

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

DOTTORATO DI RICERCA IN

Ingegneria Geomatica e dei Trasporti

Ciclo XXV

Settore Concorsuale di afferenza: 08/A3

Settore Scientifico disciplinare: ICAR/04

*STUDIO NUMERICO E SPERIMENTALE DELLE MISCELE  
DI AGGREGATI PER I CONGLOMERATI BITUMINOSI*

Presentata da: Giulia Manganelli

Coordinatore Dottorato

Prof. Ing. Gabriele Bitelli

Relatori

Prof. Ing. Giulio Dondi

Prof. Ing. Andrea Simone

Esame finale anno 2013

## ***PAROLE CHIAVE***

Aggregato

Conglomerato bituminoso

Metodo degli Elementi Distinti Particellare

Modello di Burger

Prova triassiale

PFC<sup>3D</sup>

<b>ABSTRACT .....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>2</b>
<b>1. METODI NUMERICI CONTINUI E DISCONTINUI</b>	
1.1 <u>INTRODUZIONE</u> .....	5
1.2 <u>IL METODO DELLE DIFFERENTE FINITE (FDM)</u> .....	7
1.2.1 <u>Principi fondamentali</u> .....	7
1.2.2 <u>Vantaggi e limiti del FDM</u> .....	8
1.3 <u>IL METODO DEL VOLUME FINITO (FVM)</u> .....	9
1.3.1 <u>Principi fondamentali</u> .....	9
1.3.2 <u>Vantaggi e limiti del FVM</u> .....	11
1.4 <u>IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI (FEM)</u> .....	11
1.4.1 <u>Principi fondamentali</u> .....	11
1.4.2 <u>Vantaggi e limiti del FEM</u> .....	13
1.5 <u>IL METODO DEGLI ELEMENTI AL CONTORNO (BEM)</u> .....	15
1.5.1 <u>Principi fondamentali</u> .....	15
1.5.2 <u>Vantaggi e limiti del BEM</u> .....	18
1.6 <u>IL METODO DEGLI ELEMENTI DISCRETI (DEM)</u> .....	19
1.6.1 <u>Principi fondamentali</u> .....	19
1.6.2 <u>Tipologie di DEM esistenti</u> .....	20
1.6.2.1 <u>Il DEM esplicito</u> .....	21
1.6.2.2 <u>Il DEM implicito (DDA)</u> .....	24
1.6.2.3 <u>Il DEM particellare</u> .....	26
<b>2. IL SOFTWARE DI CALCOLO PFC<sup>3D</sup> (PARICLE FLOW CODE)</b>	
2.1 <u>INTRODUZIONE</u> .....	38
2.2 <u>LEGGI FONDAMENTALI E CONDIZIONI INIZIALI</u> .....	40
2.2.1 <u>La legge del moto</u> .....	40
2.2.2 <u>La legge forza-spostamento</u> .....	42
2.2.3 <u>Lo smorzamento</u> .....	48

2.2.4	<u>Le condizioni iniziali</u> .....	50
2.3	<u>LA CREAZIONE DEL MODELLO</u> .....	50
2.3.1	<u>La generazione delle particelle</u> .....	51
2.3.2	<u>I modelli di contatto</u> .....	55
2.3.2.1	<u>Il modello di rigidezza</u> .....	55
2.3.2.2	<u>Il modello di slittamento</u> .....	63
2.3.2.3	<u>Il modello di legame</u> .....	63
2.4	<u>LE CONDIZIONI AL CONTORNO</u> .....	67
2.5	<u>INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI</u> .....	68
<b>3.</b>	<b><u>LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA</u></b>	
3.1	<u>INTRODUZIONE</u> .....	72
3.2	<u>LA MODELLAZIONE DEL BITUME</u> .....	76
3.2.1	<u>Principi reologici dei conglomerati bituminosi</u> .....	76
3.2.2	<u>Principi reologici del bitume</u> .....	78
3.2.2.1	<u>Modelli meccanici elementari</u> .....	79
3.2.2.2	<u>Modelli viscoelastici lineari</u> .....	85
3.2.3	<u>Studio relativo alla modellazione DEM del bitume</u> .....	91
3.3	<u>STUDIO SPERIMENTALE RELATIVO ALL'INFLUENZA DELLA FORMA DELL'AGGREGATO SULLE PRESTAZIONI DI UNA MISCELA IN CONGLOMERATO BITUMINOSO</u> .....	91
3.3.1	<u>Brevi cenni sul ruolo della forma dell'aggregato in letteratura</u> .....	92
3.3.2	<u>Flow chart della sperimentazione</u> .....	93
<b>4.</b>	<b><u>MODELLI DI CONTATTO PER LA SIMULAZIONE DEM DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO: IL MODELLO ELASTICO LINEARE</u></b>	
4.1	<u>INTRODUZIONE</u> .....	95
4.2	<u>YOU Z., BUTTLAR W.G. (2004), "DISCRETE ELEMENT MODELING TO PREDICT THE MODULUS OF ASPHALT CONCRETE MIXTURES"</u> .....	95
4.3	<u>YOU Z., BUTTLAR W.G. (2005), "APPLICATION OF DISCRETE ELEMENT MODELING TECHNIQUES TO PREDICT THE COMPLEX MODULUS OF ASPHALT-AGGREGATE HOLLOW CYLINDERS SUBJECTED TO INTERNAL</u>	

	<u>PRESSURE</u> .....	103
4.4	<u>ABBAS A., MASAD E., PAPAGIANNAKIS T., SHENOY A. (2005), “MODELLING MASTIC STIFFNESS USING DISCRETE ELEMENT ANALYSIS AND MICROMECHANICAL-BASED MODELS”</u> .....	108
4.5	<u>ADHIKARI S., YOU Z. (2007), “DISCRETE ELEMENT MODELING OF THE ASPHALT MIXTURES: FROM TWO-DIMENSIONAL TO THREE- DIMENSIONAL MODELS”</u> .....	116
4.6	<u>KIM H., WAGONER M.P., BUTTLAR W.G. (2008), “SIMULATION OF FRACTURE BEHAVIOR IN ASPHALT CONCRETE USING A HETEROGENEOUS COHESIVE ZONE DISCRETE ELEMENT MODEL”</u> .....	121
4.7	<u>MASAD E., MAHMOUD E. (2009), “DISCRETE ELEMEN ANALYSIS OF AGGREGATE RESISTANCE TO FRACTURE IN ASPHALT MIXTURES”; MASAD E., MAHMOUD E., NAZARIAN S. (2009), “DISCRETE ELEMEN ANALYSIS OF AGGREGATE VARIABILITY,BLENDING, AND FRACTURE IN ASPHALT MIXTURES”</u> .....	131
4.8	<u>YOU Z., ADHIKARI S., DAI Q. (2008), “THREE-DIMENSIONAL DISCRETE ELEMENT MODELS FOR ASPHALT MIXTURES”</u> .....	136
4.9	<u>OSSERVAZIONI</u> .....	144
<b>5.</b>	<b>MODELLI DI CONTATTO PER LA SIMULAZIONE DEM DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO: IL MODELLO DI BURGER</b>	
5.1	<u>INTRODUZIONE</u> .....	145
5.2	<u>CHANG K. G. &amp; MEEGODA J.N. (1997), “MICROMECHANICAL SIMULATION OF HOT MIX ASPHALT</u> .....	145
5.3	<u>COLLOP A. C., MCDOWELL G. R. &amp; LEE Y. (2004), “USE OF THE DISTINCT ELEMENT METHOD TO MODEL THE DEFORMATION BEHAVIOR OF AN IDEALIZED ASPHALT MIXTURE”;</u> COLLOP A. C., <u>MCDOWELL G. R. &amp; LEE Y. (2006), “MODELLING DILATION IN AN IDEALISED ASPHALT MIXTURE USING DISCRETE ELEMENT MODELLING”</u> .....	146
5.4	<u>DONDI G., BRAGAGLIA (2006), “MODELLAZIONE AD ELEMENTI DISTINTI PARTICELLARI DELLA PROVA ITSM”</u> .....	155

5.5	<u>ABBAS A., MASAD E., PAPAGIANNAKIS T. &amp; HARMAN T. (2007), "MICROMECHANICAL MODELING OF THE VISCOELASTIC BEHAVIOR OF ASPHALT MIXTURES USING THE DISCRETE-ELEMENT METHOD".....</u>	164
5.6	<u>DONDI G., BRAGAGLIA M., VIGNALI V. (2007), "FLEXIBLE PAVEMENT SIMULATION WITH DISTINCT PARTICLE ELEMENT METHOD"; DONDI G., BRAGAGLIA M., VIGNALI V. (2008), "EVOLUZIONE DEI CRITERI DI CALCOLO DELLE PAVIMENTAZIONI FLESSIBILI: I MODELLI PARTICELLARI".....</u>	171
5.7	<u>LIU Y., DAI Q. &amp; YOU Z. (2009), "VISCOELASTIC MODEL FOR DISCRETE ELEMENT SIMULATION OF ASPHALT MIXTURE".....</u>	185
5.8	<u>MICAELO R., RIBEIRO J., AZEVEDO M., AZEVEDO N. (2009), "DISCRETE ELEMENT MODELLING OF FIELD ASPHALT COMPACTION".....</u>	198
5.9	<u>DONDI G., BRAGAGLIA M. &amp; VIGNALI V. (2010), "BITUMINOUS MIXTURES SIMULATION WITH DISTINCT PARTICLE ELEMENTS METHOD".....</u>	202
5.10	<u>ADHIKARI S. &amp; YOU Z. (2010), "3D DISCRETE ELEMENT MODELS OF THE HOLLOW CYLINDRICAL ASPHALT CONCRETE SPECIMENS SUBJECT TO THE INTERNAL PRESSURE".....</u>	207
5.11	<u>Z. YOU, LIU Y., Q. DAI (2011), "THREE-DIMENSIONAL MICROSTRUCTURAL-BASED DISCRETE ELEMENT VISCOELASTIC MODELING OF CREEP COMPLIANCE TESTS FOR ASPHALT MIXTURES".....</u>	216
5.12	<u>OSSERVAZIONI.....</u>	227
<b>6.</b>	<b>LA FASE DI CALIBRAZIONE DEI PARAMETRI MICROSCOPICI</b>	
6.1	<u>INTRODUZIONE .....</u>	229
6.2	<u>SCelta DELLE MODALITÀ PIÙ OPPORTUNE PER SIMULARE L'AGGREGATO REALE .....</u>	230
6.2.1	<u>Scelta del materiale costituente le sfere .....</u>	231
6.2.2	<u>Scelta del test di laboratorio .....</u>	233

6.3	<u>TEST SVOLTI PER LA CALIBRAZIONE DEI PARAMETRI</u> .....	234
6.3.1	<u>Fase di laboratorio</u> .....	236
6.3.2	<u>Fase di modellazione</u> .....	242
6.3.3.1	La generazione dei walls .....	243
6.3.3.2	La generazione delle sfere .....	245
6.3.3.3	L'esecuzione della prova.....	250
6.4	<u>ANALISI DEI RISULTATI OTTENUTI</u> .....	257
6.4.1	<u>Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale</u> .....	257
6.4.2	<u>Andamento della deformazione volumetrica in funzione della deformazione assiale</u> .....	259
6.4.3	<u>Distribuzione delle forze di contatto</u> .....	260
<b>7.</b>	<b>LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA SU PROVINI COSTITUITI DA CLUMP</b>	
7.1	<u>INTRODUZIONE</u> .....	265
7.2	<u>TEST SVOLTI PER LO STUDIO DELL'INFLUENZA DELLA FORMA DELL'AGGREGATO</u> .....	265
7.2.1	<u>Fase di laboratorio</u> .....	267
7.2.1.1	Assemblaggio delle sfere.....	269
7.2.1.2	Esecuzione dei test triassiali.....	271
7.2.2	<u>Fase di modellazione</u> .....	271
7.2.2.1	La generazione dei walls.....	278
7.2.2.2	La generazione di sfere e clump.....	278
7.2.2.3	L'esecuzione della prova.....	281
7.2.3	<u>Analisi dei risultati ottenuti</u> .....	282
7.2.3.1	Valutazione della percentuale di clump rotti.....	282
7.2.3.2	Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale.....	285
7.3	<u>CONFRONTO TRA SFERE E CLUMP</u> .....	289
7.3.1	<u>Analisi della resistenza massima del sistema</u> .....	290
7.3.2	<u>Analisi delle caratteristiche geotecniche</u> .....	292

7.3.2.1	<i>Angolo d'attrito di picco.....</i>	292
7.3.2.2	<i>Indice dei vuoti e porosità.....</i>	297
7.3.3	<i><u>Analisi delle caratteristiche microscopiche</u> .....</i>	299
7.3.3.1	<i>Addensamento.....</i>	299
7.3.3.2	<i>Le forze di contatto.....</i>	303
	<b>CONCLUSIONI .....</b>	313
	<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	316



Higher traffic volume produces high stress within pavement layer, which is one of the main causes for pavement distresses. These distresses reduce the service life of the pavement and increase the maintenance cost. Asphalt mixture is a composite material of graded aggregates bound with asphalt binder plus a certain amount of air voids. The physical properties and performance of asphalt mixture are governed by the properties of the aggregate, the properties of the asphalt binder and asphalt-aggregate interactions.

The conventional approach to model the stress-strain behavior of asphalt mixtures is to treat them at macro-scale using continuum-based methods. These methods represent the system as a domain of elementary units with a simple shape that, while deforming, remain in contact with each other through their relative separation surfaces. Numerous research works, however, show that for these mixtures it's very important to take into account their micromechanical behaviour at the scale of aggregate particles, because it is a primary factor in terms of overall system performance. In this way the Distinct Particle Element Method (DEM-P) represents a very useful tool, which schematizes a granular material by particles that displace independently from one another and interact only at contact points.

Since the greater part of asphalt mixtures is composed of aggregates, their structure and characteristics, particularly angularity and shape, have been considered as primary factors that affect the development of the aggregate skeleton and the mechanical performance of asphalt pavements. Aggregate contact and interlocking, in fact, control the load-bearing capacity and load-transferring capability of asphalt mixes.

In order to investigate this influence, a series of triaxial tests have been conducted on samples composed of spheres and angular grains. Numerical results have been compared with the lab ones in terms of deviator stress versus axial strain and in terms of micromechanical characteristics.

Una pavimentazione stradale, sia essa di tipo flessibile o semirigida, è tradizionalmente formata da strati sovrapposti, i più superficiali dei quali sono costituiti da miscele di conglomerato bituminoso.

La percentuale di bitume e la distribuzione granulometrica degli aggregati variano al variare della tipologia dello strato e sono strettamente legate alle caratteristiche meccanico-funzionali che esso deve garantire.

In particolare, lo strato più superficiale (usura) deve essere in grado di resistere alle azioni normali e tangenziali trasmesse dagli pneumatici e, contemporaneamente, deve assicurare prestazioni elevate in termini di aderenza e regolarità.

Lo strato di collegamento (binder) e quello di base devono essere caratterizzati da buoni valori di portanza e resistenza a fatica, al fine di limitare il fenomeno dell'ormaiamento e la nascita di fessure dovute ai carichi ripetuti generati dal traffico veicolare.

Dalla necessità di limitare i fenomeni che portano al deterioramento delle sovrastrutture stradali nasce, quindi, l'esigenza di indagare analiticamente il comportamento meccanico del conglomerato bituminoso.

La natura di tale materiale, fortemente anisotropa e disomogenea, ne rende però complessa la schematizzazione della risposta tenso-deformativa in presenza di carichi applicati.

L'approccio tradizionalmente utilizzato per la modellazione numerica del conglomerato bituminoso si basa su uno studio macroscopico della sua risposta meccanica attraverso modelli costitutivi al continuo che, per loro natura, non considerano la mutua interazione tra le fasi eterogenee che lo compongono ed utilizzano schematizzazioni omogenee equivalenti.

Nell'ottica di un'evoluzione di tali metodologie è necessario superare questa semplificazione, considerando il carattere discreto del sistema ed adottando un approccio di tipo microscopico, che consenta di rappresentare i reali processi fisico-meccanici dai quali dipende la risposta macroscopica d'insieme.

Nel presente lavoro, dopo una rassegna generale dei principali metodi numerici tradizionalmente impiegati per lo studio del conglomerato bituminoso, viene approfondita la teoria degli Elementi Discreti Particellari (*DEM-P*), che schematizza il materiale granulare come un insieme di particelle indipendenti che interagiscono tra loro nei punti di reciproco contatto secondo appropriate leggi costitutive. In particolare, ne vengono illustrati i concetti cardine, le ipotesi e le leggi fondamentali (capitolo 1).

Dopo una dettagliata descrizione del software di calcolo utilizzato per la fase sperimentale (capitolo 2), nel terzo capitolo viene delineato il filo logico dello studio effettuato, che unisce la parte iniziale di ricerca bibliografica, relativa ai modelli costitutivi utilizzati per la schematizzazione del bitume nel DEM particellare, a quella sperimentale, legata all'indagine dell'influenza della forma dell'aggregato sulle caratteristiche tenso-deformative della miscela.

Infatti, mentre la schematizzazione degli aggregati risulta relativamente semplice mediante il DEM particellare, è bene tenere presente che una delle maggiori difficoltà relative alla modellazione agli elementi discreti del conglomerato bituminoso è legata proprio al complesso comportamento reologico di questo materiale.

Per questo motivo, per studiare il comportamento del conglomerato bituminoso con il DEM particellare, si è scelto di impostare la ricerca seguendo due approcci paralleli, considerando separatamente il ruolo del bitume e quello dell'aggregato.

Per quanto riguarda il ruolo del bitume viene effettuata un'approfondita ricerca bibliografica allo scopo di descrivere come gli Autori che si sono occupati dell'argomento abbiano scelto di schematizzare il comportamento viscoelastico del legante. In base alle memorie reperite in letteratura i modelli di contatto più frequentemente utilizzati risultano essere quello elastico lineare (capitolo 4) e quello viscoelastico di Burger (capitolo 5).

La fase sperimentale, descritta negli ultimi due capitoli, è costituita da due fasi successive. La prima, mirata alla determinazione dei parametri microscopici con cui schematizzare la miscela di aggregati, prevede la modellazione tridimensionale di prove triassiali effettuate su provini costituiti da miscele di singole sfere.

Dal confronto tra valori numerici e sperimentali è possibile verificare che il metodo degli elementi distinti particellari, tarando opportunamente i parametri

iniziali, riproduce efficacemente le modalità di prova e l'effettivo comportamento del materiale reale durante il test e si propone, quindi, come un valido strumento per indagare le caratteristiche fisico-meccaniche della miscela di inerti (capitolo 6).

Nella seconda fase, utilizzando i parametri microscopici ottenuti dalla precedente calibrazione, viene valutata l'influenza della forma e delle dimensioni dell'aggregato sulle caratteristiche macroscopiche (tensione deviatorica massima) e microscopiche (forze di contatto normali e tangenziali, numero di contatti, indice dei vuoti, porosità, addensamento, angolo di attrito interno) della miscela. Ciò è reso possibile dal confronto tra risultati numerici e sperimentali di test triassiali condotti su provini costituiti da tre diverse miscele formate da sfere ed elementi di forma generica.

## ***METODI NUMERICI CONTINUI E DISCONTINUI***

---

### ***1.1 INTRODUZIONE***

I metodi di modellazione numerica sono strumenti che permettono di studiare un sistema complesso coniugando una buona approssimazione della rappresentazione geometrica con una corretta definizione del comportamento tenso-deformativo in tempi di calcolo ragionevoli.

La scelta dell'approccio numerico da utilizzare per lo studio di un determinato problema dipende principalmente da:

- natura del sistema oggetto di studio;
- obiettivo da perseguire;
- dati iniziali a disposizione.

Convenzionalmente i metodi numerici utilizzati per la risoluzione di problemi di natura ingegneristica vengono suddivisi in due gruppi:

- Metodi al continuo: schematizzano il sistema come un dominio discretizzato in unità elementari di forma geometrica semplice (triangoli, quadrilateri, tetraedri, ecc.) che, pur deformandosi, rimangono costantemente in contatto reciproco attraverso le relative superfici di separazione.

I metodi numerici al continuo più diffusi sono [97]:

- il Metodo delle Differenze Finite (*Finite Difference Method* – FDM): si basa sull'approssimazione diretta delle equazioni differenziali parziali ottenuta sostituendo alle derivate parziali delle differenze definite sul dominio del problema. Si tratta quindi di approssimare un continuo in una serie di punti discreti. Si giunge così alla soluzione del sistema imponendo le condizioni iniziali e quelle al contorno.
- il Metodo degli Elementi Finiti (*Finite Element Method* - FEM): richiede la discretizzazione in sottodomini di forma semplice e regolare caratterizzati da un numero fissato di nodi. Per approssimare l'andamento delle

equazioni differenziali alle derivate parziali a livello del singolo elemento e generare le equazioni algebriche locali che ne rappresentano il comportamento, si ricorre a funzioni di tentativo in genere polinomiali. Le equazioni così ottenute sono poi assemblate in sistemi globali la cui soluzione produce l'informazione richiesta nel dominio, dopo aver imposto adeguatamente le condizioni iniziali e quelle al contorno. Il FEM è oggi il metodo numerico maggiormente impiegato nell'ingegneria per la sua flessibilità nel trattare l'eterogeneità e la non linearità dei materiali e la complessità delle condizioni al contorno [28];

- il Metodo degli Elementi di Contorno (*Boundary Element Method* - BEM): richiede la discretizzazione del dominio della soluzione solo ai bordi, riducendo così le dimensioni del problema e semplificando i dati richiesti in ingresso. Si basa sulla risoluzione di un'equazione integrale definita sul contorno invece che sulla risoluzione diretta delle PDEs come nel FEM.
- Metodi discontinui: rappresentano il sistema come un insieme di corpi discreti e distinti che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto. Il comportamento meccanico del mezzo è descritto tracciando l'andamento delle forze che si sviluppano nei punti di contatto ed i movimenti dei singoli elementi che lo compongono. A differenza di quanto avviene per i metodi al continuo, nei quali i contatti fra le unità elementari rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, in quelli discontinui i contatti vengono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo dei singoli elementi. Grazie a questa peculiarità è possibile indagare l'evoluzione della risposta del sistema in condizioni di equilibrio stabile, equilibrio limite ed a rottura, oltre la quale, a differenza dei metodi al continuo, è ammessa la separazione del dominio in blocchi che continuano a risentire delle sollecitazioni agenti. Tra i metodi discontinui quello più frequentemente utilizzato è il Metodo degli Elementi Discreti (*Discrete Element Method* - DEM). Esso prevede la simulazione di sistemi soggetti a grandi spostamenti, rotazioni e fratture, che possono causare anche il completo distacco tra i singoli elementi. Le condizioni di compatibilità sugli

spostamenti rappresentano un'importante differenza tra i metodi al continuo e quelli discreti: nei primi la compatibilità deve essere imposta tra elementi interni, mentre nei secondi non è richiesta poiché viene sostituita dai modelli costitutivi di contatto tra unità adiacenti.

Nei paragrafi seguenti vengono descritti i concetti di base relativi ai metodi numerici elencati nel paragrafo introduttivo e ne vengono messi in luce i principali vantaggi e svantaggi.

## **1.2 IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE (FDM)**

### **1.2.1 Principi fondamentali**

Il Metodo delle Differenze Finite (FDM) consente di ottenere soluzioni approssimate delle equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali (*Partial Differential Equations* - PDEs).

L'idea fondamentale su cui si basa il metodo è la sostituzione delle derivate parziali delle funzioni obiettivo mediante differenze definite su determinati intervalli del dominio del problema nelle tre direzioni principali  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  [161]. La soluzione del sistema di equazioni algebriche così ottenuto fornisce in tutti i nodi il valore della funzione obiettivo che soddisfa sia le PDEs, sia le condizioni al contorno.

Il metodo delle differenze finite utilizza generalmente griglie aventi caratteristiche geometriche regolari (figura 1.1).

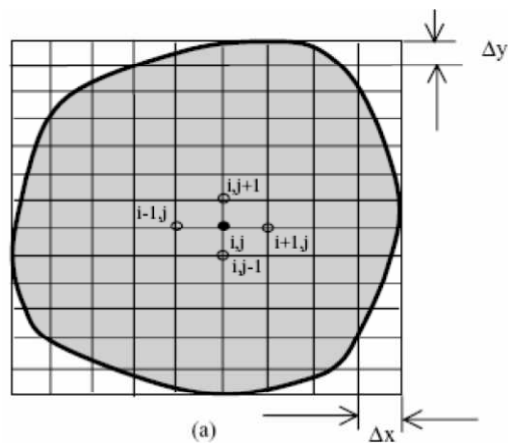


FIGURA 1.1: DISCRETIZZAZIONE RELATIVA AL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE [97].

Nel caso di uno schema FDM a 5 nodi, ad esempio, le equazioni risultanti nei nodi della griglia (i, j) saranno espresse come combinazione dei valori della funzione nei quattro nodi adiacenti (figura 1.1). Applicando il teorema di Navier al punto generico (i, j) si ottiene:

$$u_x^{i,j} = a_1 \cdot u_x^{i-1,j} + a_2 \cdot u_x^{i,j-1} + a_3 \cdot u_x^{i,j+1} + a_4 \cdot u_x^{i+1,j} + a_5 \cdot u_x^{i+1,j+1} + a_6 \cdot F_x^{i,j} \quad (1.1)$$

$$u_y^{i,j} = b_1 \cdot u_y^{i-1,j} + b_2 \cdot u_y^{i,j-1} + b_3 \cdot u_y^{i,j+1} + b_4 \cdot u_y^{i+1,j} + b_5 \cdot u_y^{i+1,j+1} + b_6 \cdot F_y^{i,j} \quad (1.2)$$

dove:

$a_k, b_k$  = (con  $k = 1,2,\dots,6$ ) sono funzione degli intervalli  $\Delta x$  e  $\Delta y$  della griglia e delle proprietà elastiche del solido;

$F_x^{i,j}$  = forza in direzione x applicata nel punto (i, j);

$F_y^{i,j}$  = forza in direzione y applicata nel punto (i, j).

L'insieme di tali equazioni valutate in tutti i punti della mesh produce un sistema la cui soluzione può essere ottenuta per mezzo di metodi diretti o iterativi.

### **1.2.2 Vantaggi e limiti del FDM**

Il concetto di base su cui si fonda il Metodo delle Differenze Finite (FDM) è la discretizzazione diretta delle PDEs che governano il problema mediante la sostituzione delle derivate parziali con differenze definite sul contorno dei punti della griglia.

In particolare, per approssimare le equazioni alle derivate parziali nell'intorno dei punti campionati non si utilizzano funzioni di interpolazione (come invece accade nel metodo degli elementi finiti e nel metodo degli elementi di contorno), poiché la configurazione della mesh adottata è tale da generare valori della funzione obiettivo nei punti rappresentativi con intervalli tanto piccoli da rendere gli errori introdotti non significativi. Per questo motivo il metodo FDM rappresenta la tecnica più diretta ed intuitiva per la soluzione delle PDEs [97]. Essendo basato su una griglia regolare, il FDM convenzionale risulta generalmente poco adatto alla modellazione di problemi



complessi di meccanica delle terre e delle rocce, in quanto non riesce a tenere conto di condizioni al contorno particolari e della non omogeneità del materiale. Per questo motivo sono state sviluppate ulteriori versioni basate su griglie quadrilatere irregolari, tra le quali quella più significativa è l'approccio del Volume Finito (*Finite Volume Method* – FVM) [136].

### **1.3 IL METODO DEL VOLUME FINITO (FVM)**

#### **1.3.1 Principi fondamentali**

Il Finite Volume Method (FVM) prevede l'integrazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali in un volume sui cui confini vengono imposte le condizioni al contorno. Tale volume ( $\Omega$ ) viene suddiviso in un numero finito  $N$  di celle contigue di forma poliedrica arbitraria, chiamate *Control Volume* (CV), con confine  $\Gamma_k$  e di versore normale uscente  $n_i^k$  con  $k = 1, 2, \dots, N$  [97].

Il confine  $\Gamma_k$  del volume di controllo è costituito da un numero ( $M^k$ ) di elementi poligonali  $\Gamma_k^p$  con  $p = 1, 2, \dots, M^k$  e vale la relazione:

$$\Gamma_k = \bigcup_{p=1}^{M^k} \Gamma_k^p \quad (1.3)$$

Applicando il teorema di Gauss, le equazioni di equilibrio di Navier-Cauchy in termini di tensioni possono essere riscritte in termini di spostamenti come segue:

$$\sum_{k=1}^N \left[ \sum_{p=1}^{M^k} \int_{\Gamma_k^p} t_i^k \cdot d\Gamma + \int_{\Omega_k} f_i \cdot d\Omega \right] = \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{p=1}^{M^k} \int_{\Gamma_k^p} \sigma_{ij}^k \cdot n_j^p \cdot d\Gamma + F_x^k \right] = 0 \quad (1.4)$$

dove:

$F_i^k = \rho \cdot g_i \cdot V^k$  vettore delle forze applicato al centro del volume  $V^k$  di CV;

$\rho$  = densità del materiale;

$g_i$  = vettore delle accelerazioni.

Il metodo consiste nel formulare gli integrali dell'equazione precedente in termini di funzioni algebriche degli spostamenti nei nodi. Ad esempio, applicando tale formula alla cella P della griglia quadrilatera di figura 1.2 avente il centro nel nodo P, quattro lati (ij, jk, kl, li) e quattro nodi (i, j, k, l), circondata da otto celle vicine con centro I, J,...,O assumendo come variabili gli spostamenti dei centri delle zone, si ottiene:

$$A_p \cdot u_x^p + \sum_r A_r \cdot u_x^r + B_p \cdot u_y^p + \sum_r B_r \cdot u_y^r + F_x^K = 0 \quad (1.5)$$

$$C_p \cdot u_y^p + \sum_r C_r \cdot u_y^r + D_p \cdot u_x^p + \sum_r D_r \cdot u_x^r + F_y^K = 0 \quad (1.6)$$

dove  $A_p, A_r, B_p, B_r, C_p, C_r, D_p, D_r$  sono coefficienti funzione della geometria della cella e delle proprietà elastiche del materiale, con  $r = 1, 2, \dots, 8$  percorrendo le otto celle circostanti adiacenti alla P.

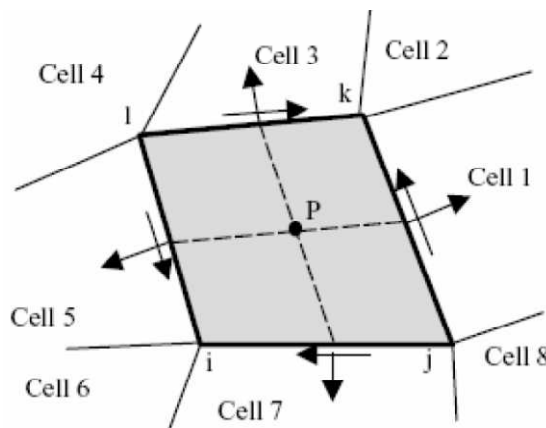


FIGURA 1.2: DISCRETIZZAZIONE RELATIVA AL FINITE VOLUME METHOD [97].

I volumi di controllo (CV) possono essere definiti all'interno delle mesh secondo due modalità (figura 1.3):

- cell-centred scheme (si utilizzano come variabili gli spostamenti dei centri delle celle);
- vertex-centered scheme (si adottano gli spostamenti nodali).

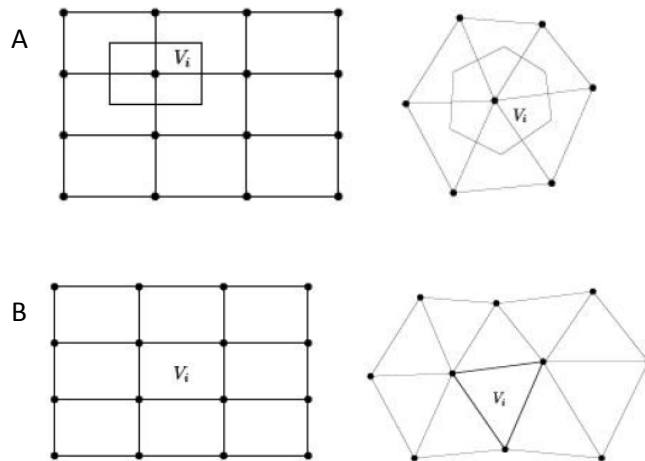


FIGURA 1.3: DEFINIZIONE DEI VOLUMI SECONDO UNO SCHEMA VERTEX-CENTERED (A) E SECONDO UNO SCHEMA CELL-CENTERED (B).

### **1.3.2 Vantaggi e limiti del FVM**

Come sottolineato da Bailey [15] e Fallah [79], il Finite Volume Method presenta numerosi punti di contatto con il FEM tanto da essere considerato alla stregua di un collegamento tra il FDM ed il FEM. Permette, infatti, di superare la mancanza di flessibilità del FDM tradizionale nella modellazione di griglie irregolari, di condizioni al contorno complesse o di materiali disomogenei.

Permangono comunque notevoli difficoltà nel simulare sistemi discontinui che non consentono la continuità tra punti vicini della mesh.

## **1.4 IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI (FEM)**

### **1.4.1 Principi fondamentali**

Il Metodo degli Elementi Finiti (*Finite Element Method* - FEM) si basa sulla schematizzazione di una struttura continua come un insieme di regioni di volume finito e forma semplice, connesse tra loro in un numero finito di punti detti nodi. Tali regioni non si compenetrano e gli spostamenti dei punti al loro interno risultano essere funzione degli spostamenti nodali.

Il problema elastico del continuo considerato, la cui esatta formulazione conduce a sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali definiti da opportune condizioni

al contorno, viene discretizzato e ricondotto in via approssimata alla soluzione di un sistema di equazioni lineari con un numero finito di incognite (gli spostamenti nodali).

Per condurre un'analisi numerica mediante il metodo degli elementi finiti è necessario compiere tre fondamentali operazioni:

- discretizzazione del dominio: consiste nella suddivisione del dominio in un numero finito di elementi tra loro contigui, di forma regolare (triangoli, quadrilateri, ...), definiti da un numero fissato di nodi (figura 1.4);

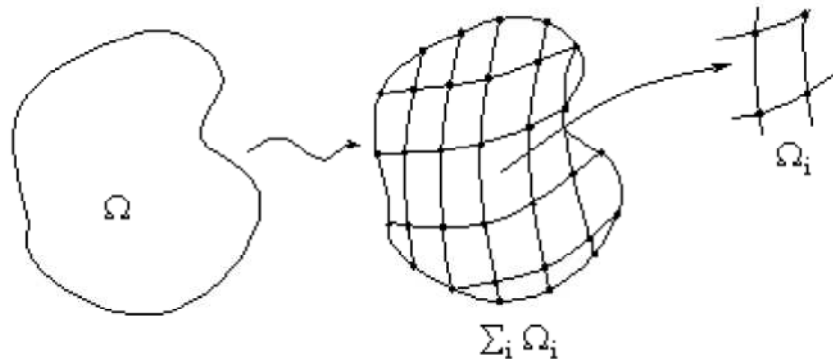


FIGURA 1.4: SUDDIVISIONE DEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE  $\Omega$  IN SOTTODOMINI  $\Omega_i$  [97].

- approssimazione locale: si ipotizza che la funzione incognita  $u_i^e$  (ad esempio lo spostamento) possa essere approssimata per ciascun elemento mediante una funzione nodale  $u_i^j$  che, dovendo soddisfare le PDEs, assume la forma:

$$u_i^e = \sum_{j=1}^M N_{ij} \cdot u_i^j \quad (1.7)$$

dove:

$N_{ij}$  = funzioni forma (o funzioni di interpolazione);

$M$  = numero degli elementi.

In questo modo è possibile legare gli spostamenti generici interni all'elemento a quelli nodali. Le funzioni di forma hanno un ruolo fondamentale poiché

rappresentano il polinomio che approssima il valore esatto degli spostamenti e quindi determinano la convergenza del metodo;

- assemblaggio e soluzione dell'equazione matriciale globale: usando le funzioni forma, le PDEs originali del problema sono sostituite da un sistema di equazioni algebriche che assumono la seguente forma:

$$\sum_{i=1}^N [K_{ij}^e] \cdot \{u_i^e\} = \sum_{i=1}^N (f_i^e) \quad (1.8)$$

$$\text{oppure } [K] \cdot \{u\} = \{F\} \quad (1.9)$$

dove:

$[K_{ij}^e]$  = matrice di rigidezza (simmetrica ed a bande);

$\{u_j^e\}$  = vettore dei valori nodali della variabile incognita (ad esempio dello spostamento);

$\{f_i^e\}$  = vettore che contiene le forze interne all'elemento, che tiene conto delle condizioni iniziali e di quelle al contorno.

### **1.4.2 Vantaggi e limiti del FEM**

La vasta diffusione del metodo degli elementi finiti, testimoniata dall'ampia disponibilità di software di calcolo in commercio, è in gran parte legata alla sua flessibilità nel tener conto della disomogeneità dei materiali e della loro anisotropia, di condizioni al contorno anche complesse e di problemi dinamici.

La precisione ottenuta dipende principalmente dalla dimensione dell'intervallo di suddivisione utilizzato per la definizione della mesh: la riduzione che si ottiene sull'errore compiuto è proporzionale alla distanza reciproca tra i nodi della griglia; più sono ravvicinati i nodi migliore è la significatività e l'attendibilità dei risultati. Per questo motivo, in caso di geometrie complesse, si ricorre generalmente a mesh raffittite con passo non costante, che aumenta nelle zone di maggiore interesse.

La carenza principale del metodo degli elementi finiti è rappresentata dalla scarsa capacità di modellare il comportamento tenso-deformativo di sistemi soggetti a rottura in quanto, essendo un metodo al continuo, non ammette la separazione reciproca tra gli elementi infinitesimi.

A tal proposito Goodman, assumendo che le tensioni di contatto ed i relativi spostamenti lungo le fratture di spessore teorico nullo seguissero una relazione lineare con le rigidità normale e tangenziale, ha proposto l'introduzione di un *element joint* che potesse essere direttamente incorporato in un processo FEM con un'equazione di equilibrio globale data da (figura 1.5) [83]:

$$k^G \cdot u^G = f^G \tag{1.10}$$

dove:

$k^G$  = matrice simmetrica i cui elementi sono definiti rispettivamente dalla rigidità normale e tangenziale, dalla lunghezza dell'elemento e dal suo orientamento rispetto al sistema di riferimento globale;

$u^G$  = vettore degli spostamenti nodali dei quattro nodi (i, j, k, l) che lo definiscono.

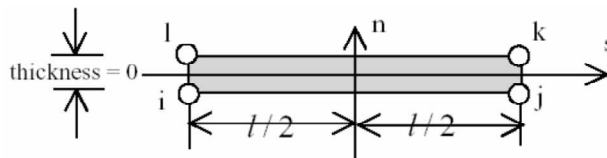


FIGURA 1.5: ELEMENT JOINT SECONDO GOODMAN [97].

Per consentire il completo distacco dell'*element joint* da quelli adiacenti, caratteristica non ammessa nella formulazione di Goodman, Zienkiewicz ha introdotto una nuova tipologia di *element joint* a sei nodi, due dei quali aggiuntivi nella sezione di mezzeria (figura 1.6 A) [178].

Nel 1973 Ghaboussi ha elaborato una nuova tipologia di *element joint*, di spessore finito (t), basato sulla teoria della plasticità, ricorrendo agli spostamenti relativi tra le due facce opposte di una frattura come sistemi incogniti indipendenti (figura 1.6 B) [82].

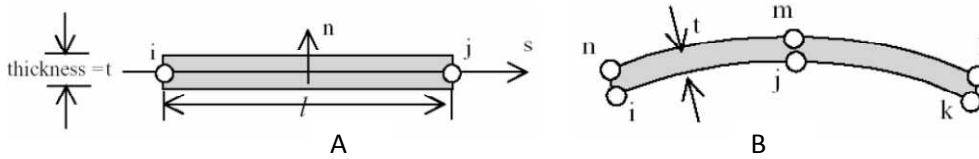


FIGURA 1.6: ELEMENT JOINT SECONDO GHABOUSSI (SINISTRA) E ZIENKIEWICZ (DESTRA) [97].

Nonostante questi miglioramenti, l'impossibilità di simulare accuratamente il fenomeno fessurativo e la sua propagazione, resta il limite più importante legato all'applicazione del metodo degli elementi finiti.

## **1.5 IL METODO DEGLI ELEMENTI AL CONTORNO (BEM)**

### **1.5.1 Principi fondamentali**

Al contrario del FEM e del FDM, il metodo degli elementi di contorno (*Boundary Element Method* – BEM) non adotta una discretizzazione sull'intero dominio, ma solo sul contorno e ne determina una soluzione attraverso un'equazione integrale basata sui teoremi di Betti e di Somigliana.

Per un dominio  $\Omega$  con confine  $\Gamma$  avente versore normale uscente  $n_i$  e con forza applicata costante  $f_i$  l'equazione diventa:

$$c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.11)$$

dove:

$u_j, t_j$  = vettori spostamento sul contorno  $\Gamma$  ;

$u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  = nuclei spostamento;

$c_{ij}$  = termine libero, determinato dalla geometria locale della superficie di confine

( $c_{ij} = 1$  quando il punto è interno al dominio).

La risoluzione dell'equazione sopra descritta richiede:

- la discretizzazione del confine  $\Gamma$  con un numero finito di elementi di contorno: nei problemi 2D gli elementi sono segmenti di linea, che possono avere un nodo al centro dell'elemento (elemento costante), due nodi ai due estremi (elemento lineare) o tre nodi di cui due di estremità ed uno centrale (elemento quadratico). Detto  $N$  il numero totale degli elementi di bordo si può scrivere:

$$c_{ij} \cdot u_j + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.12)$$

- approssimazione delle funzioni in prossimità degli elementi di bordo mediante funzioni di forma ( $N_k$ ), analogamente a ciò che accade nel FEM. Le funzioni spostamento per i vari elementi sono espresse come la somma dei valori nodali:

$$u_i = \sum_{k=1}^m N_k u_i^k \quad (1.13)$$

$$t_i = \sum_{k=1}^m N_k t_i^k \quad (1.14)$$

dove:

$m$  = ordine dell'elemento (1, 2 o 3 per i problemi 2D);

$u_i^k$  e  $t_i^k$  = valori degli spostamenti nodali nel nodo  $k$ .

Ponendo:

$$T_{ij} = \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.15)$$



$$U_{ij} = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.16)$$

$$B_i = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.17)$$

$$\text{L'equazione } c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot u_j \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \cdot t_j \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial n} \cdot f_j \cdot d\Gamma \quad (1.18)$$

può essere scritta in forma matriciale come:

$$[T_{ij}(l,k)]\{u_j(k)\} = [U_{ij}(l,k)]\{t_j(k)\} + \{B_i(k)\} \quad (1.19)$$

dove:

$i, j = 1, 2$  per i problemi 2D e  $1, 2, 3$  per i problemi 3D,  $l, k = 1, 2, \dots, N$ ;

$$T_{ij}(l,k) = c_{ij} \cdot \delta_{l,k} + \int_{\Gamma} t_{ij}^* \cdot N_j \cdot d\Gamma \quad (1.20)$$

- valutazione degli integrali  $T_{ij}$ ,  $U_{ij}$  e  $B_i$ ;
- imposizione delle condizioni al contorno ottenendo come forma finale della (1.19) l'equazione:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (1.21)$$

dove:

$[A]$  = matrice globale funzione di  $T_{ij}$  ed  $U_{ij}$ ;

$\{x\}$  = vettore incognito costituito dagli spostamenti incogniti;

$\{b\}$  = somma del vettore delle forze agenti sul corpo  $\{B_i\}$  e dei prodotti di  $T_{ij}$

con gli spostamenti noti.

L'equazione risultante, a differenza delle matrici sparse e simmetriche tipiche del FEM, è solitamente asimmetrica e fornisce i valori degli spostamenti incogniti nei nodi;

- valutazione degli spostamenti e delle tensioni all'interno del dominio in funzione di quelli nodali noti.

### **1.5.2 Vantaggi e limiti del BEM**

Il metodo degli elementi al contorno comporta generalmente una riduzione della dimensione del modello computazionale rispetto al FEM o al FDM, in quanto richiede una discretizzazione solo sul contorno del dominio invece che su tutta la sua estensione. Grazie alla sua formulazione integrale diretta, a parità di livello di discretizzazione, il BEM fornisce una precisione dei risultati maggiore rispetto a quella ottenuta con tecniche FEM o FDM.

In generale, però, il BEM non è efficiente come il FEM nel tener conto dell'eterogeneità dei materiali, poiché non prevede tanti sottodomini quanti sono gli elementi infinitesimi del FEM. Inoltre non è funzionale quanto quest'ultimo nel simulare il comportamento non lineare dei materiali, motivo per cui è più adatto ad analizzare corpi elastici, lineari ed omogenei.

Analogamente agli altri metodi precedentemente esaminati anche il BEM presenta difficoltà nel simulare il comportamento tenso-deformativo di un sistema discontinuo.

Per superare questa difficoltà, sono state proposte diverse tecniche:

- la prima, presentata da Blandford nel 1981, consiste nel dividere il dominio in sottodomini multipli con fratture lungo le interfacce ottenendo così diverse matrici di rigidezza nei vari sottodomini (figura 1.7 A) [17]. Tale tecnica richiede però la conoscenza del percorso compiuto dalla frattura e del suo gradiente di crescita e si applica con difficoltà a quei problemi che non presentano condizioni di simmetria geometrica.
- la seconda prevede l'applicazione del *Dual Boundary Element Method* (DBEM), proposto da Portela nel 1993, che consiste nell'applicare

separatamente l'equazione iniziale agli elementi che costituiscono le due facce opposte della frattura (figura 1.7 B) [137].

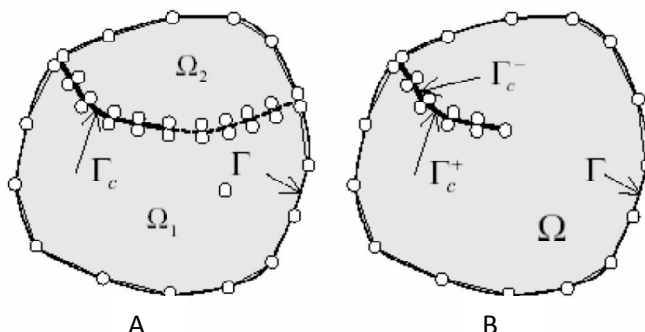


FIGURA 1.7: ANALISI DELLE DISCONTINUITÀ NEL BEM [97].

## **1.6 IL METODO DEGLI ELEMENTI DISCRETI (DEM)**

### **1.6.1 Principi fondamentali**

Negli ultimi anni i tradizionali metodi numerici al continuo sono stati progressivamente affiancati da metodi innovativi, basati sulla suddivisione del dominio del problema in elementi discreti. La differenza fondamentale tra i metodi al continuo e quelli discontinui risiede nel fatto che, mentre nei primi i contatti fra unità elementari rimangono invariati indipendentemente dalla risposta del modello, nei secondi vengono aggiornati ad ogni iterazione, in base alla posizione ed al movimento relativo dei singoli elementi.

Nel metodo degli elementi discreti la definizione della mesh e dei modelli costitutivi dei materiali è sostituita dalla determinazione della distribuzione e delle dimensioni degli elementi che compongono il sistema e dalla descrizione del comportamento dei contatti [26]. Inoltre, lo stato tensionale di partenza non può essere specificato in modo indipendente dalla distribuzione iniziale delle singole unità.

Utilizzando la modellazione DEM è possibile indagare l'evoluzione della risposta del sistema in condizioni di equilibrio stabile, limite ed a rottura, oltre la quale, come precedentemente accennato, si ammette la separazione del dominio in blocchi che continuano a risentire delle sollecitazioni agenti. Ciò permette di sfruttare la modellazione numerica per schematizzare fenomeni di interazione tra oggetti discreti e soggetti a grandi deformazioni o a processi di frattura.

Nei metodi discreti il sistema viene schematizzato come un insieme di corpi indipendenti che interagiscono tra loro attraverso i punti di reciproco contatto, in corrispondenza dei quali vengono trasmesse le forze all'interno del mezzo.

L'interazione tra gli elementi è considerata come un processo dinamico che raggiunge l'equilibrio quando le sollecitazioni interne al sistema sono bilanciate.

Le forze e gli spostamenti del mezzo si ricavano tracciando i movimenti dei singoli corpi che lo compongono. In particolare, si applica la seconda legge di Newton agli elementi e la legge forza-spostamento ai punti di contatto. La prima è utilizzata per determinare il moto delle singole unità causato dalle sollecitazioni agenti su esse; la seconda ne aggiornale forze di contatto conseguenti [97].

Per ottenere una soluzione del modello DEM conforme alla realtà da simulare, cinque sono i passi fondamentali da seguire:

1. suddivisione del dominio del problema ed identificazione della tipologia di elementi con cui suddividere il sistema;
2. rappresentazione della deformazione dei singoli blocchi (che possono essere rigidi o deformabili);
3. sviluppo di un algoritmo per l'identificazione dei contatti;
4. formulazione delle equazioni del moto del sistema;
5. integrazione delle equazioni del moto ed aggiornamento dei contatti tra i blocchi, che variano in conseguenza dei movimenti e delle deformazioni cui è soggetto il sistema.

### **1.6.2 Tipologie di DEM esistenti**

Esistono tre diverse tipologie del metodo degli elementi discreti [156]:

- il DEM esplicito, o tradizionale, basato su una discretizzazione del sistema secondo uno schema FVM;
- il DEM implicito, detto anche *Discontinuous Deformation Analysis Method* (DDA), basato su una discretizzazione del sistema secondo uno schema FEM;
- il DEM particellare, il quale schematizza gli elementi che compongono il sistema come particelle rigide circolari; caratteristica che lo rende

particolarmente indicato per la modellazione del comportamento dei materiali granulari.

### 1.6.2.1 Il DEM esplicito

Il DEM esplicito si basa su una discretizzazione del sistema secondo uno schema FVM (volume finito) che rappresenta i singoli blocchi costituenti il dominio come poligoni concavi o convessi suddivisi in un numero finito di triangoli in 2D e di tetraedri in 3D (figura 1.8).

Per la rappresentazione delle deformazioni si ricorre ad una formulazione Lagrangiana esplicita, mentre i contatti sono determinati cinematicamente sulla base della più piccola distanza tra due blocchi contigui.

Il comportamento dinamico del sistema è rappresentato numericamente attraverso un algoritmo che procede per passi successivi, durante i quali le velocità e le accelerazioni sono assunte costanti. Ogni time-step è considerato piccolo al punto che al suo interno le perturbazioni si propagano esclusivamente da una particella a quelle adiacenti.

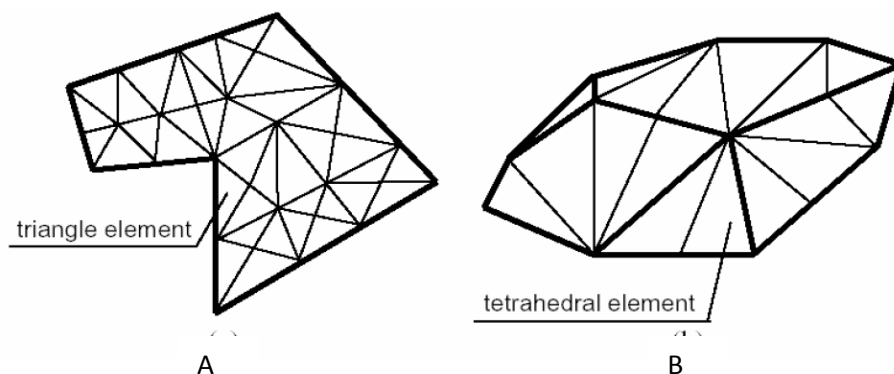


FIGURA 1.8: SCHEMATIZZAZIONE DELLA MESH PREVISTA DAL DEM IN 2D (A) E 3D (B) [97].

In ogni istante le forze risultanti su un qualsiasi elemento sono determinate esclusivamente dalla sua interazione con quelli con cui è a contatto. La velocità di propagazione dipende dalle proprietà fisiche del mezzo discreto considerato.

L'interazione tra due blocchi è schematizzata attraverso:

- *un modello di rigidità* che fornisce una relazione tra le forze di contatto normali e tangenziali ( $F_n$  ed  $F_s$ ) ed il relativo spostamento ( $U_n$  e  $U_s$ ) (figura 1.9);

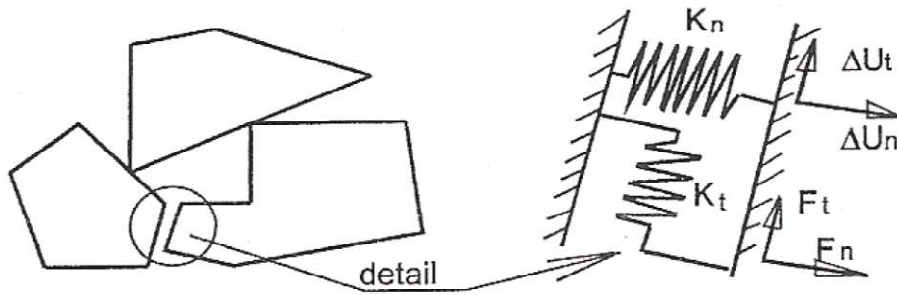


FIGURA 1.9: DEFINIZIONE DEI CONTATTI NEL DEM ESPPLICITO [97].

- *un modello di slittamento* che regola, in funzione del coefficiente di attrito, lo slittamento di due elementi a contatto;
- *un modello di contatto* che a seconda del comportamento lungo la direzione normale al moto può essere di tipo [54]:
  - *soft contact*, se caratterizzato da un valore finito della rigidità normale. Si assume che la forza di contatto sia nulla nel punto di intersezione iniziale dei due corpi e poi proporzionale agli spostamenti dei contatti stessi. Le forze di contatto quindi si generano in seguito alla compenetrazione dei due elementi adiacenti;
  - *hard contact*, se non ammette la compenetrazione tra particelle vicine.

La scelta del tipo di modello da adottare deve essere effettuata sulla base di considerazioni fisiche relative alla natura del sistema da modellare, piuttosto che numeriche. È possibile, infatti, che uno stesso sistema espliciti diversi comportamenti a seconda delle condizioni al contorno che lo caratterizzano: ad esempio, se si è in presenza di un livello tensionale molto basso, è preferibile una schematizzazione di tipo *soft contact*; se, invece, il sistema oggetto di studio è interessato da livelli tensionali notevoli è più appropriata la scelta di uno schema *hard contact*.

Per descrivere lo stato del sistema le equazioni del moto vengono integrate ricorrendo ad uno schema esplicito alle differenze centrali, in opposizione all'approccio implicito usato negli altri metodi numerici al continuo. Le variabili incognite (forze di

contatto) di ciascun blocco sono determinate localmente ad ogni time-step a partire da quelle note degli elementi immediatamente vicini [85].

Considerando il blocco  $i$ -esimo del sistema, la seconda legge di Newton può essere scritta nella forma:

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{F}{m} \quad (1.22)$$

dove:

$\dot{u}$  = velocità;

$t$  = tempo;

$m$  = massa del blocco;

$F$  = forze applicate all'elemento.

Applicando uno schema esplicito alle differenze centrali, il primo termine dell'equazione precedente diventa:

$$\frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{\dot{u}^{(t+\Delta t/2)} - \dot{u}^{(t-\Delta t/2)}}{\Delta t} \quad (1.23)$$

Sostituendo tale equazione nella (1.22) si ottiene:

$$\dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{u}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left[ g_i + \frac{\sum F_i^{(t)}}{m} \right] \Delta t \quad (1.24)$$

dove:

$\dot{u}_i$  = velocità del blocco  $i$ -esimo;

$g_i$  = accelerazione di gravità;

$m$  = massa del blocco;

$F_i$  = forza risultante applicata all'elemento.

Analogamente in termini di velocità angolari si ottiene:

$$\dot{\theta}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{\theta}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left[ g_i + \frac{\sum M_i^{(t)}}{I} \right] \Delta t \quad (1.25)$$

dove:

$\dot{\theta}_i$  = velocità angolare del blocco i-esimo;

$I$  = momento d'inerzia dell'elemento;

$M_i$  = momento risultante applicato all'elemento.

Le velocità così calcolate permettono di aggiornare gli spostamenti ( $u_i$ ) e la rotazione ( $\theta_i$ ) del blocco:

$$u_i^{(t+\Delta t)} = u_i^{(t)} + \dot{u}_i^{(t+\Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad (1.26)$$

$$\theta_i^{(t+\Delta t)} = \theta_i^{(t)} + \dot{\theta}_i^{(t+\Delta t/2)} \cdot \Delta t \quad (1.27)$$

### 1.6.2.2 Il DEM implicito (DDA)

Il *Discontinuous Deformation Analysis Method* (DDA), proposto nel 1985 da Shi e Goodman, ha origine da un algoritmo di *back analysis* finalizzato alla determinazione della migliore approssimazione della configurazione deformata di un sistema di blocchi a partire da spostamenti e deformazioni note; esso si fonda sulla minimizzazione dell'energia totale dell'insieme di elementi in reciproca interazione [147].

La prima formulazione proposta faceva ricorso ad una semplice rappresentazione del moto e delle deformazioni dei blocchi con sei variabili base (tre relative al moto del corpo rigido e tre di deformazione costante) poco adatta per blocchi di forma irregolare. Lo sviluppo fondamentale si è avuto con l'associazione del DDA al metodo degli elementi finiti, in particolare con la discretizzazione FEM di ogni singolo elemento discreto [34].

Per ottenere l'equazione del moto di un blocco discreto si utilizza la seconda legge della termodinamica secondo cui un sistema soggetto a carichi esterni e/o interni si muove o si deforma nella direzione che produce il minimo dell'energia totale (E).



Essa risulta essere pari alla somma dell'energia potenziale (U), di quella cinetica (K) e di quella dissipata (W) secondo la formula:

$$E = U + K - W \quad (1.28)$$

Minimizzando la formula rispetto allo spostamento (d) si ricava l'equazione del moto del blocco corrispondente:

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \frac{\partial U + \partial K - \partial W}{\partial d} = 0 \quad (1.29)$$

Svolgendo lo stesso procedimento per tutti gli elementi del dominio, si ottiene un sistema di equazioni algebriche da risolvere secondo la tecnica FEM. Considerando un dominio costituito da N blocchi, aventi ognuno  $m_i$  nodi ( $i=1,2,\dots,N$ ) dotati di una componente di spostamento normale (u) e tangenziale (v), ad esempio, indicando con  $m_1 + m_2 + \dots + m_N = M$  il numero totale di nodi, la minimizzazione dell'energia totale produce un sistema di  $2M \times 2M$  equazioni schematizzabili in forma matriciale come di seguito indicato:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad \text{oppure} \quad [K] \cdot \{D\} = \{F\} \quad (1.30)$$

dove:

$[K]$  = matrice di rigidità del sistema;

$\{D\}$  = matrice dei vettori spostamento degli  $N$  blocchi;

$\{F\}$  = matrice delle forze risultanti agenti sul sistema.

Per rappresentare ed aggiornare i contatti si utilizzano dei modelli di slittamento e rigidità analogamente a quanto previsto dal DEM esplicito [99].

### 1.6.2.3 Il DEM particellare

#### Il ciclo di calcolo

Il metodo degli elementi distinti particellari, proposto da Cundall e Strack nel 1979, si basa su principi analoghi a quelli del DEM tradizionale, a differenza del quale schematizza i blocchi costituenti il sistema come particelle rigide di forma circolare o sferica [50].

L'algoritmo di calcolo richiede ad ogni ciclo l'aggiornamento dei contatti in base alla posizione ed al movimento relativo delle particelle. Ad ogni contatto è applicata la legge forza-spostamento al fine di valutarne l'entità delle forze, mentre a ciascun elemento è applicata la seconda legge di Newton per determinarne la velocità e la posizione sulla base delle forze e dei momenti applicati.

Per illustrare come sono determinate forze e spostamenti durante un ciclo di calcolo, si esamini il caso riportato in figura 1.10, utilizzato da Cundall e Strack per spiegare i principi basilari del metodo.

Si considerino due dischi, privi di peso, indicati con x e y, schiacciati tra due pareti rigide in movimento l'una verso l'altra con velocità costante  $v$ .

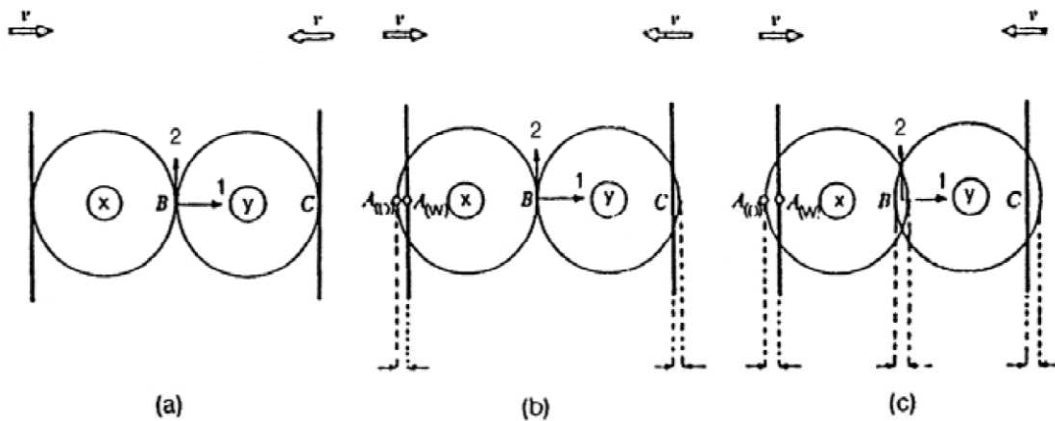


FIGURA 1.10: DISCHI COMPRESI TRA LE PARETI RIGIDE [50].

Inizialmente, al tempo  $t = t_0$ , le pareti ed i dischi entrano in contatto, ma non nasce alcuna forza. Dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , le pareti si sono spostate verso l'interno di una quantità pari a  $v\Delta t$ . Ipotizzando che le perturbazioni non possano propagarsi oltre un singolo disco durante ciascun intervallo di tempo, si assume che entrambi i dischi mantengano la loro posizione iniziale durante l'intervallo di tempo tra

$t = t_0$  e  $t = t_0 + \Delta t$ . La sovrapposizione si verificherà quindi all'istante  $t_1 = t_0 + \Delta t$  nei punti di contatto A e C e la sua entità sarà pari a  $\Delta n = v \cdot \Delta t$  (figura 1.10 b).

I punti  $A_{(D)}$  e  $A_{(W)}$  sono rispettivamente i punti del disco e della parete che giacciono sulla linea perpendicolare alla stessa e passante per il centro del muro; il contatto A è definito come il punto mediano tra  $A_{(D)}$  e  $A_{(W)}$ . Con  $(\Delta n_{(A)})_{t_1}$  si indica lo spostamento relativo di  $A_{(D)}$  rispetto al punto  $A_{(W)}$  che si verifica in un singolo incremento di tempo.

Gli spostamenti relativi che si hanno nei punti di contatto A e C al tempo  $t_1 = t_0 + \Delta t$  sono inseriti nella legge forza-spostamento per il calcolo delle forze di contatto:

$$\Delta F_n = k_n \cdot (\Delta n)_{t_1} = k_n \cdot v \cdot \Delta t \quad (1.31)$$

dove:

$k_n$  = rigidezza normale;

$\Delta F_n$  = incremento della forza normale.

Definendo positiva la direzione 1 che va dal disco x al disco y (figura 1.10 b), le risultanti delle forze  $F_{(x)1}$  e  $F_{(y)1}$  per i dischi x ed y al tempo  $t_1 = t_0 + \Delta t$  saranno:

$$F_{(x)1} = k_n \cdot (\Delta n)_{t_1} \quad (1.32)$$

$$F_{(y)1} = -k_n \cdot (\Delta n)_{t_1} \quad (1.33)$$

Queste forze sono utilizzate per determinare le nuove accelerazioni facendo ricorso alla seconda legge di Newton:

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_{(x)1}}{m_{(x)}} \quad (1.34)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_{(y)l}}{m_{(y)}} \quad (1.35)$$

dove:

$\ddot{x}_1$  = accelerazione del disco x in direzione 1;

$\ddot{y}_1$  = accelerazione del disco y in direzione 1;

$m_{(x)}$  = massa disco x;

$m_{(y)}$  = massa disco y.

Le accelerazioni così trovate sono assunte costanti nell'intervallo di tempo da  $t_1 = t_0 + \Delta t$  a  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$  e possono essere integrate in modo tale da ricavare le velocità:

$$[\dot{x}_1] = \left[ \frac{F_{(x)l}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.36)$$

$$[\dot{y}_1] = \left[ \frac{F_{(y)l}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.37)$$

Gli incrementi di spostamento relativo nei contatti A, B e C all'istante  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$  si determinano attraverso le seguenti relazioni:

$$(\Delta n_{(A)})_{t_2} = \left\{ v - \left[ \frac{F_{(x)l}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \right\} \cdot \Delta t \quad (1.38)$$

$$(\Delta n_{(B)})_{t_2} = \left\{ \left[ \frac{F_{(x)l}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t - \left[ \frac{F_{(y)l}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t \right\} \cdot \Delta t \quad (1.39)$$

$$(\Delta n_{(c)})_{t_2} = \left\{ \left[ \frac{F_{(y)l}}{m_{(y)}} \right] \cdot \Delta t - [-v] \right\} \cdot \Delta t \quad (1.40)$$

dove  $\Delta n_{(A)}$ ,  $\Delta n_{(B)}$  e  $\Delta n_{(C)}$  sono considerati positivi se di compressione.

Il ciclo di calcolo prevede dapprima l'applicazione della legge forza-spostamento a tutti i contatti di ogni elemento, al fine di determinarne la forza risultante. In questo modo attraverso la seconda legge di Newton si calcolano prima le nuove accelerazioni, poi di nuovo gli spostamenti dei singoli dischi.

#### La legge forza-spostamento

La legge forza-spostamento è applicata ai punti di contatto allo scopo di determinare le forze di contatto derivanti dai rispettivi spostamenti.

Si considerino i due dischi x ed y di figura 1.11 in contatto reciproco. Le coordinate dei centri si indicano con  $x_i = (x_1, x_2)$  ed  $y_i = (y_1, y_2)$ , dove gli indici 1 e 2 si riferiscono agli assi del sistema di riferimento cartesiano rappresentato in figura. Le componenti dei vettori velocità dei due dischi sono rispettivamente  $\dot{x}_i = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$  ed  $\dot{y}_i = (\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ , mentre le velocità angolari sono  $\dot{\theta}_{(x)}$  e  $\dot{\theta}_{(y)}$ , considerate positive se antiorarie. I punti  $P_{(x)}$  e  $P_{(y)}$  sono definiti come i punti per intersezione della linea che collega i centri dei dischi x ed y i quali hanno raggio pari a  $R_{(x)}$  e  $R_{(y)}$  e masse pari ad  $m_{(x)}$  ed  $m_{(y)}$ .

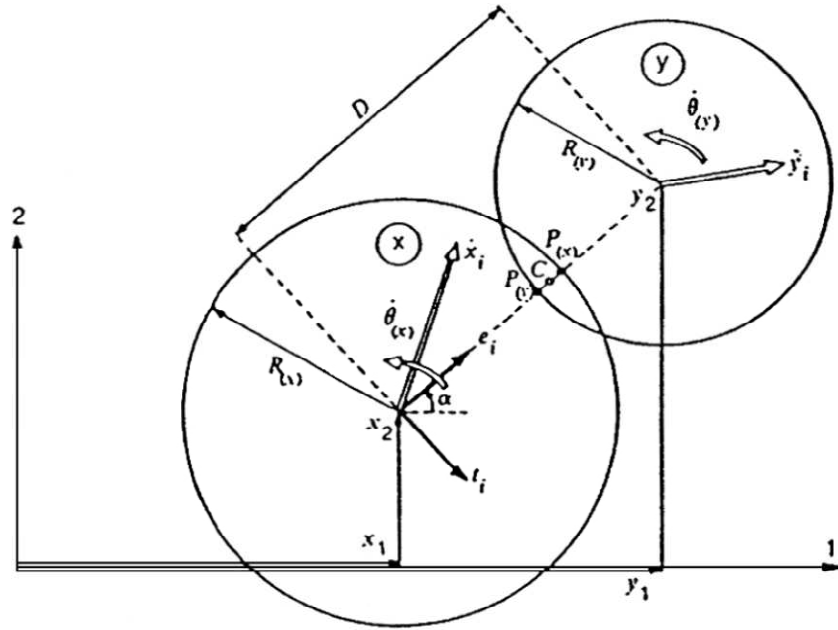


FIGURA 1.11: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO [50].

Due dischi si considerano in contatto solo se la distanza  $D$  tra i loro centri risulta essere minore della somma dei loro raggi:

$$D < R_{(x)} + R_{(y)} \quad (1.41)$$

Se si verifica questa condizione, lo spostamento relativo del punto di contatto  $C$  si determina integrando la velocità relativa, definita come la velocità del punto  $P_{(x)}$  rispetto al punto  $P_{(y)}$ .

Si introducono il versore normale  $e_i = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  con direzione che va dal centro del disco  $x$  al centro del disco  $y$ , tale che:

$$e_i = \frac{y_i - x_i}{D} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (1.42)$$

ed il versore tangenziale  $t_i$  ottenuto attraverso una rotazione di  $90^\circ$  di  $e_i$ :

$$t_i = (e_2 - e_1) \quad (1.43)$$

La velocità relativa  $\dot{X}_i$  del punto  $P_{(x)}$  rispetto al punto  $P_{(y)}$  può essere espressa come:

$$\dot{X}_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) - (\dot{\theta}_{(x)} R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} R_{(y)}) \cdot t_i \quad (1.44)$$

Le componenti normali ( $\dot{n}$ ) e tangenziali ( $\dot{s}$ ) delle velocità relative si calcolano come le proiezioni di  $\dot{X}_i$  rispettivamente lungo  $e_i$  e  $t_i$ :

$$\dot{n} = \dot{X}_i \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot t_i \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i \quad (1.45)$$

$$\dot{s} = \dot{X}_i \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot t_i \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \quad (1.46)$$

L'integrazione rispetto al tempo della componente della velocità relativa fornisce le componenti  $\Delta n$  e  $\Delta s$  dell'incremento dello spostamento relativo:

$$\Delta n = (\dot{n}) \cdot \Delta t = \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i\} \cdot \Delta t \quad (1.47)$$

$$\Delta s = (\dot{s}) \cdot \Delta t = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)}) \cdot \Delta t \quad (1.48)$$

Questi incrementi di spostamento relativo sono utilizzati nella legge forza-spostamento con lo scopo di calcolare gli incrementi delle forze normali e tangenziali  $\Delta F_n$  e  $\Delta F_s$ :

$$\Delta F_n = k_n \cdot (\Delta n) = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot e_i \cdot k_n \cdot \Delta t \quad (1.49)$$

$$\Delta F_s = k_s \cdot \Delta s = k_s \cdot \{(\dot{x}_i - \dot{y}_i) \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})\} \cdot \Delta t \quad (1.50)$$

dove  $k_n$  e  $k_s$  rappresentano rispettivamente le rigidità normale e tangenziale.

$\Delta F_n$  e  $\Delta F_s$  sono aggiunti ad ogni intervallo di tempo alla somma di tutti gli incrementi delle forze determinati nei precedenti intervalli:

$$(F_n)_N = (F_n)_{N-1} + \Delta F_n \quad (1.51)$$

$$(F_s)_N = (F_s)_{N-1} + \Delta F_s \quad (1.52)$$

dove gli indici N e N-1 si riferiscono ai tempi  $t_N$  e  $t_{N-1}$ , di modo che  $t_N - t_{N-1} = \Delta t$ .  $F_n$  ed  $F_s$  sono considerate positive se dirette in verso opposto ai vettori  $e_i$  e  $t_i$  (figura 1.12).

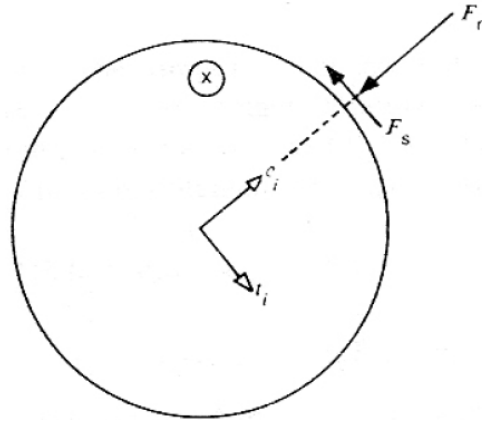


FIGURA 1.12: CONVENZIONI SUI SEGNI DI  $F_N$  E  $F_S$  [50].

Per quanto riguarda lo scorrimento tra i due dischi, l'entità della forza tangenziale  $F_s$  sopra calcolata è confrontata con il valore massimo ammissibile  $(F_s)_{\max}$  definito come:

$$(F_s)_{\max} = F_n \cdot \tan \phi_\mu + c \quad (1.53)$$

dove  $\phi_\mu$  è il più piccolo angolo di attrito dei due dischi a contatto e  $c$  la coesione.

Una volta determinate le forze normali e tangenziali per ciascun contatto di un disco, per esempio quello  $x$ , esse vengono scomposte nelle due componenti lungo le



direzioni 1 e 2. La somma di tali componenti fornisce le forze risultanti  $\sum F_{(x)1}$  e  $\sum F_{(x)2}$ .

Il momento risultante agente sul disco  $x$ ,  $\sum M_{(x)}$ , è considerato positivo se agisce in senso antiorario ed è dato da:

$$\sum M_{(x)} = \sum F_s \cdot R_{(x)} \quad (1.54)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i contatti del disco.

Le forze ed i momenti risultanti agenti sul disco  $x$  sono successivamente inseriti nella seconda legge di Newton allo scopo di determinare le nuove accelerazioni  $\ddot{x}_i$  e  $\ddot{\theta}_{(x)}$ .

#### Le equazioni del moto

Le velocità  $\dot{x}_i$  e  $\dot{\theta}_{(x)}$  si valutano, come indicato da Cundall e Strack, assumendo che la risultante della forza e del momento al tempo  $t_N$  agisca sul disco  $x$  nell'intervallo  $\Delta t$  da  $t_{N-1/2}$  a  $t_{N+1/2}$ . La seconda legge di Newton applicata al disco  $x$  diventa:

$$m_{(x)} \cdot \ddot{x}_i = \sum F_{(x)i} \quad (1.55)$$

$$I_{(x)} \cdot \ddot{\theta}_{(x)} = \sum M_{(x)} \quad (1.56)$$

dove  $I_{(x)}$  rappresenta il momento di inerzia del disco  $x$ .

Considerando  $\ddot{x}_i$  e  $\ddot{\theta}_{(x)}$  costanti nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , dalle equazioni precedenti si ricavano le seguenti espressioni delle velocità:

$$(\dot{x}_i)_{N+1/2} = (\dot{x}_i)_{N-1/2} + \left[ \sum \frac{F_{(x)i}}{m_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.57)$$

$$\left(\dot{\theta}_{(x)}\right)_{N+1/2} = \left(\dot{\theta}_{(x)}\right)_{N-1/2} + \left[ \sum \frac{M_{(x)i}}{I_{(x)}} \right] \cdot \Delta t \quad (1.58)$$

Queste equazioni sono applicate alla rotazione ad ogni disco; i valori delle velocità così ottenuti possono essere inseriti nella legge forza-spostamento ed il ciclo può essere ripetuto per un nuovo incremento di tempo.

I nuovi valori delle velocità sono utilizzati anche per aggiornare le posizioni e le rotazioni dei dischi per mezzo di un'ulteriore integrazione numerica:

$$\left(x_i\right)_{N+1} = \left(x_i\right)_N + \left(\dot{x}_i\right)_{N+1/2} \cdot \Delta t \quad (1.59)$$

$$\left(\theta_{(x)}\right)_{N+1} = \left(\theta_{(x)}\right)_N + \left(\dot{\theta}_{(x)}\right)_{N+1/2} \cdot \Delta t \quad (1.60)$$

Nel modello possono essere incorporate anche forze di massa, come ad esempio quelle gravitazionali. In tal caso si aggiunge il termine  $m_{(x)} \cdot g_i$  alla sommatoria delle forze  $\sum F_{(x)i}$  che compare nell'equazione della velocità, dove  $g_i = (g_1, g_2)$  rappresenta le due componenti del vettore accelerazione dovute alla forza di massa.

#### La legge dello smorzamento

Lo smorzamento entra in gioco durante lo slittamento tra due dischi quando il valore della forza tangenziale in corrispondenza di ogni contatto risulta pari ad  $(F_s)_{\max}$ .

Tenendo conto dell'effetto dello smorzamento le equazioni della velocità diventano:

$$\left(\dot{x}_i\right)_{N+1/2} = \left(\dot{x}_i\right)_{N-1/2} + \left\{ \sum \frac{[F_{(x)i} + D_{(x)i}]}{m_{(x)}} \right\}_N \cdot \Delta t \quad (1.61)$$

$$\left(\dot{\theta}_{(x)}\right)_{N+1/2} = \left(\dot{\theta}_{(x)}\right)_{N-1/2} + \left\{ \sum \frac{M_{(x)}}{I_{(x)}} \right\}_N \cdot \Delta t \quad (1.62)$$

dove  $\sum D_{(x)i}$  rappresenta la somma delle componenti delle forze di smorzamento.

Per valutarla si considerano le componenti normale ( $D_n$ ) e tangenziale ( $D_s$ ) come segue:

$$(D_n)_N = c_n \cdot \dot{n} = c_n \cdot [\dot{x}_i - \dot{y}_i]_{N-1/2} \cdot e_i \quad (1.63)$$

$$(D_s)_N = c_s \cdot \dot{s} = c_s \cdot \left[ (\dot{x}_i - \dot{y}_i)_{N-1/2} \cdot t_i - (\dot{\theta}_{(x)} \cdot R_{(x)} + \dot{\theta}_{(y)} \cdot R_{(y)})_{N-1/2} \right] \quad (1.64)$$

dove i coefficienti di smorzamento in direzione normale ( $c_n$ ) e tangenziale ( $c_s$ ) si assumono proporzionali alle rigidezze  $k_n$  e  $k_s$  con  $\beta$  costante:

$$c_n = \beta \cdot k_n \quad (1.65)$$

$$c_s = \beta \cdot k_s \quad (1.66)$$

La valutazione dei coefficienti di smorzamento rappresenta una delle maggiori difficoltà del metodo.

#### L'intervallo di tempo critico

Il Metodo degli Elementi Distinti Particellari integra le equazioni del moto utilizzando uno schema alle differenze finite; la soluzione così calcolata risulta stabile solo se l'intervallo di tempo  $\Delta t$  non supera il valore critico. Per la sua determinazione si considera un sistema ad una dimensione composto da una massa ( $m$ ) e da una molla di rigidezza  $k$  (figura 1.13).

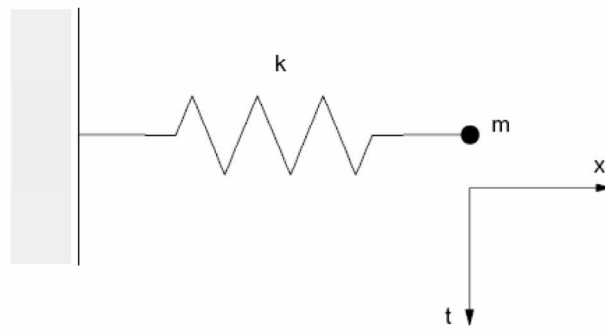


FIGURA 1.13: SISTEMA COMPOSTO DA MASSA E MOLLA [50].

Il moto del punto in cui si concentra la massa è governato dalla seguente equazione differenziale:

$$-kx = m\ddot{x} \tag{1.67}$$

Indicando con  $T$  il periodo del sistema, l'intervallo di tempo critico ( $t_{crit}$ ) diventa:

$$t_{crit} = \frac{T}{\pi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}}{\pi} \tag{1.68}$$

Si consideri ora una serie infinita di masse e di molle (figura 1.14 a). Il più piccolo periodo di questo sistema si avrà quando le masse si muovono in sincronia opponendosi al moto, in modo da evitare il movimento nel centro di ogni molla.

Il moto di ogni singolo punto in cui si suppongono concentrate le masse può essere descritto attraverso i due sistemi equivalenti di figura 1.14 b che caratterizzano il moto di traslazione. L'intervallo di tempo critico per questo sistema sarà:

$$t_{crit} = 2\sqrt{\frac{m}{4k}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.69}$$

Il moto di rotazione è caratterizzato dagli stessi due sistemi di figura 1.14 b nei quali si inserisce al posto di  $m$  e di  $k$  rispettivamente il momento d'inerzia  $I$  di una

particella di dimensioni finite e la sua rigidezza alla rotazione ( $k_{rotaz}$ ). Le equazioni generali dell'intervallo di tempo critico diventano:

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{m}{k^{trasl}}} \quad (\text{moto di traslazione}) \quad (1.70)$$

$$t_{crit} = \sqrt{\frac{I}{k_{rotaz}}} \quad (\text{moto di rotazione}) \quad (1.71)$$

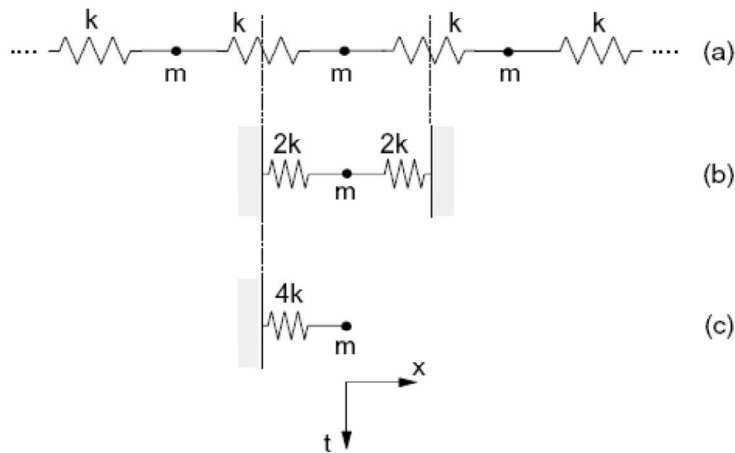


FIGURA 1.14: SISTEMA MULTIPIO DI MASSE E MOLLE [48].

La discretizzazione di un sistema in particelle circolari adottata nel Metodo degli Elementi Distinti Particellari può apparire una schematizzazione semplicistica rispetto a quella a blocchi di forma irregolare prevista dal DEM tradizionale. In realtà questa caratteristica rappresenta la maggiore potenzialità di questa tecnica rispetto agli altri procedimenti DEM, in quanto la rende particolarmente indicata per la modellazione dei materiali granulari, il cui comportamento è fortemente condizionato dalla natura delle singole particelle che lo compongono [12].

Risulta quindi possibile considerare il suo carattere discreto attraverso un approccio di tipo microscopico, così da comprendere i processi fisici di base che ne determinano la risposta tenso-deformativa macroscopica.

## **IL SOFTWARE DI CALCOLO: PFC<sup>3D</sup> (PARTICLE FLOW CODE)**

### **2.1 INTRODUZIONE**

Il software PFC (Particle Flow Code), prodotto da *Itasca Consulting Group*, utilizza il Metodo degli Elementi Discreti Particellari secondo la formulazione proposta da Cundall e Strack (1979), rappresentando il sistema come un insieme di particelle circolari (in PFC<sup>2D</sup>) o sferiche (PFC<sup>3D</sup>) che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto.

Il comportamento meccanico del mezzo viene descritto tracciando i movimenti dei singoli elementi che lo compongono e l'andamento delle forze che si sviluppano nei punti di contatto, applicando la seconda legge di Newton alle particelle e la legge forza-spostamento ai punti di contatto (figura 2.1).

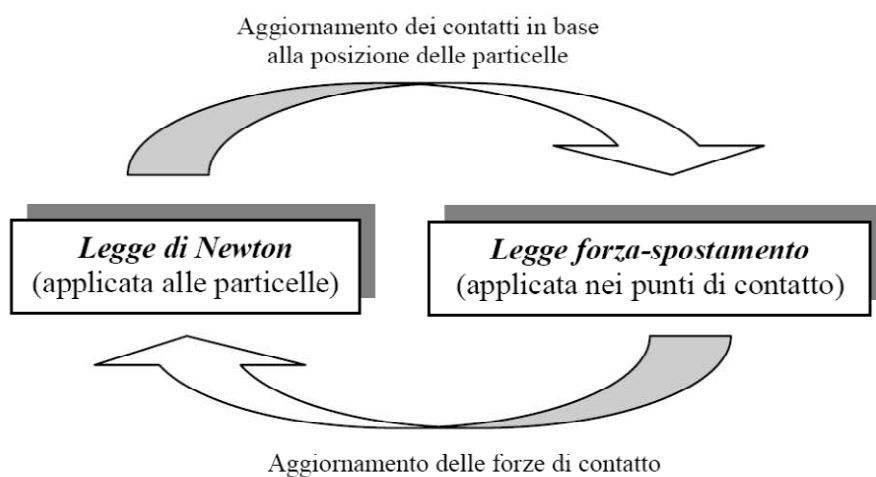


FIGURA 2.1: CICLO DI CALCOLO DEL DEM PARTICELLARE [90].

La seconda legge di Newton viene utilizzata per determinare il moto delle singole unità causato dalle sollecitazioni agenti su esse e la legge forza-spostamento aggiorna le forze di contatto conseguenti.

Ciò comporta che, a differenza di quanto avviene per i software al continuo, in cui i contatti fra unità elementari rimangono invariati indipendentemente dalla

risposta del modello, in PFC essi vengono aggiornati ad ogni iterazione in base alla posizione ed al movimento relativo delle singole particelle.

La definizione della mesh e del modello costitutivo del materiale, caratteristica dei metodi al continuo, è sostituita dalla determinazione della distribuzione e delle dimensioni delle particelle che compongono il sistema e dalla descrizione del modello di contatto.

In PFC lo stato tensionale di partenza non può prescindere dalla distribuzione iniziale dei singoli elementi, poiché dalla loro posizione relativa dipendono la distribuzione e l'entità delle forze di contatto.

Le ipotesi su cui il software di calcolo si basa sono le seguenti:

- le particelle elementari hanno forma circolare e sono considerate corpi rigidi;
- i contatti si esplicano su un'area infinitesima;
- le particelle possono sovrapporsi l'una all'altra solo nei punti di contatto (in caso di *soft contact*);
- l'entità della sovrapposizione è correlata alla forza di contatto ed è comunque piccola in rapporto alle dimensioni dell'elemento;
- possono esistere vincoli di resistenza al contatto tra le particelle.

Oltre alle particelle, PFC permette la creazione di elementi detti walls, che possono essere utilizzati per definire compiutamente i confini del sistema o per agevolarne la generazione e la compattazione (figura 2.2). A differenza di quanto avviene per le particelle gli elementi walls non possono essere soggetti a forze, ma solo a velocità. Inoltre, non è ammesso il contatto muro-muro, ma soltanto quello particella-muro.

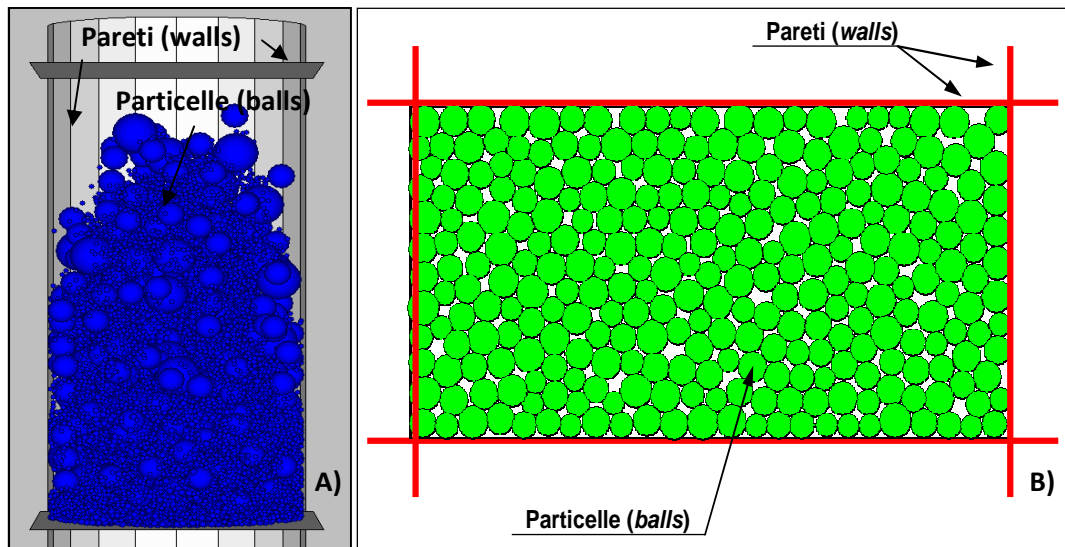


FIGURA 2.2: ELEMENTI FONDAMENTALI DI PFC<sup>2D</sup> (A) E PFC<sup>3D</sup> (B).

## **2.2 LEGGI FONDAMENTALI E CONDIZIONI INIZIALI [90], [91], [92]**

All'interno del primo capitolo (paragrafo 1.6.2.3) sono stati analizzati i concetti di base relativi al DEM particellare e sono state trattate le leggi fondamentali del metodo secondo quanto proposto da Cundall e Strack nel 1979. Nei paragrafi seguenti si considerano nuovamente tali leggi descrivendo, in particolare, come vengono applicate dal software di calcolo Particle Flow Code.

### **2.2.1 La legge del moto**

Come anticipato nel paragrafo 2.1, e coerentemente con quanto teorizzato da Cundall e Strack, PFC utilizza la seconda legge di Newton per determinare il moto dei singoli elementi causato dalle sollecitazioni agenti su di essi.

In particolare, il movimento di una particella rigida è determinato dalla risultante delle forze e dei momenti che agiscono su di essa e può essere descritto in termini di moto di traslazione e di rotazione. Il primo è definito in termini di posizione ( $x_i$ ), velocità ( $\dot{x}_i$ ) ed accelerazione ( $\ddot{x}_i$ ) del centro della particella, il secondo in termini di velocità angolare ( $\omega_i$ ) ed accelerazione angolare ( $\dot{\omega}_i$ ).

Indicando con  $F_i$  la risultante delle forze applicate all'elemento il moto di traslazione dello stesso può essere espresso mediante la seguente equazione:



$$F_i = m \cdot (\ddot{x}_i - g_i) \quad (2.1)$$

dove:

$m$  = massa della particella;

$\ddot{x}_i$  = accelerazione del centro della particella;

$g_i$  = accelerazione di gravità.

La risultante  $M_i$  dei momenti agenti sulla particella descrive il moto di rotazione attraverso la seguente espressione:

$$M_i = I\dot{\omega}_i = \left( \frac{2}{3} mR^2 \right) \dot{\omega}_i \quad (2.2)$$

dove:

$m$  = massa della particella;

$I$  = momento d'inerzia;

$\dot{\omega}_i$  = accelerazione angolare;

$R$  = raggio della particella.

Le equazioni del moto, date dalla (2.1) e dalla (2.2) vengono integrate mediante una procedura alle differenze finite in un intervallo  $\Delta t$ .

Le grandezze  $(x_i)$  e  $(\omega_i)$  sono calcolate in corrispondenza degli istanti intermedi dei diversi intervalli  $(\Delta t \pm n\Delta t/2)$ , mentre le grandezze  $(\dot{x}_i)$ ,  $(\ddot{x}_i)$ ,  $(\dot{\omega}_i)$ ,  $F_i$  ed  $M_i$  vengono valutate in corrispondenza degli intervalli principali  $(\Delta t \pm n\Delta t)$ .

Le seguenti espressioni descrivono le accelerazioni di traslazione e rotazione al tempo  $t$  in funzione dei valori di velocità calcolati a metà intervallo:

$$\ddot{x}_i^{(t)} = \frac{1}{\Delta t} (\dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)} - \dot{x}_i^{(t-\Delta t/2)})$$

(2.3)

$$\dot{\omega}_i^{(t)} = \frac{1}{\Delta t} (\omega_i^{(t+\Delta t/2)} - \omega_i^{(t-\Delta t/2)}) \quad (2.4)$$

Sostituendo queste espressioni nelle (2.1) e nella (2.2) e risolvendo per la velocità al tempo  $\Delta t \pm \Delta t/2$  si ottiene:

$$\dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)} = \dot{x}_i^{(t-\Delta t/2)} + \left( \frac{F_i^{(t)}}{m} + g_i \right) \Delta t \quad (2.5)$$

$$\omega_i^{(t+\Delta t/2)} = \omega_i^{(t-\Delta t/2)} + \left( \frac{M_i^{(t)}}{I} \right) \Delta t \quad (2.6)$$

Infine, le velocità appena calcolate vengono utilizzate per aggiornare la posizione del centroide della particella:

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^{(t)} + \dot{x}_i^{(t+\Delta t/2)} \Delta t \quad (2.7)$$

Il ciclo di calcolo relativo alla legge del moto può essere riassunto come segue:

- dati i valori di  $\dot{x}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})}$ ,  $\omega_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})}$ ,  $x_i^{(t)}$ ,  $\omega_i^{(t)}$ ,  $F_i^{(t)}$  e  $M_i^{(t)}$  mediante le equazioni (2.5) e (2.6) si ottengono  $\dot{x}_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})}$ ,  $\omega_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})}$ ;
- l'equazione (2.7) viene utilizzata per calcolare il valore di  $x_i^{(t+\Delta t)}$ ;
- i valori di  $F_i^{(t+\Delta t)}$  e  $M_i^{(t+\Delta t)}$  da usare nel ciclo successivo si ottengono applicando la legge forza spostamento.

### **2.2.2 La legge forza-spostamento**

La legge forza-spostamento mette in relazione lo spostamento relativo tra due particelle adiacenti e la forza che si genera nel punto di contatto tra le stesse.

Si consideri il sistema rappresentato in figura 2.2 che rappresenta due particelle (A e B) a contatto nel punto  $x_i^{[c]}$ , che giace sul piano individuato dal versore normale  $n_i$  (figura 2.3).

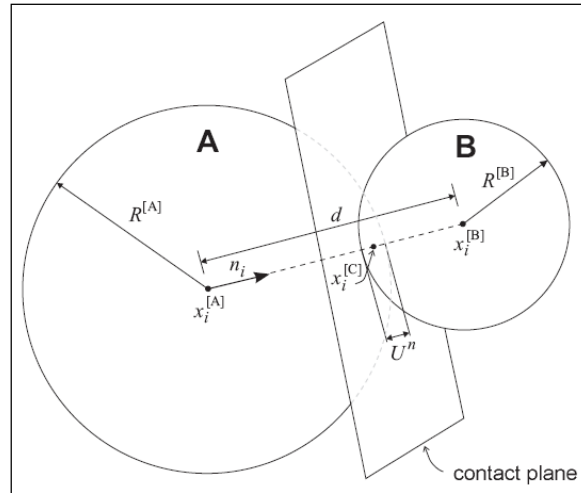


FIGURA 2.3: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO PER UN CONTATTO PARTICELLA-PARTICELLA [92].

Per le due sfere A e B di figura 2.3, indicando con  $U_n$  la loro sovrapposizione, il versore  $n_i$  diventa:

$$n_i = \frac{x_i^{[B]} - x_i^{[A]}}{d} \quad (2.8)$$

dove:

$x_i^{[A]}$  = vettore posizione dell'elemento A;

$x_i^{[B]}$  = vettore posizione dell'elemento B;

$d$  = distanza tra gli elementi definita come segue:

$$d = |x_i^{[B]} - x_i^{[A]}| = \sqrt{(x_i^{[B]} - x_i^{[A]}) \cdot (x_i^{[B]} - x_i^{[A]})} \quad (2.9)$$

Nel caso in cui il contatto avvenga tra particella e parete,  $d$  è pari alla minor distanza tra la ball b ed il muro w ed  $n_i$  è diretto lungo la stessa (figura 2.4).

