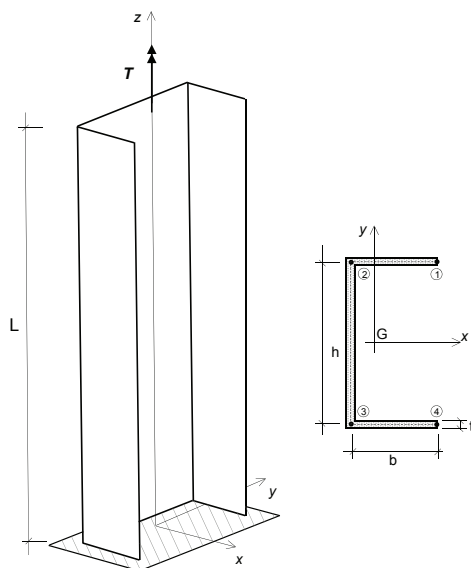


Figura 4.7: Trave a mensola soggetta ad un momento concentrato  $T$  in corrispondenza dell'estremo libero.

Pertanto sono considerati nella procedura di Cross Section Analysis:

- quattro modi flesso-taglianti associati ai nodi naturali ( $n_F = 4$ ,  $n_L = 0$ );
- quattro modi flesso-taglianti associati ai nodi naturali più tre modi locali ( $n_F = 4$ ,  $n_L = 3$ ), ottenuti aggiungendo un nodo interno su ciascuna parete. Per quest'ultimi, la distorsione di sezione è stata vincolata.

I risultati ottenuti, espressi in termini di rotazione torsionale a diverse coordinate della linea d'asse della trave, sono riportati in Tabella 4.1 insieme a quelli di letteratura relativi alla teoria di Vlasov e alla teoria di Capurso, assunta come riferimento. Si rileva che i risultati ottenuti sono paragonabili a quelli di riferimento già nel caso siano considerati solo i quattro modi fondamentali ( $n_F = 4$ ,  $n_L = 0$ ). L'accuratezza migliora ulteriormente considerando anche i modi locali. Aggiungendo ulteriori nodi interni sulle pareti, e quindi modi deformativi locali, la soluzione converge a quella di riferimento.

$z/L$	Formulazione proposta		Capurso	Vlasov
	$n_F = 4$ , $n_L = 0$	$n_F = 4$ , $n_L = 3$		
1/6	1.88	1.91	1.93	1.63
1/3	6.59	6.66	6.69	6.11
1/2	13.54	13.64	13.68	12.84
2/3	22.15	22.28	22.33	21.25
5/6	31.85	32.01	32.07	30.75
1	42.10	42.29	42.36	40.81

Tabella 4.1: Rotazione torsionale (milliradiani)

### 4.2.3 Esempio 3

In questo esempio, si è considerata una trave a mensola soggetta ad un carico distribuito applicato così come mostrato in Fig. 4.8. In materiale è acciaio e le

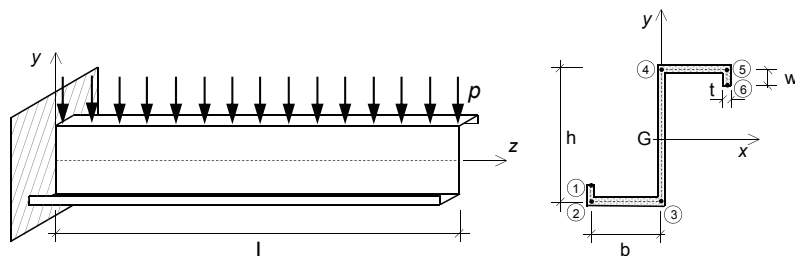


Figura 4.8: Trave a mensola soggetta con sezione a Z soggetta ad un carico uniformemente distribuito.

dimensione della sezione trasversale le seguenti:  $b = 40$  mm,  $h = 120$  mm,  $t = 1.5$  mm,  $w = 15$  mm e  $L = 500$  mm.

L'esempio è stato svolto, al fine di valutare l'influenza della deformabilità tagliante, della distorsione di sezione e la loro mutua interazione. Sono stati pertanto considerati i sei modi flessio-taglianti fondamentali associati ai nodi naturali, di cui quattro prevedono l'indeformabilità nel piano della sezione, mentre due distorsione di sezione.

I risultati ottenuti sono stati indicati con "GBT w shear modes" nel caso in cui la deformabilità tagliante è stata considerata, mentre al contrario con "GBT wo shear modes" nel caso in cui questa sia stata opportunamente vincolata. Tali risultati sono stati confrontati con i risultati ottenuti con una teoria di Vlasov, e con i risultati di un modello tridimensionale agli elementi finiti assunto come riferimento.

In particolare in Fig. 4.9 è rappresentato lo spostamento adimensionalizzato (rispetto alla quantità  $\frac{pL^4}{EI}$ ) in direzione  $y$  del nodo 4. L'ottimo accordo tra la soluzione "GBT wo S modes" e la soluzione di Vlasov mostra come l'influenza della distorsione di sezione nella determinazione di tale spostamento sia molto modesta. Al contrario, dal confronto tra la soluzione di Vlasov e la soluzione di riferimento, appare chiara l'influenza della deformabilità tagliante.

Quanto detto trova chiaramente riscontro osservando le differenze tra i risultati ottenuti con "GBT wo S modes" in perfetto accordo con la teoria di Vlasov e i risultati ottenuti invece con "GBT w S modes" la cui accuratezza è paragonabile ai

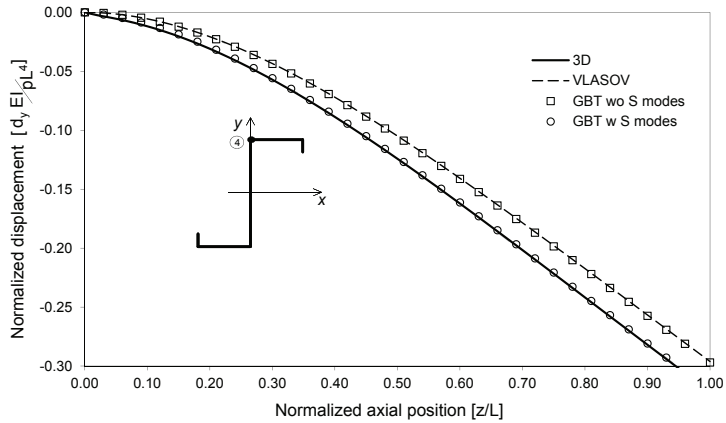


Figura 4.9: Trave a mensola soggetta con sezione a Z: spostamento in direzione  $y$  del nodo 4.

risultati assunti come riferimento.

In Fig. 4.10 sono invece riportati, sempre per lo stesso esempio, gli spostamenti in

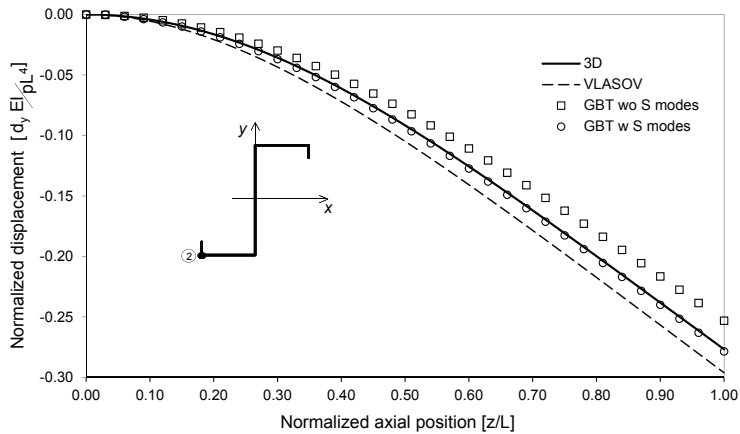


Figura 4.10: Trave a mensola soggetta con sezione a Z: spostamento in direzione  $y$  del nodo 2.

direzione  $y$  del nodo 2, che come fatto in precedenza sono stati normalizzati rispetto alla quantità  $\frac{pL^4}{EI}$ . Si mostra come per tale punto della sezione trasversale sia la deformabilità a taglio che la distorsione nel piano della sezione non siano trascurabili. In particolare, le differenze tra "GBT w S modes" e "GBT wo S modes" consentono di valutare l'incidenza della deformabilità tagliante, mentre dal confronto tra i risultati ottenuti mediante la teoria di Vlasov e la GBT non deformabile a taglio è possibile valutare l'influenza della distorsione di sezione. Anche in questo caso, si rileva l'ottimo accordo tra la teoria proposta e i risultati di riferimento.

#### 4.2.4 Esempio 4

In questo esempio si è proceduto ad una validazione del modello di trave GBT, attraverso il confronto con i risultati sperimentali relativi allo stato tensionale, tratti da un lavoro presente in letteratura [10], in cui sono pubblicati alcuni risultati sperimentali, confrontati con la teoria GBT classica. In particolare la struttura esaminata è una trave a mensola a sezione aperta non simmetrica, soggetta ad un carico trasversale  $F$ , applicato in corrispondenza dell'estremo libero.

In Fig. 4.11 è riportata la geometria della sezione trasversale, lo spessore della sezione pari a 1.5 mm e la lunghezza totale della trave pari a 898 mm. Il materiale è acciaio per cui si sono assunti:  $E = 210\,000$  MPa e  $\nu = 0.3$ .

Di seguito verranno confrontati i risultati da letteratura con i risultati ottenuti impiegando la formulazione proposta, in termini di stato tensionale ed in particolare l'attenzione verrà rivolta all'andamento della tensione normale (in direzione dell'asse della trave) in determinati punti sulla sezione trasversale.

Nello specifico, si dispone infatti, dei risultati sperimentali, per tre differenti condi-

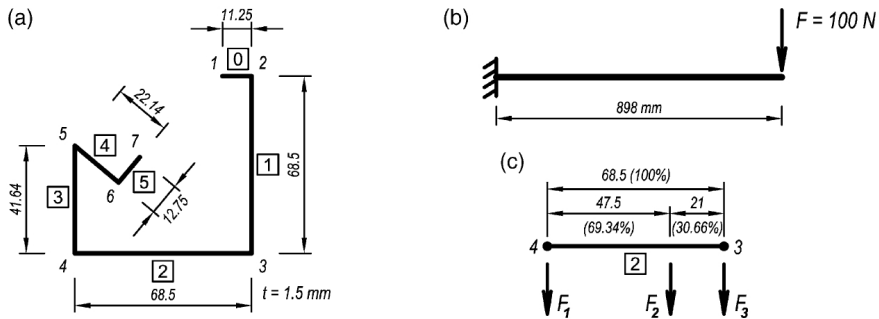


Figura 4.11: Modello analizzato: (a) dimensioni della sezione trasversale; (b) condizioni di vincolo e di carico; (c) posizione di applicazione del carico sulla parete 2 della sezione.

zioni di carico, in due predefinite sezioni trasversali: ad  $x = 90$  mm e ad  $x = 674$  mm, in cui sono stati installati i dispositivi di misura (Fig. 4.12). In particolare, in un caso, il carico è stato applicato in corrispondenza del centro di taglio, mentre in altri due casi è stato applicato in maniera eccentrica, come mostrato in Fig. 4.13.

Considerato che i risultati sperimentali riportati in [10] sono reattivi alla componente di tensione  $\sigma_{zz}$ , che si ricorda risulta essere completamente attiva (Eq.



2.131), la determinazione dello stato tensionale tridimensionale, relativo alla GBT proposta, è stato ottenuto per via elasto-cinematica. Il confronto tra i risultati speri-

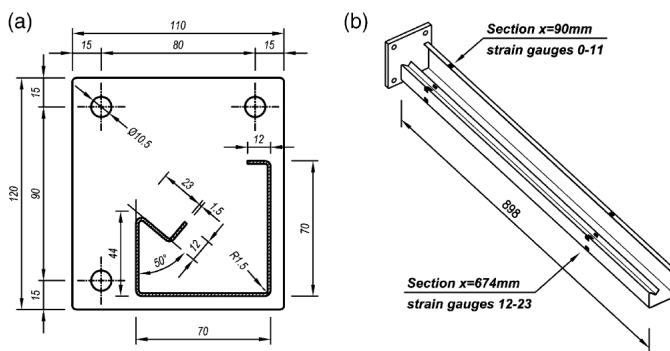


Figura 4.12: Dettagli del test sperimentale:(a) dimensioni della sezione trasversale; (b) posizione dei dispositivi di misura.

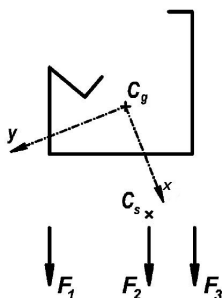


Figura 4.13: Punti di applicazione del carico sulla sezione trasversale di estremità.

mentali e i risultati GBT ottenuti, sono mostrati nelle Fig. 4.14-4.15. In particolare, sono riportati i risultati ottenuti con la formulazione proposta considerando o non considerando la deformabilità tagliante delle pareti della sezione. In particolare tali risultati sono mostrati nel caso di  $F = 500$  N, rispettivamente nella condizione di carico 2 in corrispondenza della sezione  $z = 90$  mm in Fig. 4.14 e nel caso della condizione di carico 3 per la sezione  $z = 674$  mm in Fig. 4.15.

Dal confronto si rileva l'ottimo accordo dei risultati ottenuti con i risultati speri-

mentali. Come era lecito attendersi (vista la geometria del problema e la condizione di carico), l'effetto della deformabilità tagliante risulta trascurabile. Infatti, i risultati "GBT w S modes" in cui viene considerata la deformabilità tagliante risultano coincidenti ai risultati "GBT wo S modes", in cui questa viene vincolata.

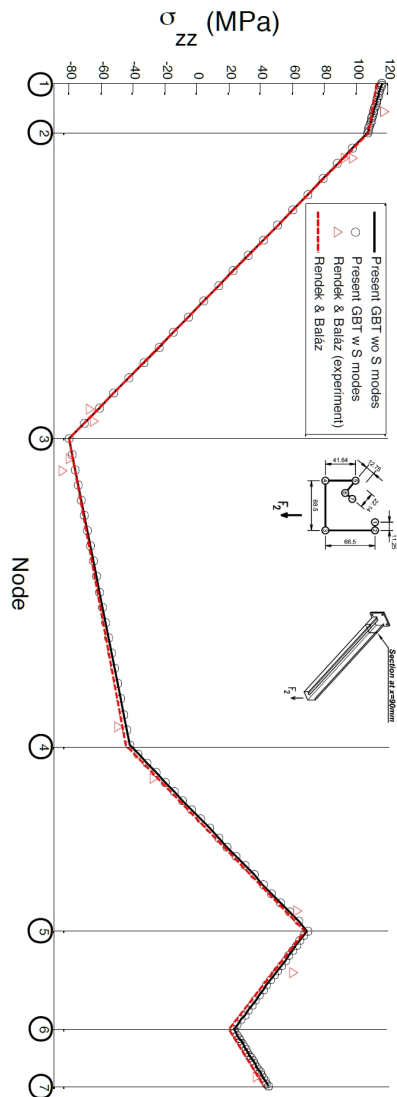


Figura 4.14: Tensione normale in  $x=90$  mm, carico  $F=500$  N in posizione 2.

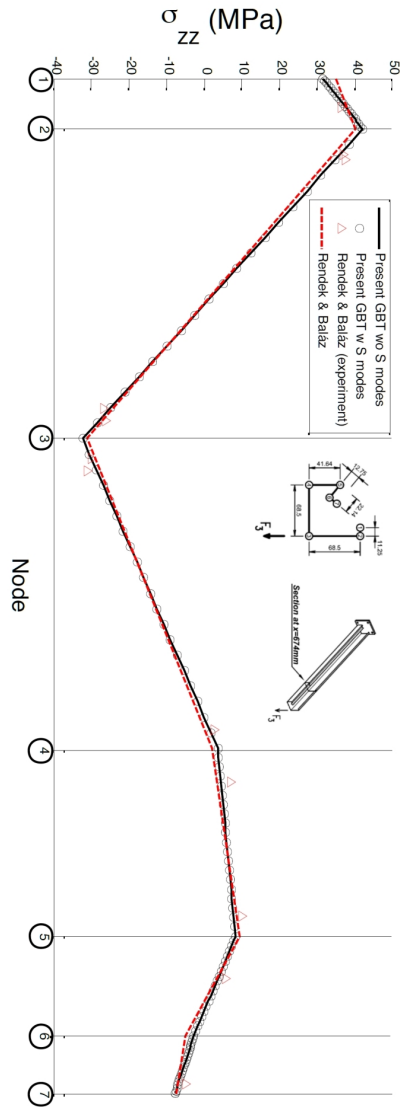


Figura 4.15: Tensione normale in  $x=674$  mm, carico  $F=500$  N in posizione 3.

### 4.2.5 Esempio 5

Si consideri lo stesso problema trattato nell'esempio del paragrafo 4.2.3 in cui, però, la lunghezza  $L$  della mensola è assunta pari a 1200 mm. Scopo del presente esempio è stato quello di validare la procedura di ricostruzione dello stato tensionale tridimensionale presentata nel paragrafo 2.10.