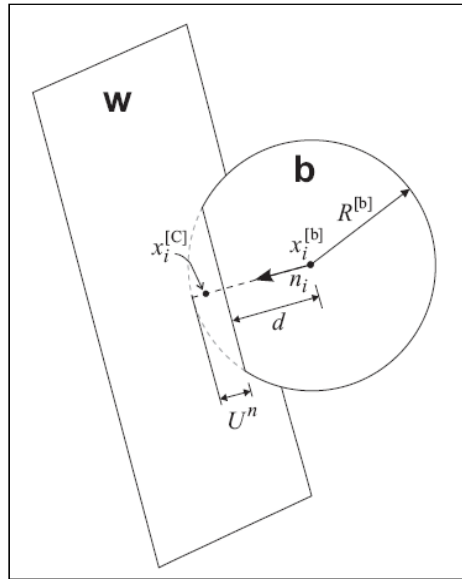


FIGURA 2.4: LEGGE FORZA-SPOSTAMENTO PER UN CONTATTO PARTICELLA-PARETE [92].

L'individuazione del versore  $n_i$  dipende strettamente dalle posizioni relative del muro e della particella. In particolare, osservando la figura 2.5, nel lato attivo di un muro bidimensionale composto da due segmenti è possibile individuare cinque regioni diverse. Se il centroide della particella appartiene alle regioni 2 o 4 il contatto con il muro avviene in corrispondenza della sua lunghezza ed  $n_i$  è la normale al segmento di muro appartenente alla regione. Se, invece, la particella si trova nelle regioni 1, 3 o 5 il contatto col muro si esplica in corrispondenza di uno dei suoi vertici ed il versore  $n_i$  giace sulla linea che collega il centroide al suddetto vertice.

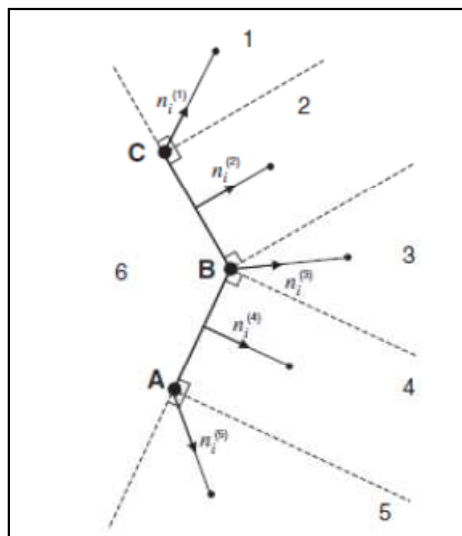


FIGURA 2.5: DETERMINAZIONE DELLA DIREZIONE NORMALE PER IL CONTATTO PARETE-PARTICELLA [92].

Noti i raggi delle particelle ( $R^{[A]}$ ,  $R^{[B]}$  ed  $R^{[b]}$ ), la sovrapposizione  $U_n$ , definita come lo spostamento relativo del contatto nella direzione normale, è data da:

$$U_n = R^{[A]} + R^{[B]} - d \quad (2.10)$$

*(contatto particella-particella)*

$$U_n = R^{[b]} - d \quad (2.11)$$

*(contatto particella-parete)*

La posizione del punto di contatto ( $x_i^{[C]}$ ) è pari a:

$$x_i^{[C]} = x_i^{[A]} + \left( R^{[A]} - \frac{1}{2} \cdot U_n \right) \cdot n_i \quad (2.12)$$

*(contatto particella-particella)*

$$x_i^{[C]} = x_i^{[b]} + \left( R^{[b]} - \frac{1}{2} \cdot U_n \right) \cdot n_i \quad (2.13)$$

*(contatto particella-parete)*

Il vettore forza di contatto può essere scomposto in una componente normale ( $F_i^n$ ) e in una tangenziale ( $F_i^s$ ), rispetto al piano di contatto:

$$F_i = F_i^n + F_i^s \quad (2.14)$$

La componente normale ( $F_i^n$ ) della forza di contatto si valuta in funzione di  $U_n$  e della rigidità normale  $k_n$  secondo la formula:

$$F_i^n = k_n U_n n_i \quad (2.15)$$

La componente tangenziale ( $F_i^s$ ) si valuta in modo incrementale: partendo dal valore nullo nell'istante di formazione del contatto, aumenta ad ogni incremento di spostamento.

Per aggiornare il suo valore si devono considerare due rotazioni: quella attorno alla linea comune al vecchio ed al nuovo piano di contatto e quella relativa alla nuova direzione normale.

Assumendo che le rotazioni siano piccole la prima può essere espressa secondo la seguente equazione:

$$\{F_i^s\}_{rot.1} = F_j^s (\delta_{ij} - e_{ijk} e_{lmn} n_m^{old} n_n) \quad (2.16)$$

dove  $n_m^{old}$  è il vecchio versore normale al piano di contatto.

La seconda rotazione è data da:

$$\{F_i^s\}_{rot.2} = \{F_i^s\}_{rot.1} = F_j^s (\delta_{ij} - e_{ijk} \langle \omega_k \rangle \Delta t) \quad (2.17)$$

dove  $\langle \omega_k \rangle$  è la velocità angolare media dei due elementi a contatto attorno la direzione normale.

$$\langle \omega_k \rangle = \frac{1}{2} (\omega_j^{\{\Phi 1\}} + \omega_j^{\{\Phi 2\}}) n_j n_i$$

(2.18)

dove  $\omega_j^{\{\Phi i\}}$  è la velocità angolare dell'elemento  $\phi_j$ .

A seconda che il contatto sia tra due particelle o tra una particella e un wall:

$$\{\Phi^1, \Phi^2\} = \begin{cases} [A, B] & \text{particella- particella} \\ [b, w] & \text{particella- parete} \end{cases} \quad (2.19)$$

Il movimento relativo in corrispondenza del punto di contatto  $c$  viene espresso dalla velocità ( $V_i$ ), che è definita come la velocità della ball B rispetto alla ball A, in caso di contatto particella-particella, e come la velocità relativa del muro  $w$  rispetto alla ball  $b$ , in caso di contatto particella-parete.

$$\begin{aligned} V_i &= (\dot{x}_i^{[C]})_{\Phi^1} - (\dot{x}_i^{[C]})_{\Phi^2} = \\ &= (\dot{x}_i^{[\Phi^2]} + e_{ijk} \omega_j^{[\Phi^2]} (x_k^{[C]} - x_k^{[\Phi^2]})) - (\dot{x}_i^{[\Phi^1]} + e_{ijk} \omega_j^{[\Phi^1]} (x_k^{[C]} - x_k^{[\Phi^1]})) \end{aligned} \quad (2.20)$$

dove  $\dot{x}_i^{[\Phi^j]}$  è la velocità di traslazione dell'elemento  $\Phi_j$ .

Rispetto al piano di contatto la velocità può essere scomposta in una componente normale ed una tangenziale, dette rispettivamente  $V_i^n$  e  $V_i^s$ .

La componente tangenziale della velocità di contatto può essere scritta come:

$$V_i^s = V_i - V_i^n = V_i - V_j n_j n_i \quad (2.21)$$

La componente tangenziale del vettore incremento di spostamento può essere calcolato come:

$$\Delta U_i^s = V_i^s \Delta t \quad (2.22)$$

da cui si ricava la componente tangenziale della forza di contatto ( $\Delta F_i^s$ ) in funzione della rigidità tangenziale ( $k_s$ ):

$$\Delta F_i^s = -k_s \Delta U_i^s \quad (2.23)$$

La forza di contatto tangenziale aggiornata si calcola mediante la seguente espressione:

$$F_i^s = \{F_i^s\}_{rot.2} + \Delta F_i^s \quad (2.24)$$

I valori delle forze di contatto normali e tangenziali calcolati mediante le equazioni (2.15) e (2.24) vengono aggiornati in modo da soddisfare i modelli costitutivi ipotizzati. In seguito a tale aggiornamento il contributo della forza di contatto finale alle forze ed ai momenti delle due entità in contatto sono dati da:

$$F^{[\Phi^1]}_i \leftarrow F^{[\Phi^1]}_i - F_i \quad (2.25)$$

$$F^{[\Phi^2]}_i \leftarrow F^{[\Phi^2]}_i + F_i \quad (2.26)$$

$$M^{[\Phi^1]}_i \leftarrow M^{[\Phi^1]}_i - e_{ijk} (x_j^{[C]} - x_j^{[\Phi^1]}) F_k \quad (2.27)$$

$$M^{[\Phi^2]}_i \leftarrow M^{[\Phi^2]}_i + e_{ijk} (x_j^{[C]} - x_j^{[\Phi^2]}) F_k \quad (2.28)$$

dove  $F_i^{[\Phi^j]}$  e  $M_i^{[\Phi^j]}$  rappresentano la somma delle forze e dei momenti relativi all'elemento  $\phi_j$ .

### **2.2.3 Lo smorzamento**

L'energia cinetica che si genera nel sistema in seguito all'interazione tra le particelle viene dissipata attraverso gli slittamenti relativi. Nel caso in cui questi ultimi non siano sufficienti a far raggiungere al modello uno stato di equilibrio, entra in gioco il fattore di smorzamento (*local damping*) che applica ad ogni elemento una forza di smorzamento (*damping force*) proporzionale alla corrispondente forza non bilanciata (*unbalanced force*).

Quest'ultima permette di controllare se il modello ha raggiunto o meno l'equilibrio statico; il sistema, infatti, si considera in equilibrio quando la massima forza non bilanciata è piccola rispetto a quelle applicate. Se l'*unbalanced force* si attesta ad



un valore costante non nullo (seppur piccolo) significa che, verosimilmente, si stanno verificando rotture o deformazioni plastiche all'interno del modello [93], [94].

Il fattore di smorzamento viene introdotto nell'equazione del moto (2.1) secondo la seguente espressione:

$$\mathfrak{S}_{(i)} + F_{(i)}^d = \mathbf{M}_{(i)} \mathbf{A}_{(i)} \quad i = 1..6 \quad (2.29)$$

con

$$\mathbf{M}_{(i)} \mathbf{A}_{(i)} = \begin{cases} m\ddot{x}_{(i)} & \text{per } i = 1..3; \\ I\dot{\omega}_{(i-3)} & \text{per } i = 4..6 \end{cases} \quad (2.30)$$

dove:

$\mathfrak{S}_{(i)}$  = componenti generalizzate della forza, includono il contributo della forza di gravità;

$\mathbf{M}_{(i)}$  = componenti generalizzate della massa;

$\mathbf{A}_{(i)}$  = componenti generalizzate dell'accelerazione;

$F_{id}$  = forza di smorzamento.

$$F_{id} = -\alpha |\mathfrak{S}_{(i)}| \text{sign}(V_{(i)}) \quad i = 1..6 \quad (2.31)$$

dove:

$$\text{sign}(V_{(i)}) = \begin{cases} +1 & \text{se } y > 0; \\ 0 & \text{se } y = 0; \\ -1 & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

espressa in termini di velocità generalizzata la (2.32) diventa:

$$\text{sign}(V_{(i)}) = \begin{cases} \dot{x}_{(i)} & \text{per } i = 1..3; \\ \omega_{(i-3)} & \text{per } i = 4..6 \end{cases} \quad (2.33)$$

La forza di smorzamento è controllata dal valore del coefficiente  $\alpha$  che varia tra 0 ed 1 e può essere specificato mediante il comando *DAMP local*. Se non precisato  $\alpha$  viene di default assunto pari a 0,7.

#### **2.2.4 Le condizioni iniziali**

Ad ogni ball possono essere assegnati forze, momenti e velocità iniziali mediante l'apposito comando *INITIAL*. Le forze ed i momenti applicati rimangono costanti durante tutta la durata della modellazione, andandosi a sommare alle forze e momenti correnti prima che questi vengano integrati secondo la legge del moto. Se le velocità delle ball non sono state fissate dal comando *FIX* verranno modificate automaticamente step dopo step, in funzione delle forze di contatto.

Solitamente la compattazione del modello viene effettuata mediante l'applicazione della forza di gravità col comando *SET gravity*, o mediante l'azione di un wall.

Per le pareti è possibile stabilire condizioni iniziali in termini di velocità di traslazione e rotazione, ma non in termini di forze.

### **2.3 LA CREAZIONE DEL MODELLO**

Per la definizione di un modello è necessario specificare:

- la distribuzione e le dimensioni delle particelle che compongono il sistema;
- la natura dei contatti e le proprietà dei materiali, che regolano la risposta del mezzo quando è sottoposto ad un'azione perturbante;
- le condizioni al contorno e quelle iniziali, che definiscono la situazione iniziale, cioè prima dell'introduzione della perturbazione.

La procedura generale di soluzione prevede la valutazione dello stato di equilibrio iniziale del sistema, l'applicazione delle alterazioni ed il calcolo della risposta del modello (figura 2.6).

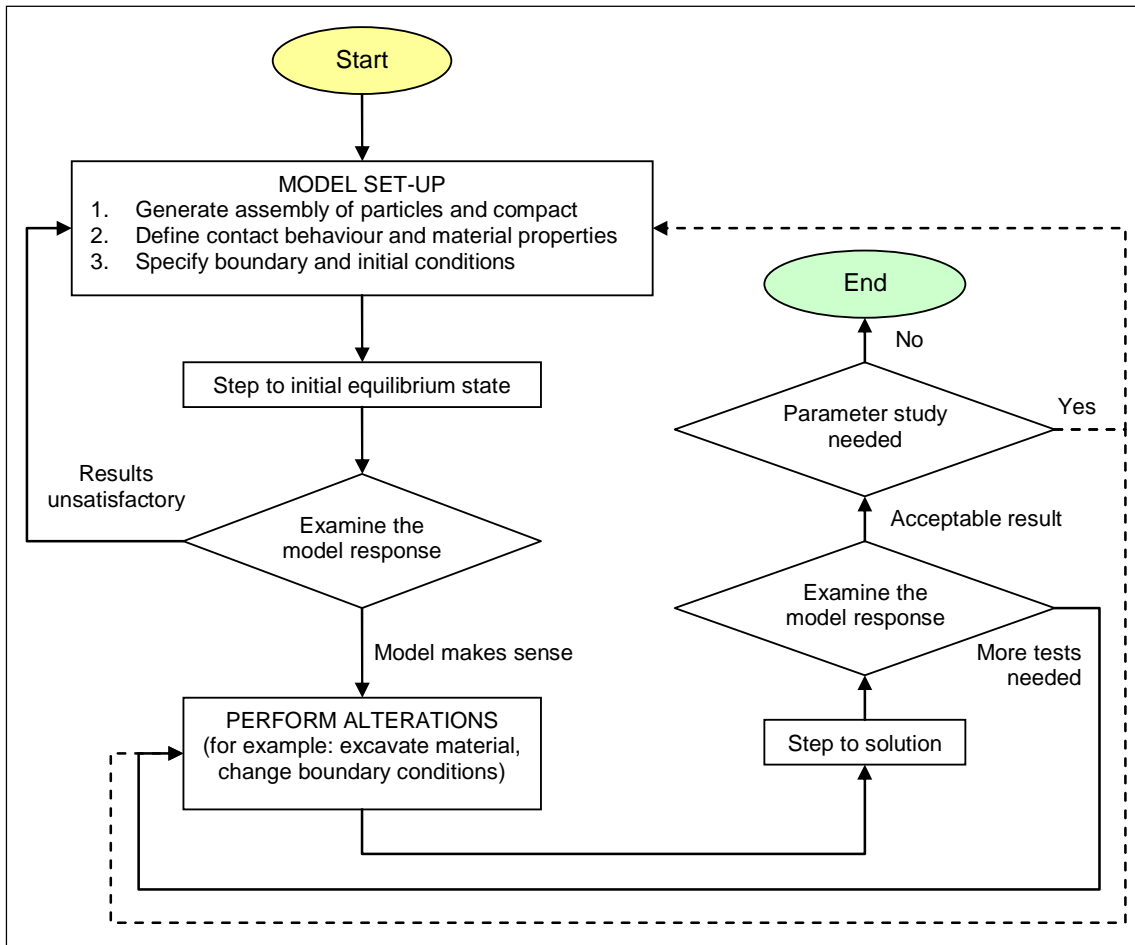


FIGURA 2.6: PROCEDURA DI SOLUZIONE GENERALE DI PFC [87].

### 2.3.1 La generazione delle particelle

Gli elementi che compongono il sistema possono essere generati attraverso due procedure distinte [97]:

- la prima prevede la creazione di una particella per volta (attraverso il comando *BALL*) definendone il raggio, le coordinate esatte rispetto un sistema di riferimento cartesiano ed il numero identificativo (*ID number*). Sulla base delle informazioni ricevute il software inserisce l'elemento nella posizione fissata, sovrapponendolo ad eventuali altri già esistenti. La sovrapposizione, se presente, può creare tensioni e forze di repulsione iniziali molto elevate, ragione per cui questa procedura non si utilizza frequentemente in caso in cui si stia impiegando un approccio *soft contact*;

- la seconda consiste nel creare un insieme iniziale di particelle (attraverso il comando *GENERATE*) specificando il volume di dominio all'interno del quale esse verranno generate, l'intervallo di variazione del raggio ( $r_{\min}$  ed  $r_{\max}$ ) e la relativa distribuzione granulometrica. Il software provvede a creare gli elementi disponendoli in maniera casuale all'interno dello spazio fissato non permettendo però la sovrapposizione tra particelle o tra particelle ed elementi al contorno. Questa procedura è quella più utilizzata in quanto consente di generare sistemi formati da molti elementi in tempi di calcolo ragionevoli (figura 2.7).

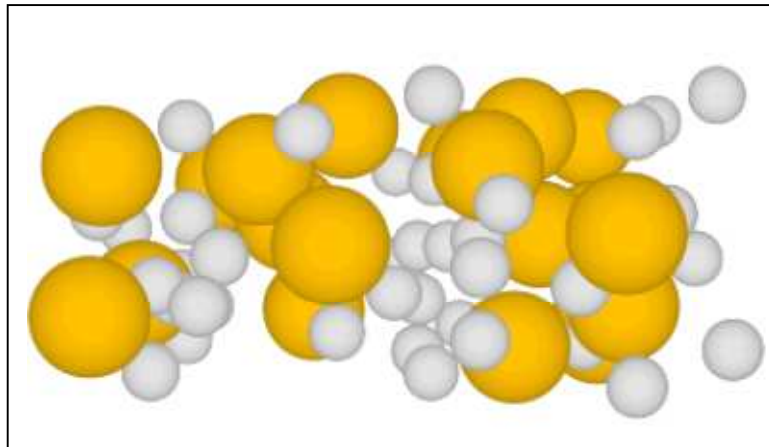


FIGURA 2.7: SISTEMA DI PARTICELLE CREATE MEDIANTE IL COMANDO GENERATE.

Una volta create, le particelle vengono compattate attraverso una delle seguenti modalità:

- *spostamento delle pareti*: consiste nell'avvicinare reciprocamente i walls che costituiscono i confini del sistema fino al raggiungimento della densità desiderata.

Questo tipo di approccio presenta le seguenti problematiche:

- modificando la posizione delle pareti si perde la geometria iniziale del modello;
- la convergenza all'equilibrio è molto lenta poiché il disturbo che si genera ai confini deve propagarsi all'interno;
- la distribuzione di particelle ottenuta non è uniforme;

- *espansione dei raggi (generation by radius expansion)*: consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di piccolo raggio che vengono successivamente dilatate fino al raggiungimento della densità prevista. È il metodo più semplice ed affidabile, in quanto mantiene le dimensioni iniziali del sistema ed, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, gli conferisce proprietà uniformi ed isotrope (figura 2.8);

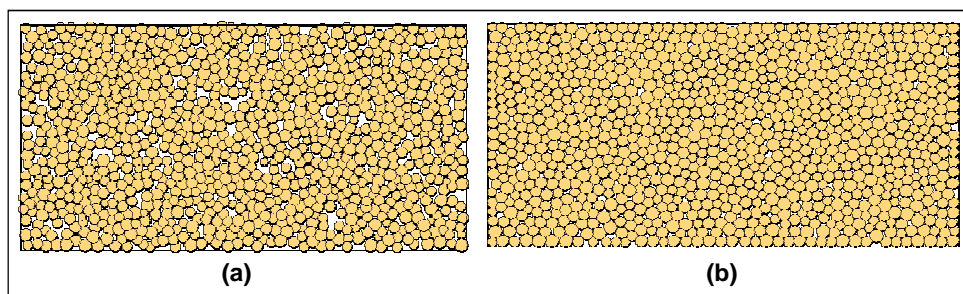


FIGURA 2.8: ISTANTE INIZIALE (A) E FINALE (B) DEL PROCEDIMENTO DI GENERAZIONE PER ESPANSIONE [87].

- *repulsione esplosiva (generation by explosive repulsion)*: consiste nel creare un insieme iniziale di particelle di raggio tale da raggiungere la porosità desiderata. Queste ultime sono disposte casualmente all'interno del sistema con conseguenti sovrapposizioni (figura 2.9) ed elevate forze di repulsione che possono raggiungere valori tali da permettere ad alcuni elementi di sfuggire attraverso le pareti del sistema.

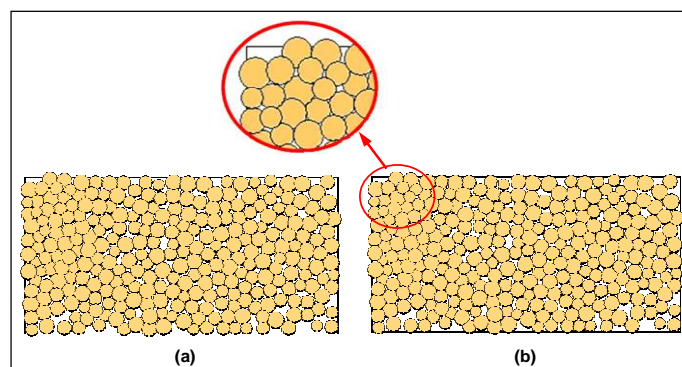


FIGURA 2.9: ISTANTE INIZIALE (A) E FINALE (B) DEL PROCEDIMENTO DI GENERAZIONE PER ESPLOSIONE [87].

Sebbene il codice PFC utilizzi, di default, particelle di forma circolare o sferica (rispettivamente nella versione 2D e in quella 3D) esiste la possibilità di creare

elementi di forma generica utilizzando la logica clump o la logica cluster. Tali elementi vengono generati assemblando particelle circolari (o sferiche) che mantengono la stessa posizione reciproca durante l'intera simulazione (figure 2.10 e 2.11) e che possono essere dotati di comportamento rigido (clump) o deformabile (cluster). In questo modo è possibile quindi ottenere una rappresentazione molto fedele alla realtà fisica.

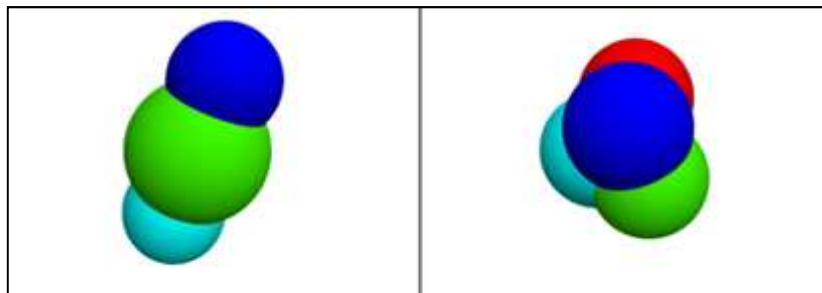


FIGURA 2.10: ELEMENTI CLUMP O CLUSTER [179].

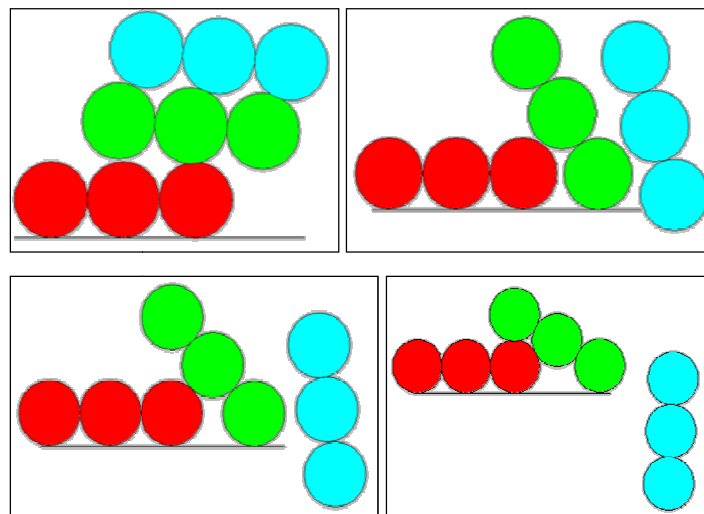


FIGURA 2.11: INTERAZIONE TRA ELEMENTI CLUMP COSTITUITI DA TRE PARTICELLE [149].

### 2.3.2 I modelli di contatto

Il passo fondamentale per la schematizzazione di un sistema tramite PFC è la definizione di un modello di contatto, il quale si compone in generale di tre parti (figura 2.12):

- un modello di rigidezza;
- un modello di slittamento;
- un modello di legame.

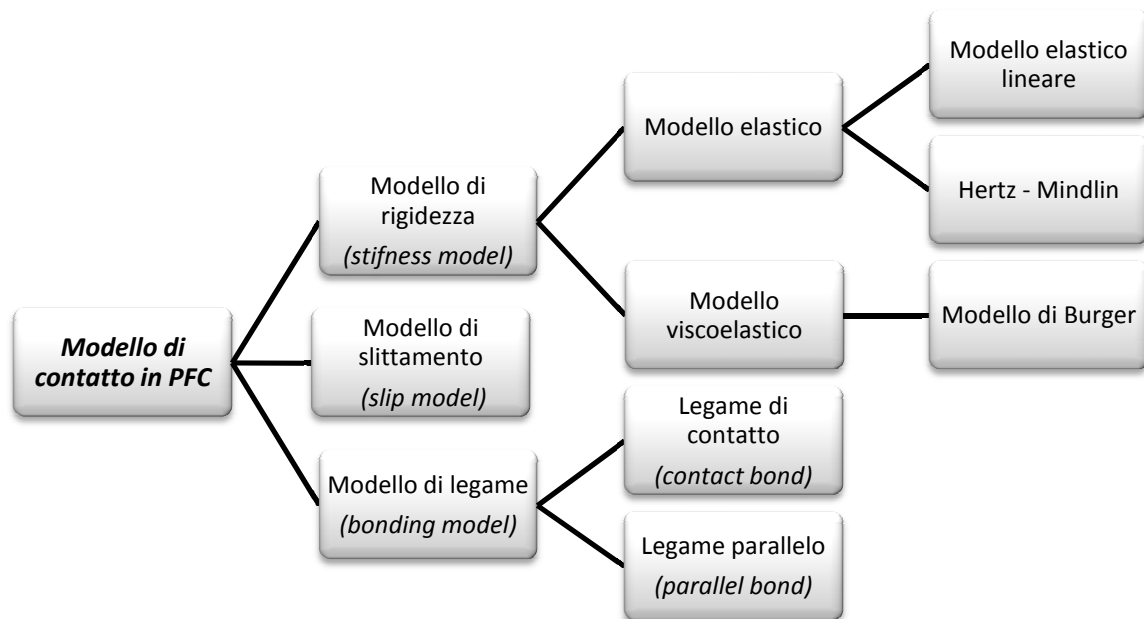


FIGURA 2.12: DEFINIZIONE DEL MODELLO DI CONTATTO IN PFC.

#### 2.3.2.1 Il modello di rigidezza

Esistono fondamentalmente due categorie di modelli di rigidezza: i modelli elastici e quelli viscoelastici. I primi forniscono una relazione di tipo elastico tra le componenti normale ( $F_n$ ) e tangenziale ( $F_s$ ) della forza di contatto ed i relativi spostamenti (figura 2.13):

$$F_n = k_n \cdot U_n \quad (2.34)$$

$$F_s = -k_s \cdot U_s \quad (2.35)$$

dove:

$k_n$  = rigidezza di contatto normale;

$k_s$  = rigidezza di contatto tangenziale;

$U_n$  = spostamento in direzione normale;

$U_s$  = spostamento in direzione tangenziale.

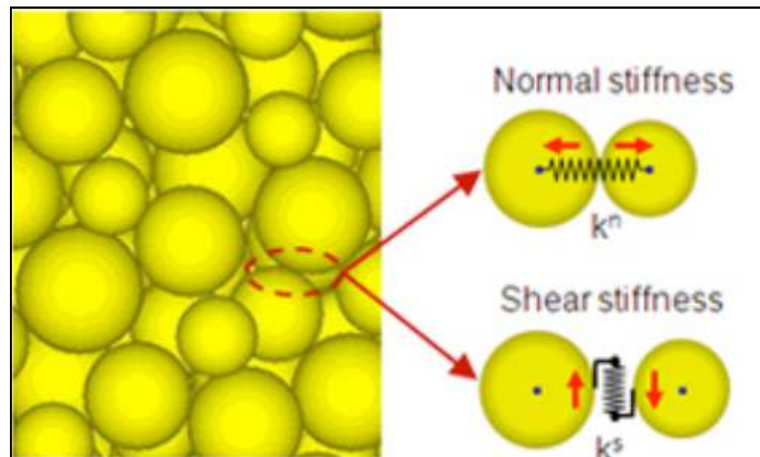


FIGURA 2.13: SCHEMATIZZAZIONE DEL CONTATTO ELASTICO.

Il software, in particolare, ne prevede due tipologie: il modello elastico lineare e quello di Hertz-Mindlin.

I modelli viscoelastici risultano di più difficile applicazione, ma possiedono il grande vantaggio di riuscire a cogliere la dipendenza dal tempo del comportamento tenso-deformativo di determinate tipologie di materiali, quali i conglomerati bituminosi.

Nei paragrafi seguenti si riportano le ipotesi e le leggi fondamentali proprie dei modelli sopra citati ed implementati in PFC.

### Il modello elastico lineare

Il modello lineare è il modello che, in virtù della sua semplicità, viene più frequentemente utilizzato nelle modellazioni DEM particellari. Esso ipotizza una relazione lineare tra le forze e gli spostamenti; note due particelle  $A$  e  $B$  in reciproco contatto,  $k_n$  e  $k_s$  vengono valutati mediante le equazioni di seguito riportate [52]:



$$k_n = \frac{k_n^A \cdot k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \quad (2.36)$$

$$k_s = \frac{k_s^A \cdot k_s^B}{k_s^A + k_s^B} \quad (2.37)$$

Il modello di Hertz-Mindlin

Il modello di Hertz-Mindlin è di tipo elastico non lineare e valuta le rigidezze  $k_n$  e  $k_s$  in funzione del modulo di taglio ( $G$ ) e del coefficiente di Poisson ( $\nu$ ) di due particelle  $A$  e  $B$  a contatto mediante le equazioni di seguito riportate [124]:

$$k_n = \left( \frac{2 \cdot \langle G \rangle \cdot \sqrt{2 \cdot \tilde{R}}}{3 \cdot (1 - \langle \nu \rangle)} \right) \cdot \sqrt{U_n} \quad (2.38)$$

$$k_s = \left( \frac{2 \cdot (3 \cdot \langle G \rangle^2 \cdot (1 - \langle \nu \rangle) \cdot \tilde{R})^{1/3}}{(2 - \langle \nu \rangle)} \right) \cdot |F_i^n|^{1/3} \quad (2.39)$$

dove:

$U_n$  = sovrapposizione tra le due particelle a contatto;

$|F_i^n|$  = forza di contatto in direzione normale.

Indicando con  $R^{[A]}$  ed  $R^{[B]}$  i raggi delle due sfere a contatto, i termini delle 2.38 e 2.39 si valutano secondo le formule di seguito indicate:

$$\tilde{R} = \frac{2 \cdot R^{[A]} \cdot R^{[B]}}{R^{[A]} + R^{[B]}} \quad (2.40)$$

$$\langle G \rangle = 0.5 \cdot (G^{[A]} + G^{[B]}) \quad (2.41)$$

$$\langle v \rangle = 0.5 \cdot (v^{[A]} + v^{[B]}) \quad (2.42)$$

(contatto particella-particella)

$$\tilde{R} = R^{[ball]} \quad (2.43)$$

$$\langle G \rangle = G^{[ball]} \quad (2.44)$$

$$\langle v \rangle = v^{[ball]} \quad (2.45)$$

(contatto particella-parete)

### Il modello di Burger

Per rappresentare il comportamento di un materiale viscoelastico PFC prevede l'utilizzo del modello di Burger, costituito a sua volta da due modelli viscoelastici connessi in serie: il modello di Maxwell e modello di il Kelvin (figura 2.14).

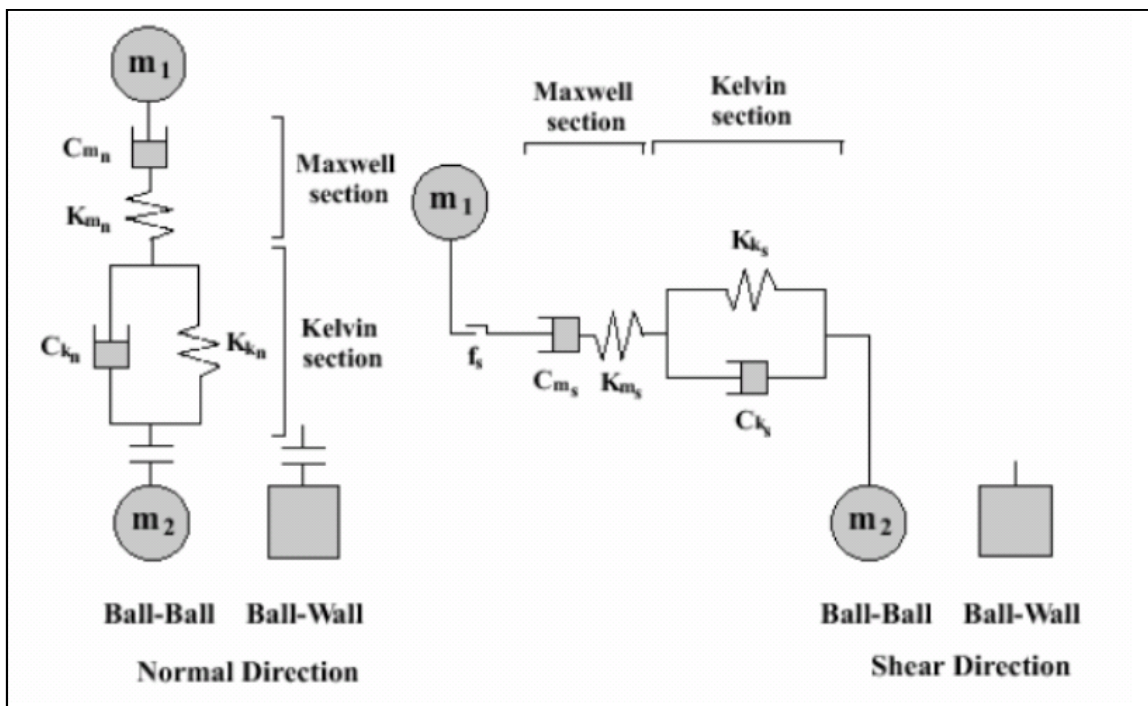


FIGURA 2.14: SCHEMATIZZAZIONE DEL MODELLO DI BURGER [92].

Il modello di Burger è implementato direttamente in PFC, e viene compiutamente definito mediante i seguenti parametri:

- bur\_knk***: costante elastica della molla di Kelvin per il contatto normale ( $K_{kn}$ );
- bur\_cnk***: coefficiente di viscosità dello smorzatore di Kelvin per il contatto normale ( $C_{kn}$ );
- bur\_knm***: costante elastica della molla di Maxwell per il contatto normale ( $K_{mn}$ );
- bur\_cnm***: coefficiente di viscosità dello smorzatore di Maxwell per il contatto normale ( $C_{mn}$ );
- bur\_ksk***: costante elastica della molla di Kelvin per il contatto tangenziale ( $K_{ks}$ );
- bur\_csk***: coefficiente di viscosità dello smorzatore di Kelvin per il contatto tangenziale ( $C_{ks}$ );
- bur\_ksm***: costante elastica della molla di Maxwell per il contatto tangenziale ( $K_{ms}$ );
- bur\_csm***: coefficiente di viscosità dello smorzatore di Maxwell per il contatto tangenziale ( $C_{ms}$ ).

Per descrivere il comportamento di un insieme di particelle i cui contatti sono governati dal modello di Burger è necessario calcolare analiticamente l'entità delle forze di contatto ed il conseguente spostamento. Nella trattazione analitica seguente si assumono positive le grandezze che riguardano la direzione normale e negative quelle relative alla direzione tangenziale. Lo spostamento totale del modello di Burger  $u$ , può essere calcolato come la somma dello spostamento del modello di Kelvin ( $u_k$ ) e di quelli relativi al modello di Maxwell ( $u_{mk}$ ,  $u_{mc}$ ) secondo l'espressione seguente:

$$u = u_k + u_{mk} + u_{mc} \quad (2.46)$$

La velocità di spostamento e l'accelerazione del modello di Burger sono date rispettivamente dalle equazioni 2.47 e 2.48:

$$\dot{u} = \dot{u}_k + \dot{u}_{mk} + \dot{u}_{mc} \quad (2.47)$$

$$\ddot{u} = \ddot{u}_k + \ddot{u}_{mk} + \ddot{u}_{mc} \quad (2.48)$$

La forza di contatto  $f$  e la sua derivata relative al modello di Kelvin possono essere calcolate come:

$$f = \pm K_k u_k \pm C_k \dot{u}_k \quad (2.49)$$

$$\dot{f} = \pm K_k \dot{u}_k \pm C_k \ddot{u}_k \quad (2.50)$$

Calcolandole, invece, in funzione dei parametri  $K_m$  e  $C_m$  propri del modello di Maxwell si ottiene:

$$f = \pm K_m u_{mk} \quad (2.51)$$

$$\dot{f} = \pm K_m \dot{u}_{mk} \quad (2.52)$$

$$\ddot{f} = \pm K_m \ddot{u}_{mk} \quad (2.53)$$

$$f = \pm C_m \dot{u}_{mc} \quad (2.54)$$

$$\dot{f} = \pm C_m \ddot{u}_{mc} \quad (2.55)$$

Utilizzando le equazioni (2.47) – (2.55) è possibile calcolare la forza di contatto risolvendo la seguente equazione differenziale di secondo ordine:

$$f + \left[ \frac{C_k}{K_k} + C_m \left( \frac{1}{K_k} + \frac{1}{K_m} \right) \right] \dot{f} + \frac{C_k C_m}{K_k K_m} \ddot{f} = \pm C_m \dot{u} \pm \frac{C_k C_m}{K_k} \ddot{u} \quad (2.56)$$

La velocità di spostamento del modello di Kelvin è data da:

$$\dot{u}_k = \frac{-K_k u_k \pm f}{C_k} \quad (2.57)$$

Utilizzando uno schema alle differenze centrali per la derivata rispetto al tempo e considerando i valori medi di  $K_u$  ed  $f$  si ottiene:

$$\frac{u_k^{t+1} - u_k^t}{\Delta t} = \frac{1}{C_k} \left[ -\frac{K_k (u_k^{t+1} + u_k^t)}{2} \pm \frac{f^{t+1} + f^t}{2} \right] \quad (2.58)$$

quindi:

$$u_k^{t+1} = \frac{1}{A} \left[ B u_k^t \pm \frac{\Delta t}{2C_k} (f^{t+1} + f^t) \right] \quad (2.59)$$

dove:

$$A = 1 + \frac{K_k \Delta t}{2C_k} \quad (2.60)$$

$$B = 1 - \frac{K_k \Delta t}{2C_k} \quad (2.61)$$

Lo spostamento  $u$  e la sua derivata prima relativi al modello di Maxwell sono dati da:

$$u_m = u_{mk} + u_{mc} \quad (2.62)$$

$$\dot{u}_m = \dot{u}_{mk} + \dot{u}_{mc} \quad (2.63)$$

Sostituendo le equazioni (2.52) e (2.54) nella (2.63) si ottiene:

$$\dot{u}_m = \pm \frac{\dot{f}}{K_m} \pm \frac{f}{C_m} \quad (2.64)$$

Applicando uno schema alle differenze centrali e considerando il valore medio di  $f$  si ottiene:

$$\frac{u_m^{t+1} - u_m^t}{\Delta t} = \pm \frac{f^{t+1} - f^t}{K_m \Delta t} \pm \frac{f^{t+1} + f^t}{2C_m} \quad (2.65)$$

quindi:

$$u_m^{t+1} = \pm \frac{f^{t+1} - f^t}{K_m} \pm \frac{\Delta t (f^{t+1} + f^t)}{2C_m} + u_m^t \quad (2.66)$$

Lo spostamento totale e la sua derivata prima del modello di Burger sono dati da:

$$u = u_k + u_m \quad (2.67)$$

$$\dot{u} = \dot{u}_k + \dot{u}_m \quad (2.68)$$

Applicando le differenze finite per la derivata:

$$u^{t+1} - u^t = u_k^{t+1} - u_k^t + u_m^{t+1} - u_m^t \quad (2.69)$$

Sostituendo le equazioni (2.59) e (2.66) nella (2.69) è possibile calcolare la forze  $f^{t+1}$ :

$$f^{t+1} = \pm \frac{1}{C} \left[ u^{t+1} - u^t + \left( 1 - \frac{B}{A} \right) u_k^t \pm Df^t \right] \quad (2.70)$$

dove:

$$C = \frac{\Delta t}{2C_k A} + \frac{1}{K_m} + \frac{\Delta t}{2C_m} \quad (2.71)$$

$$D = \frac{\Delta t}{2C_k A} - \frac{1}{K_m} + \frac{\Delta t}{2C_m} \quad (2.72)$$

È quindi possibile calcolare la forza  $f^{t+1}$  noti i valori di  $u^{t+1}$ ,  $u^t$ ,  $u_k^t$  and  $f^t$ . Di conseguenza, lo stato tenso-deformativo presente all'interno del volume di misura considerato può essere calcolato a partire dalle forze agenti nei punti di contatto.

### 2.3.2.2 Il modello di slittamento

Il modello di slittamento rappresenta una proprietà intrinseca delle entità a contatto, particella-particella o particella-muro.

La condizione di slittamento si ha quando la componente tangenziale della forza ( $F_i^s$ ) eguaglia il valore massimo ammissibile della forza di contatto tangenziale ( $F_{max}^s$ ). Questo valore è dato dal coefficiente di attrito minimo tra le entità a contatto ( $\mu$ ) moltiplicato per il modulo della componente normale di compressione della forza ( $F_i^n$ ).

La condizione affinché si abbia slittamento si può quindi esprimere come:

$$F_i^s \geq F_{max}^s = \mu \cdot |F_i^n| \quad (2.73)$$

### 2.3.2.3 Il modello di legame

Per rappresentare l'esistenza di un legame tra due elementi PFC prevede diverse tipologie di modello:

- legame di contatto (*contact bond*): riproduce l'effetto d'adesione che si esplica nel punto di contatto e può essere visto come un insieme di due molle elastiche con rigidzze normale e tangenziale costanti agenti nel punto di sovrapposizione (figura 2.15). È definito dalle componenti normale (*n\_bond*) e tangenziale (*s\_bond*) della forza di legame. Il *contact bond* impedisce lo

scorrimento reciproco degli elementi adiacenti, ma non ne impedisce la rotazione, che può essere causata da un momento agente nel punto di sovrapposizione (figura 2.16).

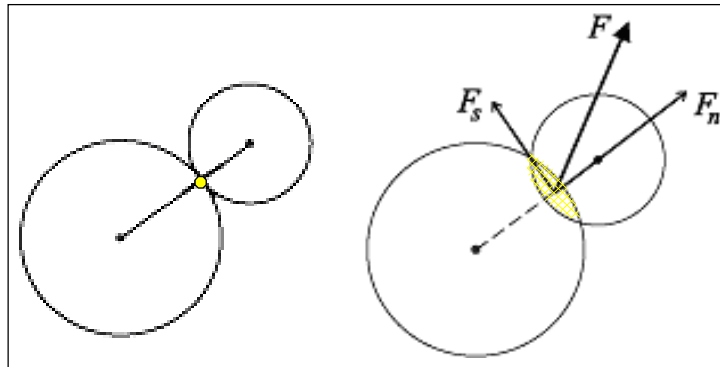


FIGURA 2.15: CONTACT BOND [90].

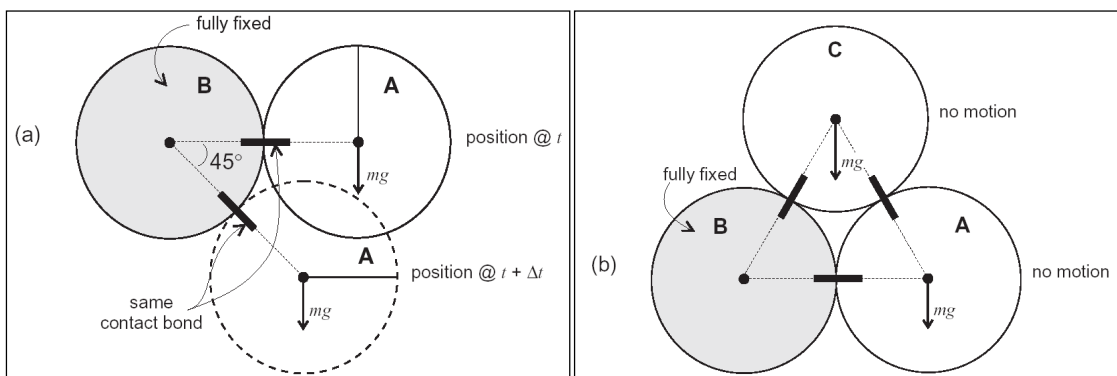


FIGURA 2.16: ROTAZIONE SENZA SCORRIMENTO PERMESSA DAL CONTACT BOND TRA DUE (A) E TRE (B) PARTICELLE [90].

- legame parallelo (*parallel bond*): riproduce l'effetto d'adesione di un materiale aggiuntivo, depositatosi dopo che le particelle sono venute in contatto, la cui rigidità agisce in parallelo a quella di contatto su un'area definita (da qui il nome del modello) (figura 2.17). Può essere visto come un insieme di molle elastiche con rigidità normale e tangenziale costanti, uniformemente distribuite su una sezione trasversale circolare o rettangolare situata nel piano di contatto e centrata nel punto di contatto. Ogni carico aggiuntivo applicato alle due particelle, dopo che si è instaurato il legame parallelo, è suddiviso in modo proporzionale tra la molla del contatto e quella del legame stesso che può trasmettere sia forze sia momenti. Questo legame



si utilizza generalmente per modellare materiali coesivi ed è definito da cinque parametri:

- componente normale della forza di legame ( $pb\_nstrength$ );
- componente tangenziale della forza di legame ( $pb\_sstrength$ );
- rigidità normale ( $pb\_kn$ );
- rigidità tangenziale ( $pb\_ks$ );
- raggio del disco che schematizza il legame parallelo ( $pb\_radius$ ).

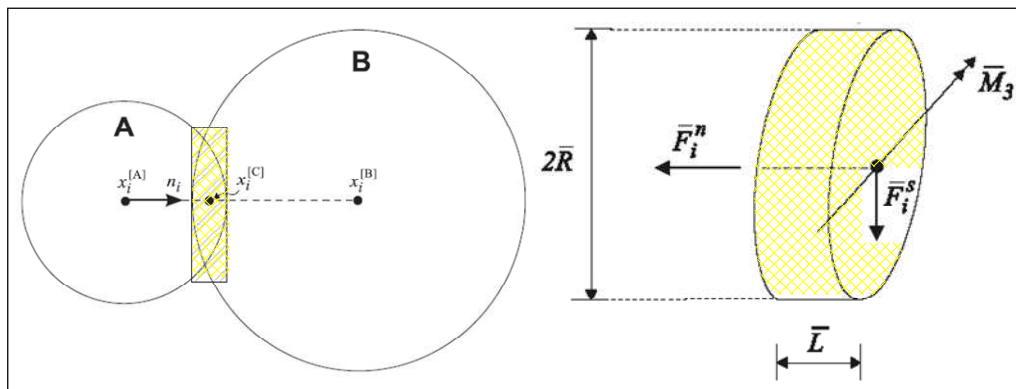


FIGURA 2.17: PARALLEL BOND [92].

Le risultanti delle forze e dei momenti che si generano nel punto di contatto vengono valutate sommando le componenti in direzioni normale ( $n$ ) e tangenziale ( $s$ ) rispetto al piano di contatto (figura 2.17):

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^n + \bar{F}_i^s \quad (2.74)$$

$$\bar{M}_i = \bar{M}_i^n + \bar{M}_i^s \quad (2.75)$$

Le risultanti assumono valore nullo nell'istante in cui si costituisce il contatto ed aumentano ad ogni time-step successivo in funzione degli spostamenti e delle rotazioni subite dalle due entità a contatto. L'incremento elastico subito dalle forze e dai momenti nell'intervallo  $\Delta t$  si valuta secondo le seguenti espressioni:

$$\Delta \bar{F}_i^n = \left( -\bar{k}_n \cdot A \cdot \Delta U^n \right) \cdot n_i \quad (2.76)$$

$$\Delta \bar{F}_i^s = \left( -\bar{k}_s \cdot A \cdot \Delta U^s_i \right) \quad (2.77)$$

$$\text{con } \Delta U_i = V_i \Delta t \quad (2.78)$$

e

$$\Delta \bar{M}_i^n = \left( -\bar{k}_s \cdot J \cdot \Delta \theta^n \right) \cdot n_i \quad (2.79)$$

$$\Delta \bar{M}_i^s = \left( -\bar{k}_n \cdot I \cdot \Delta \theta^s_i \right) \quad (2.80)$$

$$\text{con } \Delta \theta_i = \left( \omega^{[B]}_3 - \omega^{[A]}_3 \right) \cdot \Delta t \quad (2.81)$$

dove:

$\bar{R}$  = raggio dell'area di contatto;

I = momento d'inerzia polare;

J = momento d'inerzia rispetto ad un asse che passa per il punto di contatto  
direzione  $\Delta \theta_i$ .

I nuovi vettori forza e momento si ottengono sommando al valore iniziale gli incrementi appena calcolati:

$$\bar{F}_i^n \leftarrow \bar{F}_i^n n_i + \Delta \bar{F}_i^n \quad (2.82)$$

$$\bar{F}_i^s \leftarrow \left\{ \bar{F}_i^s \right\}_{rot.2} + \Delta \bar{F}_i^s \quad (2.83)$$

e

$$\bar{M}_i^n \leftarrow \bar{M}_i^n n_i + \Delta \bar{M}_i^n \quad (2.84)$$

$$\overline{M}_i^s \leftarrow \left\{ \overline{M}_i^s \right\}_{rot.2} + \Delta \overline{M}_i^s \quad (2.85)$$

dove  $\left\{ \right\}_{rot.2}$  rappresenta l'aggiornamento che tiene conto del movimento del piano di contatto.

Il valore massimo degli sforzi di flessione ( $\sigma_{max}$ ) e di taglio ( $\tau_{max}$ ) agenti sul legame può essere calcolato mediante le seguenti espressioni:

$$\sigma_{max} = \frac{-\overline{F}_i^n}{A} + \frac{|\overline{M}_i^s|}{I} \overline{R} \quad (2.86)$$

$$\tau_{max} = \frac{|\overline{F}_i^s|}{A} + \frac{|\overline{M}_i^n|}{J} \overline{R} \quad (2.87)$$

Se  $\sigma_{max}$  supera la rigidità normale o se  $\tau_{max}$  è maggiore della rigidità tangenziale il parallel bond si rompe.

## **2.4 LE CONDIZIONI AL CONTORNO**

Dopo aver generato e compattato il sistema si applicano le condizioni iniziali e quelle al contorno alle particelle ed alle pareti, al fine di ottenere lo stato di equilibrio iniziale desiderato. Le condizioni al contorno possono essere applicate alle pareti, alle singole particelle ed ai clump. I walls, una volta creati, costituiscono un confine fisso per gli elementi adiacenti; a tale confine è però possibile attribuire uno spostamento mediante la definizione di una velocità di traslazione o di rotazione. A differenza di quanto avviene per le pareti, le particelle e i clump possono essere soggetti non solo a velocità, ma anche a forze e momenti. Le sollecitazioni così applicate rimangono costanti durante tutta la simulazione. Le condizioni iniziali sono principalmente determinate dalle modalità di generazione e compattazione del campione. Se si vuole ottenere un particolare stato tenso-deformativo iniziale è possibile ricorrere a particolari funzioni elaborate in linguaggio *fish*. Per poter ottenere la compattazione

del campione e l'equilibrio in funzione delle condizioni al contorno è necessario far ciclare il modello attraverso i comandi *STEP* o *CYCLE*.

## **2.5 INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI**

PFC<sup>3D</sup>, come la maggior parte dei codici di calcolo agli elementi discreti, viene utilizzato per modellare sistemi non lineari, il cui comportamento tenso-deformativo è strettamente connesso alla variabile tempo. Per questo motivo l'interpretazione dei risultati appare spesso più complicata rispetto a quella relativa ad un tradizionale metodo al continuo, che generalmente restituisce una soluzione finale al termine della fase di calcolo. PFC<sup>3D</sup>, per valutare il comportamento micro e macroscopico del materiale, si avvale di sfere (o cerchi in PFC<sup>2D</sup>) di misura e delle cosiddette *histories*, che tracciano l'andamento di variabili quali forze di contatto, tensioni e deformazioni all'interno del modello. Le sfere di misura, definite in termini di dimensioni e coordinate mediante il comando *MEASURE*, possono essere utilizzate per calcolare porosità, tensione, deformazione, numero di coordinazione e scorrimento relativi alle ball contenute al loro interno. Ogni variabile misurata può essere monitorata e salvata mediante il comando *HISTORY measure*; inoltre, i dati relativi ad ogni sfera di misura possono essere visualizzati in ogni momento della modellazione utilizzando il comando *PRINT measures*.

- Porosità: è definita come il rapporto tra il volume dei vuoti all'interno della regione di misura e il volume della regione stessa:

$$n = \frac{V^v}{V^{reg}} = \frac{V^{reg} - V^{mat}}{V^{reg}} = 1 - \frac{V^{mat}}{V^{reg}} \quad (2.88)$$

dove:

$V^v$  = volume dei vuoti;

$V^{reg}$  = volume della regione di misura;

$V^{mat}$  = volume del materiale all'interno della regione di misura.

$V^{mat}$  può essere espresso come:

$$V^{mat} = \begin{cases} \sum_{N_{p'}} V^{(p')} + \sum_{N_l} V^{(l)} - \sum_{N_c} V^{(c)} & B_v \neq 0 \\ \sum_{N_{p'}} V^{(p')} + \sum_{N_l} V^{(l)} - \sum_{N_c} V^{(c)} - \sum_{N_r} V^{(r)} & B_v = 0 \end{cases} \quad (2.89)$$

dove:

$N_p$  = numero di particelle che non formano clump e che giacciono parzialmente o totalmente all'interno della regione di misura;

$V^{(p')}$  = volume delle particelle  $p'$  costituenti clump i cui centroidi appartengono alla regione di misura;

$N_l$  = numero di clump aventi i centroidi all'interno della regione di misura;

$V^{(l)}$  = volume dei clump;

$N_c$  = numero di contatti attivi interni alla regione;

$V^{(c)}$  = volume di sovrapposizione tra due particelle a contatto;

$N_r$  = numero di particelle che formano clump e che giacciono parzialmente o totalmente all'interno della regione di misura;

$V^{(l)}$  = volume delle particelle  $l'$  che formano clump;

$N_r$  = numero di regioni di sovrapposizione nei clump aventi centroidi appartenenti alla regione di misura;

$V_r$  = volume delle regioni di sovrapposizione nei clump.

Il volume delle particelle è dato da:

$$V^{(p)} = \begin{cases} \pi R^2 t & 2D(t=1) \\ \frac{4}{3} \pi R^3 & 3D \end{cases} \quad (2.90)$$

dove  $R$  è il raggio della particella.

Il volume di un clump, invece, può essere calcolato come:

$$V^{(l)} = \begin{cases} \sum_{N_p} V^{(p)} - \sum_{N_r} V^{(r)} & B_v = 0 \\ V_l & B_v \neq 0 \end{cases} \quad (2.91)$$

dove:

$N_p$  = numero di particelle che formano il clump;

$V^{(p)}$  = volume delle particelle secondo la 2.90;

$N_r$  = numero di regioni di sovrapposizione nel clump.

Il volume dei clump può essere determinato automaticamente in funzione della posizione e del raggio delle particelle che lo compongono ( $B_v=0$ ), valore di default, o può essere specificato dall'utente ( $B_v \neq 0$ ) come  $V_l$ .

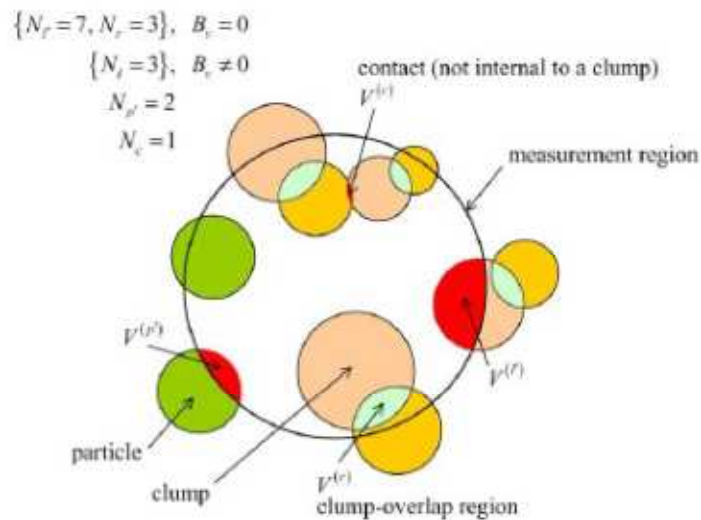


FIGURE 2.18: GRANDEZZE RILEVANTI PER IL CALCOLO DELLA POROSITÀ PER UN SISTEMA FORMATO DA SINGOLE PARTICELLE E CLUMP A 2 E 4 ELEMENTI [92].

- Tensione locale: PFC fornisce come output risultati in termini di forze e spostamenti. Risulta però possibile calcolare, all'interno di un volume di misura, lo stato tensionale medio esistente. Tale valore viene calcolato secondo la seguente espressione:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2.92)$$

dove  $\sigma_{ij}$  è la tensione agente in tutto il volume.

Per un materiale di natura discreta, formato da particelle sferiche e clump, è possibile sostituire la forma integrale con una sommatoria riferita alle  $N_p$  particelle e agli  $N_l$  clump contenuti all'interno del volume  $V$ :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \left( \sum_{N_p} \bar{\sigma}_{ij}^{(p)} V^{(p)} + \sum_{N_l} \bar{\sigma}_{ij}^{(l)} V^{(l)} \right) \quad (2.93)$$

- Deformazione locale: nelle analisi DEM è possibile considerare due istanti temporali e calcolare l'incremento di deformazione tra questi due punti a partire dallo spostamento delle particelle. Il modo più semplice per far ciò è considerare che i centroidi delle particelle siano i vertici di triangoli lungo i cui lati lo spostamento varia secondo un gradiente lineare.
- Numero di coordinazione ( $C_n$ ): è definito come il numero medio di contatti attivi per elemento, dove per elemento si può intendere sia una particella sia un clump e si valuta con la seguente espressione [92]:

$$C_n = \frac{\sum_{N_p} n_c^{(p)} + \sum_{N_l} n_c^{(l)}}{N_p + N_l} \quad (2.94)$$

dove:

$N_p$  = numero di particelle all'interno del volume considerato;

$N_l$  = numero di clump all'interno del volume considerato;

$n_c^{(p)}$  = numero di contatti attivi delle particelle;

$n_c^{(l)}$  = numero di contatti attivi dei clump.

- Frazione dei contatti in scorrimento: valuta il numero di contatti interni al volume di misura che hanno subito scorrimento.

## **LASPERIMENTAZIONE EFFETTUATA**

---

### **3.1 INTRODUZIONE**

Il lavoro di ricerca presentato in questa tesi ha come obiettivo lo studio del conglomerato bituminoso con particolare interesse allo stato tenso-deformativo del materiale ed alle caratteristiche microscopiche che influenzano il comportamento macroscopico della miscela.

L'attività di ricerca svolta ha previsto l'utilizzo di tecniche numeriche avanzate in grado di considerare la complessa natura disomogenea ed anisotropa del conglomerato bituminoso e di tenere conto che tale natura, fortemente influenzata dalle condizioni ambientali, tende ad esplicitare un comportamento meccanico difficilmente schematizzabile.

Per indagare la risposta tenso-deformativa del conglomerato bituminoso si utilizzano generalmente metodi numerici al continuo che incorporano la sua natura particellare all'interno di leggi costitutive elasto-plastiche. In questo modo lo studio viene condotto a livello fenomenologico, anziché a livello microscopico. A giustificare l'approccio continuo c'è da un lato il vantaggio di poter disporre di metodologie analitiche e numeriche ben consolidate, e dall'altro l'evidenza sperimentale che ne prova l'efficacia e la significatività almeno da un punto di vista macroscopico [156].

Spesso, però, l'analisi al continuo risulta riduttiva e carente: è ormai noto, infatti, che i mezzi granulari esplicano un comportamento meccanico nettamente diverso da quello degli altri materiali e questa differenza è imputabile proprio alla loro natura particellare. Diventa, quindi, indispensabile ricorrere ad un approccio di tipo discontinuo, in grado di prendere in considerazione il carattere discreto del sistema ed analizzare i processi microscopici di base che ne determinano il comportamento tenso-deformativo macroscopico (tabella 3.1).



TABELLA 3.1: CONFRONTO TRA APPROCCIO TRADIZIONALE (IN GRIGIO) E APPROCCIO DISCONTINUO NELLA PROGETTAZIONE DI UNA PAVIMENTAZIONE FLESSIBILE [80].

<b>Tecniche numeriche</b>	Metodo degli Elementi Finiti (FEM).
	Metodo degli Elementi Distinti Particellari (DEM-P).
<b>Dati di input</b>	Carichi applicati, temperatura, modulo elastico e coefficiente di Poisson dei materiali che costituiscono il sistema.
	Curva granulometrica dell'aggregato, modelli di contatto microscopici dei materiali che costituiscono il sistema
<b>Risultati</b>	Tensioni e deformazioni - valori medi.
	Spostamenti e forze di contatto tra le particelle - valori di picco.
<b>Condizioni della pavimentazione</b>	Condizioni omogenee (lo stato della miscela non varia).
	Condizioni eterogenee (lo stato della miscela può variare).
<b>Studio della fatica, dell'ormaiamento, delle fessurazioni alle basse temperature</b>	L'innesco e la propagazione del fenomeno sono di tipo continuo. Il metodo fornisce in output il numero di cicli di carico che portano a rottura la pavimentazione.
	L'innesco e la propagazione del fenomeno si sviluppano per passi successivi. Si riesce quindi a modellare la rottura microscopica, ottenendo in output il numero di cicli di carico che portano a rottura la pavimentazione e la posizione del punto in cui si localizza la frattura.
<b>Studio dell'healing del conglomerato bituminoso</b>	Non è possibile modellare il fenomeno.
	È possibile modellare il fenomeno.
<b>Studio del bonding tra gli strati di una sovrastruttura</b>	Solo in corrispondenza delle interfacce tra gli strati.
	Su tutti i piani orizzontali passanti per la pavimentazione.

Tra i metodi discontinui disponibili in letteratura, in particolare, si utilizza quello degli Elementi Distinti Particellari, poiché, schematizzando il sistema come un insieme di particelle di forma circolare, si presta particolarmente allo studio del comportamento meccanico di un materiale granulare (figura 3.1).

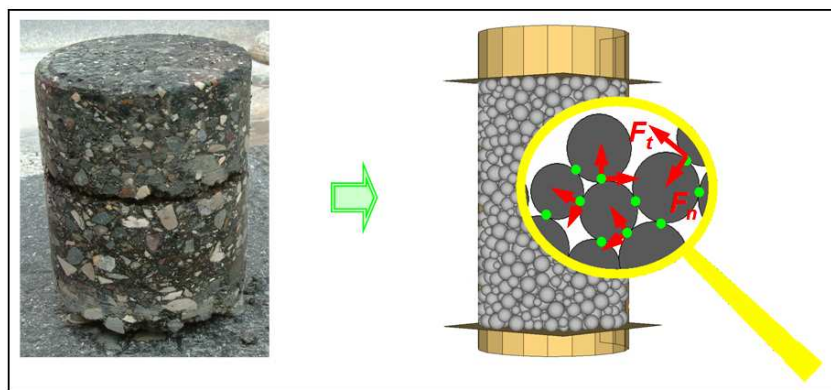


FIGURA 3.1: METODO DEGLI ELEMENTI DISTINTI PARTICELLARI.

Sebbene il Metodo degli Elementi Distinti Particellari (DEM) sia stato ampiamente utilizzato nello studio del comportamento dei terreni, in letteratura sono reperibili pochi riferimenti riguardanti applicazioni su miscele di inerti e materiali legati a bitume. Questi ultimi, in particolare, sono generalmente oggetto di modellazioni numeriche bidimensionali di test di laboratorio condotti su provini di piccole dimensioni.

Dondi et al. in precedenti studi hanno analizzato e confermato le potenzialità del metodo DEM nel riprodurre l'effettivo comportamento del conglomerato bituminoso sia durante test di laboratorio statici e dinamici, sia all'interno di una pavimentazione stradale di tipo flessibile sottoposta alle sollecitazioni del traffico [47], [127], [132].

In quest'ultimo ambito, in particolare, il metodo DEM consente di ottenere indicazioni non solo sul numero di cicli di carico che portano a rottura la pavimentazione, operazione già possibile con le tecniche tradizionali, ma soprattutto sulla localizzazione del punto di innesco delle fratture e sugli effetti conseguenti all'interazione delle fessure all'interno dei singoli strati.

Il confronto tra i risultati numerici e quelli ottenuti dalle leggi di fatica tradizionali, inoltre, ha evidenziato che la capacità del materiale di sopportare e trasferire i carichi esercitati dal traffico è legata strettamente al grado di ingranamento degli inerti che costituiscono lo scheletro della miscela.

Lo sviluppo di modelli particellari caratterizzati da aggregati di forma non sferica, permette non solo di ottenere modelli numerici più rispondenti alla realtà fisica, ma anche di approfondire il comportamento a rottura di una pavimentazione.

Nasce, quindi, l'esigenza di indagare ulteriormente questo parametro.

Se la schematizzazione degli aggregati risulta relativamente semplice mediante il DEM particellare, è bene ricordare che una delle maggiori difficoltà relative alla modellazione agli elementi discreti del conglomerato bituminoso è legata alla modellazione del complesso comportamento reologico di questo materiale.

Infatti, l'applicazione di semplici modelli teorici che rappresentano lo stato deformativo in risposta all'applicazione di una forza, non è efficace nel caso dei materiali a matrice bituminosa, il cui comportamento macroscopico, in virtù delle peculiarità della fase legante, è complesso ed ancor oggi oggetto di frequenti e necessarie approssimazioni nelle comuni applicazioni dell'ingegneria stradale.

Alla base della grande importanza riconosciuta allo studio della reologia del bitume vi è la consapevolezza che il comportamento dei conglomerati e l'insorgere di stati di crisi nelle pavimentazioni sono intimamente connessi al raggiungimento di stati limite di sforzo e deformazione all'interno del film di legante.

Infatti, la nascita di deformazioni non reversibili causa delle ormaie è imputabile alla dipendenza dal tempo dello stato deformativo e allo scorrimento viscoso del bitume.

Analogamente l'innescò e la propagazione di stati fessurativi nelle pavimentazioni sono dovuti agli effetti del tempo, dei gradienti termici e delle sollecitazioni cicliche (fatica) nel mastice di collegamento fra gli aggregati costituito da filler e bitume.

In virtù di quanto detto finora, per studiare il comportamento di un conglomerato bituminoso con il DEM particellare, si è scelto di impostare la ricerca seguendo due approcci paralleli, considerando separatamente il ruolo del bitume e quello dell'aggregato (figura 3.2).

Per quanto riguarda il bitume, partendo dall'analisi del comportamento reologico del conglomerato bituminoso e del legante stesso, si è concentrata l'attenzione sul modello di contatto più idoneo a rappresentare l'interazione legante-scheletro litico e sulle modalità di applicazione di tale modello.

Per quanto riguarda l'aggregato, invece, si è svolto uno studio sperimentale al fine di valutare l'influenza della forma e delle dimensioni degli inerti sulla resistenza e sulle caratteristiche microscopiche della miscela.

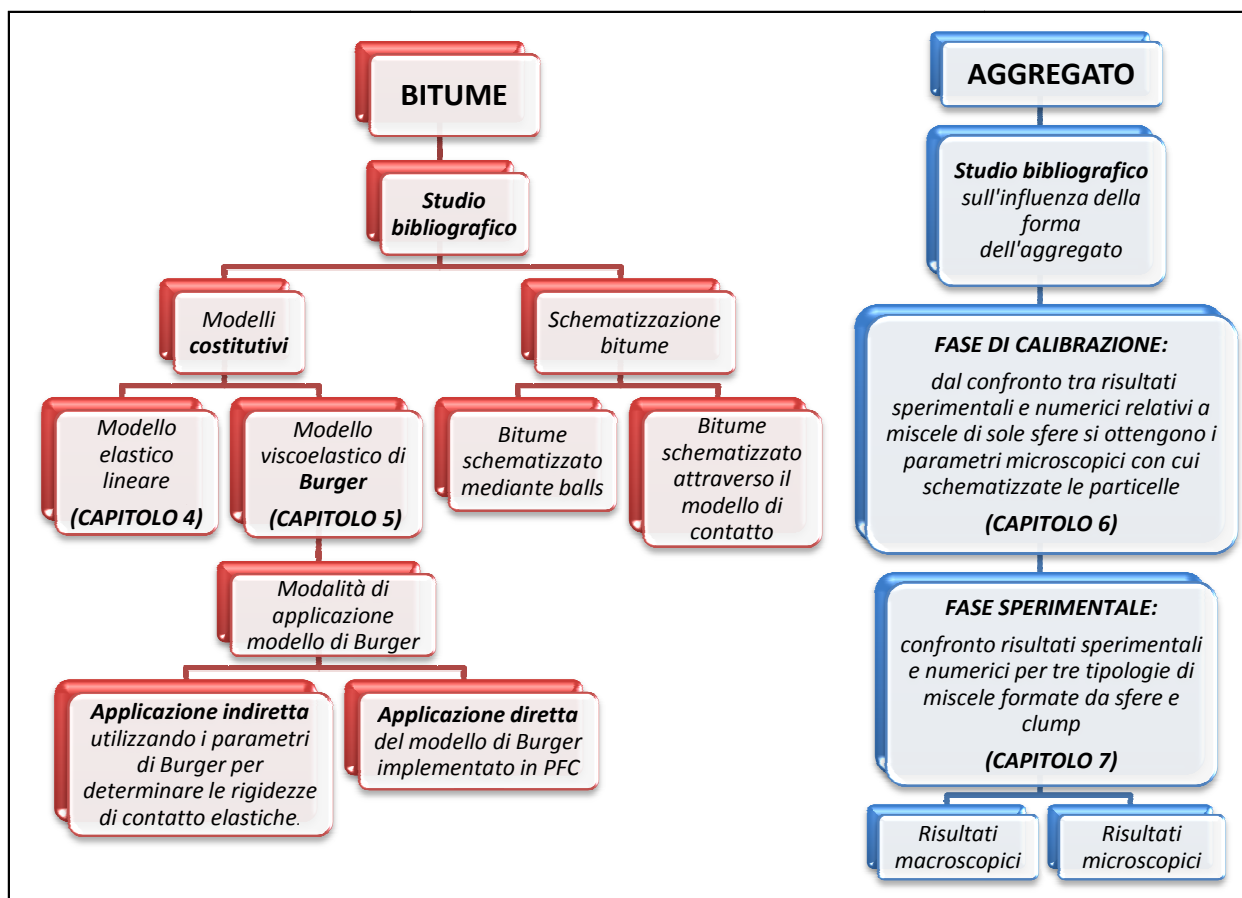


FIGURA 3.2: SCHEMA LOGICO DELLO STUDIO CONDOTTO.

### 3.2 LA MODELLAZIONE DEL BITUME

Partendo dall’analisi del comportamento reologico del conglomerato bituminoso nei paragrafi successivi si riportano i principi fondamentali relativi alla reologia del bitume e si descrivono i modelli comunemente utilizzati per schematizzare il comportamento di tale legante.

#### 3.2.1 Principi reologici dei conglomerati bituminosi

Com’è stato detto in precedenza il conglomerato bituminoso è un materiale multifase composto, in particolare, da:

- *una matrice solida*: miscela di aggregati lapidei composta da una frazione grossolana, descritta da una curva granulometrica che indica le percentuali in massa delle diverse pezzature, e da una frazione fine, il cosiddetto filler;
- *legante*: bitume, che può essere tradizionale o modificato con polimeri ed eventualmente rinforzato con fibre o additivi di vario genere;

- *vuoti d'aria*: inevitabilmente presenti nella miscela in funzione della qualità della compattazione e variabili a seconda del tipo di conglomerato.

Sebbene concettualmente simili al conglomerato cementizio, o calcestruzzo, le miscele bituminose hanno un comportamento molto differente da esso.

Infatti, mentre cemento e calcestruzzo possono essere studiati, seppur con una certa approssimazione, con i ben noti modelli dell'elasticità lineare o, al più, con modelli elasto-plastici, il bitume ed il conglomerato bituminoso di conseguenza, sono caratterizzati da proprietà meccaniche non completamente descritte da un modello elastico-lineare.

Il comportamento meccanico del conglomerato bituminoso è infatti definito *visco-elasto-plastico*, cioè composto da:

- una componente elastica, responsabile delle deformazioni reversibili ed istantanee;
- una componente plastica, responsabile delle deformazioni irreversibili istantanee;
- una componente viscoelastica, responsabile delle deformazioni reversibili ma differite nel tempo rispetto alla sollecitazione che le genera;
- una componente viscoplastica, responsabile delle deformazioni permanenti non istantanee.
- una componente viscosa pura, alla base dei fenomeni di creep e di rilassamento, cioè di deformazioni a carico costante o, dualmente, di cadute di tensione a deformazione costante, influenti, però, solo per sollecitazioni molto prolungate.

La presenza delle componenti viscose rende il tradizionale diagramma  $\sigma/\epsilon$  inadeguato allo studio della risposta del materiale. Poiché la variabile tempo assume, per i conglomerati bituminosi, una valenza fondamentale, l'analisi è effettuata in un piano  $\epsilon/t$  associato al relativo piano  $\sigma/t$ .

Le cinque componenti del comportamento complessivo sono ben visibili nel diagramma di figura 3.3, nel quale è schematicamente rappresentata la risposta di un

conglomerato bituminoso ad un carico di trazione, di intensità costante, applicato istantaneamente ed istantaneamente rimosso dopo un tempo  $\tau$ .

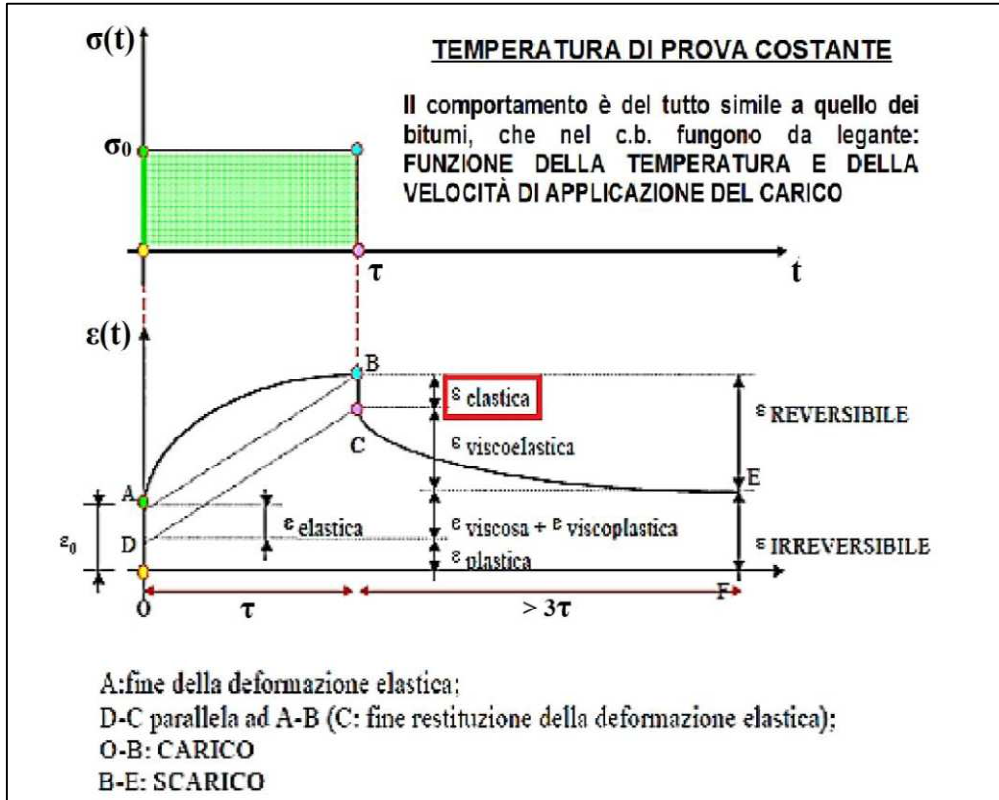


FIGURA 3.3: COMPORTAMENTO VISCO-ELASTO-PLASTICO DEI CONGLOMERATI BITUMINOSI.

Le principali conseguenze delle componenti viscosi sono:

- un ritardo di fase tra la deformazione e la tensione che la genera;
- una forte dipendenza della rigidità del materiale dalla temperatura e dalla velocità di carico.

Delle cinque componenti reologiche sopra descritte, quella che maggiormente caratterizza il comportamento del conglomerato bituminoso è la viscoelasticità.

### **3.2.2 Principi reologici del bitume**

I bitumi, specialmente quelli modificati, sono assimilabili in termini di proprietà reologiche, a polimeri di basso peso molecolare: hanno un comportamento di tipo

viscoelastico (con carattere prevalentemente solido) a temperatura ambiente e viscoso (cioè a carattere prevalentemente liquido) alle alte temperature.

Si può fornire la descrizione del comportamento dei leganti bituminosi secondo la rappresentazione di F. Olard per cui, a seconda dell'ampiezza della deformazione e della temperatura di prova per una data frequenza, si possono verificare diversi domini reologici per uno stesso materiale. La rappresentazione, seppur di carattere qualitativo, è utile per individuare i diversi comportamenti del bitume in riferimento alle condizioni di impiego in cui esso si trova (figura 3.4).

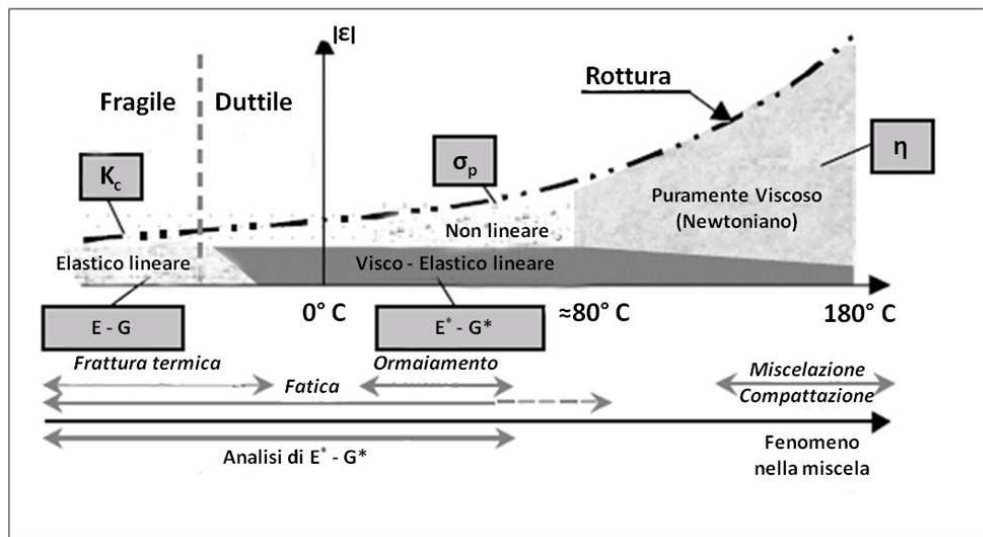


FIGURA 3.4: COMPORTAMENTI TIPICI OSSERVATI SUI BITUMI AL VARIARE DELLA TEMPERATURA E DELLE DEFORMAZIONI SPECIFICHE.

### 3.2.2.1 Modelli meccanici elementari

L'analisi della risposta meccanica, che nei corpi ideali o reali consegue all'applicazione di una qualsiasi forza, identifica l'esistenza di due sistemi meccanici fondamentali, il *solido elastico* ed il *fluido viscoso*.

Il solido elastico rappresenta una condizione in cui, nel corpo soggetto a carico, non è identificabile uno scorrimento indefinito, ma al contrario è chiara ed univoca la configurazione deformativa associata a quella precisa condizione di carico.

Il fluido viscoso, invece, identifica un materiale che, caricato lentamente o velocemente, scorre e non ammette uno stato deformato definito. Tale materiale

risulta, quindi, soggetto ad un moto deformativo per descrivere il quale non è possibile prescindere dall'identificazione del ruolo del tempo.

Benché fortemente rappresentative, tali concezioni sono tuttavia raramente riscontrabili in fenomeni reali e pertanto riconducibili, nella loro essenzialità, esclusivamente a comportamenti ideali. In tutte le altre condizioni, la definizione di comportamenti ibridi e modi di deformazione non univocamente determinati deve essere tenuta in conto nella modellazione e nella comprensione della meccanica dei materiali.

### Il solido lineare elastico

A livello microscopico la deformazione elastica è una distorsione coordinata e reversibile dei vari atomi che costituiscono il materiale. Il comportamento del solido lineare elastico segue la legge generalizzata di Hooke, secondo cui la tensione applicata è direttamente proporzionale alla deformazione secondo una costante elastica:

$$\sigma_{ij} = K_{ijhk} \cdot \varepsilon_{hk} \quad (3.1)$$

dove:

$\sigma_{ij}$  = tensore degli sforzi;

$\varepsilon_{hk}$  = il tensore delle deformazioni;

$K_{ijhk}$  = matrice delle rigidezze.

In particolare, la caratterizzazione del materiale può essere effettuata per mezzo di due parametri: il modulo di elasticità o di Young (E) ed il coefficiente di Poisson ( $\nu$ ).

Nel caso di materiali omogenei ed isotropi, proprietà alla base della teoria dell'elasticità, la legge di Hooke nelle tre direzioni cardinali x, y, z assume la seguente formulazione:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.3)$$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.6)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (3.7)$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale, che può essere espresso in funzione delle due costanti indipendenti nel modo seguente:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.8)$$

Questo tipo di comportamento è associato ad un materiale ‘solido’ poiché non sussiste scorrimento: una sollecitazione imposta provoca una deformazione la cui integrale entità si sviluppa in modo istantaneo e pertanto indipendente dal tempo.

Inoltre, quando il carico viene rimosso, il corpo elastico recupera in modo istantaneo la sua originaria configurazione indeformata.

L’energia di deformazione, prodotta dal lavoro delle sollecitazioni agenti, deve essere considerata come totalmente immagazzinata nel corpo, mentre alcun meccanismo di dissipazione può avvenire. Al momento della rimozione del carico l’energia viene pertanto integralmente restituita, permettendo la completa restaurazione della struttura interna originaria.

Energia di deformazione e lavoro speso per deformare l’unità di volume dipendono quindi in questo caso solo dagli stati iniziale e finale e definiscono l’esistenza di un differenziale esatto e di un corrispondente potenziale elastico diretto  $\phi$  tale che:

$$\sigma_x = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_x} \quad (3.9)$$

dove:

$\sigma_x$  = sforzo in direzione x;

$\varepsilon_x$  = deformazione in direzione x;

$\phi$  = potenziale elastico.

Un simile processo non dissipativo è difficilmente ammissibile per un materiale reale. Tuttavia nella pratica delle applicazioni ingegneristiche, specialmente quando la configurazione deformata evolve nel dominio dei piccoli spostamenti, diversi materiali possono essere trattati come solidi elastici. In questo caso si associa all'elasticità anche l'ipotesi di linearità ed il legame sforzi-deformazioni nel caso uniassiale è rappresentato da una retta nel piano  $\sigma$ - $\varepsilon$  (oppure  $\tau$ - $\gamma$  in caso di azioni taglianti) il cui coefficiente angolare è la costante elastica  $E$  (figura 3.5).

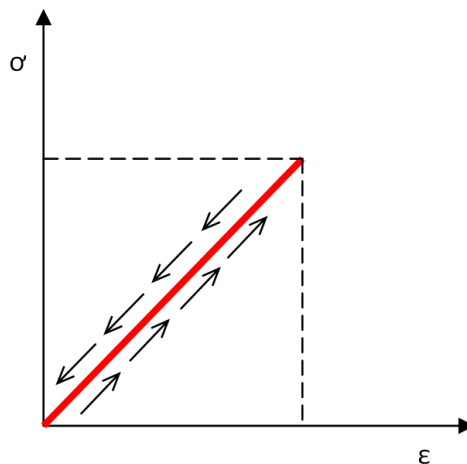


FIGURA 3.5: RAPPRESENTAZIONE DEL PIANO  $\sigma$ - $\varepsilon$  DEL LEGAME COSTITUTIVO LINEARE ELASTICO.

In figura 3.5 è rappresentato il percorso delle deformazioni durante un ciclo di carico e scarico: le deformazioni che si manifestano nel corpo elastico non prevedono percorsi d'isteresi e vengono interamente recuperate al momento della rimozione delle forze applicate.

Per schematizzare il comportamento del solido elastico lineare dal punto di vista macroscopico si fa riferimento ad un modello meccanico di comportamento ideale: la molla (figura 3.6).

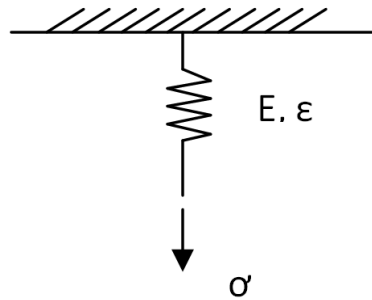


FIGURA 3.6. SOLIDO ELASTICO LINEARE, MODELLO MECCANICO EQUIVALENTE.

In figura 3.6  $\sigma$  è la tensione applicata,  $\epsilon$  è la deformazione ed  $E$  è la costante elastica della molla.

Il sistema rappresentato in figura 3.6 è di interesse primario nella trattazione dei materiali viscoelastici poiché essi stessi tendono ad assumere un comportamento essenzialmente elastico se tensioni e deformazioni soddisfano condizioni limite.

Questo è anche il caso dei leganti bituminosi, per i quali una risposta tendenzialmente elastica può essere osservata quando concorre simultaneità di forze impulsive e basse temperature.

### Il fluido viscoso

Nel fluido perfettamente viscoso lo stato tensionale è direttamente proporzionale alla velocità di deformazione secondo un coefficiente detto di viscosità dinamica, che rappresenta la resistenza opposta dal materiale al gradiente di deformazione. Tale coefficiente dipende dalla struttura fisico-chimica del materiale, dalla temperatura, dalla pressione, dal gradiente di velocità, dal tempo e dalla tensione elettrica.

Nel caso del fluido viscoso, il fattore principale non è la sollecitazione, che contribuisce alla deformazione determinandone la velocità di evoluzione, ma il tempo, che regola l'entità stessa delle deformazioni e ne definisce lo stato finale.

In queste condizioni, sollecitazioni di qualsiasi entità possono portare a stati deformativi univocamente determinabili solo se note le condizioni di dipendenza dal tempo.

Sollecitazioni anche di piccolissima entità possono dar luogo a stati deformativi rilevanti in virtù del tempo di applicazione. Al contrario sollecitazioni di grande entità, se applicate in modo istantaneo, possono non produrre alcun effetto.

Le deformazioni che avvengono nel corpo viscoso (a  $t \neq 0$ ) sono deformazioni conseguenti a stati di scorrimento interno di natura dissipativa e perciò non reversibili.

L'energia di deformazione derivante dal lavoro speso dalle forze per deformare il corpo deve essere considerata come un'energia dissipata, non più disponibile al termine dell'applicazione del carico.

Come conseguenza di tale assunzione si assume che la configurazione deformata, in cui il fluido viscoso perviene in seguito al carico, deve considerarsi come una configurazione permanente, mentre la configurazione iniziale, che il corpo presentava prima dell'applicazione della forza, deve considerarsi non recuperabile.

La figura 3.7 illustra il modello meccanico equivalente del fluido viscoso dove  $\eta$  è il coefficiente di viscosità del dissipatore

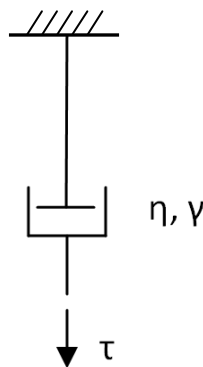


FIGURA 3.7: LIQUIDO VISCOSO, MODELLO MECCANICO EQUIVALENTE.

Ipotizzando la situazione in cui lo sforzo applicato  $\tau$  non varia nel tempo ed  $\eta$  è costante (fluido Newtoniano), il moto deformativo del materiale è allora definito da una velocità di scorrimento anch'essa costante e la configurazione deformata al tempo  $t$  è determinata dalla relazione:

$$\int \tau \cdot dt = \eta \cdot \int \frac{d\gamma}{dt} \cdot dt \Rightarrow \gamma = \frac{\tau \cdot t}{\eta} \quad (3.10)$$

dove:

$\tau$  = sforzo tangenziale applicato;

$\gamma$  = deformazione angolare;

$\eta$  = coefficiente di viscosità.

Nell'equazione sopra riportata, il rapporto  $\tau/\eta$  rappresenta la velocità di deformazione (tasso di scorrimento), mentre il rapporto  $\eta /t$  è una funzione del tempo che descrive la rigidità del materiale, ovvero il rapporto fra tensione e deformazione.

### 3.2.2.2 Modelli viscoelastici lineari

Sia per i materiali elastici ideali (solido di Hooke) che per i fluidi viscosi ideali (fluido di Newton) valgono relazioni lineari fra lo sforzo e la deformazione o tra lo sforzo e la velocità di deformazione: i coefficienti di proporzionalità (moduli e viscosità) sono, cioè, indipendenti dalle condizioni di sollecitazione. Quando questo concetto vale anche per i materiali viscoelastici, cioè per quei materiali che manifestano contemporaneamente la natura di solidi elastici e di liquidi viscosi, si può parlare di viscoelasticità lineare [58].

In termini generali quindi l'equazione differenziale che descrive il comportamento viscoelastico lineare può essere scritta come segue:

$$\left(1 + \alpha_1 \cdot \frac{d}{dt} + \alpha_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} + \dots + \alpha_n \cdot \frac{d^n}{dt^n}\right) \cdot \sigma = \left(\beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{d}{dt} + \beta_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} + \dots + \beta_m \cdot \frac{d^m}{dt^m}\right) \cdot \varepsilon$$

(3.11)

dove  $n=m$ , oppure  $n=m-1$ .

Esistono casi particolari della (3.11) di grande importanza [180]:

- se  $\beta_0$  è l'unico parametro diverso da zero la (3.11) si riduce a  $\sigma = \beta_0 \cdot \varepsilon$  che coincide con l'equazione di Hooke e pertanto in questo caso  $\beta_0$  corrisponde al modulo di elasticità (solido elastico);

- se l'unico parametro diverso da zero è  $\beta_1$ , si ha  $\sigma = \beta_1 \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \beta_1 \cdot \dot{\epsilon}$  che rappresenta il flusso viscoso newtoniano e pertanto  $\beta_1$  corrisponde al coefficiente di viscosità (fulido viscoso);
- se nella (3.11) si assumono  $\alpha_1 (= \tau)$  e  $\beta_1 (= \eta)$  come gli unici coefficienti diversi da zero si ottiene  $\sigma + \tau \cdot \dot{\sigma} = \eta \cdot \dot{\gamma}$  (modello di Maxwell);
- se poi sia  $\beta_0 (= G)$  sia  $\beta_1 (= \eta)$  sono diversi da zero, mentre tutte le altre costanti sono uguali a zero, la (3.11) diventa  $\sigma = K \cdot \epsilon + C \cdot \dot{\epsilon}$  (modello di Kelvin).

Come per il solido di Hooke ed il fluido di Newton, anche il comportamento meccanico di un corpo viscoelastico può essere rappresentato mediante modelli composti da elementi a comportamento meccanico semplice, quali molle e smorzatori.

I modelli più noti sono quelli di Maxwell e quello di Kelvin-Voigt, che descrivono i due fenomeni dell'elasticità ritardata e dello scorrimento viscoso.

In generale questi due aspetti sono contemporaneamente presenti nei bitumi, per cui il comportamento completo viscoelastico si può ottenere per sovrapposizione degli effetti.

#### Modello viscoelastico lineare di Maxwell

Il corpo di Maxwell (fluido viscoelastico) è schematizzato mediante una molla e un dissipatore collegati in serie; ciò equivale a dire che la tensione è la stessa nei due elementi e che lo spostamento totale del modello (deformazione del corpo) risulta dalla somma dei relativi spostamenti (figura 3.8).

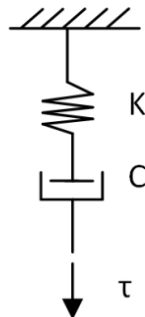


FIGURA 3.8 – MODELLO DI MAXWELL.

In questo modello l'energia spesa per ottenere la deformazione viene in parte restituita (dalla molla) ed in parte dissipata (dallo smorzatore).

La velocità di deformazione del sistema è data dalla somma delle velocità di deformazione della molla e del dissipatore:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Maxwell} = \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Molla} + \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Dissipatore} \quad (3.12)$$

Dalle leggi di Hooke e Newton si ottengono rispettivamente le seguenti relazioni:

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{Molla} = \frac{1}{K} \frac{d\tau}{dt} \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{Dissipatore} = \frac{\tau}{c} \quad (3.14)$$

da cui si ricava l'equazione differenziale che regge il problema:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{Maxwell} = \frac{1}{K} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{c} \quad (3.15)$$

Applicando un carico, per effetto della molla si ha una deformazione elastica istantanea seguita da una deformazione plastica proporzionale al tempo di applicazione del carico; al cessare della sollecitazione si ha solo il ritorno elastico della molla.

È possibile calcolare la deformazione del corpo di Maxwell mediante la seguente equazione:

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{K} + \frac{1}{c} \cdot t \right\} \cdot \tau_0 \quad (3.16)$$

dove:

$\varepsilon$  = deformazione;

$\tau_0$  = tensione costante applicata;

K = costante elastica della molla;

C = coefficiente di smorzamento viscoso dello smorzatore.

Modello viscoelastico lineare di Kelvin-Voigt

Nel caso del corpo di Kelvin-Voigt (solido viscoelastico), molla e dissipatore sono collegati in parallelo; ciò vuol dire che lo spostamento dei due elementi è uguale mentre lo stato tensionale del corpo deriva dalla somma delle tensioni applicate a molla e dissipatore (figura 3.9).

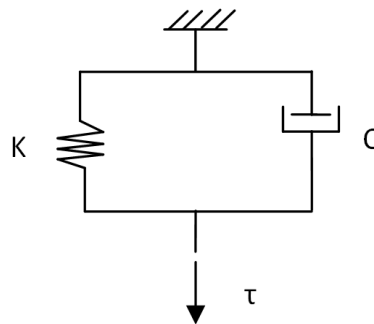


FIGURA 3.9 – MODELLO DI KELVIN-VOIGT.

In questo caso la deformazione è completamente restituita, mentre l'energia spesa per deformare il corpo, in parte è restituita ed in parte è dissipata.

Le equazioni che reggono il problema sono:

$$\varepsilon_{Kelvin-Voigt} = \varepsilon_{Molla} = \varepsilon_{Dissipatore} \quad (3.17)$$

$$\tau_{Kelvin-Voigt} = \tau_{Dissipatore} + \tau_{Molla} = K \cdot \varepsilon + C \cdot \dot{\varepsilon} \quad (3.18)$$

Derivando la (3.17) rispetto il tempo si ricava la soluzione del problema:

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{K} \cdot \left[ 1 - e^{\left(-\frac{t}{\lambda}\right)} \right] \right\} \cdot \tau_0 \quad (3.19)$$

dove:



$\varepsilon$  = deformazione;

$\tau_0$  = tensione costante applicata;

$K$  = costante elastica della molla;

$C$  = coefficiente di smorzamento viscoso dello smorzatore;

$\lambda = \frac{C}{K}$  tempo di rilassamento.