Di seguito sono quindi confrontati i risultati ottenuti secondo tale procedura con lo stato tensionale ottenuto per via elasto-cinematica. Sono stati assunti come riferimento, i risultati di un modello Abaqus in cui si sono impiegati elementi finiti brick a 8 nodi. In particolare, è stata impiegata una mesh sufficientemente fitta, in grado di ottenere una buona accuratezza delle quantità variabili lungo lo spessore della sezione trasversale.

In Fig. 4.16 sono confrontate le tensioni  $\tau_{zs}$  relative al punto medio della parete 3. Inoltre, la stessa quantità  $\tau_{zn}$  è mostrata in Fig.4.16 rispetto allo sviluppo della sezione in corrispondenza della coordinata  $z = 100$  mm. Si osserva come la procedura di ricostruzione del campo tensionale consenta di ottenere risultati in ottimo accordo con quelli di riferimento. In Fig. 4.18 viene invece mostrata la

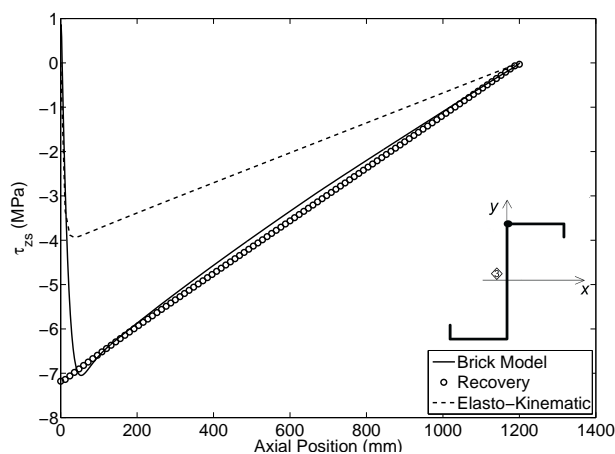


Figura 4.16: Tensione  $\tau_{zs}$  valutata nel punto medio della parete 3.

tensione  $\tau_{zn}$  valutata in corrispondenza del punto di coordinate  $s=8.5$  ( $s$  ha origine nel nodo 3 della sezione) ed  $n = 0$ . La stessa componente è riportata in Fig. 4.19 in corrispondenza della sezione  $z = 80$  mm e della parete 3, rispetto allo spessore della parete stessa.

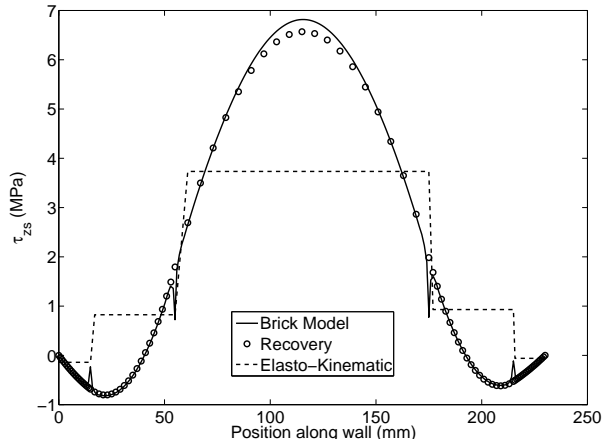


Figura 4.17: Tensione  $\tau_{zs}$  lungo la sezione, per  $z = 100$  mm.

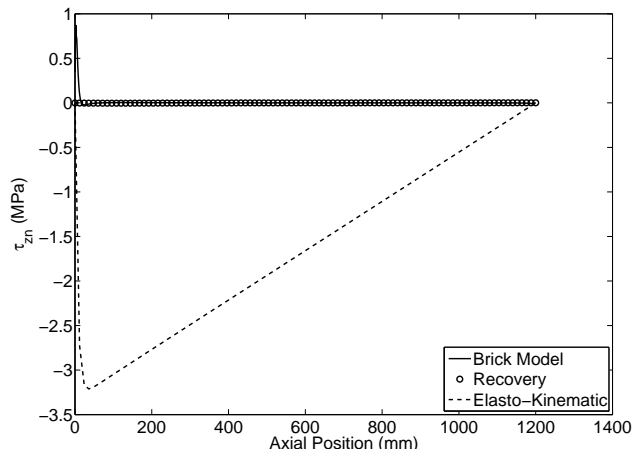


Figura 4.18: Tensione  $\tau_{zn}$  valutata in  $s=8.5$  mm con origine nel nodo 3.

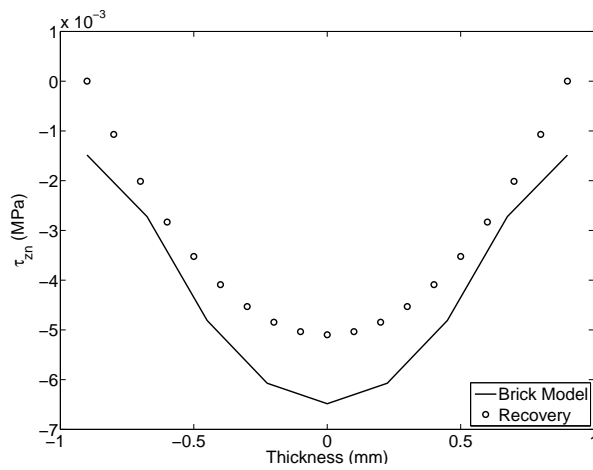


Figura 4.19: Tensione  $\tau_{zn}$  valutata sulla parete 3 in  $z=80$  rispetto allo spessore della parete.

### 4.2.6 Esempio 6

In questo esempio, con l'obiettivo di stimare l'influenza della deformabilità tagliante nel calcolo della carico critico di collasso, si considera una colonna incastrata alla base soggetta ad un carico di compressione centrato nel baricentro. In particolare, il confronto sarà mostrato con riferimento all'esempio di Fig. 4.20 riportato in [35]. Le caratteristiche geometriche della sezione trasversale sono le seguenti:  $b = 60$  mm,  $h = 100$  mm,  $t = 2$  mm,  $w = 10$  mm e  $L = 1200$  mm. Il materiale considerato è acciaio.

Nel lavoro preso come riferimento [35] sono riportati i moltiplicatori del carico criti-

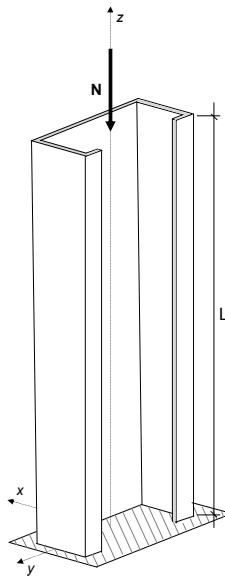


Figura 4.20: Colonna incastrata alla base soggetta ad un carico di punta  $N$ .

co ottenuti impiegando la GBT nella sua formulazione classica (che trascura quindi deformabilità tagliante) e gli stessi risultati ottenuti mediante una modellazione tridimensionale agli elementi finiti svolta con il software Abaqus. Tali risultati saranno quindi confrontati con i risultati ottenuti impiegando la Generalized Beam Theory con deformabilità tagliante proposta nel Capitolo 2. Le analisi sono state svolte considerando nella procedura di Cross Section Analysis gli stessi modi deformativi locali considerati in [35]. In particolare sono stati definiti 15 modi locali ottenuti



aggiungendo sulle pareti della sezione trasversale i nodi interni come riportato in Fig. 4.21.

I risultati ottenuti in termini di moltiplicatori critici dei carichi sono riportati in Tab.

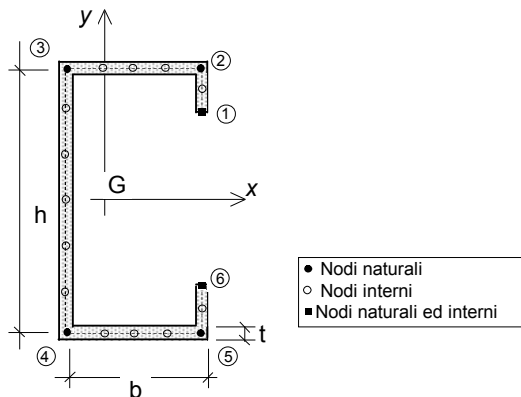


Figura 4.21: Sezione trasversale e indicazione sui nodi interni considerati

4.2. In particolare nella prima colonna e nella seconda colonna sono presenti i risultati da letteratura mentre nella terza colonna quelli ottenuti impiegando la GBT deformabile a taglio proposta.

Dal confronto si può osservare una migliore accuratezza dei risultati ottenuti im-

Modo	Risultati [35]		GBT proposta
	FEM	GBT conv	
1	44.31	44.38	44.44
2	72.59	79.47	73.66
3	96.74	100.96	95.74
4	126.12	138.60	128.04
5	132.81	144.29	134.82
6	171.66	173.29	174.16

Tabella 4.2: Carico critico

piegando la Generalized Beam Theory deformabile a taglio. Infatti, in tal caso, l'errore maggiore nella valutazione del carico critico è dell'ordine dell'1.5%, mentre la massima differenza tra i risultati di riferimento e la GBT convenzionale è pari al

Modo	GBT	
	convenzionale	proposta
1	0.2%	0.3%
2	8.7%	1.5%
3	4.2%	-1%
4	9.0%	1.5%
5	8%	1.5%
6	0.9%	1.4%

Tabella 4.3: Errore GBT convenzionale e GBT proposta

9% circa, si veda Tab. 4.3. Al fine di mostrare e confrontare anche solo qualitativamente le deformate di buckling corrispondenti ai moltiplicatori critici ottenuti con la GBT proposta e mediante la modellazione agli elementi finiti di Abaqus sono riportate nelle Figs. 4.22-4.33 entrambe le deformate per ciascun moltiplicatore critico precedentemente considerato.

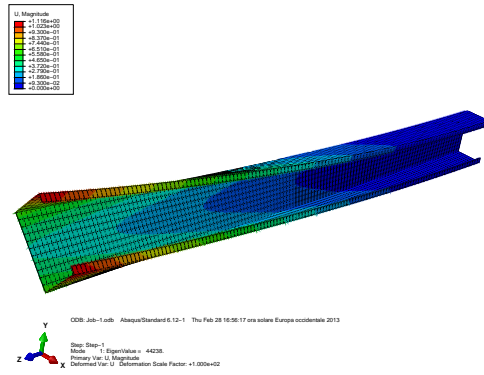


Figura 4.22: Modo 1 FEM

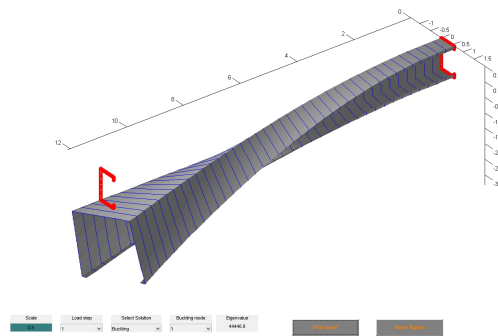


Figura 4.23: Modo 1 GBT deformabile a taglio

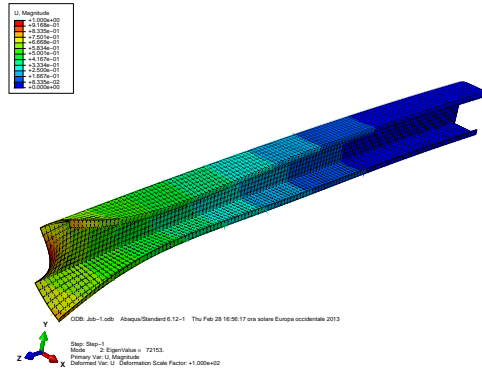


Figura 4.24: Modo 2 FEM

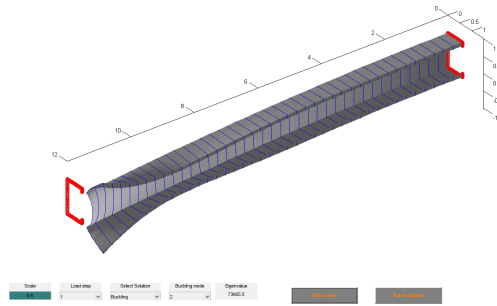


Figura 4.25: Modo 2 GBT deformabile a taglio

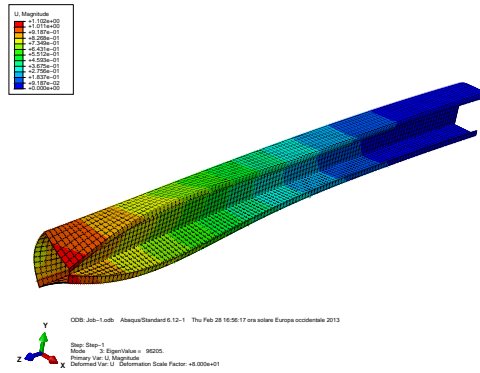


Figura 4.26: Modo 3 FEM

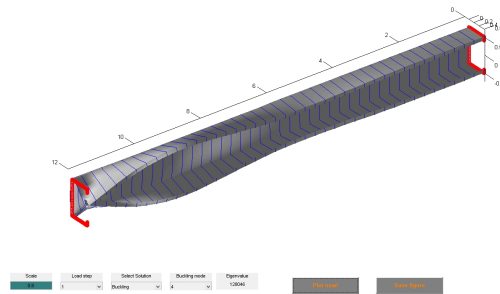


Figura 4.27: Modo 3 GBT deformabile a taglio

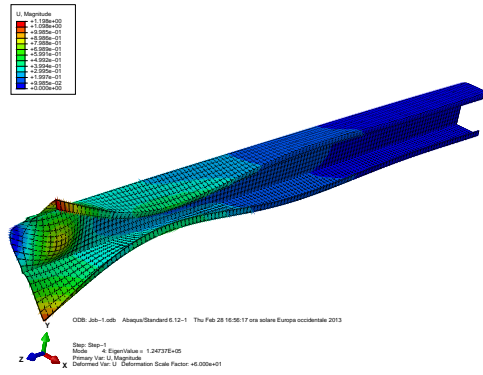


Figura 4.28: Modo 4 FEM

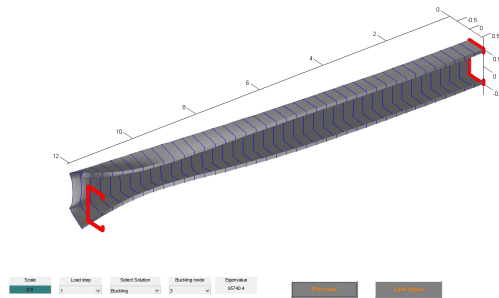


Figura 4.29: Modo 4 GBT deformabile a taglio

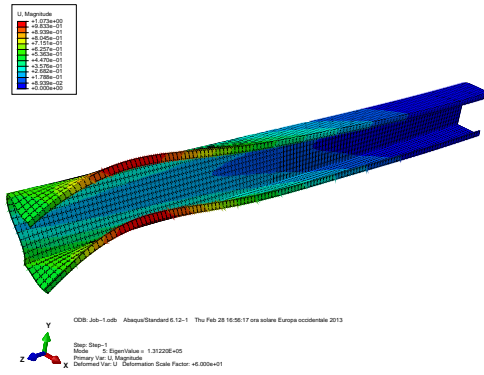


Figura 4.30: Modo 5 FEM

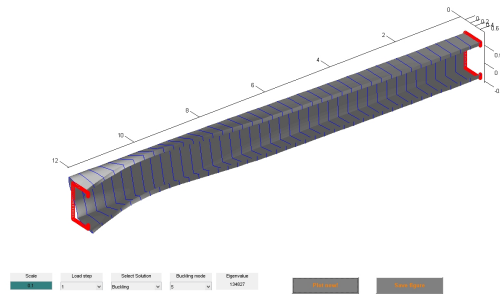


Figura 4.31: Modo 5 GBT deformabile a taglio

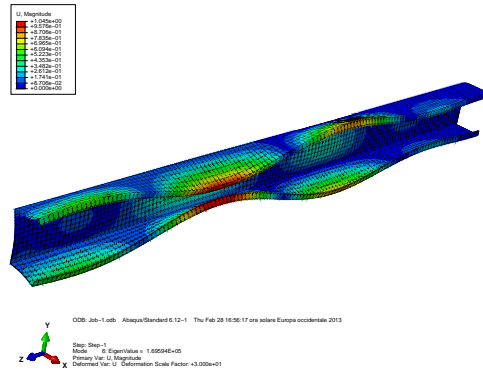


Figura 4.32: Modo 6 FEM

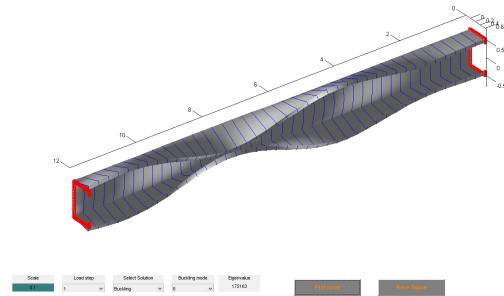


Figura 4.33: Modo 6 GBT deformabile a taglio



## Capitolo 5

# Progettazione di sistemi di copertura formati a freddo

### Abstract

In this chapter, a numerical procedure for the design of cold formed roof systems is presented. The procedure allows achieving with few simple steps the design of the purlin, of the fixing screws between the purlin and the panel and many more construction details, which translates into important economic savings. In particular, the purlin will be modeled as a GBT beam to which some elastic restraints are applied in order to simulate the interaction with the roof panel. In this context it is no longer necessary to resort to the concept of "effective section" conventionally used in the design of these elements since all of the peculiar aspects of class 4 members have been duly taken into account in the structural model. Some numerical results show the performance of the proposed procedure.