In un tempo sufficientemente lungo, la deformazione si annulla; il modello di Kelvin-Voigt pertanto non dà luogo a deformazioni permanenti e rappresenta un corpo a elasticità ritardata.

### Il modello di Burger

Come evidenziato in precedenza, i modelli di Maxwell e di Kelvin-Voigt si rivelano inadeguati a descrivere il comportamento viscoelastico reale dei materiali, se non in particolari condizioni al contorno.

Nel caso specifico dei leganti bituminosi ciò si può ritenere realizzato per tempi di carico molto brevi e/o basse temperature (solido viscoelastico), oppure per tempi di carico molto lunghi e/o alte temperature (fluido viscoelastico).

Per descrivere il generico comportamento viscoelastico dei leganti bituminosi è opportuno ricorrere quindi a modelli più complessi. Il modello più semplice che viene tradizionalmente considerato è quello di Burger (figura 3.10).

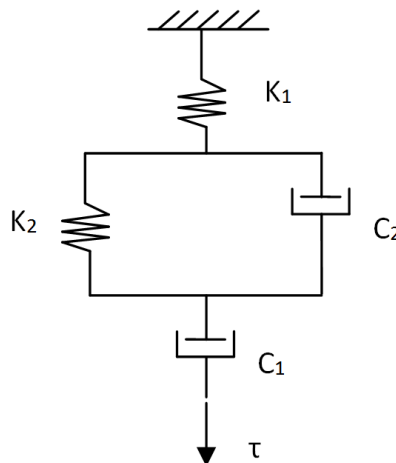


FIGURA 3.10: MODELLO MECCANICO EQUIVALENTE DEL LIQUIDO VISCOELASTICO DI BURGER.

Tale modello coniuga al suo interno, idealmente collegati in serie nella rappresentazione proposta, il corpo di Maxwell e quello di Kelvin-Voigt riproponendone le caratteristiche essenziali. La molla collegata in serie suggerisce la presenza di una componente elastica istantanea. Allo stesso modo il dissipatore collegato in serie impone il concetto di fluido, rappresentando un sistema che tende indefinitamente a scorrere in presenza di carico e che accumula al suo interno una deformazione non recuperabile.

Il gruppo centrale composto da molla e dissipatore in parallelo costituisce invece un elemento con le caratteristiche di solido che si deforma in modo continuo fino a raggiungere un massimo e che immagazzina interamente l'energia, dando origine alla componente elastica ritardata del modello.

La risposta deformativa del modello è data dall'equazione:

$$\varepsilon(t) = \left\{ \frac{1}{K_1} + \frac{t}{c_1} + \frac{1}{K_2} \cdot \left[ 1 - e^{\left(-\frac{t}{\lambda_2}\right)} \right] \right\} \cdot \tau_0 \quad (3.20)$$

dove:

$\varepsilon$  = deformazione;

$\tau_0$  = tensione costante applicata;

$K_1$  = costante elastica della molla relativa al modello di Maxwell;

$K_2$  = costante elastica della molla relativa al modello di Kelvin – Voigt;

$C_1$  = coefficiente di smorzamento viscoso dello smorzatore relativo al modello di Maxwell;

$C_2$  = coefficiente di smorzamento viscoso dello smorzatore relativo al modello di Kelvin-Voigt;

$\lambda_2 = \frac{C_2}{K_2}$  tempo di rilassamento relativo al modello di Kelvin – Voigt.

### **3.2.3 Studio relativo alla modellazione DEM del bitume**

Nel presente lavoro di tesi si è svolta un'approfondita ricerca bibliografica allo scopo di individuare quale, tra i modelli elencati nei paragrafi precedenti, sia quello più idoneo alla schematizzazione del bitume nel DEM particellare.

Nel quarto e nel quinto capitolo sono descritti ed analizzati i principali studi che hanno utilizzato, rispettivamente, il modello elastico lineare e quello viscoelastico di Burger per la descrizione del comportamento del legante all'interno di una miscela di conglomerato bituminoso. Relativamente al modello di Burger si sono individuati due approcci applicativi che risalgono a due diverse correnti di autori: Collop et al. [44] ed Abbas et al. [5]. Il primo approccio prevede l'applicazione indiretta del modello di Burger, i cui parametri vengono utilizzati per calcolare rigidzze di contatto normali e tangenziali di un modello elastico-lineare equivalente; il secondo, invece, applica direttamente il modello viscoelastico implementato nel software agli elementi discreti PFC<sup>3D</sup>. Quindi, per quanto riguarda il bitume, l'obiettivo che questo studio si pone è quello di identificare la metodologia più appropriata per schematizzarne il comportamento viscoelastico mediante il metodo degli elementi discreti particellari, tenendo presente la necessità di trovare soluzione che possa rappresentare un compromesso soddisfacente tra la complessità del problema e l'esigenza di semplificazione richiesta dagli elevati oneri computazionali del software.

### **3.3 STUDIO SPERIMENTALE RELATIVO ALL'INFLUENZA DELLA FORMA DELL'AGGREGATO SULLE PRESTAZIONI DI UNA MISCELA IN CONGLOMERATO BITUMINOSO**

La seconda parte dello studio condotto nella presente tesi ha come oggetto la valutazione dell'influenza della forma e delle dimensioni degli inerti che costituiscono lo scheletro litico del conglomerato bituminoso sulle caratteristiche microscopiche e macroscopiche della miscela. La struttura e le caratteristiche geometriche degli aggregati, infatti, influenzano notevolmente le prestazioni del conglomerato bituminoso. In particolare, l'ingranamento tra gli inerti ed il conseguente addensamento della miscela, incidono sensibilmente sulla resistenza meccanica delle

pavimentazioni e sulla relativa capacità di trasferire adeguatamente i carichi agli strati sottostanti.

### **3.3.1 Brevi cenni sul ruolo della forma dell'aggregato in letteratura**

L'influenza della forma e dell'angolarità dell'aggregato sulle prestazioni della miscela di conglomerato bituminoso sono state analizzate da numerosi autori in questi ultimi anni. Tra questi Aho et al., in uno studio del 2001, pongono la forma dell'aggregato al secondo posto, dopo la distribuzione granulometrica, nella scala dei fattori che influenzano in misura maggiore le prestazioni di una pavimentazione stradale [10]. L'anno successivo, Cheung and Dawson affermano il primato della forma dell'aggregato, provando che la spigolosità degli inerti costituenti lo scheletro litico della miscela rappresenta il fattore che incide maggiormente sulla resistenza ultima a taglio e sulle deformazioni permanenti del conglomerato bituminoso [38].

Mahmoud et al., sfruttando un approccio che combina il metodo agli elementi discreti con tecniche di elaborazione delle immagini, analizzano le correlazioni esistenti tra distribuzione granulometrica e forma degli inerti e caratteristiche prestazionali dei conglomerati bituminosi quali rigidità e resistenza a rottura [118]. I risultati dello studio mostrano che il contributo alla resistenza della miscela richiesto all'aggregato dipende in larga misura dalla sua forma e dalla sua spigolosità.

Infine, Shen e Yu sviluppano una procedura articolata in due fasi successive allo scopo di studiare come l'addensamento degli aggregati sia in grado di influenzare la capacità della miscela di sopportare e trasmettere i carichi generati dal traffico stradale [146]. Gli autori arrivano a dimostrare che la dimensione e la forma degli inerti influenza non solo le caratteristiche volumetriche del conglomerato, ma anche quelle di contatto, con conseguenti ripercussioni sulla distribuzione delle tensioni all'interno della miscela.

Gli studi citati rappresentano una minima parte delle memorie reperite in letteratura sull'argomento. La ricerca bibliografica svolta ha confermato il ruolo fondamentale della forma dell'aggregato sulle caratteristiche prestazionali del conglomerato bituminoso e ha posto le basi per la fase sperimentale descritta nei capitoli 6 e 7. Qui l'influenza della forma dell'aggregato sulle prestazioni di una miscela

in conglomerato bituminoso viene analizzata attraverso il confronto tra risultati sperimentali ottenuti in laboratorio e relative modellazioni numeriche.

Come anticipato nel primo capitolo i tradizionali metodi di modellazione agli elementi finiti non consentono di identificare in maniera precisa e sistematica la totalità dei contatti aggregato-aggregato e, di conseguenza, di valutare il grado di ingranamento caratteristico della miscela. Per superare questo problema ed analizzare le interazioni esistenti all'interno dello scheletro litico del conglomerato bituminoso al variare della forma dell'aggregato, si è quindi deciso di fare ricorso al Metodo degli Elementi Distinti Particellari.

### **3.3.2 Flow chart della sperimentazione**

L'intera sperimentazione può essere suddivisa in tre fasi successive:

1. *Definizione dei materiali e delle metodologie.*

Vengono fissate la tipologia del materiale e la relativa curva granulometrica. Sulla base dei risultati disponibili in letteratura si definisce la prova di laboratorio che rappresenta il miglior compromesso tra significatività del dato e semplicità di modellazione; i risultati ottenuti dal test dovranno infatti essere utilizzati per effettuare il confronto tra modello numerico e dato sperimentale.

2. *Calibrazione.*

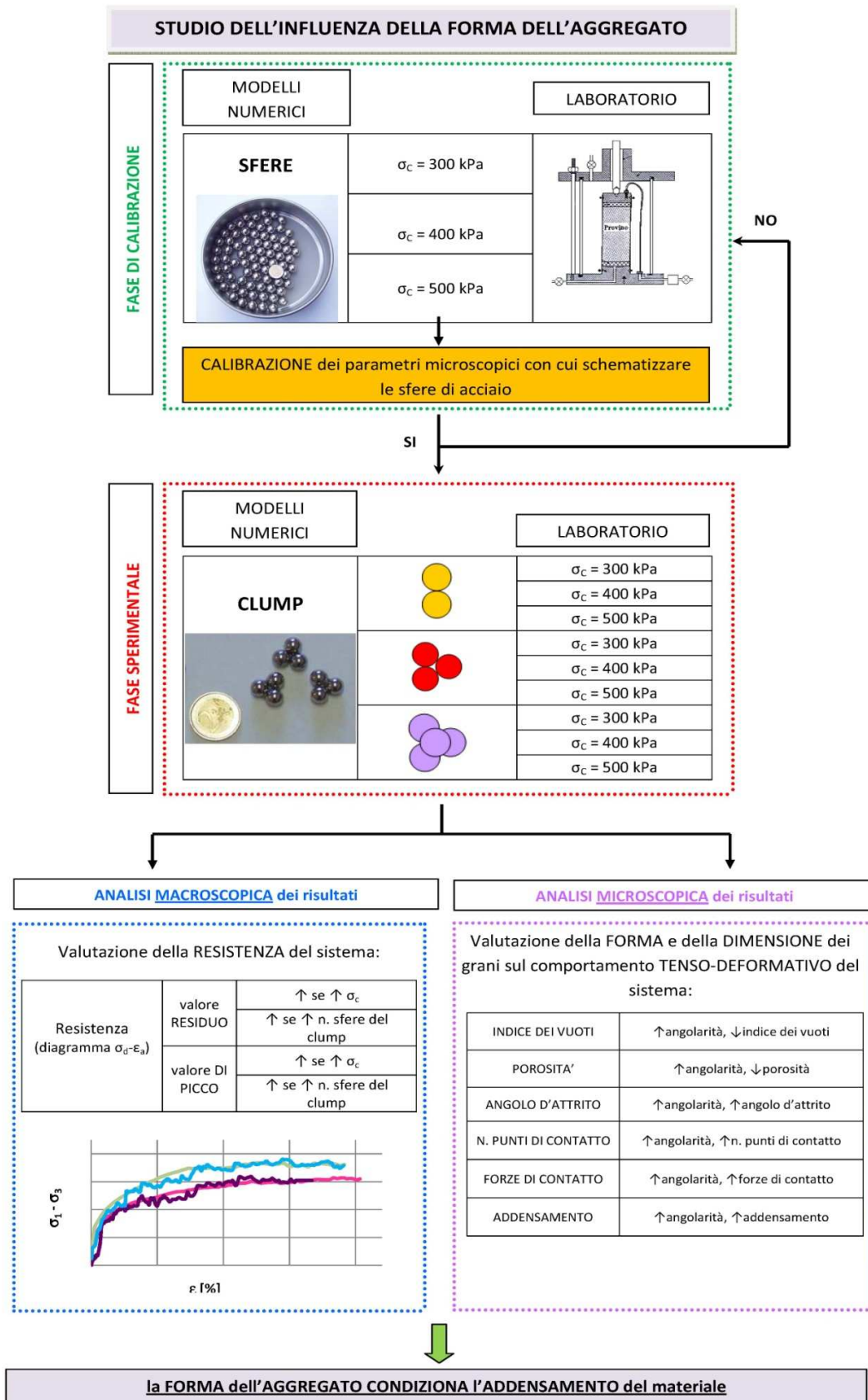
I parametri microscopici con cui vengono schematizzati gli elementi utilizzati nella modellazione numerica devono essere calibrati sulla base di dati sperimentali. Tale calibrazione si ottiene confrontando risultati numerici e sperimentali ricavati da test condotti su provini formati interamente da sfere.

3. *Valutazione del ruolo della forma dell'aggregato.*

L'influenza della forma e delle dimensioni degli inerti sul comportamento tenso-deformativo di una miscela granulare viene valutata mediante il confronto tra risultati numerici e sperimentali ricavati da test condotti su campioni costituiti da sfere ed elementi di forma generica

Per una descrizione completa ed approfondita delle fasi della sperimentazione si rimanda ai capitoli 6 e 7.

Di seguito si riporta il diagramma di flusso complessivo della ricerca (figura 3.11).



## **MODELLI DI CONTATTO PER LA SIMULAZIONE DEM DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO: IL MODELLO ELASTICO LINEARE**

---

### **4.1 INTRODUZIONE**

L'applicazione del metodo degli elementi discreti allo studio del comportamento tenso-deformativo del conglomerato bituminoso implica, come anticipato nei capitoli precedenti, la definizione di un modello di contatto in base al quale vengono regolate le interazioni tra le particelle elementari.

Nonostante sia ben nota la natura viscoelastica dei materiali a matrice bituminosa, la maggior parte degli studi reperibili in letteratura su tale argomento prevede l'applicazione di modelli di rigidità di tipo elastico lineare. Ciò è principalmente dovuto alla difficoltà legata all'individuazione dei parametri microscopici necessari per definire modelli di tipo viscoelastico ed agli oneri computazionali da essi richiesti.

Nel presente capitolo vengono analizzate le principali memorie che utilizzano una schematizzazione elastica dei contatti interni al conglomerato bituminoso, al fine di valutare la capacità di tale modello di descrivere effettivamente il comportamento del materiale.

### **4.2 YOU Z., BUTTLAR W.G. (2004), "DISCRETE ELEMENT MODELING TO PREDICT THE MODULUS OF ASPHALT CONCRETE MIXTURES" [162]**

Gli autori di questa memoria applicano il legame elastico lineare alla modellazione DEM con l'obiettivo di studiare il modulo delle miscele di conglomerato bituminoso, conducendo un confronto con modelli teorici fondati su ipotesi elastiche.

You e Buttlar sviluppano un programma sperimentale basato su test di compressione uniassiale allo scopo di determinare:

- il modulo del mastice (composto dalla parte fine di aggregato e bitume) e degli aggregati da inserire come dato di input nel modello numerico;
- il modulo della miscela di conglomerato da confrontare con quello modellato numericamente.

Le caratteristiche dei materiali utilizzati nello studio sono riassunte in tabella 4.1.

TABELLA 4.1: CARATTERISTICHE GRANULOMETRICHE E VOLUMETRICHE DEI MATERIALI.

Diametro setaccio [mm]	Passante [%]	
	Conglomerato bituminoso	Mastice
12,5	100,0	100,0
9,5	98,7	100,0
4,75	59,4	100,0
2,36	38,4	38,4
1,18	29,7	29,7
0,6	20,9	20,9
0,3	11,2	11,2
0,15	6,7	6,7
0,075	5,5	5,5
<b>Contenuto bitume [%]</b>	5,6	14,4
<b>Contenuto vuoti [%]</b>	4,8	0,0

I test di compressione uniaassiale sulla miscela vengono svolti a:

- tre temperature: -20, 0 e 20°C;
- tre frequenze di carico: 1, 2 e 5 Hz.

Per quanto riguarda i test sui mastici, invece, sono prese in considerazione:

- tre temperature: -20, 0 e 20°C;
- sette frequenze di carico: 0,01, 0,1, 0,5, 1, 2, 5 e 10 Hz.



La microstruttura bidimensionale del provino viene ricostruita a partire da campioni reali mediante scansioni ottiche ad alta risoluzione. Le posizioni degli aggregati costituenti lo scheletro litico della miscela vengono tradotte e convertite in coordinate numeriche da inserire nel modello DEM mediante software di trattamento digitale delle immagini. Si ottengono così provini rettangolari, costituiti da un numero di particelle variabile da 50000 a 120000, da sottoporre a test di compressione uniassiale mediante il programma agli elementi discreti PFC<sup>2D</sup>.

Le caratteristiche del campione utilizzato per il confronto con i dati sperimentali ed i modelli teorici sono le seguenti:

- altezza: 50 mm;
- larghezza: 40 mm;
- n° particelle che rappresentano l'aggregato: 20628;
- n° particelle che rappresentano il mastice: 29372;
- concentrazione di volume di aggregato grossolano:  $c=0,41$ .

In figura 4.1 sono riportati il modello numerico (a) e lo schema delle catene di forza (b) che rappresentano la distribuzione e l'entità dei contatti esistenti tra gli aggregati.

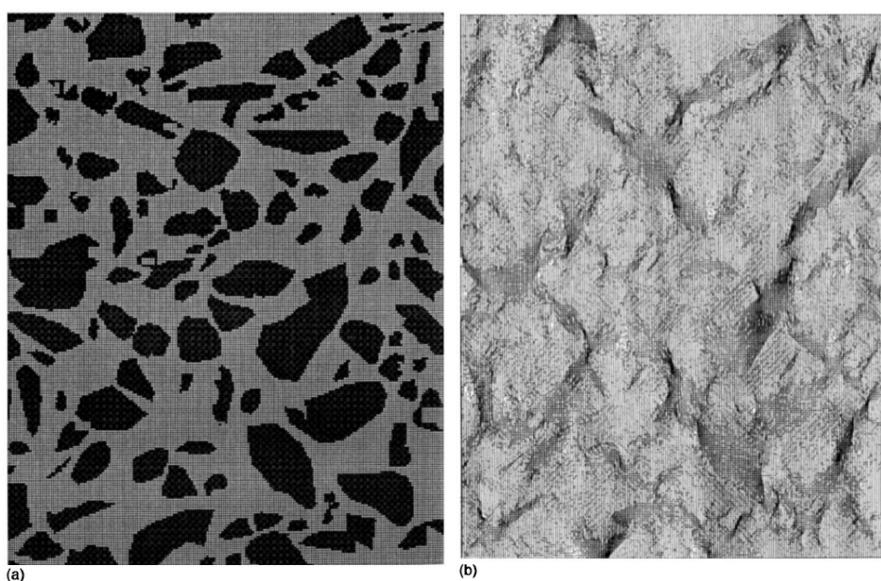


FIGURA 4.1: MODELLO DEM BIDIMENSIONALE PER  $c=0,41$  (A) E RAPPRESENTAZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO ESISTENTI TRA GLI AGGREGATI (B).

Osservando la figura 4.1 appare chiaro che i contatti esistenti tra gli elementi appartenenti allo scheletro litico della miscela sono un numero limitato. Ciò è principalmente dovuto ai due seguenti fattori:

1. passando da un campione tridimensionale ad una scansione bidimensionale numerosi dettagli geometrici relativi alla microstruttura vengono semplificati e buona parte dei contatti esistenti tra gli elementi non vengono decifrati;
2. nel modello numerico è assente la frazione di aggregato fine avente granulometria tipica di una sabbia. Gli aggregati di dimensioni inferiori a 2,36 mm vengono, infatti, associati al legante a formare il mastice bituminoso e la quota parte di contatti che nel provino reale compete loro non viene evidenziata.

A causa di queste problematiche i valori del modulo forniti dal primo modello numerico elaborato, pur rientrando nei limiti indicati dal modello teorico, sottostimano sensibilmente il dato sperimentale.

Allo scopo di indagare il ruolo dell'interconnessione tra gli aggregati sulle caratteristiche di resistenza della miscela, gli autori sviluppano un secondo modello numerico in cui tali aggregati vengono espansi, mediante un offset delle coordinate perimetrali, sino ad ottenere una concentrazione pari a 0,52 (figura 4.2).

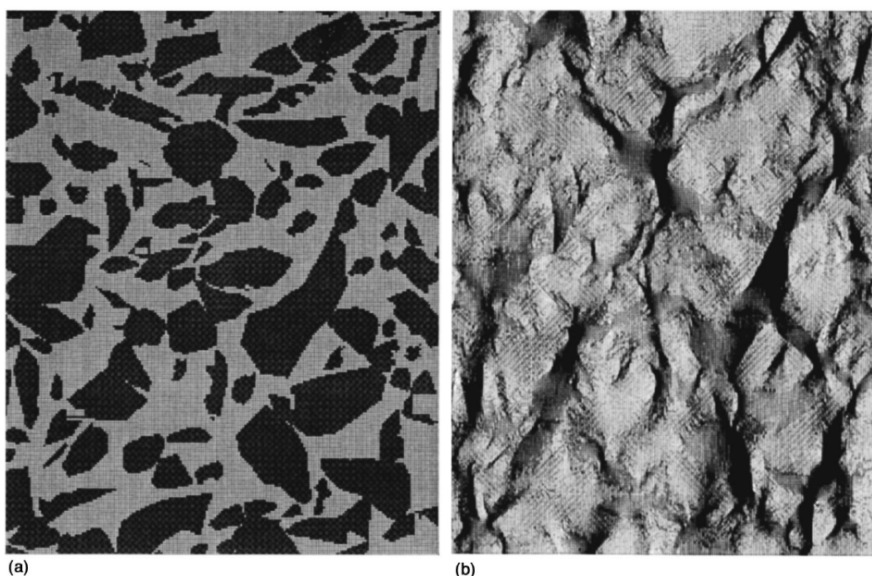


FIGURA 4.2: MODELLO DEM BIDIMENSIONALE PER  $C=0,52$  (A) E RAPPRESENTAZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO ESISTENTI TRA GLI AGGREGATI (B).

Osservando la figura 4.2 si può notare come l'espansione degli elementi abbia portato alla formazione di nuovi punti di contatto tra gli aggregati (a) e ad un intensificarsi delle catene di forza esistenti (b). Ciò è indice di un incremento delle caratteristiche di resistenza della miscela, il cui modulo risulta, infatti, più simile a quello ottenuto in laboratorio.

Come precedentemente accennato i risultati numerici e sperimentali vengono confrontati con quelli forniti dal modello analitico di Hashin e Shtrikman fondato sulla teoria dell'elasticità [86]. Hashin e Shtrikman affermano che, per un materiale composto da n fasi, i limiti inferiore e superiore del modulo di rigidezza sono dati dalle equazioni (4.1) e (4.2), mentre quelli del modulo a taglio possono essere calcolati mediante la (4.3) e la (4.4).

$$K_L^* = K_1 + \frac{c_2}{(1/K_2 - K_1) + (3c_1/2K_1 + 4G_1)} \quad (4.1)$$

$$K_U^* = K_2 + \frac{c_1}{(1/K_1 - K_2) + (3c_2/2K_2 + 4G_2)} \quad (4.2)$$

con

$$K_L^* \leq K^* \leq K_U^* \text{ e } K_2 \geq K_1$$

$$G_L^* = G_1 + \frac{c_2}{(1/G_2 - G_1) + [6(K_1 + 2G_1)c_1/5G_1(3K_1 + 4G_1)]} \quad (4.3)$$

$$G_U^* = G_2 + \frac{c_1}{(1/G_1 - G_2) + [6(K_2 + 2G_2)c_2/5G_2(3K_2 + 4G_2)]} \quad (4.4)$$

con

$$G_L^* \leq G^* \leq G_U^* \text{ e } G_2 \geq G_1$$

dove:

$K_L^*$  = limite inferiore del modulo di rigidezza della miscela;

$G_L^*$  = limite inferiore del modulo a taglio della miscela;

$K_U^*$  = limite superiore del modulo di rigidezza della miscela;

$G_U^*$  = limite superiore del modulo a taglio della miscela;

$K^*$  = modulo di rigidezza della miscela;

$G^*$  = modulo a taglio della miscela;

$K_1$  = modulo di rigidezza della fase 1;

$G_1$  = modulo a taglio della fase 1;

$K_2$  = modulo di rigidezza della fase 2;

$G_2$  = modulo a taglio della fase 2;

$c_1$  = concentrazione di volume della fase 1;

$c_2$  = concentrazione di volume della fase 2.

I valori di K e G sono legati al modulo di elasticità (E) e al coefficiente di Poisson (v) mediante le seguenti espressioni:

$$G = \frac{E}{3(1+\nu)} \quad (4.5)$$

$$E = \frac{E}{1/3G+1/9K} \quad (4.6)$$

Quanto finora esposto vale per un materiale di geometria arbitraria. Nel 1965 Hashin sviluppa un modello specifico detto *Composite Spheres Model* secondo cui un materiale multifase può essere rappresentato mediante particelle sferiche inglobate in una matrice continua rappresentata come un guscio concentrico rispetto alla particella (figura 4.3) [87].

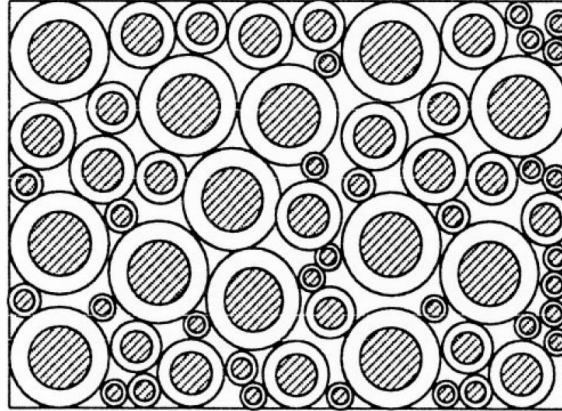


FIGURA 4.3: MODELLO DEM BIDIMENSIONALE PER  $c=0,52$  (A) E RAPPRESENTAZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO ESISTENTI TRA GLI AGGREGATI (B).

Il rapporto tra il diametro della particella e quello della corona circolare che la racchiude è costante per tutti gli elementi. Sulla base di tali ipotesi le equazioni relative ai moduli di rigidezza e a taglio diventano:

$$K^* = K_m + \frac{(K_p - K_m)(4G_m + 3K_m)c}{4G_m + 3K_p + 3(K_m - K_p)c} \quad (4.7)$$

$$G_L^* = \frac{G_L}{1 + c(1 - \eta)y_1^{(\sigma)}} \quad (4.8)$$

$$G_U^* = G_m(1 + c(\eta - 1)y_1^{(\varepsilon)}) \quad (4.9)$$

dove:

$$\eta = \frac{G_p}{G_m}$$

$K_m$  = modulo di rigidezza della matrice;

$G_m$  = modulo a taglio della matrice;

$K_p$  = modulo di rigidezza delle particelle;

$G_p$  = modulo a taglio delle particelle;

$y_1^{(\sigma)}$ ,  $y_1^{(\varepsilon)}$  = funzioni delle costanti elastiche.

$c = (a/b)^3$  concentrazione di volume; dove a e b sono rispettivamente il raggio della particella e della matrice che la racchiude.

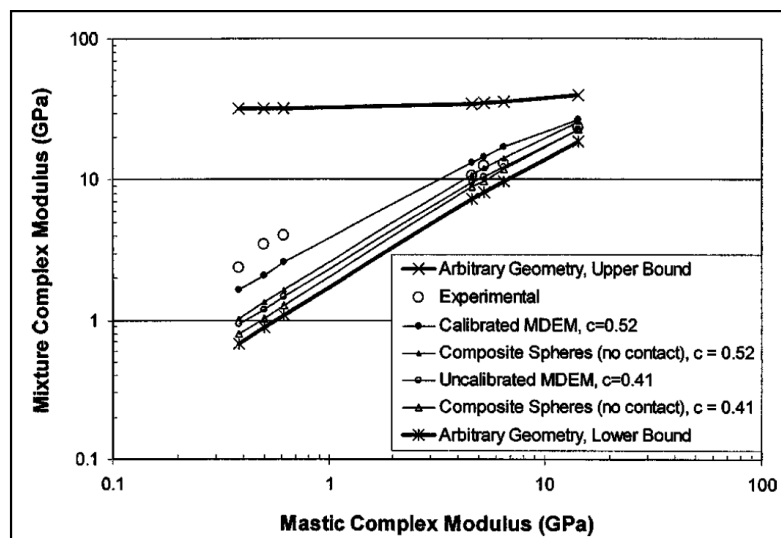


FIGURA 4.4: CONFRONTO TRA RISULTATI NUMERICI, SPERIMENTALI E ANALITICI.

In figura 4.4 i dati sperimentali sono posti a confronto con:

- i limiti indicati dal modello teorico generale di Hashin e Shtrikman;
- i risultati del modello teorico *Composite Spheres* di Hashin per  $c=0,41$  e  $c=0,52$ ;
- i risultati del modello numerico per  $c=0,41$ ;
- i risultati del modello numerico per  $c=0,52$ .

I risultati relativi ad entrambi i modelli numerici DEM rientrano nei valori limite individuati dal modello teorico, ma quello caratterizzato da una concentrazione in volume degli aggregati pari a 0,52 approssima in maniera più attendibile i risultati sperimentali.

Tuttavia tale attendibilità non è piena e presenta ancora margini di miglioramento. Gli autori concludono indicando la modellazione tridimensionale e l'applicazione di modelli viscoelastici come possibili strade da percorrere per ottenere risultati pienamente affidabili.

**4.3 YOU Z., BUTTLAR W.G. (2005), “APPLICATION OF DISCRETE ELEMENT MODELING TECHNIQUES TO PREDICT THE COMPLEX MODULUS OF ASPHALT-AGGREGATE HOLLOW CYLINDERS SUBJECTED TO INTERNAL PRESSURE” [163]**

In questa memoria You e Buttlar affrontano nuovamente il tema dello studio del comportamento del conglomerato bituminoso attraverso il confronto tra risultati di modelli numerici agli elementi discreti e risultati sperimentali.

Analogamente a quanto visto nel paragrafo 4.2 gli autori:

- utilizzano scansioni ottiche e programmi di analisi digitale delle immagini per ricostruire il modello numerico a partire dal campione reale;
- all’interno del modello numerico individuano due fasi distinte: la prima è costituita dagli aggregati che formano lo scheletro litico della miscela, mentre la seconda è rappresentata dal mastice, formato a sua volta dal legante bituminoso e dagli inerti di pezzatura inferiore a 2,36 mm;
- utilizzano un modello di contatto elastico lineare;
- sviluppano una fase sperimentale al fine di determinare il modulo del mastice da utilizzare come dato di input nel modello numerico e quello della miscela da confrontare con i risultati forniti dal modello numerico. Dal momento che il modulo degli aggregati risulta pressoché costante al variare delle condizioni di prova viene assunto pari a 55 GPa.

Ciò che cambia è il test di laboratorio scelto da You e Buttlar per la validazione dell’approccio DEM nella stima del modulo della miscela bituminosa. Infatti, in questo studio gli autori abbandonano il test di compressione uniassiale e fanno ricorso al *Hollow Cylinder Tensile Test* (figura 4.5), dove una sollecitazione di compressione radiale viene applicata alla parete interna di un cilindro cavo, generando così uno stato tensionale di trazione lungo la circonferenza. La deformazione radiale risultante viene misurata mediante appositi trasduttori.

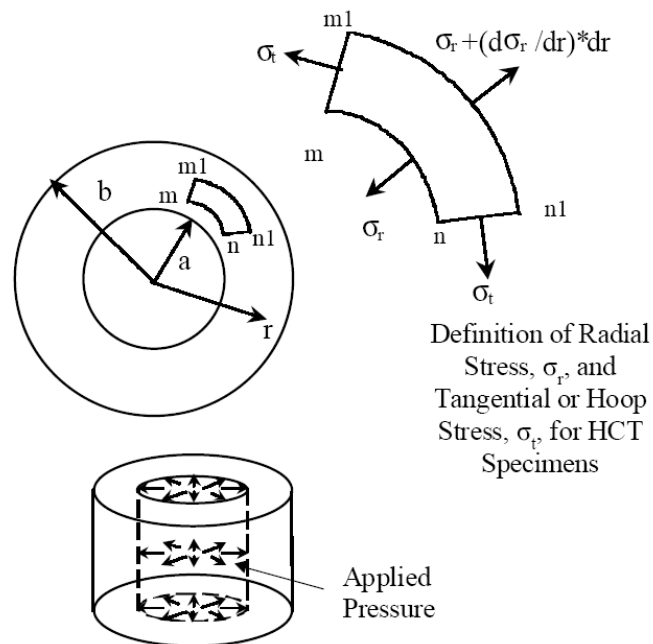


FIGURA 4.5: HOLLOW TENSILE TEST: SCHEMA DEL CAMPIONE DI PROVA E SOLLECITAZIONE APPLICATA [11].

Come precedentemente accennato campioni di mastice (figura 4.6) e conglomerato bituminoso (figura 4.7) vengono sottoposti al HCT per determinare i valori del modulo da utilizzare rispettivamente come dati di input nel modello numerico e come valori di confronto per la validazione della modellazione DEM.

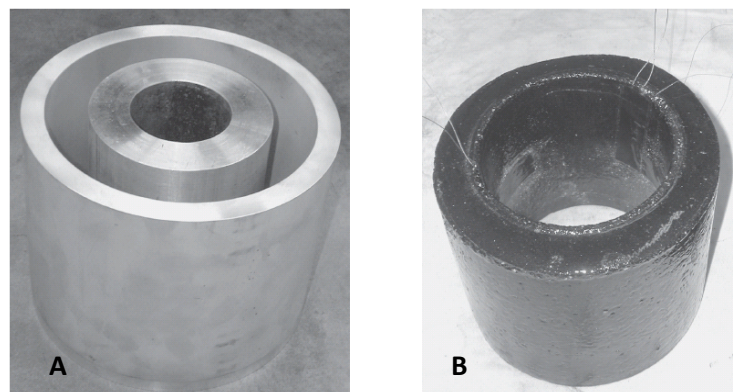


FIGURA 4.6: STAMPO DI ALLUMINIO PER LA REALIZZAZIONE DEI PROVINI (A) E CAMPIONE DI MASTICE (B) DA SOTTOPORRE AL HCT.



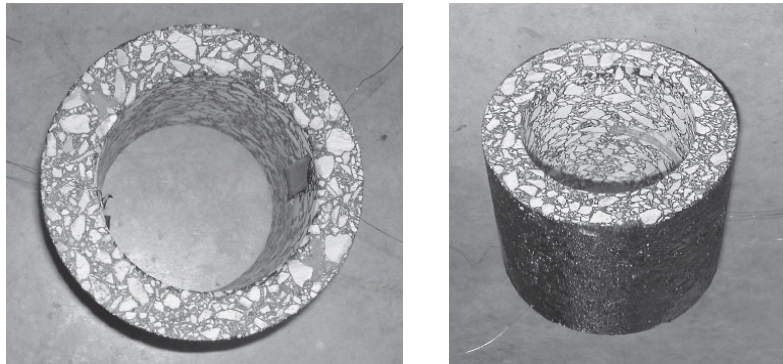


FIGURA 4.7: CAMPIONE DI CONGLOMERATO BITUMINOSO DA SOTTOPORRE AL HCT.

In figura 4.8 e 4.9 sono riportati i risultati relativi alla miscela ed al mastice per una frequenza di prova e una temperatura pari rispettivamente a 1 Hz e  $-10^{\circ}\text{C}$ .

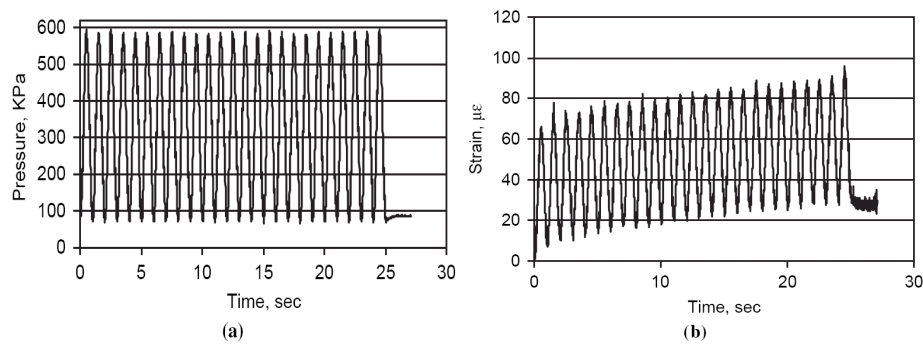


FIGURA 4.8: RISULTATI DEL HCT PER LA MISCELA DI CONGLOMERATO BITUMINOSO: PRESSIONE APPLICATA DURANTE IL TEST (A) E DEFORMAZIONE REGISTRATA (A) IN FUNZIONE DEL TEMPO DI CARICO.

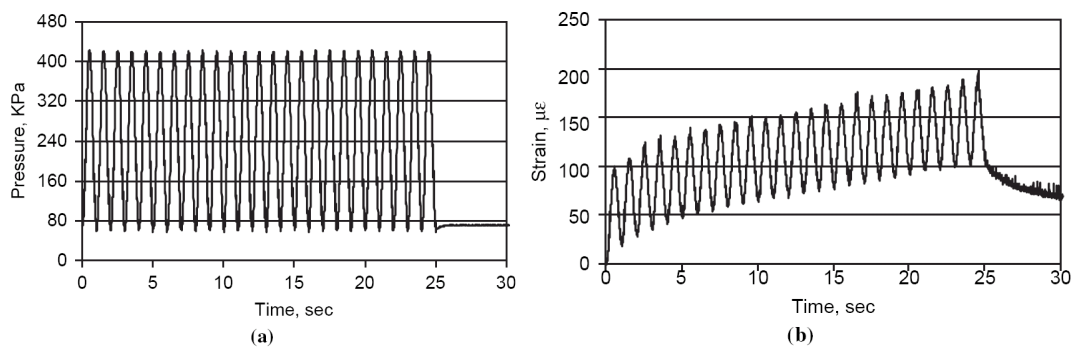


FIGURA 4.9: RISULTATI DEL HCT PER IL MASTICE: PRESSIONE APPLICATA DURANTE IL TEST (A) E DEFORMAZIONE REGISTRATA (A) IN FUNZIONE DEL TEMPO DI CARICO.

Il modello numerico del Hollow Cylinder Test consiste in una sezione bidimensionale del provino reale (figura 4.10) le cui caratteristiche sono riassunte in tabella 4.2.

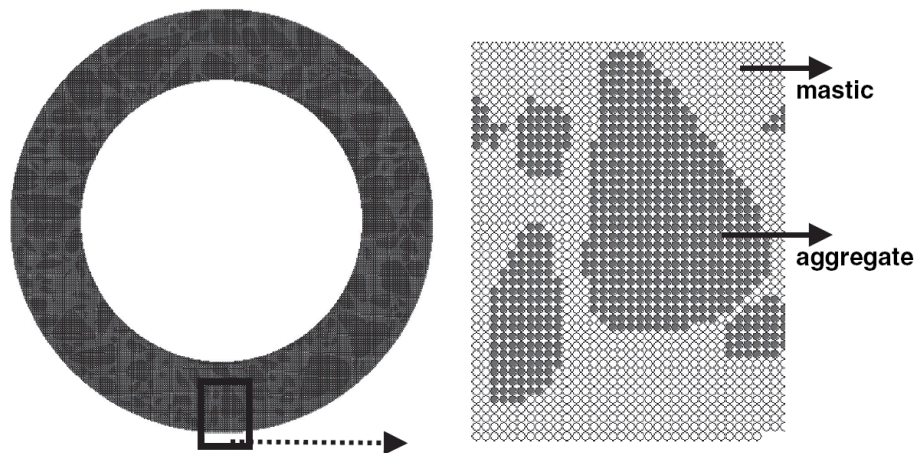


FIGURA 4.10: MODELLO AGLI ELEMENTI DISCRETI DEL HOLLOW CYLINDER TEST.

TABELLA 4.2: CARATTERISTICHE DEL MODELLO DEM.

<b>Spessore [mm]</b>	<b>25</b>
<b>Diametro interno [mm]</b>	<b>100</b>
<b>N° particelle mastice</b>	<b>29511</b>
<b>N° particelle aggregato</b>	<b>31805</b>
<b>Diametro particelle [mm]</b>	<b>0,2</b>

Il software di calcolo utilizzato per la modellazione numerica (PFC<sup>2D</sup>) registra le posizioni di ogni elemento appartenente al modello e, di conseguenza, è in grado di fornire lo spostamento delle particelle che costituiscono la circonferenza interna del cilindro. La deformazione di trazione può essere quindi calcolata mediante la seguente equazione:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} \quad (4.10)$$

dove:

$\Delta r$  = spostamento radiale;

$r$  = raggio.

Nota la deformazione di trazione è possibile ricavare il modulo complesso ( $E^*$ ) mediante la seguente relazione:

$$E^* = \frac{\sigma_t + \mu p}{\varepsilon_t} \quad (4.11)$$

dove:

$\sigma_t$  = tensione di trazione;

$\mu$  = coefficiente di Poisson;

$p$  = pressione interna;

$\varepsilon_t$  = deformazione di trazione.

In figura 4.11 è riportato il confronto tra i valori del modulo ottenuti dai dati sperimentali e quello simulato numericamente per due sezioni bidimensionali aventi rispettivamente una concentrazione pari a 0,55 e 0,50.

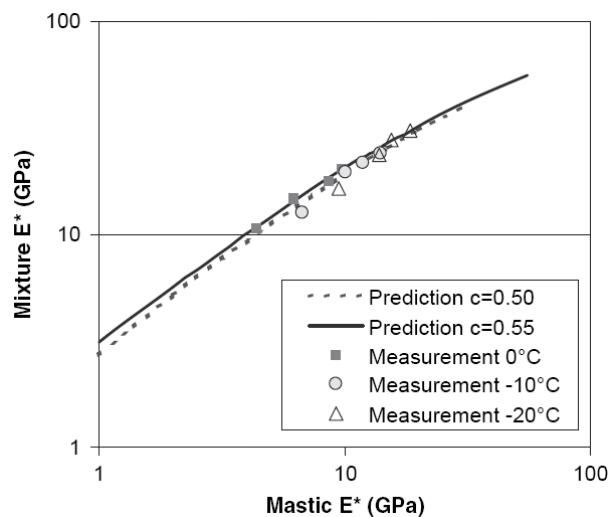


FIGURA 4.11: CONFRONTO RISULTATI NUMERICI E SPERIMENTALI.

Gli autori, in base a quanto riportato in figura 4.11, confermano l'attendibilità della modellazione DEM nel riprodurre l'effettivo comportamento tenso-deformativo del conglomerato bituminoso sottoposto ad HCT. Ulteriori passi in avanti nell'affidabilità dei risultati possono essere compiuti introducendo un modello di

contatto più complesso, in grado di cogliere il comportamento viscoelastico del materiale.

**4.4 ABBAS A., MASAD E., PAPAGIANNAKIS T., SHENOY A. (2005), "MODELLING MASTIC STIFFNESS USING DISCRETE ELEMENT ANALYSIS AND MICROMECHANICAL-BASED MODELS" [3]**

Abbas et al. sfruttano il metodo degli elementi discreti per studiare il comportamento meccanico dei mastici, ovvero di quei materiali costituiti dalla frazione fine di aggregato (di diametro inferiore a 75  $\mu\text{m}$ ) e legante bituminoso.

Tre tipologie di legante (ABD-1, AAM-1 e AMB-1) e quattro varietà di filler (granito-RA, calcare-RD, ghiaia-RF, grovacca-RH) vengono utilizzate per formare 12 differenti combinazioni filler-legante. Il quantitativo di filler da aggiungere al legante viene determinato in modo da ottenere nove diverse percentuali in volume: 0, 6, 11, 17, 21, 25, 27, 29 e 31%. Le caratteristiche geometriche delle diverse tipologie di filler vengono analizzate mediante un microscopio elettronico (figura 4.12) e le proprietà reologiche dei leganti sono determinate mediante prove DSR, condotte a 25°C utilizzando piatti di diametro pari a 8mm. I valori di modulo dinamico a taglio e angolo di fase ottenuti da tali prove sono riassunti in tabella 4.3.

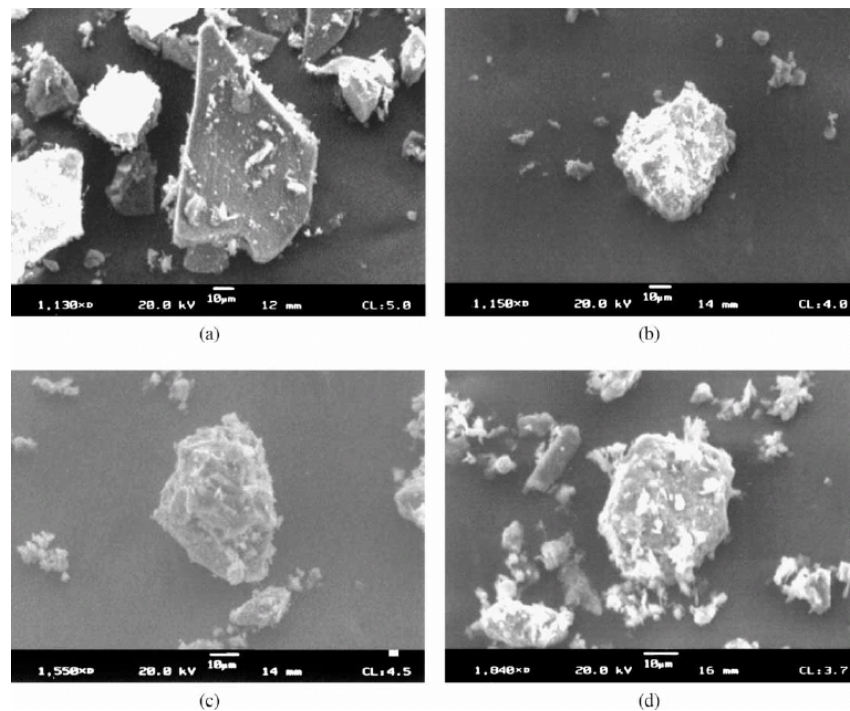


FIGURA 4.12: PARTICELLE DI FILLER UTILIZZATE NELLO STUDIO: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

TABELLA 4.3: CARATTERISTICHE REOLOGICHE DEI LEGANTI MISURATE MEDIANTE IL DSR AD UNA FREQUENZA DI 10 RAD/SEC.

Tipologia legante	Modulo dinamico a taglio, IG*I [MPa]	Angolo di fase, $\delta$ (gradi)
ABD-1	2,049	77,1
AAM-1	1,039	61,5
ABM-1	2,804	76,6

Vengono effettuate prove di determinazione del modulo a taglio dinamico e dell'angolo di fase anche per tutte le tipologie di mastice ottenute dalle diverse combinazioni di filler e bitume. I risultati, presentati sotto forma di curve di rigidezza, sono riportati nelle figure 4.13, 4.14 e 4.15, relative rispettivamente alle tre varietà di bitume utilizzato (ABD-1, AAM-1 e ABM-1).

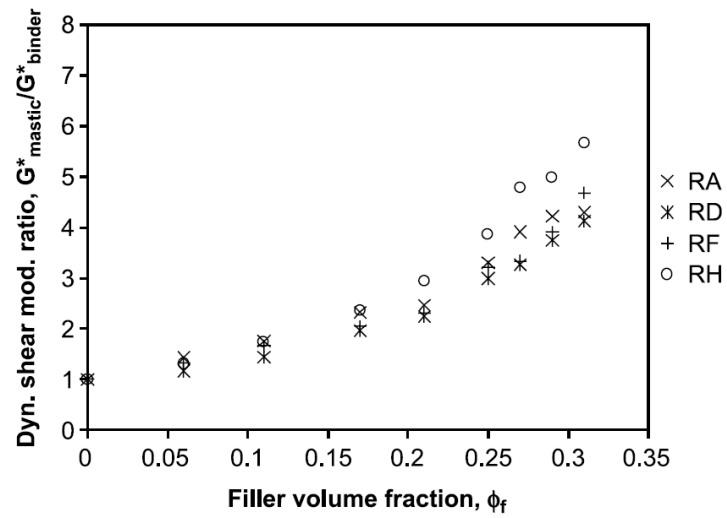


FIGURA 4.13: CURVE DI RIGIDEZZA RELATIVE AL LEGANTE ADB-1 MISCELATO CON LE QUATTRO TIPOLOGIE DIO FILLER: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

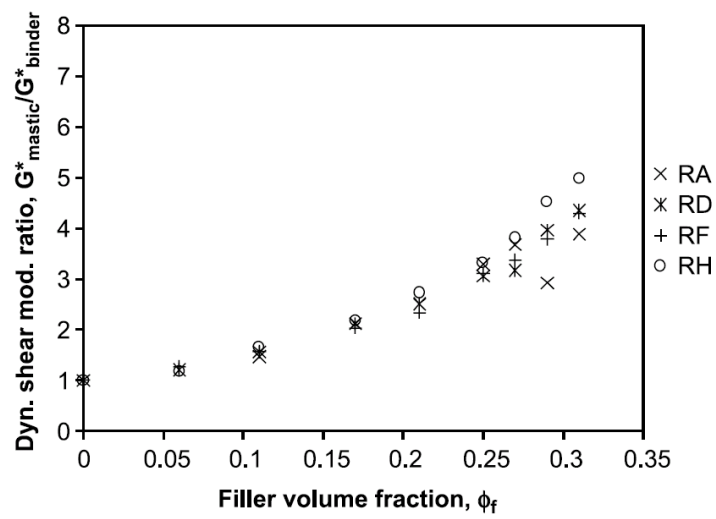


FIGURA 4.14: CURVE DI RIGIDEZZA RELATIVE AL LEGANTE AAM-1 MISCELATO CON LE QUATTRO TIPOLOGIE DIO FILLER: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

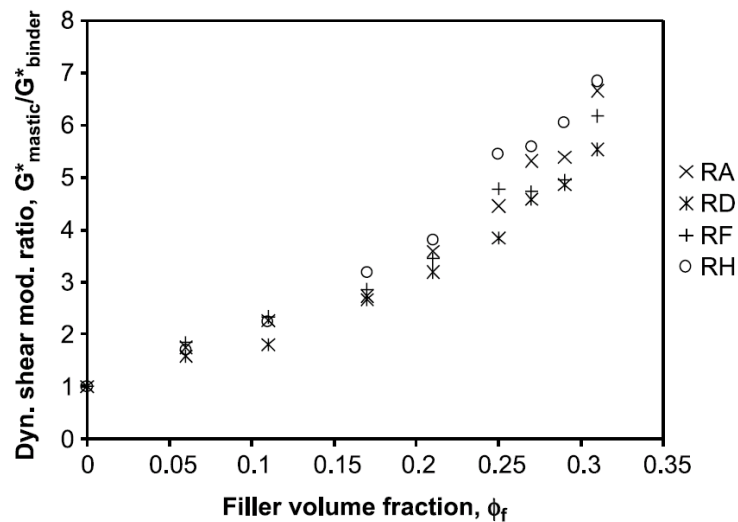


FIGURA 4.15: CURVE DI RIGIDEZZA RELATIVE AL LEGANTE ABM-1 MISCELATO CON LE QUATTRO TIPOLOGIE DIO FILLER: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

Osservando le curve ottenute dalle prove DSR sui mastici si nota uno stretto legame tra il tasso di crescita del modulo caratteristico del mastice e l'aumento della percentuale in volume di filler.

Partendo da questi risultati sperimentali gli autori sviluppano un modello numerico agli elementi discreti per valutare la capacità del DEM particellare di stimare correttamente il dato di laboratorio.

Il software di calcolo utilizzato per la modellazione numerica è Particle Flow Code in due dimensioni (PFC<sup>2D</sup>). Il filler ed il legante vengono schematizzati mediante particelle bidimensionali generate in modalità casuale all'interno del volume di dominio. Tale volume è limitato da due pareti laterali poste a 6 mm di distanza e da due piastre di carico poste a 12 mm l'una dall'altra (figura 4.16).

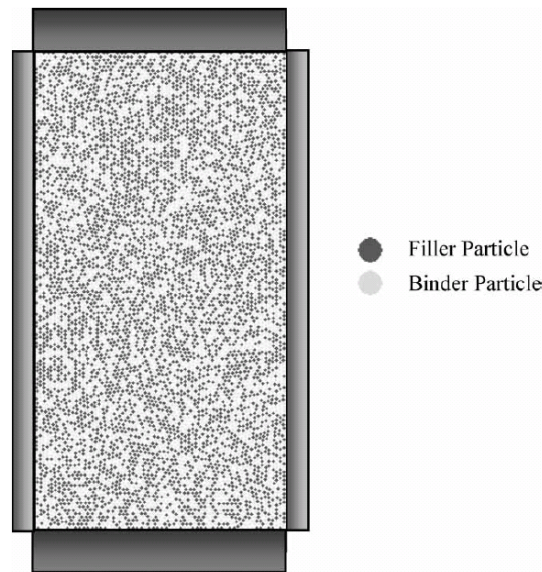


FIGURA 4.16: MODELLO NUMERICO IN PFC<sup>2D</sup>.

Il campione risulta complessivamente formato da 7883 particelle di diametro pari a 100  $\mu\text{m}$ .

Per simulare l'interazione tra le particelle gli autori scelgono di utilizzare un modello di contatto elastico lineare e un modello di legame, l'entità del quale rappresenta una soglia per le sollecitazioni a trazione e taglio. In particolare, dal momento che l'analisi si concentra in campo elastico lineare e non viene valutato il comportamento a rottura del materiale, al legame di contatto viene assegnato un valore elevato.

Il rapporto tra le rigidzze del modello contatto elastico lineare è funzione del coefficiente di Poisson del materiale secondo la seguente formula [124]:

$$\alpha = \frac{K_s}{K_n} = \frac{2(1-\nu_p)}{(2-\nu_p)} \quad (4.12)$$

dove:

$\alpha$  = rapporto tra le rigidzze di contatto;

$K_s$  = rigidzza di contatto tangenziale;

$K_n$  = rigidzza di contatto normale;

$\nu_p$  = coefficiente di Poisson del materiale.



I valori del coefficiente di Poisson e di  $\alpha$  assunti per il filler ed il bitume sono riassunti in tabella 4.4.

TABELLA 4.4: VALORI DI  $\alpha$  E DEL COEFFICIENTE DI POISSON PER FILLER E BITUME.

	$\alpha$	Coefficiente di Poisson
<b>Filler</b>	0,92	0,15
<b>Bitume</b>	0,71	0,45

I valori di  $K_n$  e  $K_s$  utilizzati per schematizzare filler e bitume vengono determinati mediante una procedura di calibrazione che prevede la generazione di un provino omogeneo (le particelle schematizzano o solo il filler o solo il bitume) e la variazione delle rigidezze, fino ad ottenere determinati valori di modulo a taglio. In particolare, i valori di  $K_n$  e  $K_s$  vengono calibrati facendo riferimento ad un modulo a taglio pari a 25 GPa, mentre per il bitume si considera un valore di  $G^*$  compreso tra 1 e 2,8 GPa, coerentemente con quanto riportato in tabella 4.1. I valori di rigidezza normale e tangenziale così ottenuti sono riassunti in tabella 4.5.

TABELLA 4.5: MODELLAZIONE NUMERICA: RIGIDENZE DI CONTATTO E VALORI DEL MODULO A TAGLIO STIMATI PER FILLER E BITUME.

	$K_n$ [N/m]	$K_s$ [N/m]	Modulo a taglio stimato, G [MPa]
<b>Filler</b>	$1,92 \times 10^{11}$	0,15	25636,17
<b>Bitume</b>	$1,66 \times 10^9$	$2,34 \times 10^9$	276,71
	$1,66 \times 10^8$	$2,34 \times 10^8$	36,58
	$1,66 \times 10^7$	$2,34 \times 10^7$	4,71
	$1,66 \times 10^6$	$2,34 \times 10^6$	0,81

I valori di modulo a taglio vengono ricavati a partire dai valori del modulo elastico E mediante la seguente equazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.13)$$

dove:

$G$  = modulo a taglio;

$E$  = modulo elastico;

$\nu$  = coefficiente di Poisson.

A loro volta i valori del modulo elastico  $E$  vengono determinati mediante la simulazione numerica di una prova di compressione triassiale. Tale prova prevede una prima fase di compressione isotropa durante la quale la velocità delle piastre di carico e delle pareti laterali rappresentate in figura 4.16 è fissata in modo da ottenere un valore di tensione costante pari a 0,1 MPa.

Nella seconda fase i muri laterali mantengono la medesima velocità, mentre quella delle piastre di carico viene incrementata sino a raggiungere il valore di  $10^{-5}$  mm/s.

Dividendo la tensione deviatorica per la deformazione assiale registrata durante la fase di carico si ottiene il modulo elastico utilizzato per la determinazione del modulo a taglio.

I risultati numerici calcolati per diversi valori di modulo a taglio, in funzione della frazione volumetrica di filler, sono rappresentati graficamente in figura 4.17, dove appare evidente un repentino incremento di resistenza a partire da un valore di frazione di filler pari a 0,2.

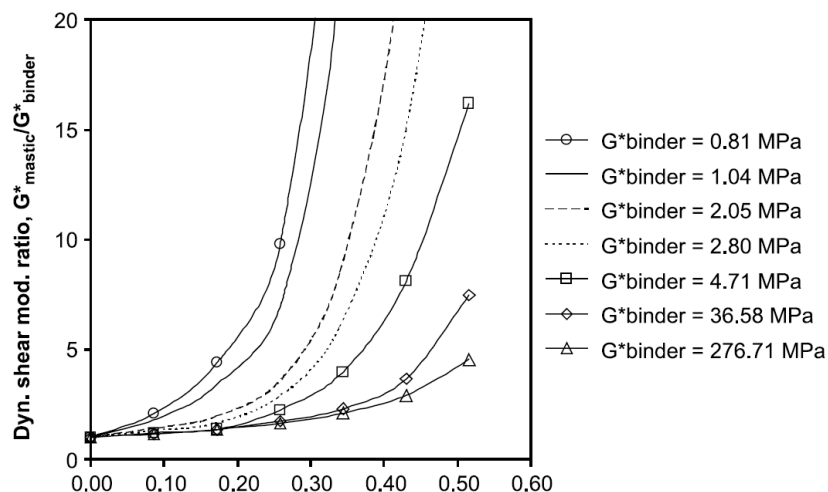


FIGURA 4.17: CURVE DI RIGIDEZZA NUMERICHE RELATIVE A DIVERSI VALORI DEL MODULO A TAGLIO DEL LEGANTE.

Dal momento che le modellazioni numeriche sono state condotte per valori di modulo calibrati (tabella 4.5) differenti da quelli reali del legante riportati in tabella 4.1, gli autori, per elaborare le curve di rigidezza numeriche, fanno ricorso all'interpolazione lineare. Confrontando le curve di rigidezza così ottenute con quelle sperimentali si osserva un buon accordo tra i dati relativi al bitume tipo ABD-1 (figura 4.18), mentre nel caso dei bitumi AAM-1 e ABM-1 (figure 4.19 e 4.20) la modellazione DEM rispettivamente sovrastima e sottostima il caso reale.

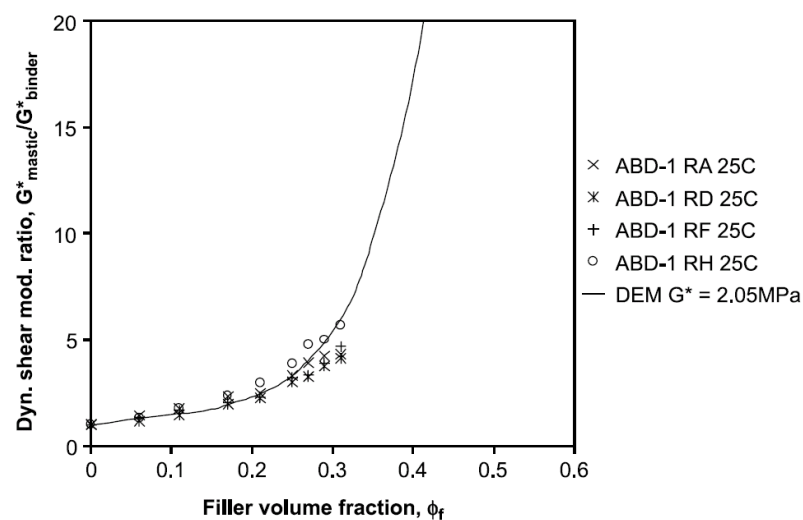


FIGURA 4.18: CONFRONTO CURVE DI RIGIDEZZA SPERIMENTALI E NUMERICHE RELATIVE AL LEGANTE ABD-1 MISCELATO CON LE QUATTRO TIPOLOGIE DI FILLER: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

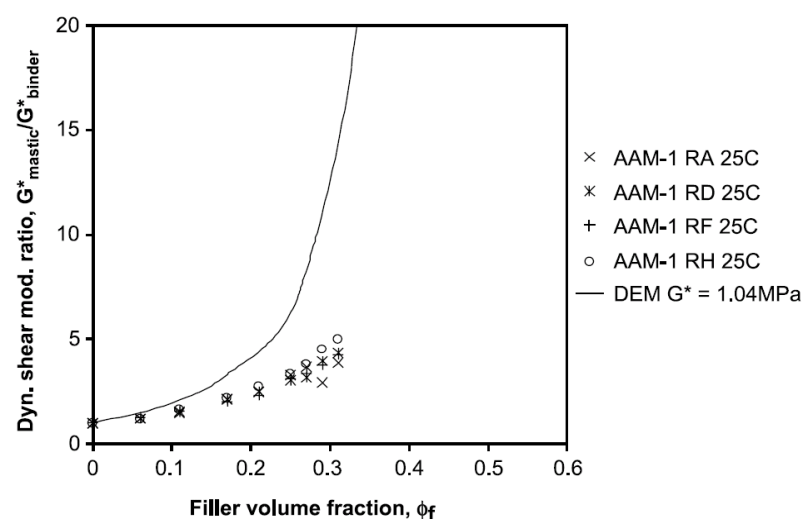


FIGURA 4.19: CONFRONTO CURVE DI RIGIDEZZA SPERIMENTALI E NUMERICHE RELATIVE AL LEGANTE AAM-1 MISCELATO CON LE QUATTRO TIPOLOGIE DI FILLER: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

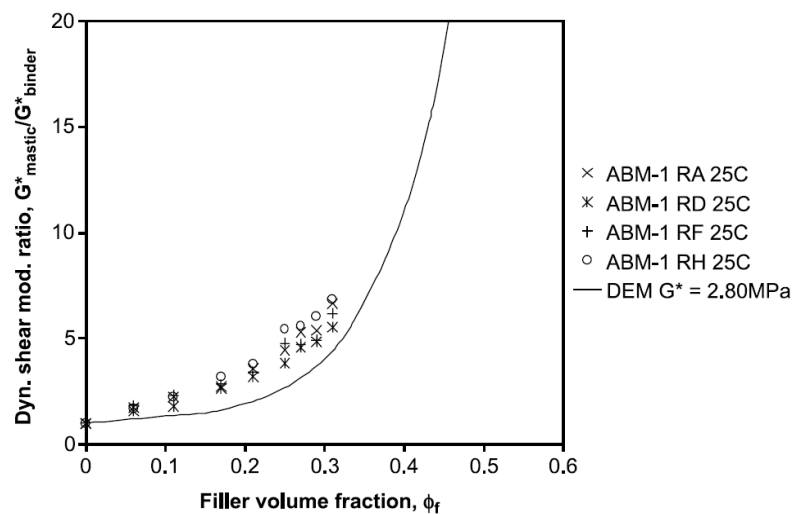


FIGURA 4.20: CONFRONTO CURVE DI RIGIDEZZA SPERIMENTALI E NUMERICHE RELATIVE AL LEGANTE ABM-1 MISCELATO CON LE QUATTRO TIPOLOGIE DI FILLER: GRANITO-RA (A), CALCARE-RD (B), GHIAIA-RF (C), GROVACCA-RH (D).

La differenza tra dati sperimentali e numerici registrata per le ultime due tipologie di legante è probabilmente dovuta al ristretto campo di analisi considerato (dominio elastico) e alla conseguente applicazione del legame di contatto elastico lineare.

#### **4.5 ADHIKARI S., YOU Z. (2007), "DISTINCT ELEMENT MODELING OF THE ASPHALT MIXTURES: FROM TWO-DIMENSIONAL TO THREE-DIMENSIONAL MODELS" [7]**

In questo studio gli autori sviluppano modelli numerici discreti bidimensionali e tridimensionali ricostruendo la microstruttura del conglomerato bituminoso e del mastice a partire da immagini tomografiche di campioni reali.

Adhikari e You si propongono di confrontare risultati sperimentali di prove di compressione con le due modalità di modellazione, al fine di stabilire quale riesca a cogliere in maniera più attendibile il comportamento del materiale.

Le caratteristiche volumetriche dei materiali utilizzati sono riportate in tabella 4.6.

TABELLA 4.6: CARATTERISTICHE VOLUMETRICHE DEI MATERIALI.

	Dimensione max aggregato [mm]	Contenuto bitume [%]	Vuoti [%]
<b>Conglomerato bituminoso</b>	19,00	5,59	4,36
<b>Mastice (bitume + filler)</b>	2,36	10,33	0,00

Il modulo dinamico della miscela e del mastice vengono misurati mediante test di compressione uniassiali a tre differenti temperature (4, -6 e -18°C) e per un range di frequenze che va da 0,1 a 25 Hz.

Il modulo degli aggregati misurato è pari a 55 GPa. Tale valore, assieme a quello relativo al mastice, viene utilizzato come parametro di input per la modellazione della miscela di conglomerato in PFC<sup>2D</sup>.

Come precedentemente accennato, dal punto di vista geometrico, la microstruttura dei materiali viene definita mediante indagini tomografiche a raggi X.

In figura 4.21 si riporta un provino tridimensionale ricostruito a partire da sezioni tomografiche.

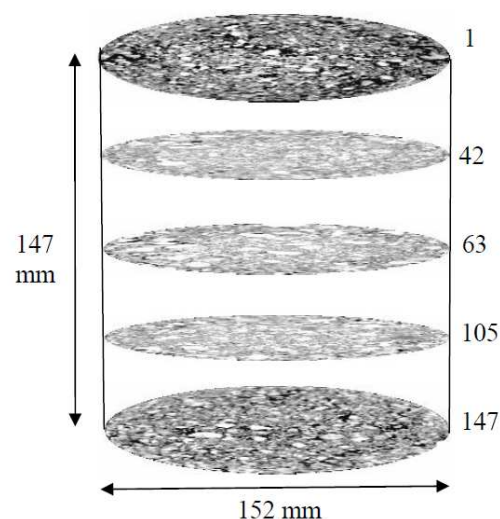


FIGURA 4.21 PROVINO RICOSTRUITO SULLA BASE DI SCANSIONI TOMOGRAFICHE.

Aggregati, mastice e vuoti corrispondono a livelli di grigio differenti:

- Aggregati: 204 – 256;

- Mastice: 125 – 203;
- Vuoti: 0 – 124.

Le immagini in scala di grigio ottenute dalla tomografia a raggi X vengono convertite, mediante programmi di trattamento delle immagini, in elementi discreti particellari.

I tre modelli tridimensionali DEM utilizzati per le simulazioni numeriche hanno forma prismatica e vengono estratti dal provino rappresentato in figura 4.21 secondo quanto riportato in figura 4.22.

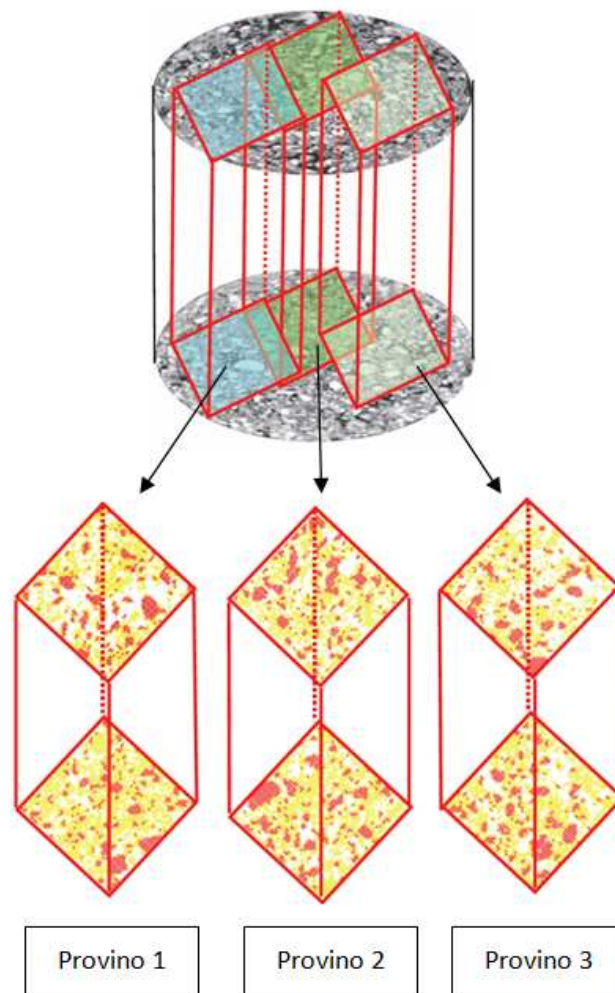


FIGURA 4.22: PROVINI UTILIZZATI NELLA MODELLAZIONE DEM TRIDIMENSIONALE.

Ogni prisma è costituito da 367500 elementi sferici di diametro pari a 0,5 mm.

Le posizioni delle particelle schematizzanti mastice ed aggregati vengono tradotte in coordinate geometriche del modello discreto mediante MATLAB, i vuoti sono trascurati.

Il modello bidimensionale, invece, viene ricostruito a partire da sezioni verticali del provino riportato in figura 4.21 secondo quanto riportato in figura 4.23.

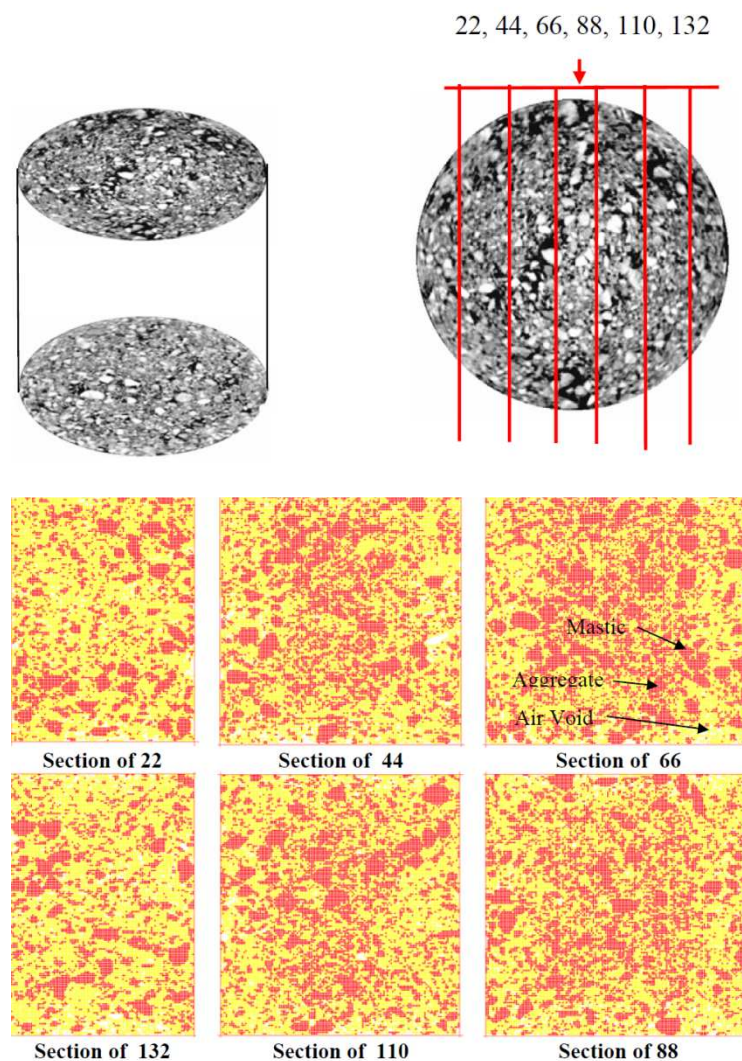


FIGURA 4.23: PROVINI UTILIZZATI NELLA MODELLAZIONE DEM BIDIMENSIONALE.

Le sezioni, poste a 22, 44, 66, 88, 110 e 132 mm dal margine sinistro del provino, hanno larghezza rispettivamente pari a 105, 137, 149, 149, 135 e 103 mm.

Sia per la modellazione tridimensionale che per quella bidimensionale vengono ipotizzati una disposizione cubica degli elementi e un modello di contatto di tipo

elastico lineare. In queste condizioni è possibile correlare la rigidità di contatto normale al modulo elastico  $E$  del materiale secondo le seguenti espressioni:

$$E = \frac{k_n}{4R} \quad (4.14)$$

$$E = \frac{k_n}{2} \quad (4.15)$$

valide rispettivamente per il modello tridimensionale e per quello bidimensionale.

Definite le caratteristiche geometriche e di contatto dei provini essi vengono sottoposti a test di compressione biassiale (caso 2D) e triassiale (caso 3D).

I test di compressione vengono condotti seguendo due fasi successive:

- nella prima fase la velocità dei muri laterali e delle piastre di carico (superiore ed inferiore) viene mantenuta costante, mediante un meccanismo di servo-control, al fine di simulare la tensione di confinamento isotropa;
- nella seconda fase le piastre superiore ed inferiore vengono svincolate dal servo meccanismo e assumono velocità di carico definite dall'utente.

Durante tutta la durata del test vengono monitorate e registrate la tensione deviatorica e la deformazione assiale, per mezzo delle quali è possibile ricavare numericamente il valore del modulo del materiale.

In figura 4.24 i valori di modulo dei tre provini tridimensionali (prismi) e dei sei provini bidimensionali (sezioni) ottenuti dalla simulazione numerica vengono confrontati con i valori ottenuti in laboratorio.



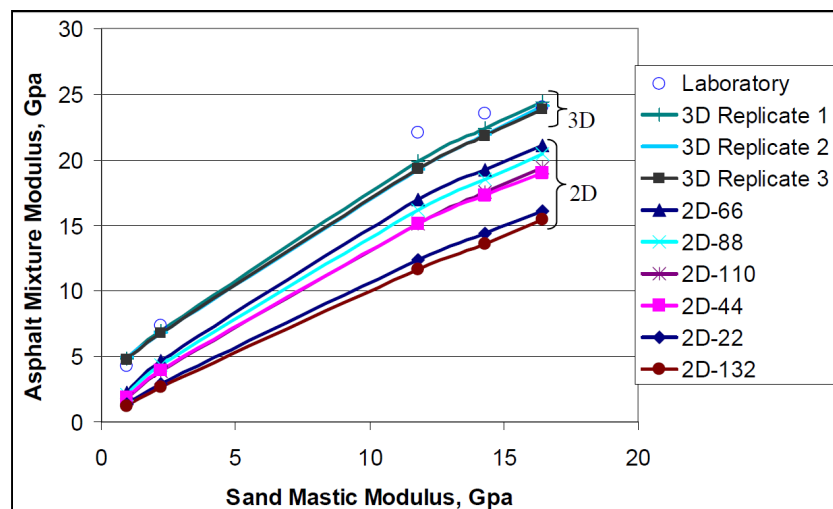


FIGURA 4.24: CONFRONTO RISULTATI MODELLAZIONI 2D E 3D CON DATI SPERIMENTALI.

Osservando il grafico riportato in figura 4.24 appare evidente come la modellazione tridimensionale fornisca risultati sensibilmente più attendibili rispetto a quella bidimensionale, che per tutti e sei i campioni tende a sottostimare i risultati sperimentali.

La modellazione 3D, infatti, fornisce una rappresentazione geometrica del campione più rispondente alla realtà, che riesce in parte a far fronte alle approssimazioni introdotte da un legame di contatto di tipo elastico lineare.

#### **4.6 KIM H., WAGONER M.P., BUTTLAR W.G. (2008), "SIMULATION OF FRACTURE BEHAVIOR IN ASPHALT CONCRETE USING A HETEROGENEOUS COHESIVE ZONE DISCRETE ELEMENT MODEL" [105]**

Questa memoria riassume parte dei risultati della ricerca condotta da Kim et al. negli anni 2005-2009 relativa allo studio dei meccanismi di frattura interni al conglomerato bituminoso utilizzando il DEM particellare [102], [103], [107]. Gli autori indagano l'influenza dei parametri macroscopici sulla meccanica della frattura, sfruttando legami di contatto di tipo lineare: in particolare, fanno ricorso al legame elastico lineare, per rappresentare l'interazione tra gli aggregati, e ad un modello bilineare di tipo coesivo (*Cohesive Zone Model-CZM*) per la componente bituminosa.

Il CZM viene implementato nel software di calcolo agli elementi discreti (PFC<sup>2D</sup>) al fine di simulare numericamente la propagazione della frattura nel conglomerato bituminoso. Per definire compiutamente tale modello sono necessari tre parametri:

- l'energia di coesione  $\phi$ ;
- la forza di coesione  $\sigma_{max}$ ;
- lo spostamento  $\delta_{sep}$ .

La relazione tra le grandezze appena descritte è espressa mediante l'equazione (4.16), in cui solo due dei tre parametri risultano essere indipendenti:

$$\phi = \int_0^{\delta_{sep}} \sigma(\delta) d\delta \quad (4.16)$$

L'energia di coesione, assunta pari al lavoro di fessurazione locale del materiale, e la forza di coesione, vengono solitamente determinati mediante test sperimentali, mentre lo spostamento risulta essere il parametro più difficile da calcolare.

L'applicazione del modello bilineare in PFC<sup>2D</sup> è rappresentata in figura 4.25.

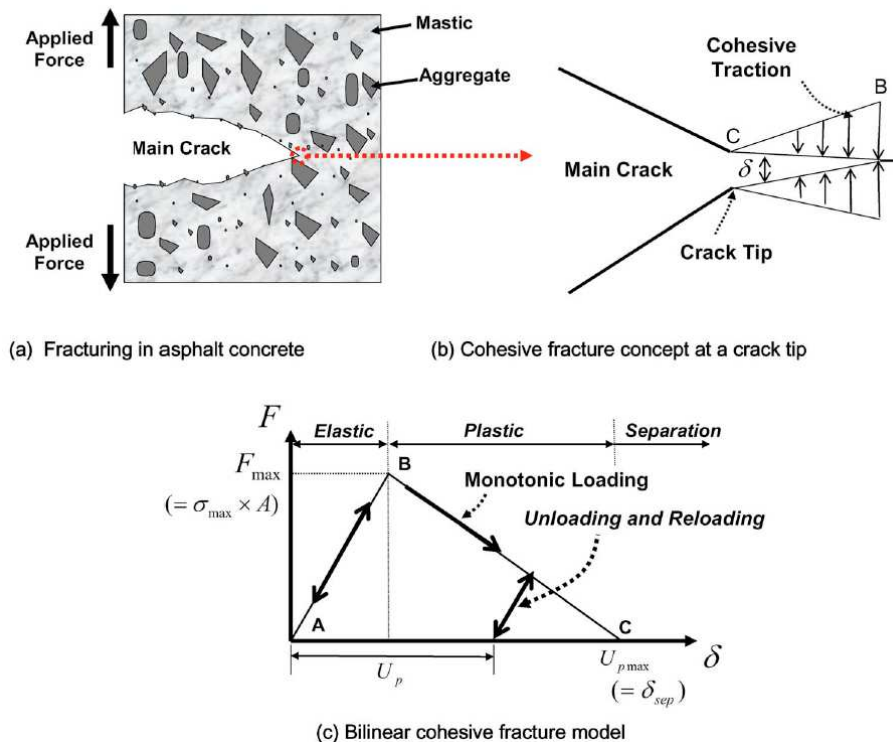


FIGURA 4.25: COHESIVE ZONE MODEL APPLICATO ALLA MODELLAZIONE DEM.

Come si osserva in figura 4.26, quando la forza al contatto supera la resistenza dello stesso si innesca la fase di *softening*, che si manifesta con una caduta di tensione tra le particelle e la conseguente rottura in corrispondenza dei punti di contatto.

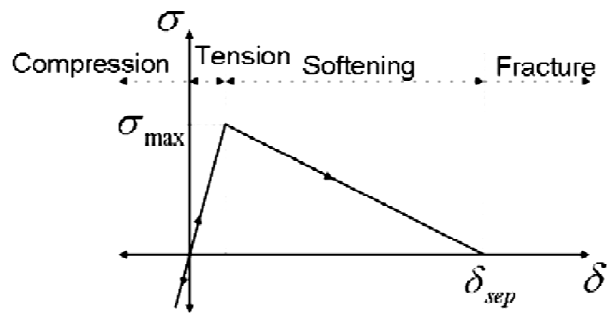


FIGURA 4.26: ANDAMENTO DELLA TENSIONE ALL'INTERNO DEL CZM.

Prima di procedere nella scelta del test da simulare gli autori verificano la metodologia DEM particellare confrontando la teoria elastica del continuo con l'approccio discontinuo, al fine di stabilire relazioni tra i parametri elastici macroscopici ed i parametri microscopici da utilizzare nella modellazione discreta.

Morikawa et al. [125] e Mustoe e Griffiths [126] hanno elaborato relazioni che legano le costanti elastiche normali e tangenziali di un insieme di molle ai parametri elastici di un continuo piano di spessore unitario.

*Deformazione piana:*

$$\text{---} \quad (4.17)$$

$$\text{---} \quad (4.18)$$

*Sollecitazione piana:*

$$\text{---} \quad (4.19)$$

$$k^s = \frac{E(1-3\nu)}{\sqrt{3}(1-\nu^2)} \quad (4.20)$$

dove:

$k_n$  = costante elastica normale;

$k_s$  = costante elastica tangenziale;

E = modulo di Young;

$\nu$  = coefficiente di Poisson.

Utilizzando lo schema esagonale (figura 4.27), scelto da Kim et al., le espressioni sopra riportate fissano un valore massimo per il coefficiente di Poisson pari a 0,25 nel caso di sollecitazione piana e a 0,33 nel caso di deformazione piana, quando la rigidità tangenziale ( $k_s$ ) è uguale a zero.

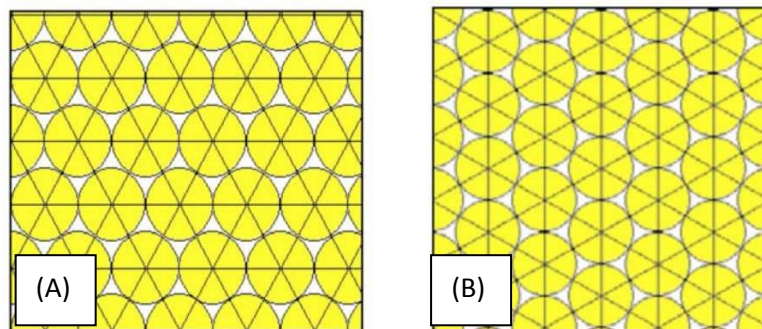


FIGURA 4.27: DISPOSIZIONE DEGLI ELEMENTI SECONDO UNO SCHEMA ESAGONALE ORIZZONTALE (A), E SECONDO UNO SCHEMA ESAGONALE VERTICALE (B).

Gli autori verificano le equazioni (4.17)-(4.20) ricorrendo ai modelli elementari di compressione assiale (per il caso di deformazione piana) e di trave a mensola caricata in punta (per il caso di sollecitazione piana).

Al modello utilizzato per la prima verifica, rappresentato in figura 4.28, viene applicata una tensione verticale costante di 0,001 MPa.

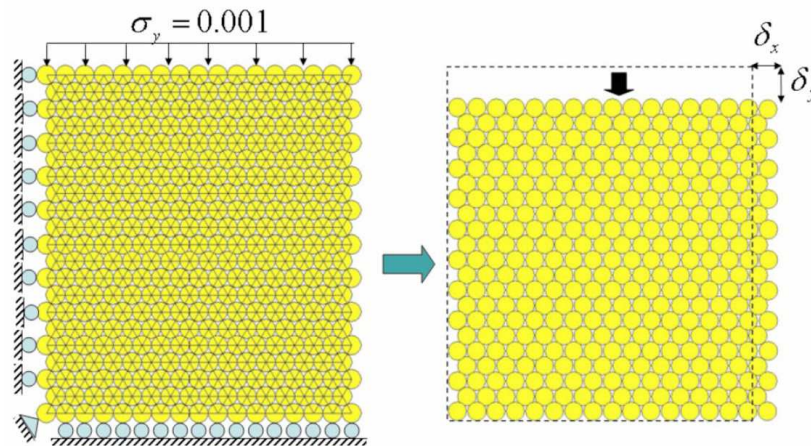


FIGURA 4.28: CONDIZIONI AL CONTORNO E PROVINO CARICATO ASSIALMENTE UTILIZZATO PER LA VERIFICA DEL MODELLO.

In questo caso, la teoria dell'elasticità fornisce una soluzione analitica per il calcolo del modulo di Young e del coefficiente di Poisson:

$$E = \sigma_y (1 - \nu^2) \frac{H}{\delta_y} \quad (4.21)$$

$$\nu = \frac{-H/W}{\frac{\delta_y}{\delta_x} - H/W} \quad (4.22)$$

dove:

H = altezza del campione;

W = larghezza del campione;

E = modulo di Young;

$\nu$  = coefficiente di Poisson;

$\delta_x$  = deformazione in direzione x;

$\delta_y$  = deformazione in direzione y.

Com'è possibile osservare in tabella 4.7 i risultati numerici e quelli ottenuti analiticamente sulla base della teoria dell'elasticità sono quantitativamente simili per entrambe le configurazioni riportate in figura 4.28.

TABELLA 4. 7: MODELLO DI COMPRESIONE UNIASSIALE: CONFRONTO SOLUZIONE ANALITICA E MODELLO DEM.

		Rigidezze di contatto [N/m]		Spostamento [m]		Parametri elastici ottenuti dallo spostamento <sup>(a)</sup>		Parametri elastici ottenuti dalle rigidezze di contatto <sup>(b)</sup>		Errore [%]
		k <sub>n</sub>	k <sub>s</sub>	δ <sub>y</sub>	δ <sub>x</sub>	E [Pa]	ν	E [Pa]	ν	E
Configurazione	Esagonale orizzontale	1	1	-0,0102	0,0004	1,703	0,046	1,732	0,000	1,67
		1	0,5	-0,0116	0,0017	1,456	0,137	1,461	0,125	0,27
		1	0,001	-0,0147	0,0046	1,101	0,253	1,083	0,250	1,66
	Esagonale verticale	1	1	-0,0099	0,0001	1,722	0,009	1,732	0,000	0,58
		1	0,5	-0,0113	0,0014	1,479	0,123	1,461	0,125	1,23
		1	0,001	-0,0142	0,0041	1,129	0,246	1,083	0,250	4,25
<sup>(a)</sup> Parametri calcolati mediante le equazioni (4.21) e (4.22)										
<sup>(b)</sup> Parametri calcolati mediante le equazioni (4.17) e (4.18)										

La configurazione utilizzata per verificare la condizione di sollecitazione piana è quella rappresentata in figura 4.29.

In questo caso la deformazione δ<sub>x</sub> può essere calcolata mediante la seguente espressione:

$$\delta_x = \frac{PL^3}{3EI} \quad (4.23)$$

dove:

L = lunghezza della mensola;

P = sollecitazione agente;

E = modulo di Young;

I = momento d'inerzia della sezione.

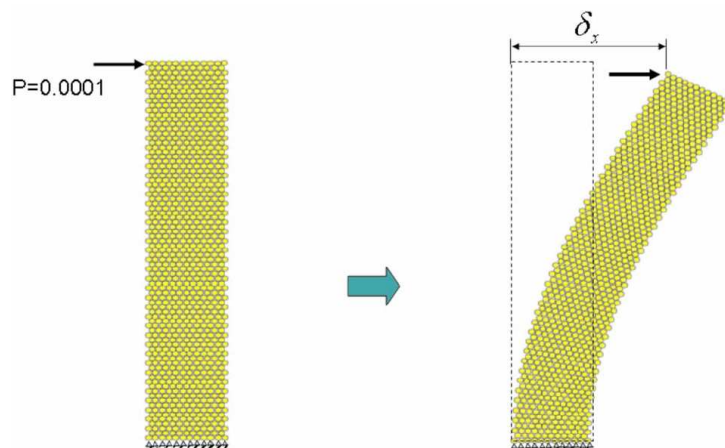


FIGURA 4.29: CONDIZIONI AL CONTORNO E MENSOLA CARICATA IN TESTA UTILIZZATA PER LA VERIFICA DEL MODELLO.

I valori di deformazione  $\delta_x$  modellati mediante il DEM particellare risultano analoghi a quelli ottenuti dallo schema teorico mediante l'equazione (4.23) (tabella 4.8).

TABELLA 4.8: MODELLO DI MENSOLA CARICATA IN TESTA: CONFRONTO SOLUZIONE ANALITICA E MODELLO DEM.

		Rigidezze di contatto [N/m]		Parametri elastici ottenuti dalle rigidezze di contatto <sup>(a)</sup>		Spostamento simulato <sup>(b)</sup> [m]	Spostamento calcolato teoricamente <sup>(c)</sup> [m]	Errore [%]
		$k_n$	$k_s$	E [Pa]	$\nu$	$\delta_x$	$\delta_x$	$\delta_x$
Configurazione	Esagonale orizzontale	5	5	8,660	0,000	$1,100 \times 10^{-2}$	$1,054 \times 10^{-2}$	4,2
		5	2,5	7,423	0,143	$1,270 \times 10^{-2}$	$1,230 \times 10^{-2}$	3,1
		5	0,000	5,777	0,333	$1,584 \times 10^{-2}$	$1,580 \times 10^{-2}$	0,3
	Esagonale verticale	5	5	8,660	0,000	$9,248 \times 10^{-3}$	$8,238 \times 10^{-3}$	10,9
		5	2,5	7,423	0,143	$1,046 \times 10^{-2}$	$9,611 \times 10^{-3}$	8,1
		5	0,005	5,777	0,333	$1,258 \times 10^{-2}$	$1,235 \times 10^{-2}$	1,8

(a) Parametri calcolati mediante le equazioni (4.19) e (4.20)  
 (b) Parametri ricavati dal modello DEM  
 (c) Parametri calcolati mediante l'equazione (4.23)

Una volta chiarito il legame tra le rigidezze di contatto utilizzate nella modellazione DEM del legame lineare ed i parametri elastici macroscopici del materiale, gli autori procedono nello studio confrontando risultati numerici e sperimentali di Disk-Shaped Compact Tension Test (figura 4.30).

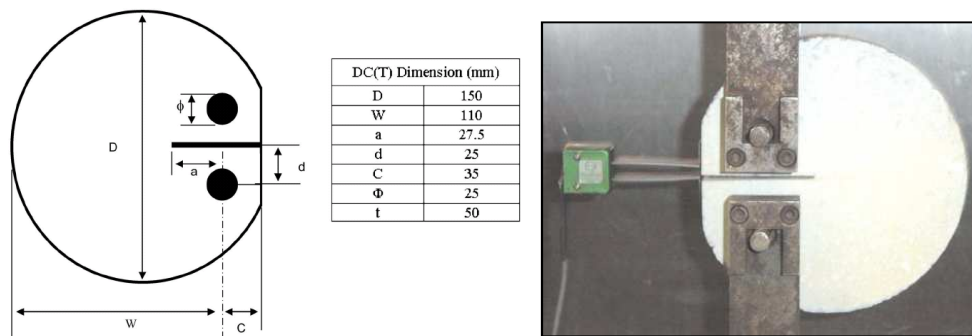


FIGURA 4.30: SCHEMA DEL DISK-SHAPED COMPACT TENSION TEST E PROVINO SOTTOPOSTO ALLA PROVA.

Nella prima fase della sperimentazione viene utilizzato un modello numerico omogeneo costituito da particelle identiche, i cui parametri caratteristici vengono determinati mediante prove di laboratorio.

I contatti regolati dal CZM sono posizionati lungo la linea uscente dalla fessura caratteristica del provino, secondo quanto riportato in figura 4.31. I parametri del modello vengono calibrati sulla base di dati sperimentali.

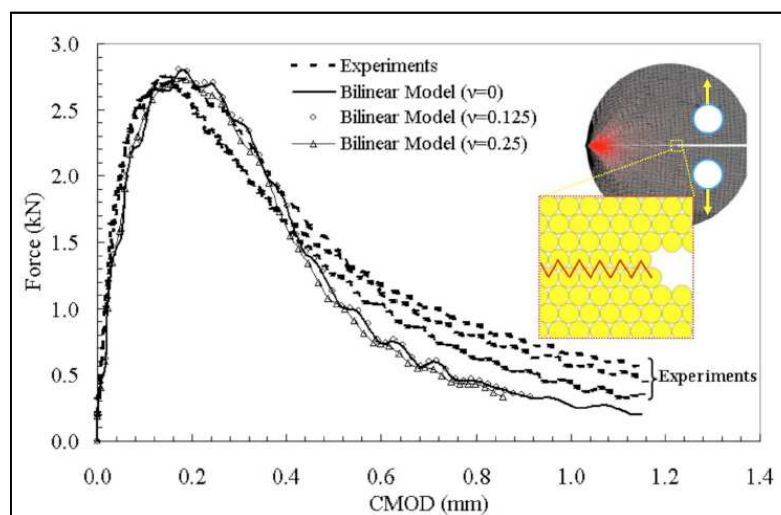


FIGURA 4.31: OUTPUT RELATIVO AL DISK-SHAPED COMPACT TENSION TEST ED INDIVIDUAZIONE DEL COHESIVE ZONE MODEL.

Nella seconda parte della sperimentazione Kim et al. intendono ricostruire il carattere eterogeneo del conglomerato bituminoso e, per poter modellare separatamente i diversi componenti della miscela, si avvalgono di tecniche di analisi



digitale dell'immagine (figura 4.32), già sfruttate nel medesimo ambito da altri autori in precedenti studi (paragrafi 4.2, 4.3, 4.5).

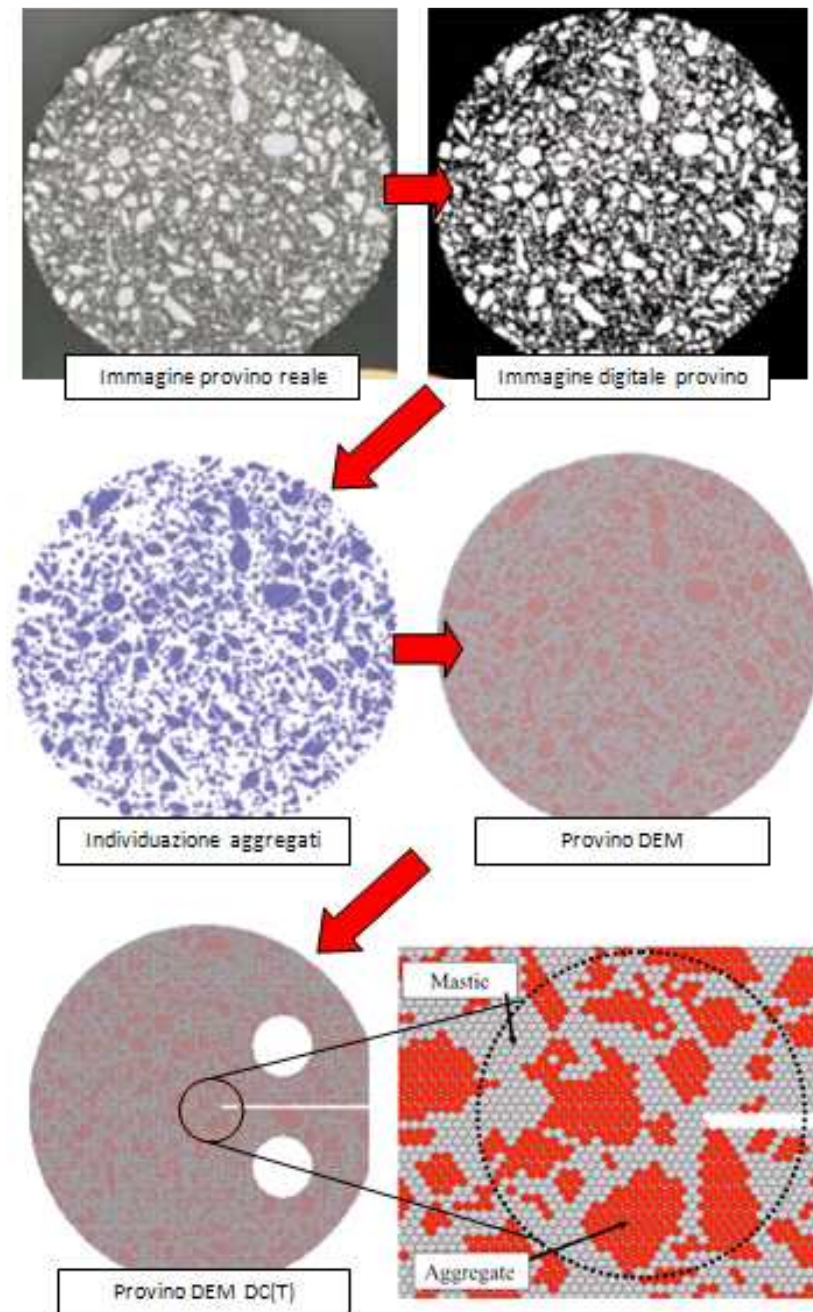


FIGURA 4.32: PROCEDIMENTO SEGUITO PER LA GENERAZIONE DEL MODELLO NUMERICO.