### Sommario

In questo capitolo viene presentata una procedura numerica per la progettazione di sistemi di copertura formati a freddo. La procedura di calcolo permette di effettuare in pochi semplici passi il progetto dell'arcareccio, delle viti di fissaggio tra l'arcareccio ed il pannello e di numerosi altri dettagli costruttivi, consentendo importanti economie.

In particolare, l'arcareccio verrà modellato come una trave GBT, a cui sono applicati opportuni ritegni elastici atti a simularne l'interazione con i pannelli di copertura. In questo contesto non risulta più necessario ricorrere al concetto di "sezione efficace" convenzionalmente utilizzato nelle verifiche, in quanto tutti gli aspetti peculiari dei profili in classe 4 sono già debitamente tenuti in conto nel modello strutturale. Alcuni risultati numerici mostreranno l'efficacia della procedura proposta. Una sintesi di quanto riportato in questo capitolo è stata recentemente pubblicata in [42]. Onde consentire un agevole confronto con quanto proposto dalla normativa, In quanto segue, si indicherà con  $x$  l'asse della trave, mentre  $y$  e  $z$  indicheranno gli assi principali di inerzia della generica sezione retta.

## 5.1 Sistemi di copertura formati a freddo

Le coperture costruite con elementi formati a freddo sono frequentemente impiegate nelle costruzioni metalliche. Nonostante la loro apparente semplicità, questi sistemi strutturali hanno un funzionamento complesso: l'arcareccio sostiene i carichi esterni che gli sono trasmessi tramite il pannello, il quale, a sua volta, fornisce un ritegno stabilizzante all'arcareccio stesso, impedendone spostamento laterale e rotazione.

La notevole quantità di superficie coperta, ed i costi notevoli di trasporto e montaggio, spingono ad ottimizzare quanto più possibile la progettazione di tali sistemi, rendendoli economicamente ancora più vantaggiosi ma esasperando i comportamenti tipici dei profili in parete sottile a sezione aperta: imbozzamento locale, instabilità di tipo distorsionale e globale. Nella progettazione di tali sistemi, tenere in considerazione il contributo stabilizzante offerto dal pannello di copertura risulta quindi essere un aspetto cruciale della progettazione, per il quale, tuttavia, non sempre sono disponibili consolidati supporti normativi. Tali difficoltà sono ulteriormente accentuate dalla propensione verso soluzioni costruttive sempre più performanti dal punto di vista termico, che ha spinto i progettisti verso soluzioni strutturalmente sempre più complesse e dal funzionamento meno chiaro, nel tentativo di diminuire o eliminare il ponte termico che si crea fra arcareccio e pannello. La propensione verso queste tecnologie costruttive ha reso la progettazione di tali sistemi di copertura un compito sempre più difficile, e spesso non supportato da indicazioni normative che forniscano formule chiuse e dirette per la progettazione.

Come evidenziato nel Capitolo 1, la valutazione del decremento di resistenza legata ai fenomeni di instabilità locale delle pareti del profilo, per esempio, è efficacemente coperta dal concetto di sezione efficace definito nelle normative vigenti [2] [6], ma debita considerazione dei fenomeni di instabilità distorsionale e globale, pur formalmente richiesta, è spesso lasciata dalle norme stesse a non meglio precisate "più

accurate" analisi [2].

In molti casi ricorrenti nella pratica (fig. 5.1(a)), le norme forniscono formule

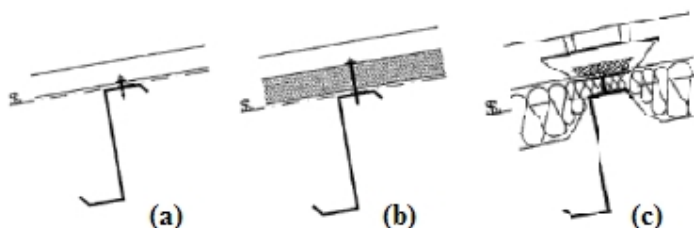


Figura 5.1: *Varie tipologie di sistema tetto*

"semplificate" che permettono di progettare facilmente l'arcareccio, le viti di collegamento con il pannello e di effettuare le altre verifiche di dettaglio necessarie (come ad esempio le verifiche dell'anima del profilo sotto la reazione concentrata all'appoggio).

Tali formule però, sono esclusivamente valide entro certi limiti di rigidità del pannello, forma della sezione, disposizione delle viti, tipologia di collegamento arcareccio-pannello e di altri dettagli costruttivi, tipici dei sistemi di copertura "tradizionali". In altri casi (fig. 5.1(b-c)), le stesse formule non sono assolutamente applicabili. In queste circostanze, gli Eurocodici si limitano a descrivere quale debba essere la filosofia di verifica e di quali fenomeni sia necessario tenere conto per cogliere in modo corretto il comportamento della copertura. In questo scenario, è stato presentato [48] un nuovo approccio progettuale, denominato Roof Model (RM), che consente di tenere in conto, in modo semplice ed efficace, le principali problematiche legate a fenomeni di instabilità che caratterizzano i profili cold-formed, secondo quanto prescritto dagli Eurocodici e dalla nuova normativa italiana [6]. L'approccio RM si basa sull'impiego del modello strutturale di trave con cinematica arricchita, cui sono applicati opportuni ritegni elastici, equivalenti al contributo stabilizzante della copertura.

Il nome sottolinea il fatto che, contrariamente ad altre filosofie di progetto, l'approccio RM non è basato su alcuna formula semiempirica o teorica che sostituisca i risultati della modellazione strutturale della copertura. Verrà mostrato come l'approccio RM permetta una progettazione completa del sistema di copertura, senza che a priori venga soddisfatta alcuna condizione, a differenza per esempio di quanto avviene nello standard europeo in vigore, in cui in particolare è necessario verificare che il pannello di copertura fornisca un ritegno, che possa essere considerato

infinitamente rigido per l'arcareccio.

## 5.2 Approccio progettuale EC 3

Gli Eurocodici trattano la progettazione dei sistemi di copertura cold formed nell'Eurocodice 3 parte 1-3 [2]. In particolare norma, oltre a permettere di svolgere analisi numeriche complesse mediante modellazione tridimensionali del sistema arcareccio pannello di copertura, fornisce e consente, verificate alcune ipotesi di validità, di impiegare una procedura cosiddetta semplificata, che sarà di seguito indicata con EC. In particolare, di seguito verranno riportate, in maniera schematica e concisa, le diverse fasi progettuali previste da tale procedura.

- a) In quanto semplificata, EC richiede che sia verificata preliminarmente la condizione:

$$EI_w \frac{\pi^2}{L^2} + GI_t + EI_z \frac{\pi^2}{L^2} 0.25h^2 < S_R \quad (5.1)$$

in cui  $I_w$  e  $I_t$  sono rispettivamente le costanti di ingobbamento e di torsione dell'arcareccio,  $L$  e  $h$  sono la lunghezza e l'altezza dell'arcareccio,  $I_z$  è il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $z$  (Fig. 5.2).

Il parametro  $S_R$  quantificando la rigidità nel proprio piano del sistema strutturale pannello, arcareccio viti di fissaggio, da valutare mediante prove sperimentali, garantisce che l'arcareccio sia fortemente ritenuto dal pannello di copertura.

- b) Si ipotizza l'arcareccio vincolato a muoversi nella sola direzione  $z$  (Fig. 5.2). Tale ipotesi consente di determinare facilmente il campo di spostamenti mediante le note formule valide per le travi alla Eulero- Bernulli.
- c) Si ipotizza che l'ala inferiore si comporti come una trave su suolo elastico alla Winkler di rigidità  $K$  nella quale il carico applicato e la rigidità del letto di molle dipendono essenzialmente da parametri geometrici. La sovrapposizione degli effetti generati dal momento flettente  $M_{y,Ed}$  e da un momento aggiuntivo  $M_{fz}$ , permette di tenere conto degli effetti torsionali e distorsivi (Fig. 5.2).
- d) Si effettua la verifica di stabilità dell'ala compressa non vincolata lateralmente dal pannello (se le fibre compresse sono quelle dell'ala inferiore, come

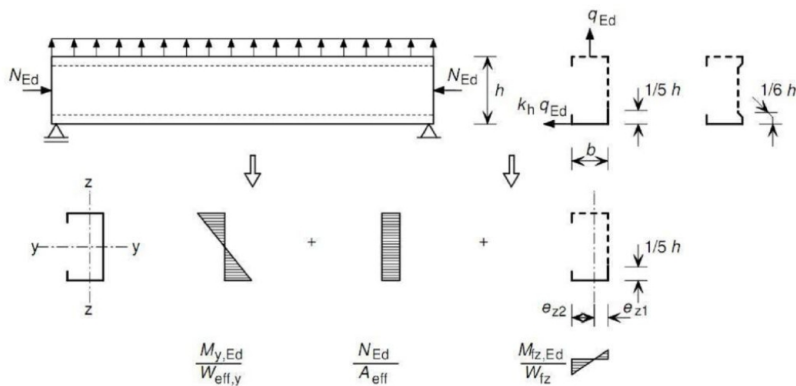


Figura 5.2: Calcolo delle tensioni normali secondo Eurocodice [[2]]

accade nel caso di vento aspirante in copertura). Tale verifica di stabilità viene condotta con una luce libera di inflessione convenzionale fissata, in dipendenza dalla costante  $K$  che definisce la rigidità del letto di molle.

- e) Si effettua la verifica degli appoggi, sia per la reazione  $R_w$  in direzione  $z$  fornita dalla struttura principale, sia per la reazione in direzione  $y$ ,  $R_2$  che deve essere fornita agli appoggi e che è dovuta alla non simmetria della sezione trasversale (Fig. 5.3).
- f ) Si effettua la verifica degli ancoraggi arcareccio- pannello che subiscono una forza distribuita di taglio in direzione  $y$  (a livello indicativo si può considerare che per sezioni formate a Z tale forza è dell'ordine del 30% dei carichi distribuiti applicati). Tale forza viene determinata in base a tabelle che permettono di campionare in alcuni punti la soluzione del modello di trave alla Winkler adottato per l'ala inferiore (Fig. 5.4b).

Come si vede, nonostante sia stata ampiamente semplificata dalle norme, questa procedura è comunque abbastanza laboriosa.

La relazione 5.1 è generalmente verificata quando il pannello fornisce al sistema sottostante un ritegno molto rigido che al limite può essere considerato infinitamente

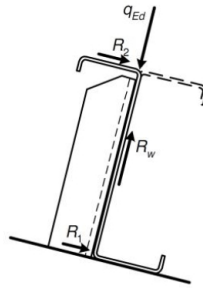


Figura 5.3: Reazioni da fornine all'arcareccio in corrispondenza degli appoggi, secondo Eurocodice [[2]]

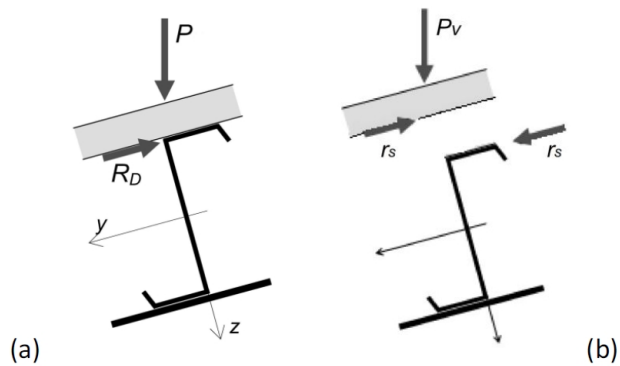


Figura 5.4: (a) il parametro  $r$ , è espresso come il rapporto tra la forza di ancoraggio  $R_D$  e il carico esterno  $P$ ; (b) il parametro  $r$ , è definito come il rapporto tra il carico esterno verticale e lo sforzo di taglio assorbito dalle viti per unità di lunghezza dell'arcareccio.

rigido.

Pensando alle tipologie di tetto innovative, in cui come detto in precedenza, al fine garantire elevate prestazioni energetiche agli edifici, si interpongono tra pannello e arcareccio strati isolanti con spessori sempre maggiori, appare chiaro che tale condizione risulta essere sempre meno soddisfatta.

In questi casi quindi le norme non forniscono alcuna procedura, ma consentono al progettista di impiegare modelli strutturali di comprovata validità. È in questo contesto che si colloca il Roof Model (RM), che verrà nel prossimo paragrafo meglio descritto.

### 5.3 Approccio RM

L'approccio di progettazione definito RM, che sta appunto per Roof Model, come detto in precedenza, è basato sull'uso di un modello di tipo trave, cui sono applicati opportuni ritegni elastici, equivalenti al contributo stabilizzante della copertura [[48]].

In Fig. 5.5 è mostrato il modello di trave cui sono applicati vincoli in corrisponden-

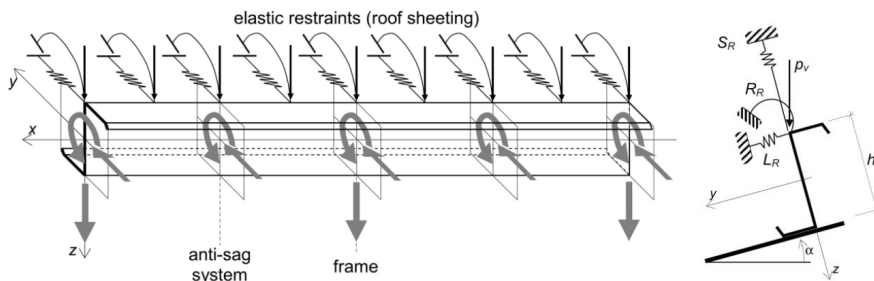


Figura 5.5: L'approccio RM, il modello strutturale

za degli appoggi o dei dispositivi anti-svergolamento (rappresentati con le reazioni vincolari corrispondenti). I ritegni elastici continui sono applicati in un dato punto della sezione trasversale e possono essere di più tipi (Fig. 5.5). In particolare si definisce:

- Shear Restraint  $S_R$ , una molla rotazionale che vincola la rotazione dell'ala superiore attorno all'asse  $z$ ;

- Rotational Restraint  $R_R$ , un ritegno che vincola la rotazione torsionale attorno all'asse  $x$ ;
- Lateral Restraint  $L_R$ , un vincolo agli spostamenti laterali in direzione  $y$ .

La rigidezza di tali ritegni deve essere opportunamente valutata mediante prove sperimentali o numeriche che devono essere eseguite sul sistema di copertura reale, dotato di tutti i dettagli costruttivi con cui la struttura verrà realizzata in opera. Tale valutazione è, come visto in precedenza, comunque necessaria in generale anche nell'approccio proposto dagli Eurocodici. E' sufficiente comunque, che sia effettuata una sola volta per ciascun tipo di copertura che si intende progettare.

L'approccio RM richiede di usare una teoria di trave idonea allo studio dei profili in parete sottile. In particolare, la teoria di trave più semplice disponibile, accettata dalle normative e impiegata nella pratica corrente, è la teoria di Vlasov. Come noto, tale teoria assume la trave non deformabile a taglio, ma soprattutto assume l'ipotesi che la sezione si conservi rigida nel proprio piano. Fenomeni di instabilità tipo imbozzamenti locali o distorsioni di sezione, vengono quindi tenuti in conto non durante l'analisi strutturale, ma in fase di verifica. In particolare, come visto nel Capitolo 1, viene comunemente impiegato il cosiddetto Effective Width Method, o metodo delle larghezze efficaci, che si rammenta, considera la perdita di efficacia di porzioni di pareti compresse che compongono la sezione trasversale.

Va da sé che l'impiego di un approccio RM basato sulla teoria GBT, rende superfluo il ricorso al concetto di sezione efficace, in quanto i fenomeni di distorsione di sezione e di instabilità locale sono già debitamente tenuti in conto in fase di analisi. Non è quindi necessario in fase di verifica alcun tipo di manipolazione dei risultati. A titolo esemplificativo è riportato in Fig. 5.6 il percorso progettuale di un RM basato sulla trave di Vlasov ( $RM_V$ ) e di un RM basato sulla teoria GBT ( $RM_{GBT}$ ).

Vale comunque la pena rilevare che, indipendentemente dal modello di trave adottato, l'approccio RM è molto semplice. A scopo di confronto con la procedura EC, viene di seguito descritto l'approccio  $RM_{GBT}$ , in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente, in modo che sia possibile osservarne più facilmente le differenze. Ripercorrendo, il diagramma di flusso delle fasi di progetto si osserva quanto segue.

- a) Non occorre verificare alcuna ipotesi a priori sulla sufficiente rigidezza del sistema di copertura. Occorre però, definire quantitativamente i ritegni elastici equivalenti.