Il provino numerico risulta costituito complessivamente da 38721 particelle di diametro pari a 0,35 mm, disposte secondo una configurazione di tipo esagonale ed interagenti reciprocamente attraverso 114994 punti di contatto.

Il modello eterogeneo risulta costituito da tre fasi:

- aggregato;
- mastice;
- interfaccia aggregati-mastice.

Come illustrato in figura 4.33 e tabella 4.9, per definire compiutamente ogni fase è necessario determinare i parametri che entrano in gioco nei diversi modelli di contatto utilizzati (modello elastico lineare per gli aggregati e CZM per il mastice e l'interfaccia): modulo di Young ( $E$ ), resistenza a trazione ( $f_t$ ) ed energia di frattura ( $G_f$ ).

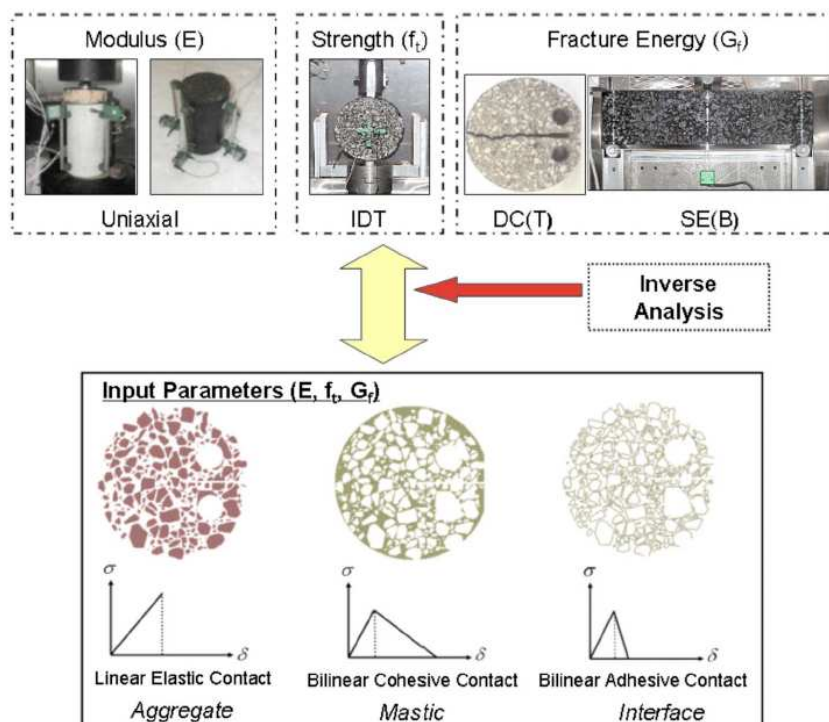


FIGURA 4.33: DETERMINAZIONE PARAMETRI NECESSARI PER LA DEFINIZIONE DEL MODELLO NUMERICO.

TABELLA 4.9: PROPRIETÀ DEI MATERIALI E PARAMETRI DI CONTATTO DEL MODELLO DEM.

	Parametri dei materiali			Parametri di contatto del modello DEM [%]			
	$\nu$	$E$ [GPa]	$\sigma_t$ [Pa]	$k_n$ [GN/m]	$k_s$ [GN/m]	Forza [N]	$\delta_{sep}$ [m]
<b>Aggregato</b>	0,15	56,8	6,59	2,04	0,815	133,24	$6,5415 \times 10^{-8}$
<b>Mastice</b>	0,25	11,4	2,87	0,52	0,002	58,05	$1,2298 \times 10^{-4}$
<b>Interfaccia</b>	0,25	11,4	2,61	0,52	0,002	52,87	$4,0995 \times 10^{-5}$

La figura 4.34 mostra che le curve ottenute mediante le modellazioni numeriche DEM particellari sono qualitativamente e quantitativamente simili a quelle ottenute sperimentalmente.

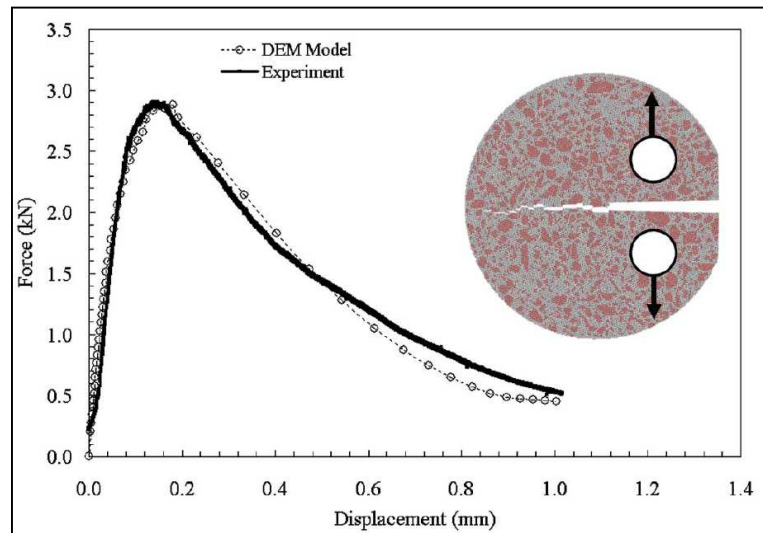


FIGURA 4.34: CONFRONTO RISULTATI NUMERICI E SPERIMENTALI RELATIVI AL DISK-SHAPED COMPACT TENSION TEST.

Tale risultato sancisce l'idoneità del modello coesivo bilineare, che rappresenta un passo avanti rispetto al semplice modello elastico lineare, nel rappresentare i meccanismi di frattura interni ad una miscela di conglomerato bituminoso.

**4.7 MASAD E., MAHMOUD E. (2009), "DISCRETE ELEMENT ANALYSIS OF AGGREGATE RESISTANCE TO FRACTURE IN ASPHALT MIXTURES"; MASAD E., MAHMOUD E., NAZARIAN S. (2009), "DISCRETE ELEMENT ANALYSIS OF AGGREGATE VARIABILITY, BLENDING, AND FRACTURE IN ASPHALT MIXTURES" [120], [121]**

Masad et al. impiegano l'approccio DEM particellare, combinato con metodologie tomografiche e di analisi dell'immagine, per studiare l'influenza delle caratteristiche degli inerti sulla resistenza a frattura di una miscela di conglomerato bituminoso mediante la valutazione delle forze di contatto interne.

Lo studio condotto prende in considerazione cinque differenti tipologie di aggregato:

- granito;
- calcare duro;
- calcare tenero;
- ghiaia;
- arenaria;

e quattro diverse curve granulometriche:

- *Superpave – C*: curva granulometrica ben distribuita caratterizzata dal 35% di aggregato grossolano e 65% di aggregato fine;
- *CMHB – C*: curva granulometrica discontinua simile a quella di uno SMA;
- *PFC*: curva granulometrica caratterizzata da un’elevata percentuale di aggregato grossolano (89% passante al setaccio n° 8);
- *Type – D*: curva granulometrica ben distribuita con una percentuale di fine maggiore rispetto alla curva Superpave – C.

Combinando le differenti tipologie di aggregato con le distribuzioni granulometriche descritte si ottengono le miscele riportate in tabella 4.10.

Per far sì che i risultati non dipendano dalla tipologia di legante viene utilizzato, per tutte le miscele, un bitume PG 76-22.

TABELLA 4.10: MISCELE UTILIZZATE.

	<b>Superpave – C</b>	<b>CMHB – C</b>	<b>PFC</b>	<b>Type – D</b>
<b>Aggregati</b>	Granito Calcare duro Calcare tenero Ghiaia Arenaria	Granito Calcare duro Calcare tenero Ghiaia Arenaria	Granito Calcare duro Calcare tenero Ghiaia Arenaria	Ghiaia Arenaria
<b>Legante</b>	Bitume PG 76-22			

Per ottenere i parametri caratteristici degli aggregati in laboratorio vengono svolti test di trazione indiretta, prove per determinare la resistenza a compressione (figura 4.35) e test “*V-meter*” ad ultrasuoni per la determinazione del modulo.

Sulle miscele di conglomerato vengono svolti test di trazione indiretta.

La prima fase dello studio consiste nella modellazione DEM particellare dei test sperimentali svolti sugli aggregati. Tali modelli, generati mediante il codice di calcolo PFC<sup>2D</sup>, sono costituiti da particelle circolari di diametro costante pari a 36 mm.

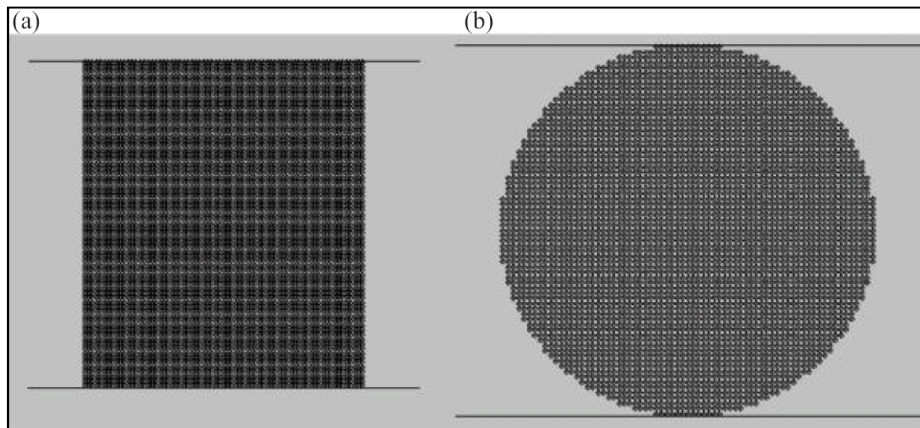


FIGURA 4.35: MODELLI DEM UTILIZZATI PER SIMULARE IL TEST DI COMPRESSIONE (A), E IL TEST DI TRAZIONE INDIRETTA (B).

Il modello utilizzato per la schematizzazione del contatto tra gli aggregati prevede:

- un modello di rigidità elastico lineare;
- un modello di legame, che definisce le massime forze di trazione e taglio ammissibili;
- un modello di slittamento, che si attiva nel caso in cui le forze agenti assumano valori maggiori di quelle limite imposte dal modello di legame.

Le rigidità di contatto del modello elastico lineare ed i parametri che regolano il modello di legame vengono calibrati sulla base dei test sperimentali condotti sugli aggregati. Una volta calibrati, i parametri numerici necessari per la schematizzazione degli aggregati, vengono utilizzati come dati di input nella modellazione della miscela di conglomerato. Diversamente da quanto visto per gli aggregati, data la natura eterogenea del conglomerato bituminoso, non risulta possibile generare un modello costituito da particelle uniformi disposte secondo una configurazione geometricamente semplice.

Per catturare l'effettiva microstruttura del materiale gli autori ricorrono, quindi, alla tomografia a raggi X ed a tecniche di elaborazione digitale delle immagini per convertire i pixels in coordinate numeriche (figura 4.36).

I parametri di input relativi al mastice vengono calibrati sulla base dei test sperimentali di trazione indiretta precedentemente eseguiti sulla miscela.

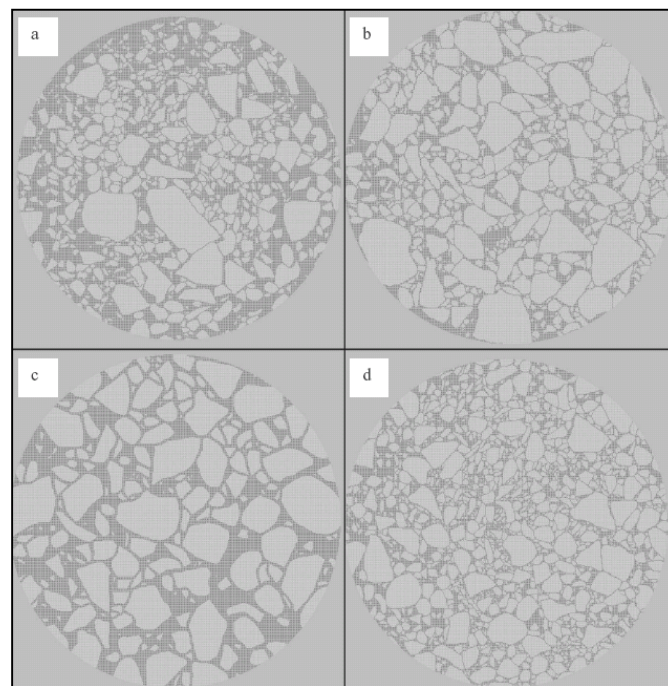


FIGURA 4.36: MODELLI DEM DELLE MISCELE DI CONGLOMERATO BITUMINOSO SUPERPAVE – C (A), CMHB – C (B), PFC (C), TYPE – D (D).

Il software di calcolo agli elementi discreti PFC<sup>2D</sup> registra e fornisce, in output, il valore degli spostamenti e delle forze di contatto interne alla miscela durante la prova di trazione indiretta. Valutando la distribuzione e l'entità di queste ultime è possibile effettuare considerazioni in merito alla possibile localizzazione delle fessure (figura 4.37).

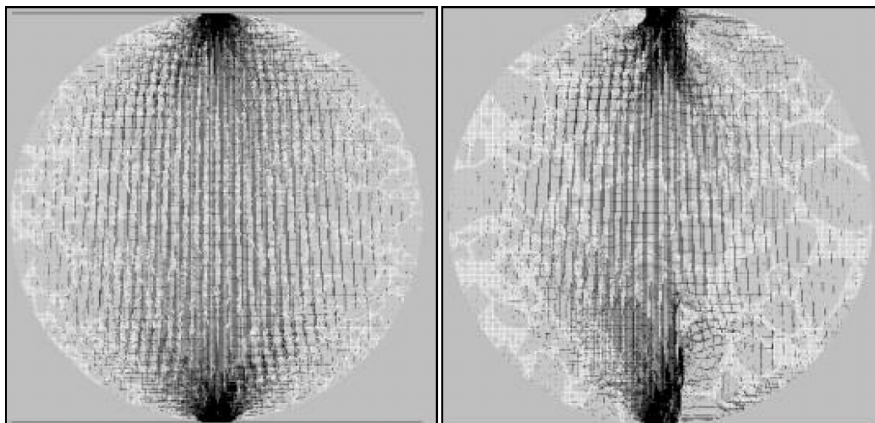


FIGURA 4.37: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO IN UN PROVINO SOTTOPOSTO AL TEST DI TRAZIONE INDIRETTA.

Gli autori analizzano l'andamento delle forze di contatto per le diverse curve granulometriche considerate e per le differenti tipologie di inerti utilizzati. In figura 4.38 sono riportate, a titolo di esempio, le distribuzioni normalizzate delle forze di compressione relative alle diverse tipologie di aggregato per la miscela CMHB – C.

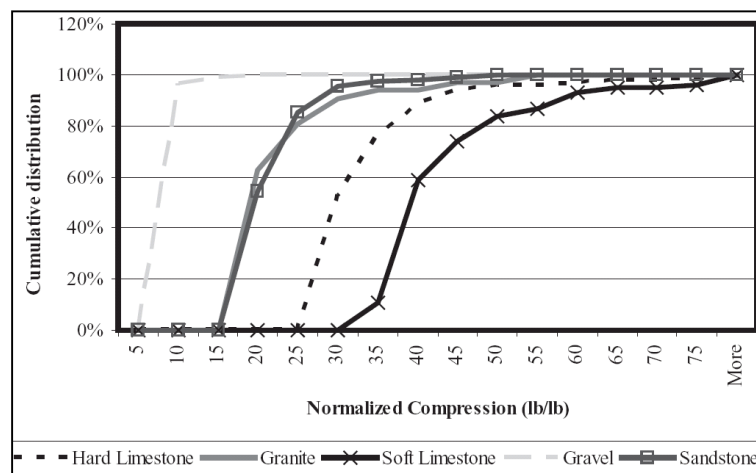


FIGURA 4.38: DISTRIBUZIONI DELLE FORZE DI CONTATTO DI COMPRESSIONE PER LE DIVERSE TIPOLOGIE DI AGGREGATO (MISCELA CMHB – C).

Osservando tali distribuzioni è possibile identificare quale varietà di aggregato sia caratterizzato da forze di contatto maggiori e quale, invece, subisca sollecitazioni inferiori e, di conseguenza, risulti meno soggetto a fenomeni di rottura. Considerazioni simili possono essere estremamente utili ai fini di una corretta progettazione della miscela di inerti da utilizzare per il confezionamento di una miscela di conglomerato bituminoso.

**4.8 YOU Z., ADHIKARI S., DAI Q. (2008), "THREE-DIMENSIONAL DISCRETE ELEMENT MODELS FOR ASPHALT MIXTURES" [166]**

You et al. analizzano l'approccio DEM particellare sviluppando un confronto tra modelli bidimensionali e tridimensionali di provini in conglomerato bituminoso sottoposti a test di compressione. In particolare, l'obiettivo del presente studio è la valutazione del modulo complesso della miscela di conglomerato per via numerica ed il successivo confronto con dati sperimentali.

Le caratteristiche dei materiali utilizzati sono riassunte in tabella 4.11.

TABELLA 4.11: CARATTERISTICHE DEI MATERIALI.

Diametro setaccio [mm]	Passante [%]	
	Conglomerato bituminoso	Mastice
25,0	100,0	-
19,0	98,9	-
12,5	77,5	-
9,5	68,4	-
4,75	56,2	-
2,36	46,2	-
1,18	31,7	100,0
0,6	20,8	65,6
0,3	12,6	39,7
0,15	8,3	26,2
0,075	5,6	17,7
<b>Contenuto bitume [%]</b>	4,8	13,7
<b>Contenuto vuoti [%]</b>	4,0	0,0

La procedura seguita dagli autori è la stessa impiegata da You e Buttlar negli studi descritti ai paragrafi 4.2 e 4.3:

- vengono condotti in laboratorio test di compressione uniaassiale su campioni di mastice e conglomerato al fine di determinare il modulo complesso reale  $E^*$ ;



- il modulo del mastice, precedentemente determinato, e quello dell'aggregato (assunto pari a 55 GPa), vengono utilizzati come dati di input nel modello numerico;
- i moduli relativi alla miscela ricavati in laboratorio vengono confrontati con quelli ottenuti dalla modellazione numerica.

I test di compressione uniassiale utilizzati per la determinazione del modulo in laboratorio vengono condotti a quattro diverse frequenze (0,1, 1, 5 e 10 Hz) e tre differenti temperature (0°, -10° e -20°C). Per la generazione dei provini numerici You et al. ripropongono la metodologia che applica programmi di analisi delle immagini a scansioni ad alta definizione di provini reali. In particolare, viene creato un campione bidimensionale rettangolare, alto 81 mm (242 unità), largo 53 mm (160 unità) e costituito da 9680 dischi di raggio pari a 0,33 mm (1 unità). Il modello tridimensionale, invece, viene generato combinando quattro provini numerici bidimensionali secondo quanto illustrato in figura 4.39.

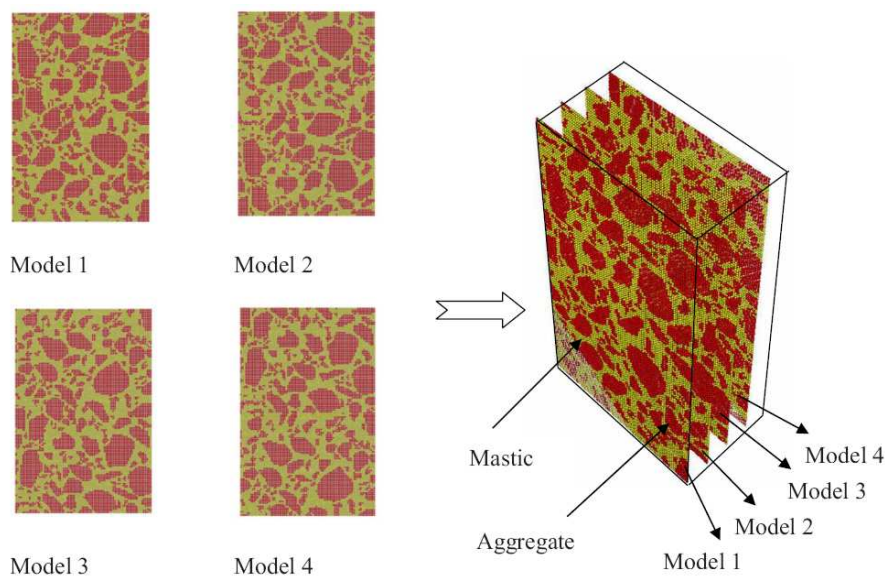


FIGURA 4.39: GENERAZIONE DEL MODELLO 3D A PARTIRE DA QUATTRO MODELLI 2D.

Si ottiene così un parallelepipedo alto 81 mm, largo 53 mm e caratterizzato da uno spessore di 32 mm; tale prisma risulta complessivamente da 464640

sfere. Al fine di simulare l'effetto della presenza di vuoti sul comportamento della miscela vengono rimosse, secondo una modalità casuale, particelle di mastice, in modo da ottenere campioni caratterizzati dal 4 e dal 7% di vuoti (figura 4.40).

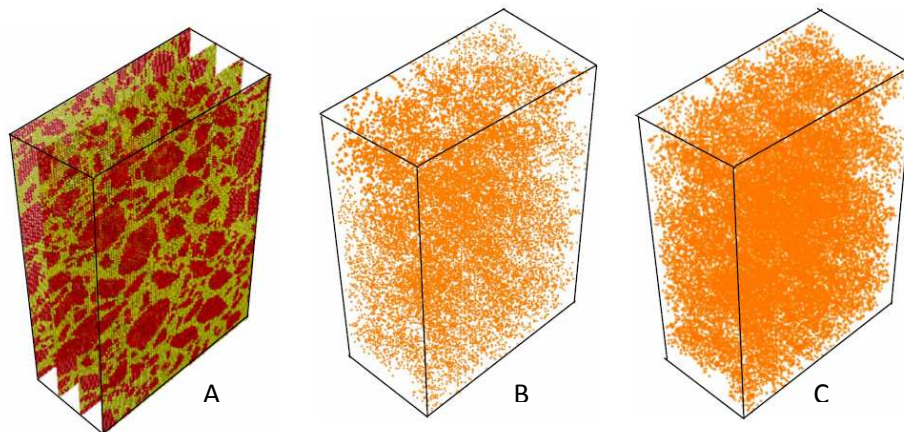


FIGURA 4.40: PROCEDIMENTO DI GENERAZIONE DEI VUOTI: MODELLO 3D COMPLETO (A); PARTICELLE DI MASTICE DA ELIMINARE PER OTTENERE IL 4% (B) E IL 7% (C) DEI VUOTI.

Per calcolare il valore del modulo complesso della miscela vengono condotti test di compressione biassiale sui modelli 2D e test di compressione triassiale sui modelli 3D; in entrambi i casi:

- le tensioni vengono calcolate assumendo il valor medio delle tensioni agenti su ogni coppia di muri opposti;
- le tensioni agenti su una parete vengono calcolate dividendo la forza totale agente sulla stessa per l'altezza del provino;
- le deformazioni lungo gli assi x ed y vengono calcolate sulla base delle variazioni registrate nelle rispettive direzioni.

Per la definizione dei parametri di rigidezza che caratterizzano il modello di contratto You et al. indicano due possibili. La prima, sempre praticabile, prevede una calibrazione iniziale dei parametri di contatto mediante dati sperimentali. La seconda, invece, possibile solo in presenza di configurazioni regolari delle particelle, si basa su relazioni che legano i parametri geometrici delle stesse ed i parametri elastici della miscela alle rigidezze di contatto.

In virtù della disposizione cubica regolare utilizzata nel presente studio gli autori ricorrono alle relazioni di Thornton che legano i parametri di contatto microscopici a quelli macroscopici della miscela [150].

Thornton afferma che per una configurazione cubica degli elementi si può scrivere:

$$\Delta\sigma_a = \frac{\Delta F_a}{(2R)} \quad (4.24)$$

dove:

$\Delta\sigma_a$  = incremento di tensione;

$\Delta F_a$  = incremento di forza;

R = raggio dell'elemento discreto.

Analogamente:

$$\Delta\varepsilon_a = \frac{\Delta u}{(2R)} \quad (4.25)$$

dove:

$\Delta\varepsilon_a$  = incremento di deformazione;

$\Delta u$  = incremento di spostamento;

R = raggio dell'elemento discreto.

L'incremento di forza tra particelle adiacenti può essere scritto come:

$$\Delta F_a = \left(\frac{1}{2} K_n\right) \Delta u = \left(\frac{1}{2} K_n\right) (2R\Delta\varepsilon_a) = K_n R \Delta\varepsilon_a \quad (4.26)$$

dove:

$\Delta F_a$  = incremento di forza;

$K_n$  = rigidezza di contatto normale;

$\Delta\varepsilon_a$  = incremento di deformazione;

$\Delta u$  = incremento di spostamento;

$R$  = raggio dell'elemento discreto.

In virtù delle espressioni sopra riportate è possibile correlare il valore del modulo di Young ai parametri microscopici di contatto sia per il modello bidimensionale:

$$E = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\varepsilon_a} = \frac{K_n}{2} \quad (4.27)$$

sia per quello tridimensionale:

$$E = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta\varepsilon_a} = \frac{K_n}{4R} \quad (4.28)$$

La prima valutazione effettuata dagli autori riguarda l'entità delle forze di contatto che si sviluppano all'interno del modello tridimensionale durante il test di compressione triassiale. In figura 4.41 sono riportate le distribuzioni delle forze di contatto di compressione e trazione relative a due modelli tridimensionali testati a differenti temperature e frequenze di prova:

- modella A: 0°C, 1 Hz;
- modella B: -20°C, 10 Hz.

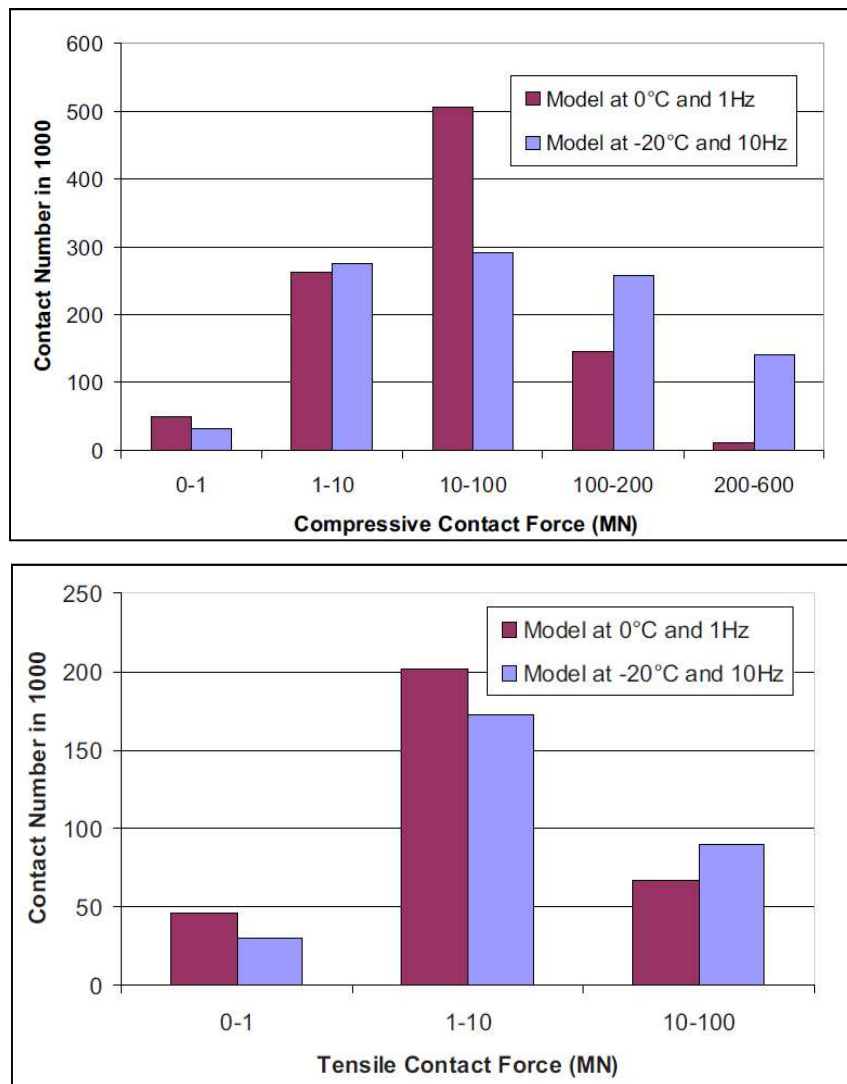


FIGURA 4.41: FORZE DI CONTATTO DI COMPRESSIONE E TRAZIONE PER DUE DIFFERENTI MODELLI TRIDIMENSIONALI.

Le forze di contatto, che forniscono informazioni riguardo la diffusione dei carichi all'interno del campione, aumentano al diminuire della temperatura e della frequenza di prova. Ciò significa che per bassi valori di temperatura e frequenza il materiale è caratterizzato da una maggiore resistenza, che si traduce in valori più elevati del modulo complesso.

Il modulo complesso viene calcolato, a partire dalla curva sforzo-deformazione, per campioni caratterizzati da diverse percentuali di vuoti e per cinque differenti valori iniziali di modulo del mastice (6,19, 8,69, 10,07, 13,93 e 18,35 GPa). Osservando quanto riportato in figura 4.42 si nota come il modello che meglio approssima i dati sperimentali risulti essere quello relativo ad un contenuto dei vuoti pari al 4%.

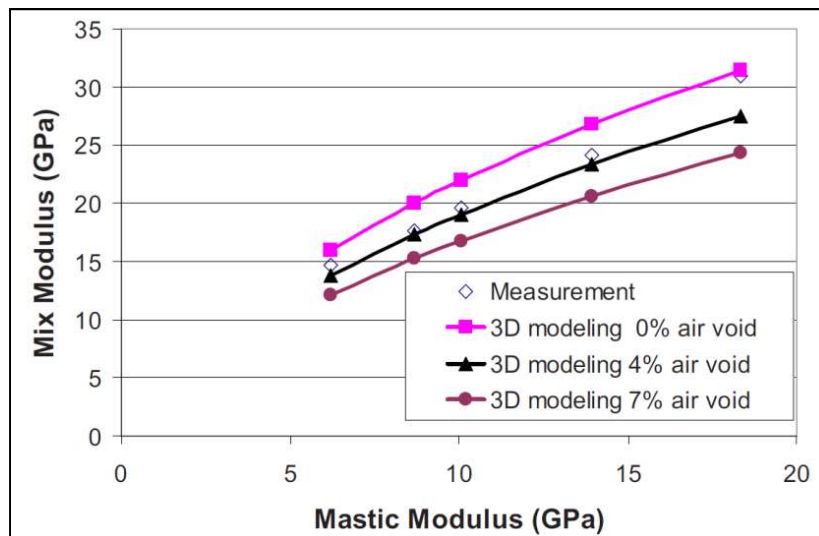


FIGURA 4.42: VALORI DEL MODULO DELLA MISCELA IN FUNZIONE DEL MODULO DEL MASTICE, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E RISULTATI NUMERICI DI MODELLI TRIDIMENSIONALI.

Gli autori non si limitano ad affermare le potenzialità della modellazione DEM tridimensionale nel simulare l'effettivo comportamento del conglomerato bituminoso, ma ne sanciscono il primato rispetto alla modellazione bidimensionale. Ciò che emerge confrontando i moduli ricavati dalle due metodologie di modellazione con i dati ottenuti in laboratorio (figura 4.43 e 4.44) è, infatti, la maggiore attendibilità della simulazione tridimensionale per una gamma di temperature di prova e frequenze di carico maggiore.

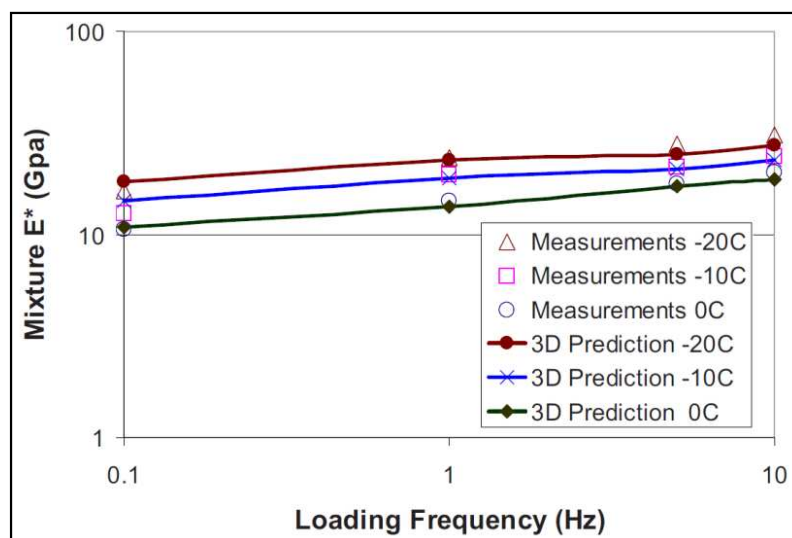


FIGURA 4.43: VALORI DEL MODULO DELLA MISCELA PER DIVERSE FREQUENZE DI CARICO, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E RISULTATI NUMERICI DI MODELLI TRIDIMENSIONALI.

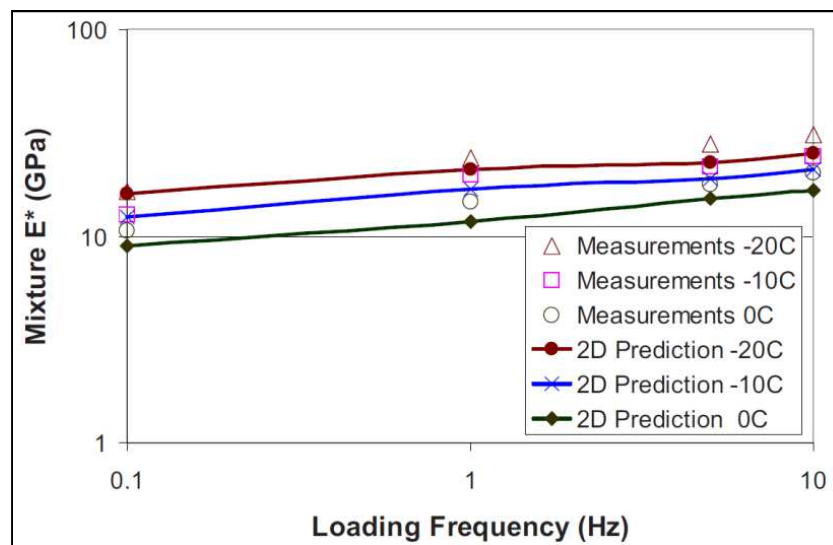


FIGURA 4.44: VALORI DEL MODULO DELLA MISCELA PER DIVERSE FREQUENZE DI CARICO, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E RISULTATI NUMERICI DI MODELLI BIDIMENSIONALI.

Nella parte finale della memoria trova spazio una considerazione relativa ai tempi di calcolo necessari per portare a termine le modellazioni numeriche bidimensionali e tridimensionali. La tabella 4.12 mostra che per raggiungere il medesimo valore di deformazione a fine test il numero dei cicli necessari è paragonabile, ma gli oneri computazionali relativi al modello 3D risultano nettamente superiori a quelli che caratterizzano il modello 2D.

TABELLA 4.12: CONFRONTO TEMPI DI CALCOLO MODELLI 2D E 3D.

	Modello 2D	Modello 3D
<b>N° cicli totale</b>	20500	20700
<b>Deformazione finale</b>	0,06973 %	29511 %
<b>Tempo di calcolo (per un pc caratterizzato da una CPU di 3,2 GHz e una RAM di 3,25 GB)</b>	12 minuti	49 ore

L'ultima considerazione effettuata dagli autori riguarda la necessità di introdurre nella simulazione DEM un modello di contatto viscoelastico che sia in grado di rappresentare in maniera ancor più affidabile il comportamento del conglomerato bituminoso in relazione alla temperatura e al tempo di carico.

#### **4.9 OSSERVAZIONI**

Sulla base di quanto esposto nei paragrafi precedenti è possibile affermare che il legame di contatto elastico lineare non sempre è in grado di rappresentare correttamente il comportamento del conglomerato bituminoso. Ad esempio, Abbas et al. nel loro studio del 2005 ottengono risultati numerici coerenti con quelli sperimentali solo per una delle tre tipologie di legante utilizzato; negli altri due casi il modello DEM sovrastima o sottostima il valore reale del modulo della miscela.

Per ottenere risultati coerenti con il dato sperimentale, alcuni autori ricorrono ad espedienti quali espansione delle particelle di aggregato [162], introduzione di un modello di tipo bilineare coesivo [105] o utilizzo della modellazione tridimensionale. Riguardo quest'ultimo aspetto gli studi svolti da Adhikari et al. [7] e You et al. [166] hanno confermato che la modellazione bidimensionale sottostima il risultato sperimentale e che, a parità di modello di contatto, è possibile ottenere risultati maggiormente coerenti passando alla modellazione tridimensionale.



## **MODELLI DI CONTATTO PER LA SIMULAZIONE DEM DEL CONGLOMERATO BITUMINOSO: IL MODELLO DI BURGER**

---

### **5.1 INTRODUZIONE**

I modelli viscoelastici consentono di rappresentare il reale comportamento della miscela di conglomerato bituminoso il cui stato deformativo risulta strettamente dipendente dal tempo di carico. Tra i diversi modelli viscoelastici quello maggiormente utilizzato per rappresentare il comportamento del conglomerato bituminoso è quello di Burger. Esistono due diversi approcci attraverso i quali è possibile applicare il modello di Burger alla modellazione numerica effettuata con software agli elementi distinti particellari. Il primo prevede l'applicazione del legame elastico lineare in cui le rigidità di contatto normali e tangenziali variano in base ai parametri del modello di Burger (Collop et al.) [44]; il secondo, invece, prevede l'applicazione diretta del modello di Burger implementato nel software di modellazione numerica (PFC<sup>2D</sup> o PFC<sup>3D</sup>) utilizzato (Abbas et al.) [5].

### **5.2 CHANG K. G. & MEEGODA J.N. (1997), "MICROMECHANICAL SIMULATION OF HOT MIX ASPHALT" [30]**

Chang e Megoda sono tra i primi autori ad occuparsi della modellazione del legame viscoelastico mediante metodi numerici agli elementi distinti. Essi sviluppano una versione modificata del codice TRUBAL di Cundall, denominata ASBAL, che prevede un insieme di particelle cilindriche connesse tra loro attraverso una combinazione di legami aggregati-aggregati e aggregati-bitume. Gli autori confrontano i modelli di Maxwell, Kelvin-Voigt e Burger al fine di valutarne l'idoneità nella modellazione di una miscela di conglomerato bituminoso in un test in controllo di deformazione. Il modello di Kelvin-Voigt evidenzia una deformazione in fase con la sollecitazione a qualunque temperatura, senza il rilassamento del materiale. I modelli di Maxwell e Burger manifestano, invece, una deformazione viscosa a temperature

elevate e un comportamento di tipo elastico alle basse temperature, mostrando così un comportamento reologico simile a quello proprio dei materiali bituminosi. I risultati dello studio dimostrano che il modello ASBAL è in grado di prevedere accuratamente le tensioni residue del provino di laboratorio dopo la compattazione, il modulo iniziale, i livelli tensionali durante il test ed il numero di contatti all'interno della miscela.

**5.3 COLLOP A. C., MCDOWELL G. R. & LEE Y. (2004), "USE OF THE DISTINCT ELEMENT METHOD TO MODEL THE DEFORMATION BEHAVIOR OF AN IDEALIZED ASPHALT MIXTURE"; COLLOP A. C., MCDOWELL G. R. & LEE Y. (2006), "MODELLING DILATION IN AN IDEALISED ASPHALT MIXTURE USING DISCRETE ELEMENT MODELLING" [43], [44]**

In queste due memorie gli autori utilizzano la modellazione DEM per studiare il comportamento di una miscela di conglomerato sottoposta a test di creep uniassiali (2004) e triassiali (2006).

Collop, McDowell e Lee, nella fase di modellazione numerica non schematizzano fisicamente il bitume mediante elementi circolari, bensì tengono conto dell'effetto del legante agendo sul modello di contatto che lega le ball di aggregato.

La procedura di creazione del provino si articola secondo sette passi successivi:

- 1) viene calcolato il numero di particelle necessarie per rappresentare il volume degli aggregati presenti nella miscela reale;
- 2) si generano i confini (walls) che definiscono il volume del provino. Le particelle contenute nel suddetto volume vengono generate con modalità random;
- 3) il raggio delle particelle viene espanso ed il campione raggiunge uno stato tensionale isotropico;
- 4) si riduce il raggio delle particelle sino ad ottenere una tensione isotropica inferiore a 1 kPa;
- 5) le particelle caratterizzate da un numero di contatti inferiore a quattro vengono espanse nuovamente al fine da creare contatti addizionali con le particelle limitrofe;
- 6) si assegnano un legame normale e uno tangenziale a ogni punto di contatto;

7) si rimuove il wall di confinamento.

Contestualmente alla creazione del provino vengono definiti i modelli di contatto tra gli elementi che rappresentano gli aggregati; grazie a questi modelli è possibile, come anticipato precedentemente, considerare l'effetto del legante. Come più volte ricordato il bitume è un materiale viscoelastico il cui comportamento dipende strettamente dal tempo di carico e dalla temperatura; nello studio condotto gli autori si propongono di analizzare, in due differenti sezioni, l'influenza della componente elastica e di quella viscoelastica. Per far ciò Collop et al. confrontano i risultati di modellazioni numeriche con quelli ottenuti in laboratorio da test di compressione uniassiali (2004) e triassiali (2006).

Il test di creep uniassiale consiste nell'applicare un carico nella direzione dell'asse del provino misurando la deformazione assiale e radiale dello stesso. La velocità di applicazione del carico viene fissata a 0,1 m/s ed il coefficiente di attrito tra le piastre di carico e le particelle è assunto pari a 0.

Nella fase iniziale gli autori utilizzano un modello elastico lineare per la schematizzazione del bitume al fine di indagare l'influenza delle dimensioni del campione e dei valori di rigidità normale e tangenziale sulle proprietà della miscela.

La prima analisi condotta da Collop et al. riguarda i parametri macroscopici del materiale, in particolare viene valutato il campo di variabilità del modulo di Young ( $E$ ) e del coefficiente di Poisson ( $\nu$ ) all'aumentare del numero di particelle costituenti il provino, in condizioni di rigidità tangenziale e normale costanti (pari rispettivamente a 1,8 MN/m e 20 MN/m). Per il calcolo di  $E$  viene valutato lo spostamento della piastra di carico superiore mantenendo fissa quella inferiore, mentre  $\nu$  viene stimato in funzione della deformazione media radiale del campione.

All'aumentare del numero di elementi del campione il modulo di Young assume valori crescenti, mentre il coefficiente di Poisson decrescenti, tendendo rispettivamente a 3,6 GPa e 0,34 GPa.

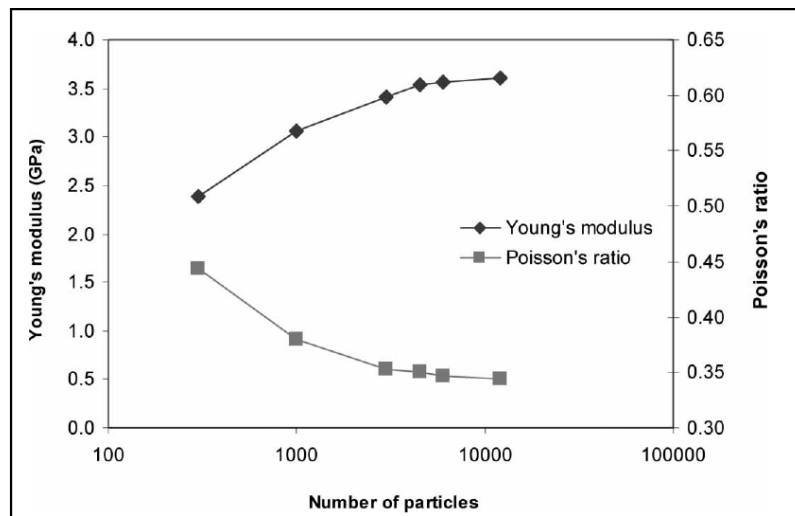


FIGURA 5.1: MODULO DI YOUNG E COEFFICIENTE DI POISSON IN FUNZIONE DEL NUMERO DI ELEMENTI CHE COSTITUISCONO IL PROVINO.

Osservando la figura 5.1 si nota che  $E$  e  $\nu$  calcolati per un campione formato da 300 elementi assumono valori rispettivamente maggiori del 30% e minori del 28% rispetto a quelli relativi ad un provino costituito da 6000 particelle.

Ciò significa che per ottenere risultati affidabili ( $E$  e  $\nu$  non risultano più affetti da variazioni sensibili) è necessario un campione formato da almeno 4500 elementi. In base a quanto appena detto, per indagare l'influenza delle rigidità di contatto sulle proprietà della miscela, gli autori scelgono di utilizzare un provino costituito da 6000 particelle.

In figura 5.2 è riportato l'andamento del modulo di rigidità in funzione della rigidità di contatto normale per diversi valori di rigidità di contatto tangenziale.

Il valore del modulo risulta legato alla rigidità normale da una relazione di tipo lineare.

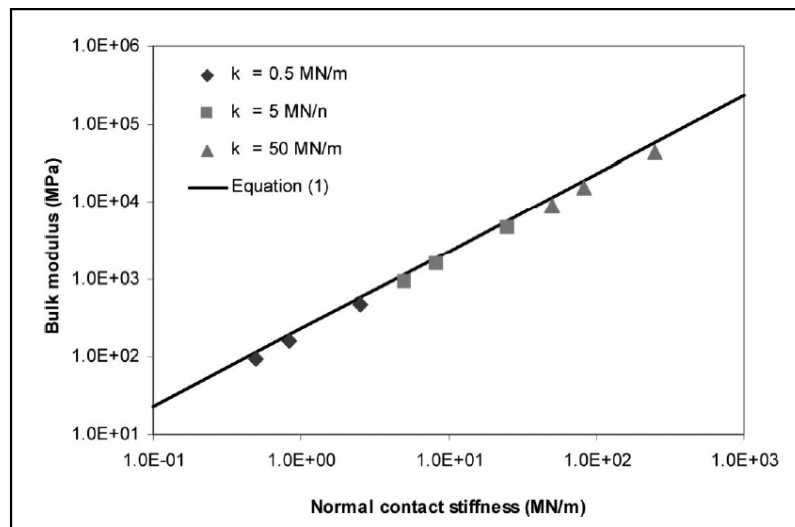


FIGURA 5.2: INFLUENZA DELLA RIGIDEZZA DI CONTATTO NORMALE E TANGENZIALE SUL MODULO DI RIGIDEZZA.

In figura 5.3 è riportata, invece, la relazione tra il coefficiente di Poisson e il rapporto tra rigidità di contatto tangenziale e normale, per tre diversi valori di  $k_s$ .

Il valore del coefficiente di Poisson risulta esclusivamente dipendente dal rapporto tra  $k_n$  e  $k_s$ .

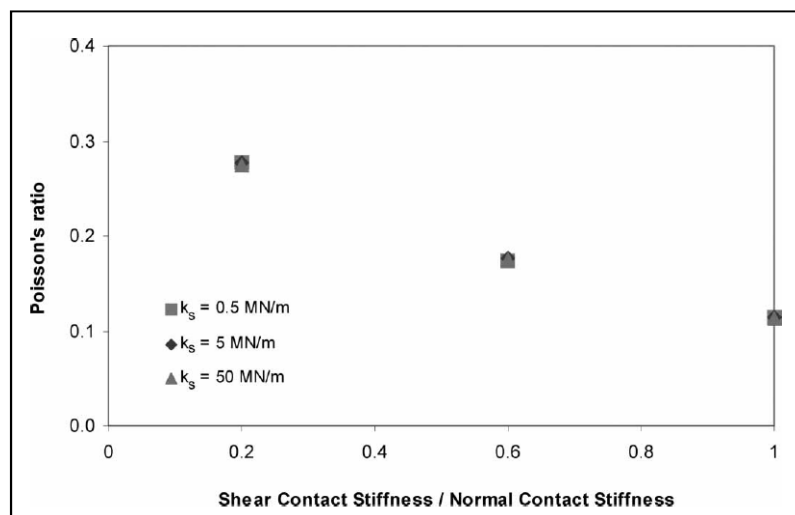


FIGURA 5.3: INFLUENZA DELLA RIGIDEZZA DI CONTATTO NORMALE E TANGENZIALE SUL COEFFICIENTE DI POISSON.

Esaurite le valutazioni sulle proprietà elastiche della miscela, gli autori passano ad analizzare l'effetto della componente viscoelastica del legante sul comportamento della miscela di conglomerato. Tra i diversi modelli viscoelastici reperibili in letteratura Collop et al. scelgono di schematizzare il bitume mediante il modello di Burger.

Il procedimento più semplice consiste nell'applicare il modello di Burger in maniera indiretta, utilizzandone i parametri caratteristici per calcolare le rigidezze di contatto normale ( $k_n$ ) e tangenziale ( $k_s$ ) proprie di un modello elastico:

$$k_s = \left[ \frac{1}{K_0^s} + \frac{1}{C_\infty^s} + \frac{1}{K_1^s} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau^s}} \right) \right]^{-1} \quad (5.1)$$

dove:

$K_0^s$  = costante elastica della molla di Maxwell, contatto tangenziale;

$K_1^s$  = costante elastica della molla di Kelvin, contatto tangenziale;

$C_\infty^s$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Maxwell, contatto tangenziale;

$\tau^s = C_1^s / K_1^s$ ;

$C_1^s$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Kelvin, contatto tangenziale;

t = tempo di carico.

$$k_n = \left[ \frac{1}{K_0^n} + \frac{1}{C_\infty^n} + \frac{1}{K_1^n} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau^n}} \right) \right]^{-1} \quad (5.2)$$

dove:

$K_0^n$  = costante elastica della molla di Maxwell, contatto normale;

$K_1^n$  = costante elastica della molla di Kelvin, contatto normale;

$C_\infty^n$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Maxwell, contatto normale;

$\tau^n = C_1^n / K_1^n$ .

$C_1^n$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Kelvin, contatto normale;

t = tempo di carico.

In tabella 5.1 sono riportati i valori delle costanti elastiche delle molle (K) e i coefficienti di smorzamento degli smorzatori viscosi (C) scelti per la schematizzazione del contatto tangenziale e normale all'interno del bitume nello studio del 2004.

TABELLA 5.1: PARAMETRI DEL MODELLO DI BURGER.

	$K_0$ [MN/m]	$C_\infty$ [MNs/m]	$K_1$ [MN/m]	$C_1$ [MNs/m]
Contatto tangenziale ( $k_s$ )	17,9	0,29	0,07	0,034
Contatto normale ( $k_n$ )	179	2,9	0,7	0,34

Si nota come i parametri relativi alla rigidità normale siano dieci volte più grandi rispetto a quelli che caratterizzano la rigidità tangenziale.

In questa fase della sperimentazione, al fine di ridurre gli oneri computazionali, gli autori utilizzano un campione in scala ridotta con diametro pari a 9 mm e altezza pari a 18 mm, contenente complessivamente 228 particelle.

Mediante l'utilizzo del grafico riportato in figura 5.1 gli autori stimano di poter ricondurre la deformazione assiale misurata nel campione di piccole dimensioni a quella che si registrerebbe in un campione più grande, attraverso un fattore moltiplicativo pari a 0,6. Di tale fattore correttivo viene tenuto conto in figura 5.4, dove vengono posti a confronto i risultati di un test di compressione uniaassiale ad una tensione di 400 kPa effettuato in laboratorio e di uno modellato attraverso il software agli elementi discreti PFC<sup>3D</sup>.

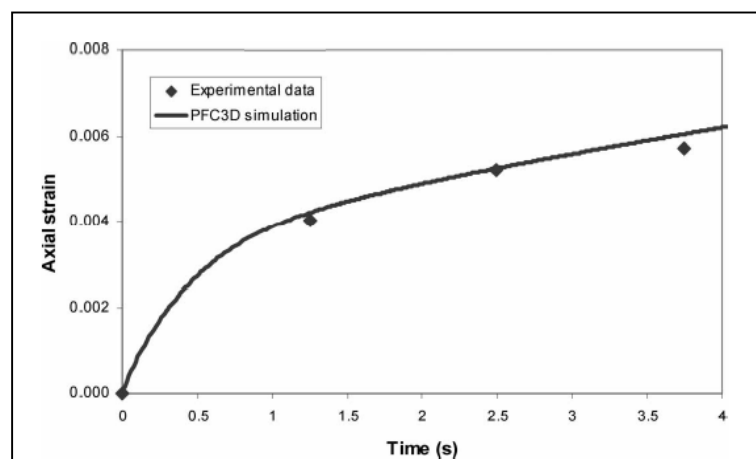


FIGURA 5.4: CONFRONTO DEFORMAZIONE ASSIALE MISURATA E MODELLATA NUMERICAMENTE.

Oltre all'evidente dipendenza della deformazione assiale dal tempo di carico, è possibile osservare come i dati sperimentali siano in completo accordo con quelli ottenuti attraverso la modellazione numerica.

Nello studio del 2006 Collop et al. portano avanti la ricerca intrapresa nel 2004 effettuando alcune modifiche a livello di test effettuati, di dimensioni dei campioni e di parametri utilizzati all'interno del modello di Burger.

Nella prima parte della sperimentazione vengono confrontati dati sperimentali con test di creep uniassiale modellati su provini formati da 1000 (altezza del campione: 33 mm, diametro: 16,5 mm) e 6000 (altezza del campione: 52 mm, diametro: 26 mm) elementi.

Per rappresentare il contributo del legante gli autori differenziano il contatto a taglio e a trazione, che viene schematizzato mediante il modello viscoelastico di Burger, e quello a compressione, per il quale scelgono di utilizzare il modello elastico classico.

I parametri relativi ai due modelli di contatto sono riassunti in tabella 5.2.

TABELLA 5.2: PARAMETRI DEL MODELLO DI BURGER E DEL MODELLO ELASTICO LINEARE.

	$K_0$ [MN/m]	$C_\infty$ [MNs/m]	$K_1$ [MN/m]	$C_1$ [MNs/m]		$E_0$ [MN/m]
Contatto normale di trazione	0.36	2.40	0.09	2.40	Contatto normale di compressione	0.70
Contatto tangenziale	0.12	0.80	0.03	0.80		

In questo caso, a differenza di quanto visto nello studio del 2004, i parametri del modello di Burger relativi al contatto normale (a trazione) vengono assunti pari a tre volte quelli relativi al contatto tangenziale.

In figura 5.5 è riportato il confronto tra risultati sperimentali (reperiti in letteratura) e numerici relativi ad un test di creep uniassiale condotto ad una tensione di 400 kPa.

Risulta evidente come l'andamento della deformazione assiale misurata sperimentalmente sia qualitativamente e quantitativamente coerente con quella stimata tramite i due modelli numerici.



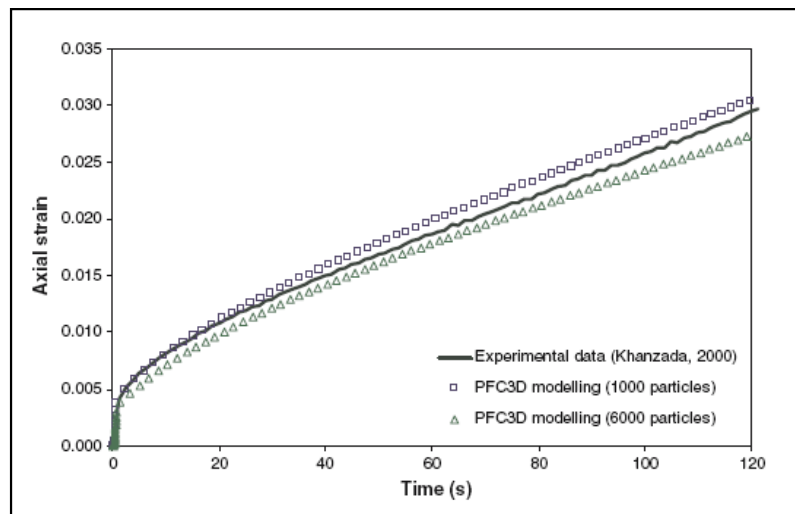


FIGURA 5.5: DEFORMAZIONE ASSIALE MISURATA E MODELLATA PER UN TEST DI CREEP UNIASSIALE A 400 KPA.

Gli autori analizzano, inoltre, il comportamento deformativo del campione; in particolare confrontano l'andamento della deformazione volumetrica ottenuta dai modelli numerici con dati sperimentali riportati in letteratura [60].

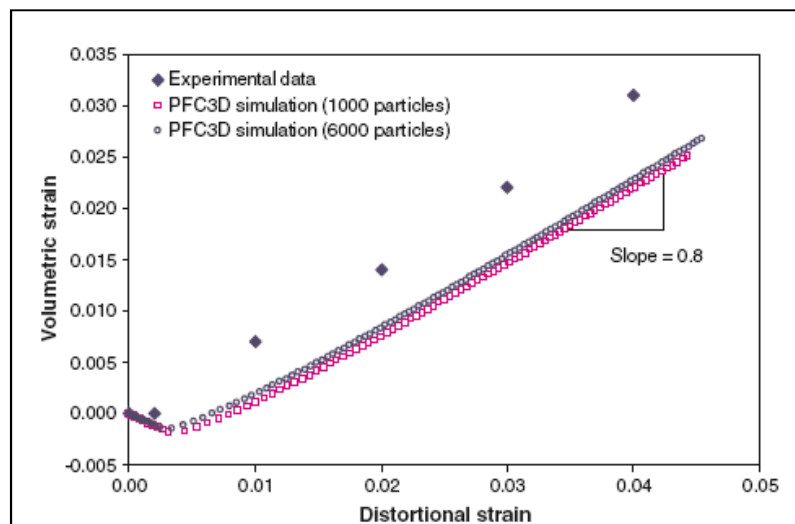


FIGURA 5.6: DEFORMAZIONE VOLUMETRICA MISURATA E MODELLATA PER UN TEST DI CREEP UNIASSIALE A 400 KPA.

Le curve presenti in figura 5.6 mostrano come i risultati sperimentali, pur manifestando un andamento simile a quelli numerici, assumano valori sensibilmente maggiori. Ciò può essere dovuto al fatto che nelle simulazioni agli elementi discreti si è assunta una granulometria costante, con elementi caratterizzati dallo stesso diametro,

mentre nello studio sperimentale le particelle sono caratterizzate da diametri variabili tra 1,18 e 2,36 mm.

Nella seconda parte della sperimentazione gli autori prendono in considerazione test triassiali con l'obiettivo di stabilire se la metodologia DEM sia in grado di cogliere la dipendenza del gradiente di dilatazione dal rapporto tra la tensione media e quella deviatorica (stress ratio:  $\eta$ ).

La procedura di confezionamento del provino non varia rispetto a quella utilizzata per lo studio dei test di compressione uniassiale, l'unica differenza risiede nel fatto che, una volta generato il campione, i muri non vengono eliminati poiché devono garantirne il confinamento laterale. Per ridurre gli oneri computazionali in questa fase dello studio viene utilizzato solamente il provino costituito da 1000 elementi.

Dati sperimentali di test triassiali a 400 kPa ( $\eta=0.6$ ) reperiti in letteratura vengono confrontati, in termini di deformazione volumetrica, con il modello numerico agli elementi discreti (figura 5.7) [100].

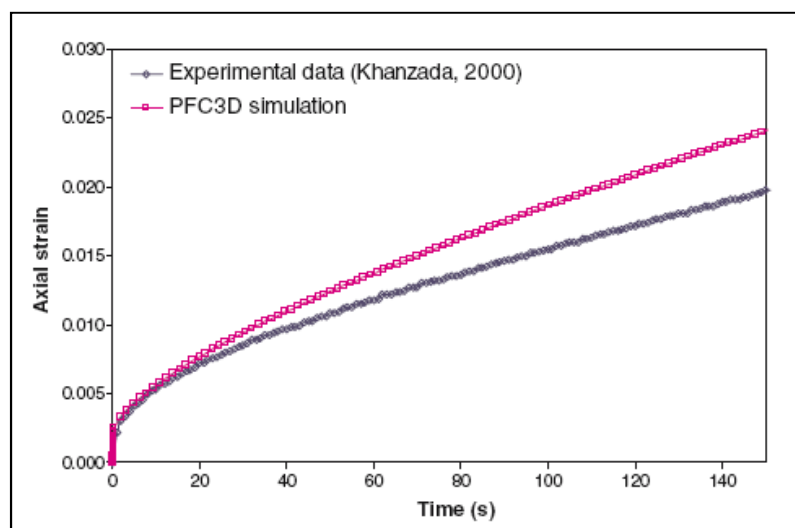


FIGURA 5.7: DEFORMAZIONE ASSIALE MISURATA E MODELLATA PER UN TEST DI CREEP UNIASSIALE A 400 kPa ( $\eta=0.6$ ).

Gradienti di dilatazione in funzione di  $\eta$  sono riportati, per dati sperimentali e modelli numerici, in figura 5.8. Il gradiente di dilatazione relativo ai modelli numerici decresce da un valore di 0,8, corrispondente ad  $\eta = 0,33$  (condizioni uniassiali), a 0,6 ( $\eta = 0,8$ ). Tale andamento decrescente risulta coerente con quello evidenziato dai dati sperimentali.

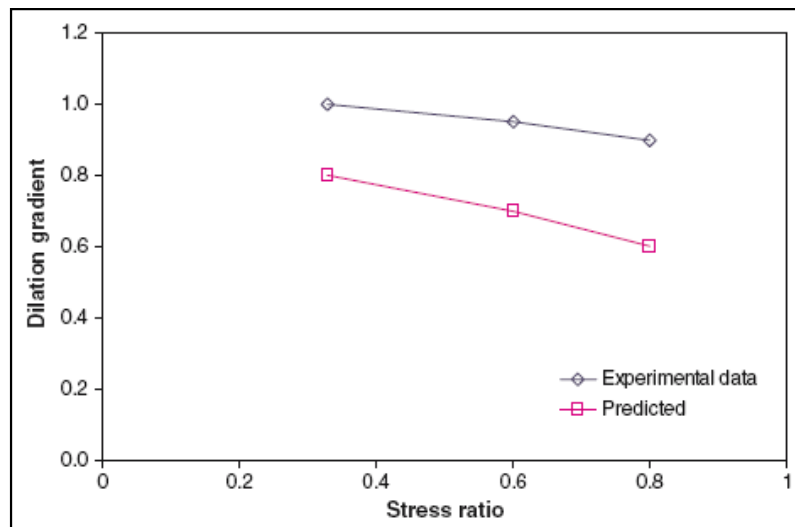


FIGURA 5.8: GRADIENTE DI DILATAZIONE MISURATO E MODELLATO PER UN TEST DI CREEP UNIASSIALE A 400 kPA ( $\eta=0.33,0.6$  E  $0.8$ ).

#### **5.4 DONDI G., BRAGAGLIA (2006), “MODELLAZIONE AD ELEMENTI DISTINTI PARTICELLARI DELLA PROVA ITSM” [68]**

Obiettivo dello studio condotto da Dondi e Bragaglia è la modellazione del test ITSM mediante il metodo degli elementi distinti particellari utilizzando, per rappresentare il comportamento viscoelastico del conglomerato, il modello di Burger.

Il test ITSM è una prova di laboratorio non distruttiva che si esegue su provini cilindrici di conglomerato bituminoso con spessore compreso tra 30 mm e 80 mm e diametro di 100 mm, 150 mm o 200 mm.

La prova viene effettuata alla temperatura di 20° C, inserendo il provino in una apparecchiatura costituita da una base d'appoggio inferiore, un telaio orizzontale con quattro morsetti per il fissaggio del campione, una piastra di carico superiore e due trasduttori elettrici, posti diametralmente uno di fronte all'altro, per misurare la deformazione diametrica orizzontale del provino (figura 5.9).

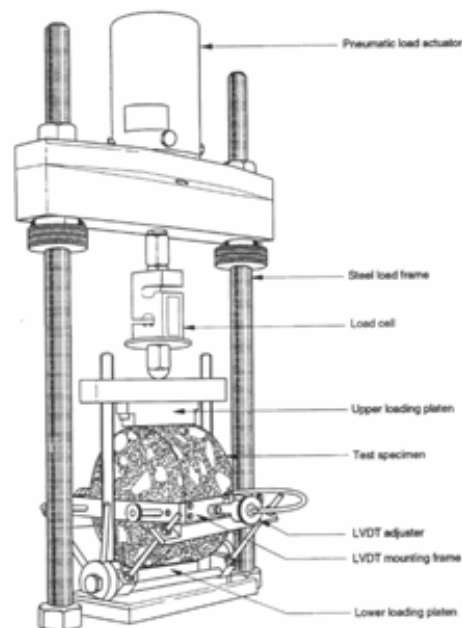


FIGURA 5.9: APPARECCHIATURA ITSM.

La prova ITSM permette di determinare in laboratorio il valore di un modulo di rigidezza che è maggiormente rappresentativo, rispetto alla stabilità Marshall ed al modulo complesso ottenuto mediante il Creep test, del comportamento della miscela in condizioni di esercizio sottoposta all'azione di carichi veicolari.

Il provino utilizzato per il test sperimentale in laboratorio possiede le seguenti caratteristiche:

- diametro: 150 mm
- spessore: 55 mm,
- legante: 4,6% di bitume 70/100
- aggregato: curva granulometrica tipica di uno strato di base.

Per riprodurre fedelmente la distribuzione granulometrica caratteristica del campione reale gli autori fanno ricorso alla tecnica della *explosive repulsion* all'interno di un solido cilindrico formato da elementi *boundary* ed avente le stesse dimensioni del provino.

Tale tecnica consiste nella generazione di un numero finito di elementi nel volume appartenente al solido di confinamento e nel progressivo incremento del loro

raggio fino al raggiungimento del completo contatto reciproco tra le particelle; si ottiene così un modello formato da 2500 elementi.

La piastra di carico superiore e la base d'appoggio inferiore vengono schematizzate mediante elementi boundary dotati di un coefficiente di attrito acciaio-particelle nullo e di opportuni valori delle rigidzze nei punti di contatto rappresentativi della resistenza caratteristica dell'acciaio (figura 5.10).

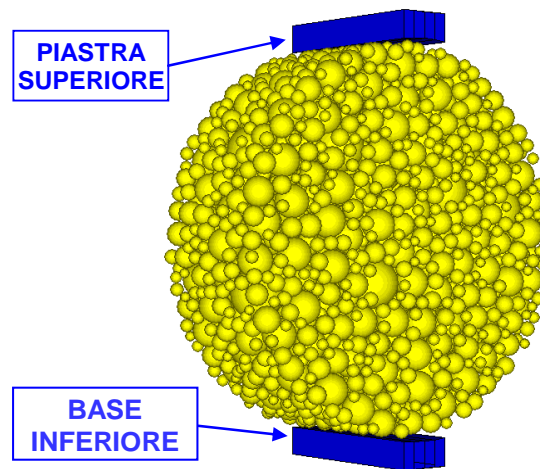


FIGURA 5.10: SCHEMATIZZAZIONE DELLE PIASTRE CON ELEMENTI BOUNDARY.

Per modellare il comportamento viscoelastico caratteristico del conglomerato bituminoso gli autori applicano l'approccio adottato da Collop et al. [44] prevedendo l'applicazione di un legame lineare in cui le rigidzze di contatto normali e tangenziali variano in base ai parametri del modello di Burger.

La rigidzza di contatto normale  $k_n$  e quella tangenziale  $k_s$  vengono quindi espresse in funzione del tempo di carico e dei parametri dei modelli di Maxwell e Kelvin che, in serie, costituiscono il modello di Burger:

$$k_n = \left[ \frac{1}{K_0^n} + \frac{t}{c_\infty^n} + \frac{1}{K_1^n} \left( 1 - e^{-t/\tau^n} \right) \right]^{-1} \quad (5.3)$$

con  $\tau^n = \frac{c_1^n}{K_1^n}$  tempo di rilassamento

$$k_s = \left[ \frac{1}{K_0^s} + \frac{t}{c_\infty^s} + \frac{1}{K_1^s} \left( 1 - e^{-t/\tau^s} \right) \right]^{-1} \quad (5.4)$$

con  $\tau^s = \frac{C_1^s}{K_1^s}$  tempo di rilassamento

dove:

$K_0^n$  = costante elastica della molla di Maxwell, contatto normale;

$K_0^s$  = costante elastica della molla di Maxwell, contatto tangenziale;

$K_1^n$  = costante elastica della molla di Kelvin, contatto normale;

$K_1^s$  = costante elastica della molla di Kelvin, contatto tangenziale;

$C_\infty^n$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Maxwell, contatto normale;

$C_\infty^s$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Maxwell, contatto tangenziale;

$C_1^n$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Kelvin, contatto normale;

$C_1^s$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Kelvin, contatto tangenziale.

Per calibrare i valori dei parametri di Burger da inserire nelle equazioni sopra citate le rigidezze di contatto  $k_n$  e  $k_s$  proprie del modello elastico vengono calcolate in funzione dei parametri macroscopici caratteristici del materiale:

- modulo di deformazione volumica  $K'$ ;
- modulo di elasticità tangenziale  $G'$ ;
- coefficiente di Poisson  $\nu$ ;
- modulo di Young  $E$  (simile in valore allo Stiffness Modulus  $S_m$ )

attraverso le seguenti equazioni:

$$k_n = K' \frac{4\pi\Sigma R^2}{(1-\nu)\Sigma R\Sigma L} \quad (5.5)$$

$$k_s = G' \frac{8\pi\Sigma R^2}{(1-\nu)\Sigma R\Sigma L} - k_n \quad (5.6)$$

dove:

$n$  = porosità;

$L$  = distanza tra i baricentri di due particelle adiacenti;

$R$  = raggio medio delle particelle adiacenti.

In tabella 5.3 si riportano, per una temperatura di 20°C, i valori della densità ( $\rho$ ), del coefficiente di *Poisson* ( $\nu$ ), del modulo di deformazione volumica ( $K'$ ), del modulo elastico ( $E'$ ) e del modulo di elasticità tangenziale ( $G'$ ); per il modello di Burger figurano invece i corrispondenti valori delle rigidezze e dei parametri delle molle e degli smorzatori del sistema.

TABELLA 5.3: PARAMETRI MACROSCOPICI DEL MATERIALE E PARAMETRI DI BURGER.

$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]		$\nu$	$K'$ [MPa]			$E'$ [MPa]		$G'$ [MPa]		
2322		0,15	450			945		411		
Contatto normale					Contatto tangenziale					
$k_n$ [N/m]	$K_0^n$ [N/m]	$K_1^n$ [N/m]	$C_\infty^n$ [Ns/m]	$C_1^n$ [Ns/m]	$K_s$ [N/m]	$K_0^s$ [N/m]	$K_1^s$ [N/m]	$C_\infty^s$ [Ns/m]	$C_1^s$ [Ns/m]	
$8,9 \times 10^6$	$8,9 \times 10^6$	$1,0 \times 10^4$	$1,0 \times 10^{10}$	$1,0 \times 10^{10}$	$8,9 \times 10^5$	$8,9 \times 10^5$	$1,0 \times 10^3$	$1,0 \times 10^9$	$1,0 \times 10^9$	

La simulazione della prova viene condotta conferendo alla piastra superiore una velocità tale da sviluppare ad ogni ciclo, in un intervallo temporale di circa 124 ms, quel valore del carico impulsivo che causa nel provino una deformazione diametrale orizzontale di 5  $\mu\text{m}$ .

Nel modello lo spostamento della piastra superiore, genera un'onda tensionale che si propaga all'interno del provino, attraverso i punti di contatto, con velocità finita. Per quanto riguarda il provino testato in laboratorio, invece, lo stato tensionale indotto dalla forza verticale si sviluppa istantaneamente in tutti i punti del sistema.

Tale fenomeno è imputabile al tempo di implementazione delle equazioni da parte del solutore del codice di calcolo e cresce all'aumentare del numero di elementi costituenti il modello.

Al fine di ottenere lo stato tensionale effettivamente indotto in tutti i punti del sistema dalla forza verticale massima, il modello viene lateralmente confinato mediante elementi *boundary* così disposti:

- una coppia di piani adiacenti alle basi più un anello laterale nella prima fase. Consente, durante la propagazione dell'onda tensionale dalla piastra superiore a quella inferiore, la conservazione della deformazione iniziale in tutte le direzioni e l'incremento della forza sulla seconda piastra fino al 85% del valore di quella agente sulla prima (figura 5.11-a) .
- una coppia di piani verticali a contatto col piano diametrale orizzontale in sostituzione degli elementi *boundary* laterali nella seconda fase. Consente, nella fase finale di propagazione di tale onda, di vincolare la deformazione diametrale orizzontale fino al raggiungimento per il modello di una condizione di equilibrio rappresentata dall'uguaglianza tra la forza verticale agente sulla piastra inferiore e quella risultante sulla piastra superiore (figura 5.11-b).

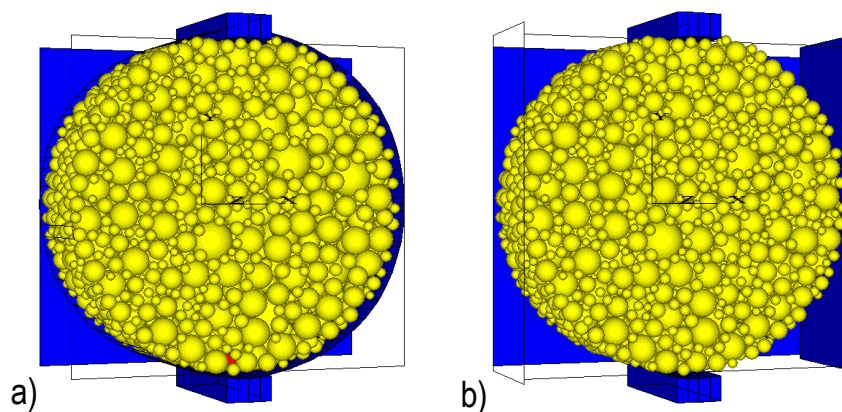


FIGURA 5.11: A) COPPIA DI PIANI VERTICALI CON ANELLO LATERALE, B) DOPPIA COPPIA DI PIANI VERTICALI (DONDI E BRAGAGLIA, 2006).

Tale procedimento, previa cancellazione del confinamento laterale, permette di tracciare per ciascun ciclo di carico in corrispondenza del *peak load* la distribuzione delle forze di contatto interne al sistema, suddivise rispettivamente in nere di compressione e rosse di trazione (figura 5.12).



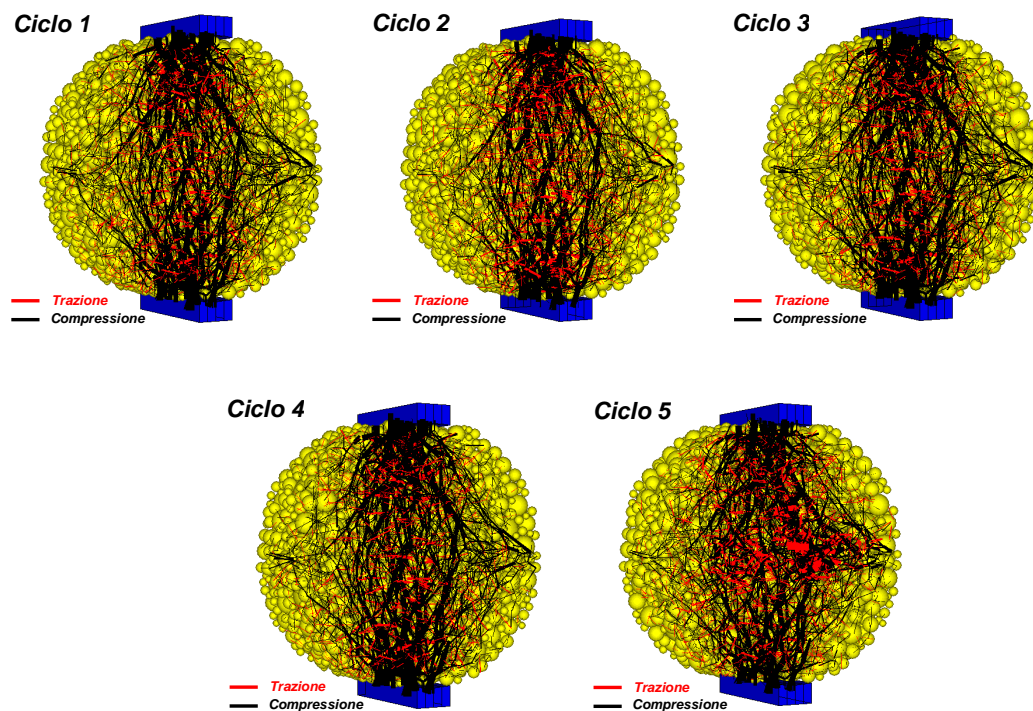


FIGURA 5.12: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO NEL MODELLO DEM.

Per determinare l'andamento delle tensioni normali, di compressione sulla prima giacitura e di trazione sulla seconda vengono inseriti nel modello nove volumi di misura disposti in doppia fila sul piano diametrico orizzontale e su quello verticale (figura 5.13).

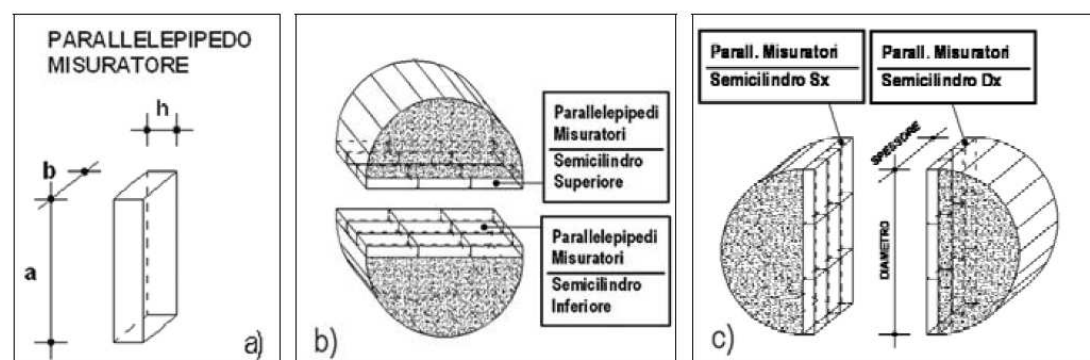


FIGURA 5.13: VOLUMI DI MISURA.

La tensione, applicata nel baricentro della base del generico elemento misuratore, viene calcolata come rapporto tra la sommatoria delle componenti

normali alla giacitura delle forze di contatto contenute nel generico parallelepipedo e l'area della sua base maggiore.

I valori puntuali di tali sforzi, prodotti nel piano diametrale dalle forze di contatto caratterizzanti uno dei semicilindri del modello, vengono interpolati mediante una curva tridimensionale al fine di studiarne l'andamento nello spazio. Gli autori calcolano, inoltre, il coefficiente di determinazione  $R^2$  indicativo del grado di regressione esistente tra i valori calcolati coi parallelepipedi e quelli corrispondenti spiegati dalla curva.

Per l'interpolazione dei vettori di compressione agenti sul piano diametrale orizzontale viene adottata una curva funzione esponenziale di due variabili (figura 5.14-a) mentre per l'interpolazione dei vettori di trazione agenti sul piano diametrale verticale si ricorre ad una curva a sella (figura 5.14-b).

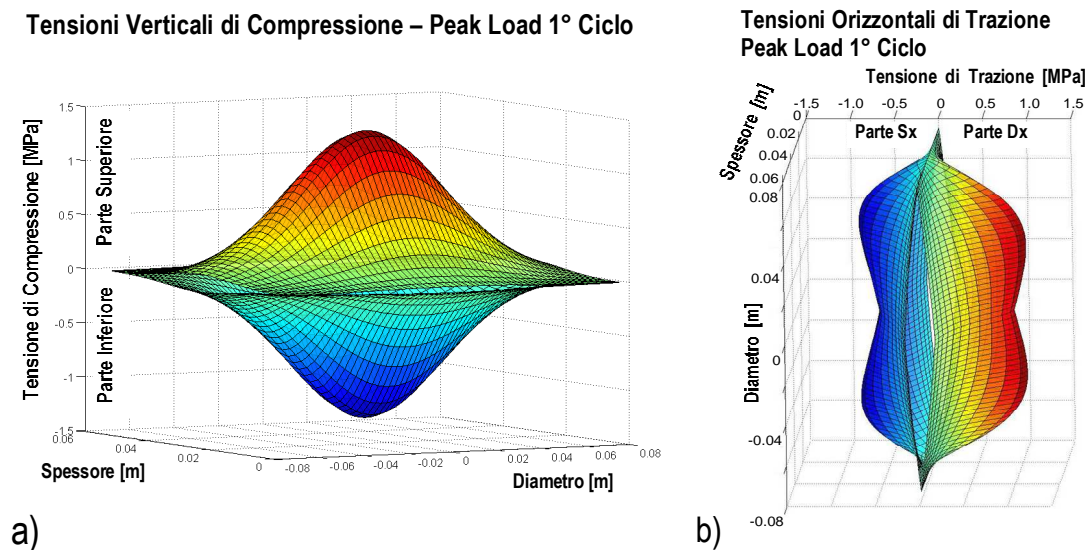


FIGURA 5.14: A) CURVE ESPONENZIALI PER SFORZI DI COMPRESSIONE, B) CURVE A SELLA PER SFORZI DI TRAZIONE.

Per ciascun ciclo di carico i coefficienti della generica famiglia di curve vengono modificati procedendo per tentativi fino all'individuazione di quelle curve che massimizzano il valore del coefficiente di determinazione, approssimando al meglio i risultati della modellazione numerica.

Il confronto tra risultati sperimentali numerici viene effettuato attraverso l'analisi dei diagrammi relativi all'andamento della forza verticale e della deformazione diametrale orizzontale in funzione del tempo di carico (figura 5.15).

Il modello numerico presenta, durante ciascuna fase, curve di carico, con andamento crescente fino al valore di picco, quantitativamente e qualitativamente analoghe a quelle ottenute in laboratorio. Le curve di deformazione diametrale orizzontale del modello presentano, invece, un andamento lineare fino al raggiungimento del valore massimo pari a circa 5  $\mu\text{m}$ .

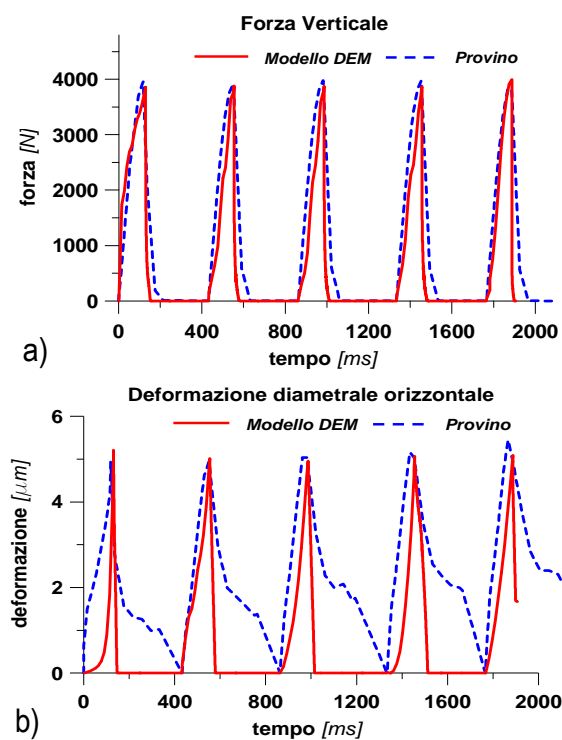


FIGURA 5.15: A) FORZA VERTICALE, B) DEFORMAZIONE DIAMETRALE ORIZZONTALE.

In conclusione, il modello utilizzato presenta curve di forza verticale e di deformazione diametrale orizzontale che approssimano in modo attendibile quelle reali, individuando valori di picco all'incirca uguali a quelli ottenuti con la prova di laboratorio.

Le differenze esistenti possono essere imputabili all'utilizzo del modello di Burger secondo l'approccio indiretto che prevede, come detto precedentemente, la

calibrazione di un modello di contatto elastico lineare mediante i parametri di Burger e non l'applicazione del vero e proprio modello di contatto viscoelastico.

**5.5 ABBAS A., MASAD E., PAPAGIANNAKIS T. & HARMAN T. (2007),  
“MICROMECHANICAL MODELING OF THE VISCOELASTIC BEHAVIOR OF  
ASPHALT MIXTURES USING THE DISCRETE-ELEMENT METHOD” [5]**

Abbas et al. presentano una metodologia innovativa per studiare la risposta viscoelastica del conglomerato bituminoso utilizzando il metodo degli elementi discreti particellari.

Partendo dalla medesima miscela di aggregati vengono confezionate nove miscele di conglomerato, due delle quali con bitumi tradizionali e sette con bitumi modificati (tabella 5.4).

TABELLA 5.4: CARATTERISTICHE DELLE MISCELE TESTATE.

Miscela	Tipologia legante	Percentuale polimero [%]	Dimensione max aggregato [mm]
1	PG 64-28 (Tradizionale)	0.00	19
2	PG 70-22 (Tradizionale)	0.00	19
3	Terpolymer	2.20	19
4	SBS linear	3.75	19
5	SBS linear grafted	3.75	19
6	SBS radial grafted	3.25	19
7	EVA	5.50	19
8	EVA grafted	5.50	19
9	CRA	5.00	19

Le proprietà reologiche dei leganti utilizzati sono definite mediante test effettuati con il *Dynamic Shear Rheometer (DSR)*. Una volta definiti i parametri relativi al modello di contatto che caratterizza il bitume vengono confezionati provini cilindrici con diametro pari a 100 mm e altezza pari a 150 mm.

Il modulo dinamico e l'angolo di fase delle diverse miscele sono misurati sottoponendo i provini a carico sinusoidale analogo a quello che caratterizza il Simple

Performance Test (SPT). Le prove vengono effettuate ad una temperatura di 50°C e a sei frequenze di carico: 0,1, 0,5, 1, 5, 10 e 20 Hz.

Il modello agli elementi discreti viene creato avvalendosi di tecniche di analisi dell'immagine che forniscono sezioni verticali dei provini sottoposti ai test di laboratorio. In tali sezioni ogni pixel corrisponde ad un'area del provino reale di 0,36 x 0,36 mm. A causa delle ridotte dimensioni delle particelle di filler i pixel di colore nero non rappresentano esclusivamente il bitume, bensì il mastice, costituito da bitume più filler minerale.

Nel software di calcolo agli elementi discreti utilizzato (PFC<sup>2D</sup>) ogni pixel viene rappresentato da un disco di diametro pari a 0,36 mm e spessore unitario.

I dischi costituenti un unico aggregato vengono assemblati, sfruttando la metodologia clump, a formare un unico elemento dotato di comportamento rigido.

Una volta definite le modalità di modellazione degli aggregati gli autori definiscono i modelli costitutivi da applicare nei punti di contatto tra i diversi elementi. Abbas et al. scelgono di utilizzare un modello elastico-lineare per descrivere il contatto tra gli aggregati e la piastra di carico e tra gli aggregati stessi, e un modello viscoelastico per descrivere il contatto tra i dischi che rappresentano il mastice e i clump che rappresentano le sfere.

Per il modello di contatto lineare la rigidità normale e quella tangenziale vengono calcolate a partire dalle rigidità degli elementi a contatto, ipotizzando che agiscano in serie. Dette A e B le due particelle a contatto le rigidità possono essere espresse dalle seguenti equazioni [90]:

$$k_n = \frac{k_n^{[A]} \cdot k_n^{[B]}}{k_n^{[A]} + k_n^{[B]}} \quad (5.7)$$

$$k_s = \frac{k_s^{[A]} \cdot k_s^{[B]}}{k_s^{[A]} + k_s^{[B]}} \quad (5.8)$$

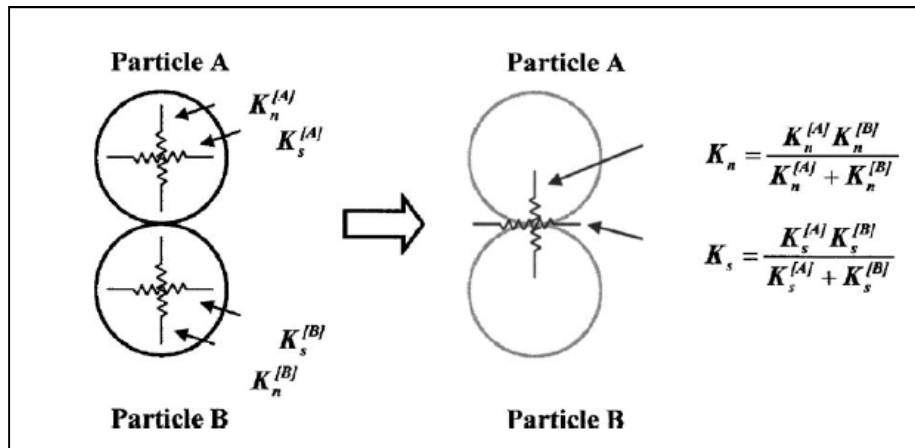


FIGURA 5.16: CONTATTO ELASTICO LINEARE TRA DUE PARTICELLE.

In base a quanto riportato in letteratura gli autori scelgono di utilizzare, per schematizzare il comportamento viscoelastico del mastice, il modello di Burger. Tale modello, implementato nel software di calcolo PFC<sup>2D</sup>, è descritto dalla seguente equazione di secondo ordine alle derivate parziali:

$$F(R_M R_K) + \dot{F}(\eta_M R_K + R_M \eta_K + R_M \eta_M) + \ddot{F}(\eta_M \eta_K) = \dot{U}(R_M \eta_M R_K) + \ddot{U}(R_M \eta_M \eta_K) \quad (5.9)$$

dove:

F = forza di contatto;

U = spostamento;

R<sub>M</sub> e R<sub>K</sub> = costanti elastiche del modello di Maxwell e del modello di Kelvin;

η<sub>M</sub> e η<sub>K</sub> = coefficienti di smorzamento viscoso del modello di Maxwell e del modello di Kelvin.

In PFC<sup>3D</sup> l'equazione precedente viene semplificata riconducendosi ad un gruppo di due equazioni differenziali alle derivate parziali di primo ordine, relative rispettivamente al modello di Maxwell e a quello di Kelvin:

$$\dot{U}_M = \frac{F}{\eta_M} + \frac{\dot{F}}{R_M} \quad (5.10)$$

$$F = R_K U_K + \eta_K \dot{U}_K \quad (5.11)$$

dove i pedici M e K fanno riferimento al modello di Maxwell e a quello di Kelvin.

Dal momento che il modello di Maxwell e quello di Kelvin sono posti in serie è possibile calcolare lo spostamento totale del modello di Burger attraverso una semplice somma degli spostamenti relativi ai due modelli:

$$U_B = U_M + U_K \quad (5.12)$$

La soluzione si ottiene attraverso uno schema iterativo alle differenze finite attraverso il quale possono essere definite forze, spostamenti e le loro derivate parziali:

$$U_M = \frac{U_M^{t+1} + U_M^t}{2} \quad (5.13)$$

$$\dot{U}_M = \frac{U_M^{t+1} - U_M^t}{\Delta t} \quad (5.14)$$

$$U_K = \frac{U_K^{t+1} + U_K^t}{2} \quad (5.15)$$

$$\dot{U}_K = \frac{U_K^{t+1} - U_K^t}{\Delta t} \quad (5.16)$$

$$F = \frac{F^{t+1} + F^t}{2} \quad (5.17)$$

$$\dot{F} = \frac{F^{t+1} - F^t}{\Delta t} \quad (5.18)$$

dove:

$U_M^t, U_M^{t+1}$  = spostamento del modello di Maxwell al tempo t e t+1;

$U_K^t, U_K^{t+1}$  = spostamento del modello di Kelvin al tempo t e t+1;

$F^t, F^{t+1}$  = forza relativa al modello di Burger al tempo t e t+1;

$\Delta t$  = intervallo temporale di analisi.

Sostituendo queste equazioni nelle (5.10) e (5.11) e risolvendo per  $U_M^{t+1}$  e  $U_K^{t+1}$  si ottiene:

$$U_M^{t+1} = \Delta t \left( \frac{F^{t+1} + F^t}{2\eta_M} + \frac{F^{t+1} - F^t}{\Delta t R_M} + \frac{U_M^t}{\Delta t} \right) \quad (5.19)$$

$$U_K^{t+1} = \frac{2\Delta t}{R_K \Delta t + 2\eta_K} \left( \frac{F^{t+1} + F^t}{2} - \frac{R_K U_K^t}{2} + \frac{\eta_K U_K^t}{\Delta t} \right) \quad (5.20)$$

Il metodo degli elementi discreti particellari prevede l'update delle forze piuttosto che dello spostamento in corrispondenza dei punti di contatto. Questo può essere ottenuto considerando la derivata dell'equazione (5.12):

$$\dot{U}_B = \dot{U}_M + \dot{U}_K$$

$$\frac{U_B^{t+1} - U_B^t}{\Delta t} = \frac{U_M^{t+1} + U_M^t}{\Delta t} + \frac{U_K^{t+1} + U_K^t}{\Delta t} = \frac{U_M^{t+1}}{\Delta t} - \frac{U_M^t}{\Delta t} + \frac{U_K^{t+1}}{\Delta t} - \frac{U_K^t}{\Delta t} \quad (5.21)$$

Sostituendo le espressioni di  $U_M^{t+1}$  e  $U_K^{t+1}$  prima trovate si ottiene:

$$\frac{U_B^{t+1} - U_B^t}{\Delta t} = \left( \frac{F^{t+1} + F^t}{2} + \frac{F^{t+1} - F^t}{\Delta t R_M} + \frac{U_M^t}{\Delta t} \right) - \frac{U_M^t}{\Delta t} + \frac{2}{R_K \Delta t + 2\eta_K} \left( \frac{F^{t+1} + F^t}{2} - \frac{R_K U_K^t}{2} + \frac{\eta_K U_K^t}{\Delta t} \right) - \frac{U_K^t}{\Delta t}$$

Risolvendo per  $F^{t+1}$  risulta:

$$F^{t+1} = \frac{\left( \frac{U_B^{t+1} - U_B^t}{\Delta t} \right) + \left( \frac{U_K^t}{\Delta t} + \frac{R_K U_K^t}{R_K \Delta t + 2\eta_K} - \frac{2R_K U_K^t}{R_K (\Delta t)^2 + 2\eta_K \Delta t} \right) + F^t \left( \frac{1}{\Delta t R_M} - \frac{1}{2\eta_M} - \frac{1}{R_K \Delta t + 2\eta_K} \right)}{\left[ \frac{1}{\Delta t R_M} + \frac{1}{2\eta_M} + \frac{1}{R_K \Delta t + 2\eta_K} \right]} \quad (5.22)$$

Per definire in maniera corretta il comportamento reologico dei mastici gli autori elaborano una procedura basata sulla minimizzazione di una funzione obiettivo all'interno della quale compaiono i valori di  $G'$  e  $G''$  misurati con il DSR e stimati mediante il modello di Burger:



$$\text{Funzione obiettivo} = \sum_{j=1}^m \left[ \left( \frac{G'(\omega_j)}{G_j^0} - 1 \right)^2 + \left( \frac{G''(\omega_j)}{G_j''^0} - 1 \right)^2 \right] \quad (5.23)$$

dove:

$G_j^0$  e  $G_j''^0$  = modulo a taglio accumulato e perso misurati mediante il DSR alla frequenza j-esima  $\omega_j$ ;

$G_j'$  e  $G_j''$  = modulo a taglio accumulato e perso relativi alla frequenza j-esima  $\omega_j$  ottenuti utilizzando il modello di Burger;

m = numero di dati.