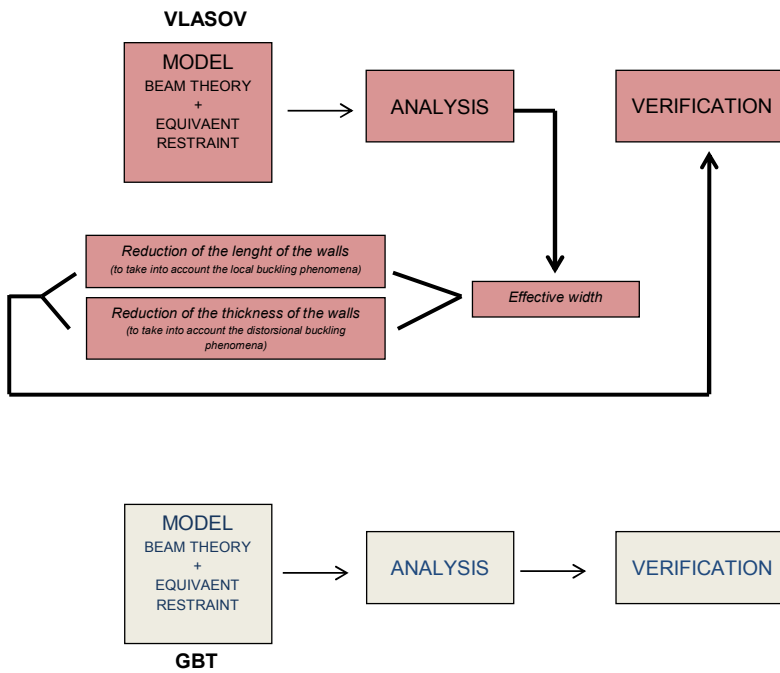


Figura 5.6: Confronto tra RM basato sulla trave di Vlasov ( $RM_V$ ) e RM basato sulla GBT ( $RM_{GBT}$ ).

- b) Definito il punto in cui valutare lo spostamento in direzione perpendicolare all'asse, si esegue in modo standard la verifica di deformabilità. Contrariamente a quanto succede in EC, in RM lo spostamento verticale sulla sezione non è infatti costante, a causa della rotazione media della sezione trasversale e della sua distorsione.
- c) E' possibile formalmente condurre la verifica di resistenza sulla sezione in maniera convenzionale.  
Il ricorso infatti a metodi semi empirici per tenere conto dei diversi fenomeni di instabilità è superato, in quanto i fenomeni di distorsione di sezione e di instabilità locale sono già debitamente tenuti in conto in fase di analisi. Non è quindi necessaria in fase di verifica alcun tipo di manipolazione dei risultati. Le caratteristiche di sollecitazione da usarsi per la verifica (momenti flettenti, bi-momenti, tagli e bi-tagli) sono fornite dal modello, risultando quindi possibile condurre la verifica di resistenza in termini di confronto tra la tensione di progetto e quella resistente del materiale, come di seguito riportato:

$$f_{Ed} = \sigma_{VM} < f_{Rd} \quad (5.2)$$

dove con  $\sigma_{VM}$  si è indicata la tensione secondo Von Mises.

- d) Non è necessaria alcuna verifica di stabilità, poichè la verifica di resistenza effettuata al passo precedente è già sufficiente, purchè l'analisi RM sia stata condotta con una opportuna imperfezione iniziale.
- e), f ) Le forze di progetto necessarie per le verifiche dei ritegni all'appoggio e dei connettori arcareccio-pannello sono già calcolate e fornite contestualmente alla soluzione del modello di trave. Tali forze sono ricavate elaborando le reazioni vincolari nei ritegni elastici equivalenti e possono essere espresse attraverso i seguenti parametri:
  - $r_s$  è la forza di taglio assorbita dalle viti per unità di lunghezza dell'arcareccio (vedi Fig. 5.b);
  - $R$  è il rapporto adimensionale tra la forza di ancoraggio totale  $R_d$  e il carico totale applicato  $P$ . Il carico totale  $P$  è l'integrale del carico distribuito applicato all'arcareccio,  $R_d$  è la somma delle reazioni  $R_2$  applicate ai vari appoggi (vedi Fig. 5.a)

## 5.4 Alcuni esempi di progettazione

A scopo illustrativo, nel seguito vengono esaminati alcuni esempi significativi di progettazione. Si considera, per semplicità, uno schema statico di arcareccio su due appoggi con carico distribuito uniforme  $q_z$  come mostrato in Fig. 5.7.

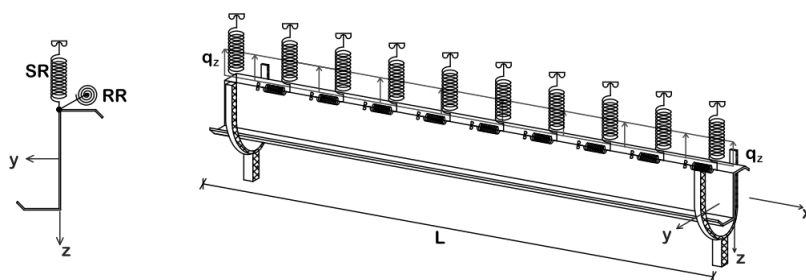


Figura 5.7: Condizioni di carico e di vincolo degli esempi proposti.

Per assegnata luce e sezione trasversale dell'arcareccio è possibile definire il carico di progetto per il quale è raggiunto lo stato limite ultimo di resistenza o stabilità. I sistemi in esame hanno solitamente un peso proprio molto piccolo rispetto ai carichi accidentali applicati (es. vento, neve). Si assume quindi, per semplicità espositiva, che allo stato limite ultimo il carico sia 1.5 volte maggiore di quello allo stato limite di esercizio. Data la notevole deformabilità delle strutture metalliche, può accadere che non si riesca a sfruttare interamente il carico di progetto, poichè a livelli di carico 1.5 volte inferiori, gli spostamenti nell'arcareccio non soddisfano le prescrizioni agli stati limite di esercizio (le attuali normative in Italia [6] suggeriscono una freccia ammissibile per i soli carichi accidentali pari a  $1/200$  della luce). In questo caso il valore del carico di progetto per una data copertura viene diminuito per tenere in conto della deformabilità: si considera quindi come carico di progetto  $q_d$  il minore tra i seguenti:

- $q_{d,res}$ : carico per cui è raggiunto lo stato limite ultimo di resistenza o stabilità;
- $q_{d,def}$ : carico a due terzi del quale è raggiunto lo stato limite di esercizio per deformabilità.

In questo modo è possibile con un solo parametro  $q_d$  descrivere il carico utile della copertura, in una combinazione di carico agli stati limite ultimi come mostrato in

Fig. 5.8.

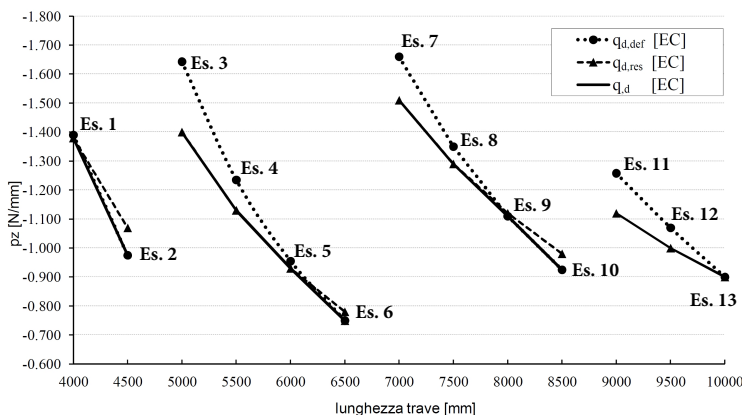


Figura 5.8: Determinazione del carico di progetto.

Lo schema strutturale descritto è stato studiato per tredici diverse luci (ES. 1 - ES. 13) impiegando quattro differenti sezioni trasversali a forma di Z dell'arcareccio (Fig. 5.9). Le quattro sezioni sono state scelte in modo che la differenza tra  $q_{d,res}$  e  $q_{d,def}$  sia minima, al fine di ottimizzare lo sfruttamento del materiale della sezione.

In tutti gli esempi è stato assunto un valore dello  $S_R$  pari a quello minimo che consente di applicare la procedura semplificata EC. Il ritengo rotazionale si è assunto in ogni esempio con rigidità  $R_R$  pari a 500 Nmm/mm/rad. Gli esempi descritti sono stati analizzati anche con l'approccio RM, basato su una trave GBT al secondo ordine come descritto nel capitolo 4. Inoltre, a scopo di confronto, vengono presentati anche i risultati di un modello tridimensionale ottenuti con il software commerciale ad elementi finiti Strand (o Straus7). Tale modello è costruito con elementi finiti tipo shell ad 8 nodi e i risultati sono di seguito indicati sinteticamente con la sigla STp. Una vista del modello tridimensionale è mostrata in Fig. 5.10.

Per come definito, il modello STp consente di cogliere il comportamento distorsionale della sezione trasversale dell'arcareccio, prevedendo quindi il cambio di forma della sezione durante il processo di carico. Vale la pena di rilevare che i risultati del modello STp derivano da una analisi geometricamente non lineare in grandi spostamenti.

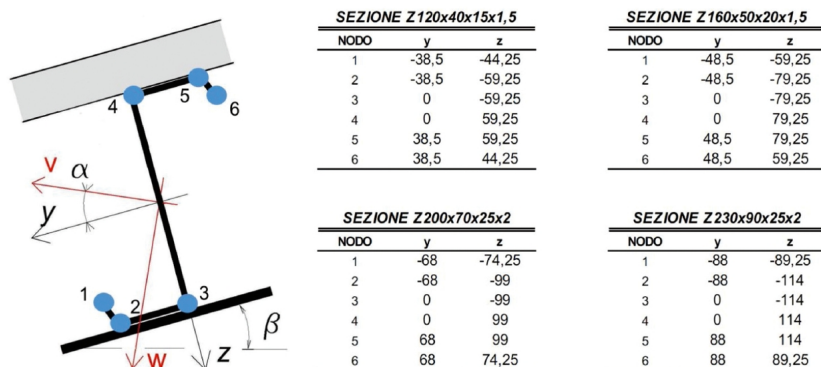


Figura 5.9: Sezioni utilizzate negli esempi proposti.

In Fig. 5.11 sono riportati i valori del carico di progetto ottenuti nei vari approcci per i vari sistemi di differente luce. Si può notare come il valore del carico di progetto predetto da EC sia sempre superiore a quello determinato con l'approccio RM o con il modello STp. In alcuni casi la differenza è dell'ordine del 30 per cento. L'approccio RM ed il modello STp sono stati qui esaminati senza alcuna imperfezione iniziale. Il considerare un'imperfezione iniziale, che negli Eurocodici è contenuta nel fattore  $\chi$  utilizzato nella verifica di stabilità, porterebbe ad un'ulteriore diminuzione del valore del carico di progetto previsto da STp o da RM, amplificando le già non trascurabili differenze tra i vari metodi. In Fig. 5.12 sono riportati lo spostamento del cono di mezz'ora dell'arcareccio per l'esempio 1 (esempio in cui si riscontra una modesta discrepanza tra i risultati ottenuti) e per l'esempio 7 (esempio nel quale si trova la maggiore differenza). Si osservi come nel caso dell'esempio 1 i ritegni laterali e torsionali siano sufficienti a limitare l'effetto della non linearità geometrica. Nell'esempio 7, nonostante il sistema sia ritenuto "molto rigido" secondo la relazione fornita dall'Eurocodice, si verificano evidenti effetti di non linearità geometrica, con rotazioni maggiori di 40 gradi ed importanti distorsioni della sezione trasversale. Gli esempi proposti sono stati scelti per evidenziare questo fenomeno: l'arcareccio con forma a Z (sebbene economico da trasportarsi e strutturalmente efficiente) richiede, per la non-simmetria della sua sezione trasversale, di essere correttamente stabilizzato da un forte ritegno laterale e torsionale. Il carico applicato (diretto verso l'alto), comprime l'ala inferiore, non vincolata al pannello. Tale configurazione di carico (tipica delle zone con forte vento) risulta particolarmente svantaggiosa per i

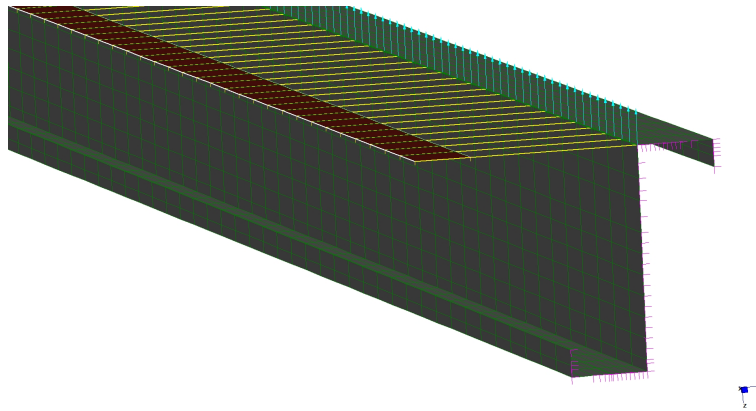


Figura 5.10: Modello tridimensionale agli elementi finiti assunto come riferimento.

profili in parete sottile, nei quali la modesta rigidezza flessionale dell'anima rende facile lo sbandamento laterale dell'ala inferiore anche in presenza di elevati ritegni torsionali e laterali applicati all'ala superiore. Al fine di cogliere gli aspetti rilevanti di instabilità locale e distorsionale propri degli arcarecci in parete sottile, vengono nel seguito mostrati alcuni risultati di dettaglio per gli esempi sopra citati. Nel seguito, sono mostrati gli spostamenti in direzione  $y$  e  $z$  del nodo 2 della sezione trasversale lungo tutto l'arcareccio e in corrispondenza della mezzeria della campata. In particolare, l'andamento dello spostamento in direzione  $y$  del nodo 2 ottenuto nell'esempio 1 è mostrato in Fig. 3.5. Come si può notare i risultati di RM e di STp sono paragonabili sia nel calcolo lineare (linee tratteggiate) sia nel calcolo non lineare (linee continue). Si osservi come la differenza tra i risultati delle analisi lineare e non lineare sia notevole, nonostante l'esempio 1 risulti, tra tutti quelli presentati, quello in cui gli effetti di non linearità sono meno marcati. In Fig. 5.14 sono presentati gli spostamenti in direzione  $z$  del nodo 2 della sezione trasversale di mezzeria, ai vari livelli di carico, mentre analogamente in Fig.5.15 sono riportati gli spostamenti in direzione  $y$ .

L'esempio 7, è tra quelli proposti, quello in cui maggiore è la non linearità della risposta. L'ottimo accordo fra i risultati di RM e STp è evidente, nonostante la teoria di trave GBT su cui si basa il modello RM valga solo per piccole distorsioni della sezione trasversale. Nell'esempio. 7, l'eccessivo spostamento laterale di 125 mm corrispondente al carico di progetto determinato secondo EC di  $-1,51$  N/mm, evidenzia come in questo caso il metodo proposto dagli Eurocodici non sia a favore

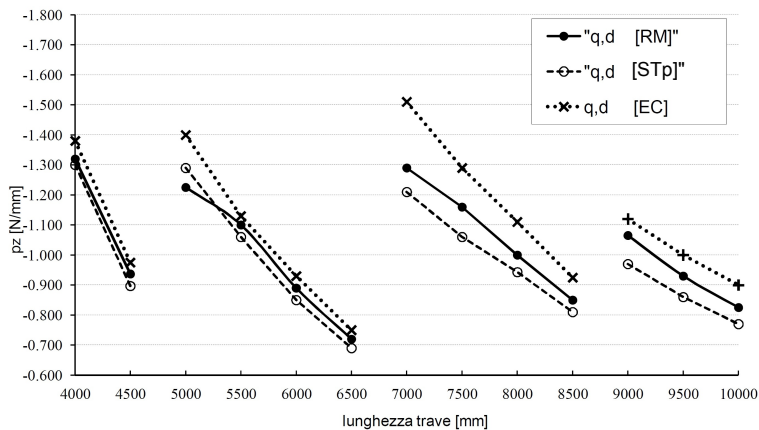


Figura 5.11: Risultati dei diversi approcci di calcolo.

di sicurezza.

Concludendo si può quindi dire che l'approccio RM qui presentato consente la progettazione di tutti i sistemi di copertura che si ritenga opportuno realizzare costruttivamente, senza alcuna limitazione a priori sulla rigidità del sistema e sul suo contributo stabilizzante all'arcareccio stesso. Il modello di calcolo su cui è basato il metodo RM consente di ottenere in pochi secondi risultati di qualità paragonabile a quella di modelli ad elementi finiti tridimensionali, considerando in maniera corretta instabilità locale, distorsionale e globale dell'arcareccio ed adempiendo così a tutti gli oneri che la normativa italiana ed europea prescrive al progettista. L'implementazione del metodo in un software con interfaccia grafica chiamato CAPS2 sviluppato presso il Laboratorio di Meccanica Computazionale dell'Università di Bologna ha permesso di dimostrarne anche la immediata applicabilità pratica.