I parametri di Burger che minimizzano la funzione obiettivo sono riportati in tabella 5.5 per i nove mastici utilizzati.

TABELLA 5.5: PARAMETRI DEL MODELLO DI BURGER PER LE DIVERSE TIPOLOGIE DI LEGANTE.

Tipologia legante	$R_M$ [PA]	$\eta_M$ [PA·s]	$R_K$ [PA]	$\eta_K$ [PA·s]
PG 64-28 (Tradizionale)	341459,7	3092,1	16170,0	6035,4
PG 70-22 (Tradizionale)	532395,4	5773,2	27369,7	9245,7
Terpolymer	187528,0	10985,8	8803,1	3298,2
SBS linear	197154,1	4776,2	11349,5	3541,1
SBS linear grafted	198742,9	6389,5	9837,6	3427,1
SBS radial grafted	200321,3	5570,7	9504,1	3328,0
EVA	67647,8	24529,5	9409,5	1654,0
EVA grafted	159705,0	16601,7	13586,4	3444,4
CRA	2936751	10928,4	16031,4	5780,4

In figura 5.17 sono riportati gli andamenti di  $G^*$  e dell'angolo di fase in funzione della frequenza per il bitume PG 70-22.

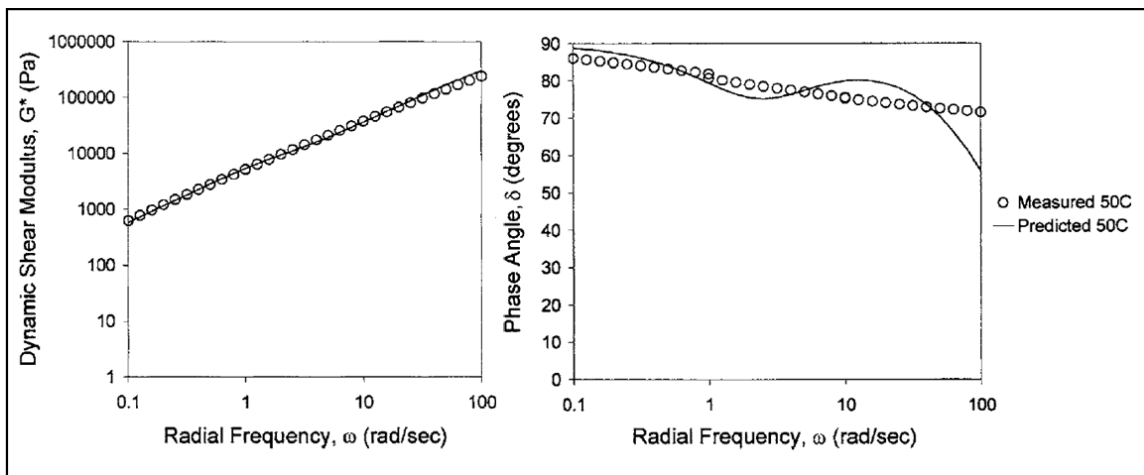


FIGURA 5.17: CONFRONTO MODULO DINAMICO E ANGOLO DI FASE MISURATI E MODELLATI.

Si osserva come i dati sperimentali siano qualitativamente e quantitativamente coerenti con quelli previsti dal modello per quanto riguarda il modulo dinamico, mentre per quanto riguarda l'angolo di fase, seppur nei limiti dell'accettabilità, la coerenza è minore.

Validati i parametri ipotizzati per il modello di Burger gli autori analizzano il comportamento della miscela di conglomerato bituminoso per diverse frequenze di carico ciclico. Per ogni frequenza il numero di cicli di carico viene definito in funzione dell'onere computazionale che comporta, per frequenze di carico inferiori si registrano tempi di calcolo notevolmente più lunghi (tabella 5.6).

TABELLA 5.6: TEMPI DI CALCOLO RELATIVI ALLE DIVERSE FREQUENZE.

Frequenza [Hz]	n° cicli	Tempo di calcolo
10	10	24 ore
5	5	1 giorno
1	1	3 giorni

Il modulo dinamico viene calcolato dividendo la tensione verticale per la deformazione verticale registrate durante i cicli di carico. Il modulo relativo al modello numerico assume valori analoghi a quello determinato sperimentalmente per sette delle nove miscele testate. I due campioni confezionati con legante EVA e EVA grafted, infatti, a differenza degli altri mostrano una sensibile divergenza tra i moduli modellati

e misurati; ciò è imputabile alla complessa natura dei leganti utilizzati il cui comportamento è difficilmente schematizzabile con il modello di Burger.

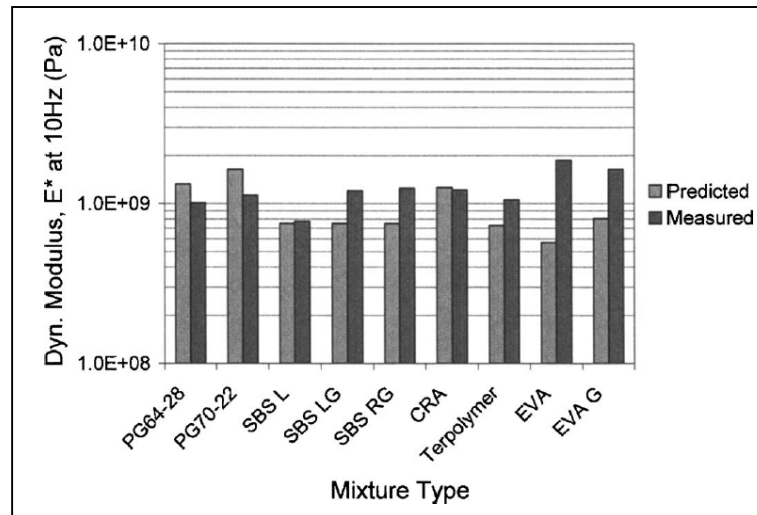


FIGURA 5.18: CONFRONTO MODULI DINAMICI MISURATI E MODELLATI PER LE NOVE MISCELE CONSIDERATE.

**5.6 DONDI G., BRAGAGLIA M., VIGNALI V. (2007), "FLEXIBLE PAVEMENT SIMULATION WITH DISTINCT PARTICLE ELEMENT METHOD"; DONDI G., BRAGAGLIA M., VIGNALI V. (2008), "EVOLUZIONE DEI CRITERI DI CALCOLO DELLE PAVIMENTAZIONI FLESSIBILI: I MODELLI PARTICELLARI" [70], [71]**

Lo studio presentato in queste memorie conferma le potenzialità del metodo DEM particellare nel riprodurre l'effettivo comportamento del conglomerato bituminoso non solo per quanto riguarda provini di limitata estensione ma anche nei confronti della risposta complessiva di una pavimentazione stradale.

Dondi et al. (2007) sviluppano un modello 3D di sovrastruttura flessibile utilizzando, a partire da curve granulometriche reali, la tecnica dell'up-scaling (figura 5.19).

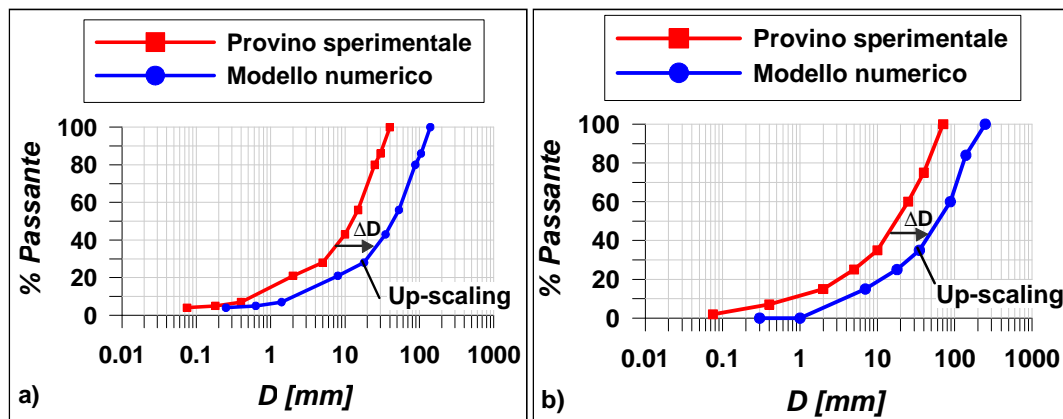


FIGURA 5.19: CURVA GRANULOMETRICA DEGLI STRATI IN CONGLOMERATO (A) E DELLA FONDAZIONE (B).

In questo modo lo strato superficiale in conglomerato bituminoso (spessore 0,23 m) e la fondazione (spessore 0,30 m) vengono simulati rispettivamente attraverso 16800 ed 11100 particelle; il sottofondo (spessore 0,05 m), invece, è schematizzato mediante sfere di raggio costante pari a 0.025 m. Le dimensioni complessive del modello risultano essere pari a:  $2,00 \times 2,00 \times 0,68 \text{ m}^3$  (figura 5.20).

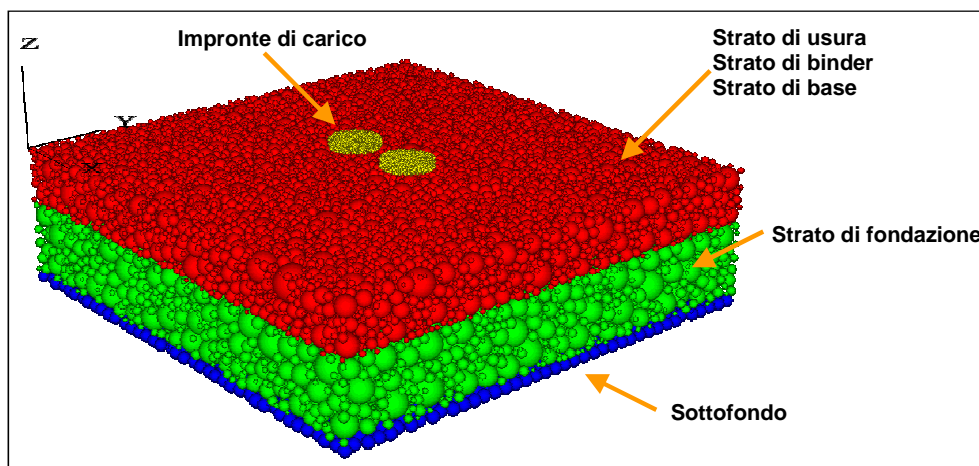


FIGURA 5.20: MODELLO PAVIMENTAZIONE (MODELLO A).

Il comportamento viscoelastico del conglomerato bituminoso, come nello studio precedentemente illustrato (paragrafo 5.4), viene simulato utilizzando un modello elastico lineare le cui rigidezze di contatto vengono calcolate a partire dai coefficienti del modello di Burger mediante le equazioni (5.3) e (5.4).

In questo caso però, per calibrare i valori di  $k_n$  e  $k_s$  in funzione delle caratteristiche macroscopiche del materiale, vengono utilizzate le seguenti equazioni:

$$k_n = K' \frac{600\pi R}{(100-V_v)C_v} \quad (5.24)$$

$$k_s = -G' + \sqrt{\frac{G'^2 + 9CDG'k_n}{4,5CD}} \quad (5.25)$$

$$\text{con } C = \frac{C_v \sum L}{\pi \sum R^2} \quad (5.26)$$

$$\text{e } D = \frac{1+4\nu}{\left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{2}{1-2\nu}\right)^2} \quad (5.27)$$

dove:

$G'$  = modulo di elasticità tangenziale;

$K'$  = modulo di deformazione volumica;

$C_v$  = numero medio di contatti per particella;

$R$  = raggio medio delle particelle;

$V_v$  = volume percentuale dei vuoti;

$\nu$  = coefficiente di Poisson;

$L$  = distanza tra i baricentri di due particelle in contatto.

In tabella 5.7 sono riportati i parametri macroscopici di laboratorio relativi agli strati che costituiscono la pavimentazione, mentre in tabella 5.8 sono riassunti i valori dei parametri di Burger che schematizzano il contatto all'interno degli strati in conglomerato bituminoso.

TABELLA 5.7: PARAMETRI MACROSCOPICI DEGLI STRATI IN CONGLOMERATO BITUMINOSO.

Strato	$\gamma$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$	$K'$ [MPa]	$E'$ [MPa]	$G'$ [MPa]
Usura	2650	0,35	2780	2500	925
Binder	2650	0,35	2445	2200	815
Base	2650	0,35	2220	2000	715

TABELLA 5.8: PARAMETRI DI BURGER.

Contatto normale					Contatto tangenziale				
$k_n$ [MN/m]	$K_0^n$ [MN/m]	$K_1^n$ [MN/m]	$C_\infty^n$ [MNs/m]	$C_1^n$ [MNs/m]	$k_n$ [MN/m]	$K_0^n$ [MN/m]	$K_1^n$ [MN/m]	$C_\infty^n$ [MNs/m]	$C_1^n$ [MNs/m]
$6,4 \times 10^8$	$1,0 \times 10^9$	$1,0 \times 10^8$	$5,0 \times 10^7$	$5,0 \times 10^6$	$6,4 \times 10^7$	$1,0 \times 10^8$	$1,0 \times 10^7$	$5,0 \times 10^6$	$5,0 \times 10^5$

Per la definizione dei contatti all'interno della fondazione ed del sottofondo naturale, entrambi incoerenti, si utilizza il modello elastico lineare. Il comportamento del mezzo risulta quindi governato dalle rigidzze normale ( $k_n$ ) e tangenziale ( $k_s$ ) e dalle proprietà d'attrito ( $\mu$ ). Quest'ultimo, in particolare, viene valutato partendo dall'angolo d'attrito macroscopico delle miscele ( $\phi = 35^\circ$ ) ed assunto pari a 0,8.

I parametri macroscopici degli strati non legati ed i relativi valori delle rigidzze di contatto sono riportati rispettivamente nelle tabelle 5.9 e 5.10.

TABELLA 5.9: PARAMETRI MACROSCOPICI DI FONDAZIONE E SOTTOFONDO.

Strato	$\gamma$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$	$K'$ [MPa]	$E'$ [MPa]	$G'$ [MPa]
Fondazione	2625	0,45	2670	800	280
Sottofondo	2300	0,47	830	150	50

TABELLA 5.10: RIGIDZZE NORMALI E TANGENZIALI DEL MODELLO DI CONTATTO ELASTICO LINEARE.

Strato	$k_n$ [MN/m]	$k_s$ [MN/m]
Fondazione	$3,6 \times 10^{10}$	$3,1 \times 10^9$
Sottofondo	$2,6 \times 10^{10}$	$2,9 \times 10^9$

La pavimentazione, caratterizzata dagli strati e dai modelli di contatto finora descritti, viene sollecitata mediante un unico ciclo di carico attraverso due impronte circolari che inducono ciascuna sulla sovrastruttura una forza verticale costante pari a 30 kN. In figura 5.21 è riportata la distribuzione delle forze di contatto all'interno del campione durante la fase di carico.

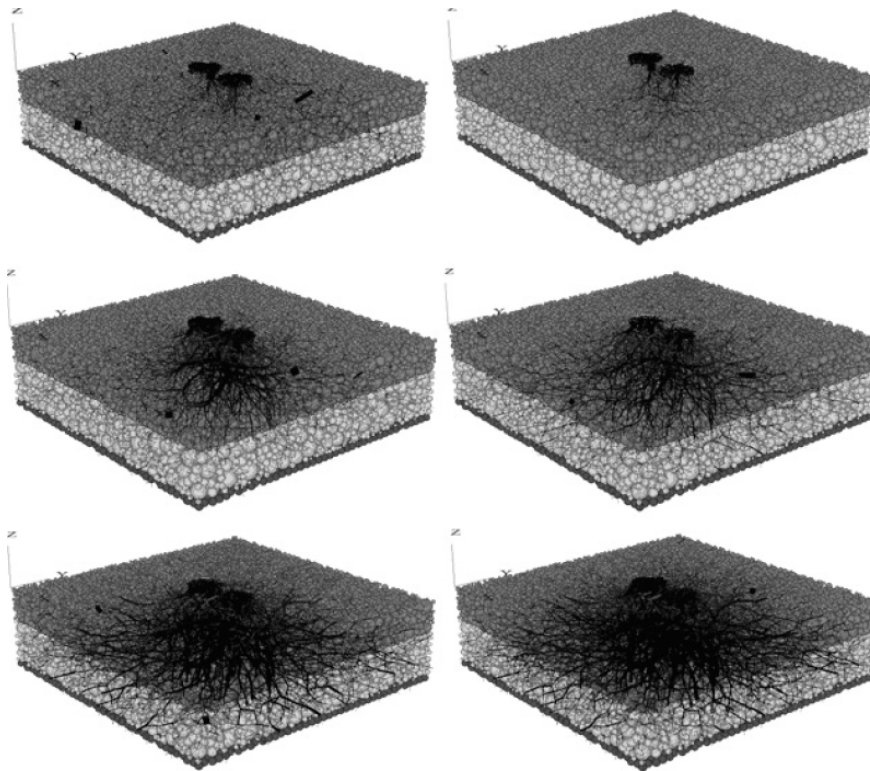


FIGURA 5.21: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO ALL'INTERNO DEL MODELLO DURANTE IL CICLO DI CARICO.

Per valutare l'attendibilità del DEM nel riprodurre l'effettivo comportamento di una sovrastruttura stradale gli autori confrontano i risultati numerici con quelli ottenuti dal codice BISAR in corrispondenza delle interfacce rappresentate in figura 5.22.

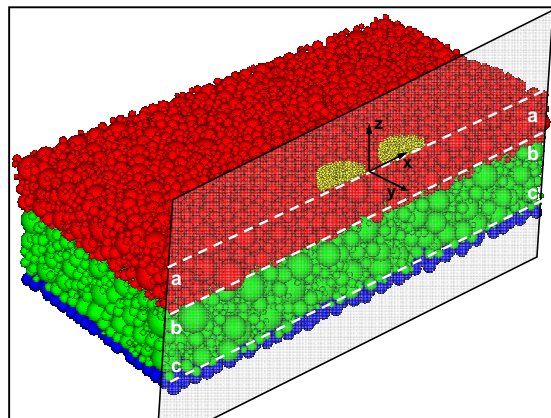


FIGURA 5.22: INTERFACCE TRA GLI STRATI.

Il confronto tra DEM e BISAR mostra risultati qualitativamente simili: tensioni e deformazioni all'interno della pavimentazione mostrano, infatti, il medesimo andamento caratterizzato da un massimo in corrispondenza dei baricentri delle piastre di carico e da un calo progressivo spostandosi verso i confini del sistema (figure 5.23 e 5.24).

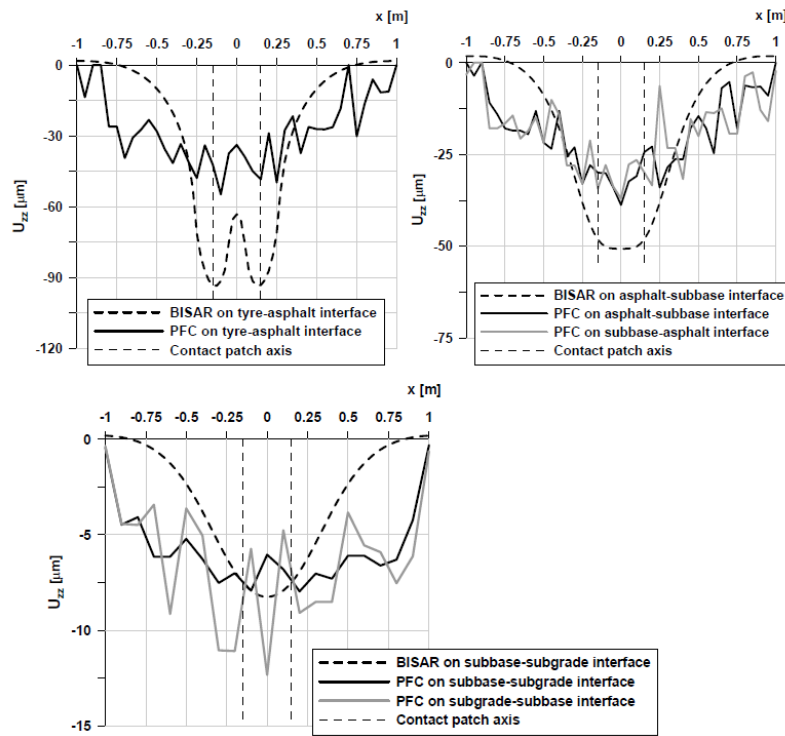


FIGURA 5.23: TENSIONE VERTICALE IN CORRISPONDENZA DELLE DIVERSE INTERFACCE.



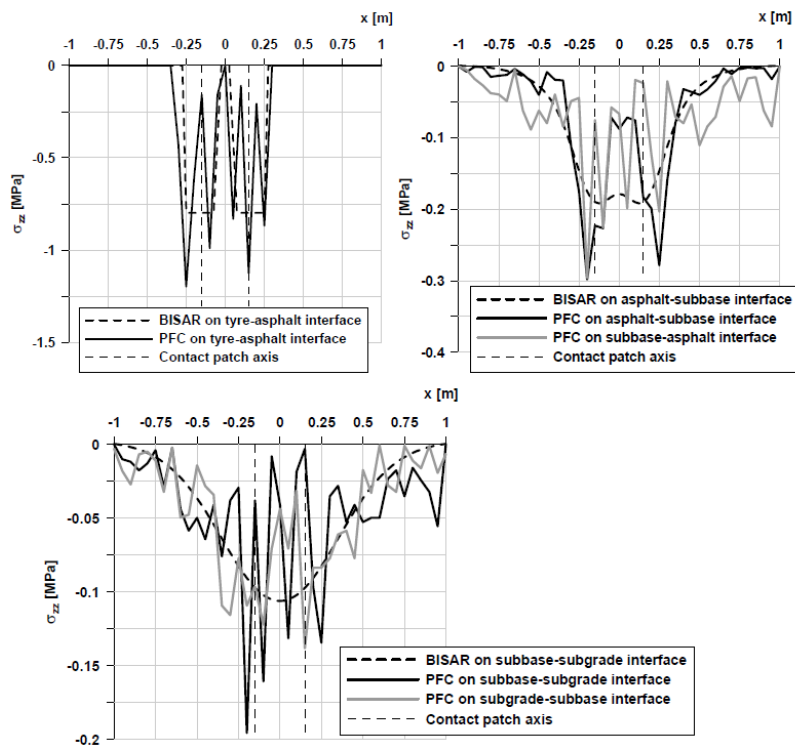


FIGURA 5.24: CEDIMENTO VERTICALE IN CORRISPONDENZA DELLE DIVERSE INTERFACCE.

Il comportamento della pavimentazione viene valutato, inoltre, nel piano z-y lungo gli assi di simmetria delle due piastre di carico (piano e-e e piano d-d) facendo ricorso a cerchi di misura. Il confronto tra i risultati ottenuti dalla modellazione agli elementi discreti e quelli di BISAR lungo tali piani è riportata in figura 5.25.

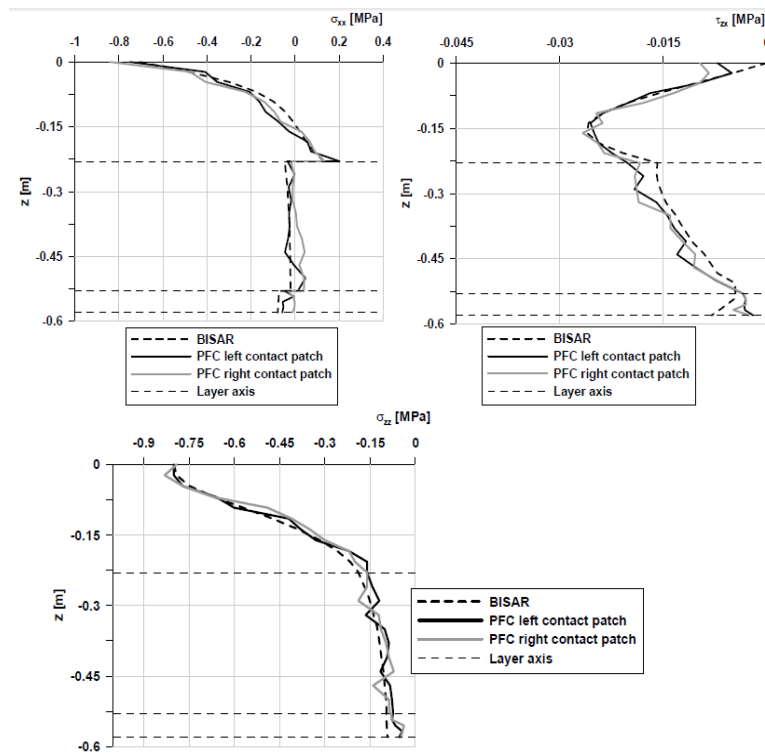


FIGURA 5.25:  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $T_{zx}$  IN CORRISPONDENZA DELLE DIVERSE INTERFACCE.

Gli autori confermano le potenzialità del DEM particellare nel riprodurre l'effettivo comportamento del conglomerato bituminoso ma evidenziano anche alcuni limiti dello studio effettuato, in particolare:

- la modellazione del sottofondo mediante particelle di diametro uniforme non permette di simulare in maniera corretta l'addensamento del materiale, con conseguente scarsa rappresentatività dei risultati ottenuti;
- difficoltà di correlazione tra i parametri macroscopici dei materiali, ottenuti in laboratorio, e quelli microscopici da inserire all'interno del modello di contatto di Burger secondo l'approccio indiretto;
- elevati oneri computazionali legati all'elevato numero di particelle costituenti il sistema. Utilizzando un processore Pentium 4 sono necessari 15 giorni per generare il modello e 20 per completare il processo di carico.

Per superare l'ultimo limite gli autori, nella memoria del 2008, decidono di operare un confronto tra il modello tridimensionale di sovrastruttura precedentemente descritto, cui si farà riferimento in seguito come "modello A", e uno

in scala ridotta, le cui particelle non vengono generate con la tecnica dell'up-scaling, ma direttamente secondo i diametri previsti dalla curva granulometrica ("modello B").

Quest'ultimo ha forma cilindrica di raggio pari a 0,32 m ed è composto dagli stessi strati del modello A, in termini sia di spessore sia di tipologia di materiale (figura 5.26). Il campione viene sollecitato mediante un unico ciclo di carico attraverso un'impronta circolare analoga a quelle viste per il modello tridimensionale di pavimentazione, la forza verticale costante indotta è pari a 30 kN.

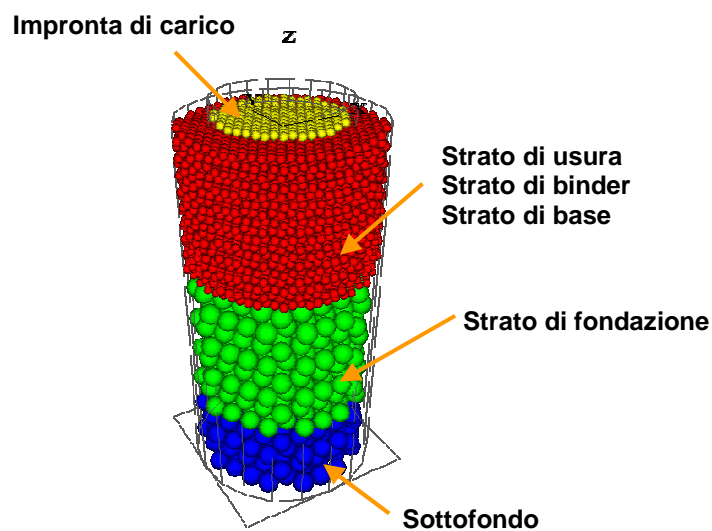


FIGURA 5.26: MODELLO B.

Il primo confronto operato tra i due modelli riguarda la distribuzione delle forze di contatto in corrispondenza delle interfacce degli strati (figura 5.27).

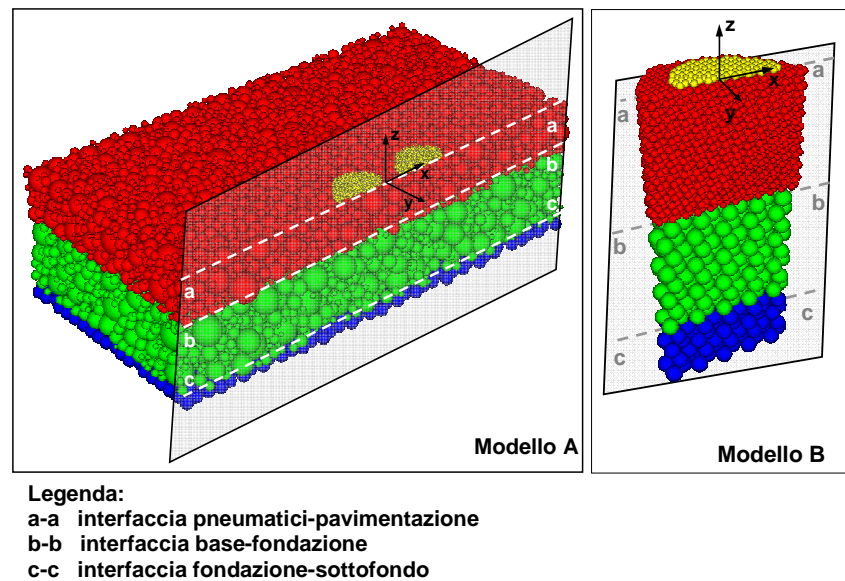


FIGURA 5.27: INTERFACCE PER LA MISURA DELLE FORZE DI CONTATTO NEI DUE MODELLI.

Come è stato riscontrato nello studio del 2007 per il modello A al termine del processo di carico le forze di contatto risultano essere prevalentemente di compressione e si diffondono radialmente all'interno del sistema interessando prima lo strato superficiale in conglomerato bituminoso, poi la fondazione ed infine il sottofondo (figura 5.28).

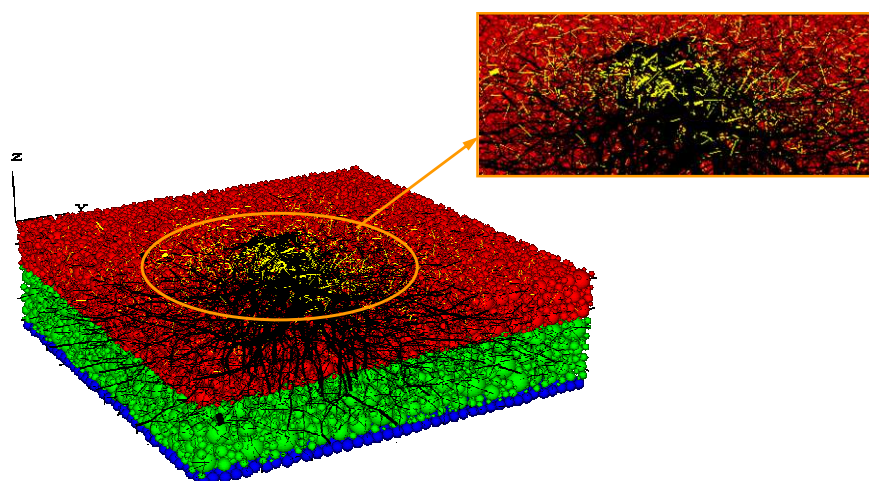


FIGURA 5.28: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO ALL'INTERNO DEL MODELLO A (FORZE DI COMPRESSIONE IN NERO, FORZE DI TRAZIONE IN GIALLO).

Al fine di ottenere un confronto significativo tra i due modelli le forze di contatto vengono corrette mediante opportuni coefficienti ( $F_c$ ) che tengono conto delle modalità di generazione dei due campioni:

- *modello A*:  $F_c$  tiene conto del fatto che gli strati in conglomerato bituminoso e la fondazione, essendo stati generati con la tecnica dell'*up-scaling*, sono formati da particelle di diametro amplificato rispetto a quello della curva granulometrica reale. Per la sua valutazione, in particolare, viene calcolato il numero medio di contatti che si generano tra le particelle di diametro reale che sono contenute all'interno di un grano in *up-scaling*, nelle configurazioni di addensamento massimo e minimo (figura 5.29).

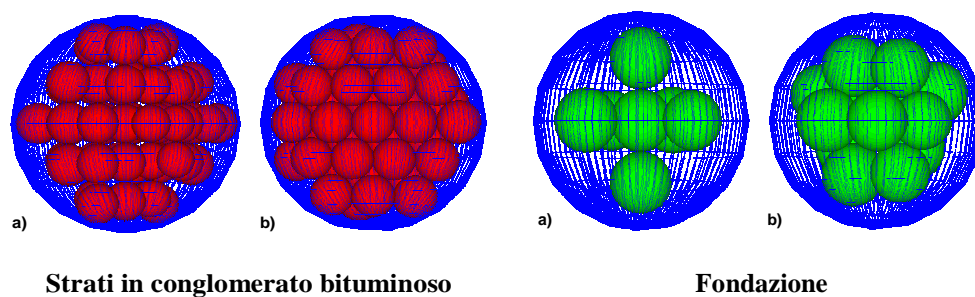


FIGURA 5.29: MODELLO A: PARTICELLE DI DIAMETRO REALE CONTENUTE ALL'INTERNO DI UN GRANO IN UP-SCALING, PER GLI STRATI IN CONGLOMERATO BITUMINOSO E PER LA FONDAZIONE, NELLE CONFIGURAZIONI DI ADDENSAMENTO MINIMO (A) E MASSIMO (B).

- *modello B*:  $F_c$  tiene conto del confinamento laterale che l'elemento cilindrico di contorno esercita sulla diffusione della perturbazione indotta dal carico all'interno della pavimentazione.

In entrambi i modelli le forze di contatto ( $F_z$ ) presentano il valore massimo in corrispondenza delle verticali passanti per il baricentro delle impronte di carico e diminuiscono progressivamente procedendo verso i confini del modello. Com'è possibile osservare in tabella 5.11 le forze di contatto di picco hanno valori pressoché identici nei due modelli, ciò conferma l'affidabilità della tecnica *up-scaling* nella generazione delle particelle.

TABELLA 5.11: CONFRONTO VALORI DI PICCO FORZE DI CONTATTO, MODELLO A E MODELLO B.

Interfaccia	Forza di picco [N]		$\Delta F_z$ [%]
	Modello A	Modello B	
Pneumatici - pavimentazione	136	144	5,88
Strato di base - fondazione	29	27	6,89
Fondazione - strato di base	49	50	2,00
Fondazione - sottofondo	40	40	0,00

Note le forze di contatto massime in corrispondenza del piano viabile e dell'interfaccia tra lo strato di base e la fondazione, gli autori studiano, per il modello A, le modalità con cui si innescano e si diramano le fessurazioni. A tal fine viene utilizzata la legge di *Paris-Erdogan* in forma integrale, che consente di determinare il numero di cicli di carico ( $N_f$ ) necessari all'innescio di una fessura, in funzione del fattore di concentrazione degli sforzi (*stress intensity factor*) e di costanti del materiale.

I risultati ottenuti vengono confrontati con quelli ricavati mediante la legge di fatica dell'*AASHTO Road Test*, che lega la deformazione di rottura alla base dei conglomerati bituminosi ( $\epsilon$ ) al numero di applicazioni di carico ( $N$ ). Per la valutazione di  $\epsilon$  si ricorre nuovamente al codice di calcolo *BISAR*. Il confronto, in particolare, viene eseguito in corrispondenza dell'interfaccia base-fondazione.

TABELLA 5.12: CICLI DI CARICO CHE PORTANO A ROTTURA IL MODELLO A.

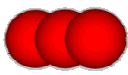


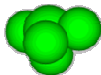
	Interfaccia	
	Piano viabile	Base-fondazione
Legge di <i>Paris-Erdogan</i> – DEM-P	$1,68 \times 10^7$	$1,19 \times 10^7$
Legge di fatica dell' <i>AASHTO Road Test</i>	---	$7,81 \times 10^8$

Dai valori riportati in tabella 5.25 si evince che la legge di fatica di *Paris-Erdogan* specializzata con il Metodo degli Elementi Distinti Particellari fornisce un numero di cicli di carico inferiore rispetto a quello valutato con la formulazione classica. Questo risultato può essere imputabile a diversi fattori: in primo luogo all'incertezza con cui sono stati individuati alcuni parametri, quali ad esempio lo *stress intensity factor*, per

cui sarebbero necessari ulteriori approfondimenti sperimentali; in secondo luogo alla forma delle particelle utilizzate; le sfere, infatti, non consentono di riprodurre l'effettivo ingranamento tra gli inerti.

Per risolvere la seconda problematica gli autori decidono di elaborare un terzo modello costituito da particelle di forma non sferica ottenute mediante la metodologia clump. Tale metodologia consente di creare elementi di forma generica, dotati di comportamento rigido, ottenuti assemblando particelle circolari. Gli strati costituenti il modello C sono gli stessi, in termini di spessori e materiali, che caratterizzano il modello B, ma se ne differenziano per la forma delle particelle (figura 5.13).

TABELLA 5.13: CLUMP UTILIZZATI PER LA GENERAZIONE DEL MODELLO C.

<b>FONDAZIONE</b>	<b>Numero di elementi costituenti il clump</b>	3	5
	<b>Raggio degli elementi che compongono il clump</b>	Ball n. 1: $(R_1/2)$ Ball n. 2: $(R_1/2)$ Ball n. 3: $(R_1/2)$	Ball n. 1: $(R_1/2)$ Ball n. 2: $(R_1/2)$ Ball n. 3: $(R_1/2)$ Ball n. 4: $(R_1/2)$ Ball n. 5: $(R_1/2)$
		$R_1$ : Raggio medio del grano reale della fondazione	
	<b>Descrizione del clump</b>		
<b>STRATI IN CONGLOMERATO BITUMINOSO</b>	<b>Numero di elementi costituenti il clump</b>	3	5
	<b>Raggio degli elementi che compongono il clump</b>	Ball n. 1: $(R_2/2)$ Ball n. 2: $0.85 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 3: $0.85 \cdot (R_2/2)$	Ball n. 1: $(R_2/2)$ Ball n. 2: $0.75 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 3: $0.75 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 4: $0.75 \cdot (R_2/2)$ Ball n. 5: $0.75 \cdot (R_2/2)$
		$R_2$ : Raggio medio del grano reale degli strati legati a bitume	
	<b>Descrizione del clump</b>		

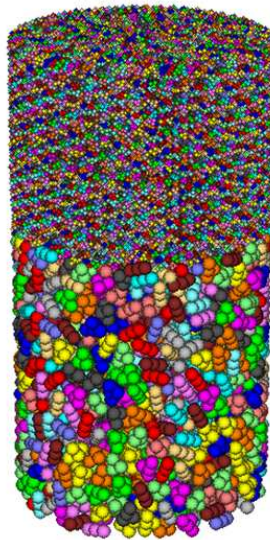


FIGURA 5.30: MODELLO C.

Il modello C viene caricato, analogamente a quanto visto per il modello B, mediante un unico ciclo di carico trasmesso da un'impronta circolare che induce sulla sovrastruttura una forza verticale costante pari a 30 kN.

Dall'analisi comparativa delle forze di contatto relative ai modelli B e C è emerso che quest'ultimo presenta valori di picco superiori, in modulo, rispetto al primo (tabella 5.14).

TABELLA 5.14: CONFRONTO VALORI DI PICCO FORZE DI CONTATTO, MODELLO B E MODELLO C.

Interfaccia	Forza di picco [N]		$\Delta F_z$ [%]
	Modello B	Modello C	
Pneumatici - pavimentazione	144	184	21.74
Strato di base - fondazione	27	43	37.21
Fondazione - strato di base	50	52	3.80

Tenendo conto di parametri quali la forma e le dimensioni dei grani dell'inerte, quindi, è possibile individuare nuovi punti in corrispondenza dei quali possono innescarsi le fratture.

Ciò conferma quanto anticipato nel terzo capitolo riguardo il ruolo fondamentale della forma e delle dimensioni dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del conglomerato bituminoso.



**5.7 LIU Y., DAI Q. & YOU Z. (2009), “VISCOELASTIC MODEL FOR DISCRETE ELEMENT SIMULATION OF ASPHALT MIXTURE” [115]**

L’obiettivo principale degli autori di questa memoria è quello di sviluppare un modello viscoelastico corretto per lo studio dei conglomerati bituminosi attraverso l’impiego di metodi numerici discreti. Per rappresentare il comportamento viscoelastico del bitume si ricorre alle leggi costitutive proprie del modello di Burger.

Inoltre, questo studio si propone di fornire una metodologia appropriata per la corretta determinazione dei parametri del modello viscoelastico, correlando le proprietà macroscopiche dei materiali ai parametri microscopici del modello numerico.

I parametri microscopici sono quelli relativi alle caratteristiche delle singole ball costituenti il modello numerico e che descrivono il contatto tra due elementi discreti. I parametri di tipo macroscopico rappresentano, invece, le proprietà del legante e degli aggregati che possono essere misurate attraverso test di caratterizzazione in laboratorio.

Conclusa la calibrazione dei parametri del modello di Burger, condotta attraverso un processo iterativo basato su test sperimentali, gli autori presentano i risultati di prove di laboratorio a carico ciclico e di simulazioni numeriche 2D, ottenendo un confronto dato sperimentale – modello in termini di modulo dinamico ed angolo di fase.

I modelli numerici dei campioni di conglomerato bituminoso vengono creati utilizzando tecniche di acquisizione digitale delle immagini.

Gli autori distinguono tra quattro diverse tipologie di contatto (figura 5.31):

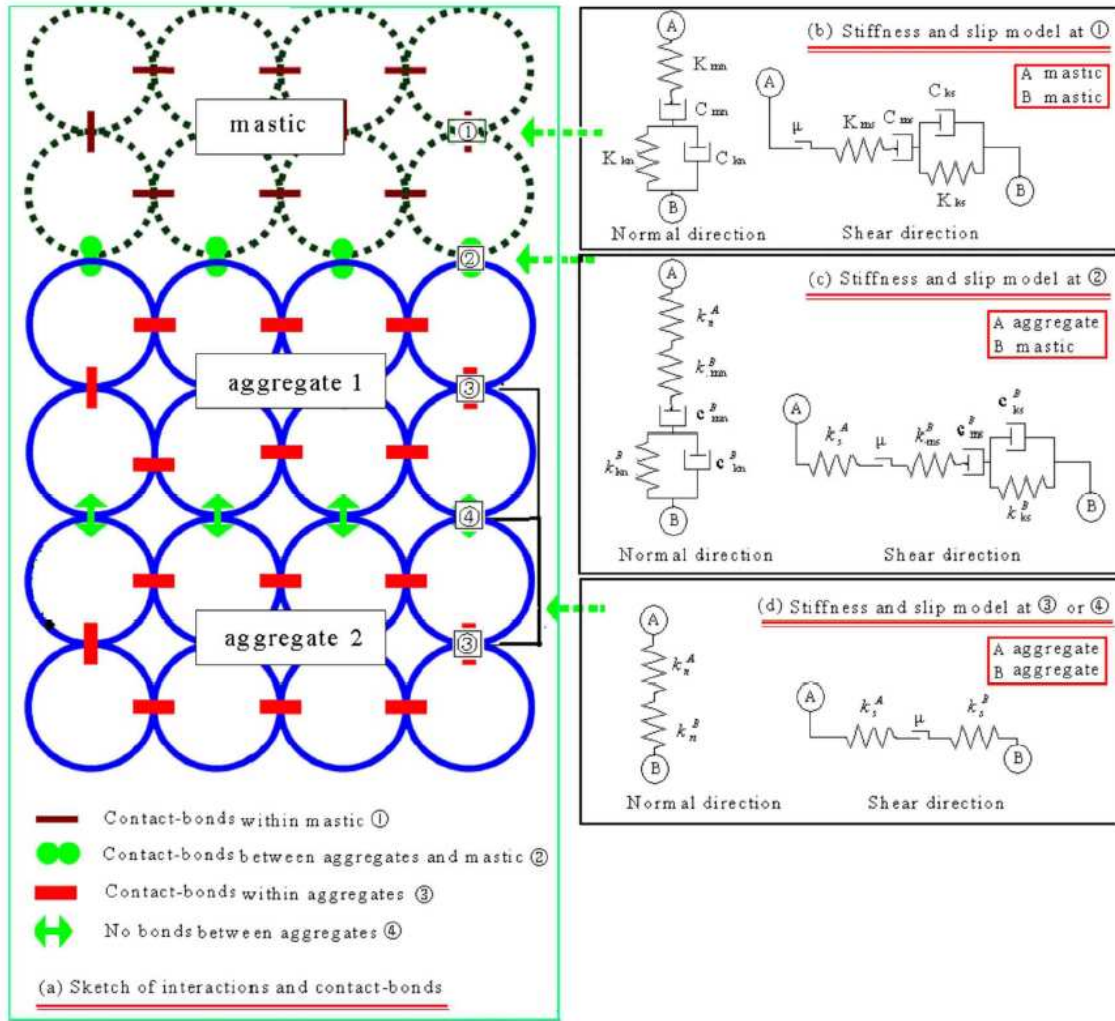


FIGURA 5.31: SCHEMA DELLE INTERAZIONI E DEI RELATIVI MODELLI DI CONTATTO ALL'INTERNO DEL MODELLO NUMERICO.

### 1. Modello di rigidità per il contatto mastic – mastic

Il carattere viscoelastico del mastice viene rappresentato applicando il modello di Burger per il contatto normale e tangenziale.

$$f_n = C_{mn}\dot{u}_{mc} = u_k K_{kn} + \dot{u}_k C_{kn} = K_{mn}u_{mk} \quad (5.28)$$

$$f_s = C_{ms}\dot{\delta}_{mc} = \delta_k K_{ks} + \dot{\delta}_k C_{ks} = K_{ms}\delta_{mk} \quad (5.29)$$

$$u_n = u_k + u_{mk} + u_{mc} \quad (5.30)$$

$$u_s = \delta_k + \delta_{mk} + \delta_{mc} \quad (5.31)$$

dove:

$f_n$  = forza di contatto in direzione normale;

$f_s$  = forza di contatto in direzione tangenziale;

$u_n$  = spostamento relativo in direzione normale;

$u_s$  = spostamento relativo in direzione tangenziale;

$u_k$  = spostamento in direzione normale del modello di Kelvin;

$\delta_k$  = spostamento in direzione tangenziale del modello di Kelvin;

$u_{mk}$  = spostamento in direzione normale della molla del modello di Maxwell;

$\delta_{mk}$  = spostamento in direzione tangenziale della molla del modello di Maxwell;

$u_{mc}$  = spostamento in direzione normale dello smorzatore viscoso del modello di Maxwell;

$\delta_{mc}$  = spostamento in direzione tangenziale dello smorzatore viscoso del modello di Maxwell;

$C_{mn}, C_{ms}, C_{kn}, C_{ks}$  = coefficienti di viscosità degli smorzatori;

$K_{mn}, K_{ms}, K_{kn}, K_{ks}$  = costanti elastiche delle molle.

## 2. Modello di rigidità per il contatto aggregato – aggregato

Gli autori considerano il comportamento degli aggregati puramente elastico e lo rappresentano mediante una molla. Nel punto di contatto tra due aggregati la rigidità viene calcolata ricorrendo ad un modello elastico lineare dove le forze in direzione normale e tangenziale vengono calcolate secondo le seguenti espressioni [89]:

$$f_n = U_n K_n \quad (5.32)$$

$$f_s = U_s K_s \quad (5.33)$$

$$K_n = \frac{k_n^A \cdot k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \quad (5.34)$$

$$K_s = \frac{k_s^A \cdot k_s^B}{k_s^A + k_s^B} \quad (5.35)$$

dove:

$f_n$  = forza di contatto in direzione normale;

$f_s$  = forza di contatto in direzione tangenziale;

$U_n$  = spostamento relativo in direzione normale;

$U_s$  = spostamento relativo in direzione tangenziale;

$k_n^A, k_s^A, k_n^B, k_s^B$  = rigidezze degli elementi a contatto (A e B);

$K_n, K_s$  = rigidezze di contatto normale e tangenziale.

### 3. Modello di rigidezza per il contatto mastice – aggregato

Per il contatto tra mastice ed aggregato gli autori ipotizzano un contatto misto costituito da un modello di Burger, che rappresenta il mastice, e da una molla elastica lineare, che rappresenta l'aggregato, connessi tra loro. Combinando i due modelli si ottiene un modello di Burger in cui la costante elastica della molla del modello di Maxwell tiene conto del contributo fornito dalla molla che schematizza il contatto con l'aggregato. I parametri del modello di Burger così costituito vengono determinati attraverso le seguenti espressioni:

$$K_{mn} = \frac{k_{mn}^B \cdot k_n^A}{k_{mn}^B + k_n^A} \quad K_{ms} = \frac{k_{ms}^B \cdot k_s^A}{k_{ms}^B + k_s^A} \quad (5.36)$$

$$C_{mn} = c_{mn}^B \quad K_{kn} = k_{kn}^B \quad C_{kn} = c_{kn}^B \quad (5.37)$$

$$C_{ms} = c_{ms}^B \quad K_{ks} = k_{ks}^B \quad C_{ks} = c_{ks}^B \quad (5.38)$$

in cui i parametri presenti nelle equazioni sono quelli riportati in figura 5.32.

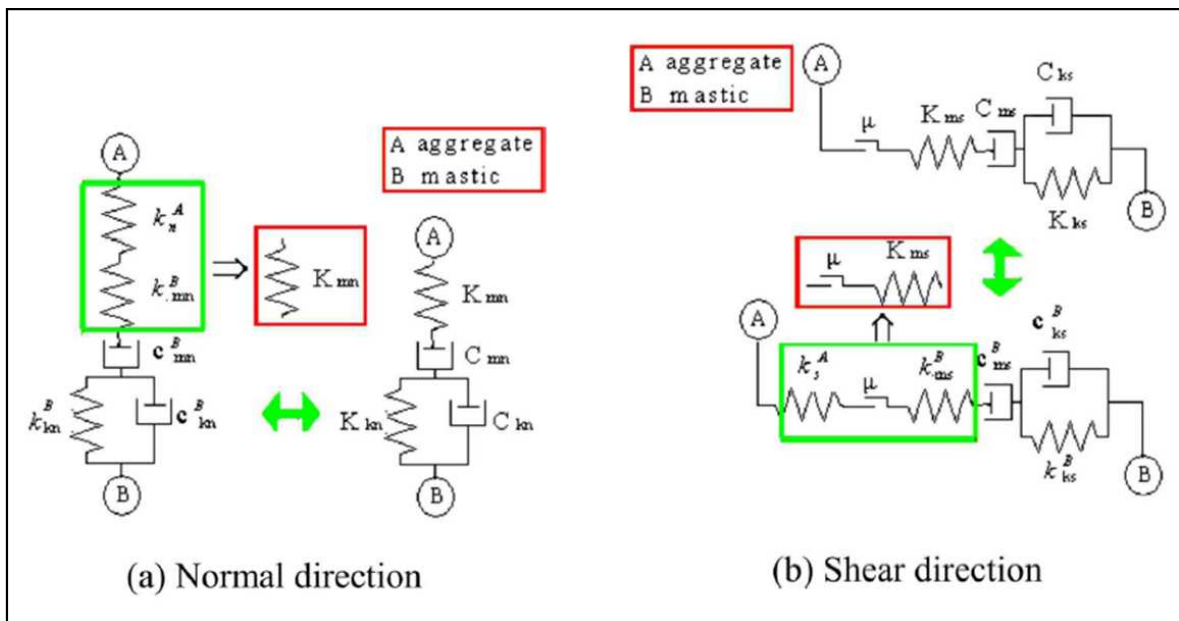


FIGURA 5.32: SCHEMA DEL CONTATTO MASTICE - AGGREGATO .

#### 4. Modello di slittamento e modello di legame per tutti i contatti all'interno della miscela

Oltre ai modelli di rigidità descritti in precedenza, ai contatti tra gli elementi vengono applicati anche un modello di slittamento, caratterizzato da un coefficiente d'attrito pari a  $\mu$ , ed un modello di legame (figura 5.32).

Uno degli obiettivi che si pongono gli autori è quello di elaborare una metodologia in grado di legare i parametri microscopici necessari per la definizione del modello alle caratteristiche macroscopiche del materiale, valutabili mediante prove di laboratorio. Le caratteristiche macroscopiche relative agli aggregati sono:

- il modulo di Young (E)
- il coefficiente di Poisson ( $\nu$ )

Le caratteristiche macroscopiche relative al mastice sono:

- modulo dinamico ( $E^*$ )
- angolo di fase ( $\phi$ )
- creep compliance ( $J_c$ )

I parametri del modello di Burger (figura 5.33) vengono determinati attraverso un procedimento iterativo che ne prevede la calibrazione sulla base di risultati di test di laboratorio.

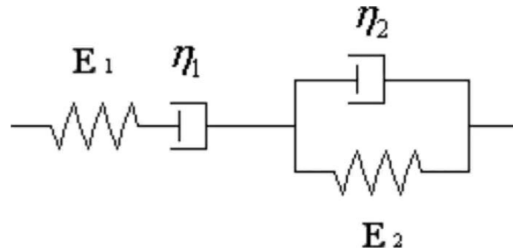


FIGURA 5.33: MODELLO DI BURGER.

Solitamente nelle modellazioni agli elementi discreti il contatto tra due elementi può essere rappresentato da una trave le cui estremità coincidono con i centri degli elementi stessi. Si considera una trave elastica nel caso in cui la simulazione sia di tipo elastico e una trave viscoelastica nel caso in cui la simulazione sia viscoelastica.

La lunghezza (L), lo spessore (W) e l'altezza (H) della trave vengono definite come segue:

$$H = \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad L = W = R^{[A]} + R^{[B]} \quad (5.39)$$

dove:

$R^{[A]}$  e  $R^{[B]}$  = raggio degli elementi a contatto;

t = spessore del disco (simulazione 2D).

di conseguenza l'area e l'inerzia della sezione trasversale possono essere calcolate come:

$$A = \begin{cases} Lt & (2D) \\ L^2 & (3D) \end{cases} \quad I = \frac{1}{12} \begin{cases} L^3 t & (2D) \\ L^4 & (3D) \end{cases} \quad (5.40)$$

Premesso ciò gli autori esaminano nuovamente le tipologie di contatto precedentemente descritte andando ad individuare le relazioni tra il modello della trave e le caratteristiche macroscopiche di aggregati e mastice.

1. *Contatto mastice – mastice*

In condizioni di carico assiale le tre componenti che costituiscono lo spostamento del modello di Burger possono essere espresse attraverso le relative deformazioni:

$$u_{mc} = \varepsilon_{mc}L \quad u_k = \varepsilon_kL \quad u_{mk} = \varepsilon_{mk}L \quad (5.41)$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione (5.28) si ottiene:

$$f_n = \dot{\varepsilon}_{mc}C_{mn}L = L\varepsilon_kK_{kn} + L\dot{\varepsilon}_kC_{kn} = \varepsilon_{mk}K_{mn}L \quad (5.42)$$

Secondo il modello di Burger la tensione corrispondente può essere espressa come:

$$\sigma = \dot{\varepsilon}_{mc}\eta_1 = \varepsilon_kE_2 + \dot{\varepsilon}_k\eta_2 = \varepsilon_{mk}E_1 \quad (5.43)$$

dove  $E_1$ ,  $\eta_1$ ,  $E_2$ ,  $\eta_2$  rappresentano i parametri del modello di Burger secondo quanto rappresentato in figura 5.14.

Sostituendo le due equazioni sopra riportate nella:

$$f_n = \sigma A \quad (5.44)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{mc}C_{mn}L &= A\dot{\varepsilon}_{mc}\eta_1 \\ L\varepsilon_kK_{kn} + L\dot{\varepsilon}_kC_{kn} &= A\varepsilon_kE_2 + A\dot{\varepsilon}_k\eta_2 \Leftrightarrow \varepsilon_k(LK_{kn} - E_2A) + \dot{\varepsilon}_k(LC_{kn} - A\eta_2) = 0 \\ \varepsilon_{mk}K_{mn}L &= A\varepsilon_{mk}E_1 \end{aligned} \quad (5.45)$$

quindi:

$$K_{kn} = \frac{E_2 A}{L} = E_2 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.46)$$

$$C_{kn} = \frac{\eta_2 A}{L} = \eta_2 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.47)$$

$$K_{mn} = \frac{E_1 A}{L} = E_1 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.48)$$

$$C_{mn} = \frac{\eta_1 A}{L} = \eta_1 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.49)$$

Mediante queste quattro equazioni è possibile correlare i parametri del modello di Burger alle caratteristiche macroscopiche del materiale per quanto riguarda il contatto in direzione normale. I parametri relativi al contatto tangenziale possono essere ricavati grazie al legame tra il modulo di Young e quello a taglio (G):

$$E = 2(1 + \nu)G \quad (5.50)$$

I parametri relativi alle molle diventano quindi:

$$K_{ks} = \frac{K_{kn}}{2(1+\nu)} = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.51)$$

$$K_{ms} = \frac{K_{mn}}{2(1+\nu)} = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.52)$$

Per quelli relativi agli smorzatori viscosi gli autori assumono che valga lo stesso tipo di relazione, i parametri diventano:

$$C_{ks} = \frac{C_{kn}}{2(1+\nu)} = \frac{\eta_2}{2(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.53)$$



$$C_{ms} = \frac{c_{mn}}{2(1+\nu)} = \frac{\eta_1}{2(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.54)$$

dove il coefficiente di Poisson, per il mastice, è assunto pari a 0,5.

Le equazioni (5.46)-(5.49) e (5.51)-(5.54) regolano il contatto tra due particelle di mastice. Per convertire i parametri di contatto in caratteristiche proprie delle due balli adiacenti il modello di Burger viene suddiviso in due modelli di Burger identici (figura 5.34).

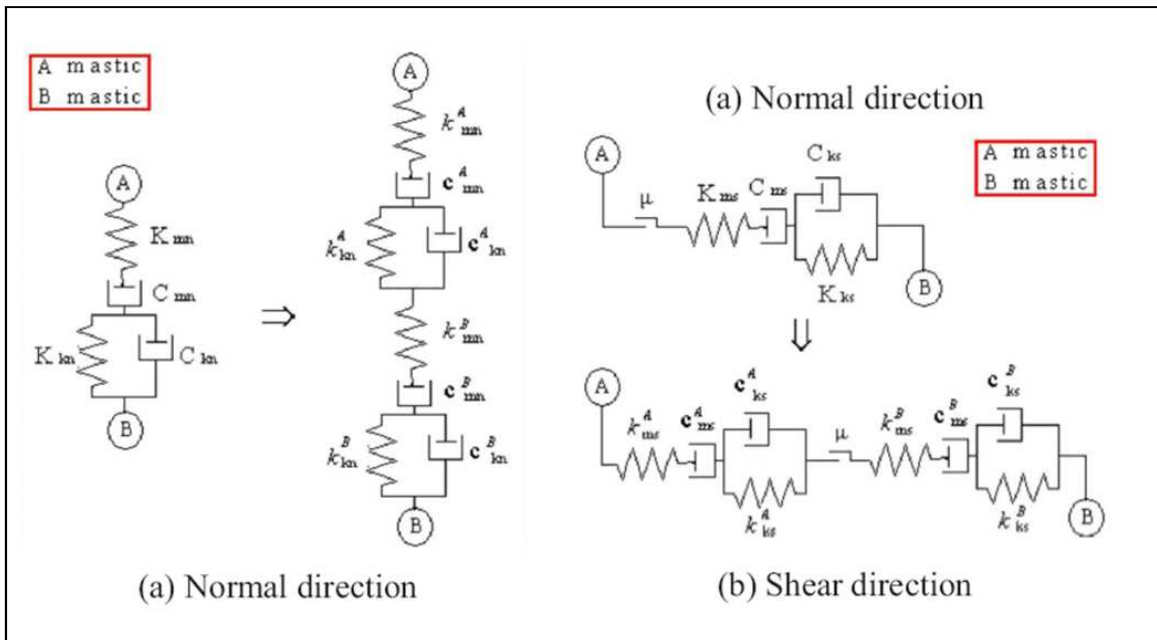


FIGURA 5.34: SCHEMA DEL CONTATTO MASTICE - MASTICE .

I parametri di tali modelli sono determinati nel modo seguente:

$$c_{mn}^B = c_{mn}^A = 2C_{mn} = 2\eta_1 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.55)$$

$$k_{kn}^B = k_{kn}^A = 2K_{kn} = 2E_2 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.56)$$

$$c_{kn}^B = c_{kn}^A = 2C_{kn} = 2\eta_2 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.57)$$

$$k_{mn}^B = k_{mn}^A = 2K_{mn} = 2E_1 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.58)$$

$$c_{ms}^B = c_{ms}^A = 2C_{ms} = \frac{\eta_1}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.59)$$

$$k_{ks}^B = k_{ks}^A = 2K_{ks} = \frac{E_2}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.60)$$

$$c_{ks}^B = c_{ks}^A = 2C_{ks} = \frac{\eta_2}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.61)$$

$$k_{ms}^B = k_{ms}^A = 2K_{ms} = \frac{E_1}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.62)$$

## 2. Contatto aggregato – aggregato

Le proprietà macroscopiche degli aggregati vengono correlate alle costanti elastiche delle molle relative alle due ball a contatto.

Per la direzione normale:

$$\left. \begin{array}{l} F = K_n \Delta L \\ F = E \varepsilon A = \frac{EA \Delta L}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow K_n = \frac{EA}{L} = E \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.63)$$

dove:

F = carico assiale applicato alle estremità della trave;

$K_n$  = rigidezza di contatto normale, rappresenta la rigidezza della trave;

E = modulo di Young della trave;

$\Delta L$  = incremento di spostamento relativo sotto carico assiale;

$\varepsilon$  = deformazione sotto carico assiale.

Per la direzione tangenziale gli autori ricavano la seguente relazione:

$$K_s = \frac{12IG}{L^3} = \begin{cases} Gt & (2D) \\ GL & (3D) \end{cases} \quad (5.64)$$

dove:

$K_n$  = rigidezza di contatto tangenziale;

$G$  = modulo a taglio, può essere espresso in funzione di  $E$  attraverso la (5.50).

Dal momento che le rigidzze dei due elementi a contatto sono uguali, secondo le equazioni (5.34), (5.35), (5.63) e (5.64) i parametri microscopici possono essere espressi come :

$$k_n^A = k_n^B = 2E \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.65)$$

$$k_s^A = k_s^B = 2G \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.66)$$

### 3. Contatto mastice – aggregato

Sostituendo le equazioni (5.65), (5.66), (5.55)-(5.57) e (5.59)-(5.61), nelle (5.36)-(5.38) e i parametri di Burger rappresentati in figura 5.32, il legame tra le proprietà microscopiche del modello di contatto e quelle macroscopiche dei materiali può essere espresso mediante le seguenti equazioni:

$$K_{mn} = \frac{2EE_1}{E+E_1} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad K_{ms} = \frac{2GE_1}{G(1+\nu)+E_1} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.67)$$

$$K_{kn} = 2E_2 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad K_{ks} = \frac{E_2}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.68)$$

$$C_{mn} = 2\eta_1 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad C_{ms} = \frac{\eta_1}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.69)$$

$$C_{kn} = 2\eta_2 \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad C_{ks} = \frac{\eta_2}{(1+\nu)} \begin{cases} t & (2D) \\ L & (3D) \end{cases} \quad (5.70)$$

#### 4. Modello di slittamento e modello di legame

Il coefficiente d'attrito del modello di slittamento ( $\mu$ ) viene determinato come il massimo attrito tra i due elementi in contatto. Chiamando  $\sigma_c$  e  $\tau_c$  rispettivamente la resistenza a trazione e taglio il modello di legame può essere espresso come segue:

$$\phi_n = \sigma_c A = \sigma_c \begin{cases} tL & (2D) \\ L^2 & (3D) \end{cases} \quad (5.71)$$

$$\phi_s = \tau_c A = \tau_c \begin{cases} tL & (2D) \\ L^2 & (3D) \end{cases} \quad (5.72)$$

Una volta ricavate le espressioni che permettono di determinare i parametri di contatto nel modello numerico, gli autori si concentrano sulla validazione del modello stesso attraverso il confronto con test di laboratorio.

Per ottenere il modulo dinamico ( $E^*$ ) e l'angolo di fase ( $\Phi$ ) della miscela vengono effettuati test di compressione uniassiale ad una temperatura di 0°C e a quattro frequenze: 0,1, 1, 5 e 10 Hz.

La stessa tipologia di test alle stesse condizioni di prova viene utilizzata anche per calibrare i parametri del modello di Burger (tabella 5.15).

TABELLA 5.15: PARAMETRI DI BURGER CALBRATI IN BASE A TEST DI LABORATORIO PER DIVERSE FREQUENZE .

Parametri modello di Burger	Frequenza [Hz]			
	0,1	1	5	10
$E_1$	901	901	901	901
$\eta_1$	607	607	607	607
$E_2$	3.77	5.64	8.07	8.88
$\eta_1$	3,66	0,41	0,011	0,0067

Il modello numerico, costituito complessivamente da 9540 elementi, viene elaborato in base ad un'immagine digitale del campione (figura 5.35); il carico ciclico viene applicato alla piastra superiore, mentre quella inferiore rimane fissa.

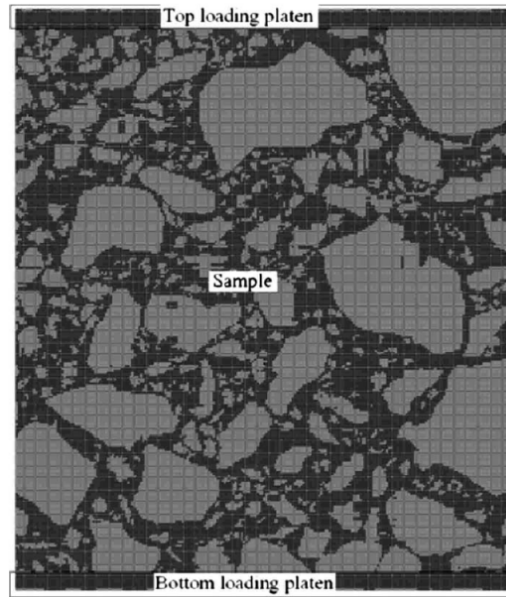


FIGURA 5.35: MODELLO DIGITALE DEL PROVINO .

Il modulo dinamico e l'angolo di fase vengono calcolati, in riferimento alle curve tensione – deformazione, attraverso le seguenti espressioni:

$$E^* = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}} \quad (5.73)$$

$$\Phi = \frac{\Delta t}{T} \times 360 \quad (5.74)$$

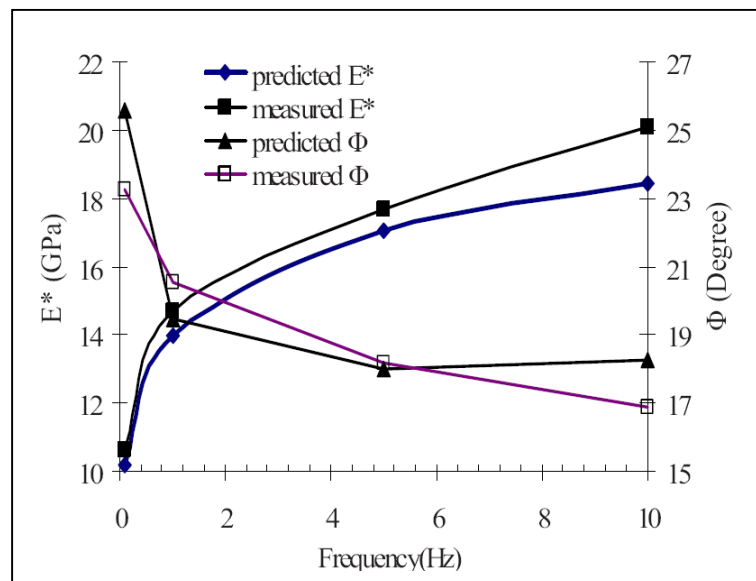


FIGURA 5.36: CONFRONTO MODULO DINAMICO E ANGOLO DI FASE MODELLATI E MISURATI.

Nonostante i risultati numerici tendano a sottostimare leggermente i valori del modulo elastico e dell'angolo di fase, la figura 5.36 mostra una buona corrispondenza tra risultati numerici e sperimentali.

**5.8 MICAELo R., RIBEIRO J., AZEVEDO M., AZEVEDO N. (2009), "DISCRETE ELEMENT MODELLING OF FIELD ASPHALT COMPACTION" [123]**

In questa memoria gli autori proseguono e sviluppano il lavoro svolto in precedenza da Micaelo nel 2008 [122] e si propongono di studiare la compattazione del conglomerato bituminoso confrontando dati ottenuti in sito con risultati di simulazioni numeriche agli elementi discreti.

La fase sperimentale consiste nella predisposizione di un campo prove largo 2,50 m e lungo all'incirca 5 m in cui viene steso e costipato uno strato di conglomerato bituminoso 0-16 di 70 mm. Le caratteristiche dello strato oggetto di studio sono riportate in tabella 5.16.

TABELLA 5.16: CARATTERISTICHE DELLA MISCELA REALE.

<b>Miscela AC 0/16</b>	
Contenuto di bitume [% della massa totale]	5,3
Densità [g/cm <sup>3</sup> ]	2,4
Densità massima [g/cm <sup>3</sup> ]	2,5
Porosità [%]	3,9
Contenuto di bitume [% del volume totale]	12,1
VMA [%]	16,1
VFA [%]	75

Vengono utilizzati due diversi rulli compattatori: uno statico ed uno vibrante.



FIGURA5.37: COMPATTAZIONE IN SITO.

Durante la compattazione vengono registrati:

- l'evoluzione dello spessore dello strato;
- la temperatura, interna allo strato e superficiale;
- il numero di passate del rullo;
- l'accelerazione del tamburo relativa al rullo vibrante.

Al termine della compattazione vengono prelevate carote per misurare la densità della miscela e lo spessore finale dello strato.

Parallelamente alla fase sperimentale gli autori utilizzano il software agli elementi discreti PFC<sup>2D</sup> per simulare numericamente ciò che avviene in sito e operare un confronto tra i risultati del campo prove e quelli del modello.

Per la creare il campione numerico le particelle vengono generate facendo riferimento al fuso granulometrico della miscela reale.

In particolare, si distingue tra elementi rappresentanti l'aggregato grosso ed elementi rappresentanti il mastice, costituito da bitume e dagli aggregati aventi diametro inferiore a 1 mm. In tabella 5.17 sono riportate le caratteristiche della miscela utilizzata per la modellazione numerica.

TABELLA 5.17: CARATTERISTICHE DELLA MISCELA NUMERICA.

	Diametro [mm]	Passante [%]	Trattenuto [%]	Area [m <sup>2</sup> ]	Area particella (spessore unitario) [m <sup>3</sup> ]	N° particelle
<b>Aggregato</b>	16,00	100,00	0,00			
	11,20	88,60	11,40	0,0017116	0,0000985	18
	8,00	77,00	11,60	0,0017416	0,0000503	36
	5,60	64,70	12,30	0,0018467	0,0000246	76
	4,00	52,90	11,80	0,0017717	0,0000126	162
	2,00	39,10	13,80	0,0020719	0,0000031	660
<b>Mastice</b>	1,00		37,09	0,0078980	0,0000008	10056
<b>Area totale</b>		0,0213 m <sup>3</sup>			<b>Σ 11008</b>	
<b>Area bitume</b>		9,5 %				
<b>Area aggregati</b>		70,5 %				
<b>Porosità</b>		20 %				

Le particelle di aggregato e mastice vengono generate, all'interno del volume di prova, in ordine casuale. In un primo momento gli elementi costituenti la miscela vengono compattati mediante lo spostamento di una parete (wall) fino al raggiungimento della porosità e della densità volute, successivamente le particelle vengono lasciate libere di stabilizzarsi sotto l'azione della forza di gravità.

Micaelo et al. utilizzano un modello elastico lineare per descrivere il contatto tra gli aggregati e quello viscoelastico di Burger per il mastice, al fine di simulare in maniera ottimale la dipendenza del comportamento del conglomerato dal tempo di carico e dalla temperatura. Per descrivere il contatto a rottura vengono utilizzati un modello di legame e un modello di slittamento alla Mohr – Coulomb.

La lunghezza del campione di conglomerato viene assunta pari a 305 mm, tale dimensione consente di comprendere il bacino di deflessione generato dal carico del compattatore (figura 5.38).



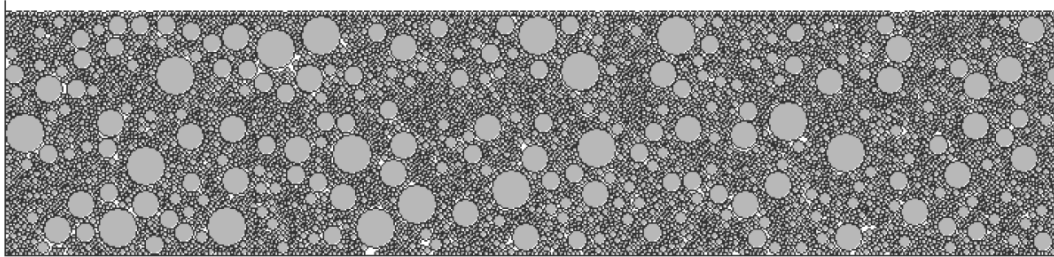


FIGURA 5.38: CAMPIONE NUMERICO.

La sollecitazione esercitata dal rullo statico può essere calcolata dividendo il peso dell'asse per la larghezza del tamburo, si ottiene così un carico pari a circa 220 N. In PFC<sup>2D</sup> il carico può essere simulato o applicando una forza alle particelle o imponendo una velocità ad un elemento wall.

Dal momento che il programma lo consente, gli autori scelgono di modellare il carico attraverso un wall circolare rappresentante il tamburo del rullo. Vengono imposti gli spostamenti del suddetto wall e si registrano le forze di contatto e gli spostamenti conseguenti.

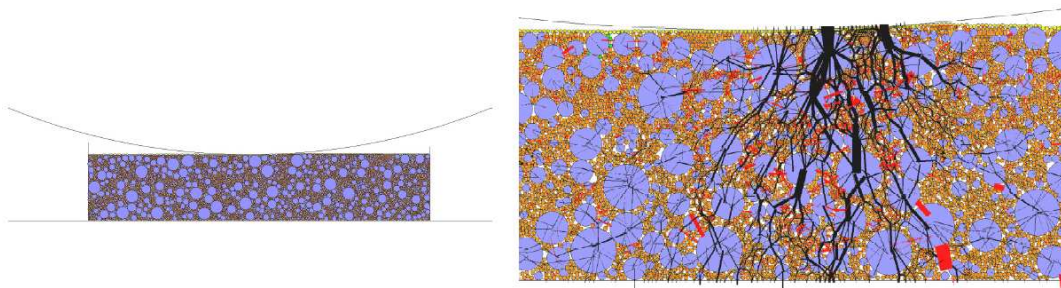


FIGURA 5.39: MODELLO NUMERICO E FORZE DI CONTATTO CHE SI SVILUPPANO NELLA ZONA CENTRALE DEL PROVINO.

Le modalità di modellazione descritte finora forniscono risultati numerici non del tutto analoghi a quelli sperimentali.

Infatti, nel modello numerico si riscontra una mancanza di rigidità al crescere della deformazione (compattazione), cosa che non viene registrata in sito. Ciò potrebbe essere dovuto al comportamento del film di bitume e alla differenza tra la forma e la struttura delle particelle modellate e reali.

Per ottenere risultati più attendibili viene applicato un fattore di rigidità alla molla di Maxwell appartenente al modello di Burger e si ricorre alla metodologia clump per la schematizzazione delle particelle [118].

Grazie agli accorgimenti adottati le forze di contatto, le deformazioni elastiche e quelle plastiche ottenute dalla modellazione numerica risultano coerenti con i valori registrati in sito.

Gli autori concludono affermando quindi l' idoneità della modellazione DEM particellare abbinata ad un modello di contatto viscoelastico (Burger) per lo studio e la comprensione del fenomeno della compattazione delle miscele di conglomerato bituminoso in sito ed in laboratorio.

**5.9 DONDI G., BRAGAGLIA M. & VIGNALI V. (2010), "BITUMINOUS MIXTURES SIMULATION WITH DISTINCT PARTICLE ELEMENTS METHOD" [66]**

In questa memoria gli autori intendono studiare, mediante la modellazione DEM, il comportamento del conglomerato bituminoso sottoposto a prova Marshall. Il software agli elementi discreti utilizzato è PFC<sup>2D</sup>.

Il provino numerico viene generato, facendo riferimento alla curva granulometrica del materiale reale, mediante tre diverse metodologie di modellazione:

- particelle sferiche di diametro assegnato – 6 provini;
- gruppi di particelle assemblate tra loro a formare corpi rigidi detti cluster - 1 provino;
- particelle sferiche il cui raggio viene aumentato secondo un fattore di scala (up-scaling) - 1 provino.

Le caratteristiche delle miscele utilizzate per confezionare gli otto provini sono riassunte in tabella 5.18.

TABELLA 5.18: CARATTERISTICHE DELLE MISCELE.

Modello	A 100	B 200	C 600	D 2000	E 11500	G 21000	H 58000	Modello up-scaled	F 20000
n° particelle	113	215	655	2285	11472	21626	58429	n° particelle	20385
D [mm]	Passante [%]							D [mm]	Passante [%]
15	100	100	100	100	100	100	100	150	100
10	39	43	47	48	70	93	93	100	95
5	3	10	15	18	45	48	50	50	60
2	-	-	6	9	25	25	27	20	39
0.4	-	-	-	3	-	10	12	4	18
0.18	-	-	-	-	-	4	7	1.8	9
0.075	-	-	-	-	-	-	-	0.75	6
Bitume	50/70 PG							Bitume	50/70 PG

Al fine di simulare il comportamento viscoelastico del bitume per tutti i provini, ad esclusione di quello generato con la logica cluster, viene applicato il modello di Burger.

Mediante test di caratterizzazione in laboratorio si ricavano i parametri macroscopici che caratterizzano la miscela di conglomerato (tabella 5.19).

TABELLA 5.19: PARAMETRI CARATTERISTICI DELLA MISCELA.

$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$	$K'$ [MPa]	$E'$ [MPa]	$G'$ [MPa]
2322	0,15	450	945	411

Inserendo tali parametri nelle seguenti equazioni è possibile ricavare i valore di rigidezza tangenziale e normale che caratterizzano il contatto:

$$k_n = K' \frac{4\pi\Sigma R^2}{(1-\nu)\Sigma R\Sigma L} \quad (5.75)$$

$$k_s = G' \frac{8\pi\Sigma R^2}{(1-\nu)\Sigma R\Sigma L} - k_n \quad (5.76)$$

dove:

$n$  = porosità;

$L$  = distanza tra i baricentri di due particelle adiacenti;

$R$  = raggio medio delle particelle adiacenti.

I parametri del modello di Burger (tabella 5.20) sono stati calibrati in modo da ottenere rigidzze di contatto analoghe a quelle calcolate precedentemente.

TABELLA 5.20: PARAMETRI DI BURGER.

Mod.	Contatto normale					Contatto tangenziale				
	$C_1^n$ [MNs/m]	$K_0^n$ [MN/m]	$K_1^n$ [MN/m]	$C_\infty^n$ [MNs/m]	$K_n$ [MNs/m]	$C_1^s$ [MNs/m]	$K_0^s$ [MN/m]	$K_1^s$ [MN/m]	$C_\infty^s$ [MNs/m]	$K_s$ [MNs/m]
<b>A</b> <b>100</b>	$7.9 \times 10^2$	$1.6 \times 10^1$	$1.6 \times 10^1$	$3.2 \times 10^2$	$1.5 \times 10^1$	$7.9 \times 10^2$	$2.0 \times 10^3$	$4.0 \times 10^3$	$3.2 \times 10^2$	$2.1 \times 10^1$
<b>B</b> <b>200</b>	$2.5 \times 10^2$	$1.6 \times 10^1$	$1.6 \times 10^1$	$1.0 \times 10^2$	$7.7 \times 10^0$	$7.9 \times 10^2$	$2.5 \times 10^4$	$5.0 \times 10^4$	$3.2 \times 10^2$	$6.0 \times 10^0$
<b>C</b> <b>600</b>	$2.5 \times 10^2$	$1.6 \times 10^1$	$1.6 \times 10^1$	$1.0 \times 10^2$	$2.8 \times 10^0$	$3.1 \times 10^2$	$2.5 \times 10^4$	$5.0 \times 10^4$	$1.3 \times 10^2$	$2.3 \times 10^0$
<b>D</b> <b>2000</b>	$2.5 \times 10^1$	$1.6 \times 10^1$	$1.6 \times 10^1$	$1.0 \times 10^1$	$1.4 \times 10^0$	$7.9 \times 10^3$	$2.5 \times 10^2$	$5.0 \times 10^2$	$3.2 \times 10^3$	$1.1 \times 10^0$
<b>E</b> <b>11500</b>	$7.9 \times 10^0$	$7.9 \times 10^0$	$7.9 \times 10^0$	$1.0 \times 10^1$	$2.8 \times 10^{-1}$	$2.5 \times 10^3$	$5.0 \times 10^4$	$1.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^2$	$2.2 \times 10^{-1}$
<b>G</b> <b>21000</b>	$1.9 \times 10^3$	$2.5 \times 10^2$	$2.5 \times 10^2$	$3.2 \times 10^2$	$1.2 \times 10^{-1}$	$1.9 \times 10^1$	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$3.2 \times 10^0$	$1.1 \times 10^{-1}$
<b>H</b> <b>58000</b>	$1.9 \times 10^3$	$2.5 \times 10^2$	$2.5 \times 10^2$	$3.2 \times 10^2$	$5.6 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^1$	$2.5 \times 10^7$	$2.5 \times 10^7$	$3.2 \times 10^0$	$4.6 \times 10^{-2}$
<b>F</b> <b>20000</b>	$1.9 \times 10^3$	$2.5 \times 10^2$	$2.5 \times 10^2$	$3.2 \times 10^2$	$1.8 \times 10^{-1}$	$1.9 \times 10^1$	$2.5 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$3.2 \times 10^0$	$1.6 \times 10^{-1}$

Una volta definito il modello di contatto gli autori passano alla descrizione della prova vera e propria: la sollecitazione viene applicata al provino mediante l'assegnazione di una velocità costante pari a 0,425 mm/s, ai muri, che rappresentano le ganasce del macchinario Marshall.

Per ogni provino è stata analizzata la sollecitazione in corrispondenza del piano mediano verticale e orizzontale attraverso cerchi di misura di raggio 5,08 mm (figura 5.40).

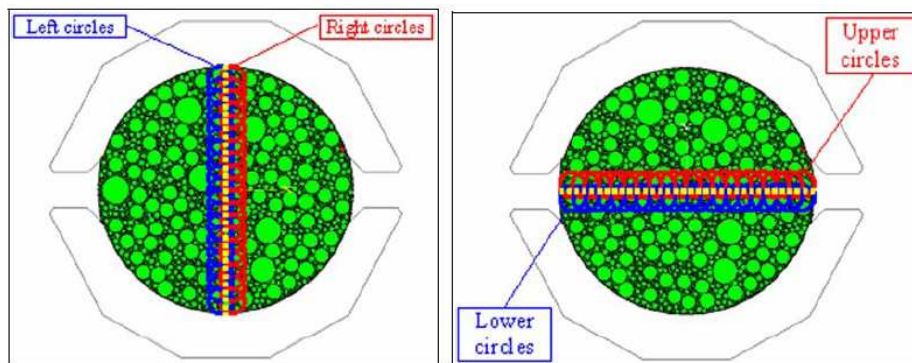


FIGURA 5.40: SIMULAZIONE DEM DELLA PROVA TRIASSIALE ED INDIVIDUAZIONE DEI CERCHI DI MISURA.

Per ogni campione testato vengono valutati i seguenti risultati:

1. curve scorrimento – stabilità;
2. andamento delle forze di contatto;
3. tensioni normali e tangenziali all'interno dei cerchi di misura.

Osservando il grafico riportato in figura 5.41 si nota come le curve scorrimento-stabilità ottenute in laboratorio abbiano un andamento qualitativamente e quantitativamente analogo a quelle ottenute numericamente per le tre tipologie di provino (cluster, up-scaled e sfere).

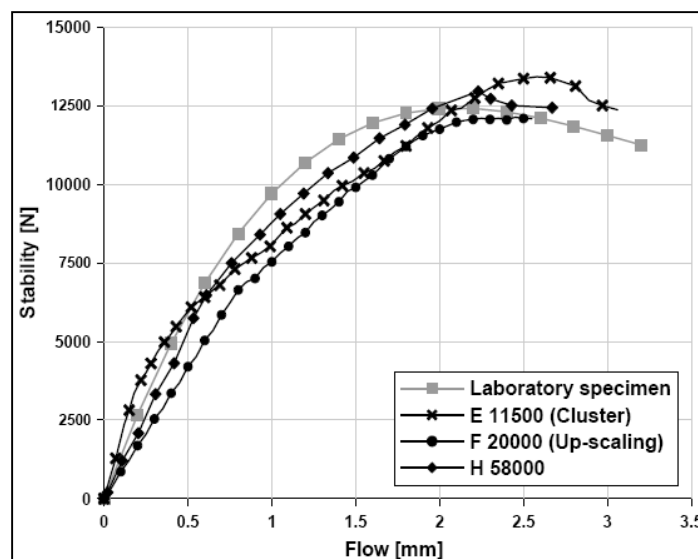


FIGURA 5.41: CONFRONTO CURVE STABILITÀ-SCORRIMENTO.

Le forze di contatto manifestano un andamento simmetrico rispetto all’asse del provino e crescono all’aumentare del numero di particelle costituenti il campione (figura 5.42).

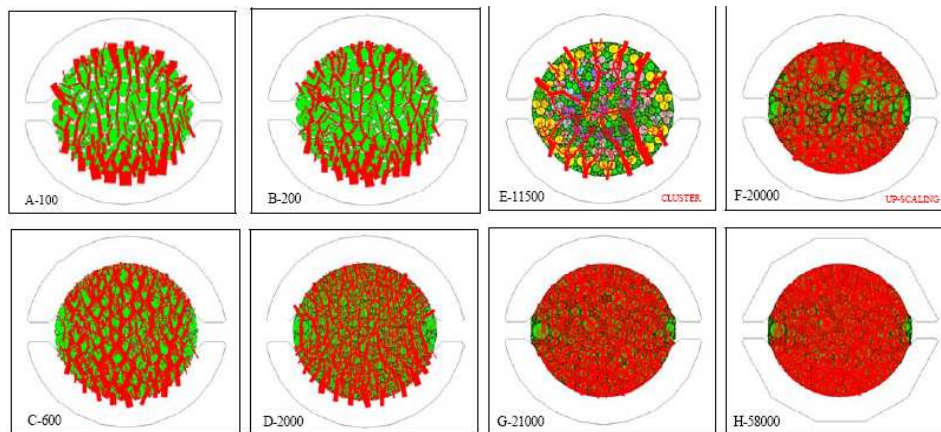


FIGURA 5.42: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO PER I DIVERSI CAMPIONI.

Vengono valutate le tensioni di compressione sul diametro verticale ed orizzontale dei diversi provini per uno scorrimento  $s_d$  corrispondente alla stabilità massima (in figura 5.43 si riportano a titolo di esempio i grafici ottenuti per il provino A 100).

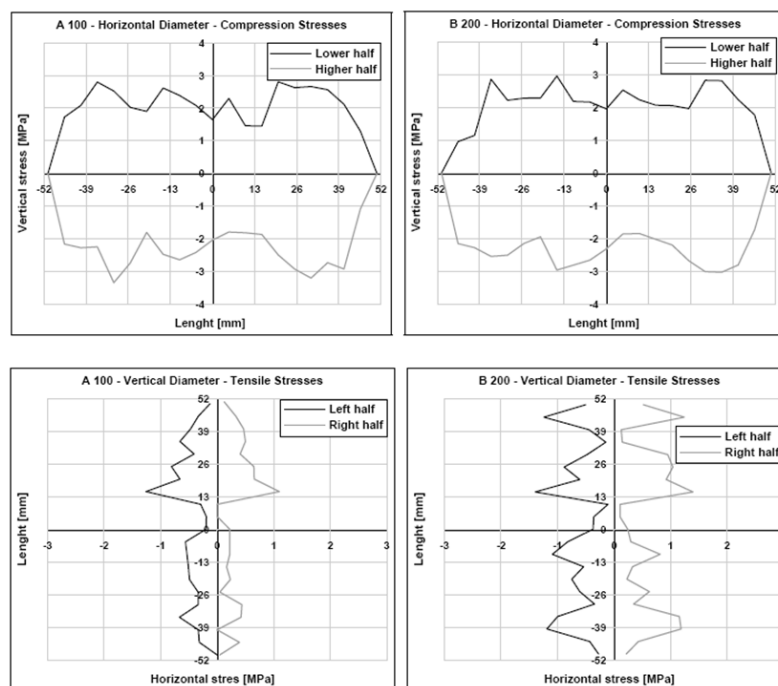


FIGURA 5.43: TENSIONI DI COMPRESSIONE LUNGO I DIAMETRI ORIZZONTALE E VERTICALE, ESEMPIO RELATIVO AL CAMPIONE A100.

Osservando quanto riportato in tabella 5.21 si evince che il provino H 58000 risulta essere quello che meglio simula il comportamento del materiale reale registrando valori di stabilità e scorrimento analoghi a quelli dei test di laboratorio.

TABELLA 5.21: CONFRONTO RISULTATI NUMERICI E SPERIMENTALI.

	Dati lab.	Provini numerici							
		A 100	B 200	C 600	D 2000	E 11500	G 21000	H 58000	F 20000
S [N]	12411	12948	13652	13451	13522	13416	12834	12951	12099
$\Delta S$ [%]	-	4.33	10.00	8.38	8.95	8.10	3.40	4.35	2.51
s [mm]	2.20	1.56	1.94	2.52	2.10	2.58	2.86	2.23	2.35
$\Delta s$ [%]	-	29.09	11.82	14.55	4.55	17.27	30.00	1.36	6.81

Mediante questo studio gli autori confermano quindi l’attendibilità e l’utilità della modellazione DEM per la schematizzazione del conglomerato bituminoso affermando, in particolare, la necessità dell’impiego di modelli di contatto viscoelastici in grado di esprimere la dipendenza dal tempo dello stato tenso-deformativo di tale materiale.

**5.10 ADHIKARI S. & YOU Z. (2010), “3D DISCRETE ELEMENT MODELS OF THE HOLLOW CYLINDRICAL ASPHALT CONCRETE SPECIMENS SUBJECT TO THE INTERNAL PRESSURE” [9]**

Gli autori di questo studio si propongono di confrontare il modulo dinamico di una miscela in conglomerato bituminoso misurato in laboratorio con quello ottenuto dalla modellazione numerica bidimensionale e tridimensionale. Il test scelto per la determinazione del modulo è quello del cilindro cavo. Il principio che sta alla base di questo test è l’applicazione di una pressione alla parete interna del cilindro e la misurazione delle tensioni e deformazioni conseguenti (figura 5.44).

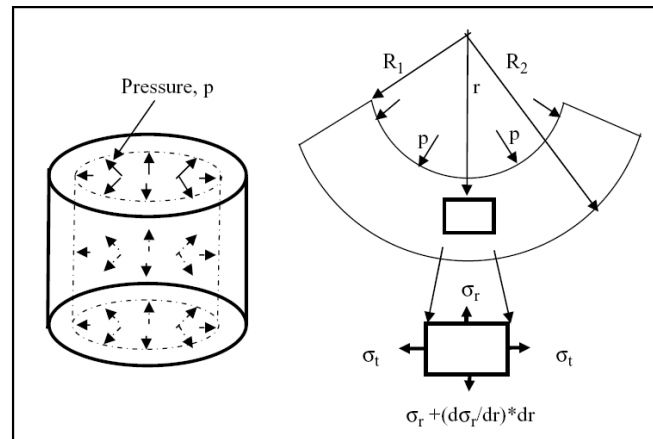


FIGURA 5.44: SCHEMA DELLE SOLLECITAZIONI NEL CILINDRO CAVO.

La tensione massima sulla superficie interna è data dall'equazione:

$$\sigma_r = p \left( \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (5.77)$$

La tensione massima sulla superficie esterna è data dall'equazione:

$$\sigma_r = p \left( \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (5.78)$$

dove:

$R_1$  = raggio della circonferenza interna;

$R_2$  = raggio della circonferenza esterna.

La deformazione corrispondente alla circonferenza interna può essere calcolata come:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r} \quad (5.79)$$

Il modulo viene quindi calcolato attraverso la seguente espressione:

$$E = \frac{\sigma_r}{\varepsilon_r} = \frac{p \Delta R_1}{R_1} \left( \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (5.80)$$



In laboratorio i test vengono effettuati su provini di altezza pari a 150 mm con  $R_1 = 75$  mm e  $R_2 = 50$  mm, ottenuti da campioni provenienti dalla pressa giratoria di diametro pari a 150 mm ed altezza 165 mm (figura 5.45).

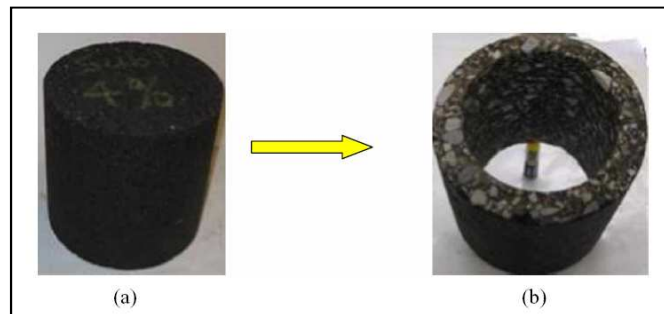


FIGURA 5.45 PREPARAZIONE DEL PROVINO A PARTIRE DA UN CAMPIONE CILINDRICO.

Le caratteristiche granulometriche ed il contenuto di bitume della miscela e del mastice sono riportati in tabella 5.11.

TABELLA 5.22: CARATTERISTICHE DELLA MISCELA E DEL MASTICE.

Diametro setaccio [mm]	Percentuale passante in peso [%]	
	Miscela	Mastice
19	100,0	100,0
12,5	98,7	100,0
9,5	86,5	100,0
4,75	71,8	100,0
2,36	51,4	100,0
1,18	36,1	70,23
0,6	25,5	49,61
0,3	14,7	28,60
0,15	7,7	14,98
0,075	5,4	10,51
Contenuto di bitume [%]	5,59	10,33

I test vengono effettuati per frequenze di carico di 0,1, 0,5, 1, 5, 10 e 25 Hz e temperature di 4, 13 e 21.3°C.

Per la generazione del provino numerico gli autori fanno ricorso alla tomografia a raggi X; in particolare il provino tridimensionale, alto 147 mm e di diametro pari a 150 mm, viene ricostruito sulla base di sezioni tomografiche in 2D effettuate ogni millimetro (figura 5.46).

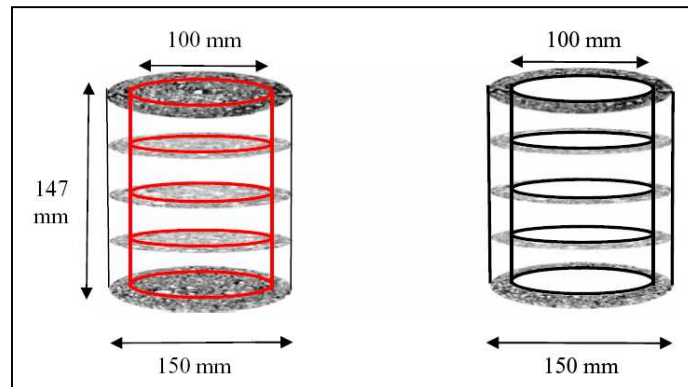


FIGURA 5.46: PROVINO 3D OTTENUTO DALLA TOMOGRAFIA A RAGGI X.

I vuoti, il mastice e gli aggregati vengono individuati in base alla tonalità di grigio, il loro volume totale, calcolato in base all'analisi delle sezioni tomografiche, è riportato in tabella 5.23.

TABELLA 5.23: CARATTERISTICHE DI UNA DELLE SEZIONI TRIDIMENSIONALI.

	<b>Vuoti d'aria</b>	<b>Mastice</b>	<b>Aggregati</b>
Tonalità di grigio	0 – 124	125 – 203	204 – 255
Volume totale [%]	5,71	59,18	35,11

Da scansioni tomografiche effettuate a diverse profondità (figura 5.47) si nota che:

- i vuoti sono concentrati in sommità e nella parte terminale del provino;
- il mastice è distribuito uniformemente;
- gli aggregati hanno una distribuzione irregolare: la loro concentrazione è maggiore nella parte centrale del provino.

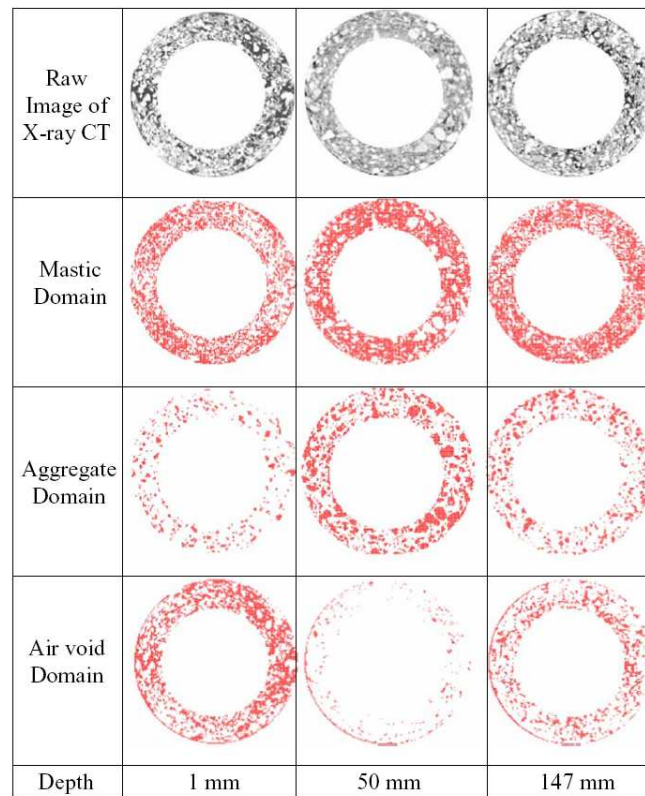


FIGURA 5.47: PROVINO 2D OTTENUTO DALLA TOMOGRAFIA A RAGGI X, RAPPRESENTAZIONE DEI VUOTI, DEL MASTICE E DEGLI AGGREGATI A DIFFERENTI PROFONDITÀ.

Dal provino digitale gli autori ricavano tre sezioni di spessore pari a 50 mm (figura 5.34), le cui caratteristiche volumetriche sono riportate in tabella 5.48.

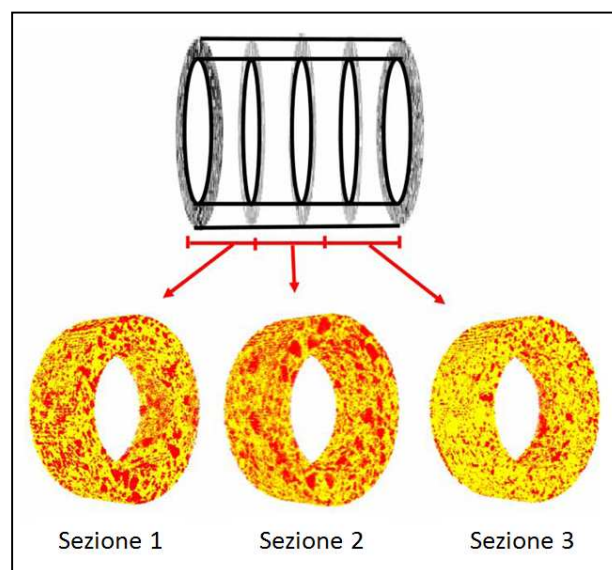


FIGURA 5.48: SUDDIVISIONE DEL PROVINO TRIDIMENSIONALE IN TRE SEZIONI.

TABELLA 5.24: CARATTERISTICHE VOLUMETRICHE DELLE TRE SEZIONI.

	Volume [%]		
	Vuoti d'aria	Mastice	Aggregati
Sezione 1	6.97	57.85	35.18
Sezione 2	7.17	58.10	34.73
Sezione 3	5.63	59.84	34.53

Adhikari et al., partendo da una sezione analoga a quelle precedentemente descritte, svolgono un confronto tra modellazione DEM 2D e 3D. Le coordinate degli elementi che rappresentano i componenti della miscela vengono determinate con l'ausilio di MATLAB e inserite nel modello numerico. Le caratteristiche dei provini sono riassunte in figura (figura 5.49).

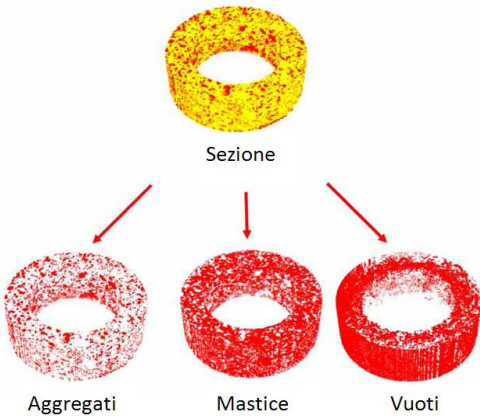
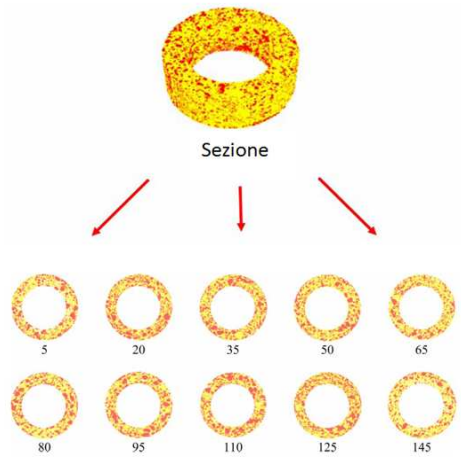
	<b>MODELLO 3D</b>	<b>MODELLO 2D</b>
<b>Raggi</b>	$R_1 = 49.5 \text{ mm}$ $R_2 = 75.5 \text{ mm}$	
<b>Provino</b>		
<b>Caratteristiche</b>	<p>N° elementi: 515400 sfere, <math>r = 0.5 \text{ mm}</math>                      Volume aggregati: 35,11%                      Volume vuoti: 5,71%</p> <p>Nella simulazione le sfere che rappresentano i vuoti vengono rimosse.</p>	<p>La percentuale di vuoti, aggregati e mastice varia da sezione a sezione.</p> <p>Le sezioni, ricavate dalla tomografia 3D, sono effettuate a 5, 20, 35, 50, 65, 80, 95, 110, 125 e 145 mm.</p>

FIGURA 5.49: CONFRONTO MODELLAZIONE 2D E 3D.

I moduli relativi ai modelli 2D e 3D, calcolati a partire dal grafico tensione-deformazione, vengono confrontati utilizzando prima un modello di contatto elastico poi uno viscoelastico.

Nel primo caso le interazioni aggregato-aggregato, aggregato-mastice e mastice-mastice vengono governate da un modello di rigidità elastico lineare. Le relazioni tra il modulo degli aggregati ( $E_c$ ) o il modulo dinamico del mastice ( $E^*$ ) e le rigidità normali e tangenziali ( $k_n$  e  $k_s$ ) per la modellazione 2D vengono espresse come segue:

$$k_n = 2E_c t \quad (5.81)$$

$$k_n = 2E^* t \quad (5.82)$$

$$k_s = k_n \lambda \quad (5.83)$$

dove  $t$  rappresenta il raggio del disco bidimensionale e  $\lambda$  il rapporto tra la rigidità tangenziale e quella normale.

Per la modellazione 3D le relazioni diventano:

$$k_n = 4E_c R \quad (5.84)$$

$$k_n = 4E^* R \quad (5.85)$$

$$k_s = k_n \lambda \quad (5.86)$$

dove  $R$  rappresenta il raggio della sfera tridimensionale e  $\lambda$  il rapporto tra la rigidità tangenziale e quella normale.

Nel presente studio il modulo degli aggregati è assunto pari a 55 GPa, quello dinamico del mastice varia a seconda della frequenza di carico e della temperatura e  $\lambda$  è pari ad 1.

Per quanto riguarda la simulazione viscoelastica gli autori utilizzano il modello di Burger per le interazioni all'interno del mastice, quello di rigidità elastica lineare per

il contatto aggregato-aggregato e i modelli di slittamento e legame per il contatto mastice-aggregato.

I parametri del modello di Burger macroscopico vengono calibrati sulla base di dati sperimentali relativi al mastice (tabella 5.25).

TABELLA 5.25: PARAMETRI DI BURGER PER DIVERSE FREQUENZE.

Parametri di Burger	Frequenza [Hz]				
	25	10	5	1	0.1
$E_1$	$5.04 \times 10^{11}$	$5.04 \times 10^{11}$	$5.04 \times 10^{11}$	$5.04 \times 10^{11}$	$5.04 \times 10^{11}$
$\eta_1$	$3.51 \times 10^{11}$	$3.51 \times 10^{11}$	$3.51 \times 10^{11}$	$3.51 \times 10^{11}$	$3.51 \times 10^{11}$
$E_2$	$3.90 \times 10^9$	$3.16 \times 10^9$	$2.59 \times 10^9$	$1.58 \times 10^9$	$6.99 \times 10^8$
$\eta_2$	$1.23 \times 10^7$	$2.43 \times 10^7$	$4.13 \times 10^7$	$1.39 \times 10^8$	$6.79 \times 10^8$

Le relazioni tra i parametri del modello di contatto di Burger a livello microscopico e quelli del modello calibrato sui dati ottenuti in laboratorio sono:

$$K_n^{BCM} = E^{BM} \alpha \begin{cases} t & (2D) \\ 2R & (3D) \end{cases} \quad (5.87)$$

$$K_s^{BCM} = \delta K_n^{BCM} \quad (5.88)$$

dove:

$K_n^{BCM}$  = rigidezza di contatto normale che rappresenta il contatto microscopico secondo Burger;

$K_s^{BCM}$  = rigidezza di contatto tangenziale che rappresenta il contatto microscopico secondo Burger;

$E^{BM}$  = parametri del modello di Burger macroscopico;

$\alpha$  e  $\delta$  = parametri dipendenti dalla distribuzione degli elementi, assunti in questo caso pari a 2 e 1.

In figura 5.50 è riportato un confronto tra i valori del modulo misurati in laboratorio e quelli ottenuti dalla modellazione 2D e 3D.

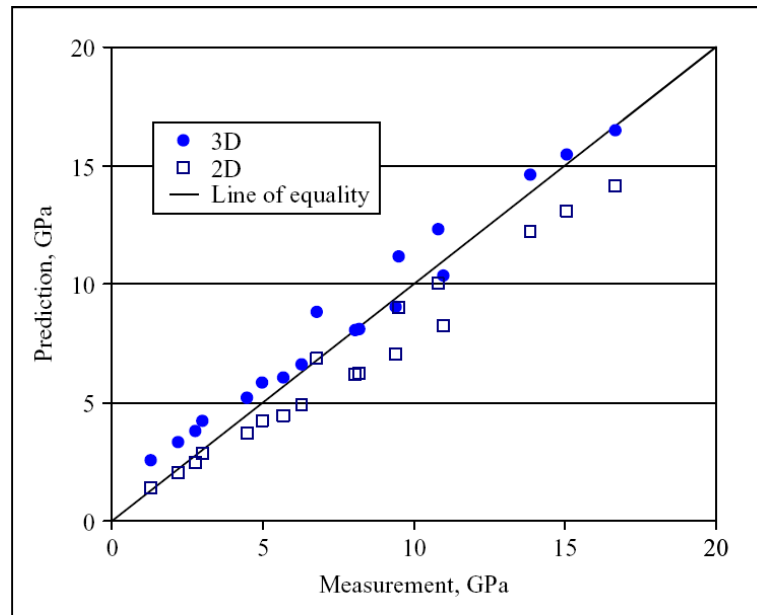


FIGURA 5.50: CONFRONTO RISULTATI NUMERICI E SPERIMENTALI.

I moduli relativi alla modellazione 3D sono più alti di circa il 27% rispetto a quelli del caso bidimensionale. Inoltre, la modellazione tridimensionale consente di ottenere risultati maggiormente simili a quelli di laboratorio, la differenza percentuale tra dati numerici e sperimentali è al massimo pari al 10%.

Confrontando i valori del modulo dinamico ottenuto per le due modellazioni a diverse frequenze di carico e per differenti temperature si ottiene l'istogramma riportato in figura 5.51.

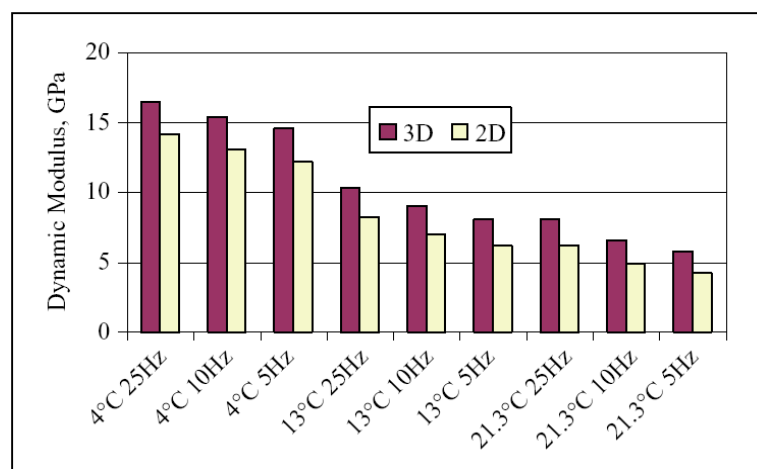


FIGURA 5.51: CONFRONTO MODELLO 2D E 3D A DIVERSE FREQUENZE E TEMPERATURE.

Infine, gli autori confrontano i risultati sperimentali con quelli numerici ottenuti dalle modellazioni numeriche elastiche e visco-elastiche. In figura 5.52 sono riportati i valori del modulo ottenuti nei tre casi per il provino bidimensionale alla temperatura di 21.3°C e per frequenze di 10 e 25 Hz.

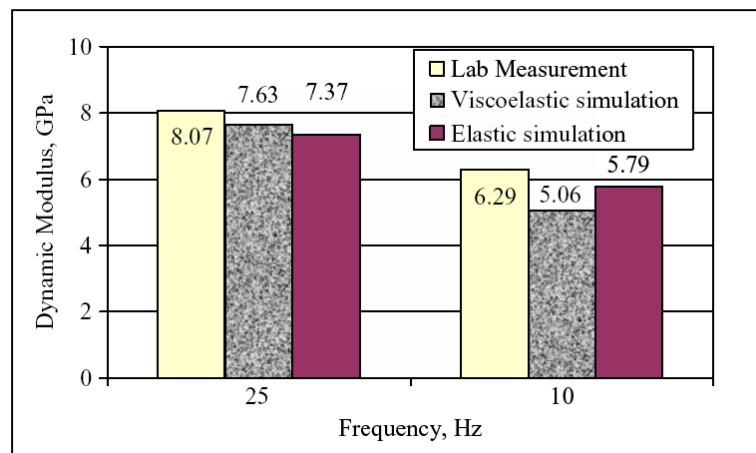


FIGURA 5.52: CONFRONTO TRA SIMULAZIONE ELASTICA (2D), VISCOELASTICA (2D) E DATI SPERIMENTALI.

Si può notare come in questo caso entrambe le simulazioni numeriche tendano a sottostimare leggermente il dato sperimentale: la differenza tra i moduli è contenuta in un range del 5%.

**5.11 Z. YOU, LIU Y., Q. DAI (2011), "THREE-DIMENSIONAL MICROSTRUCTURAL-BASED DISCRETE ELEMENT VISCOELASTIC MODELING OF CREEP COMPLIANCE TESTS FOR ASPHALT MIXTURES" [169]**

You et al. sono tra i primi ad occuparsi di modellazione DEM tridimensionale di miscele bituminose utilizzando un modello viscoelastico. Finora, infatti, la maggior parte degli autori che ha applicato un modello di contatto di questo tipo ha effettuato studi esclusivamente bidimensionali, a causa degli elevati oneri computazionali.

Lo studio presentato in questa memoria è costituito da quattro fasi fondamentali:

1. utilizzo della tomografia a raggi X per ricostruire il provino numerico;



2. definizione del modello viscoelastico, modello elaborato da Liu et al. nello studio del 2009 [115];
3. impiego del principio di sovrapposizione tempo – temperatura al fine di ridurre i tempi computazionali;
4. simulazioni tridimensionali di test di creep uniassiale su miscele bituminose.

Il provino numerico viene generato catturando separatamente, mediante la tomografia a raggi X, le coordinate degli aggregati, del mastice e dei vuoti che compongono la miscela (le cui caratteristiche sono riportate in tabella 5.26).

TABELLA 5.26: CARATTERISTICHE DELLA MISCELA NUMERICA.

	Diametro setaccio [mm]	Passante [%]		
<b>Aggregato</b>	25	100	<b>Contenuto bitume</b>	4,8% della massa totale della miscela
	19	98,9		
	12,5	77,5	<b>Contenuto vuoti</b>	4,0% del volume totale della miscela
	9,5	68,4		
	4,75	56,2		
	2,36	46,2		
	1,18	31,7		
	0,6	20,8		
	0,3	12,6		
	0,15	8,3		
	0,075	5,6		

Il modello numerico, riportato in figura 5.53, risulta costituito da 148200 particelle. Gli elementi più scuri rappresentano le piastre di carico, superiore ed inferiore, quelli di color bianco rappresentano il mastice e quelli grigi gli aggregati.

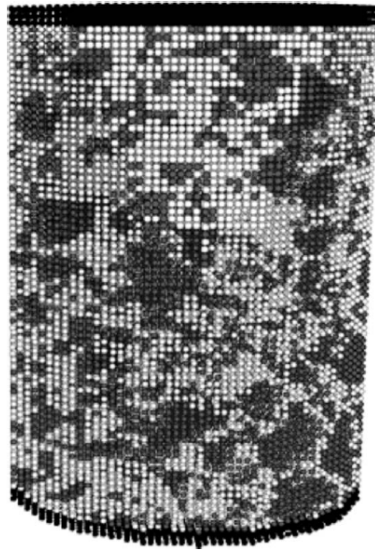


FIGURA 5.53: MODELLO NUMERICO 3D DEL PROVINO.

I modelli di contatto tra gli elementi sono gli stessi utilizzati dal Liu et al. nel 2009 e riportati nel paragrafo 5.7:

- modello di Burger per rappresentare il mastice;
- modello elastico per rappresentare gli aggregati;
- modello di slittamento;
- modello di legame.

In particolare le tipologie di contatto tra i diversi elementi, mastice-mastice, aggregato-mastice e aggregato-aggregato, sono riportati in figura 5.54.

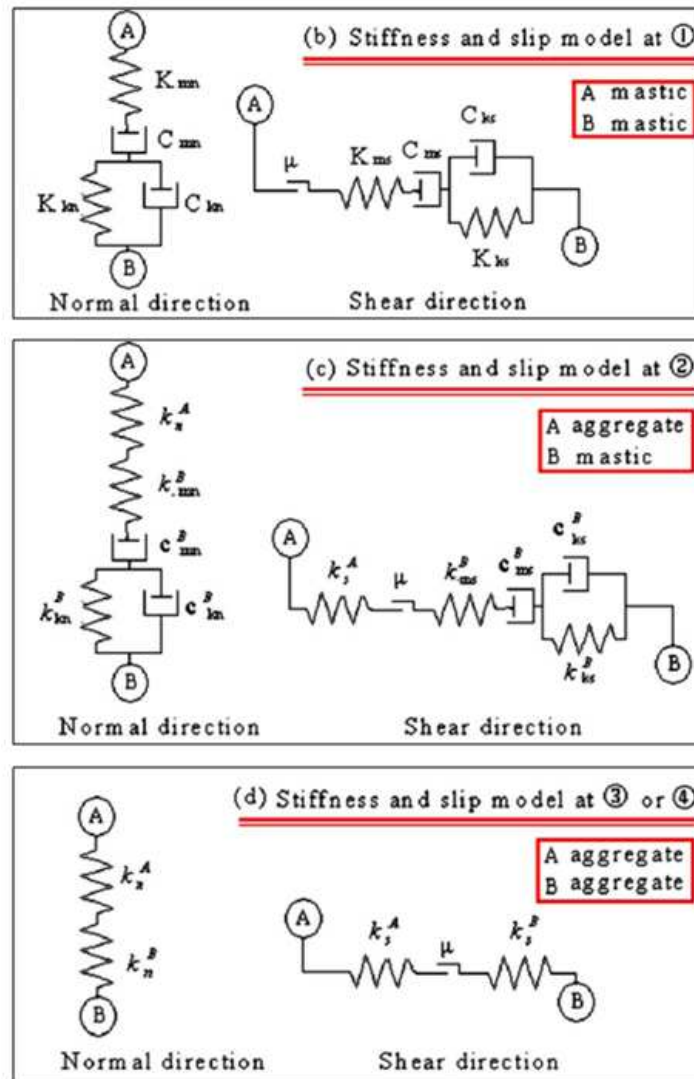


FIGURA 5.54: MODELLI DI CONTATTO.

Per ridurre i tempi computazionali della modellazione viscoelastica gli autori fanno ricorso al cosiddetto principio di sovrapposizione tempo-temperatura (TTS principle). Tale principio sancisce l'equivalenza tra tempo e temperatura per un materiale viscoelastico. Diventa quindi possibile ridurre il tempo di carico effettuando i test a temperature più elevate traslando successivamente il risultato ottenuto verso le basse temperature.

$$D(T, t) = D(T_r, t_r) \quad (5.89)$$

$$t = \alpha_T t_r \quad (5.90)$$

dove:

$D(T, t)$  = creep compliance relative alle reali condizioni di carico e temperatura;

$D(T_r, t_r)$  = creep compliance relative alla temperatura di riferimento e al tempo di carico ridotto;

$T, t$  = temperatura e tempo di carico reali;

$T_r, t_r$  = temperatura di riferimento e tempo di carico ridotto;

$\alpha_T$  = shift factor.

Secondo la teoria della viscoelasticità la creep compliance può essere espressa, utilizzando il modello di Burger, come segue:

$$D(T, t) = \frac{1}{E_m} + \frac{1}{\eta_m} + \frac{1}{E_k} [1 - e^{-(E_k/\eta_k)t}] \quad (5.91)$$

dove:

$E_m$  = costante elastica del modello di Maxwell;

$E_k$  = costante elastica del modello di Kelvin;

$\eta_m$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Maxwell;

$\eta_k$  = coefficiente di smorzamento viscoso del del modello di Kelvin;

$T, t$  = temperatura e tempo di carico reali.

Riducendo il tempo di carico in virtù del TTS l'equazione precedente diventa:

$$D(T, t) = \frac{1}{E_m} + \frac{1}{\eta_{mr}} + \frac{1}{E_k} [1 - e^{-(E_k/\eta_{kr})t_r}] \quad (5.92)$$

dove:

$E_m$  = costante elastica del modello di Maxwell;

$E_k$  = costante elastica del modello di Kelvin;

$\eta_{mr}$  = coefficiente di smorzamento viscoso del modello di Maxwell alla temperatura di riferimento;

$\eta_{kr}$  = coefficiente di smorzamento viscoso del del modello di Kelvin alla temperatura di riferimento;

$T_r, t_r$  = temperatura di riferimento e tempo di carico ridotto.

I parametri del modello di Burger in corrispondenza della temperatura di riferimento possono essere calcolati a partire da quelli reali:

$$\eta_{mr} = \frac{\eta_m}{\alpha_T} \quad (5.93)$$

$$\eta_{kr} = \frac{\eta_k}{\alpha_T} \quad (5.94)$$

La metodologia seguita da You et al. può essere schematizzata attraverso il diagramma di flusso in figura 5.55 e riassunta attraverso 5 passi.

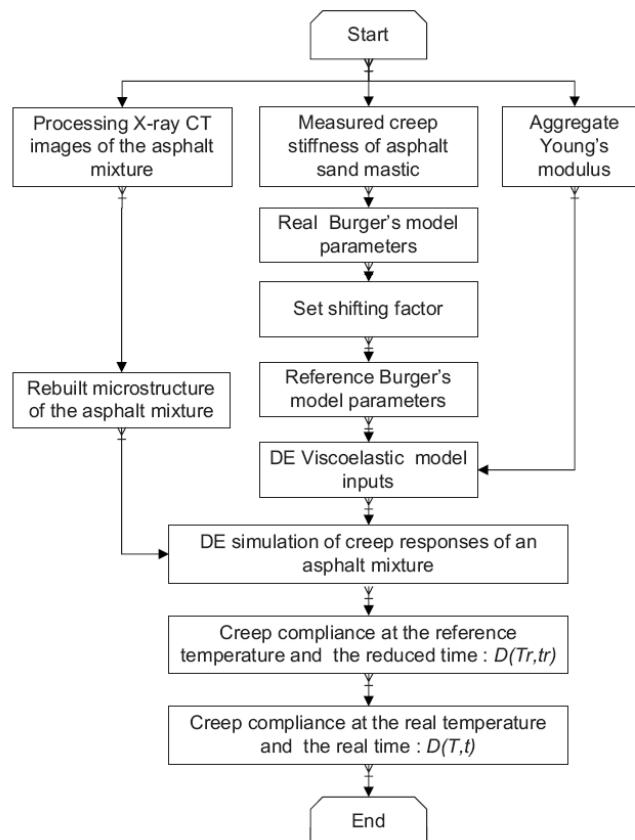


FIGURA 5.55: FLOW CHART RIASSUNTIVA DELLO STUDIO.

1. definizione delle proprietà del mastice e degli aggregati: la rigidità al creep del mastice, utilizzata come dato di input, si ottiene da grafico in figura 5.56.

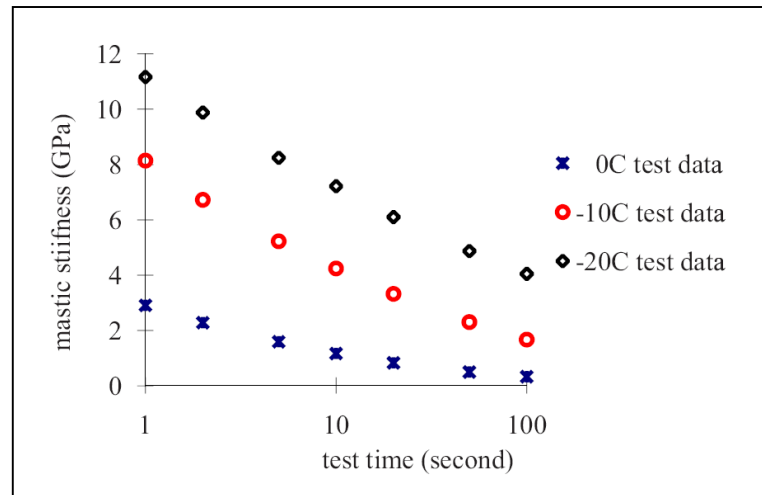


FIGURA 5.56: RESISTENZA AL CREEP DEL MASTICE A DIVERSE TEMPERATURE DI PROVA.

Il modulo di Young degli aggregati, in base a studi precedenti, viene assunto pari a 55 GPa.

2. definizione dei parametri di input del modello numerico viscoelastico: i parametri del modello di Burger di riferimento vengono calcolati, a partire da quelli reali, grazie alle equazioni (5.93) e (5.94). I parametri del modello di Burger reale vengono a loro volta determinati mediante calibrazione di dati reali di test di creep. Per scegliere lo shift factor da utilizzare gli autori hanno svolto uno studio parametrico per capire come varia la resistenza al creep al variare di  $\alpha_T$  (figura 5.57).

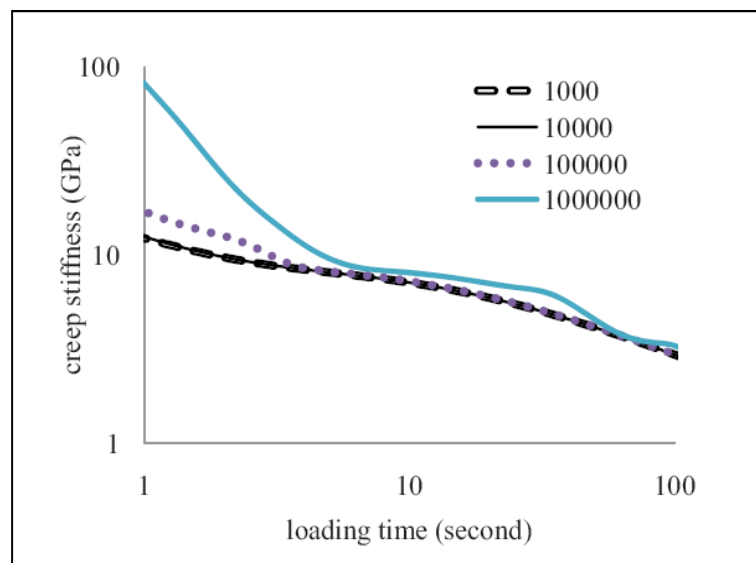


FIGURA 5.57: RESISTENZA AL CREEP PER DIFFERENTI VALORI DI SHIFT FACTOR.

Si osserva che:

- le curve relative ad  $\alpha_T = 1000$  e  $\alpha_T = 10000$  hanno andamenti pressoché coincidenti;
- quando lo shift factor aumenta da 10000 a 100000 le curve divergono sensibilmente nella parte iniziale;
- per  $\alpha_T = 1000000$  le curve divergono notevolmente e non solo nel tratto iniziale.

In base a quanto appena detto gli autori scelgono di utilizzare uno shift factor pari a 10000.

3. simulazione di test di creep uniassiale a carico costante. Il carico, pari a 0,2 MPa, viene applicato solo alla piastra superiore, mentre quella inferiore rimane fissa. Durante la simulazione viene calcolata la resistenza al creep dividendo il valore medio della tensione per quello della deformazione.
4. analisi della resistenza al creep alla temperatura di riferimento in funzione del tempo ridotto (figura 5.58).

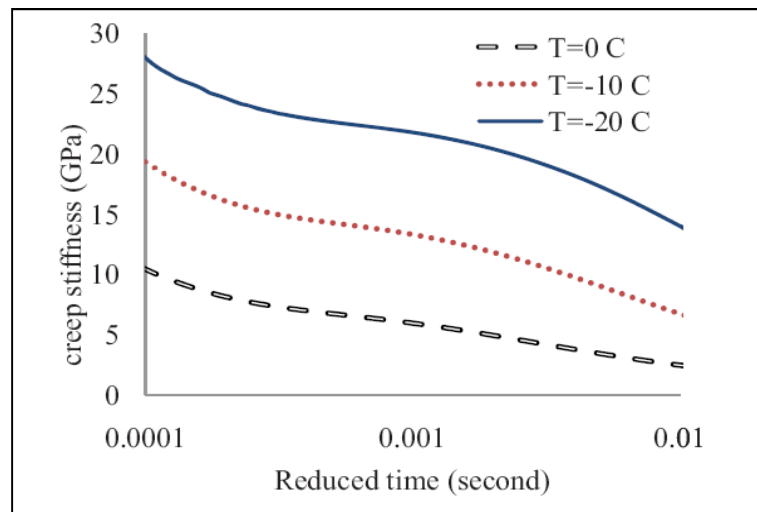


FIGURA 5.58: RESISTENZA AL CREEP IN FUNZIONE DEL TEMPO DI CARICO RIDOTTO (IN SCALA LOGARITMICA).

5. analisi della resistenza al creep alla temperatura reale in funzione del reale tempo di carico (figura 5.59).

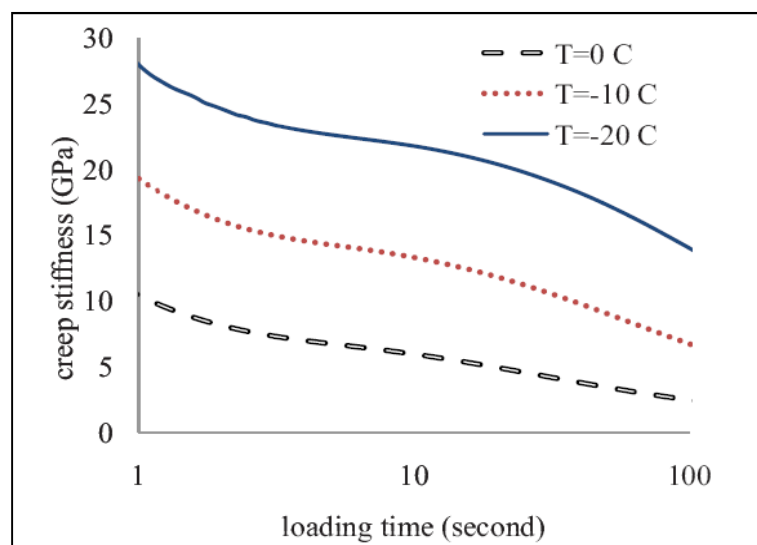


FIGURA 5.59: RESISTENZA AL CREEP IN FUNZIONE DEL TEMPO DI CARICO REALE (IN SCALA LOGARITMICA).

La parte finale della memoria è dedicata al confronto tra i risultati ottenuti sulla miscela di conglomerato in laboratorio (figura 5.60) e quelli ricavati dalle modellazioni numeriche utilizzando prima il modello elastico poi quello viscoelastico (figura 5.61).



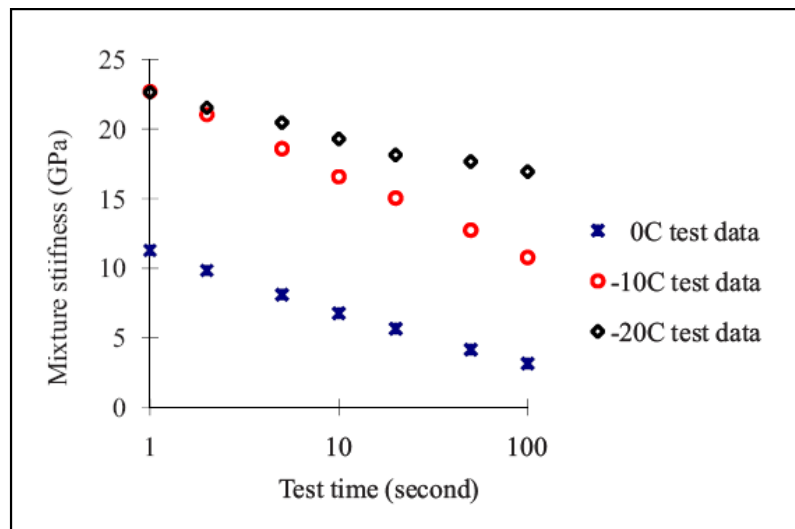


FIGURA 5.60: RESISTENZA AL CREEP DELLA MISCELA MISURATA IN LABORATORIO A DIVERSE TEMPERATURE DI PROVA.

Da quanto riportato in figura 5.61 si può osservare che:

- per quanto riguarda la simulazione numerica, i valori di resistenza forniti dal modello viscoelastico sono simili a quelli ottenuti mediante l'impiego del modello elastico;
- sia il modello DEM elastico sia quello viscoelastico tendono a sottostimare i valori di resistenza al creep;
- esistono sensibili differenze tra i valori misurati in laboratorio e quelli stimati mediante modellazione numerica. Ciò può essere dovuto alla scelta dello shift factor, che è stato calibrato solamente per le simulazioni a 0°C e non per quelle a -10 e -20 °C, oppure a misure non accurate per quanto riguarda la resistenza al creep della miscela alle due temperature inferiori.

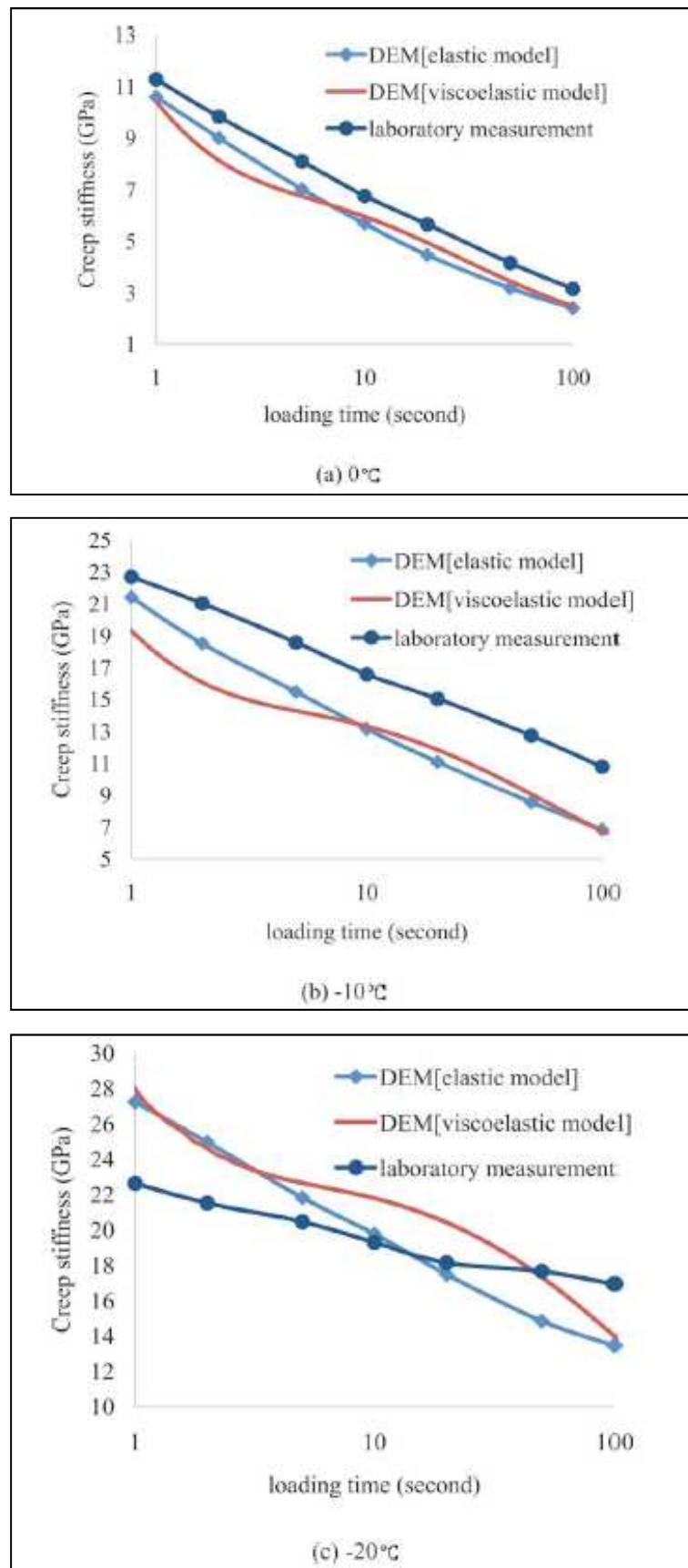


FIGURA 5.61: CONFRONTO RISULTATI NUMERICI E SPERIMENTALI.

L'ultima considerazione degli autori è di carattere operativo e riguarda gli oneri computazionali richiesti dai diversi modelli numerici utilizzati.

TABELLA 5.27: ONERI COMPUTAZIONALI RELATIVI AI DIVERSI MODELLI DI CONTATTO.

Tipologia modello	Tempo di calcolo [giorni]		
	0°C	-10°C	-20°C
Elastico	0,48	0,51	0,50
Viscoelastico senza TTS		30988,53	
Viscoelastico con TTS		3,10	

Osservando quanto riportato in tabella 5.27 si possono effettuare le seguenti considerazioni:

- il modello che richiede tempi di calcolo inferiori è quello elastico;
- il modello viscoelastico fornisce una curva continua, mentre quello elastico si limita a valori discreti;
- con il principio di equivalenza tempo – temperatura (TTS) il tempo computazionale relativo al modello viscoelastico passa da 82 anni (30988,53 giorni) a 3 giorni, senza rinunciare all'accuratezza del risultato.

### **5.12 OSSERVAZIONI**

L'analisi degli studi riportati in questo capitolo ha mostrato, come anticipato nel paragrafo 5.1, l'esistenza di due differenti approcci attraverso cui è possibile schematizzare numericamente il comportamento viscoelastico del conglomerato bituminoso. Il primo si deve alla ricerca intrapresa da Collop et al. e prevede l'applicazione di un modello elastico lineare le cui rigidità di contatto normale ( $k_n$ ) e tangenziale ( $k_s$ ) vengono calcolate in funzione dei parametri del modello di Burger macroscopico, ottenuti a loro volta mediante calibrazione di risultati sperimentali [44].

Il secondo approccio, invece, viene utilizzato per la prima volta da Abbas et al. e si basa sull'applicazione diretta del modello di Burger secondo quanto previsto dal codice di calcolo Particle Flow Code (paragrafo 2.4.1.3) [5].

Entrambe le metodologie di applicazione del modello di Burger forniscono risultati maggiormente attendibili rispetto a quelli relativi alla modellazione elastica e sono in grado di riprodurre in maniera più affidabile il reale comportamento tenso-deformativo del conglomerato bituminoso. Il primo approccio però, sfruttando indirettamente il modello di contatto lineare, richiede oneri computazionali inferiori e per questo risulta essere quello più ampiamente diffuso nelle applicazioni reperibili in letteratura.

## **LA FASE DI CALIBRAZIONE DEI PARAMETRI MICROSCOPICI**

---

### **6.1 INTRODUZIONE**

Nel presente capitolo viene descritta la prima parte della fase sperimentale oggetto di studio che, come anticipato nel capitolo 3, si pone l'obiettivo di valutare l'influenza della forma dell'aggregato sulle prestazioni di una miscela in conglomerato bituminoso, considerando una miscela non legata. Essa si inserisce nell'ambito di un progetto di ricerca PRIN (Programmi di ricerca scientifica di Rilevante Interesse Nazionale), dal titolo "*Modellazione e progettazione avanzata di pavimentazioni stradali perpetue*", conclusosi nel 2010, al quale hanno partecipato le seguenti università italiane:

- Politecnico di Torino (Coordinatore);
- Università di Bologna;
- Università Politecnica delle Marche;
- Università di Parma;
- Università di Pisa.

L'intero studio può essere diviso in tre fasi successive:

- definizione del materiale e della granulometria della miscela e scelta del test di laboratorio da utilizzare;
- calibrazione dei parametri microscopici, ottenuta dal confronto tra i risultati numerici e quelli sperimentali ricavati da test condotti su provini formati interamente da sfere;
- indagine dell'influenza della forma e della dimensione dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo di una miscela granulare, mediante il confronto tra risultati numerici e sperimentali ricavati da test condotti su campioni costituiti da sfere ed elementi di forma generica.

La calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere di acciaio è stata ottenuta dalla modellazione 3D di prove triassiali, confrontando i risultati del modello numerico con quelli di laboratorio.

Per ottenere indicazioni sull'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema sono stati confrontati i risultati ottenuti da prove triassiali condotte in laboratorio e modellate numericamente, eseguite su diversi provini al variare del tipo di particella elementare. Nel presente capitolo viene analizzata la fase di calibrazione dei parametri microscopici.

## **6.2 SCELTA DELLE MODALITÀ PIÙ OPPORTUNE PER SIMULARE L'AGGREGATO REALE**

Come anticipato nel precedente paragrafo, la sperimentazione ha previsto una prima fase di laboratorio e di modellazione condotta su provini formati esclusivamente da sfere.

In questa fase, dopo aver individuato la metodologia di modellazione più opportuna al fine di simulare l'aggregato reale, si è effettuata la calibrazione dei parametri microscopici mediante il confronto tra i risultati ottenuti in laboratorio e quelli del modello in termini di tensione deviatorica-deformazione assiale e di deformazione volumetrica-deformazione assiale.

Il primo passo da compiere riguarda la scelta della miscela reale di inerti che si intende utilizzare per i test di laboratorio e le modellazioni numeriche. Una granulometria eccessivamente fine comporta, a livello di modellazione, oneri e tempi computazionali troppo elevati; d'altra parte, una granulometria caratterizzata esclusivamente da inerti grossolani risulta scarsamente rappresentativa del materiale impiegato per il confezionamento delle miscele di conglomerato.

Tenendo conto degli aspetti appena citati è stata scelta una curva granulometrica tipica di un pietrisco utilizzato per il confezionamento di uno strato di binder (figura 6.1).

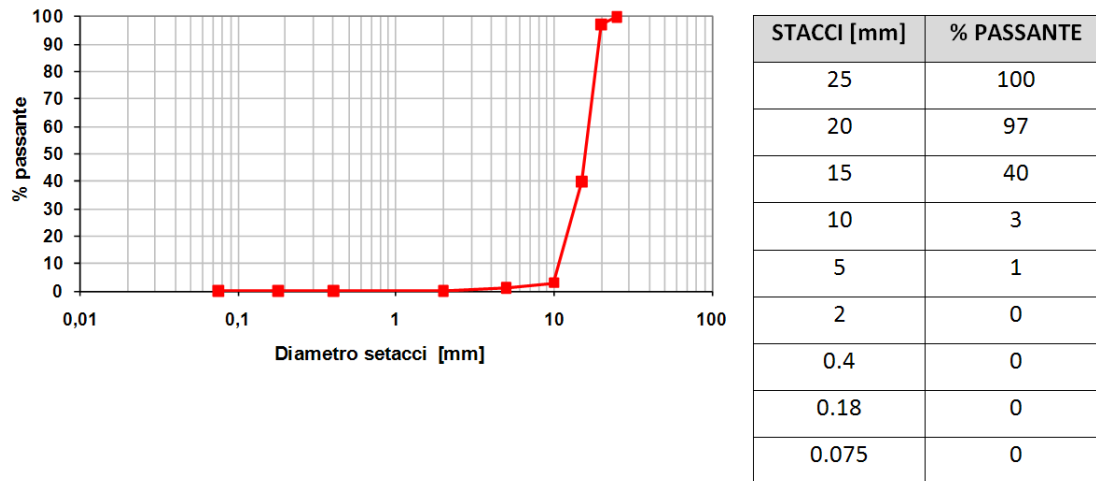


FIGURA 6.1: CURVA GRANULOMETRICA DELLA MISCELA REALE.

Al fine di definire la metodologia più opportuna per simulare l'aggregato reale in modo significativo è stato necessario:

- definire il tipo di materiale costituente le sfere;
- definire il test di laboratorio da svolgere.

### **6.2.1. Scelta del materiale costituente le sfere**

Per la scelta del materiale costituente le sfere è stata svolta un'ampia ricerca bibliografica che ha permesso di scegliere, tra i diversi materiali presenti in commercio, quello più facilmente riproducibile con il metodo DEM particellare e disponibile sul mercato a prezzi maggiormente competitivi.

Tra materiali plastici (polyamide, hostaform, polipropilene, poliuretano, teflon), ceramici (ossido di allumina, rubino e zaffiro, ossido di zirconio, nitrato di silicio) e l'acciaio è stato scelto quest'ultimo, in virtù delle sue caratteristiche di elevata durezza, buona inossidabilità e media resistenza. Studi condotti da O'Sullivan et al. [130], [132], Cui et al. [47] e Naeini et al. [127] hanno inoltre dimostrato come questo materiale possa essere impiegato con ottimi risultati nella validazione di modelli numerici agli elementi discreti.

L'acciaio costituisce quindi un aggregato ideale, in grado di fornire un confronto significativo tra i risultati numerici e quelli sperimentali in virtù del fatto che:

- la geometria delle sfere in acciaio è facilmente modellabile in termini sia di diametro, sia di sfericità;

- la superficie delle sfere è uniforme ed è nota la relativa tolleranza di fabbricazione.

Le sfere costituenti i campioni, che a livello industriale vengono impiegate per la produzione di cuscinetti ed altre applicazioni, sono in *acciaio inox AISI 420C DRY* le cui specifiche compositive sono riassunte in tabella 6.1.

TABELLA 6.1: SPECIFICHE COMPOSITIVE ACCIAIO (MARTIN & C. SRL).

ACCIAIO	COMPOSIZIONE							DUREZZA		
								Secondo DIN 5401:2002-08		Secondo ANSI/AMBA Std.10A-2001
	C%	Si%	Mn%	P%	S%	Co%	Cr%	oltre	fino a	
INOX AL 13% 420C	0,43	1,00	1,00	0,040	0,015	-	12,50	12,7	12,7	N.A.
	0,50	max	max	max	max	-	14,50		100	

La granulometria della miscela ideale di acciaio viene definita semplificando quella del materiale reale (figura 6.1), eliminando le frazioni di passante poco significative (figura 6.2). In questo modo è possibile ottenere una miscela di elementi di diametro compreso tra 2,778 mm e 20 mm, caratterizzata dalle seguenti proprietà:

- assenza di problemi di effetto scala rispetto alle dimensioni del provino, di diametro ed altezza pari rispettivamente a 100 e 200 mm;
- buona maneggevolezza nel trattamento delle singole sfere, ottenuta evitando diametri troppo piccoli.

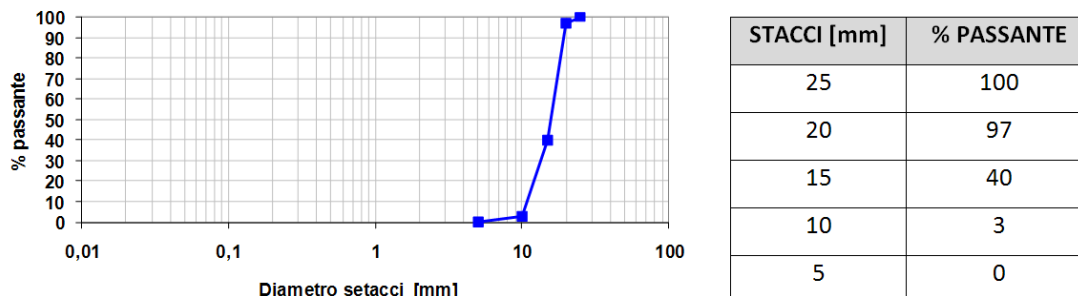


FIGURA 6.2: CURVA GRANULOMETRICA DELLA MISCELA IDEALE DI ACCIAIO.



### **6.2.2 Scelta del test di laboratorio**

Come ogni scelta compiuta all'interno della sperimentazione, anche quella relativa al test di laboratorio da modellare trova la sua giustificazione all'interno di una vasta ricerca bibliografica [39], [44], [48], [88], [129], [135], [145], [154].

La maggior parte degli studi che impiegano la modellazione numerica per analizzare il comportamento di una miscela ideale di aggregati utilizza test triassiali. In particolare, Cheung et al. [39] e Cui et al. [48] indagano il comportamento di una miscela non legata sottoposta a test triassiale da un punto di vista microscopico, valutando l'entità e la distribuzione delle forze di contatto interparticellari e l'interazione tra gli elementi. Il modello numerico viene validato confrontandone i risultati macroscopici in termini di deformazione assiale-sforzo deviatorico con quelli ottenuti in laboratorio su provini costituiti da sfere d'acciaio. Uthus et al. utilizzano il test triassiale per l'analisi del modulo resiliente di una miscela non legata sottoposta a carico ciclico [154]. Infine, Salot et. al. utilizzano il software agli elementi discreti SDEC per simulare test di compressione triassiale al fine di indagare l'influenza della geometria degli inerti sulle caratteristiche della miscela [145].

Quindi, in virtù dei risultati disponibili in letteratura relativi alla modellazione di test di laboratorio su miscele non legate, è stato scelto il test triassiale poiché:

- fornisce risultati significativi sul fenomeno fisico studiato;
- risulta semplice da modellare con il metodo DEM particellare;
- l'esecuzione in laboratorio è semplice e relativamente veloce.

Nella prova triassiale standard un provino cilindrico è prima sottoposto ad una pressione isotropica  $\sigma_r = \sigma_a = \sigma_c$  (fase di consolidazione), applicata mettendo in pressione l'acqua di cella (pressione di contenimento), e poi ad una pressione  $\sigma_a - \sigma_r$  applicata mediante una pressa a velocità di deformazione costante, fino ad arrivare alla rottura (fase di rottura). Poiché non vi sono tensioni di taglio sulle superfici del provino, la tensione di taglio  $\sigma_a$  e quella di contenimento  $\sigma_r$  sono le tensioni principali maggiore e minore  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , e l'incremento della tensione assiale  $\sigma_a - \sigma_r = \sigma_1 - \sigma_3$  è indicato come tensione o sforzo deviatorico.

Le prove triassiali si distinguono in relazione alle condizioni di drenaggio che si hanno durante ogni stadio:

- nelle prove non consolidate - non drenate non vi è dissipazione delle pressioni interstiziali né durante l'applicazione della pressione di contenimento  $\sigma_2 = \sigma_3$ , né durante l'applicazione della pressione verticale  $\sigma_1 - \sigma_3$ ;
- nelle prove consolidate - non drenate viene permesso il drenaggio durante l'applicazione della pressione di contenimento  $\sigma_3$ , finché il campione è completamente consolidato sotto questa pressione, mentre durante l'applicazione della pressione verticale  $\sigma_1 - \sigma_3$  non è permesso alcun drenaggio e si misura la pressione neutra;
- nelle prove consolidate - drenate, il drenaggio è possibile durante tutta la prova, si ha consolidazione completa sotto la pressione  $\sigma_3$ , durante l'applicazione della pressione verticale  $\sigma_1 - \sigma_3$  non si ha formazione di pressione neutra nel provino e si misurano le variazioni di volume del provino.

Le prove condotte all'interno della sperimentazione sono prove triassiali di tipo consolidato – drenato (TxCD).

### **6.3 TEST SVOLTI PER LA CALIBRAZIONE DEI PARAMETRI**

La calibrazione dei parametri microscopici con cui schematizzare le sfere di acciaio è stata ottenuta dal confronto tra risultati numerici e sperimentali di test triassiali condotti su provini formati interamente da sfere.

I provini, in particolare, hanno un'altezza ed una larghezza pari rispettivamente a 200 e 100 mm, e sono formati da 32463 elementi di diametro compreso tra 2,77 mm e 18 mm (figura 6.4).

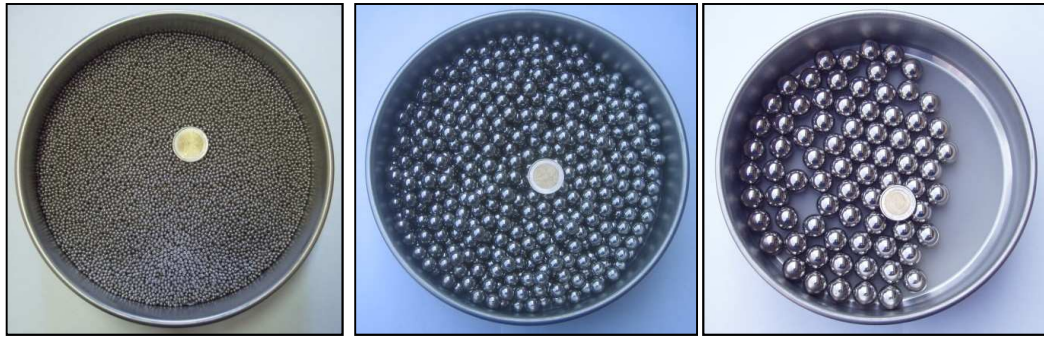


FIGURA 6.3: SFERE DI DIAMETRO PARI A 2,77, 11 E 18 MM.

Partendo dalla curva granulometrica della miscela ideale di acciaio (figura 6.3) è stato determinato, per ogni diametro, il numero di elementi necessari per riprodurre la percentuale in peso sul totale (tabella 6.2).

TABELLA 6.2: NUMERO DI SFERE CONTENUTE NEL PROVINO.

Diametri [mm]	Numero di sfere
2.77	31800
11	589
18	74

I provini così composti sono stati testati a compressione triassiale, in laboratorio e mediante il software di calcolo agli elementi discreti PFC<sup>3D</sup>. In particolare sono state effettuate prove caratterizzate da tre differenti tensioni di confinamento: 300, 400 e 500 kPa (tabella 6.3). Il valore della *back pressure* utilizzata per saturare il provino è costante in tutte le prove e, in particolare, pari a 100 kPa.

TABELLA 6.3: TEST SVOLTI.

Nome test	Tensione di confinamento [kPa]	Back pressure [kPa]
1_S	300	100
2_S	400	100
3_S	500	100

### **6.3.1 Fase di laboratorio**

La fase di laboratorio ha previsto la definizione delle modalità di creazione del provino triassiale e la successiva esecuzione dei test.

Relativamente al primo punto, noto che il test triassiale nasce per lo studio delle terre, è necessario adottare opportuni accorgimenti per confezionare provini in acciaio che, a differenza di quelli in terreno, non posseggono caratteristiche di auto sostentamento (figura 6.4).

A tal fine viene utilizzato un rinforzo costituito da un foglio di carta da filtro interposto tra le sfere e la membrana in lattice. Esso, asciutto, garantisce la rigidità necessaria a sostenere il provino nella fase iniziale e, una volta bagnato, perde consistenza senza fornire contributi resistenti durante il test.

Per garantire una maggiore stabilità, il foglio di carta da filtro viene incollato tramite Loctite<sup>®</sup>, un particolare collante solubile in acqua.



FIGURA 6.4: CAMPIONE SOGGETTO A COLLASSO IN SEGUITO ALLA RIMOZIONE DELL'ANELLO METALLICO DI CONTENIMENTO.

La membrana e il cilindro di carta da filtro vengono posizionati sulla base della cella, a contatto con una pietra porosa, mediante l'ausilio di un cilindro metallico che viene successivamente rimosso (figura 6.5).

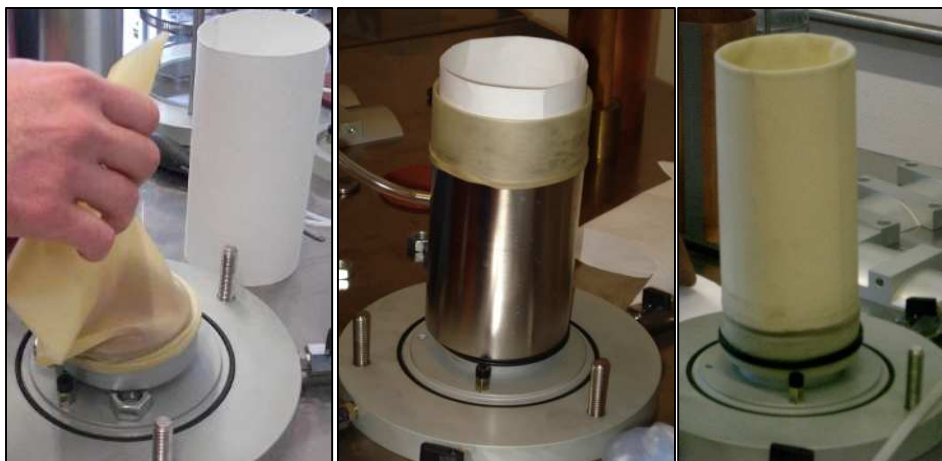


FIGURA 6.5: POSIZIONAMENTO DEL CILINDRO DI CARTA DA FILTRO E DELLA MEMBRANA SULLA BASE DELLA CELLA.

Il cilindro di carta da filtro, rivestito della membrana in lattice, viene posizionato all'interno di un secondo cilindro metallico di contenimento, utilizzato solo durante l'inserimento del materiale all'interno del campione (figura 6.6).

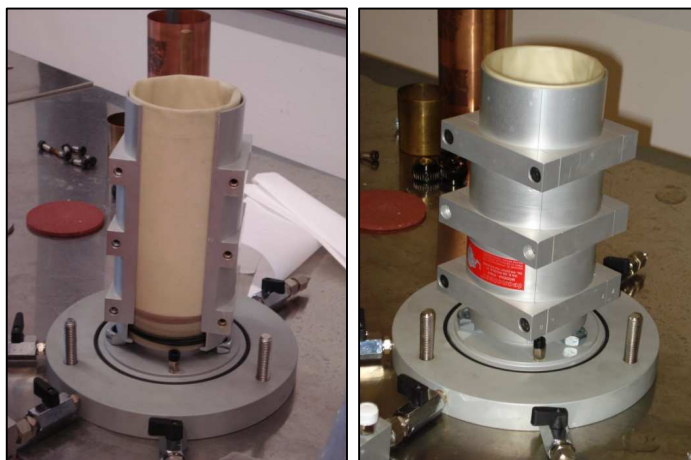


FIGURA 6.6: MONTAGGIO DELL'ANELLO DI CONTENIMENTO METALLICO.

Il campione viene confezionato disponendo alle estremità del provino sfere di diametro pari a 2,77 mm, in modo da avere uno strato uniforme a diretto contatto con le pietre porose. Nella parte centrale, invece, le sfere vengono introdotte in modo casuale e successivamente compattate mediante un pestello (figura 6.7).



FIGURA 6.7: COMPATTAZIONE DEL PROVINO.

Questo procedimento prosegue fino al totale riempimento della fustella (figura 6.8).



FIGURA 6.8: COMPLETO RIEMPIMENTO DELLA FUSTELLA.

Quando il cilindro è pieno, viene rimossa la struttura di alluminio e vengono posizionate sulla sommità la pietra porosa e la piastra dotata delle connessioni idrauliche (figura 6.9).

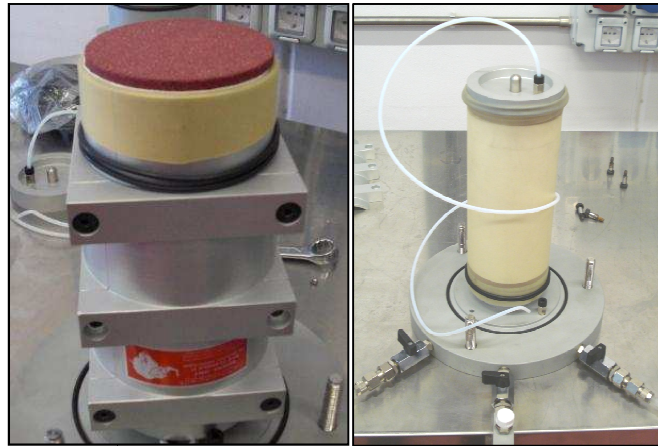


FIGURA 6.9: A) E B) POSIZIONAMENTO DELLA PIETRA POROSA E DELLA PIASTRA DOTATA DELLE CONNESSIONI IDRAULICHE.

Una volta messi in sede gli *o-ring* che bloccano la membrana, il provino può essere posizionato all'interno della cella, che viene riempita d'acqua mediante i rubinetti collegati alla base (figura 6.10).

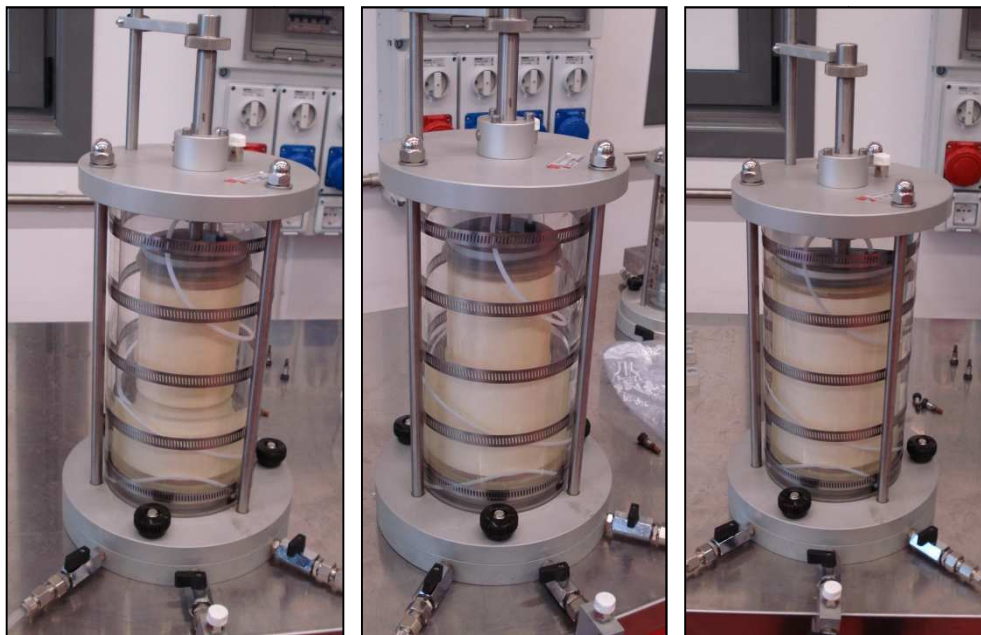


FIGURA 6.10: FASI DI SATURAZIONE DEL PROVINO.

Dopo aver utilizzato una back pressure di 100 kPa per saturare il provino (figura 6.11), si applica allo stesso la pressione di confinamento, che consente la consolidazione del campione.

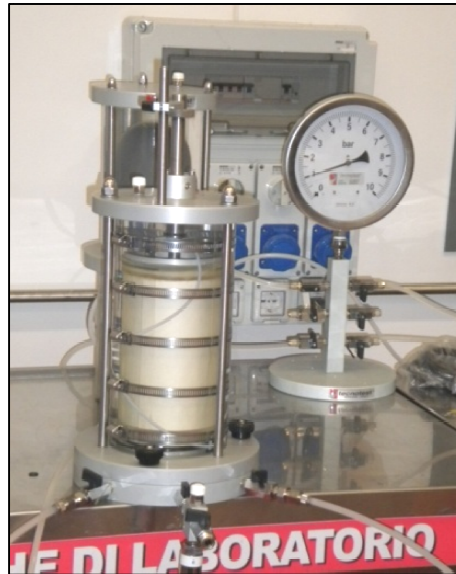


FIGURA 6.11: LETTURA DELLA BACK PRESSURE SUL MANOMETRO.

A consolidazione avvenuta la cella viene posizionata nell'apposito vano sulla pressa (figura 6.12).

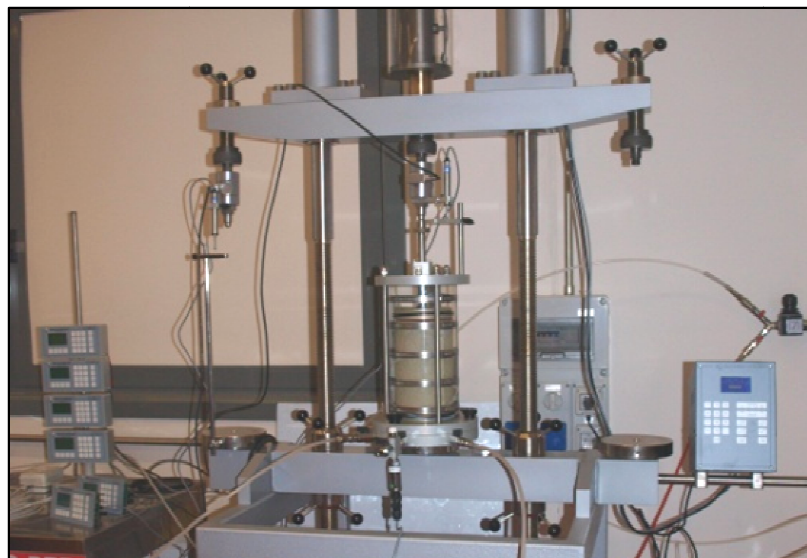


FIGURA 6.12: PRESSA CON PROVINO IN SEDE.

A questo punto, una volta resettati i sensori e gli strumenti di misura, può iniziare la deformazione assiale del campione, che viene fatta proseguire oltre la rottura (figura 6.13).





FIGURA 6.13: IL CAMPIONE AL TERMINE DELLA PROVA.

Al termine della prova è possibile constatare che la carta da filtro, dopo il contatto con l'acqua, è stata interessata da un processo di disfacimento, validando così l'ipotesi della mancanza di un contributo resistente da parte del suddetto cilindro di contenimento. Durante il test possono essere monitorate la tensione deviatorica, la variazione volumetrica, l'andamento dell'indice dei vuoti e le pressioni applicate. Il tutto è permesso grazie ad un sistema di sensori collegati a terminali elettronici che consentono di memorizzare i dati su un computer dotato di apposito software *Tecnotest Data Acquisition* (figura 6.14).

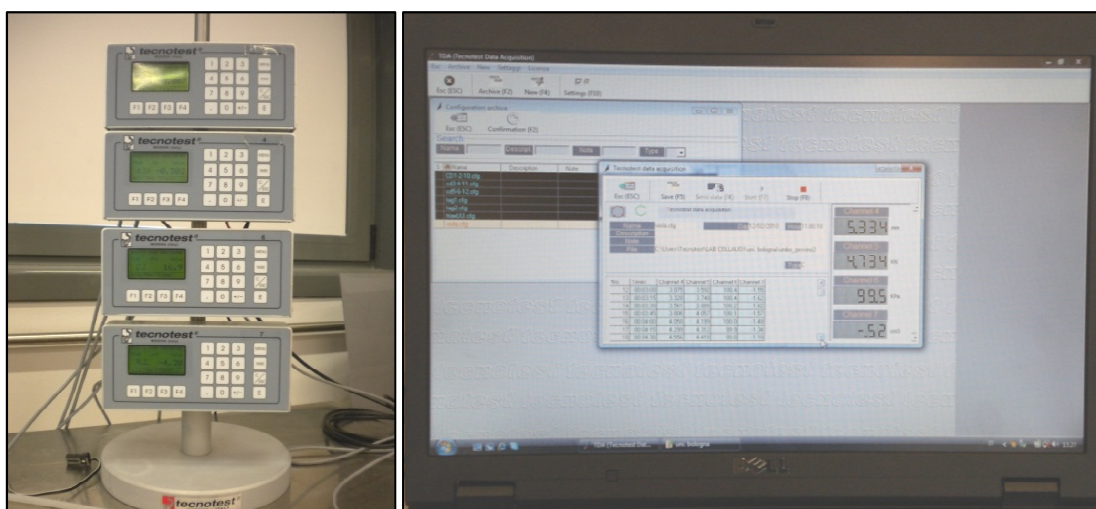


FIGURA 6.14: APPARECCHIATURA PER IL CONTROLLO NUMERICO.

I test sono stati eseguiti presso il laboratorio della Tecnotest S.r.l. a Modena. L'apparecchiatura utilizzata è una pressa "a tre vani" con forza massima pari a 50 kN e velocità costante di discesa del pistone variabile tra 0,00001 e 12 mm/min.

Per la presente sperimentazione si è scelto di utilizzare una velocità pari a 1mm/min.

Per ogni test vengono analizzati con sistema a controllo numerico:

1. l'andamento della tensione deviatorica ( $\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3$ ) in funzione della deformazione assiale ( $\epsilon_a$ );
2. l'andamento della variazione volumetrica del campione ( $\Delta V/V$ ) in funzione della deformazione assiale ( $\epsilon_a$ );
3. l'andamento dell'indice dei vuoti in funzione della deformazione assiale ( $\epsilon_a$ ).

### **6.3.2 Fase di modellazione**

La modellazione numerica della prova triassiale viene effettuata mediante il software di calcolo agli elementi discreti PFC<sup>3D</sup> descritto nel terzo capitolo.

Per prima cosa è necessario scegliere un sistema di unità di misura coerente con le grandezze del problema e tale sistema deve essere mantenuto per tutta la durata della sperimentazione poiché PFC<sup>3D</sup> non è in grado di calcolare equivalenze.

In tabella 6.4 sono riportate le unità di misura ammesse dal programma; la colonna in evidenza segnala le unità di misura assunte per la presente sperimentazione [90].

TABELLA 6.4: LE UNITÀ DI MISURA DEL SI.

	<b>Sistema Internazionale SI</b>			
<b>Lunghezza</b>	m	m	m	m
<b>Densità</b>	Kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup> Kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup> Kg/m <sup>3</sup>	10 <sup>6</sup> g/cm <sup>3</sup>
<b>Forza</b>	N	kN	MN	Mdynes
<b>Tensione</b>	Pa	kPa	MPa	bar
<b>Gravità</b>	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	cm/s <sup>2</sup>
<b>Rigidità sfere</b>	N/m	kN/m	MN/m	Mdynes/m
<b>Rigidità contatti</b>	Pa/m	kPa/m	MPa/m	bar/cm

Il cilindro, che rappresenta il dominio del sistema, ha un'altezza di 0,2 m ed un diametro di 0,1 m. I muri devono garantire caratteristiche di indeformabilità e per questo motivo il valore della rigidità che li caratterizza è piuttosto elevato e, più precisamente, pari a  $1e8$  N/m.

La densità delle particelle viene assunta pari a quella delle sfere di acciaio che costituiscono la miscela testata in laboratorio:  $7750$  kg/m<sup>3</sup>.

La modellazione DEM di una prova triassiale prevede tre fasi distinte:

- la schematizzazione della cella triassiale, simulata attraverso un elemento cilindrico, chiuso superiormente ed inferiormente da due pareti che riproducono le piastre di carico;
- la generazione delle particelle che compongono il provino;
- l'esecuzione della prova.

Tali fasi verranno accuratamente descritte ed analizzate nei paragrafi successivi.

### **6.3.2.1 La generazione dei walls**

La prima fase consiste nella creazione dei muri (*walls*) che costituiscono il dominio all'interno del quale vengono generate le sfere.

Il muro cilindrico, contrassegnato dall'ID 1, rappresenta la membrana in lattice della cella triassiale, mentre le piastre contrassegnate dagli ID 5 e 6 confinano il provino superiormente ed inferiormente e simulano la sollecitazione assiale (figura 6.15).

È importante ricordare che nel PFC i muri non interagiscono tra loro, ma interagiscono esclusivamente con le sfere.

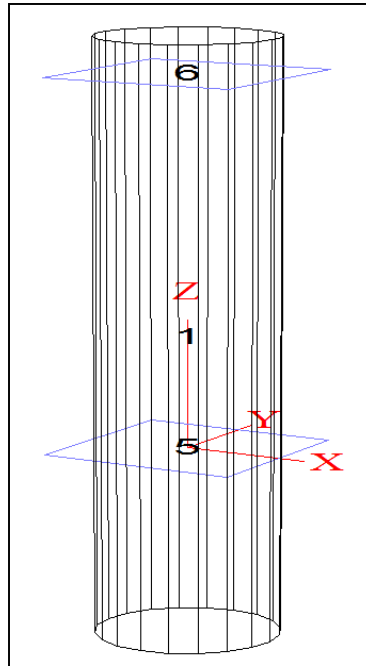


FIGURA 6.15: WALL CILINDRICO E PIASTRE DI CARICO CON RELATIVO SISTEMA CARTESIANO.

L'origine del sistema di coordinate cartesiane giace sul piano della piastra di carico inferiore in corrispondenza del centro del cilindro; gli assi x ed y appartengono al piano della piastra, mentre l'asse z è orientato secondo l'asse verticale del cilindro.

Com'è possibile osservare in figura 6.15, i muri sono creati tenendo conto di estensioni (*extend*) addizionali, allo scopo di evitare l'uscita delle sfere nella fase di compressione assiale.

---

```

def make_walls
w_stiff= 1e8
extend = 0.1
rad_cy = 0.5*width
_z0 = -extend
_z1 = height*(1.0 + extend)
command
wall type cylinder id=1 kn=w_stiff end1 0.0 0.0 _z0 end2 0.0 0.0 _z1 rad rad_cy rad_cy
end_command
_x0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z0 = 0.0
_x1 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y1 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z1 = 0.0
_x2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z2 = 0.0
    
```

```

_x3 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y3 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z3 = 0.0
command
wall id=5 kn=w_stiff face (_x0,_y0,_z0) (_x1,_y1,_z1) (_x2,_y2,_z2) (_x3,_y3,_z3)
end_command
_x0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y0 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z0 = height
_x1 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_y1 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z1 = height
_x2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y2 = rad_cy*(1.0 + extend)
_z2 = height
_x3 = rad_cy*(1.0 + extend)
_y3 = -rad_cy*(1.0 + extend)
_z3 = height
command
wall id=6 kn=w_stiff face (_x0,_y0,_z0) (_x1,_y1,_z1) (_x2,_y2,_z2) (_x3,_y3,_z3)
end_command
end
set height=0.2 width=0.1
make_walls

```

---

Attraverso il listato sopra riportato il software è in grado di generare il dominio del sistema; il passo successivo prevede l’inserimento delle particelle all’interno di tale dominio.

### **6.3.2.2 La generazione delle sfere**

Le sfere possono essere create mediante due differenti metodologie:

1. generazione di gruppi di particelle definendone le dimensioni, le proprietà fisiche e la posizione;
2. generazione di un insieme di particelle di piccolo raggio e successiva espansione al fine di occupare il volume definito dai *walls* e raggiungere una determinata densità, assegnando un intervallo di variazione per il raggio ( $r_{min}$ ,  $r_{max}$ ).

La seconda tecnica rappresenta il metodo più pratico poiché comporta tempi di calcolo abbastanza ridotti; inoltre, espandendo le particelle dello stesso fattore in tutte le direzioni, conferisce proprietà uniformi ed isotrope al provino.

La scelta tra le due modalità di generazione dipende fundamentalmente dai dati a disposizione.

Avendo fissato il raggio e il numero esatto delle particelle da generare, nella presente sperimentazione si è scelto di utilizzare la prima modalità.

Il listato genera 32886 sfere, di cui 32204 con diametro pari a 2,77 mm, 605 con diametro 11 mm e 77 con diametro 18 mm; ad ogni singola sfera viene associato un diverso ID.

Il listato viene creato cercando di riprodurre nel modo più fedele possibile la tecnica utilizzata in laboratorio, definendo per passi successivi il numero identificativo degli elementi, il loro raggio e le coordinate del volume all'interno del quale devono essere generati.

Grazie all'applicazione della forza di gravità, le balls generate scendono lungo il cilindro andando a depositarsi all'interno del volume in maniera casuale, senza sovrapposizione tra particelle o tra particelle ed elementi al contorno.

Per motivi computazionali non risulta possibile generare in un unico momento tutte le sfere costituenti la miscela, è necessario quindi suddividere il listato in 50 fasi successive.

All'interno di ogni step vengono generate 650 sfere da 2,77 mm, 12÷13 sfere da 11 mm e 1÷2 sfere da 18 mm; il numero quasi costante degli elementi creati fa sì che la granulometria del campione risulti ben distribuita.

---

```

gen id=1,650    rad 0.001385 0.001385 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2
gen id=32205,32217 rad 0.0055 0.0055 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2
gen id=32810,32811 rad 0.009 0.009 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.2

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 450000

save prov1.sav

restore prov1.sav

gen id=651,1300 rad 0.001385 0.001385 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.2
gen id=32218,32230 rad 0.0055 0.0055 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.2
gen id=32812,32812 rad 0.009 0.009 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.2

```

```

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 460000

save prov2.sav
.
....
restore prov49.sav

gen id=31851,32204 rad 0.001385 0.001385 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.35
gen id=32803,32809 rad 0.0055 0.0055 x=-0.035,0.035 y=-0.035,0.035 z=0,0.35
gen id=32886,32886 rad 0.009 0.009 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0,0.35

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.42
set grav 0 0 -9.81

cyc 800000

save prov50.sav

```

---

Nella fase di generazione delle sfere (vedi listato sopra riportato) deve essere specificata la densità del materiale e devono essere indicati i parametri che regolano il contatto tra gli elementi: rigidità di contatto normale e tangenziale e coefficiente d'attrito.

Il coefficiente d'attrito interparticellare ( $\mu=fric=0,42$ ) è valutato in funzione di quello macroscopico ( $\phi=23^\circ$ ) secondo la seguente espressione:

$$\mu = tg\phi \tag{6.1}$$

Poiché la miscela di inerti da modellare è incoerente, nella definizione delle caratteristiche dei contatti non sono introdotti modelli di legame.

Il comportamento del mezzo è quindi governato unicamente dalla rigidità normale ( $k_n$ ), dalla rigidità tangenziale ( $k_s$ ), secondo un modello di rigidità lineare, e dalle proprietà d'attrito ( $\mu$ ) (tabella 6.5).

TABELLA 6.5: CARATTERISTICHE DEL MODELLO DI CONTATTO.

Densità [kg/m <sup>3</sup> ]	7750
Rigidezza normale ( $k_n$ ) [N/m]	$10^8$
Rigidezza tangenziale ( $k_t$ ) [N/m]	$10^8$
Rigidezza degli elementi al contorno ( $k_w$ ) [N/m]	$10^8$
Coefficiente di attrito particella-particella ( $\mu$ )	0,42
Coefficiente di attrito particella-elemento al contorno ( $\mu_w$ )	0

L'accelerazione gravitazionale assegnata lungo l'asse z (*set grav*) comporta la decantazione al fondo del provino delle sfere generate (figura 6.16).

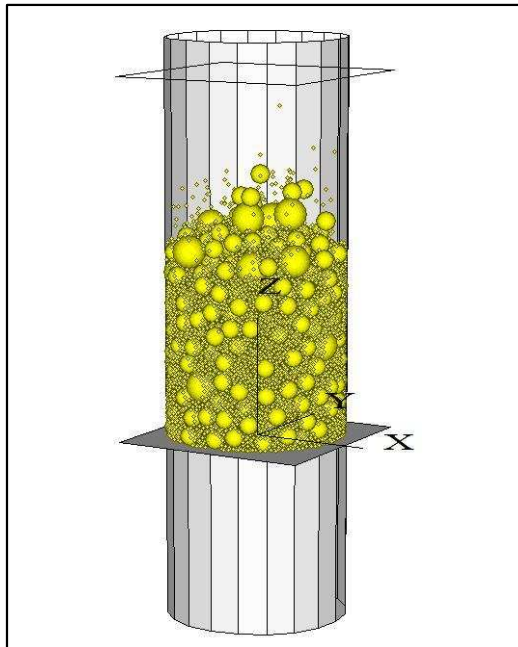


FIGURA 6.16: DECANTAZIONE DELLE SFERE ALL'INTERNO DEL PROVINO.

Il numero dei cicli (*cyc*) per ciascuna fase è regolato appunto in base al tempo di decantazione; l'obiettivo è quello di liberare il volume di generazione delle sfere per la fase successiva. A questo scopo un numero di cicli molto elevato è una garanzia, ma chiaramente i tempi di calcolo si allungano e gli oneri computazionali aumentano.

Se il volume libero non è sufficiente a contenere il numero delle sfere generate, il programma si blocca segnalando l'errore '*Fewer balls generated than specified*'.

Il software permette di monitorare l'andamento delle forze di contatto e delle velocità delle sfere (figure 6.17 e 6.18).



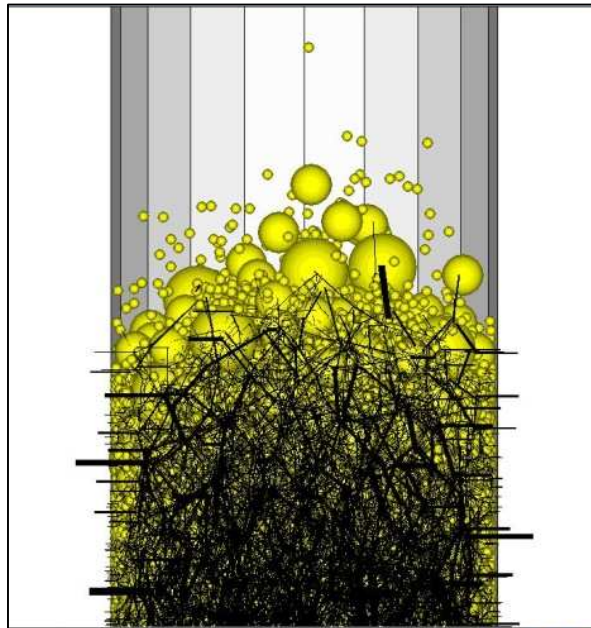


FIGURA 6.17: SFERE E FORZE DI CONTATTO.

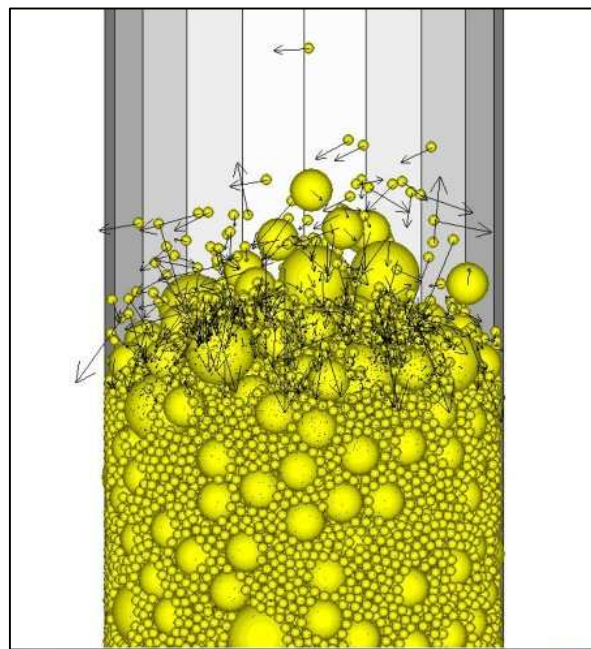


FIGURA 6.18: SFERE E VETTORI VELOCITÀ.

In figura 6.19 è riportata l'evoluzione della procedura di riempimento del campione.

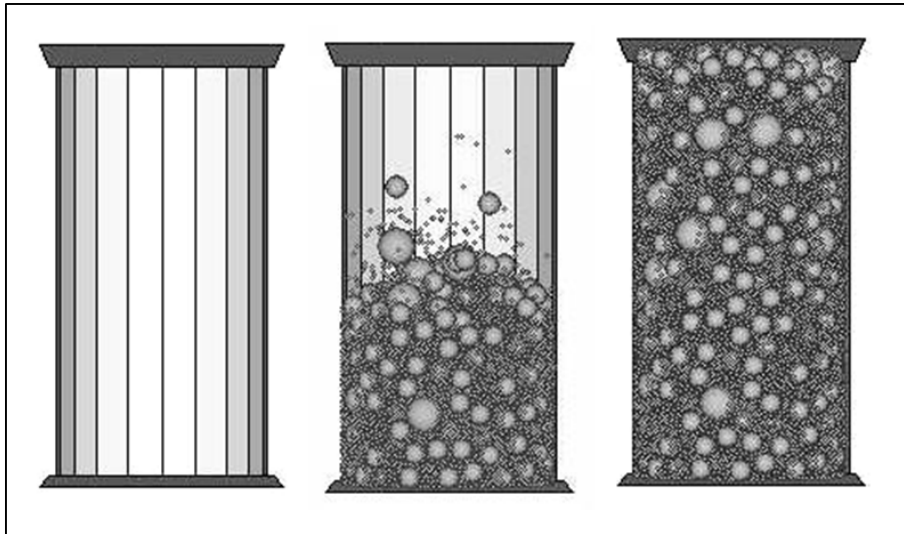


FIGURA 6.19: FASI DI CREAZIONE DEL PROVINO CON SFERE (INIZIO, METÀ, FINE TEST).

### **6.3.2.3 L'esecuzione della prova**

La prova triassiale, di tipo consolidato drenato, viene modellata in due fasi distinte (figura 6.20):

- quella iniziale di compressione isotropa, nella quale il campione viene lasciato consolidare sotto l'azione della pressione di cella;
- quella di rottura, nella quale il provino è sottoposto ad uno sforzo di compressione assiale.

La prova, come avviene in realtà, è svolta in controllo di deformazione, assegnando alle pareti superiore ed inferiore della cella una velocità di 1 mm/min.

Durante la prima fase del test la velocità delle piastre di carico e quella radiale del muro cilindrico viene controllata automaticamente utilizzando un servomeccanismo, che mantiene la tensione di confinamento costante all'interno del campione.

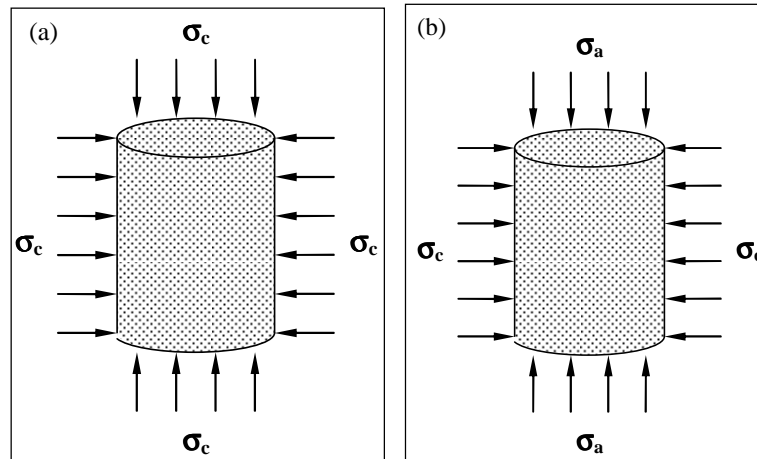


FIGURA 6.20: PROVA TRIASSIALE A) FASE DI COMPRESSIONE ISOTROPA, B) FASE DI ROTTURA.

Inizialmente, per simulare il confinamento “soft” della membrana di lattice, viene ridotta la rigidità del muro laterale, utilizzando la funzione *cws*, ad un valore pari ad 1/10 della rigidità delle sfere [90].

Viene inoltre inserita la funzione *macro zero* che annulla le eventuali velocità e rotazioni residue dalle fasi precedenti.

---

```

def cws ; change lateral wall stiffnesses
command
wall type cylinder id 1 kn=w_stiff
end_command
end
;
SET w_stiff= 1e7 ; make lateral wall stiffness=1/10 of ball stiffness
cws
cyc 5000

set log on

macro zero 'ini xvel 0 yvel 0 zvel 0 xspin 0 yspin 0 zspin 0'
zero
    
```

---

Per la realizzazione della prova triassiale si ricorre all'utilizzo di funzioni *fish*.

Il linguaggio *fish* è incorporato all'interno di PFC<sup>3D</sup> e permette all'utente di definire nuove variabili e funzioni complesse. Le funzioni *fish* sono integrate in un normale file di dati, iniziano con la parola chiave *define (def)* e terminano quando viene rilevata la parola chiave *end*.

Una funzione *fish* può richiamare altre funzioni, che a loro volta possono richiamarne altre; l'ordine in cui le funzioni sono richiamate non importa, purché siano tutte definite prima di essere utilizzate. Dato che il listato di una funzione *fish* è contenuto nella memoria del software, il comando *save* salva la funzione ed il valore corrente delle variabili associate. Durante tutto il processo di carico la tensione di confinamento viene mantenuta costante grazie alle *fish servo* e *get\_gain* che agiscono sulla velocità dei muri modificandola secondo necessità.

---

```
def servo
while_stepping
get_ss; compute stresses & strains
udr = gr * (wsrr - srrreq)
w_radvel(wadd1) = -udr
if z_servo = 1; switch stress servo on or off
udz = gz * (wszz - szzreq)
w_zvel(wadd5) = udz
w_zvel(wadd6) = -udz
end_if
end
```

---

```
def get_gain; determine servo gain parameters for axial and lateral motion
alpha = 0.5; relaxation factor
count = 0
avg_stiff = 0
cp = contact_head; find average number of contacts on lateral walls
loop while cp # null
if c_gobj2(cp) = wadd1
count = count + 1
avg_stiff = avg_stiff + c_kn(cp)
end_if
cp = c_next(cp)
end_loop
avg_stiff = avg_stiff / count
gr = alpha * height * pi * rad_cy * 2.0 / (avg_stiff * count * tdel)
count = 0
avg_stiff = 0
cp = contact_head; find average number of contacts on top/bottom walls
loop while cp # null
if c_gobj2(cp) = wadd5
count = count + 1
avg_stiff = avg_stiff + c_kn(cp)
end_if
if c_gobj2(cp) = wadd6
count = count + 1
avg_stiff = avg_stiff + c_kn(cp)
```

```

end_if
cp = c_next(cp)
end_loop
ncount = count / 2.0
avg_stiff = avg_stiff / count
gz = alpha * pi * rad_cy^2.0 / (avg_stiff * ncount * tdel)
end

```

---

La funzione *servo* viene attivata ad ogni ciclo e richiama la funzione *get\_ss*, che valuta le tensioni e le deformazioni agenti sul provino. Se le tensioni misurate differiscono da quelle richieste viene attivata la funzione *get\_gain* che, mediante un meccanismo di servo-controllo numerico, minimizza tale differenza.

---

```

def get_ss; determine average stress and strain at walls
new_rad = w_radend1(wadd1)
rdif = new_rad - rad_cy
zdif = w_z(wadd6) - w_z(wadd5)
new_height = height + zdif
wsrr = -w_radfob(wadd1) / (new_height * 2.0 * pi * new_rad)
wszz = 0.5*(w_zfob(wadd5) - w_zfob(wadd6)) / (pi * new_rad^2.0)
werr = 2.0 * rdif / (rad_cy + new_rad)
wezz = 2.0 * zdif / (height + new_height)
wevol = wezz + 2.0 * werr
end

```

---

La funzione *iterate* viene utilizzata per far proseguire il processo di calcolo, tramite *step* da 100 cicli. L'iterazione termina quando viene raggiunto lo stato tensionale richiesto, che deve ricadere all'interno del valore di tolleranza indicato.

---

```

def iterate
loop while 1 # 0
get_gain
if abs((wsrr - srrreq)/srrreq) < sig_tol then
if abs((wszz - szzreq)/szzreq) < sig_tol then
exit
end_if
end_if
command
cycle 100
end_command
end_loop
end

```

---

La variabile *z\_servo*, contenuta nella *fish servo*, agisce come un interruttore: se il suo valore è settato ad 1 il meccanismo di servo-controllo che mantiene costante la tensione di confinamento agisce sia sulle piastre, sia sul cilindro laterale; se invece è settato a 0 le piastre di carico vengono “svincolate” e risulta possibile assegnare loro una velocità diversa.

Durante la fase di compressione isotropa la variabile *z\_servo* viene settata su 1, mentre nella fase di rottura viene settata su 0 e la velocità delle piastre di carico superiore e inferiore viene regolata mediante la *fish accel\_platens*.

La velocità delle piastre viene incrementata fino a raggiungere quella finale (*\_vfinal*) in un numero predefinito di steps, indicato con *\_nstep*.

---

```

def accel_platens ; Accelerates the platens to achieve vel of _vfinal in _nsteps, using _nchunks
_niter = _nsteps/_nchunks
loop_chnk (1, _nchunks)
if_close = 1 then
_vel = _chnk*( _vfinal/_nchunks)
else
_vel = -_chnk*( _vfinal/_nchunks)
end if
_mvel = -_vel
command
wall id 5 zvel = _vel
wall id 6 zvel = _mvel
cycle _niter
end_command
end_loop
end
    
```

---

Infine, attraverso la funzione *conf* vengono definite le variabili registrate dalle history:

- *conf*: valore medio della tensione di confinamento;
- *devi*: tensione deviatorica;
- *deax*: deformazione assiale;
- *devol*: deformazione volumetrica.

---

```

def conf
devi = wszz - wsrr ; deviatoric stress
deax = wezz - wezz_0 ; axial strain
devol = wevol - wevol_0 ; volumetric strain
    
```

*conf = wsrr ; confining stress*  
*end*

---

Le tensioni assiali e quella di confinamento vengono valutate come il valor medio di quelle che agiscono rispettivamente sulle superfici di base e sulle due semicirconferenze laterali, dividendo la forza totale applicata per l'area relativa.

Le deformazioni assiali si determinano in funzione dell'altezza iniziale e finale del provino utilizzando la seguente relazione:

$$\varepsilon_a = \frac{L-L_0}{\frac{1}{2}(L_0+L)} \quad (6.2)$$

dove:

$\varepsilon_a$  = deformazione assiale;

$L_0$  = altezza iniziale del provino;

$L$  = altezza finale del provino.

Quelle volumetriche si valutano in funzione del raggio iniziale e finale del cilindro sfruttando la seguente equazione:

$$\varepsilon_v = \frac{R-R_0}{\frac{1}{2}(R_0+R)} \quad (6.3)$$

dove:

$\varepsilon_v$  = deformazione volumetrica;

$R_0$  = raggio iniziale del cilindro

$R$  = raggio finale del cilindro.