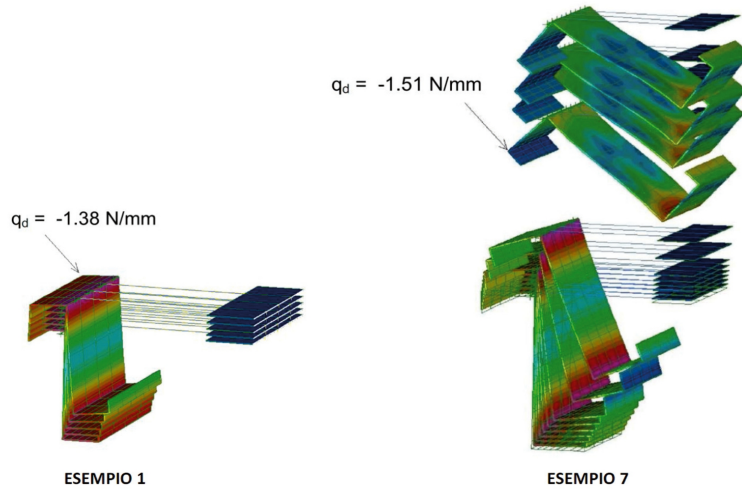


Figura 5.12: Deformate di un conico di mezzera della trave con contour in Von Mises Stress (scala 1:1).

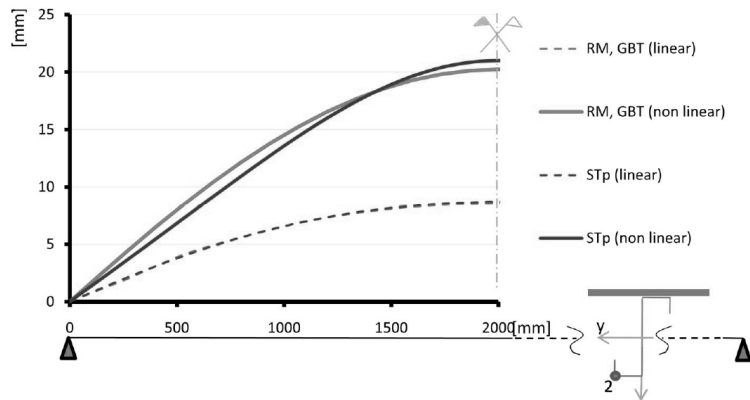


Figura 5.13: Esempio 1 - spostamenti in direzione  $y$  del nodo 2 della flangia inferiore.



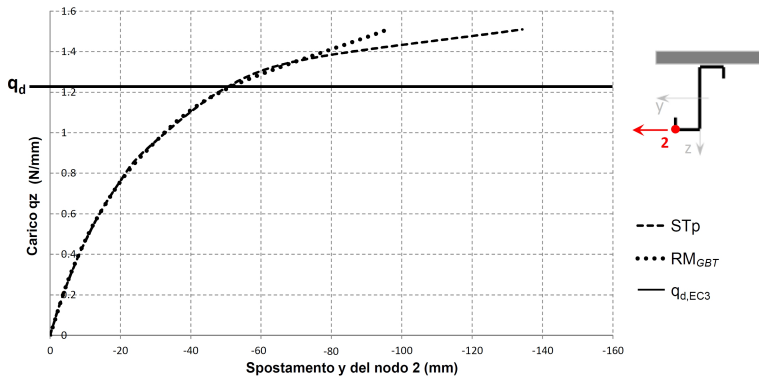


Figura 5.14: Esempio 7 - spostamento in direzione  $z$  della flangia inferiore (nodo 2) vs. incremento di carico.

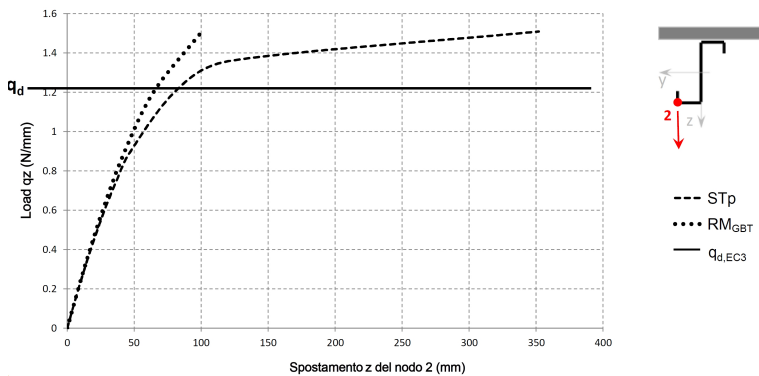


Figura 5.15: Esempio 7 - spostamento in direzione  $y$  della flangia inferiore (nodo 2) vs. incremento di carico.



## Capitolo 6

# Progettazione di profili di classe 4

### Abstract

Both European and American codes prescribe for the design of class 4 steel members to duly take into account local and distortional instability. In this sense, the EuroCode 3 allows to alternatively apply two different design approaches: either a procedure than from this point will be referred to as "EC procedure" which, for some particular cases, provides all necessary analysis tools or otherwise resorting to refined numerical analysis.

The EC approach is based on the iterative Effective Width Method (EWM) shown in chapter 1. Such procedure, based on experimental data is valid only for certain cross-sections (recommendations related to distortional instability are only available for Z or C sections) and only for conventional restrictions on the beam.

As shown in chapter 1, the alternative outside of Europe to the EWM is the Constrained Finite Strip Method. However, this method is not valid in general cases given that: it does not allow for combined loading (for example an element with compression and bending), does not allow for generic cross sections (it's limited to predefined shapes) and can only consider conventional restrictions on the beam (non-infinitely rigid supports, for example, are not allowed) It is in this context and with the intention to overcome the previously described limitations that a new design approach is proposed in this chapter: the Embedded Stability Analysis (ESA). In short, this approach consists of using a GBT-based finite element numeric analysis

to calculate the critical buckling multipliers for the studied structure, duly taking into account local and distortional instability. It will be shown how the proposed approach is perfectly coherent with the current standards.

## Sommario

La normativa tecnica europea e americana prescrivono che nella progettazione di elementi in acciaio di classe 4 debbano essere debitamente tenuti in conto fenomeni di instabilità locale e distorsionale. A tal proposito, l'Eurocodice 3 consente di applicare alternativamente due differenti approcci progettuali: da un lato propone una procedura, che nel seguito sarà definita "proceduca EC" di cui, limitatamente a casi particolari, fornisce tutti gli strumenti necessari, dall'altro nei casi in cui questa non sia applicabile, suggerisce di ricorrere ad analisi numeriche raffinate.

La procedura EC in particolare, si basa sul procedimento iterativo Effective Width Method o metodo delle larghezze efficaci, illustrato nel Capitolo 1. Tale procedura, in particolare, tarata su dati sperimentali, è disponibile solo per determinate sezioni trasversali (le prescrizioni relative all'instabilità distorsionale sono fornite solo ed esclusivamente per sezione a Z o a C) e nel caso di condizioni di vincolo convenzionali.

Come mostrato nel Capitolo 1, in ambito extra europeo, l'alternativa all'EWM, è rappresentata dal Constrained Finite Strip Method. In particolare, però, anche il cFSM basato sul metodo delle strisce finite, non consente una generale applicabilità in quanto: non ammette sollecitazioni combinate (per esempio casi in cui l'elemento è presso-inflesso), non consente di considerare una generica sezione trasversale (è limitato a forme predefinite) ed è in grado di considerare solo condizioni di vincolo convenzionali (non sono applicabili per esempio ritegni non infinitamente rigidi).

È in questo panorama e con l'obiettivo di superare le limitazioni precedentemente descritte che viene proposto in questo capitolo un nuovo approccio di verifica chiamato ESA (Embedded Stability Analysis). Tale approccio prevede di impiegare un codice numerico che, basandosi su un elemento finito GBT, sia in grado di determinare i moltiplicatori critici di buckling per la struttura in esame, tenendo debitamente in conto dell'instabilità locale e distorsionale. Si mostrerà come la procedura proposta è perfettamente coerente con quanto prescritto dalle norme vigenti.

Onde consentire un agevole confronto con quanto proposto dalla normativa, In quanto segue, si indicherà con  $x$  l'asse della trave, mentre  $y$  e  $z$  indicheranno gli assi principali di inerzia della generica sezione retta.

## 6.1 Procedura ESA

L'approccio denominato ESA (Embedded Stability Analysis) consente di verificare un profilo di classe 4 rispettando le prescrizioni riportate nell'Eurocodice 3. Tale procedura, si basa su un'analisi di buckling condotta impiegando un elemento finito monodimensionale GBT.

In particolare, come mostrato in Fig. 6.1, il metodo ESA prevede innanzitutto di identificare il cosiddetto sistema strutturale equivalente (che può essere composto da un certo numero di elementi finiti) e di applicare su questo le sollecitazioni derivanti dal modello completo insieme alle condizioni di vincolo imposte dagli elementi adiacenti.

La fase successiva prevede quindi che siano valutati i parametri  $\alpha_{cr,op}$  e  $\alpha_{ult,k}$  definiti rispettivamente come il minimo amplificatore dei carichi di progetto per cui è raggiunta la resistenza critica elastica e il minimo amplificatore dei carichi per cui, in corrispondenza della sezione maggiormente sollecitata, è raggiunta la resistenza caratteristica del materiale. In particolare, il primo viene determinato mediante un'analisi di buckling basata sulla teoria GBT, mentre  $\alpha_{ult,k}$  viene calcolato, conformemente a quanto proposto in [3], mediante la seguente espressione:

$$\alpha_{ult,k} = \frac{A_{eff} f_{yk}}{N \gamma_M} \quad (6.1)$$

L'Eq. 6.1 ha al numeratore il prodotto tra l'area efficace e la resistenza caratteristica dell'acciaio ed al denominatore lo sforzo normale sollecitante moltiplicato per il coefficiente  $\gamma_M$  pari a 1.05.

Il passaggio successivo nella procedura di verifica consiste quindi nel calcolo del parametro snellezza adimensionale  $\bar{\lambda}_{op}$ , valutato mediante la seguente relazione [2]:

$$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}} \quad (6.2)$$

Infine, per tenere in conto della presenza delle imperfezioni, viene valutato il parametro  $\chi_{op} = \min\{\chi(\bar{\lambda}_{op}), \chi_{LT}(\bar{\lambda}_{op})\}$  funzione di  $\bar{\lambda}_{op}$ , mediante le curve di stabilità riportate in normativa. Si procede quindi alla verifica di stabilità mediante la formula seguente:

$$\frac{1}{\alpha_{ult,k} \chi_{op}} \leq \frac{1}{\gamma_M} \quad (6.3)$$

Tale percorso di verifica è perfettamente coerente con quanto prescritto dall'Eurocodice 3 parte 1.

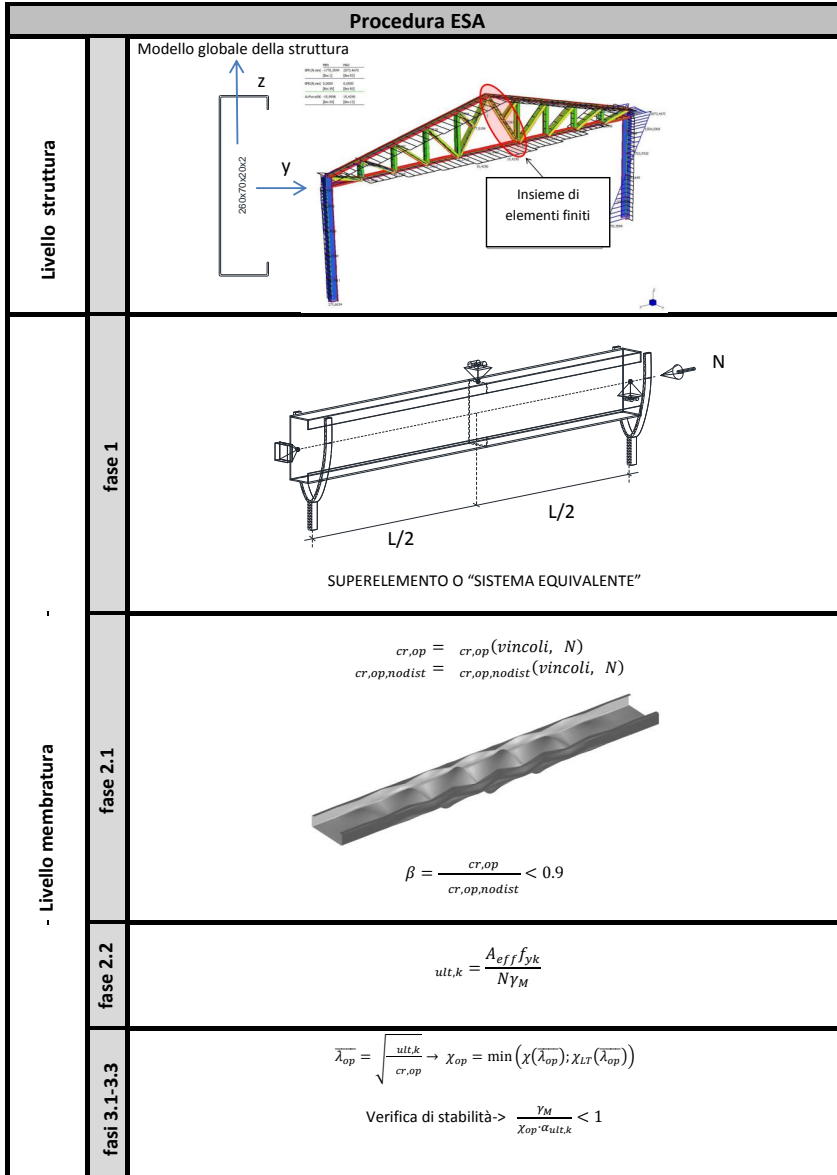


Figura 6.1: Percorso progettuale secondo il metodo ESA

La procedura ESA, in quanto basata sulla GBT che come visto consente una selezione dei modi deformativi ammissibili per la sezione, permette a differenza della norma di introdurre un nuovo parametro  $\beta$ , definito come di seguito riportato:

$$\beta = \frac{\alpha_{cr,op}}{\alpha_{cr,op,nodist}} \quad (6.4)$$

Il parametro  $\alpha_{cr,op,nodist}$  è definito come il moltiplicatore dei carichi che permette di raggiungere la resistenza critica elastica trascurando i modi deformativi locali e con distorsione di sezione, ovvero tenendo in conto della sola instabilità flessionale e/o flesso-torsionale.

Tale parametro  $\beta$  può essere considerato un indicatore dell'influenza dell'instabilità distorsionale e locale rispetto all'instabilità globale nel comportamento dell'elemento considerato. In particolare, il parametro  $\beta$  consente di quantificare la penalizzazione del carico critico dovuta a distorsioni di sezione essendo espresso come il rapporto tra il moltiplicatore critico del carico valutato considerando o non considerando la distorsione di sezione. Da un punto di vista pratico tale parametro consente di verificare in maniera veloce, semplice ed intuitiva la bontà di una scelta progettuale senza eseguire calcoli più complessi.

## 6.2 Procedura EC

Anche la procedura EC segue il percorso progettuale precedentemente descritto. In particolare, la principale differenza è relativa al calcolo del parametro  $\alpha_{cr,op}$  che viene determinato mediante la seguente relazione:

$$\alpha_{cr,op} = \frac{\pi \frac{EJ_{eff}}{l^2}}{N} \quad (6.5)$$

in cui:

$l$  è la lunghezza libera di inflessione (funzione delle condizioni di vincolo);

$E$ , il modulo di Young;

$N$  è lo sforzo normale di progetto;

$f_{yk}$  è la tensione di snervamento caratteristica;

$J_{eff}$  è il momento di inerzia efficace.

Appare immediatamente chiaro come la valutazione dell'  $\alpha_{cr,op}$  riportata sopra sia pari al rapporto tra il carico critico Euleriano valutato utilizzando un momento di inerzia efficace e il carico di progetto.

## 6.3 Confronto approccio ESA - EC

In questo paragrafo è riportato il confronto tra la procedura di verifica EC e il metodo ESA. Il confronto fra i due approcci è stato svolto considerando una trave su due appoggi soggetta ad uno carico di compressione  $N$  come mostrato in Fig. 6.2. In particolare si sono considerate 10 sezioni a C aventi rapporto flangia-anima

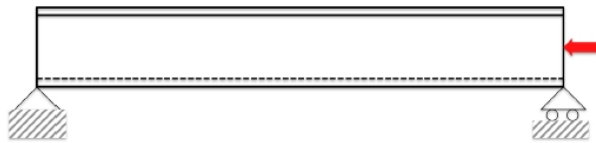


Figura 6.2: Schema statico considerato

decrescente da  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{1}{5}$  così come riportato in Fig. 6.3.

Per ciascuna sezione sono state quindi considerate diverse lunghezze, a partire 500 mm fino a 3000 mm, con passo di 250 mm.