La pressione di confinamento è mantenuta costante mediante una funzione che adatta la velocità radiale della parete cilindrica in modo da conservare la tensione misurata entro uno scarto dell'1% da quella richiesta secondo la formula:

$$\dot{u}_w = G(\sigma^{misurato} - \sigma^{richiesto}) = G\Delta\sigma \quad (6.4)$$

dove:

$\sigma_c$  = tensione di confinamento;

$\dot{u}_w$  = velocità radiale della parete cilindrica;

$\sigma^{misurato}$  = tensione misurata;

$\sigma^{richiesto}$  = tensione richiesta;

G = parametro obiettivo (*gain parameter*).

Il parametro G viene determinato attraverso la fish *get\_gain*, valutando l'incremento della tensione applicata alla parete cilindrica che si genera in un singolo *timestep* secondo la formula [90]:

$$\Delta\sigma_w = \frac{k_{n_w} N_c \dot{u}_w \Delta t}{A} \quad (6.5)$$

dove:

$\Delta\sigma_w$  = incremento della tensione applicata al wall;

$k_{n_w}$  = rigidità normale dei contatti particella – muro;

$N_c$  = numero dei contatti particella – muro;

$\dot{u}_w$  = velocità radiale della parete cilindrica;

$\Delta t$  = incremento temporale;

A = area della parete.

Per la significatività del test è necessario che si verifichi la condizione:

$$|\Delta\sigma_w| < \alpha |\Delta\sigma| \quad (6.6)$$

dove:

$\alpha$  = fattore di rilassamento.

Sostituendo la 6.4 e la 6.5 nella 6.6 si ottiene:



$$\frac{k_{nw} N_c G |\Delta\sigma| \Delta t}{A} < \alpha |\Delta\sigma| \quad (6.7)$$

da cui è possibile determinare G:

$$G = \frac{A}{k_{nw} N_c \Delta t} \quad (6.8)$$

Per ogni ciclo di calcolo vengono monitorati:

- le forze di contatto interne al provino, che aumentano all'avanzare del test;
- la tensione di confinamento ( $\sigma_c$ );
- la tensione assiale ( $\sigma_a$ );
- la tensione deviatorica ( $\sigma_d = \sigma_a - \sigma_c$ );
- la deformazione assiale ( $\epsilon_a$ );
- la deformazione volumetrica ( $\epsilon_v$ );
- l'andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale;
- l'andamento della variazione volumetrica del campione in funzione della deformazione assiale.

#### **6.4 ANALISI DEI RISULTATI OTTENUTI**

##### **6.4.1 Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale**

In questo paragrafo vengono analizzate le curve tensione – deformazione relative ai campioni riportati in tabella 6.5.

In ascissa è riportata la deformazione assiale  $\epsilon_a$ , espressa come variazione percentuale dell'altezza del provino rispetto al valore iniziale, mentre in ordinata è riportata la tensione deviatorica  $\sigma_d$  espressa in kPa.

Com'è possibile osservare in figura 6.21 il comportamento dei campioni può essere suddiviso in tre fasi:

- fase iniziale nella quale le deformazioni sono molto piccole e la tensione deviatorica cresce velocemente in modo monotono;

- fase intermedia, che si presenta quando il campione incomincia a rompersi. Tale fase comprende il raggiungimento del valore di picco ovvero il valore massimo raggiunto dalla tensione deviatorica;
- fase finale nella quale la resistenza si mantiene costante.

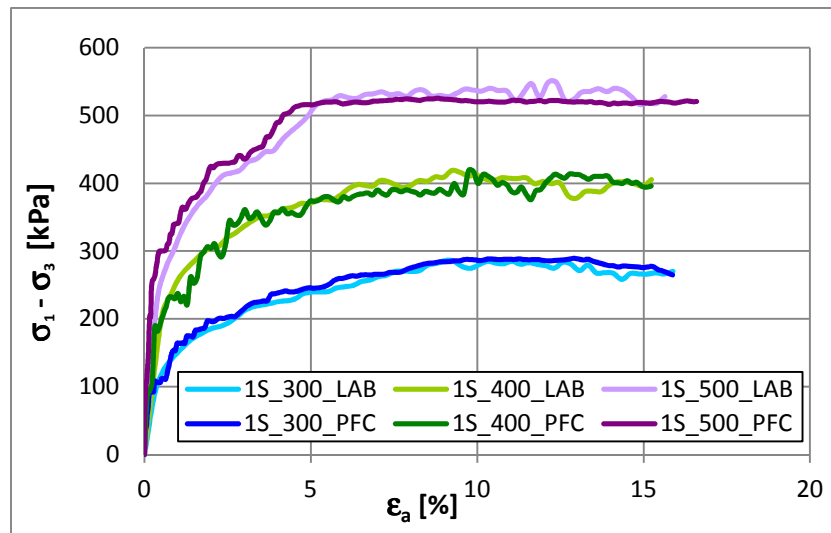


FIGURA 6.21: SFERE – DIAGRAMMA  $\sigma_D - \epsilon_A$ , CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

Si può notare come, all'aumentare della tensione di confinamento, crescano sia la resistenza ultima che quella residua; questo andamento vale sia per i provini testati in laboratorio, sia per quelli modellati numericamente.

Confrontando risultati sperimentali e numerici si osserva un'ottima corrispondenza dal punto di vista sia qualitativo che quantitativo e l'errore percentuale relativo alla massima tensione deviatorica risulta sensibilmente contenuto (figura 6.22).

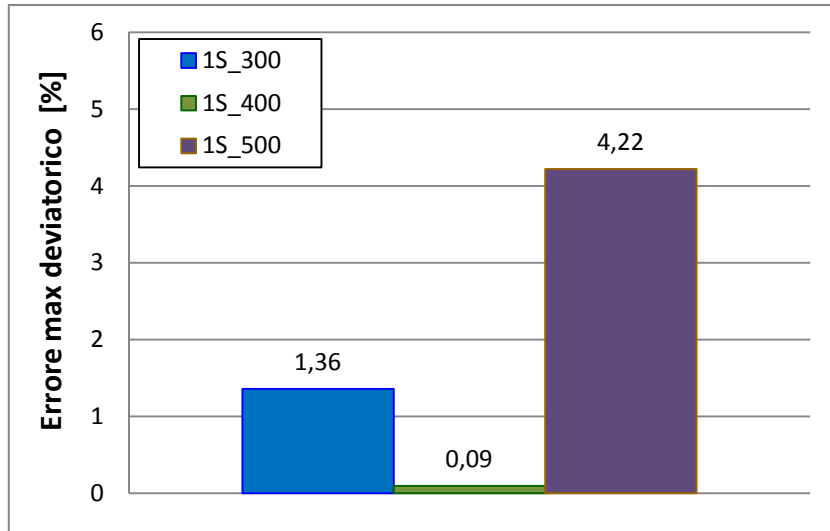


FIGURA 6.22: VALORE MASSIMO DELL'ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA, CONFRONTO TRA I RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

#### 6.4.2 Andamento della deformazione volumetrica in funzione della deformazione assiale

Oltre all'analisi del comportamento della tensione deviatorica, risulta interessante analizzare anche la variazione di volume  $\Delta V/V$  rispetto alla deformazione assiale  $\epsilon_a$ . Per quanto riguarda la variazione volumetrica in funzione della deformazione assiale si assiste inizialmente ad una diminuzione di volume del provino poi, superato un certo livello di deformazione assiale, ad un'inversione di tendenza caratterizzata da un aumento del volume (figura 6.23).

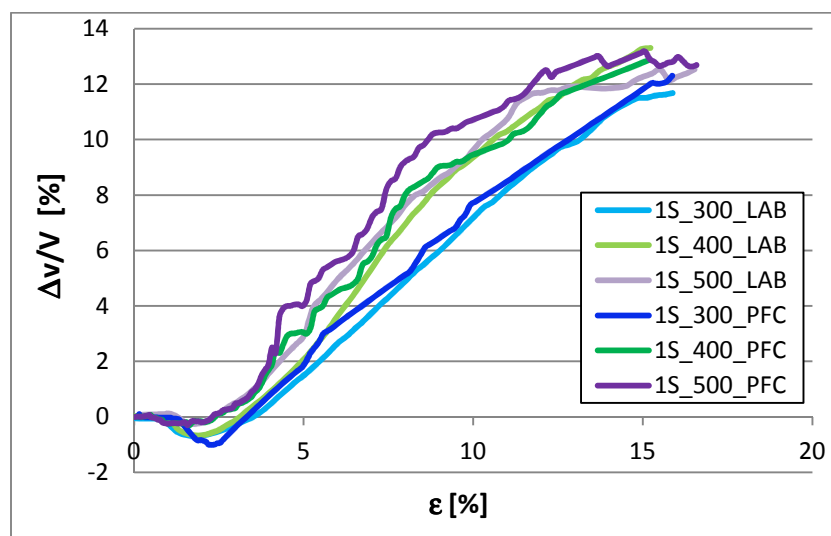


FIGURA 6.23: SFERE - DIAGRAMMA  $\Delta V/V - \epsilon_a$ , CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

Il materiale, quindi, sotto l'azione dello sforzo deviatorico subisce inizialmente una contrazione di volume dovuta al fatto che le particelle sono spinte ad assumere un arrangiamento più stretto, poi, dopo la rottura del provino, le particelle non possono più serrarsi ulteriormente e si assiste ad una dilatazione.

Il materiale esplica un comportamento dilatante, tipico dei materiali addensati, che aumenta al crescere della tensione di confinamento.

In termini quantitativi, inoltre, si nota una quasi perfetta coincidenza tra i risultati numerici e quelli di laboratorio (figura 6.24).

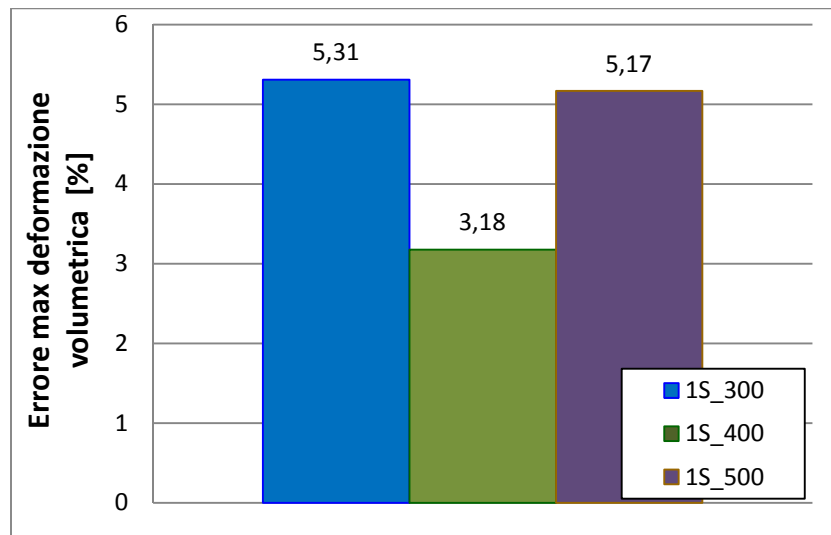


FIGURA 6.24: VALORE MASSIMO DELL'ERRORE DELLA DEFORMAZIONE VOLUMETRICA, CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

Indipendentemente dal valore della tensione di confinamento il provino a fine test mostra una configurazione a botte dovuta ad un abbassamento di altezza con conseguente deformazione centrale radiale.

### **6.4.3 Distribuzione delle forze di contatto**

Il software di calcolo PFC<sup>3D</sup> consente di effettuare un'analisi dei risultati a livello microscopico valutando, in particolare, i punti di contatto tra gli elementi e l'entità delle forze normali e tangenziali che si instaurano in tali punti.

La rappresentazione delle forze di contatto avviene mediante segmenti che hanno origine nei centroidi delle sfere e passano per il punto di contatto; lo spessore della linea è proporzionale all'intensità della forza. Dal momento che i segmenti relativi

a contatti tra particelle adiacenti sono collegati tra loro, nel provino viene a crearsi una maglia di connessioni continua.

Si è analizzata la distribuzione delle forze di contatto normali e tangenziali all'interno del provino sottoposto a test triassiale in due istanti di tempo significativi:

- al termine della fase di compressione isotropa,
- al termine della prova.

Ciò è stato fatto per due delle tre tensioni di confinamento impiegate: 400 e 500 kPa. In figura 6.26 si può osservare come la distribuzione delle forze di contatto tra le sfere alla fine della consolidazione isotropa sia rappresentata da una rete piuttosto regolare, dove le forze orizzontali e verticali sono di entità paragonabile e tendono a disporsi in maniera uniforme. Durante la fase di compressione le sollecitazioni aumentano e le catene di forze tendono ad intensificarsi lungo la direzione verticale; questo fenomeno si registra in particolar modo in prossimità delle piastre di carico.

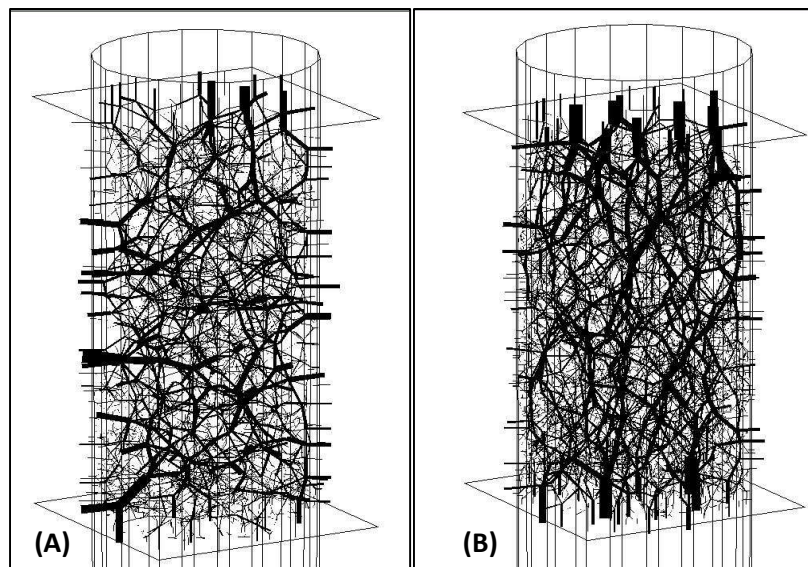


FIGURA 6.25: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO NORMALI AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ISOTROPA (A) E AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ASSIALE (B), TENSIONE DI CONFINAMENTO: 400 kPa.

Analogamente, anche per la tensione di confinamento pari a 500 kPa, le forze di contatto tendono ad intensificarsi in direzione verticale ed il valore di picco risulta più alto al termine della prova (figura 6.26).

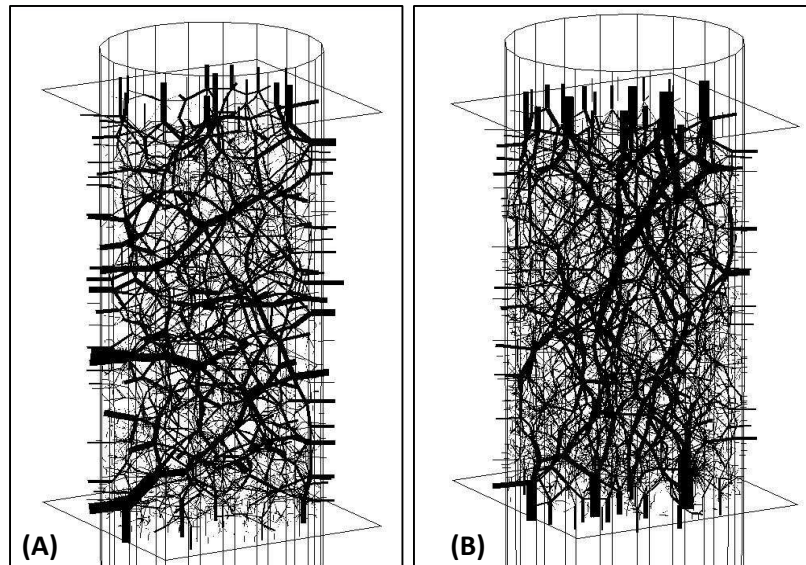


FIGURA 6.26: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO NORMALI AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ISOTROPA (A) E AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ASSIALE (B), TENSIONE DI CONFINAMENTO: 500 kPa.

Le forze di contatto tangenziali hanno valori notevolmente inferiori rispetto a quelle normali, ma manifestano lo stesso andamento crescente durante lo svolgimento della prova. Per quanto riguarda la loro distribuzione, osservando figura 6.27 è possibile notare come le forze di contatto tangenziali siano inizialmente concentrate nella zona centrale del provino poi, al termine della fase di compressione assiale, manifestino una distribuzione più omogenea in tutto il dominio.

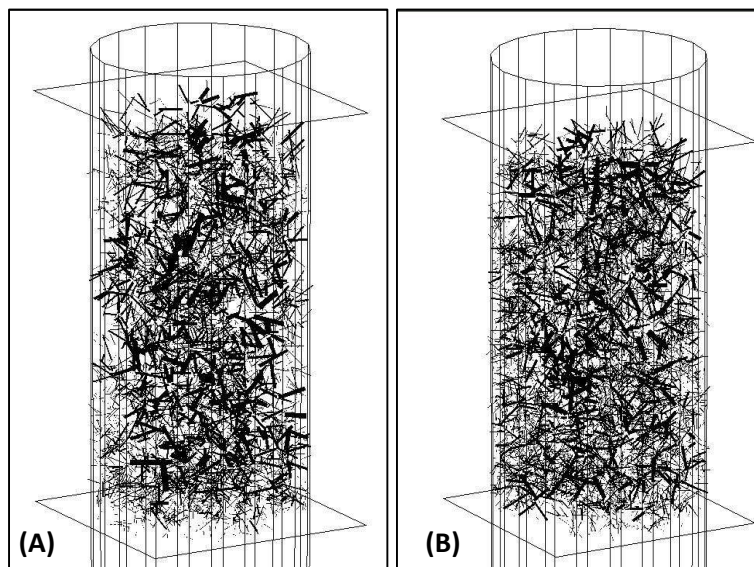


FIGURA 6.27: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ISOTROPA (A) E AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ASSIALE (B), TENSIONE DI CONFINAMENTO: 400 kPa.

Le stesse considerazioni possono esser fatte relativamente al provino sottoposto a test triassiale con una tensione di confinamento pari a 500 kPa (figura 6.28).

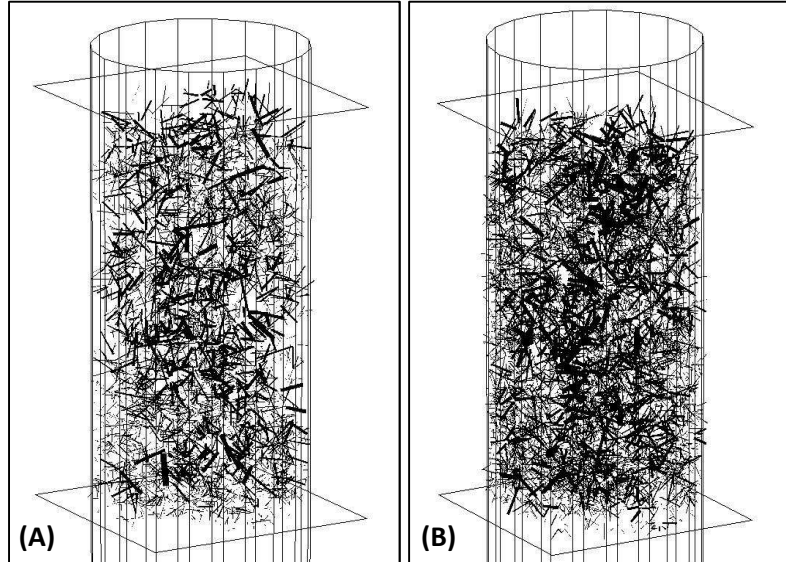


FIGURA 6.28: DISTRIBUZIONE DELLE FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ISOTROPA (A) E AL TERMINE DELLA FASE DI COMPRESSIONE ASSIALE (B), TENSIONE DI CONFINAMENTO: 500 kPa.

Infine si confrontano i valori di picco delle forze di contatto al termine della prova per le tre tensioni di confinamento considerate. Le forze di contatto sia normali (figura 6.29) che tangenziali (figura 6.30) aumentano all'aumentare della tensione di confinamento. Inoltre, a parità di tensione di confinamento, i valori di picco delle forze di contatto normali sono sempre maggiori di quelle tangenziali.

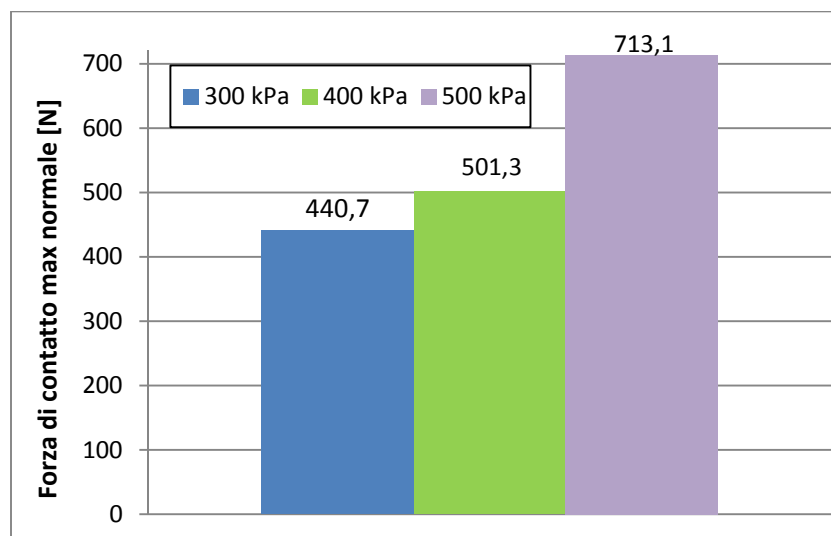


FIGURA 6.29: FORZE DI CONTATTO NORMALI DI PICCO PER LE TRE TENSIONI DI CONFINAMENTO CONSIDERATE.

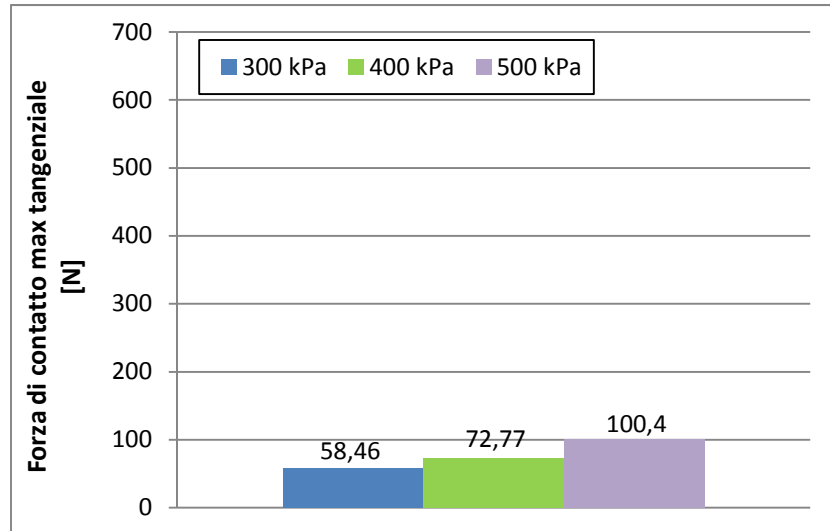


FIGURA 6.30: FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI DI PICCO PER LE TRE TENSIONI DI CONFINAMENTO CONSIDERATE.



## **LA SPERIMENTAZIONE EFFETTUATA: STUDIO DELL'INFLUENZA DELLA FORMA DELL'AGGREGATO**

---

### **7.1 INTRODUZIONE**

Nel capitolo precedente sono stati confrontati risultati numerici e sperimentali relativi a provini costituiti esclusivamente da sfere, al fine di confermare l'idoneità dei parametri microscopici inizialmente ipotizzati.

L'ottima corrispondenza tra i dati acquisiti in laboratorio e quelli ottenuti dalla modellazione numerica ha dimostrato che i valori delle rigidezze di contatto normale e tangenziale ( $k_n$  e  $k_s$ ), della densità delle sfere e del coefficiente di attrito assunti inizialmente riproducono fedelmente sia le modalità di prova, sia l'effettivo comportamento del materiale reale.

A partire da questo risultato si procede con la seconda parte della sperimentazione che si propone l'ambizioso obiettivo di studiare l'influenza della forma e delle dimensioni dell'aggregato sul comportamento complessivo della miscela di inerti.

### **7.2 TEST SVOLTI PER LO STUDIO DELL'INFLUENZA DELLA FORMA DELL'AGGREGATO**

Come nella fase della calibrazione, anche in questa parte della sperimentazione lo studio viene condotto mediante il confronto tra risultati numerici e sperimentali di test triassiali.

Ciò che cambia rispetto a quanto descritto nel capitolo precedente riguarda esclusivamente la composizione dei provini.

I campioni utilizzati per indagare l'influenza della forma e delle dimensioni dell'aggregato sulla miscela di inerti, infatti, sono formati da sfere di diametro pari a 2,77 mm e da particelle di forma generica ottenute assemblando due, tre o quattro sfere (tabella 7.1).

TABELLA 7.1: COMPOSIZIONE PROVINI.

Nome provino	Elementi costituenti il provino			
	Sfere	Elementi costituiti da 2 sfere	Elementi costituiti da 3 sfere	Elementi costituiti da 4 sfere
2_C	X	X		
3_C	X		X	
4_C	X			X

Le particelle di forma generica hanno un diametro totale pari a quello delle sfere singole utilizzate nella fase di calibrazione dei parametri microscopici (tabella 7.2), al fine di ottenere un confronto significativo tra i due modelli (figura 7.1).

L’elemento di forma generica costituito da sfere da 5,5 mm di diametro ha la dimensione massima pari al diametro della sfera da 11 mm; analogamente quello costituito da sfere di 9 mm di diametro ha la dimensione massima pari al diametro della sfera da 18 mm.

L’obiettivo è quello di studiare l’influenza della forma dell’aggregato, mantenendo invariata la granulometria e costante, in ogni provino, il volume totale dei pieni.

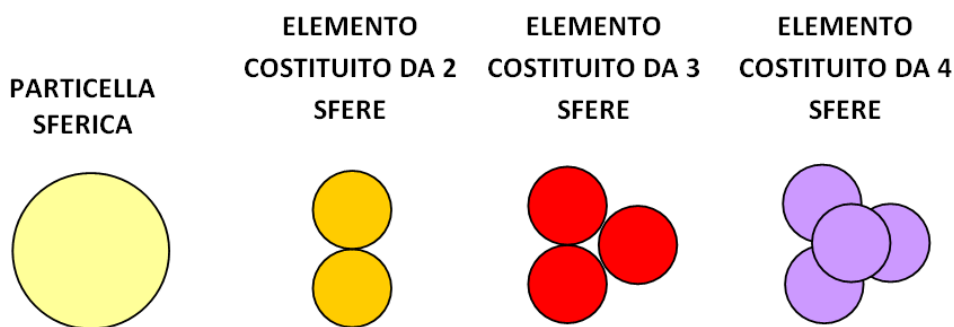


FIGURA 7.1: ELEMENTI UTILIZZATI NELLO STUDIO SVOLTO.



FIGURA 7.2: SFERE DI DIAMETRO PARI A 2.77MM, ELEMENTI NON SFERICI DI DIAMETRO PARI A 11 E 18 MM.

Ogni tipologia di provino viene sottoposto a due test triassiali caratterizzati da diverse tensioni di confinamento (tabella 7.2). La velocità di carico assiale, invece, rimane costante in tutti i test e pari a 1 mm/min.

TABELLA 7.2: TEST EFFETTUATI.

Nome provino	Tensione di confinamento [kPa]	Elementi costituenti il provino			Numero totale di elementi
		Sfere $\Phi$ 2.77 mm	Elementi non sferici $\Phi$ tot. 11 mm	Elementi non sferici $\Phi$ tot. 18 mm	
2_C	400	31400	2400	300	34100
	500	31400	2400	300	34100
3_C	400	32'204	1589	195	33997
	500	32'204	1589	195	33997
4_C	400	32'204	1'200	150	33554
	500	32'204	1'200	150	33554

### **7.2.1 Fase di laboratorio**

Per quanto riguarda la fase di laboratorio il primo aspetto da affrontare è quello relativo alla definizione delle modalità più opportune al fine di creare particelle di acciaio di forma non sferica. In particolare, è necessario capire in che modo e mediante quale materiale le singole sfere possano essere assemblate a formare un unico elemento dotato di comportamento rigido. Sono state svolte diverse prove per determinare quale tipologia di collante fosse più idonea allo scopo, valutando accuratamente pregi e difetti di ogni materiale (tabella 7.3).

TABELLA 7.3: SCELTA DEL TIPO DI COLLANTE PER REALIZZARE I CLUMP D’ACCIAIO.

Tipo di processo	Pregi	Difetti
Saldatura a filo		Il diametro delle sfere della frazione fine della miscela è troppo piccolo per consentire la saldatura
Colla	Facilità di utilizzo	Scarsa resistenza
Silicone	Facilità di utilizzo	Scarsa resistenza
Resina ipossidica	Facilità di utilizzo	Tossicità
Acciaio liquido	Facilità di utilizzo, buona resistenza, scarsa tossicità	

Tenendo in considerazione aspetti quali:

- il vincolo dettato dalla dimensione delle sfere che schematizzano l’aggregato fine della miscela;
- la richiesta di elevata resistenza affinché i clump non si disgreghino durante il test triassiale;
- la facilità di utilizzo del collante;
- l’assenza di residui tossici del collante;

e, in virtù dei numerosi pregi riportati in tabella 7.3, si è scelto di utilizzare l’acciaio liquido.

Il principale vantaggio di tale composto adesivo è rappresentato dalla buona lavorabilità dovuta ad un tempo d’essiccazione non immediato. Inoltre, in virtù della sua consistenza, l’acciaio liquido rende possibile l’otturazione del foro che fisicamente si crea accostando tre o quattro sfere, dando vita ad un corpo unico ed estendendo la resistenza dell’assemblaggio oltre i contatti puntuali tra le sfere.

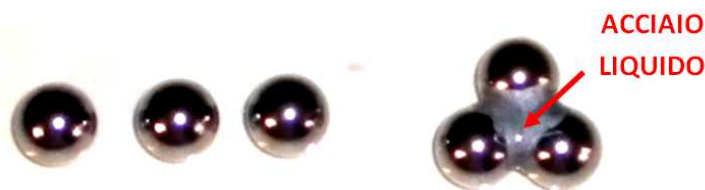


FIGURA 7.3: CREAZIONE DI UN CLUMP A TRE SFERE.

L’acciaio liquido utilizzato è commercialmente noto col nome Pattex, viene prodotto dalla Henkel Loctite Adesivi s.r.l. e si presenta sotto forma di pasta adesiva epossidico/metallica a due componenti di colore acciaio naturale.

Il collante è contenuto all’interno dell’apposita siringa “spingi-prodotto”, con la quale è possibile estrarre i due componenti, parte A e parte B, che vengono miscelati in uguali quantità (rapporto di miscelazione 1:1). Il componente A è costituito da resina epossidica, cariche e pigmenti, il componente B da polimercaptano e cariche.

La presa si realizza in circa 4-6 minuti, mentre la fase di indurimento avviene nelle successive 24 ore; tali valori sono riferiti a condizioni termiche stabili attorno ai 20 °C. Una volta indurito il prodotto presenta un’alta resistenza meccanica e chimica fino alla temperatura di 100 °C (fonte Henkel).

#### **7.2.1.1 Assemblaggio delle sfere**

La procedura di creazione degli elementi di forma non sferica deve garantire la realizzazione di elementi resistenti, uniformi e lisci, senza bordi esterni o filamenti di collante che possano portare alla rottura della membrana in lattice durante l’esecuzione dei test triassiali.

Tale procedura si basa sull’utilizzo di lamiera, al di sotto delle quali sono poste calamite che creano zone di attrazione in cui poter vincolare le sfere di acciaio (figura 7.4).



FIGURA 7.4: PROCEDURA DI ASSEMBLAGGIO DELLE SFERE.

Una volta rimossi dalla lamiera gli elementi vengono disposti su un pannello in attesa del completo indurimento (figura 7.5).



FIGURA 7.5: ELEMENTI ASSEMBLATI E DISPOSTI SU UN PANNELLO IN ATTESA DEL COMPLETO INDURIMENTO.

Ad indurimento avvenuto vengono capovolti e rinforzati tramite l’aggiunta di un ulteriore strato di collante sul lato opposto (figura 7.6).

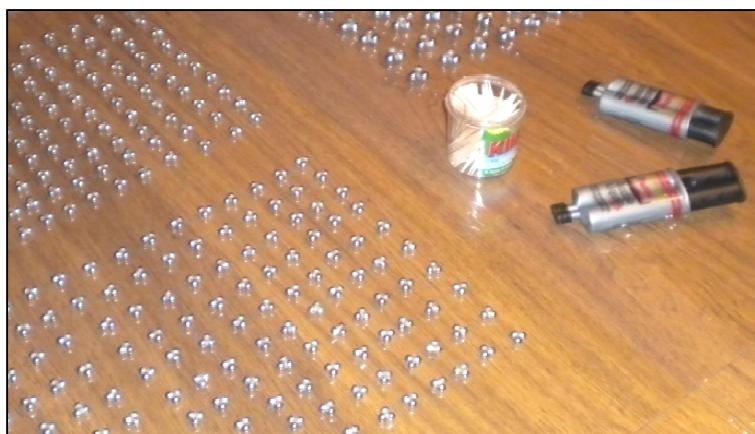


FIGURA 7.6: CLUMP RINFORZATI.

A causa dell’elevato numero di elementi necessari, il tempo di confezionamento di un provino risulta molto elevato. In media, calcolando il tempo utilizzato per disporre le sfere sulle lamiere e per preparare la miscela bicomponente, il tasso di produzione si attesta a circa un elemento al minuto, incollato su un solo lato. Per la creazione di un provino completo sono necessarie, quindi, dalle 40 alle 50 ore di lavoro.

### ***7.2.1.2 Esecuzione dei test triassiali***

Le dimensioni dei campioni e le modalità di prova dei test triassiali condotti in laboratorio sono gli stessi utilizzati nella fase di calibrazione dei parametri microscopici e descritti nel paragrafo 6.3.1 (figura 7.7).



FIGURA 7.7: PREPARAZIONE DEL PROVINO E TEST TRIASSIALE IN LABORATORIO.

### ***7.2.2 Fase di modellazione***

La fase di modellazione ha previsto dapprima la definizione delle modalità più opportune al fine di simulare particelle di acciaio di forma non sferica, poi la creazione del provino triassiale ed infine la simulazione dei test.

La scelta della metodologia di modellazione più opportuna per la creazione di elementi di forma generica è subordinata ad un’ampia ricerca bibliografica; si riportano in seguito cenni delle principali memorie pubblicate in merito.

Jensen et al. [93] passano in rassegna gli studi reperibili allora in letteratura riguardo le tecniche di modellazione di aggregati non sferici nel DEM particellare, concentrandosi in particolar modo sulle esperienze di Walton [157], Issa et al. [89] e Ting et al. [151].

Walton ed Issa et al. ricorrono ad elementi poligonali che simulano in modo molto accurato l’aggregato reale, comportando però oneri computazionali elevati. In particolare, Ting et al. dimostrano che il tempo di calcolo per provini costituiti da particelle poligonali è superiore di almeno un ordine di grandezza rispetto a quello

relativo a provini costituiti da dischi (DEM 2D) o sfere (DEM 3D) e ricorrono quindi all’utilizzo di particelle ellissoidiche, che riducono parzialmente i tempi computazionali.

Anche questa tipologia di elementi però comporta oneri superiori rispetto a quelli delle semplici ball a causa di problematiche legate all’algoritmo di identificazione dei contatti.

Una volta esaminate le possibili alternative, Jensen et al. decidono di utilizzare una metodologia diversa per la creazione di elementi non sferici assemblando particelle di forma sferica a formare un corpo unico caratterizzato da un comportamento rigido.

In figura 7.8 è riportato il processo che porta dalla particella reale (a) alla particella composta da elementi circolari aggregati ipotizzata da Jensen et al. (c), passando per quella, eccessivamente approssimata, schematizzata mediante un’unica ball (b).

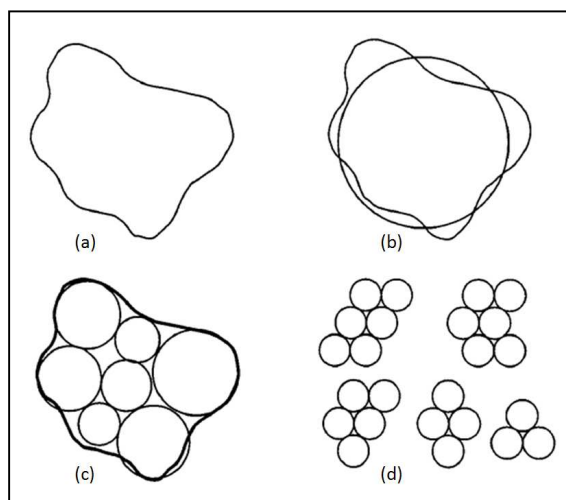


FIGURA 7.8: SIMULAZIONE DI UNA PARTICELLA DI AGGREGATO DI FORMA NON SFERICA SECONDO.

L’efficacia di questa tecnologia è stata provata dagli autori attraverso il confronto tra dati sperimentali e numerici di Ring Shear Test effettuati rispettivamente su provini reali e simulati, utilizzando singole balls e balls assemblate a formare un unico elemento. I risultati numerici che hanno mostrato maggior corrispondenza rispetto ai valori misurati in laboratorio sono quelli relativi ai provini costituiti da aggregati di particelle. In una memoria successiva Jensen et al. ripropongono la metodologia di



modellazione di particelle non sferiche utilizzata nello studio precedente introducendo diverse tipologie di elementi assemblati (figura 7.9) [94].

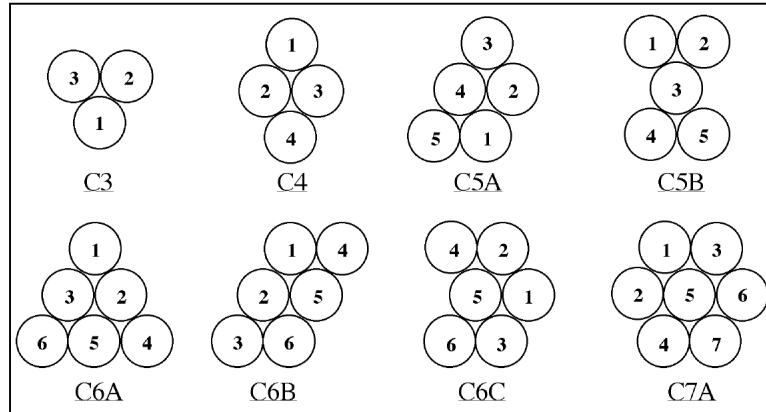


FIGURA 7.9: CONFIGURAZIONI UTILIZZATE DA JENSEN ET AL.

Utilizzando questi elementi gli autori studiano, mediante simulazioni DEM bidimensionali, l'influenza dell'angolarità delle particelle sul comportamento a taglio di una miscela di inerti.

Wang et al. nello studio del 2007 elaborano due differenti metodologie per la rappresentazione di particelle di forma generica nel DEM tridimensionale [160].

Partendo da analisi di tipo tomografico ricostruiscono il provino 3D a partire da sezioni bidimensionali orizzontali (figura 7.10).

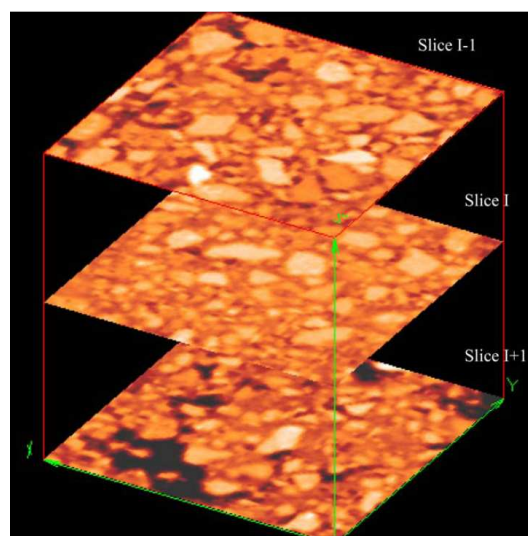


FIGURA 7.10: RICOSTRUZIONE DEL PROVINO 3D A PARTIRE DA SEZIONI BIDIMENSIONALI.

La prima metodologia proposta dagli autori prevede che in ogni sezione 2D gli aggregati di forma complessa vengano schematizzati come insiemi di particelle circolari dotati di comportamento rigido (figura 7.11).

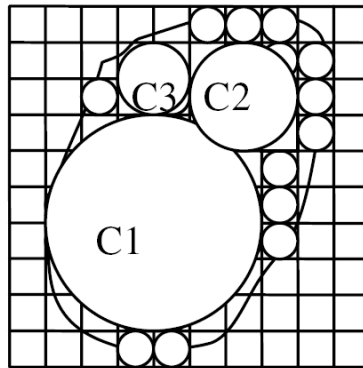


FIGURA 7.11: SCHEMATIZZAZIONE BIDIMENSIONALE DI UNA PARTICELLA DI FORMA GENERICA ATTRAVERSO L'ASSEMBLAGGIO DI PARTICELLE CIRCOLARI.

A partire dalle particelle assemblate, sezione per sezione, viene poi ricostruito il modello tridimensionale (figura 7.12).

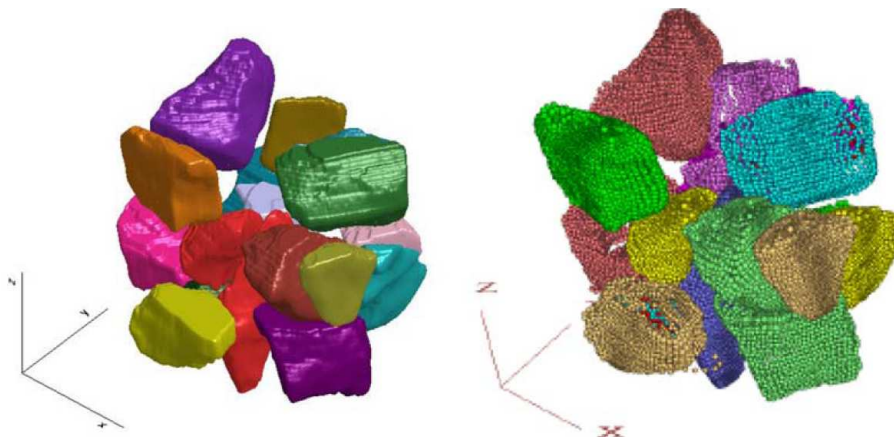


FIGURA 7.12: SIMULAZIONE DI PARTICELLE DI FORMA GENERICA MEDIANTE LA TECNICA *CLUMP* DI PFC<sup>3D</sup>.

Questo approccio rappresenta in maniera molto accurata la geometria degli inerti ma richiede elevati tempi di calcolo a causa dell'ingente numero di sfere necessarie per costituire un elemento.

La seconda metodologia prevede l'utilizzo di particelle ellissoidiche con caratteristiche inerziali analoghe agli aggregati reali (figura 7.13).

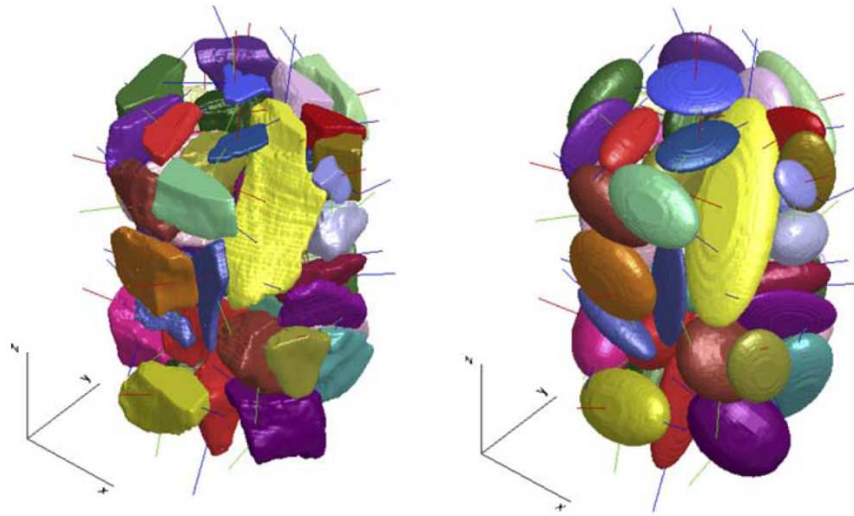


FIGURA 7.13: SIMULAZIONE DI PARTICELLE DI FORMA GENERICA MEDIANTE IL METODO DEGLI ELLISSOIDI- EQUIVALENTI.

Il metodo degli ellissoidi-equivalenti comporta maggiori approssimazioni rispetto al primo approccio descritto, ma riduce i tempi di calcolo.

Nello stesso anno Cho et al. studiano il comportamento a rottura di una roccia attraverso modelli discreti particellari in cui i grani di forma irregolare vengono schematizzati assemblando particelle di forma circolare [40]. Nel software di calcolo PFC sono disponibili due tipologie di elementi costituiti da aggregati di singole sfere: *clump* ed *cluster* (figura 7.14); ciò che li differenzia è che mentre nei primi i legami tra le particelle non sono soggetti a rottura (indipendentemente dalle forze in gioco), nei secondi tali legami sono disgregabili.

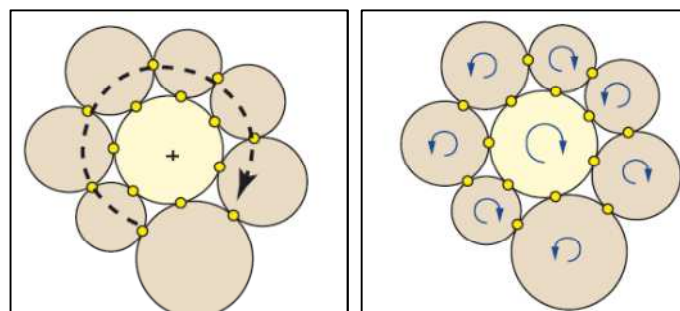


FIGURA 7.14: CLUMP E CLUSTER.

Oltre a Cho et al. numerosi autori utilizzano la logica clump per rappresentare elementi di forma irregolare nei software di calcolo agli elementi discreti (PFC, SDEC, ecc).

Lu et al. [116], Chen et al. [32] e Abedi ed al. [6], ad esempio, utilizzano clump formati da sfere sovrapposte (figura 7.15).

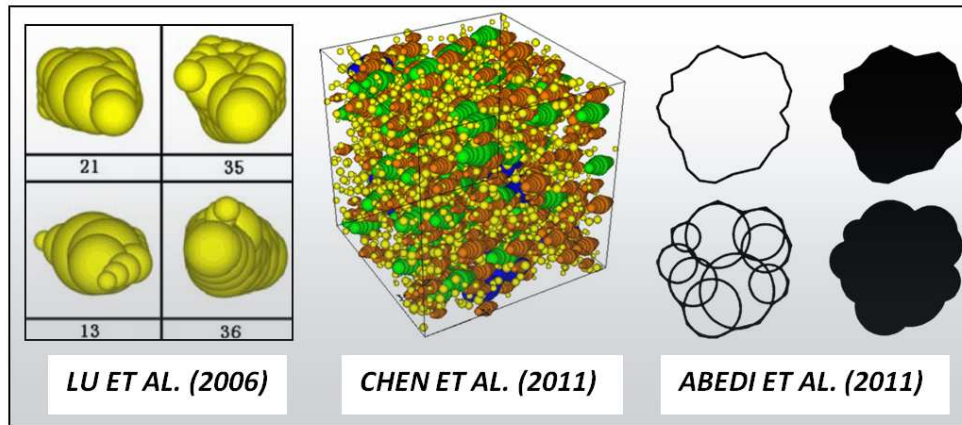


FIGURA 7.15: CLUMP FORMATI DA SFERE E DISCHI SOVRAPPOSTI.

In particolare Lu et al. applicano la metodologia clump allo studio di una miscela di inerti per ballast ferroviario, mentre Chen et al. studiano l’influenza dell’orientamento degli aggregati sulla rigidità dinamica di una miscela di inerti per conglomerato bituminoso.

La logica clump può essere utilizzata anche per creare elementi di forma generica mediante l’assemblaggio di particelle non sovrapposte bensì tangenti; ne sono un esempio gli studi effettuati da Thomas et al. [149] e Salot et al. [144] (figura 7.16).

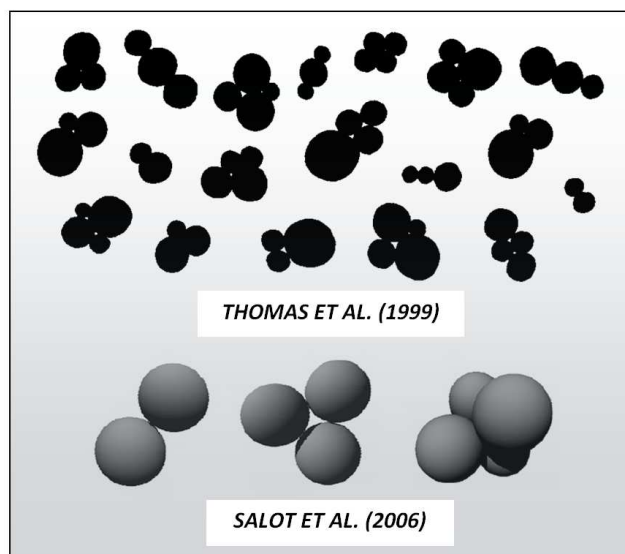


FIGURA 7.16: CLUMP FORMATI DA SFERE E DISCHI TANGENTI.

Thomas et al. confrontano risultati numerici e sperimentali di test di compressione biassiali per sancire l’efficacia della modellazione di particelle irregolari mediante aggregati di elementi circolari dotati di comportamento rigido.

Salot et al. si avvalgono, invece, della metodologia clump per studiare il comportamento di un terreno sottoposto a compressione triassiale.

L’analisi bibliografica effettuata ha portato alla redazione della tabella 7.4, in cui viene riportato un confronto, in termini di vantaggi e svantaggi, tra le modalità di modellazione di particelle non sferiche riportate in letteratura.

TABELLA 7.4: CONFRONTO TRA LE MODALITÀ DI MODELLAZIONE DI PARTICELLE NON SFERICHE RIPORTATE IN LETTERATURA.

Tipologia di modellazione dell’aggregato	Vantaggi	Svantaggi
<b>Particelle poligonali</b>	Rappresentazione fedele dell’aggregato reale	Lunghi tempi computazionali provocati dall’algoritmo di identificazione dei contatti a causa dell’elevato numero di contatti del sistema e della presenza di diversi tipi di contatto (vertice-vertice, vertice-lato, lato-lato)
<b>Particelle ellissoidiche</b>	Rappresentazione fedele dell’aggregato reale	Lunghi tempi computazionali provocati dall’algoritmo di identificazione dei contatti. Quest’ultimo, comunque, è più veloce di quello per particelle poligonali
<b>Cluster</b>	Rappresentazione fedele dell’aggregato reale; l’algoritmo di identificazione dei contatti è più veloce di quello per particelle poligonali ed ellissoidiche	La rotazione reciproca delle particelle che compongono il cluster aumenta i tempi di modellazione e, se la si pone nulla, la resistenza di picco del materiale è molto maggiore rispetto a quella reale
<b>Clump</b>	L’algoritmo di identificazione dei contatti è più veloce di quello per particelle poligonali ed ellissoidiche; Consente di tenere in conto delle rotazioni interparticellari senza causare elevati oneri computazionali	

In virtù di quanto riportato in tabella 7.4 nel presente studio si è scelto di utilizzare la metodologia clump.

### 7.2.2.1 La generazione dei walls

Per la creazione dei muri che simulano la membrana in lattice e delle piastre di carico si è utilizzato lo stesso procedimento descritto nel paragrafo 6.3.2.1.

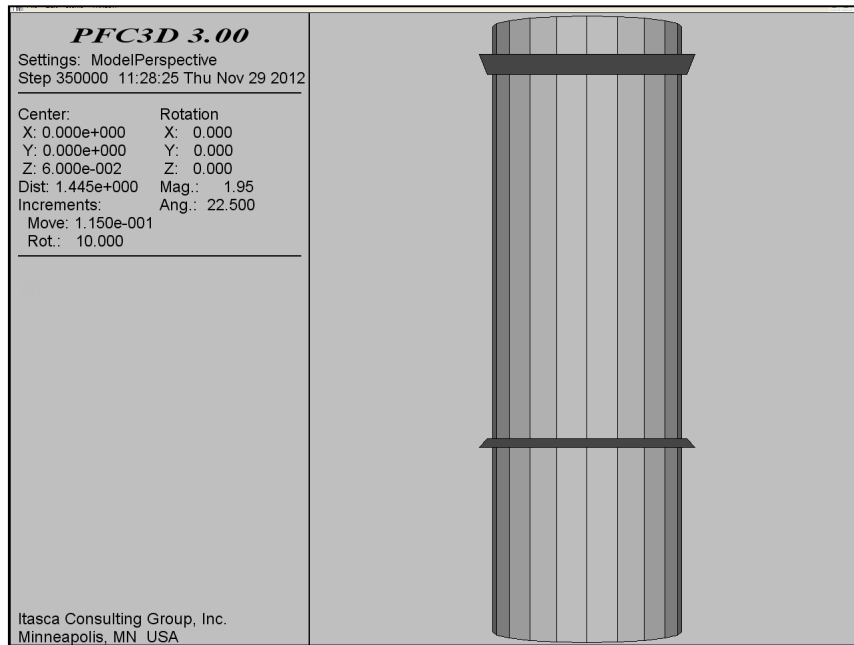


FIGURA 7.17: GENERAZIONE WALL CILINDRICO E PIASTRE DI CARICO.

### 7.2.2.2 La generazione di sfere e clump

Il processo di generazione dei *clump* è più complicato rispetto a quello utilizzato per la creazione delle sfere. Infatti, se per le singole particelle era sufficiente un’unica stringa di comandi per generarne fino a 650, per generare un *clump* formato da  $n$  sfere sono necessarie  $n+1$  stringhe. In particolare, le prime  $n$  stringhe descrivono le singole sfere (ID, coordinate del centro e raggio) e l’ultima contiene il comando di generazione del *clump*.

Si riporta a titolo d’esempio lo stralcio di listato per la generazione di un *clump* formato da tre sfere.

---

```
ball id=1 x -0.01175   y 0.028763   z 0.12 rad 0.00275
ball id=2 x -0.009    y 0.024     z 0.12 rad 0.00275
ball id=3 x -0.0145   y 0.024     z 0.12 rad 0.00275
clump id=4 range id=1,3
```

---

Come per i provini di sole sfere utilizzati per la calibrazione dei parametri microscopici, anche in questo caso non è possibile generare in un unico momento tutte le sfere ed i clump costituenti la miscela, il listato viene quindi suddiviso in passi successivi (tabella 7.5). Ogni step prevede la creazione di uno strato di sole sfere (530 per i provini 2C e 3C e 700 per il 4C) e due o tre strati di clump al fine di riprodurre nel modo più fedele possibile la tecnica utilizzata in laboratorio.

TABELLA 7.5: NUMERO DI STEP NECESSARI PER IL CONFEZIONAMENTO DI UN PROVINO.

Nome provino	Numero di step totali
2C	61
3C	61
4C	46

Le singole sfere vengono generate a random all’interno del volume predefinito della cella triassiale, mentre per la generazione degli strati di clump si fa riferimento ad uno schema realizzato in AutoCAD, nel quale viene fissata la disposizione geometrica dei diversi clump e dal quale vengono ricavate le relative coordinate.

Questo tipo di procedura assegna una posizione d’origine fissa al clump; è importante non sovrapporre i clump tra loro o ad altre sfere, per evitare l’insorgere di elevate forze di repulsione. Per evitare che ciò accada i due-tre strati di clump generati ad ogni step sono contraddistinti da valori di z differenti. Per ricavare le coordinate x ed y delle sfere costituenti i clump, è stato disegnato un modello vettoriale con origine degli assi posta nel centro della sezione circolare del provino (figura 7.18).

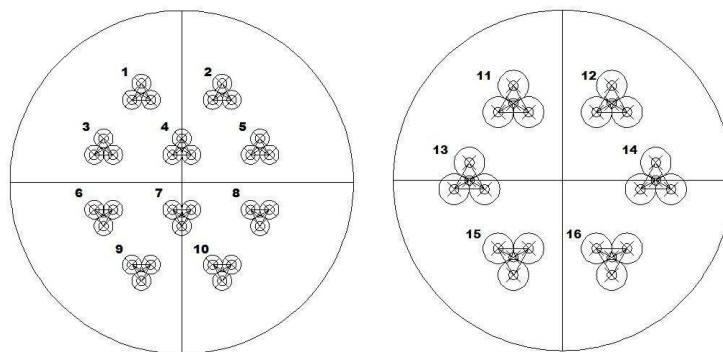


FIGURA 7.18: LA DISPOSIZIONE DEI CLUMP.

A seguire viene riportato il listato di una delle 61 fasi di generazione del provino 3C.

---

```
;generazione strato di sfere
gen id=105,624 rad 0.001385 0.001385 x=-0.03,0.03 y=-0.03,0.03 z=0.01,0.2
;generazione primo strato di clump sotto
ball id=1 x -0.01175 y 0.028763 z 0.12 rad 0.00275
ball id=2 x -0.009 y 0.024 z 0.12 rad 0.00275
ball id=3 x -0.0145 y 0.024 z 0.12 rad 0.00275
clump id=4 range id=1,3
.
.
.
ball id=37 x 0.01175 y -0.028763 z 0.12 rad 0.00275
ball id=38 x 0.0145 y -0.024 z 0.12 rad 0.00275
ball id=39 x 0.009 y -0.024 z 0.12 rad 0.00275
clump id=40 range id=37,39

;generazione secondo strato di clump centrale
ball id=41 x -0.0145 y 0.027794 z 0.14 rad 0.0045
ball id=42 x -0.01 y 0.02 z 0.14 rad 0.0045
ball id=43 x -0.019 y 0.02 z 0.14 rad 0.0045
clump id=44 range id=41,43
.
.
.
ball id=61 x 0.0145 y -0.027794 z 0.14 rad 0.0045
ball id=62 x 0.019 y -0.02 z 0.14 rad 0.0045
ball id=63 x 0.01 y -0.02 z 0.14 rad 0.0045
clump id=64 range id=61,63

;generazione terzo strato di clump sopra
ball id=65 x -0.01175 y 0.028763 z 0.16 rad 0.00275
ball id=66 x -0.009 y 0.024 z 0.16 rad 0.00275
ball id=67 x -0.0145 y 0.024 z 0.16 rad 0.00275
clump id=68 range id=65,67
.
.
.
ball id=101 x 0.01175 y -0.028763 z 0.16 rad 0.00275
ball id=102 x 0.0145 y -0.024 z 0.16 rad 0.00275
ball id=103 x 0.009 y -0.024 z 0.16 rad 0.00275
clump id=104 range id=101,103

prop dens = 7750 kn = 1e8 ks = 1e8 fric = 0.46
set grav 0 0 -9.81

cyc 10000
```

---



Anche se la configurazione con cui vengono generati i clump è estremamente regolare, grazie all’azione della forza di gravità e all’interazione degli elementi con quelli già presenti all’interno del volume del provino, si ottiene una disposizione di sfere e clump piuttosto uniforme (figura 7.19).

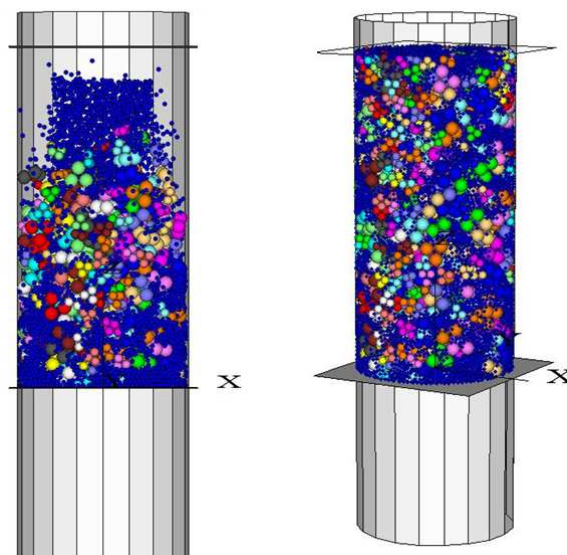


FIGURA 7.19: FASE INTERMEDIA E FASE FINALE DELLA GENERAZIONE DEL PROVINO COSTITUITO DA SFERE E CLUMP.

La densità delle sfere, le rigidezze di contatto tangenziale e normale ed il coefficiente d’attrito utilizzati hanno valori identici a quelli utilizzati nella prima fase della sperimentazione (capitolo 6, tabella 6.5).

### **7.2.2.3 L’esecuzione della prova**

Le dimensioni dei campioni e le modalità di prova dei test triassiali simulati mediante PFC<sup>3D</sup> sono gli stessi utilizzati nella fase di calibrazione dei parametri microscopici e descritti nel paragrafo 6.3.2.3.

Al termine della prova triassiale tutti i provini manifestano una configurazione a botte, dovuta ad un abbassamento di altezza con conseguente deformazione centrale radiale (figura 7.20).

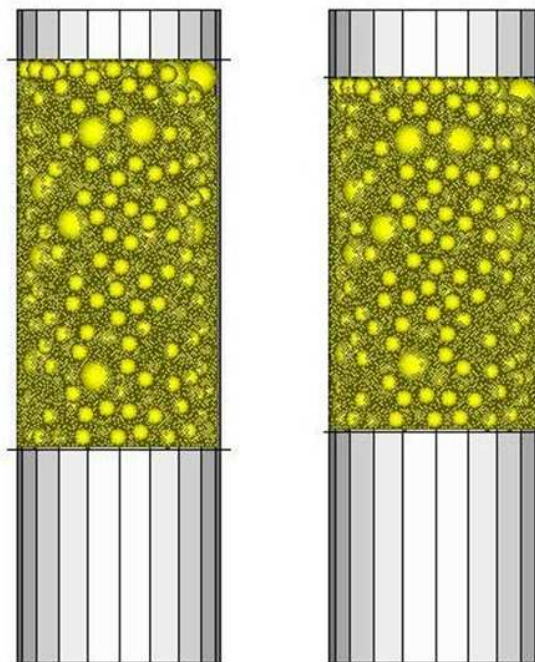


FIGURA 7.20: CONFIGURAZIONE INIZIALE E FINALE DEL PROVINO SOTTOPOSTO A TEST TRIASSIALE.

### ***7.2.3 Analisi dei risultati ottenuti***

In questo paragrafo vengono riportati i risultati ottenuti analizzando i test triassiali effettuati su provini costituiti da sfere di diametro pari a 2,77 mm ed elementi di forma generica, ottenuti assemblando particelle di forma sferica.

Per ottenere indicazioni sull'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo del sistema sono stati confrontati i risultati ottenuti al variare del tipo di particella elementare.

L'analisi completa e il confronto tra i risultati ottenuti nella fase di calibrazione e quelli dei provini costituiti da clump sono riportati nel paragrafo 7.3.

#### ***7.2.3.1 Valutazione della percentuale di clump rotti***

La prima considerazione effettuata riguarda la valutazione dell'efficacia della procedura utilizzata in laboratorio per creare gli elementi di forma irregolare mediante l'assemblaggio di particelle sferiche. Infatti, conteggiando al termine di ogni test triassiale il numero di elementi rotti, si intende valutare l'efficacia dell'acciaio liquido come collante (figura 7.21).

TABELLA 7.6: VALUTAZIONE DEL NUMERO DI CLUMP ROTTI.

Nome provino	Tensione di confinamento [kPa]	Elementi rotti a fine test		
		Sfere $\Phi$ 2,77 [mm]	Elementi non sferici $\Phi$ tot. 11 [mm]	Elementi non sferici $\Phi$ tot. 18 [mm]
2_C	400	/	105	51
	500	/	199	56
3_C	400	/	14	9
	500	/	23	15
4_C	400	/	68	11
	500	/	99	19

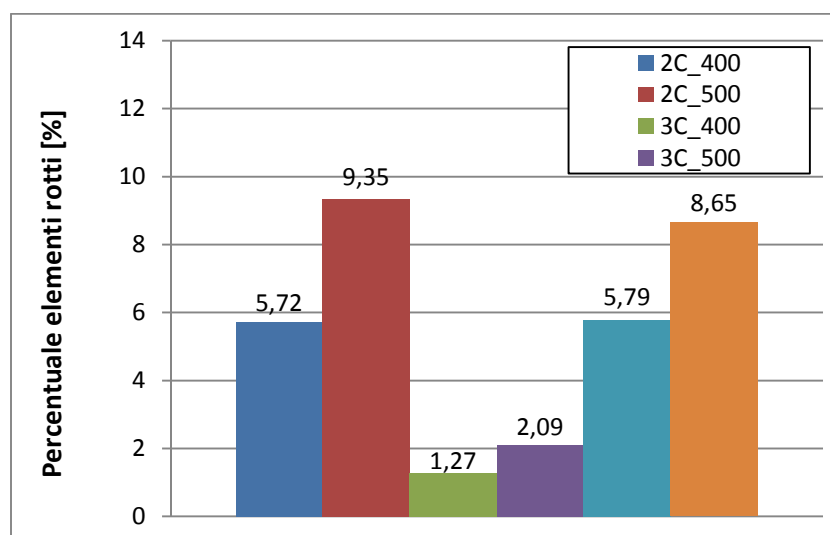


FIGURA 7.21: PERCENTUALE DI CLUMP ROTTI.

In tabella 7.6 è possibile osservare che, a parità di diametro, il numero di *clump* rotti aumenta all'aumentare della tensione di confinamento. Inoltre, a parità di tensione di confinamento, gli elementi con diametro totale pari a 11 mm si rompono in maggior numero rispetto a quelli di diametro pari a 18 mm. Ciò può essere dovuto alla ridotta area di contatto che caratterizza gli elementi formati da sfere di dimensioni minori. La scarsa estensione della zona di contatto può essere responsabile anche del fatto che gli elementi costituiti da due sfere risultino quelli maggiormente soggetti a rottura. Infine, analizzando gli istogrammi riportati nelle figure 7.22, 7.23 e 7.24, si osserva che la configurazione in corrispondenza della quale si registra il minor numero di clump rotti è quella a tre sfere.

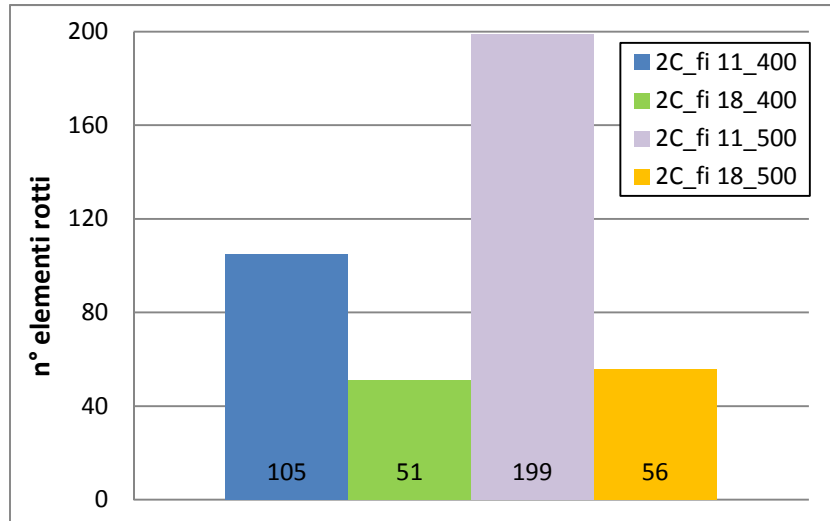


FIGURA 7.22: CLUMP A DUE ELEMENTI - NUMERO DI CLUMP ROTTI A FINE TEST.

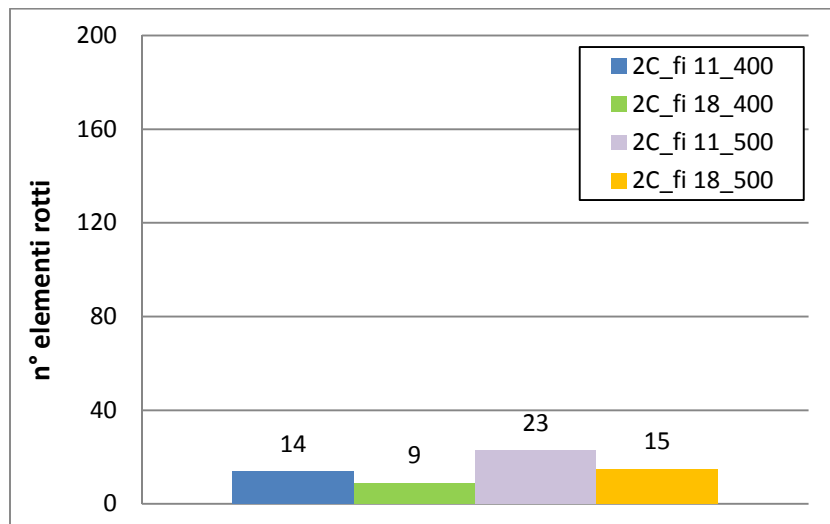


FIGURA 7.23: CLUMP A TRE ELEMENTI - NUMERO DI CLUMP ROTTI A FINE TEST.

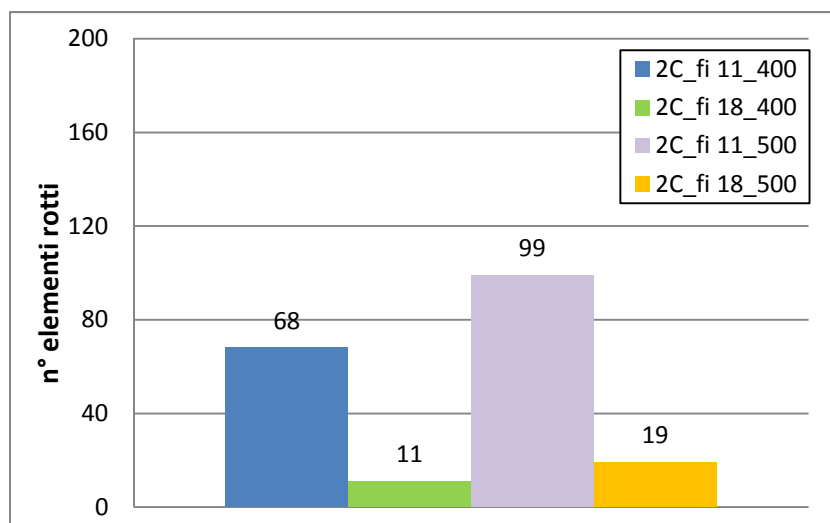


FIGURA 7.24: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI - NUMERO DI CLUMP ROTTI A FINE TEST.

### 7.2.3.2 Andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale

L’andamento delle curve tensione deviatorica – deformazione assiale dei provini modellati mediante PFC<sup>3D</sup> ricalca quello relativo ai campioni testati in laboratorio.

In particolare, tutte le curve  $\sigma_d - \varepsilon_a$  manifestano tre tratti caratteristici:

- fase iniziale, in cui la tensione deviatorica cresce in modo monotono;
- fase di rottura, in cui viene raggiunto il valore massimo di  $\sigma_d$  ;
- fase finale, in cui la tensione deviatorica tende a mantenersi costante o a diminuire leggermente.

Dai grafici riportati in figura 7.25, 7.27 e 7.29 si evince che, a parità di tipologia di elemento, all’aumentare della tensione di confinamento crescono i valori sia della resistenza di picco sia della resistenza residua. Inoltre, a parità di tensione di confinamento, i valori di picco delle curve crescono all’aumentare della complessità della forma delle particelle che compongono il provino. Ciò è dovuto al migliore ingranamento reciproco tra gli elementi di forma irregolare, che porta ad un incremento di resistenza complessiva del sistema.

L’errore relativo alla tensione deviatorica massima calcolato confrontando i risultati numerici e quelli sperimentali è moderato e rientra, per tutti i test effettuati, in un range che va da 0,09 a 4,22 (figure 7.26, 7.28, 7.30).

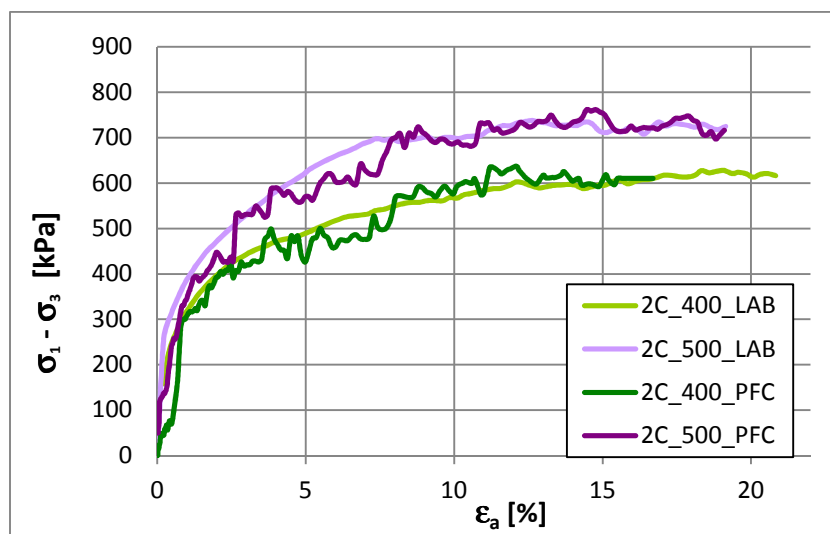


FIGURA 7.25: CLUMP A DUE ELEMENTI - DIAGRAMMA  $\sigma_D - \varepsilon_A$ , CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

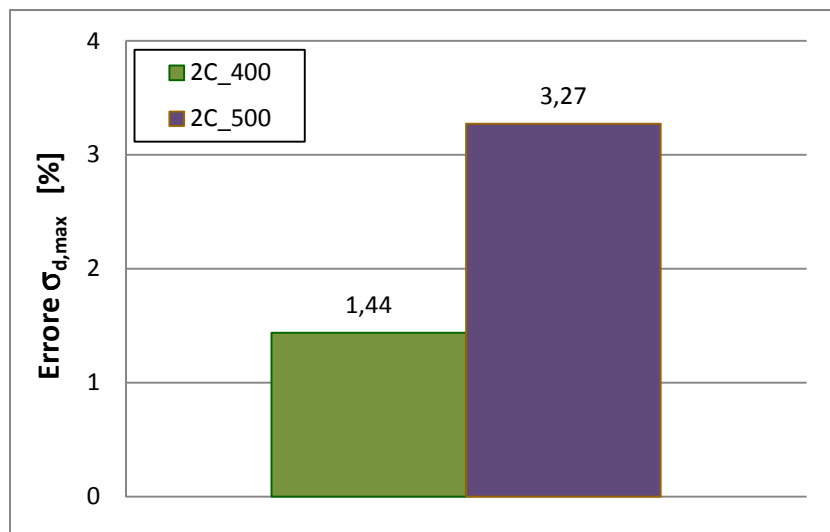


FIGURA 7.26: CLUMP A DUE ELEMENTI - MASSIMO ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA.

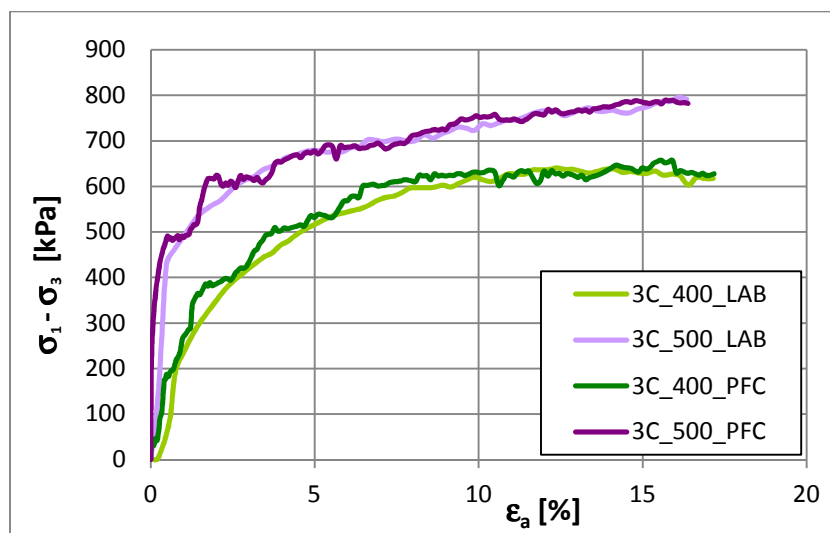


FIGURA 7.27: CLUMP A TRE ELEMENTI - DIAGRAMMA  $\sigma_D - \epsilon_a$ , CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

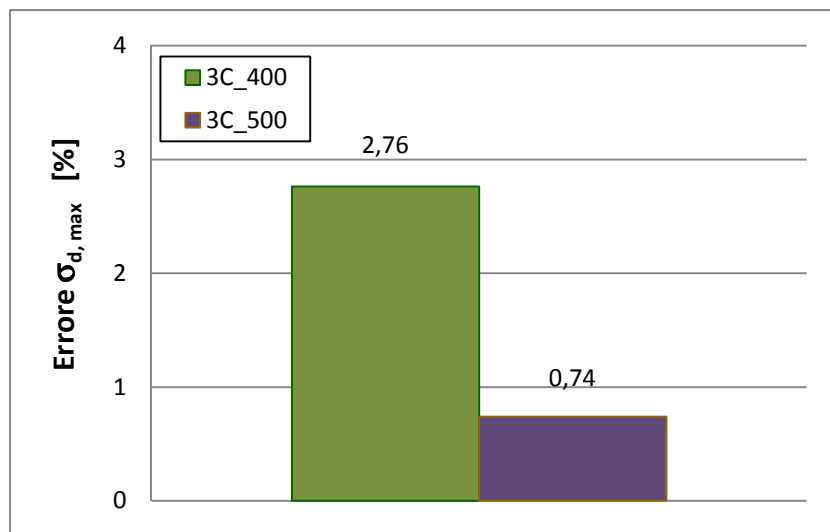


FIGURA 7.28: CLUMP A TRE ELEMENTI - MASSIMO ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA.

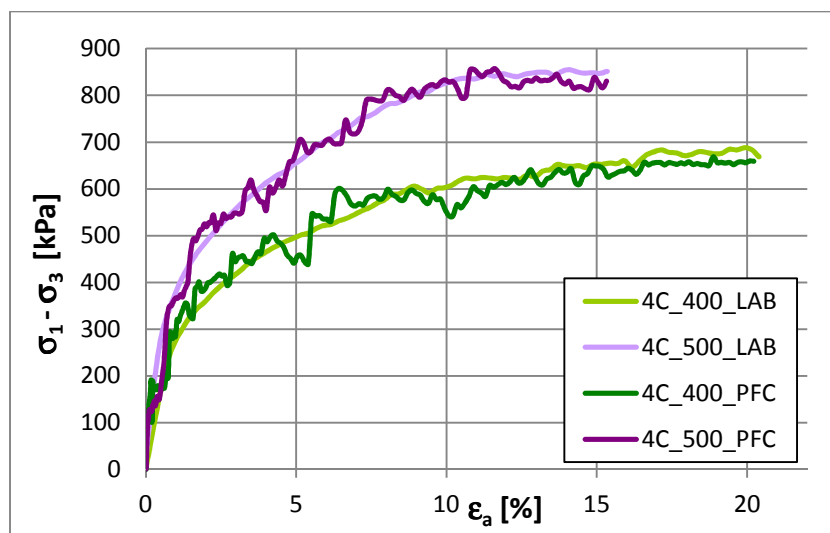


FIGURA 7.29: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI - DIAGRAMMA  $\sigma_D - \epsilon_A$ , CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI (LAB) E NUMERICI (PFC).

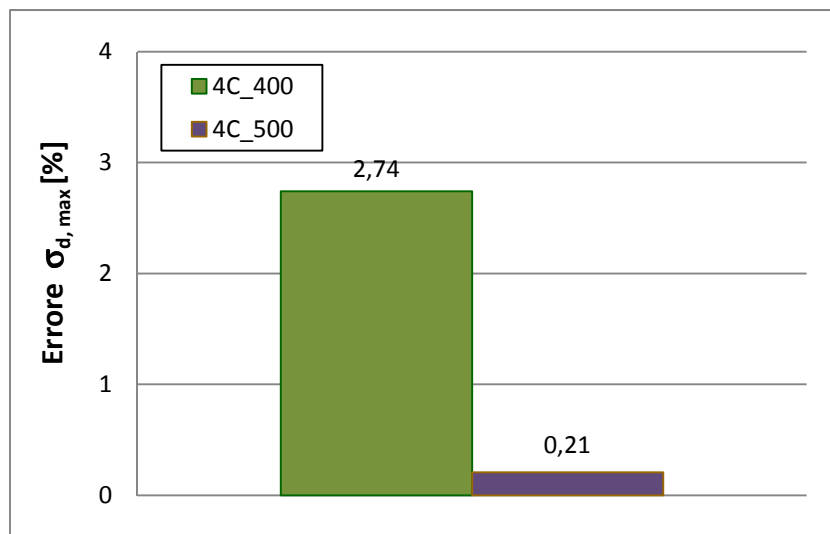


FIGURA 7.30: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI - MASSIMO ERRORE DELLA TENSIONE DEVIATORICA.

Calcolando la media tra gli errori sui massimi deviatorici ottenuti alle due tensioni di confinamento per ogni tipologia di miscela, si osserva come tale valore cali all’aumentare dell’angolarità della particella (figura 7.31). Ciò testimonia il fatto che passando dai clump a due elementi a quelli a quattro migliora la modellazione del provino reale mediante il DEM particellare ed i risultati ottenuti risultano estremamente affidabili.

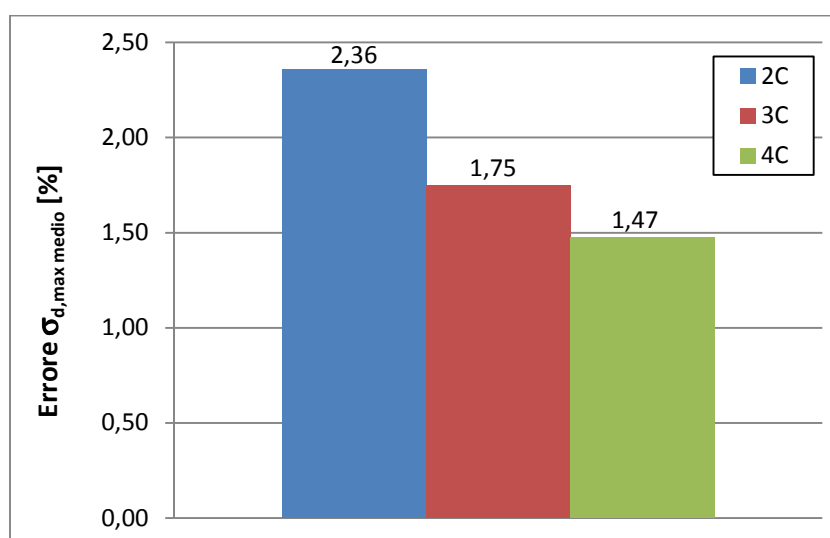


FIGURA 7.31: CLUMP - MEDIA DEGLI ERRORI RELATIVI ALLA MASSIMA TENSIONE DEVIATORICA PER LE DUE TENSIONI DI CONFINAMENTO.

In figura 7.32 si possono osservare in un unico grafico gli andamenti delle curve  $\sigma_d - \epsilon_a$  dei *clump* a due, tre e quattro elementi. La tendenza conferma le precedenti



osservazioni, ovvero che all'aumentare della complessità dei *clump* costituenti il provino e della tensione di confinamento le curve si spostano verso l'alto ed il sistema manifesta una resistenza maggiore.

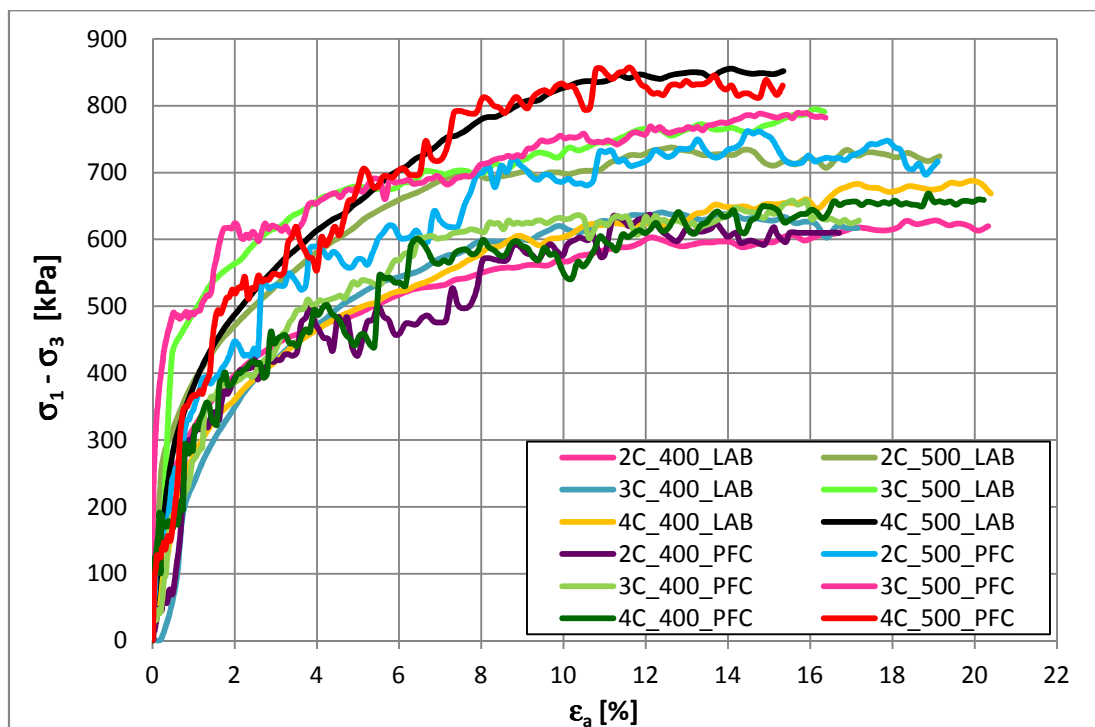


FIGURA 7.32: CLUMP - DIAGRAMMA  $\sigma_D - \varepsilon_A$ , CONFRONTO TRA RISULTATI SPERIMENTALI E NUMERICI.

### **7.3 CONFRONTO TRA SFERE E CLUMP**

L'obiettivo ultimo del presente studio è quello di valutare l'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso – deformativo del sistema.

I risultati ottenuti dai test triassiali su provini di singole sfere e quelli relativi ai campioni costituiti da sfere e clump sono stati confrontati ed analizzati concentrandosi su tre diversi ambiti:

- caratteristiche di resistenza;
- caratteristiche geotecniche;
- caratteristiche microscopiche.

L'analisi delle microscopiche si è basata esclusivamente sull'elaborazione dei dati numerici ricavati dal software di calcolo PFC<sup>3D</sup>, poiché non risulta possibile ottenere la distribuzione e i valori delle forze di contatto dai test triassiali svolti in laboratorio.

### 7.3.1 Analisi della resistenza massima del sistema

Come osservato nei paragrafi 6.4.1 e 7.2.3.2 le curve sforzo deviatorico-deformazione assiale relative rispettivamente a sfere e clump hanno tutte il medesimo andamento. Il valore di tensione deviatorica di picco viene raggiunto dopo un primo tratto in cui le deformazioni sono molto piccole e la curva cresce rapidamente in modo monotono; raggiunto il valore massimo la resistenza si mantiene all’incirca costante (figura 7.33 e 7.34) .

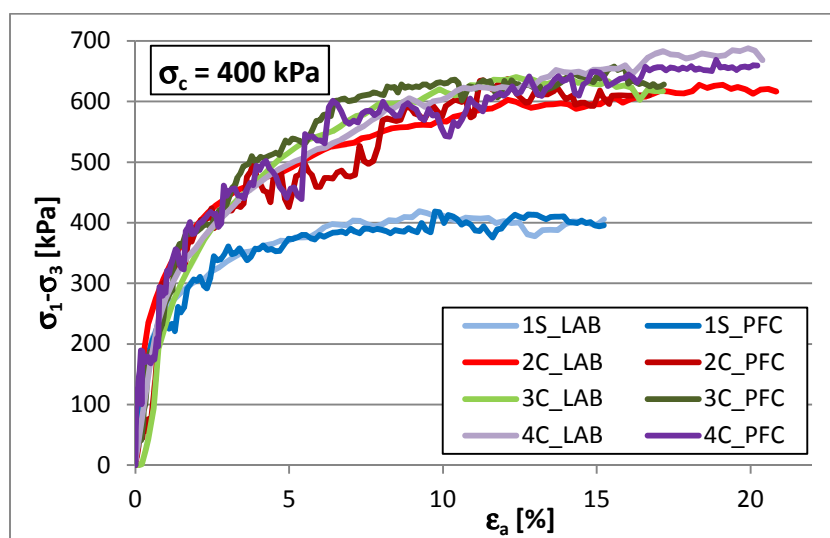


FIGURA 7.33: CONFRONTO DIAGRAMMA  $\sigma_D - \epsilon_A$  SFERE E CLUMP PER UNA TENSIONE DI CONFINAMENTO PARI A 400 KPA.

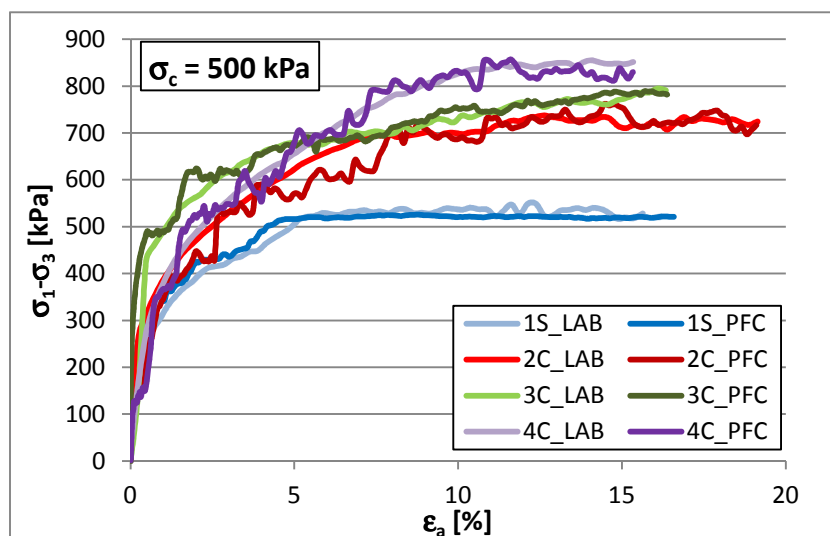


FIGURA 7.34: CONFRONTO DIAGRAMMA  $\sigma_D - \epsilon_A$  SFERE E CLUMP PER UNA TENSIONE DI CONFINAMENTO PARI A 500 KPA.

L’aspetto fondamentale che emerge dalle figure 7.33 e, soprattutto, 7.34 è che i livelli tensionali raggiunti assumono valori più elevati all’aumentare dell’angolarità della particella.

Ciò risulta evidente anche osservando gli istogrammi riportati in figura 7.35 e 7.36 in cui il valore di picco della tensione deviatorica, a parità di tensione di confinamento, cresce passando dai provini confezionati con sole sfere a quelli formati da sfere e clump a 4 elementi.

All’aumentare dell’angolarità della particella migliorano, quindi, le caratteristiche di resistenza del provino; ciò è imputabile al fatto che l’ingranamento, e di conseguenza la resistenza, assicurata dai clump risulta notevolmente maggiore rispetto a quello fornito dalle sfere.

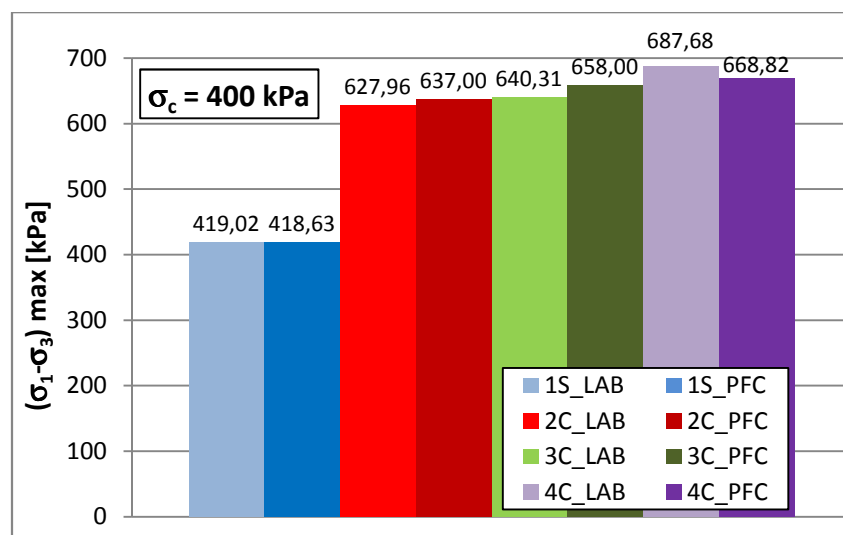


FIGURA 7.35: VALORI DI PICCO DELLA TENSIONE DEVIATORICA PER UNA TENSIONE DI CONFINAMENTO PARI A 400 kPa.

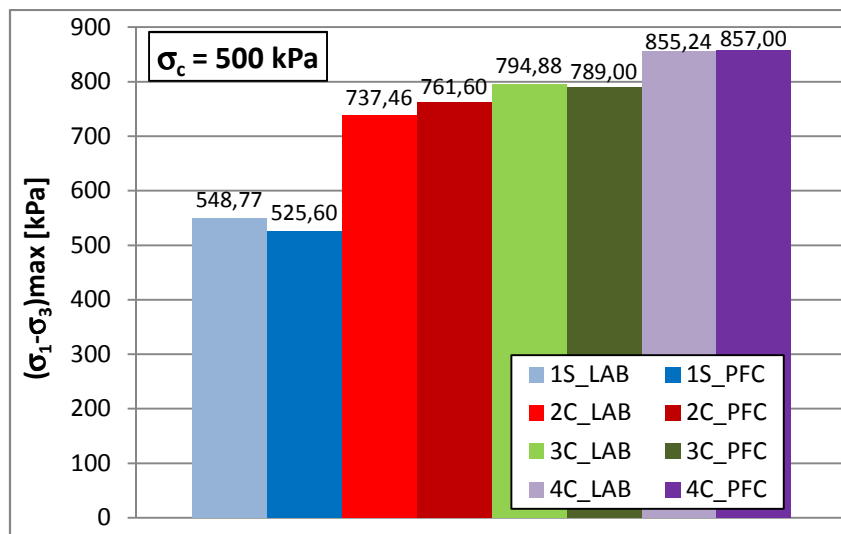


FIGURA 7.36: VALORI DI PICCO DELLA TENSIONE DEVIATORICA PER UNA TENSIONE DI CONFINAMENTO PARI A 500 kPa.

### **7.3.2 Analisi delle caratteristiche geotecniche**

#### **7.3.2.1 Angolo d’attrito di picco**

La resistenza al taglio di un terreno è dovuto a due componenti principali:

- l'attrito esercitato sulle superfici di contatto tra i grani;
- l'interconnessione, che tiene conto di come le particelle di terreno sono disposte. Essa dipende dalla forma delle particelle, dalla loro disposizione spaziale e dalla distribuzione granulometrica delle particelle stesse.

Valutando la resistenza al taglio e l’angolo di attrito di picco dei diversi provini sottoposti al test triassiale è possibile trarre conclusioni rilevanti riguardo il grado di addensamento delle miscele.

Nel capitolo 6 (paragrafo 6.3.2.2) si è detto che l’angolo di attrito macroscopico, utilizzato per la determinazione del coefficiente di attrito interparticellare delle sfere, viene assunto pari a 23°.

Tale valore è ottenuto mediante la cosiddetta prova del cono; essa consiste nel far cadere liberamente le particelle costituenti la miscela in esame su una superficie piana orizzontale fino ad ottenere una disposizione delle stesse “a cono”. La generatrice della superficie conica forma con l’orizzontale l’angolo di attrito macroscopico  $\phi_{macro}$  (figura 7.37).