Per ciascuna luce e per ogni sezione considerata è stato determinato, per entrambe



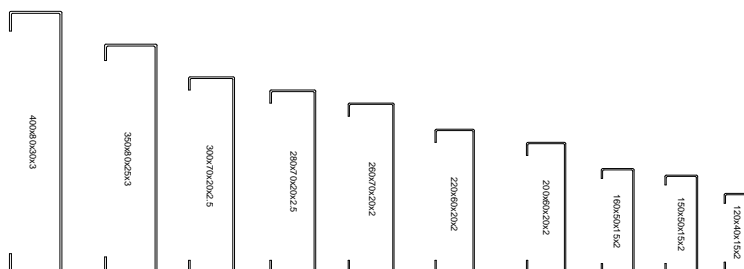


Figura 6.3: Sezioni analizzate

le procedure, il valore del carico di progetto per il quale è raggiunto nella trave lo stato limite ultimo di resistenza o stabilità.

Per ciascun caso viene definito, mediante la procedura EC, il livello di carico che conduce ad un fattore di sicurezza unitario. In Fig. 6.4, sono riportati, per i medesimi livelli di carico, i fattori di sicurezza ottenuti con la procedura ESA.

Si fa osservare come in molti casi, tale fattore di sicurezza risulti maggiore di 1 per cui ne consegue che a differenza della procedura EC, secondo l'approccio ESA il caso in esame risulta non verificato. In particolare, nel 54% dei casi in cui il modo critico di collasso è distorsionale (43 casi su 80), la procedura EC non è a favore di sicurezza e non permette pertanto di considerare in maniera opportuna fenomeni di instabilità distorsionale e locale.

In Fig. 6.5 sono riportati invece i valori di  $\beta$  legati alle verifiche svolte con l'approccio ESA. Considerando quindi come soglia di riferimento  $\beta = 0.9$ , risulta che in 80 casi sui 110 dovrebbe essere debitamente tenuta in conto l'instabilità distorsionale in quanto rappresenta un probabile modo critico di collasso.

CONFRONTO DEI COEFFICIENTI DI STABILITA' EC3-ESA												
Profili selezionati	Lunghezze investigate											
	500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	
10	1.26	1.33	1.31	1.28	1.23	1.16	1.09	1.01	0.92	0.84	0.76	
9	1.24	1.29	1.26	1.21	1.16	1.08	1.01	0.92	0.83	0.75	0.67	
8	1.23	1.25	1.22	1.17	1.10	1.02	0.93	0.84	0.76	0.67	0.60	
7	1.21	1.21	1.18	1.13	1.06	0.98	0.90	0.81	0.73	0.65	0.60	
6	1.34	1.35	1.32	1.27	1.22	1.14	1.06	0.97	0.89	0.80	0.72	
5	1.17	1.16	1.12	1.06	1.00	0.92	0.83	0.74	0.66	0.64	0.64	
4	1.13	1.11	1.07	1.01	0.95	0.87	0.79	0.71	0.66	0.66	0.65	
3	1.03	0.98	0.92	0.85	0.75	0.73	0.73	0.72	0.72	0.73	0.73	
2	1.02	0.97	0.91	0.83	0.76	0.75	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	
1	0.96	0.89	0.84	0.83	0.83	0.82	0.83	0.83	0.83	0.83	0.83	

Legenda	
Sezioni non verificate secondo la procedura ESA	
Modo critico di buckling globale-flessionale	

Tabella dei profili (mm)	
1	120x40x15x2
2	150x50x15x2
3	160x50x15x2
4	200x50x20x2
5	220x50x20x2
6	260x70x20x2
7	280x70x20x2.5
8	300x70x20x2.5
9	350x80x25x3
10	400x80x30x3

**Note:** si mostrano i risultati delle verifiche di stabilità relative alla procedura ESA (le verifiche lato EC3 risultano tutte verificate e pari ad 1)

Figura 6.4: - Confronto dei coefficienti di stabilità ESA-Proc. Sempl. EC3

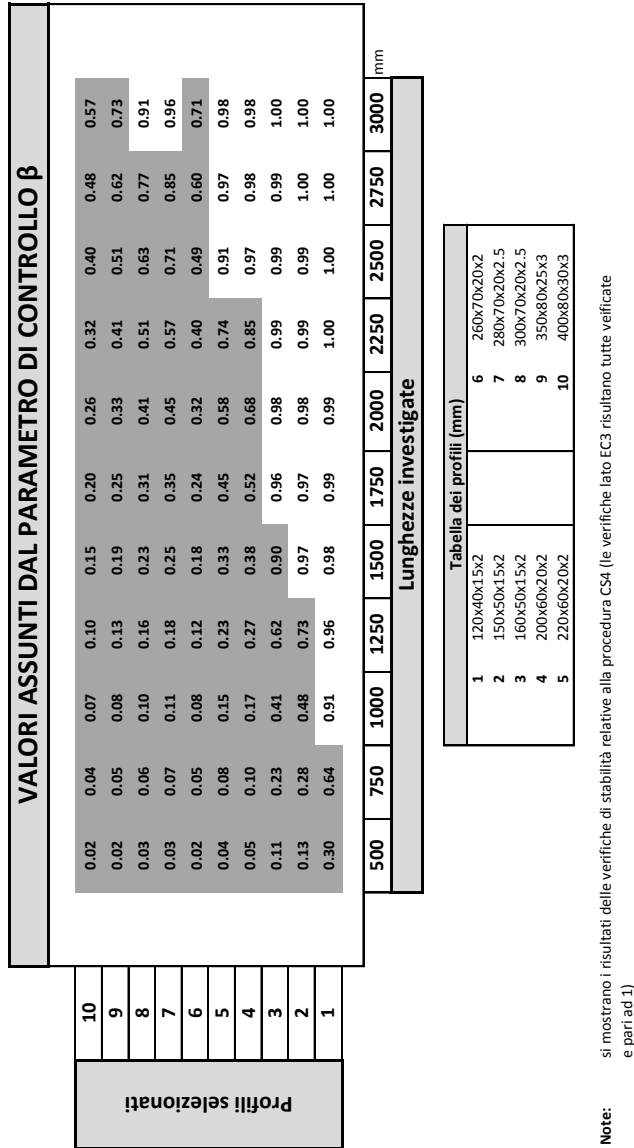


Figura 6.5: - Valori assunti dal parametro di controllo  $\beta$

## 6.4 Confronto ESA-cFSM

In questo paragrafo viene proposto per gli stessi esempi precedentemente mostrati il confronto tra l'approccio ESA e i risultati ottenuti mediante il Constrained Finite Strip Method, illustrato nel Capitolo 2.

Il Finite Strip Method è attualmente implementato nel software CUFISM sviluppato da Ben Schafer, Zhanjie Li, Sandor Adany, Anfrew Sarawit e disponibile in rete (<http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/>).

La Fig. 6.6 riassume i valori di  $\alpha_{cr,op}$  calcolati mediante ESA e CUFISM. Dal confronto si rileva come i moltiplicatori del carico critico ottenuti con ESA sono in buon accordo con quelli ottenuti impiegando il codice CUFISM. Le differenze più significative, ma comunque modeste, si riscontrano nei casi in cui il rapporto anima/flangia è più elevato. I risultati precedentemente mostrati in Fig. 6.6 e in Fig. 6.4 relativi rispettivamente al confronto ESA-CUFISM e al confronto ESA-procedura EC sono di seguito riportati sezione per sezione (Figs. 6.7- 6.26) considerando per ciascuna sezione, l'andamento del moltiplicatore dei carichi  $\alpha_{cr,op}$  al variare della snellezza  $\lambda$ , secondo quanto predetto dai diversi approcci considerati. In particolare, dai grafici si rileva l'ottimo accordo tra la procedura ESA e i risultati ottenuti impiegando il software CUFISM. Relativamente, invece, ai risultati ottenuti impiegando la procedura EC, questi si rilevano in accordo con i precedenti solo per determinati valori di snellezza. A tal proposito si può osservare, infatti, come per valori di snellezze inferiori ad un snellezza limite compresa tra 50 e 110 a seconda della sezione considerata, la procedura EC sovrastimi notevolmente il carico critico relativo alla struttura in esame. Tale considerazione è sicuramente limitata alle particolari condizioni di carico e di vincolo considerate, ma ad ogni modo potrebbe essere meglio investigata.

CONFRONTO 1°MODO DI BUCKLING ESA-CUFSM													
Profili selezionati	10	ESA	1.24	1.11	1.11	1.14	1.18	1.25	1.33	1.43	1.56	1.72	1.90
		CUF5M	1.02	1.05	1.09	1.13	1.18	1.25	1.34	1.45	1.59	1.75	1.93
	9	ESA	1.31	1.21	1.22	1.26	1.32	1.41	1.52	1.65	1.83	2.03	2.26
		CUF5M	1.13	1.17	1.21	1.27	1.34	1.43	1.54	1.69	1.86	2.07	2.31
	8	ESA	1.27	1.21	1.23	1.28	1.35	1.46	1.60	1.77	1.97	2.21	2.48
		CUF5M	1.14	1.18	1.23	1.30	1.38	1.49	1.63	1.80	2.01	2.26	2.54
	7	ESA	1.33	1.29	1.32	1.37	1.45	1.58	1.72	1.90	2.13	2.38	2.53
		CUF5M	1.22	1.26	1.32	1.38	1.47	1.59	1.74	1.93	2.15	2.42	2.72
	6	ESA	1.08	1.06	1.07	1.11	1.16	1.25	1.34	1.45	1.60	1.76	1.95
		CUF5M	0.99	1.02	1.05	1.10	1.16	1.23	1.32	1.44	1.58	1.75	1.94
5	ESA	1.36	1.35	1.39	1.46	1.55	1.69	1.86	2.08	2.34	2.31	2.20	
	CUF5M	1.26	1.31	1.37	1.44	1.54	1.68	1.85	2.07	2.32	2.53	2.42	
4	ESA	1.49	1.49	1.54	1.62	1.72	1.88	2.07	2.31	2.38	2.24	2.14	
	CUF5M	1.38	1.44	1.50	1.59	1.70	1.85	2.05	2.29	2.57	2.46	2.35	
3	ESA	1.96	2.02	2.15	2.34	2.61	2.36	2.13	1.98	1.87	1.79	1.73	
	CUF5M	1.89	1.99	2.13	2.33	2.61	2.59	2.34	2.17	2.06	1.97	1.91	
2	ESA	2.10	2.17	2.32	2.52	2.67	2.31	2.08	1.93	1.82	1.75	1.69	
	CUF5M	2.02	2.14	2.29	2.51	2.81	2.53	2.28	2.12	2.00	1.93	1.86	
1	ESA	2.95	3.15	2.91	2.28	1.93	1.74	1.62	1.54	1.49	1.44	1.42	
	CUF5M	2.85	3.09	3.17	2.50	2.12	1.91	1.78	1.70	1.64	1.59	1.56	
			500	750	1000	1250	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000
			mm										
			Lunghezze investigate										
Tabella dei profili (mm)													
1	120x40x15x2												
2	150x50x15x2												
3	160x50x15x2												
4	200x60x20x2												
5	220x60x20x2												
6	260x70x20x2												
7	280x70x20x2.5												
8	300x70x20x2.5												
9	350x80x25x3												
10	400x80x30x3												

Figura 6.6: - Tabella di confronto  $\alpha_{cr,op}$  ESA-CUF5M

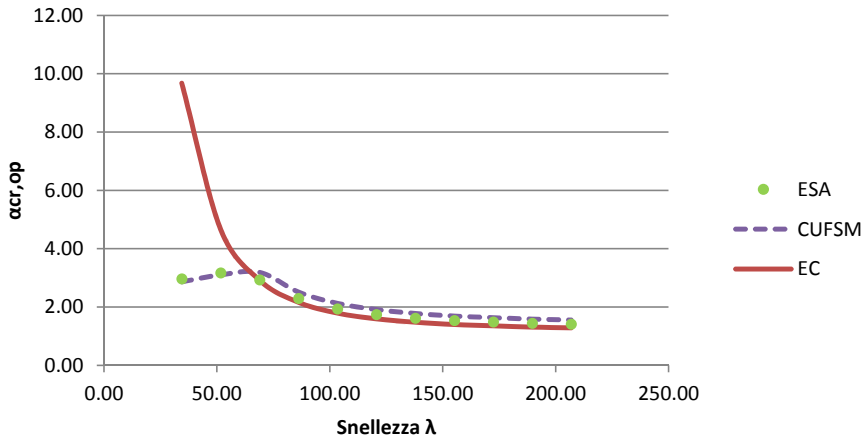


Figura 6.7: Sezione C 120x40x15x2: confronto ESA-CUFSM-EC

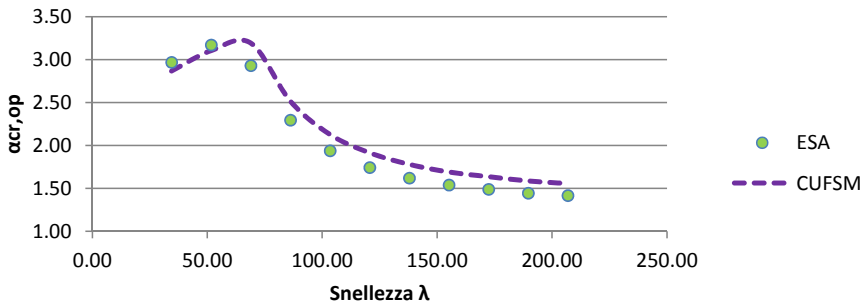


Figura 6.8: Sezione C 120x40x15x2: confronto ESA-CUFSM

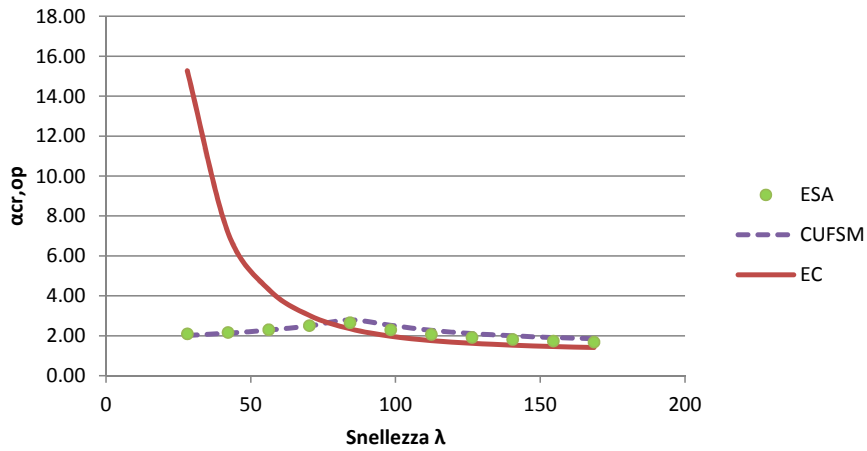


Figura 6.9: Sezione C 150x50x15x2: confronto ESA-CUFSM-EC

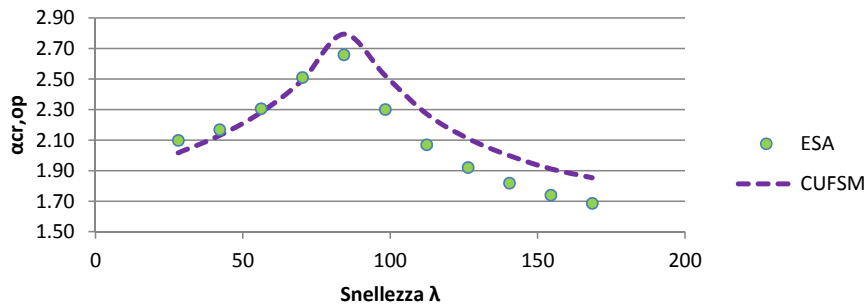


Figura 6.10: Sezione C 150x50x15x2: confronto ESA-CUFSM

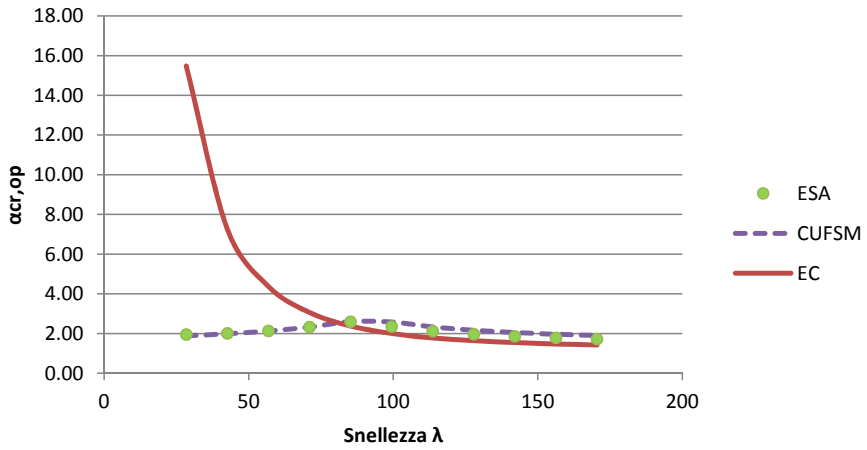


Figura 6.11: Sezione C 160x50x15x2: confronto ESA-CUFSM-EC

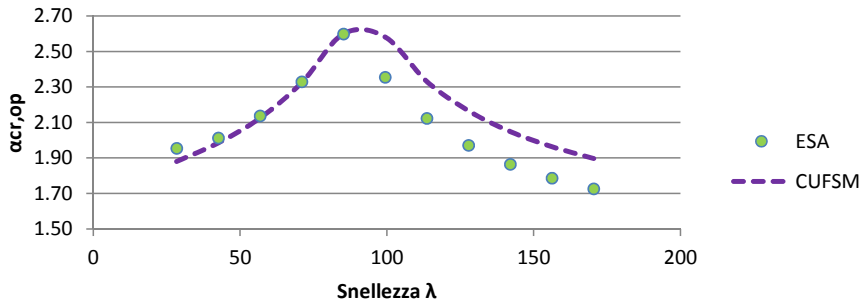


Figura 6.12: Sezione C 160x50x15x2: confronto ESA-CUFSM



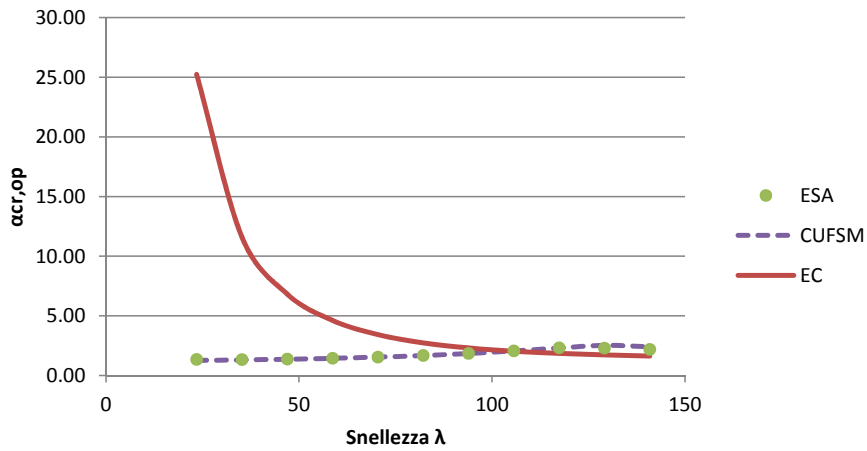


Figura 6.13: Sezione C 200x60x20x2: confronto ESA-CUFSM-EC

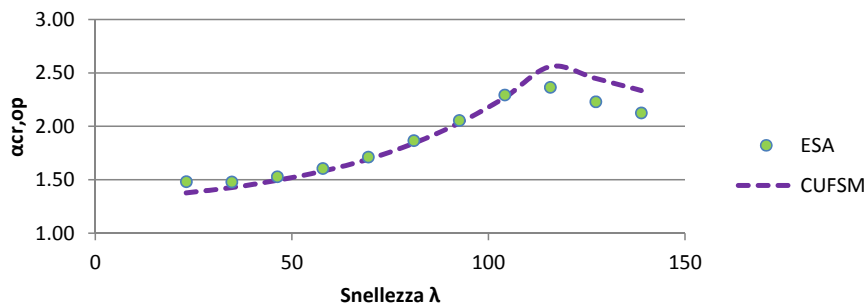


Figura 6.14: Sezione C 200x60x20x2: confronto ESA-CUFSM

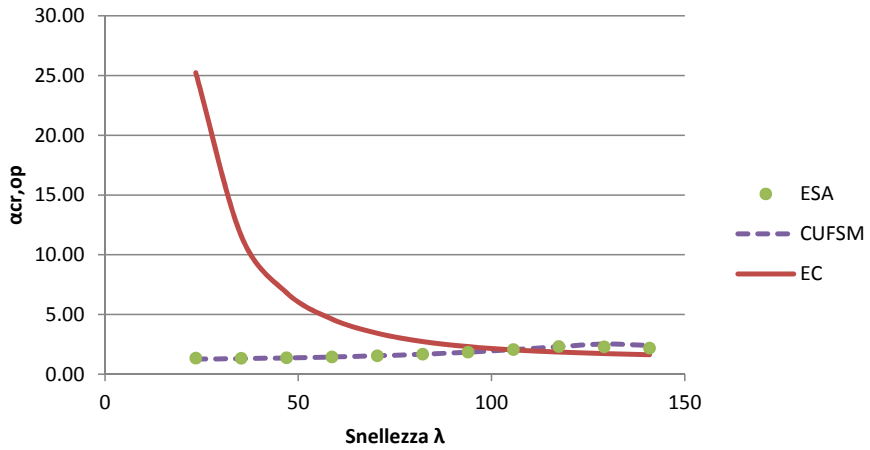


Figura 6.15: Sezione C 220x60x20x2: confronto ESA-CUFSM-EC

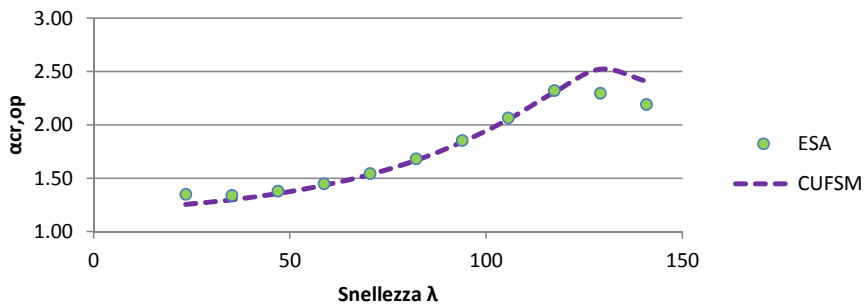


Figura 6.16: Sezione C 220x60x20x2: confronto ESA-CUFSM

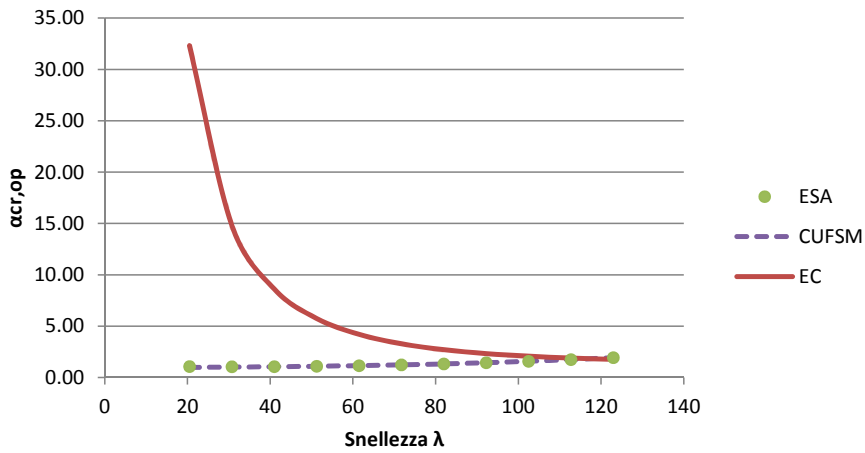


Figura 6.17: Sezione C 260x70x20x2: confronto ESA-CUFSM-EC

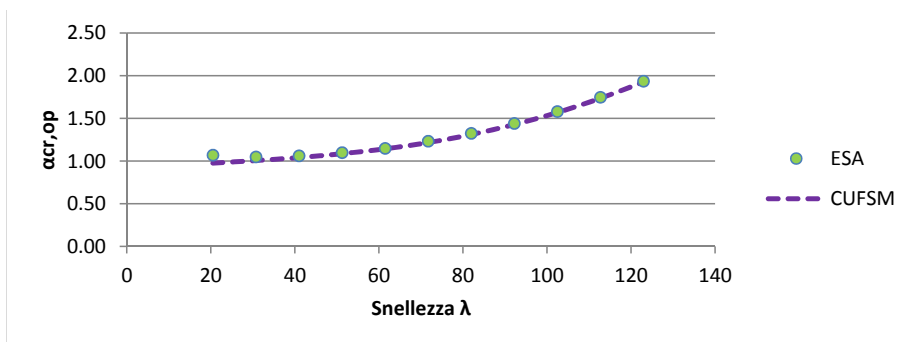


Figura 6.18: Sezione C 260x70x20x2: confronto ESA-CUFSM

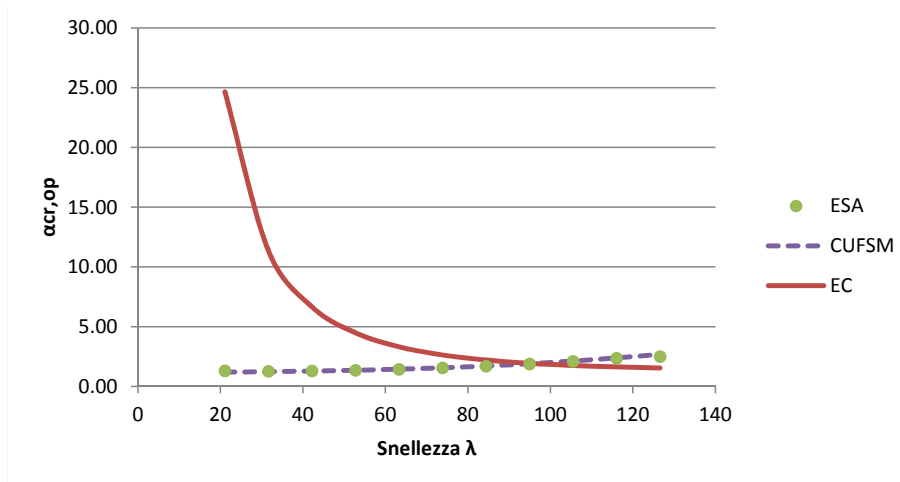


Figura 6.19: Sezione C 280x70x20x2.5: confronto ESA-CUFSM-EC

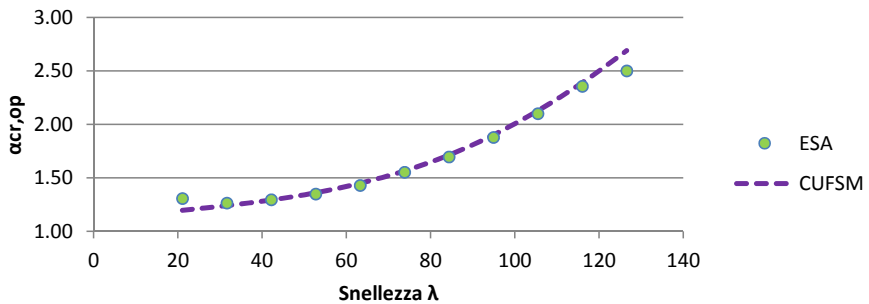


Figura 6.20: Sezione C 280x70x20x2.5: confronto ESA-CUFSM

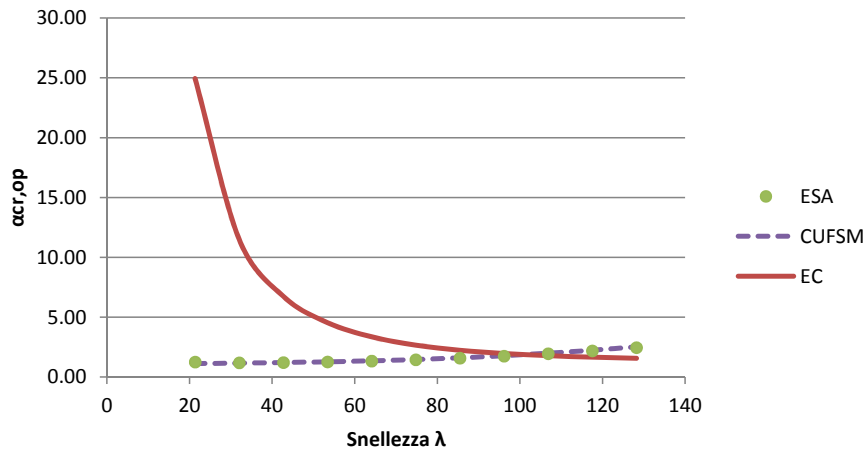


Figura 6.21: Sezione C 300x70x20x2.5: confronto ESA-CUFSM-EC

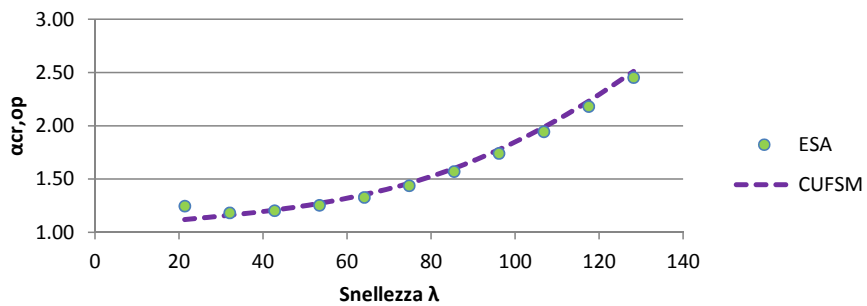


Figura 6.22: Sezione C 300x70x20x2.5: confronto ESA-CUFSM

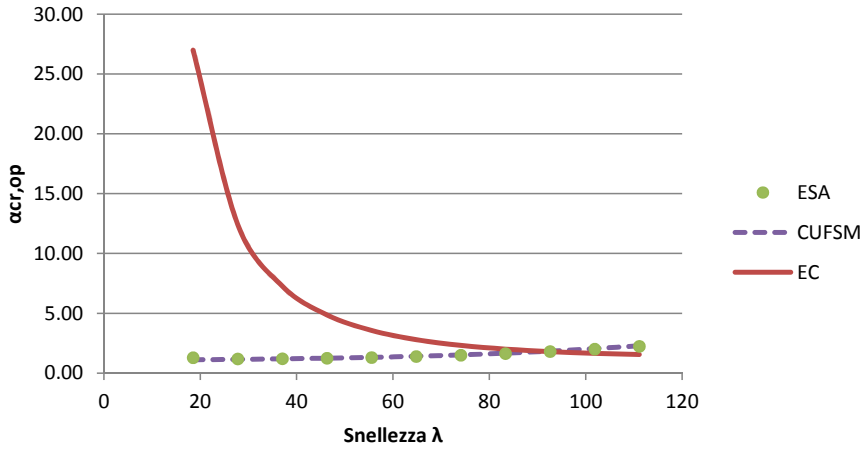


Figura 6.23: Sezione C 350x80x25x3: confronto ESA-CUFSM-EC

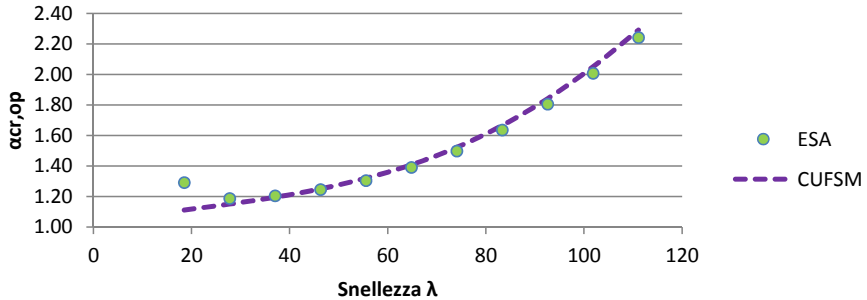


Figura 6.24: Sezione C 350x80x25x3: confronto ESA-CUFSM

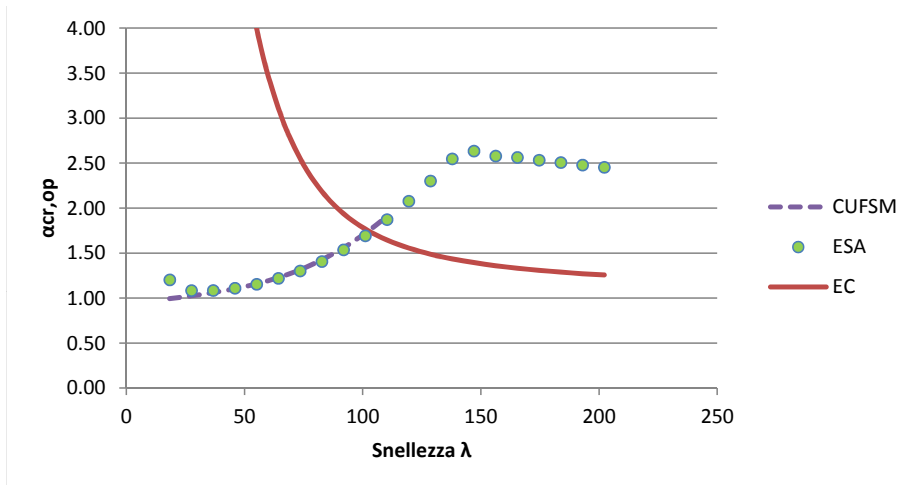


Figura 6.25: Sezione C 400x80x30x3: confronto ESA-CUFSM-EC

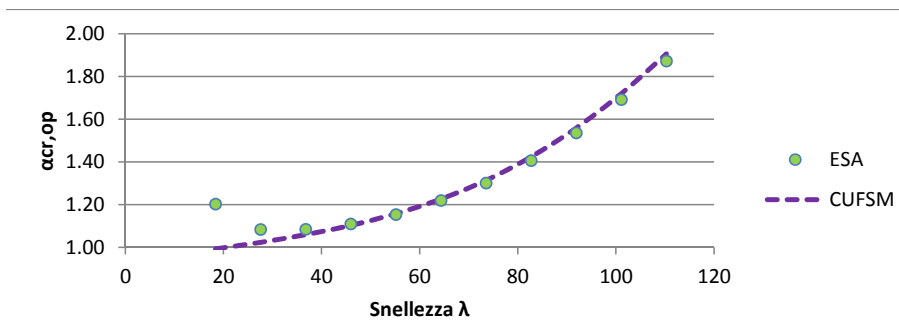


Figura 6.26: Sezione C 400x80x30x3: confronto ESA-CUFSM





# Conclusioni

Il comportamento dei profili in acciaio formati a freddo e in generale dei profili in parete sottile è molto complesso. Seppur spesso vengano usati in semplici sistemi strutturali, i fenomeni di instabilità locale e distorsionale ne influenzano notevolmente la risposta strutturale. D'altra parte la richiesta di strutture sempre più performanti ed economicamente convenienti spinge i progettisti verso una estrema ottimizzazione strutturale che esalta tali fenomeni. A tal riguardo, le norme dedicate alla progettazione, dovrebbero fornire un adeguato supporto tecnico che consenta al progettista di compiere liberamente le scelte progettuali più opportune. Il processo di formatura a freddo consente infatti, anche per modeste quantità, di definire liberamente la sezione da produrre. Per rispondere a esigenze di questo tipo è quindi necessario disporre di uno strumento versatile e affidabile dedicato alla progettazione e alla verifica di tali elementi. Nel presente lavoro, si è mostrato che approcci numerici basati su teorie di trave con cinematica arricchita, possono rappresentare una valida risposta in tal senso. In particolare, è stato presentato l'approccio RM dedicato alla progettazione dei sistemi di copertura realizzati con elementi in acciaio formati a freddo. A tal proposito, è stata mostrata la generale applicabilità del metodo, che a differenza delle prescrizioni fornite dagli Eurocodici, è applicabile anche quando il pannello di copertura non fornisce un ritegno infinitamente rigido per l'arcareccio. Analogamente, è stato mostrato come l'approccio ESA consenta di superare, nelle verifiche relative ai profili di classe 4, il concetto di sezione efficace dovuta alla distorsione di sezione, in quanto questa è debitamente tenuta in conto nell'analisi strutturale. Come mostrato, ciò consente di disporre di uno strumento progettuale e di verifica applicabile, coerentemente con le norme, per qualsiasi forma di sezione trasversale della trave e per qualsiasi condizione di vincolo e di carico. In tal senso le prescrizioni normative fornite solo per sezioni trasversali a C e a Z sono superate. È stata, inoltre, presentata la riformulazione teorica della GBT, su cui sono stati sviluppati gli strumenti progettuali precedentemente visti. In particolare la deformabilità tagliante lungo lo spessore della parete e

lungo la linea media della sezione è stata introdotta in maniera del tutto originale a partire dalla GBT convenzionale proposta da Schardt. Si è mostrato, come la nuova formulazione garantisca la piena coerenza tra le deformazioni flessionali e taglianti della trave come, inoltre, a partire dalla nuova formulazione sia possibile in maniera agevole ricondursi alle classiche teorie di trave, anche deformabili a taglio.

Infine, è stata presentata una procedura di ricostruzione del regime tensionale tridimensionale che, mediante integrazione delle equazioni indefinite di equilibrio, consente di determinare la parte reattiva delle componenti di tensione associate al modello a cinematica ridotta.

# Bibliografia

- [1] C. Bernuzzi, Progetto e verifica delle strutture in acciaio secondo le Norme Tecniche per le Costruzioni e L'Eurocodice 3 (UNI EN 1993), Hoepli, Milano, 2011.
- [2] UNI EN 1993-1-3, Progettazione delle strutture in acciaio - Parte 1-3: Regole generali- Regole supplementari per l'impiego dei profilati e delle lamiere sottili piegati a freddo.
- [3] UNI CNR 10022, Profili formati a freddo: istruzioni per impiego nelle costruzioni.
- [4] UNI EN 1993-1-5, , Progettazione delle strutture in acciaio - Parte 1-5: Elementi strutturali a lastra.
- [5] UNI EN 1993-1-1, Progettazione delle strutture in acciaio - Parte 1-3: Regole generali e regole per gli edifici.
- [6] D.M. 14 Gennaio 2008 - Circolare 2 Febbraio 2009, n. 617, C.S.LL.PP, Norme tecniche per le Costruzioni e circolare applicativa.
- [7] AISI, North American Specifications. Appendix 1: design of cold-formed steel structural members using the direct strength method. In 2004 supplement to the North American Specifications for the design of cold-formed steel structures, American Iron and Steel Institution, Washington (DC), 2004.
- [8] C. Yua, W. Schafer, Simulation of cold-formed steel beams in local and distortional buckling with applications to the direct strength method, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 63, 581-590 (2007).
- [9] N. Silvestre, D. Camotim, Distortional buckling formulae for cold-formed steel C and Z-section members: Part I- derivation, Vol. 2, 1567-1597 (2004).

- 
- [10] S. Rendek, I. Baláž, Distortion of thin-walled beams, *Thin walled structures* (2004) 42, pp. 255-277.
- [11] M. Pala, A new formulation for distortional buckling stress in cold-formed steel members, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 62, 716-722, (2006).
- [12] G.J. Hancock, Design for distortional buckling of flexural members, *Thin-Walled Structures*, Vol. 27, 3-12 (1997)
- [13] E. Batista, Local-global buckling interaction procedures for the design of cold-formed columns: Effective width and direct method integrated approach, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, 1218-1231, (2009).
- [14] Z. Li, B.W. Schafer, Application of the finite strip method in cold-formed steel member design, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 66 pages 971-980, 2010.
- [15] C. D. Moen, B. W. Schafer, Strength Method for Design of Cold-Formed Steel Columns with Holes, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 137, 559-570, (2011).
- [16] A. Rusch, J. Lindner, Remarks to the Direct Strength Method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 39, 807-820 (2001).
- [17] Von Karman T, Sechler EE, Donnell LH, The strength of thin plates in compression, *Transactions, ASME* 1932, 54.APM5405.
- [18] Winter G., Strength of thin steel compression flanges, *Transactions of ASCE*, Paper no. 2305, *Trans.*, 112, 1.
- [19] B.W. Schafer, Review: The Direct Strength Method of cold-formed steel member design, *Journal of Constructional Steel Research* Vol. 64, 766-778 (2008).
- [20] B. W. Shafer, S. Adany, Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, *International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Orlando, 2006.
- [21] Z. Li, B. W. Shafer, Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods, *Twentieth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, Saint Louis, 2010.

- [22] Dubina D., Coupled instabilities in bar members general report. In: Liege, Belgium, September 5 - 7. Proceedings of the Second Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures-CIMS 96, pages. 119-32, 1996.
- [23] R. M. Lucas, F. G. A. Al-Bermani, S. Kitipornchai, Modelling of Cold-Formed Purlin-sheeting Systems - Part 1: Full model, Thin-Walled Structures, Vol. 27(3), pages 223-243, 1997.
- [24] V.Z. Vlasov, Thin-Walled Elastic Beams, Monson, Jerusalem, 1961.
- [25] M. Capurso, Sul calcolo delle travi in parete sottile in presenza di forze e distorsioni, La ricerca scientifica 6 (1964) 241-286.
- [26] M. Capurso, Influenza delle componenti di scorrimento nella deformazione delle travi di parete sottile con sezione aperta, Giornale del Genio Civile 122 (1984) 127-144.
- [27] L. De Lorenzis, A. La Tegola, Static behavior of pultruded fiber-reinforced polymer thin-walled beams, Composite Structures Vol. 60, 231-44 (2003).
- [28] De L. De Lorenzis, A. La Tegola, Effect of the actual distribution of applied stresses on global buckling of isotropic and transversely isotropic thin-walled members: numerical examples, Composite Structures Vol. 71, 83-100 (2005).
- [29] R.P. Schardt, Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Springer, Berlin, 1989.
- [30] R.P. Schardt, Generalized Beam Theory - an adequate method for coupled stability problems, Thin-Walled Structures, 19 (1994) 161-180.
- [31] P. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, GBT formulation to analyse the buckling behavior of thin-walled members with arbitrarily "branched" open cross sections, Thin-Walled Structures Vol. 44, 20-38 (2006).
- [32] N. Silvestre, Generalised beam theory to analyse the buckling behavior of circular cylindrical shells and tubes, Thin-Walled Structures Vol. 45, 185-98 (2007)
- [33] R. Goncalves, P. Dinis, D. Camotim, GBT formulation to analyse the first-order and buckling behavior of thin-walled members with arbitrary cross-sections, Thin-Walled Structures, Vol. 47, 583-600 (2009).

- [34] JM. Davies ,P. Leach ,D. Heinz, Second-order generalized beam theory, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 31, 221-41 1994).
- [35] Mihai Nedelcu, GBT-based buckling mode decomposition from finite element analysis of thin-walled members, *Thin-Walled Structures* 54 (2012), pp. 156-163.
- [36] Bebiano R., Pina P., Silvestre N. and Camotim D. (2008). GBTUL - Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members, DECivil/IST, Technical University of Lisbon (<http://www.civil.ist.utl.pt/gbt>).
- [37] N. Silvestre , D. Camotim, GBT buckling analysis of pultruded FRP lipped channel members, *Computers and Structures*, Vol. 81, 1889-904 (2003)
- [38] D. Camotim , C. Basaglia , N. Silvestre, GBT buckling analysis of thin-walled steel frames: a state-of-the-art report, *Thin Walled Structures*, Vol. 48,726-43 (2010)
- [39] G. Ranzi, A. Luongo, A new approach for thin-walled member analysis in the framework of GBT, *Thin-Walled Structures*, Vol. 49, 1404-14, ( 2011).
- [40] de Miranda S, Miletta R, Ruggerini A, Ubertini F. On the numerical modeling of thin-walled cold-formed roof systems. In: *Proceedings of the IV European conference on computational mechanics*. Paris, France; May 2010.
- [41] A. Ruggerini, modeling and analysis of thin-walled cold-formed roof systems, tesi di dottorato. 2007.
- [42] S. de Miranda, R. Miletta, A. Ruggerini, F. Ubertini Progettazione e calcolo di sistemi di copertura formati a freddo, *Costruzioni Metalliche* (2011) 3.
- [43] B. B. Anderson, T. M. Murray, Base test method standing seam roof systems subject to uplift loading, in: *Research Report No. CE/VPI-ST-90/06*, Department of Civil Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1990.
- [44] A. D. Pugh, T. M. Murray, Base test method standing seam roof systems subject to uplift loading - phase ii, in: *Research Report No. CE/VPI-ST-91/17*, Department of Civil Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1991.

- [45] J. F. Mills, T. M. Murray, Base test method standing seam roof systems subject to uplift loading - phase iii, in: Research Report No. CE/VPI-ST-92/09, Department of Civil Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1992.
- [46] L. Zetlin, G. Winter, Unsymmetrical bending of beams with and without lateral bracing, Vol. 81 of Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1955.
- [47] S. Elhouar, T. Murray, Stability requirements of z-purlin supporting conventional metal building roof systems, Annual technical Session proceedings, Structural Stability Research Council, Bethlem, PA, 1985.
- [48] M. Braham, A. Ruggerini, F. Ubertini, A numerical model for roof detailing of cold-formed purlin-sheeting systems, Stahlbau Vol. 4 238-246, 2008.
- [49] N. Silvestre, D. Camotim, Influence of shear deformation on the local and global buckling behaviour of composite thin-walled members, in: Thin-walled structures: advances in research, design and manufacturing technology (conference proceedings – Loughborough, 22–24/6), J. Loughlan (Ed.), Institute of Physics Publishing, Bristol, 2004, pp. 659-668.
- [50] N. Silvestre, D. Camotim, A shear deformable Generalized Beam Theory for the analysis of thin-walled composite members, Journal of Engineering Mechanics (2013). Article in press, DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000506.
- [51] N. Silvestre, D. Camotim, Nonlinear Generalized Beam Theory for cold-formed steel members, International Journal of Structural Stability and Dynamics 3 (2003) 461-490.
- [52] N. Silvestre, D. Camotim, GBT-based local and global vibration analysis of loaded composite open-section thin-walled members, International Journal of Structural Stability and Dynamics 6 (2006) 1-29.
- [53] N.M.F. Silva, N. Silvestre, On the influence of material couplings on the linear and buckling behavior of I-section composite columns, International Journal of Structural Stability and Dynamics 7 (2007) 243-272.
- [54] N. Silvestre, Non-classical effects in FRP composite tubes, Composites: Part B 40 (2009) 681-697.

- 
- [55] N.M.F. Silva, N. Silvestre, D. Camotim, GBT formulation to analyse the buckling behaviour of FRP composite open-section thin-walled columns, *Composite Structures* 93 (2010) 79-92.
- [56] S.de Miranda, A. Gutiérrez, R. Miletta, F. Ubertini, A generalized beam theory with shear deformation, *Thin Walled Structures*, Vol. 67 88-100, (2013).
- [57] M. Lembo, P. Podio-Guidugli, How to use reactive stresses to improve plate theory approximations of the stress field in a linearly elastic plate-like body. *Int J Solids Struct* Vol. 44, 1337-69 (2007).
- [58] Ubertini, F., Patch recovery based on complementary energy *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, (2004), pp. 501-1538



## Appendice A

# Procedura di decomposizione modale

La procedura qui presentata consente di separare automaticamente i quattro moti rigidi della sezione, rappresentati dallo spostamento assiale, dalle rotazioni rispetto agli assi principali di inerzia e dalla rotazione torsionale rispetto al centro di taglio.

Calcolata la  $\Lambda_R$  mediante l' Eq. (2.126), le matrici  $C_T^{(f)}$  and  $C_M^{(f)}$  vengono proiettata in un nuovo spazio descritto dai moti rigidi della sezione:

$$\Lambda_R^T C_T^{(f)} \Lambda_R = \mathbf{R}_{FF}^{(1)}, \quad (\text{A.1})$$

$$\Lambda_R^T C_M^{(f)} \Lambda_R = \mathbf{R}_{FF}^{(2)}. \quad (\text{A.2})$$

Le matrici ottenute,  $\mathbf{R}_{FF}^{(1)}$  e  $\mathbf{R}_{FF}^{(2)}$  hanno dimensione  $(4 \times 4)$  e vengono impiegate per risolvere il seguente problema agli autovalori:

$$(\mathbf{R}_{FF}^{(1)} - \lambda_i \mathbf{R}_{FF}^{(2)}) \rho_i = \mathbf{0}, \quad (\text{A.3})$$

le cui soluzioni sono del tipo:  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ ;  $\lambda_4 > 0$ . L'autovettore  $\rho_4$  associato all'autovalore non nullo  $\lambda_4$  rappresenta la rotazione torsionale rispetto al centro di taglio. A questo punto si può definire la matrice  $\rho$   $(4 \times 3)$  che colleziona i tre rimanenti autovettori associati ad autovalori nulli. Al fine quindi di riconoscere gli altri moti rigidi descritti da autovalori viene definita la matrice seguente:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{l} \int_s (\psi^T \psi + \mu^T \mu) ds, \quad (\text{A.4})$$

dove  $l$  è la lunghezza della linea media. Le matrici  $\mathbf{C}_M^{(f)}$  e  $\mathbf{Q}$  sono quindi proiettate nello spazio ridotto dei tre rimanenti moti rigidi della sezione mediante le seguenti relazioni:

$$(\mathbf{\Lambda}_{R\rho})^T \mathbf{C}_M^{(f)} (\mathbf{\Lambda}_{R\rho}) = \tilde{\mathbf{R}}_{FF}^{(2)}, \quad (\text{A.5})$$

$$(\mathbf{\Lambda}_{R\rho})^T \mathbf{Q} (\mathbf{\Lambda}_{R\rho}) = \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (\text{A.6})$$

Le matrici risultanti  $\tilde{\mathbf{R}}_{FF}^{(2)}$  and  $\tilde{\mathbf{Q}}$  di dimensione  $3 \times 3$ , vengono quindi nuovamente usate per risolvere il seguente problema agli autovalori:

$$(\tilde{\mathbf{Q}} - \lambda_i \tilde{\mathbf{R}}_{FF}^{(2)}) \tilde{\rho}_i = \mathbf{0}, \quad (\text{A.7})$$

la cui soluzione porta ad ottenere  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ . L' autovettore associato all'autovalore nullo  $\lambda_1$  rappresenta la traslazione rigida, mentre gli altri autovettori rappresentano le rotazioni rigide rispetto agli assi principali di inerzia della sezione. La matrice modale relativa ai moti rigidi è quindi ottenuta come:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}_R = \mathbf{\Lambda}_R \begin{bmatrix} \rho_{\tilde{\rho}} & \rho_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Infine la matrice  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_R$  deve essere normalizzata al fine che i moti rigidi della sezione corrispondano a spostamenti unitari.