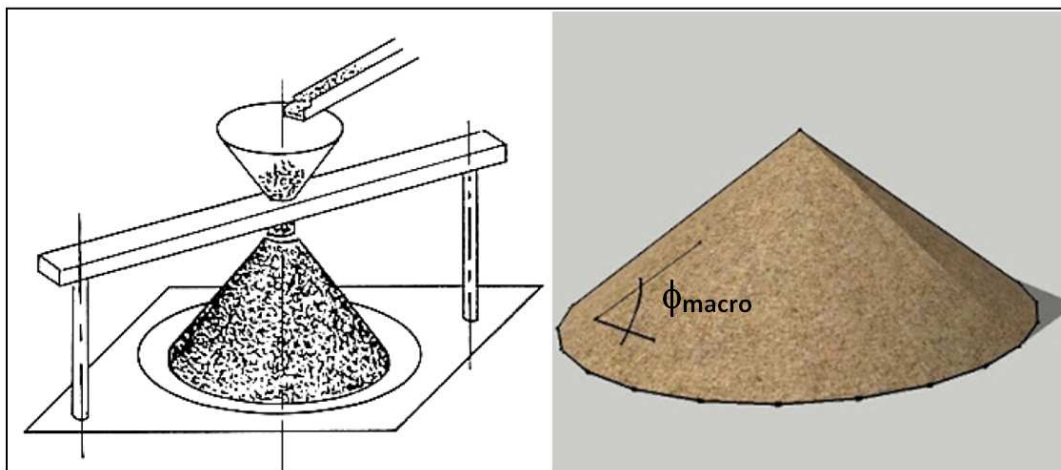


FIGURA 7.37: SCHEMA PROVA DEL CONO PER LA DETERMINAZIONE DELL'ANGOLO DI ATTRITO MACROSCOPICO.

La prova del cono viene ripetuta anche per le miscele a due, tre e quattro elementi ottenendo angoli di attrito macroscopico rispettivamente pari a  $24^\circ$ ,  $25^\circ$  e  $26^\circ$ .

Oltre all'angolo di attrito macroscopico è possibile valutare, in base ai risultati dei test triassiali, l'angolo di attrito microscopico. Il valore di tale angolo dipende dalle caratteristiche di addensamento del materiale e può essere ricavato mediante l'involuppo di rottura sul piano di Mohr.

In particolar modo, noti i valori dello sforzo deviatorico efficace e della back-pressure applicata al provino è possibile calcolare, per ogni tensione di confinamento ( $\sigma_3$ ), la tensione deviatorica totale ( $\sigma_1$ ) (tabella 7.7) e tracciare i relativi circoli di Mohr.

Rappresentando i circoli di Mohr per le diverse tensioni di confinamento è possibile tracciare l'involuppo di rottura caratteristico di ogni miscela, individuando così il valore dell'angolo di attrito microscopico.

Dalle figure 7.38, 7.39, 7.40 e 7.41 e dal grafico riportato in figura 7.42 si evince che il valore dell'angolo d'attrito microscopico mobilitato a livello interparticellare cresce all'aumentare dell'angolarità della particella.

Ciò è la diretta conseguenza del fatto che particelle ad angolarità maggiore garantiscono valori di addensamento più elevati.

TABELLA 7.7: CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI PER LE DIVERSE TIPOLOGIE DI MISCELA A FINE TEST.

	Sfere			2C		3C		4C	
	1S_300	1S_400	1S_500	2C_400	2C_500	3C_400	3C_500	4C_400	4C_500
	<b>PFC<sup>3D</sup></b>								
<b>Tensione di conf. totale (<math>\sigma_3</math>) [kPa]</b>	300,00	400,00	500,00	400,00	500,00	400,00	500,00	400,00	500,00
<b>Tensione dev. efficace [kPa]</b>	289,46	418,63	525,6	637,00	761,60	658,00	789,00	668,82	857,00
<b>u [kPa]</b>	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
<b>Tensione dev. totale [kPa]</b>	389,46	518,63	625,60	737,00	861,60	758,00	889,00	768,82	957,00
<b><math>\sigma_1</math> [kPa]</b>	689,46	918,63	1125,60	1137,00	1361,60	1158,00	1389,00	1168,82	1457,00
	<b>LABORATORIO</b>								
<b>Tensione di conf. totale (<math>\sigma_3</math>) [kPa]</b>	300,00	400,00	500,00	400,00	500,00	400,00	500,00	400,00	500,00
<b>Tensione dev. efficace [kPa]</b>	285,59	419,02	548,77	627,96	737,46	640,31	794,88	687,68	855,24
<b>u [kPa]</b>	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
<b>Tensione dev. totale [kPa]</b>	385,59	519,02	648,77	727,96	837,46	740,31	894,88	787,68	955,24
<b><math>\sigma_1</math> [kPa]</b>	685,59	919,02	1148,77	1127,96	1337,46	1140,31	1394,88	1187,68	1455,24

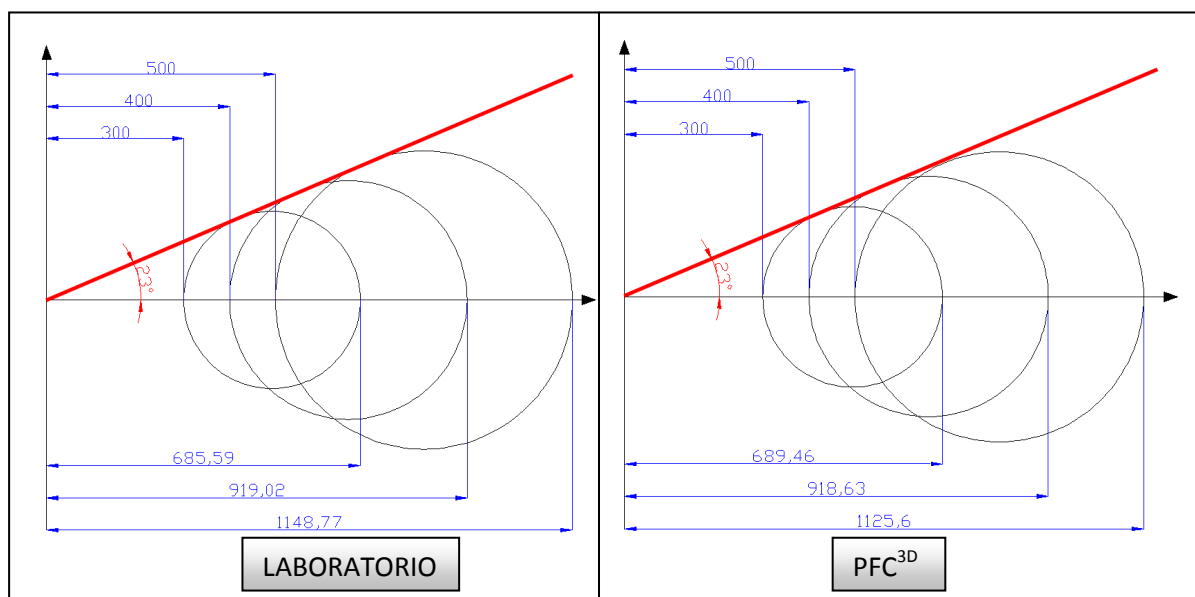


FIGURA 7.38: SFERE – PIANO DI MOHR, ANGOLO D'ATTRITO DI PICCO.

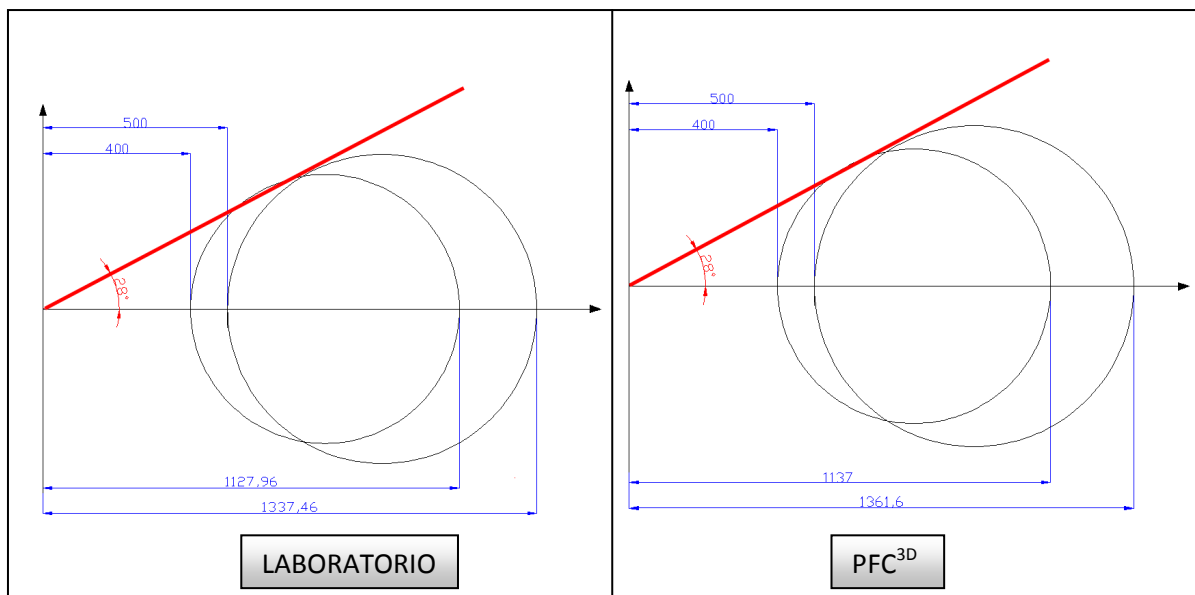


FIGURA 7.39: CLUMP A DUE ELEMENTI – PIANO DI MOHR, ANGOLO D'ATTRITO DI PICCO.

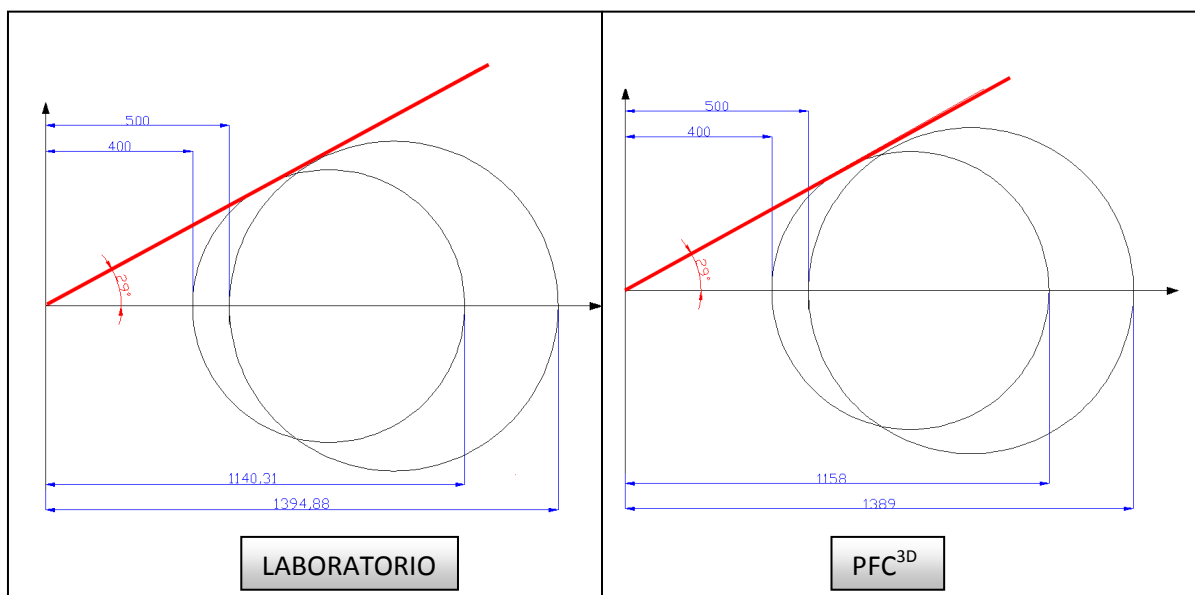


FIGURA 7.40: CLUMP A TRE ELEMENTI – PIANO DI MOHR, ANGOLO D'ATTRITO DI PICCO.

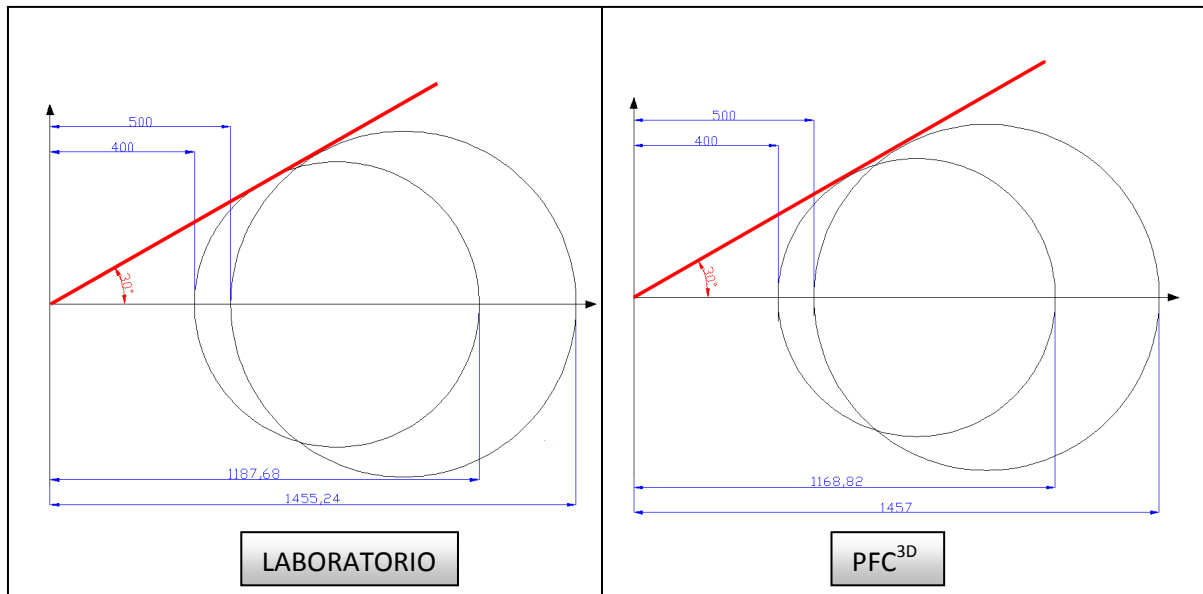


FIGURA 7.41: CLUMP A QUATTRO ELEMENTI – PIANO DI MOHR, ANGOLO D’ATTRITO DI PICCO.

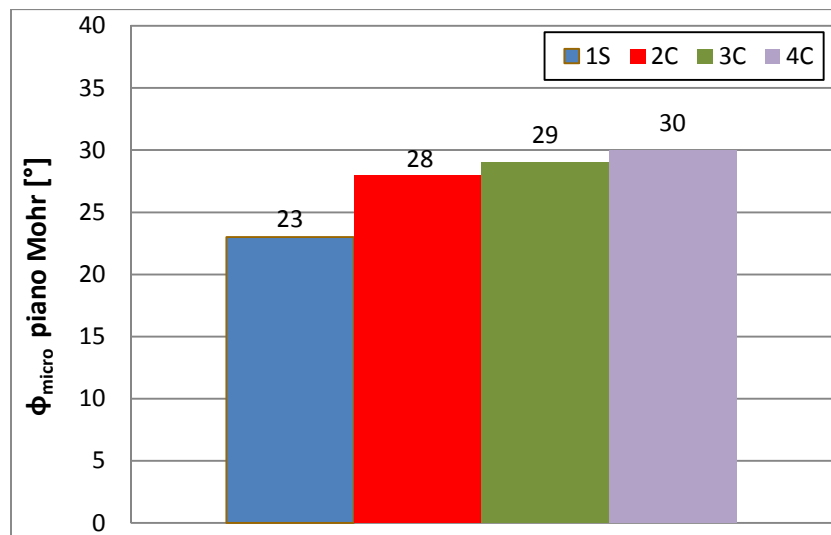


FIGURA 7.42: ANGOLO D’ATTRITO MICROSCOPICO.

Confrontando l’angolo d’attrito interparticellare mobilitato a livello macroscopico con quello microscopico (tabella 7.8) si nota che essi assumono valori identici solo per la miscela costituita da singole sfere. Per le miscele formate da elementi di forma generica l’angolo di attrito macroscopico risulta inferiore a quello mobilitato a livello microscopico. Ciò è legato al fatto che l’angolo di attrito microscopico dipende strettamente dall’ingranamento delle particelle che, a sua volta, aumenta passando dai clump a due a quelli a quattro elementi.



TABELLA 7.8: CONFRONTO  $\Phi_{\text{MACRO}}$  E  $\Phi_{\text{MICRO}}$  PER LE DIVERSE MISCELE.

	Sfere	Clump a 2 elementi	Clump a 3 elementi	Clump a 4 elementi
$\Phi_{\text{macro}}$	23	24	25	26
$\Phi_{\text{micro}}$	23	28	29	30

Dalla rottura in poi le particelle subiscono un riallineamento che porta alla riduzione dell’effetto dell’ingranamento sulla resistenza del sistema e quest’ultima si esplica quasi esclusivamente in virtù dell’angolo di attrito residuo, che risulta solitamente inferiore a quello di picco.

### 7.3.2.2 Indice dei vuoti e porosità

L’indice dei vuoti è una grandezza scalare propria dei materiali multifase che determina il rapporto tra il volume occupato dalla fase solida e quello proprio dei vuoti.

Generalmente si esprime quindi come:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (7.1)$$

dove:

$V_v$  = volume dei vuoti;

$V_s$  = volume occupato dalla fase solida.

L’indice dei vuoti è strettamente legato ad un altro parametro fondamentale di natura geotecnica: la porosità. Essa è definita mediante la seguente espressione:

$$n = \frac{V_v}{V} \cdot 100 [\%] \quad (7.2)$$

dove:

$V_v$  = volume dei vuoti;

$V$  = volume totale.

In virtù delle definizioni appena fornite è possibile ricavare due relazioni che permettono di determinare uno dei due parametri noto l’altro:

$$e = \frac{n}{1-n} \quad (7.3)$$

$$n = \frac{e}{1+e} \quad (7.4)$$

Nota la geometria del provino ed il numero e le dimensioni degli elementi utilizzati per il confezionamento dei campioni risulta possibile calcolare, per ognuno di essi, indice dei vuoti e porosità.

TABELLA 7.9: INDICE DEI VUOTI E POROSITÀ DELLE DIVERSE MISCELE.

	<b>Sfere</b>	<b>Clump a 2 elementi</b>	<b>Clump a 3 elementi</b>	<b>Clump a 4 elementi</b>
<b>Indice dei vuoti (e)</b>	0,59	0,58	0,57	0,56
<b>Porosità [%] (n)</b>	36,95	36,55	36,38	35,98

Indice dei vuoti e porosità assumono valori decrescenti all’aumentare del numero di sfere che compongono gli elementi di forma generica. I valori riportati in tabella 7.9 testimoniano un aumento del grado di addensamento della miscela e del mutuo incastro tra le particelle che la costituiscono.

Nel paragrafo precedente (7.3.2.1) si è detto che all’aumentare dell’angolarità delle particelle che costituiscono la miscela si registra un aumento dell’angolo di attrito, che comporta livelli di resistenza più elevati. Ciò è coerente con quanto riportato in figura 7.43 e in figura 7.44; osservando i grafici, infatti, si evince che all’incremento di angolo di attrito corrispondono valori di porosità ed indice dei vuoti inferiori. In letteratura, valutazioni analoghe sono state effettuate da Colombo, che ha valutato la resistenza al taglio di sabbie uniformi mediante prove triassiali consolidate e drenate [45].

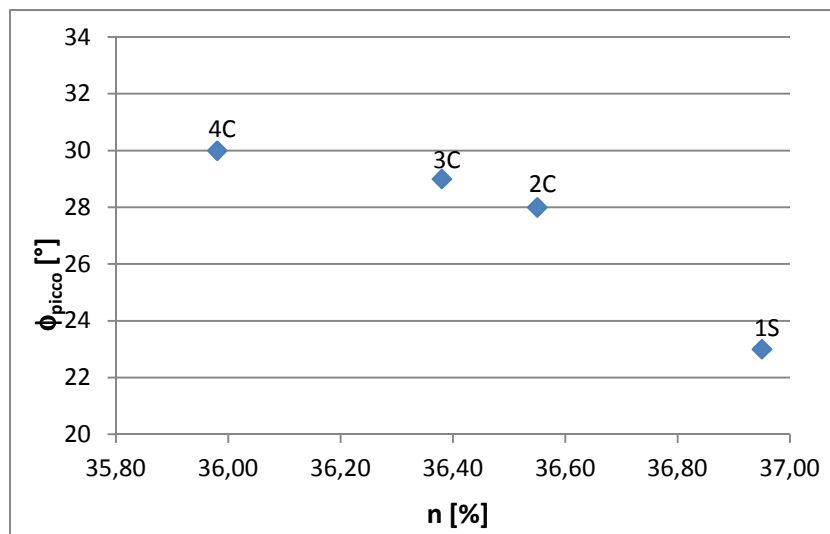


FIGURA 7.43: ANGOLO D'ATTRITO IN FUNZIONE DELLA POROSITÀ.

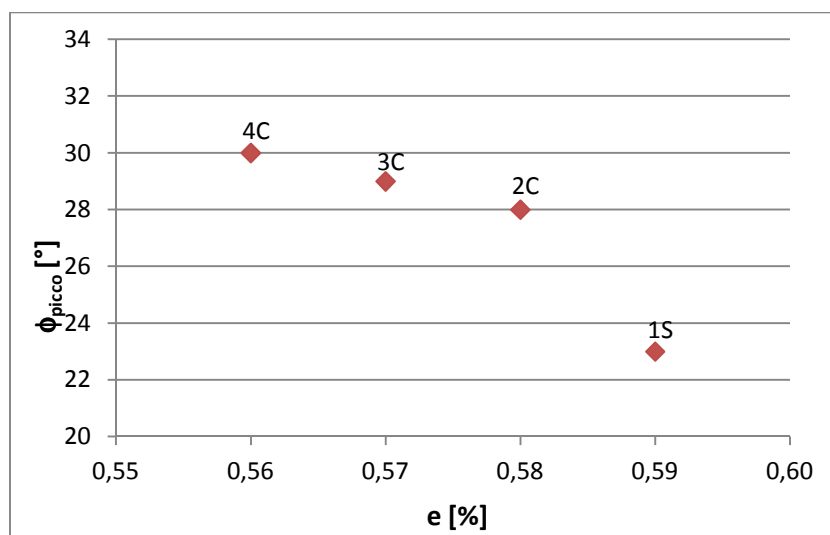


FIGURA 7.44: ANGOLO D'ATTRITO IN FUNZIONE DELL'INDICE DEI VUOTI.

### **7.3.3 Analisi delle caratteristiche microscopiche**

#### **7.3.3.1 Addensamento**

Livelli di resistenza più elevata sono la naturale conseguenza di un maggior grado di mutuo incastro ed addensamento che corrispondono, a loro volta, ad un maggior numero di contatti all'interno della miscela. La granulometria influenza notevolmente l'entità e la distribuzione dei contatti, infatti, in un materiale ben assortito composto da particelle di diverse dimensioni, è possibile ottenere configurazioni strutturali corrispondenti a stati di addensamento elevato. Per i test triassiali simulati mediante PFC<sup>3D</sup> è possibile ottenere in output il numero totale dei contatti attivi che si

sviluppano all’interno del provino. Osservando l’istogramma riportato in figura 7.45 si nota che a parità di tensione di confinamento il numero di contatti, indice della densità relativa del provino, aumenta all’aumentare del numero di sfere che compongono l’elemento di forma generica. Inoltre, a parità di tipologia di clump il numero totale di contatti è più elevato per la tensione di confinamento maggiore.

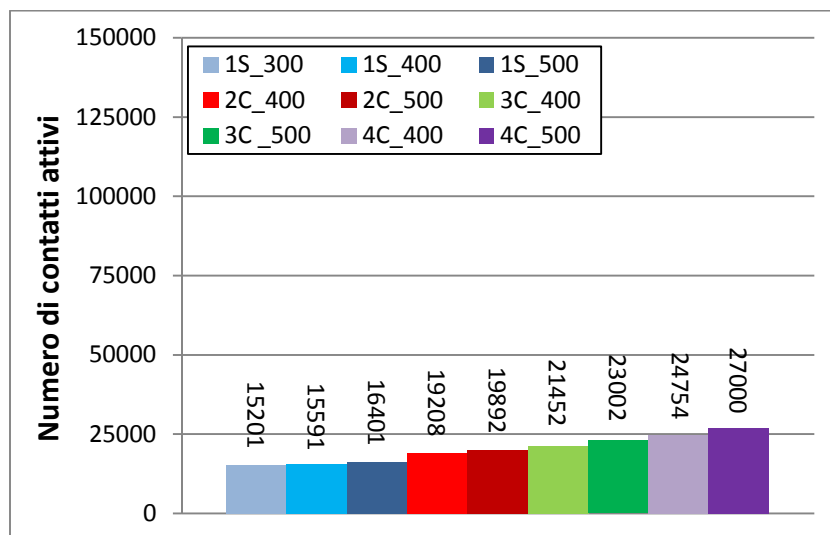


FIGURA 7.45: NUMERO TOTALE DEI CONTATTI ATTIVI.

Dividendo il numero di contatti attivi per il numero complessivo di elementi costituenti il provino si ottiene un’indicazione relativa al numero di contatti attivi per ogni elemento (tabella 7.10).

TABELLA 7.10: NUMERO DI CONTATTI ATTIVI PER PARTICELLA.

Tipo di miscela	Numero totale elementi	Numero contatti attivi	Numero contatti per particella
1S_400	32463	15591	0,48
1S_500	32463	16401	0,51
2C_400	34100	19208	0,56
2C_500	34100	19892	0,58
3C_400	33997	21452	0,63
3C_500	33997	23002	0,68
4C_400	33554	24754	0,74
4C_500	33554	27000	0,80

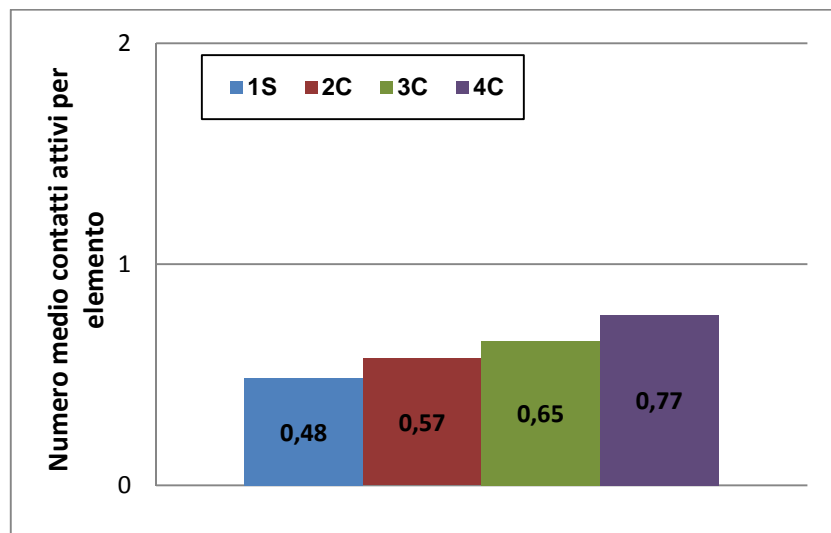


FIGURA 7.46: NUMERO CONTATTI MEDIO PER TIPOLOGIA DI ELEMENTO.

Il numero di contatti per particella medio (figura 7.46) assume valori crescenti all'aumentare dell'angolarità della particella, ciò testimonia ancora una volta un migliore grado di addensamento passando dalle sfere ai clump a quattro elementi.

Alla medesima considerazione si arriva anche analizzando l'andamento del numero di coordinazione relativo ai provini confezionati con le diverse miscele. Il numero di coordinazione è un parametro che PFC<sup>3D</sup> permette di valutare mediante la seguente relazione:

$$C_n = \frac{N_c}{E_c} \quad (7.5)$$

dove:

$N_c$  = numero dei contatti;

$E_c$  = numero di elementi.

Il numero di coordinazione viene calcolato all'interno di un volume sferico di riferimento stabilito ad hoc. Per valutare l'andamento di questo parametro all'interno del provino, in corrispondenza dell'istante finale della simulazione, vengono definite tre sfere di controllo con centro a 5, 10 e 15 cm dalla base del campione (figura 7.47).

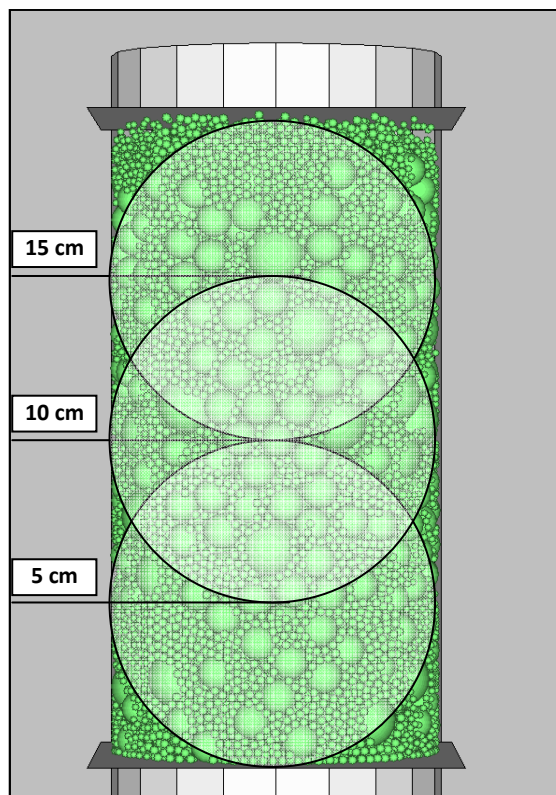


FIGURA 7.47: SFERE DI CONTROLLO PER IL CALCOLO DEL NUMERO DI COORDINAZIONE.

Il numero di coordinazione varia in maniera proporzionale al numero di contatti ed un suo incremento testimonia un aumento di addensamento della miscela.

Com'è possibile notare osservando il grafico in figura 7.48 il numero di coordinazione aumenta all'aumentare dell'angolarità della particella, e, a parità di miscela, assume valori più elevati per tensioni di confinamento maggiori.

Infine, appare evidente come il numero di coordinazione assuma un andamento crescente lungo l'altezza del provino. Infatti, la sollecitazione assiale applicata durante la prova triassiale e i movimenti di assestamento che ne conseguono, portano allo sviluppo di un maggior interlocking e alla nascita di numerosi contatti nella parte bassa del campione.

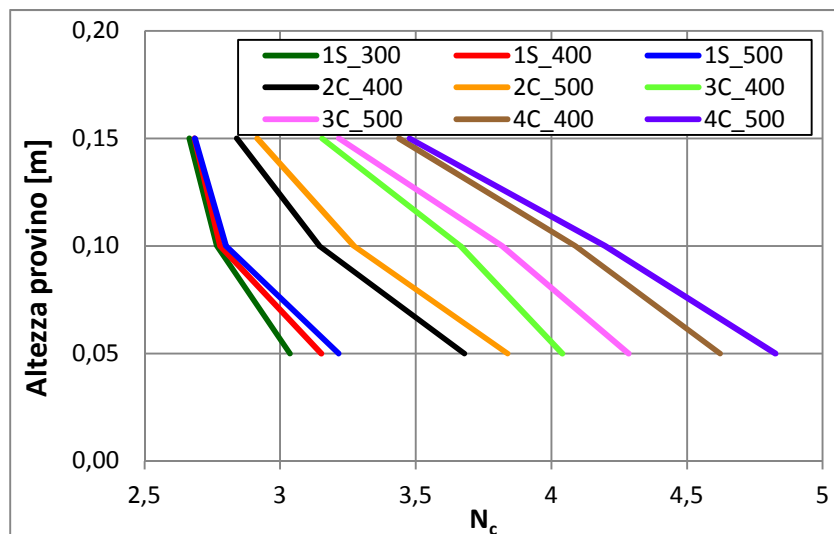


FIGURA 7.48: ANDAMENTO DEL NUMERO DI COORDINAZIONE ALL'INTERNO DEL PROVINO.

### 7.3.3.2 Le forze di contatto

Oltre ad identificare il numero di punti di contatto presenti all'interno del campione,  $PFC^{3D}$  consente di valutare l'entità e la distribuzione delle forze di contatto che si sviluppano tra elementi adiacenti.

Le forze di contatto normali e tangenziali di tipo puntuale vengono esaminate in corrispondenza di due istanti temporali differenti (tabella 7.11):

- istante corrispondente al 50% dei cicli necessari allo sviluppo della forza di picco (I).
- istante in cui si sviluppa il valore di picco della forza (II).

TABELLA 7.11: FORZE DI CONTATTO NORMALI E TANGENZIALI PUNTUALI [N].

	Istante temporale	Tensione di confinamento [kPa]	Tipo di miscela			
			1S	2C	3C	4C
Forze di contatto normali	I	400	416	1048	1888	2561
		500	632	1686	2137	2746
	II	400	501	1158	2210	2924
		500	713	1859	2410	3124
Forze di contatto tangenziali	I	400	54	310	487	930
		500	89	438	652	962
	II	400	65	343	570	1062
		500	100	483	735	1094

I grafici riportati in figura 7.49 e 7.50, relativi rispettivamente alle forze di contatto normali e tangenziali valutate nei due istanti temporali considerati, mostrano come le prime assumano sempre valori considerevolmente maggiori delle seconde. Ciò è principalmente dovuto alla natura della sollecitazione applicata durante il test triassiale, che porta allo sviluppo di catene di forza orientate verticalmente, in direzione prevalentemente perpendicolare rispetto alla superficie degli elementi.

L’entità delle forze di contatto dipende dal livello tensionale presente all’interno del campione e dal grado di ingranamento degli elementi che compongono la miscela.

Come è logico aspettarsi, a parità di tipologia di elemento, tensioni di confinamento più elevate inducono nel campione forze di contatto normali e tangenziali maggiori.

A parità di tensione di confinamento, invece, ciò che influenza l’entità delle forze di contatto è il grado di addensamento della miscela. Risulta chiaro quindi che per una stessa  $\sigma_c$  le forze di contatto normali e tangenziali aumentano con la complessità della forma della particella.

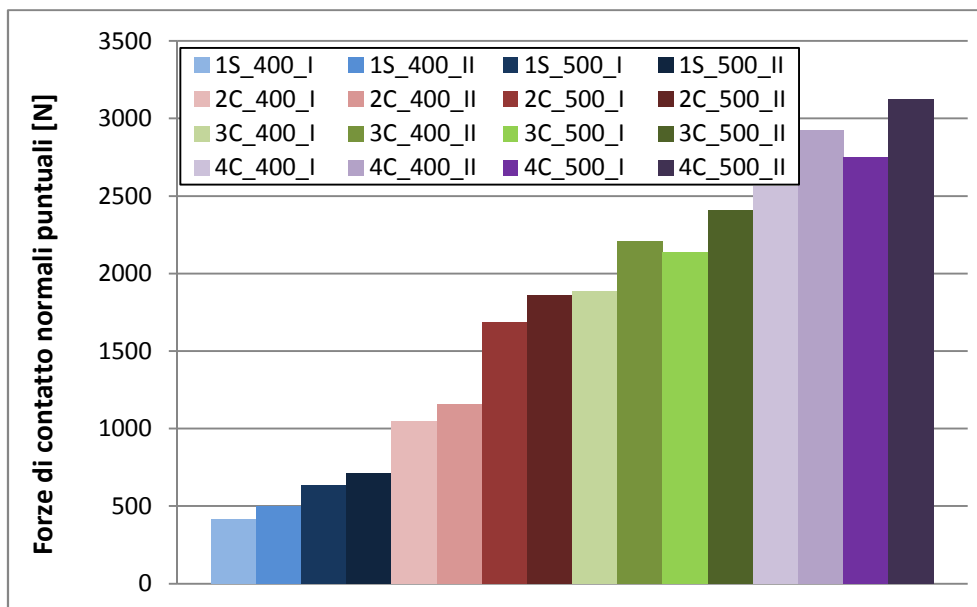


FIGURA 7.49: FORZE DI CONTATTO PUNTUALI NORMALI IN CORRISPONDENZA DEI DUE ISTANTI TEMPORALI CONSIDERATI.



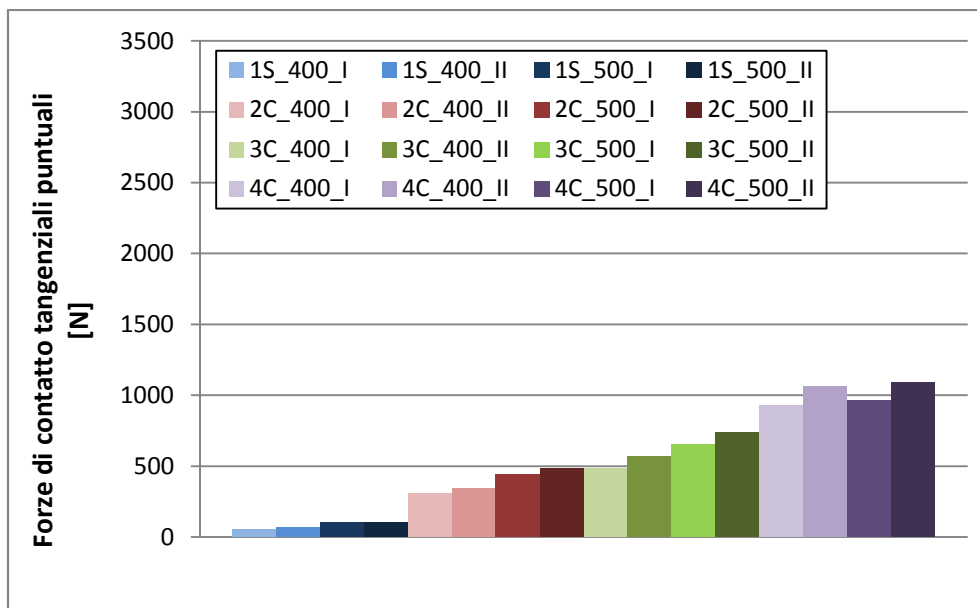


FIGURA 7.50: FORZE DI CONTATTO PUNTUALI TANGENZIALI IN CORRISPONDENZA DEI DUE ISTANTI TEMPORALI CONSIDERATI.

In tabella 7.12 sono riportati i valori delle forze di contatto totali nei due istanti di tempo considerati. Come accade per le forze puntuali, anche quelle totali aumentano all’aumentare dell’angolarità della particella e assumono valori più elevati per tensioni di confinamento maggiori. Per ottenere un’indicazione di tale incremento si valuta il tasso di crescita, calcolato come la differenza tra il valore della forza di picco e quello corrispondente all’istante temporale I, normalizzato rispetto a quest’ultimo.

TABELLA 7.12: FORZE DI CONTATTO NORMALI TOTALI [N] E RELATIVO TASSO DI INCREMENTO.

Istante temporale	Tensione di confinamento [kPa]	Tipologia miscela			
		1S	2C	3C	4C
I	400	143742	163429	169586	172717
	500	144292	165695	171349	173419
II	400	161019	186152	198522	214302
	500	162747	190389	205632	216639
Tasso di crescita	400	0,12	0,14	0,17	0,24
	500	0,13	0,15	0,20	0,25

Il tasso di crescita delle forze di contatto, a parità di miscela, fornisce un’importante indicazione relativa alla capacità del materiale di sostenere i carichi applicati. Un tasso di crescita basso, infatti, indica la presenza di legami più fragili tra le

particelle con una conseguente scarsa resistenza della miscela, che potrà risultare prematuramente soggetta a fratture.

Tra i campioni testati quello che presenta un tasso di incremento maggiore è quello costituito dai clump a quattro elementi, mentre quello che registra il tasso di crescita minore è quello costituito esclusivamente da sfere (figura 7.51).

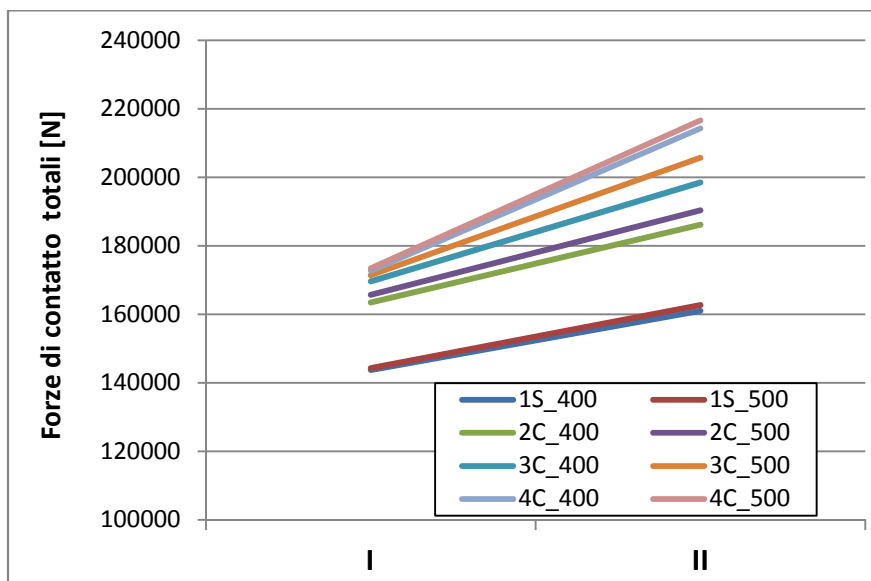


FIGURA 7.51: TASSO DI INCREMENTO RELATIVO ALLE FORZE DI CONTATTO TOTALI CALCOLATE NEGLI ISTANTI I E II.

Da ultimo, si è svolta, mediante un apposito programma di trattamento statistico dei dati (SPSS), un'analisi delle forze di contatto normali e tangenziali al fine di ottenere maggiori informazioni riguardo la distribuzione delle stesse all'interno delle differenti miscele.

In tabella 7.13 e 7.14, oltre al numero di contatti attivi e ai valori minimi e massimi delle forze normali e tangenziali, sono riportati i principali indici statistici definiti come segue:

- *Indice di posizione* (fornisce un'indicazione riguardo al valore attorno cui i dati del campione sono posizionati):
  - *Media*: baricentro della distribuzione campionaria (valore che corrisponde alla somma di tutti i valori, diviso il numero dei valori stessi).

- *Indici di dispersione* (forniscono un'indicazione riguardo a quanto i valori del campione si discostano dalla media):
  - *Varianza*: rappresenta la media degli scostamenti quadratici dal valor medio dei valori del campione.
  - *Deviazione standard*: è calcolata come la radice quadrata della varianza.
  
- *Indici di forma* (forniscono un'indicazione riguardo la forma della distribuzione del campione):
  - *Asimmetria*: è indice della simmetria della distribuzione di probabilità del campione; a seconda che assuma valore positivo o negativo la distribuzione risulterà avere rispettivamente coda verso destra o verso sinistra. Se il valore è nullo allora la distribuzione risulta perfettamente simmetrica (distribuzione Gaussiana).
  - *Curtosi*: misura quanto una distribuzione è piatta oppure appuntita. Le distribuzioni piatte con code ampie sono dette "platicurtiche", quelle appuntite con code piccole sono chiamate "leptocurtiche". Nel caso in cui l'indice di curtosi non sia centrato in 0, per valori di minori di 3 la distribuzione risulterà poco appuntita (platicurtica), mentre per valori maggiori di 3 la distribuzione risulterà molto appuntita (leptocurtica). La distribuzione Gaussiana è caratterizzata da un valore di curtosi pari a 3.

TABELLA 7.13:INDICI STATISTICI DELLE FORZE DI CONTATTO NORMALI.

Tipologia miscela	1S		2C		3C		4C	
	400	500	400	500	400	500	400	500
<b>Tensione di confinamento [kPa]</b>								
<b>Contatti attivi</b>	15591	16401	19208	19892	21452	23002	24754	27000
<b>Media [N]</b>	8,76	8,43	8,23	8,12	7,85	7,61	7,41	6,84
<b>Deviazione standard</b>	26	25	87	102	61	58	52	67
<b>Varianza</b>	694	641	7537	10422	3666	3339	2737	4490
<b>Asimmetria</b>	7	11	11	14	19	18	20	25
<b>Curtosi</b>	65	210	132	203	519	530	669	824
<b>Minimo [N]</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Massimo [N]</b>	501	713	1158	1859	2210	2410	2924	3124

TABELLA 7.14:INDICI STATISTICI DELLE FORZE DI CONTATTO TANGENZIALI.

Tipologia miscela	1S		2C		3C		4C	
	400	500	400	500	400	500	400	500
<b>Tensione di confinamento [kPa]</b>								
<b>Contatti attivi</b>	15591	16401	19208	19892	21452	23002	24754	27000
<b>Media [N]</b>	1,49	1,46	1,41	1,35	1,40	1,33	1,24	1,18
<b>Deviazione standard</b>	4	4	17	18	15	21	24	21
<b>Varianza</b>	19	16	302	310	230	450	572	448
<b>Asimmetria</b>	6	8	13	17	25	20	29	30
<b>Curtosi</b>	45	96	190	349	713	440	982	1095
<b>Minimo [N]</b>	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Massimo [N]</b>	65	100	343	483	570	735	1062	1094

A parità dei tensione di confinamento la media assume valori decrescenti all’aumentare della complessità della forma della particella; lo stesso accade, per la stessa tipologia di elemento, passando dalla tensione di confinamento minore (400 kPa) a quella maggiore (500 kPa).

Distribuzioni caratterizzate da medie campionarie basse rispetto ai valori massimi registrati implicano la presenza di un numero elevato di forze di contatto di piccola entità e picchi limitati. Le considerazioni fatte riguardo al valor medio delle

forze di contatto supportano quanto detto finora relativamente all’influenza della forma dell’aggregato sulla resistenza della miscela. Infatti, valori medi inferiori testimoniano una migliore distribuzione delle forze di contatto ed un grado di addensamento più elevato. In particolare, all’aumentare dell’angolarità della particella, si ottiene una riduzione della “micro-rigidezza” della miscela: il carico massimo applicato durante il test triassiale aumenta e, contemporaneamente, il valor medio delle forze di contatto normali decresce, per ogni tensione di confinamento (figure 7.52 e 7.53).

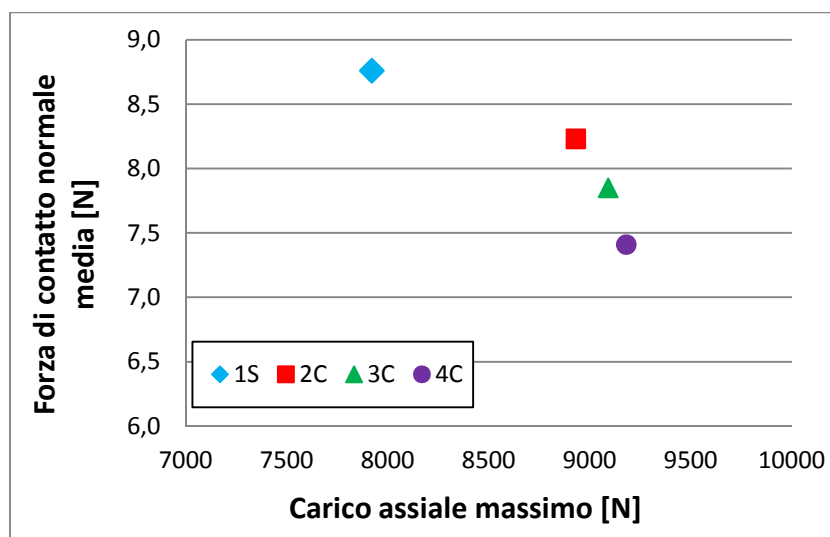


FIGURA 7.52: RELAZIONE TRA FORZA DI CONTATTO MEDIA NORMALE E CARICO ASSIALE MASSIMO PER  $\sigma_c=400\text{kPa}$ .

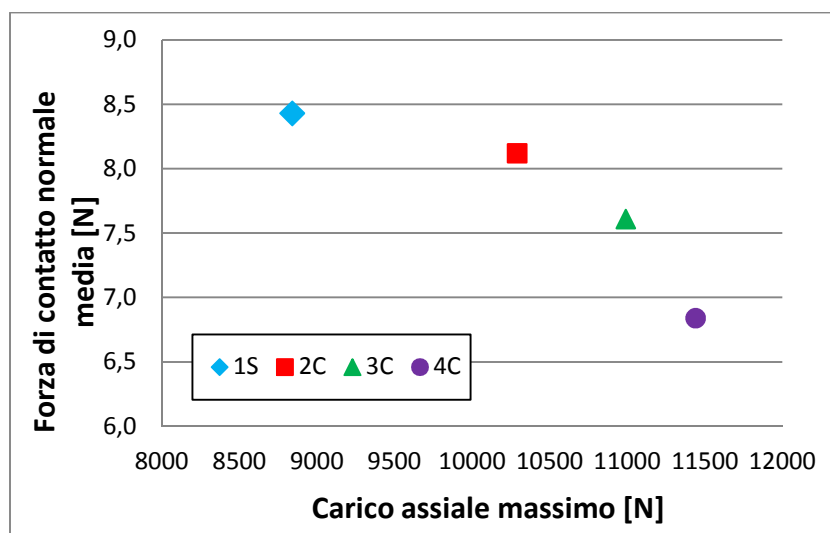


FIGURA 7.53: RELAZIONE TRA FORZA DI CONTATTO MEDIA NORMALE E CARICO ASSIALE MASSIMO PER  $\sigma_c=500\text{kPa}$ .

Per tutti i test modellati vengono realizzati, mediante SPSS, gli istogrammi relativi alla funzione densità di probabilità delle forze di contatto normali in corrispondenza dell'istante temporale II; ogni valore campionario viene normalizzato rispetto alla forza di contatto normale media (figure 7.54 e 7.55). Tutti gli istogrammi mostrano alte frequenze per bassi valori di forze di contatto ed un numero limitato di forze elevate, caratterizzate inoltre, da frequenze estremamente basse. La netta prevalenza di forze piccola entità è indice di un'omogeneità tensionale all'interno del campione, che presenta forze ben distribuite e contatti omogenei.

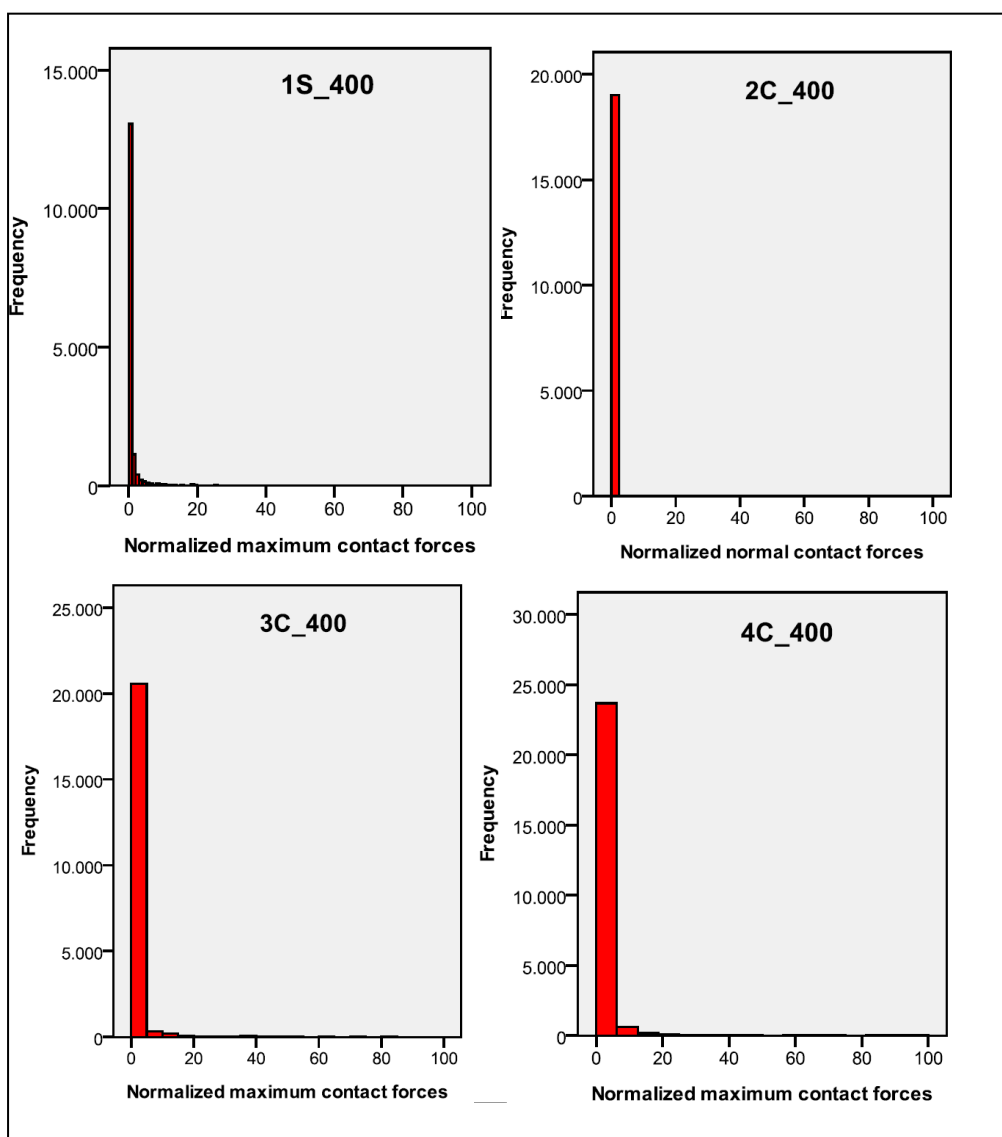


FIGURA 7.54: DISTRIBUZIONE STATISTICA DELLE FORZE DI CONTATTO NORMALIZZATE, ISTOGRAMMI PER  $\sigma_c=400\text{kPa}$ .

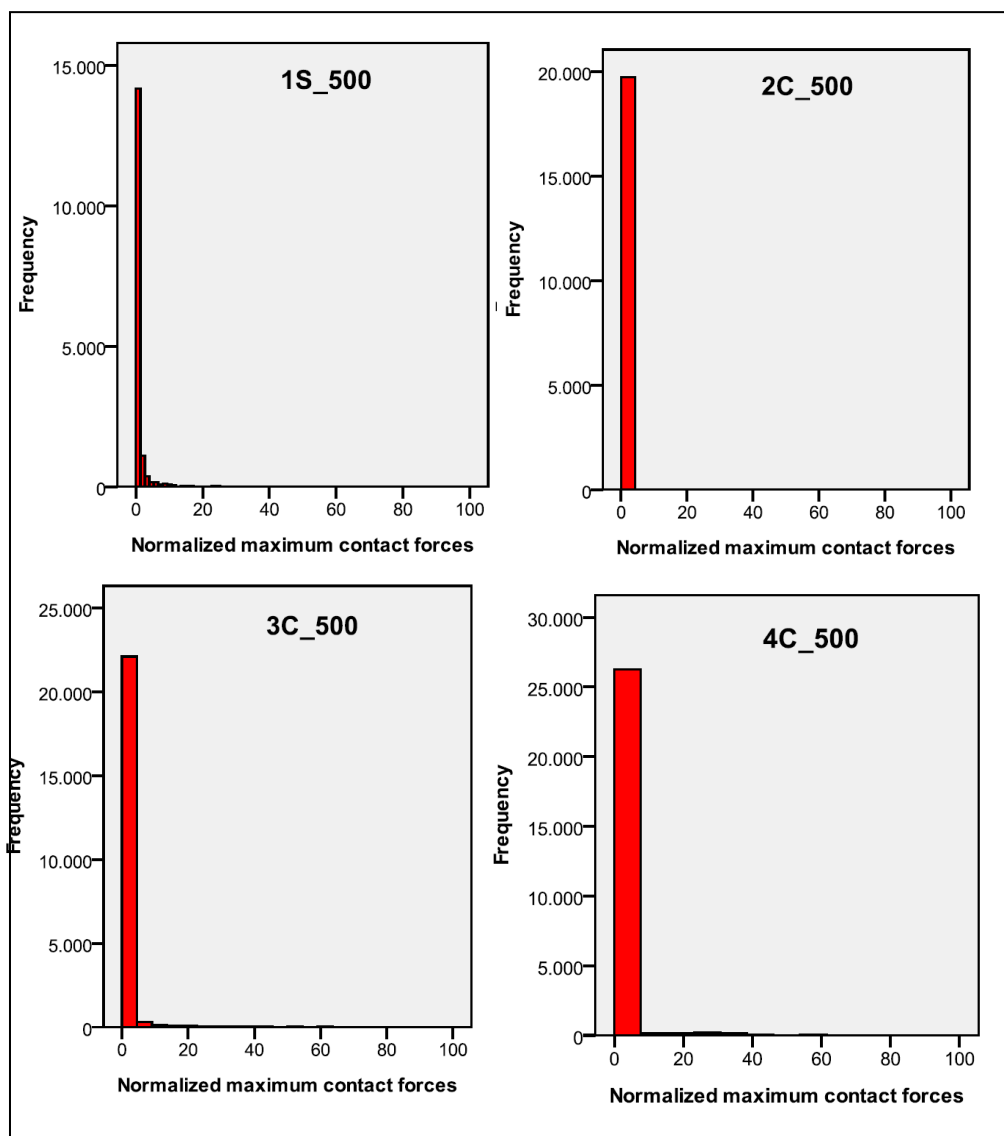


FIGURA 7.55: DISTRIBUZIONE STATISTICA DELLE FORZE DI CONTATTO NORMALIZZATE, ISTOGRAMMI PER  $\sigma_c=500\text{kPa}$ .

A questa conclusione si può arrivare anche osservando i valori del 95esimo percentile riportati in tabella 7.15.

Il 95esimo percentile rappresenta quel valore campionario che ha il 95% di possibilità di non essere superato; più è basso tale valore più le forze di contatto all’interno della miscela risultano distribuite omogeneamente, con indiscussi benefici sulla resistenza della miscela.

Per tutti i test effettuati il 95esimo percentile cala passando dalla miscela costituita da sole sfere a quella costituita da clump a quattro elementi (tabella 7.15).

Ciò afferma ancora una volta l’importanza delle caratteristiche geometriche degli aggregati e l’influenza che parametri quali la spigolosità e l’angolarità delle particelle

hanno sulle caratteristiche di addensamento e, conseguentemente, di resistenza della miscela.

TABELLA 7.15: 95ESIMO PERCENTILE PER I TEST MODELLATI.

Tensione di confinamento [kPa]	Tipologia miscela			
	1S	2C	3C	4C
400	4,09	3,25	3,15	2,14
500	4,23	3,70	2,88	2,07



Nel presente paragrafo si intendono fornire alcune osservazioni e considerazioni conclusive scaturite dalla valutazione dei risultati ottenuti nello studio condotto, le quali non vogliono essere esaustive del problema esaminato, quanto, piuttosto, lasciare a chi legge opportuni spunti di riflessione su cui avviare nuove ricerche in materia.

Per studiare il comportamento di un conglomerato bituminoso mediante metodi numerici di tipo discreto si è scelto di considerare separatamente la miscela di inerti, valutando il ruolo della forma e delle dimensioni dell'aggregato, ed il contributo del legante, analizzandone l'interazione ed il contatto con gli inerti. Il primo aspetto è stato affrontato analiticamente, mediante un approfondito e completo programma sperimentale che ha previsto il confronto tra risultati numerici e di laboratorio.

Invece, l'aspetto relativo alla schematizzazione del comportamento viscoelastico del bitume mediante un opportuno modello di contatto è stato valutato esclusivamente da un punto di vista teorico, attraverso una profonda ed accurata ricerca bibliografica.

Tale ricerca ha portato ad affermare che il modello viscoelastico di Burger permette di ottenere risultati maggiormente attendibili rispetto a quelli relativi alla modellazione elastica ed è in grado di riprodurre in maniera più affidabile il reale comportamento tenso-deformativo del conglomerato bituminoso.

Per quanto riguarda la parte sperimentale, al fine di valutare l'influenza della forma dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo della miscela, è stato utilizzato il software di calcolo PFC<sup>3D</sup> (Particle Flow Code in Three Dimension), basato sul Metodo degli Elementi Distinti Particellari (DEM), che schematizza il sistema come un insieme di elementi sferici che interagiscono tra loro solo in caso di reciproco contatto. Data la natura disomogenea e particellare di questo materiale, il cui comportamento meccanico risulta fortemente condizionato dalla natura dei singoli elementi che lo compongono, il DEM rappresenta una valida metodologia per comprendere i processi microscopici di base che ne determinano la risposta tenso-deformativa macroscopica.

Essendo un metodo relativamente nuovo rispetto ai tradizionali procedimenti numerici basati su schematizzazioni al continuo, è stata necessaria una prima fase di calibrazione, mediante la quale sono stati determinati i parametri microscopici con cui modellare il sistema. A tal fine sono state simulate prove triassiali su campioni costituiti esclusivamente da sfere. I risultati numerici sono stati poi confrontati con test di laboratorio eseguiti, nelle medesime condizioni di prova, su campioni costituiti da sfere d'acciaio.

Alla luce degli incoraggianti risultati ottenuti sono state indagate le potenzialità di questa metodologia nell'analisi dell'influenza dell'angolarità dell'aggregato sul comportamento tenso-deformativo della miscela di inerti utilizzata per il confezionamento del conglomerato bituminoso. Sono stati condotti test triassiali su tre differenti tipologie di miscele e a due diverse tensioni di confinamento iniziali.

Il confronto tra i risultati numerici e quelli ottenuti in laboratorio ha portato alle seguenti considerazioni:

- tutti i campioni modellati manifestano un andamento della tensione deviatorica in funzione della deformazione assiale quantitativamente e qualitativamente paragonabile ai risultati sperimentali. A parità di tipologia di miscela la resistenza aumenta al crescere della tensione di confinamento;
- le miscele costituite da aggregati caratterizzati da una maggiore angolarità manifestano resistenze del sistema più elevate in virtù del maggiore ingranamento reciproco tra le particelle;
- per quanto riguarda l'analisi dei risultati microscopici si è osservato un andamento decrescente dell'indice dei vuoti e della porosità all'aumentare della complessità della forma dell'aggregato. L'angolo di attrito interno, invece, aumenta passando dalla miscela di sole sfere a quella caratterizzata dalla maggior angolarità dell'aggregato. Questi risultati confermano quanto osservato per il comportamento macroscopico del materiale. Bassi valori di indice dei vuoti e porosità e valori elevati dell'angolo d'attrito testimoniano, infatti, un buon grado di addensamento della miscela e, conseguentemente, migliori caratteristiche di resistenza;
- il software di calcolo utilizzato permette di valutare a livello microscopico il numero dei contatti attivi e l'entità e la distribuzione delle forze di contatto

normali e tangenziali che si sviluppano tra le particelle. All'aumentare dell'angolarità della particella il numero di contatti e il modulo delle forze che si esplicano in tali punti aumentano, a testimoniare ancora una volta un incremento del grado di addensamento del materiale.

Alla luce dei risultati ottenuti si confermano quindi le potenzialità del DEM che consente una rappresentazione del modello molto fedele alla realtà fisica, in grado di riprodurre correttamente sia le modalità di prova, sia l'effettivo comportamento del materiale reale. Il metodo degli elementi discreti, inoltre, fornendo i valori di picco delle forze e degli spostamenti a cui è soggetto il sistema, consente una rappresentazione del modello molto fedele alla realtà fisica e si propone quindi come una valida evoluzione delle metodologie tradizionali basate, invece, sui valori medi delle grandezze indagate. A differenza di queste ultime la modellazione DEM particellare permette di analizzare l'interazione microscopica tra aggregato e bitume e di valutare come questa influisce sulle prestazioni di una miscela in conglomerato bituminoso. Una volta calibrato il modello DEM, infatti, diventa possibile variare con facilità le specifiche costitutive dei materiali e l'entità dei carichi applicati, monitorando la risposta complessiva della miscela. Si intravede, quindi, un potenziale sviluppo della modellazione numerica in direzione di una sorta di "laboratorio virtuale" che in futuro potrebbe rappresentare una valida alternativa alle prove di laboratorio, riducendo o addirittura eliminando i costi per lo svolgimento dei test di caratterizzazione sperimentale.

- [1] Abbas A. (2004), *Simulation of the micromechanical behaviour of asphalt mixtures using the discrete element method*, Doctor of philosophy in civil engineering, Washington State University, Department of Civil and Environmental Engineering;
- [2] Abbas A. R., Papagiannakis A. T., Masad E. A. (2004), *Linear and nonlinear viscoelastic analysis of the microstructure of asphalt concretes*, Journal of materials in civil engineering, vol. 16;
- [3] Abbas A., Masad E., Papagiannakis T., Shenoy A. (2005), *Modelling asphalt mastic stiffness using discrete element analysis and micromechanics-based models*, The International Journal of Pavement Engineering, vol. 6, n. 2, pp. 137–146;
- [4] Abbas A.R., Papagiannakis A., Masad E. (2006), *Micromechanical simulation of asphaltic materials using the discrete element method*, Asphalt concrete;
- [5] Abbas A., Masad E., Papagiannakis T., Harman T. (2007), *Micromechanical modeling of the viscoelastic behavior of asphalt mixtures using the discrete-element method*, International Journal of Geomechanics, vol. 7, n. 2, pp. 131–139;
- [6] Abedi S., Mirghasemi A.A., (2010), *Particle shape consideration in numerical simulation of assemblies of irregularly shaped particles*;
- [7] Adhikari S., You Z. (2007), *Distinct element modeling of the asphalt mixtures: from two-dimensional to three-dimensional models*, Journal of the Transportation Research Board National Research Council, Washington, D.C.;
- [8] Adhikari S., You Z. (2009), *Modeling of hollow cylindrical asphalt mixture specimens*, Pavements and Materials, pp. 100-107;
- [9] Adhikari S., You Z. (2010), *3D discrete element models of the hollow cylindrical asphalt concrete specimens subject to the internal pressure*, International Journal of Pavement Engineering, vol. 11, n. 5, October 2010, 429–439;

- [10] Aho, B.D., Vavrik, W.R. and Carpenter, S.H. (2001), *Effect of flat and elongated coarse aggregate on field compaction of hot-mix asphalt*, Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, n. 1761, p. 26–31;
- [11] Al-Khateeb G., W.G. Buttlar, *Hollow cylinder tensile tester for asphaltic paving mixtures*, Mid-Continent Transportation Symposium 2000, Proceedings;
- [12] Asmar B.N., Langston P.A., Matchett A. J., *A generalised mixing index in distinct element method simulation of vibrated particulate beds*, Granular Matter, vol. 4, n. 3, pp. 129-138;
- [13] Bagherzadeh-Khalkhali A., Mirghasemi A. A., Mohammadi S. (2008), *Micromechanics of breakage in sharp-edge particles using combined DEM and FEM*;
- [14] Bagherzadeh-Khalkhali A., Mirghasemi A.A., Mohammadi S. (2010), *Numerical simulation of particle breakage of angular particles using combined DEM and FEM*;
- [15] Bailey C., Cross M. (1995), *A finite volume procedure to solve elastic solid mechanics problems in three dimensions on an unstructured mesh*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 38, n. 10, pp. 1757–1776;
- [16] Bianchi M. (2009), *Criteri di calcolo delle pavimentazioni stradali flessibili: i metodi particellari*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Bologna;
- [17] Blandford G. E., Ingraffea A. R., Liggett J. A. (1981), *Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method* Int. Engng, vol. 17, pp. 387-404;
- [18] Bragaglia M. (2007), *Studio del Comportamento Visco-Elastico del Conglomerato Bituminoso con il Metodo degli Elementi Distinti Particellari*, Università degli Studi di Bologna, Facoltà di Ingegneria, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile;

- [19] Braz D., da Motta L.M.G., Lopes R. T. (1998), *Computed tomography in the fatigue test analysis of an asphaltic mixture*, Applied Radiation and Isotopes;
- [20] Braz D., Lopes R. T., da Motta L.M.G. (2003), *Research on fatigue cracking growth parameters in asphaltic mixtures using computed tomography*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research;
- [21] Brauer J. (1988), *Finite Element Analysis*, Marcel Dekker, New York;
- [22] Buttlar W. G., Roque R. (1996), *Evaluation of empirical and theoretical models to determine asphalt mixture stiffness at low temperatures*, Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists, pp. 99-141;
- [23] Buttlar W. G., Roque R. (1997), *Micromechanical modeling to predict the stiffness of asphalt concrete*, Fifth Pan American Congress on Applied Mechanics, Applied Mechanics in the Americas, San Juan, Puerto Rico, L. A. Godoy, M. Rysz, L. E. Suarez, eds., vol. 4, pp. 175-178;
- [24] Buttlar W. G., Bozkurt D., Al-Khateeb G. G., Waldhoff A. S. (1999), *Understanding asphalt mastic behavior through micromechanics*, Journal of The Transportation Research Board, n. 1681, pp. 157-169;
- [25] Buttlar W. G., You Z. (2001), *Discrete element modelling of asphalt concrete: a microfabric approach*, Transportation Research Record, vol. 1757, n. 1, pg. 111-118;
- [26] Calvetti F. (2003), *Limitations and perspectives of the micromechanical modelling of granular materials*, Mathematical and Computer Modelling, vol. 37, pg. 485-495;
- [27] Cavallari M. (2010), *Il calcolo delle sovrastrutture stradali flessibili: l'approccio particellare*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Bologna
- [28] Cesari F. (1985), *Comportamento non lineare delle strutture col metodo degli elementi finiti*, ed. Pitagora;
- [29] Chang G. K., Meegoda N. J. (1993), *Simulation of the behaviour of asphalt concrete using discrete element method*, 2nd International Conference on Discrete Element Methods, M.I.T.;

- 
- [30] Chang G. K., Meegoda N. J. (1997), *Micromechanical simulation of hot mix asphalt*, *journal of engineering mechanics*, vol. 123, n. 5, pp. 495-503;
- [31] Chen J., Pan T., Huang X. (2010), *Numerical investigation into the stiffness anisotropy of asphalt concrete from a microstructural perspective*, *Construction and Building Materials*, vol. 25 pp. 3059–3065;
- [32] Chen J. (2011), *Discrete element method (DEM) analysis for hot mix asphalt (HMA) mixture compaction*, PhD Thesis;
- [33] Cheng Y. F., Guo S. J., Lai H. Y. (2000), *Dynamic simulation of random packing of spherical particles*, *Powder Technology*, vol. 107, pg. 123-130;
- [34] Cheng Y. M., Zhang Y. H. (2002), *Coupling of FEM and DDA Methods*, *The International Journal of Geomechanics*, vol. 2, pp. 503-517;
- [35] Cheng Y. P., Nakata Y., Bolton M. D. (2003), *Discrete element simulation of crushable soil*, *Geotechnique*, vol. 53, pp. 633-641;
- [36] Cheng Y. P., Bolton M. D., Nakata Y. (2004), *Crushing and plastic deformation of soils simulated using DEM*, *Geotechnique* 54, n. 2, pp. 131–141;
- [37] Cheung C.Y., Cocks A.C.F. & Cebon D. (1999), *Isolated contact model of an idealized asphalt mix*, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, pp. 767-792;
- [38] Cheung, L.W. and Dawson, A.R. (2002), *Effects of particle and mix characteristics on performance of some granular materials*, *Transportation Research Record*, n. 1787, pp. 90-98;
- [39] Cheung G., O’Sullivan C. (2008), *Effective simulation of flexible lateral boundaries in two- and three-dimensional DEM simulations*, *Particuology*, vol. 6, pp. 483–500;
- [40] Cho N., Martin C.D., Segro D.C. (2007), *A clumped particle model for rock*, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, vol. 44, pp. 997-1010;
- [41] Choi S. K. (1992), *Application of the Distinct Element Method for Rock Mechanics Problems*, *Engineering Computations*, vol. 9, pp. 225-233;

- [42] Collop C., Scarpas A., Kasbergen C., de Bondt A. (2003), *Development and finite element implementation of a stress dependent elasto-visco-plastic constitutive model with damage for asphalt*, TRB 82nd Annual Meeting, Washington DC, Jan 12-16;
- [43] Collop A. C., McDowell G. R., Lee Y. (2004), *Use of the distinct element method to model the deformation behavior of an idealized asphalt mixture*, The International Journal of Pavement Engineering, vol. 5, n. 1, pp. 1-7;
- [44] Collop A.C., McDowell G.R., Lee Y.W. (2006), *Modelling dilation in an idealised asphalt mixture using discrete element modelling*, Granular Matter, vol. 8, pp. 175-184;
- [45] Colombo P. (1965), *Resistenza al taglio di una sabbia fine uniforme*;
- [46] Cook B., Jensen R. (2002), *Discrete element methods – numerical modelling of discontinua*, Proceedings of the 3rd International Conference, Santa Fe, New Mexico, September 23-25, Geotechnical Special Publication n. 117, ASCE;
- [47] Cui L. & O’Sullivan C. (2006), *Exploring the macro- and micro-scale response of an idealised granular material in the direct shear apparatus*, Geotechnique, vol. 56, n. 7, pp. 455–468;
- [48] Cui L., O’Sullivan C., O’Neill S. (2007), *An analysis of the triaxial apparatus using a mixed boundary three-dimensional discrete element model*, Geotechnique, vol. 57, n. 10, pp. 831-844;
- [49] Cundall P. A. (1971), *A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock system*, Proc. Symp. Int. Soc. Rock Mech. Nancy;
- [50] Cundall P. A., Strack O. D. L. (1979), *The development of constitutive laws for soil using the distinct element method*, 3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Aachen;
- [51] Cundall P. A., Strack O. D. L. (1979), *A discrete element model for granular assemblies*, Geotechnique, vol. 29, n. 1, pp. 47-65;
- [52] Cundall P. A. (1988), *Formulation of a Three-Dimensional Distinct Element Model- Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a*



- System Composed of many Polyhedral Blocks*, International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 25, pp. 107-116;
- [53] Cundall P. A. (1989), *Numerical experiments on localization of frictional materials*, Ingenieur Archiv, n. 59, pg. 148-159;
- [54] Cundall P. A., Hart R. (1992), *Numerical modelling of discontinua – journal of engineering computations*, n. 9, pp. 101-113;
- [55] Dai Q., Sadd M. H. (2004), *Parametric model study of microstructure effects on damage behavior of asphalt samples*, International Journal of Pavement Engineering, pp. 19-30;
- [56] Dai Q., Sadd M. H., Parameswaran V. & Shukla A. (2005), *Prediction of damage behaviors in asphalt materials using a micromechanical finite-element model and image analysis*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 131, n. 7, pp. 668-677;
- [57] Dai Q. & You Z. (2007), *Prediction of creep stiffness of asphalt mixture with micromechanical finite element and discrete element models*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 133, n. 2, pp.163-173;
- [58] Dalmazzo D., *Caratterizzazione reologica del danneggiamento per fatica e dell'autoriparazione dei leganti bituminosi*, Tesi di Dottorato in Ingegneria Civile, Università delle Marche, 2008;
- [59] Degiovanni E. (2009), *Analisi sperimentale dei materiali della sovrastruttura stradale attraverso la modellazione agli elementi distinti particellari*, Università degli Studi di Parma, Facoltà di Ingegneria, Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile;
- [60] Deshpande, V. S. (1997), *Steady-state deformation behaviour of bituminous mixes*, PhD Thesis, University of Cambridge;
- [61] Deshpande V. S., Cebon D. (2004), *Micromechanical modeling of steady-state deformation in asphalt*, Journal of materials in civil engineering, vol. 16;
- [62] Dessouky S., Masad E. & Little D. (2005), *Mechanistic model to predict the impact of the aggregate matrix on the permanent deformation of asphalt mixtures*, Technical Report;

- [63] Dessouky S., (2005) *Multiscale approach for modeling hot mix asphalt*, PhD Thesis;
- [64] Di Maio F. P. & Di Renzo A. (2004), *Analytical solution for the problem of frictional-elastic collisions of spherical particles using the linear model*, Chemical Engineering Science, vol. 59, pp. 3461-3475;
- [65] Di Renzo A. & Di Maio F. P. (2004), *Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in dem-based granular flow codes*, Chemical Engineering Science, vol. 59, pp. 525-541;
- [66] Dondi G., Bragaglia M., Vignali V. (2005), *Bituminous mixtures simulation with distinct particle elements method*, Proceedings 3rd International SIV Congress, Bari;
- [67] Dondi G., Vignali V. (2006), *La spinta delle terre: potenzialità del metodo degli elementi distinti particellari*, XVI Convegno Nazionale S.I.I.V. - Campus di Arcavacata di Rende (CS) – 20-22 Settembre;
- [68] Dondi G., Bragaglia M. (2006), *Modellazione ad elementi distinti particellari della prova ITSM*, XVI Convegno Nazionale SIV, 20-22 Settembre;
- [69] Dondi G., Vignali V., Bragaglia M. (2006), *Modellazione mediante elementi distinti particellari delle prove sui materiali granulari*, XVI Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Bologna, 26-28 Giugno;
- [70] Dondi G., Bragaglia M., Vignali V. (2007), *Flexible pavement simulation with distinct particle element method*, 4th International SIVV Congress, Palermo, 12-14 September;
- [71] Dondi G., Bragaglia M., Vignali V. (2008), *Evoluzione dei criteri di calcolo delle pavimentazioni flessibili: i modelli particellari*, XVII Convegno Nazionale SIV;
- [72] Dondi G., Bragaglia M., Vignali V (2010), *Micromechanical modeling of aggregate-aggregate interactions with distinct particle element method for virtual laboratory simulation*, Proceedings of the 11th International Conference on Asphalt Pavement, , Nagoya, Giappone., NAGOYA, pp. 167 – 176;

- [73] Dondi G., Simone A., Vignali V., Manganelli G. (2011), *L'influenza della forma dell'aggregato sulle prestazioni di una miscela in conglomerato bituminoso: i modelli particellari*, Le Strade n. 12, pp. 90-94;
- [74] Dondi G., Simone A., Vignali V., Manganelli G. (2012), *Discrete particle element analysis of aggregate interaction in granular mixes for asphalt: combined DEM and experimental study*, 7TH RILEM International Conference on Cracking in Pavements, Delft Olanda, Scarpas et al. (Eds), pp 389 – 398, RILEM 2012, ISSN 2211-0844 – ISBN 978-94-007-4565-0, Springer;
- [75] Donohue S., O'Sullivan C. & Long M. (2009), *Particle breakage during cyclic triaxial loading of a carbonate sand*, Geotechnique, vol. 59, No. 5, pp.477–482;
- [76] Dunhill S. T., Airey G. D., Collop A. C., Scarpas A. (2006), *Advanced constitutive modelling of bituminous materials*, International Journal of Pavement Engineering, , Vol. 7, N. 3, pp. 153-165;
- [77] Elata D., Berryman J. D. (1996), *Contact Force-Displacement Laws and the Mechanical Behavior of Random Packs of Identical Spheres*, Mechanics of Materials, vol. 24, pp. 229-240;
- [78] Emeriault F., Changh C. S. (1997), *Interparticle forces and displacements in granular materials*, Computers and Geotechnics, Vol. 20, No. 3/4, pp. 223-244;
- [79] Fallah N. A., Bailey C., Cross M., Taylor G. A. (2000), *Comparison of finite element and finite volume methods application in geometrically nonlinear stress analysis*, Applied Mathematical Modelling, vol. 24,n. 7, June 2000, pp. 439–455;
- [80] Ferraresi A. (2011) *Tecniche numeriche avanzate per la modellazione dell'aggregato litico dei conglomerati bituminosi: l'approccio particellare*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Bologna;
- [81] Fortin J., Millet O., Saxcè G. (2005), *Numerical simulation of granular materials by an improved discrete element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 62, pp. 639-663;

- [82] Ghaboussi J., Wilson E. L., Isenberg J. (1973), *Finite element for rock joints and interfaces*, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, pp. 833–848;
- [83] Goodman R. E., Taylor R. L., Brekke T. L. (1968), *A model for the mechanics of jointed rock*, Journal of Soil Mechanics & Foundations Div, vol. 94, n. SM 3, proc. paper 5937, pp. 637-659;
- [84] Guerrero S., Vallejo L. (2005), *Discrete element method evaluation of granular crushing under direct shear test conditions*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, vol. 131, pp. 1295-1300;
- [85] Hart R. Cundall P. A., Lemos J. (1988), *Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks*, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics, vol. 25, n. 3, pp. 117–125;
- [86] Hashin Z., Shtrikman S. (1963), *A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials*, J. Mech. Phys. Solids 11, 137;
- [87] Hashin Z. (1965), *Viscoelastic behavior of heterogeneous media*, J. Appl. Mech. 32(9), 630-636;
- [88] Hiroshi T., Kazuyoshi I. (2001), *Numerical simulation of triaxial test using two and three dimensional DEM*, Powders and grains;
- [89] Issa J. A., Nelson R. B. (1992), *Numerical analysis of micromechanical behaviour of granular materials*, Engng. Comput., 9, 211-223;
- [90] Itasca (2002), *PFC2D (Particle Flow Code in 2 Dimensions) Manual Version 3.0*, Itasca Consulting Group;
- [91] Itasca (2003), *PFC3D (Particle Flow Code in 3 Dimensions) Manual Version 3.0*, Itasca Consulting Group;
- [92] Itasca (2008), *PFC3D (Particle Flow Code in 3 Dimensions) Manual Version 4.0*, Itasca Consulting Group;
- [93] Jensen R. P., Bosscher P. J., Plesha M. E., Edil T. B. (1999), *DEM simulation of granular media-structure interface: effects of surface*

- roughness and particle shape*, International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, vol. 23, pp. 531-547;
- [94] Jensen R. P., Edil T. B., Bosscher P. J., Plesha M. E., Kahla N. B. (2001), *Effect of particle shape on interface behavior of dem-simulated granular materials*, The International Journal of Geomechanics, vol. 1, n. 1;
- [95] Jiang M. J., Konrad J. M. & Leroueil S. (2003), *An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies*, Computers and Geotechnics, vol. 30, pp. 579-597;
- [96] Jing L. (1998), *Formulation of Discontinuous Deformation Analysis (DDA), An implicit discrete element model for block systems*, Engineering Geology, vol. 49, pp. 371-381;
- [97] Jing L. (2003), *A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering*; International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 40, n.3, pp. 283–353;
- [98] Katzenbach R., Schmitt A. (2004), *Micromechanical modelling of granular materials under triaxial and odometer loading*, Proceeding of the 2nd International PFC Symposium, 28-20 October, Kyoto, Numerical Modelling in Micromechanics via Particle Methods;
- [99] Ke T. , Bray J. (1995), *Modeling of particulate media using discontinuous deformation analysis*. J. Eng. Mech. vol. 121, n. 11, pp. 1234–1243;
- [100] Khanzada S. (2000), *Permanent deformation in bituminous mixtures*, PhD Thesis, University of Nottingham (2000);
- [101] Kim Y., Little D. N. (2004), *Linear viscoelastic analysis of asphalt mastics*, Journal of materials in civil engineering, vol. 16;
- [102] Kim H., Buttlar W,G. (2005), *Micromechanical fracture modeling of asphalt mixture using the discrete element method*, Advances in pavement engineering;
- [103] Kim H., Wagoner M. P., Buttlar W. G. (2006), *Fracture behavior of asphalt mixtures using the disk-shaped compact tension test and discrete element method*, 10th International Conference on Asphalt Pavements, Quebec City, Canada;

- [104] Kim H., Wagoner M. P., Buttlar W. G. (2006), *Toward realistic heterogeneous fracture modeling of asphalt mixture using disk-shaped compact tension test based on discontinuum approach*, 85th Annual Meeting of the Transportation Research Board, Washington, D. C.;
- [105] Kim H., Wagoner M. P., Buttlar W. G. (2008), *Simulation of fracture behavior in asphalt concrete using a heterogeneous cohesive zone discrete element model*, Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 20, n. 8, pp. 552-563;
- [106] H. Kim H., Wagoner M.P., Buttlar G.(2008), *Numerical fracture analysis on the specimen size dependency of asphalt concrete using a cohesive softening model*, Construction and Building Materials, vol.23 pp. 2112–2120;
- [107] Kim H., Buttlar W. G. (2009), *Discrete fracture modeling of asphalt concrete, international journal of solids and structures*, n. 46, pp. 2593-2604;
- [108] Kim H., Wagoner M.P., Buttlar W.G. (2009), *Rate-dependent fracture modelling of asphalt concrete using the discrete element method*, Technical Note;
- [109] Krishnan J M. & Rajagopal KR, *Review of the uses and modeling of bitumen from ancient to modern times*, Appl. Mech. Rev. 56(2), pp. 149-214 ;
- [110] Kruyt N.P. (1993), *Toward micro mechanical constitutive relations for granular material based on two dimensional discrete element simulation*, Modern Approaches to Plasticity;
- [111] Lanciotti M (2010), *Metodi numerici avanzati nello studio delle sovrastrutture stradali flessibili*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Bologna;
- [112] Lee, Y.W. (2006), *Discrete element modelling of idealised asphalt mixture*, PhD Thesis, The University of Nottingham;
- [113] Lim W. L. & McDowell G. R. (2005), *Discrete element modelling of railway ballast*, Granular Matter, vol. 7, pp. 19-29;

- [114] Liu Y. & You Z. (2008), *Determining Burger's model parameters of asphalt materials using creep-recovery testing data, pavements and materials 2008: modeling, testing, and performance*, Proceedings of the Symposium on Pavement Mechanics and Materials at the Inaugural International Conference of the Engineering Mechanics Institute;
- [115] Liu Y., Dai Q. & You Z. (2009), *Viscoelastic model for discrete element simulation of asphalt mixtures*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 135, n. 4;
- [116] Lu M., McDowell G. R. (2007), *The importance of modeling ballast particle shape in the discrete element method*, Granular Matter, vol. 9, pp. 69-80;
- [117] Mahmoud E.M.A. (2009), *Discrete element modeling of influences of aggregate gradation and aggregate properties on fracture in asphalt mixes*, PhD Thesis;
- [118] Mahmoud E., Masad E. & Nazarian S. (2010), *Discrete Element analysis of the influences of aggregate properties and internal structure on fracture in asphalt mixtures*, Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 22, n. 1;
- [119] Masad E., Mohammad L. (2004), *Advances in microstructure characterization, micromechanics and constitutive modelling of hot mix asphalt*, Journal of Materials in Civil Engineering, vol. 16;
- [120] Masad E., Mahmoud E. (2009), *Discrete element analysis of aggregate resistance to fracture in asphalt mixtures*, Efficient Transportation and Pavement Systems, Al-Qadi, Sayed, Alnuaimi & Masad (eds), ISBN 978-0-415-48979-9;
- [121] Masad E., Mahmoud E., Nazarian S. (2009), *Discrete element analysis of aggregate variability, blending, and fracture in asphalt mixtures*, Bearing Capacity of Roads, Railways and Airfields. 8th International Conference (BCR2A'09), Proc. pp. 367-376;
- [122] Micaelo R., (2008) *Estudo da compactação de misturas betuminosas. Ensaio de campo e modelação numérica*, PhD Thesis. Universidade do Porto, Porto, Portugal;

- [123] Micaelo R., Ribeiro J., Azevedo M., Azevedo N. (2009), *Discrete element modelling of field asphalt compaction*, Road Materials and Pavement Design, vol. 12, n. 3;
- [124] Mindlin R. D. & Deresiewicz H. (1953), *Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces*, Journal of Applied Mechanics, vol. 20, pp. 327-344;
- [125] Morikawa H., Sawamota Y., Kobayashi N. (1993), *Local fracture analysis of a reinforced concrete slab by the discrete element method*, Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Discrete Element Methods, MIT Press, Cambridge, Mass;
- [126] Mustoe G. G. W., Griffiths D.V. (1998), *An equivalent continuum model using the discrete element method*, Proc. 12<sup>th</sup> Engineering Mechanics Conference, ASCE, Reston, Va., pp. 989-992;
- [127] Naeini S. E., Spelt J. K., *Two-dimensional discrete element modeling of a spherical steel media in a vibrating bed*, Powder Technology, vol. 195, n. 2, pp. 83–90;
- [128] Ng T. T., Wang C. (2001), *Comparison of a 3-D DEM Simulation with MRI Data*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 25, n. 5, pp. 495-507;
- [129] Ng T. (2004), *Triaxial test simulations with discrete element method and hydrostatic boundaries*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, n. 10, pp. 1188-1194;
- [130] O’Sullivan, Bray J. D., Riemer M. F. (2002), *3-D DEM validation using steel balls with regular packing arrangements*, Third International Conference on Discrete Element Methods, Santa Fe, New Mexico, United States;
- [131] O’Sullivan C. & Bray J. (2003), *Relating the response of idealized analogue particles and real sands*, Proceedings of the 1st international PFC symposium, 6-8 November, Germany, Numerical modelling in micromechanics via particles methods, Balkema Publisher;
- [132] O’Sullivan C., Bray J. & Riemer M. (2004), *examination of the response of regularly packed specimens of spherical particles using physical tests and*



- discrete element simulations*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 130, n. 10, pp. 1140-1150;
- [133] O'Sullivan C., Bray J. & Riemer M. (2004), *Influence of particle shape and surface friction variability on response of rod-shaped particulate media*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 128, pp. 1182-1192;
- [134] O'Sullivan C., Bray J. D., Cui L. (2006), *Experimental validation of particle-based discrete element methods*, Proceedings of GeoCongress 2006: Geotechnical Engineering in the Information Technology Age;
- [135] O'Sullivan C., Cui L. (2009), *Micromechanics of granular material response during load reversals: combined DEM and experimental study*, Powder Technology, n. 193, pp. 289-302;
- [136] Perrone N. & Kao R. (1975), *A General Finite Difference Method for Arbitrary Meshes*, Computers and Structures, vol. 5, pp. 45-58;
- [137] Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P. (1993), *Dual boundary element incremental analysis of crack propagation*, Comp. Struc., vol. 46 n. 2, pp. 237-47;
- [138] Potyondy D. O., Cundall P. A. (2004), *A Bonded-Particle Model for Rock*, International Journal of Rock & Mining Sciences, vol. 41, pp. 1329-1364;
- [139] Robertson D., Bolton M.D. (2001), *DEM Simulations of Crushable Grains and Soils*, 4th International Conference on Micromechanics of Granular Media (Powders & Grains 2001), Sendai, May, pp. 623-626;
- [140] Rothenburg L. et al. (1992), *Micromechanical Modelling of Asphalt Concrete in Connection with Pavement Rutting Problems*, 7th International Conference on Asphalt Pavements, vol. 1, pp. 230-245;
- [141] Rothenburg L., Bathurst R. J. (1992), *Micromechanical Features of Granular Assemblies with Planar Elliptical Particles*, Geotechnique, n. 42, pp. 79-95;
- [142] Sadd M. H., Adhikari G., Cardoso F. (2000), *DEM simulation of wave propagation in granular materials*, Powder Technology, vol. 109, pp. 222-233;

- [143] Sadd M. H., Dai Q. (2005), *A Comparison of Micro-Mechanical Modeling of Asphalt Materials Using Finite Elements and Doublet Mechanics*, *Mechanics of Materials*, n. 37, pp. 641-662;
- [144] Salot C., Villard P. Gotteland P. (2006), *DEM modeling of frictional materials: definition of the relative density and application to granular soil mixtures*;
- [145] Salot C., Gotteland P., Villard P. (2009), *Influence of relative density on granular materials behavior: dem simulations of triaxial tests*, *Granular Matter*;
- [146] Shen S., Yu H. (2010), *Characterize packing of aggregate particles for paving materials: particle size impact*, *Construction and Building Materials*, vol. 25, pp. 1362-1368;
- [147] Shi G., Goodman R.E. (1985), *Discontinuous deformation analysis*, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 9, n.6, pp. 541-556;
- [148] Sinibaldi L. (2009), *Impegno di metodi numerici avanzati nello studio delle pavimentazioni stradali flessibili*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Bologna;
- [149] Thomas P., Bray J. D. (1999), *Capturing Nonspherical Shape of Granular Media with Disk Clusters*, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 25, pp. 169-178;
- [150] Thornton C. (1979), *The Conditions for Failure of a Face-Centred Cubic Array of Uniform Rigid Spheres*, *Geotechnique*, vol. 29, n. 4, pp. 441-459;
- [151] Ting J. M., Corkum B. T., Kauffman C. R., Greco C. (1989), *Discrete numerical model for soil mechanics*, *J. Geotech. Engng. Div., ASCE*, 115, 379-398;
- [152] Tsunekawa H., Iwashita K. (2001), *Numerical Simulation of Triaxial Test Using Two and Three Dimensional DEM*, *Powders and Grains*, Ed. Balkema;
- [153] Ullidtz D. (2003), *Analytical tools for design of flexible pavements*;

- [154] Uthus L., Hopkins M.A. & Horvli I. (2008), *Discrete element modelling of the resilient behaviour of unbound granular aggregates*, International Journal of Pavement Engineering, vol. 9, n. 6, pp. 387-395;
- [155] Vallejo E.; Lobo-Guerrero S., Hammer K. (2006), *Degradation of a granular base under a flexible pavement: DEM simulation*, International Journal of Geomechanics, vol. 6, n. 6;
- [156] Vignali V. (2006), *Impiego di Metodi Numerici Avanzati nello Studio della Spinta delle Terre*, Tesi di Dottorato in Ingegneria dei Trasporti, Università di Bologna;
- [157] Walton O. R. (1982), *Particle-dynamics calculations of shear flow*, J.T. Jenkins and M. Satake (eds), *Mechanics of Granular Material: New Models and Constitutive Relations*, Elsevier, Amsterdam, pp. 327-338;
- [158] Wang L., Wang X., Mohammad L., Wang Y. (2004), *Application of mixture theory in the evaluation of mechanical properties of asphalt concrete*, Journal of materials in civil engineering, vol. 16;
- [159] Wang L., Zhang B., Wang D., Yue Z. (2006), *Fundamental mechanics of asphalt compaction through FEM and DEM modelling*, Analysis of pavement materials and systems;
- [160] Wang L., J.Park, Y. Fu (2007), *Representation of real particles for DEM simulation using X-ray tomography*, Construction and Building Materials, vol. 21, pp. 338–346;
- [161] Wheel M. A. (1996), *A geometrically versatile finite volume formulation for plane elastostatic stress analysis*, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, vol. 31 n. 2, pp. 111-116;
- [162] You Z. , Buttlar W. G. (2004), *Discrete element modelling to predict the modulus of asphalt concrete mixtures*, Journal of Mmaterials in Civil Engineering, vol. 16;
- [163] You Z., Buttlar W. G. (2005), *Application of discrete element modeling techniques to predict the complex modulus of asphalt–aggregate hollow cylinders subjected to internal pressure*, Journal of the Transportation Research Board, National Research Council, 1929, pp. 218-226;

- [164] You Z., Buttlar W. G. (2006), *Micromechanical modeling approach to predict compressive dynamic moduli of asphalt mixtures using the distinct element method*, Journal of the Transportation Research Board, National Research Council, 1970, pp. 73-83;
- [165] You Z., Dai Q. (2007), *Review of advances in micromechanical modelling of aggregate-aggregate interactions in asphalt mixtures*, Canadian Journal of Civil Engineering, vol. 34, pp. 239-252;
- [166] You Z., Adhikari S., Dai Q. (2008), *Three-Dimensional Discrete Element Models for Asphalt Mixtures*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 134, n. 12, pp. 1053-1063;
- [167] You Z., Adhikari S., Kutay E. (2008), *Dynamic modulus simulation of the asphalt concrete using the X-ray computed tomography images*, RILEM;
- [168] You T., Abu Al-Rub R.K., Darabi M.K., Masad E.A., Little D.N. (2011), *Three-dimensional microstructural modeling of asphalt concrete using a unified viscoelastic–viscoplastic–viscodamage model*, C&BM;
- [169] Z. You, Liu Y., Q. Dai (2011), *Three-Dimensional Microstructural-Based Discrete Element Viscoelastic Modeling of Creep Compliance Tests for Asphalt Mixtures*, Journal of materials in civil engineering;
- [170] Yu H., Shen S. (2011) *Impact of aggregate packing on dynamic modulus of hot mix asphalt mixtures using three-dimensional discrete element method*, C&BM;
- [171] Zeghal M., Edil T. B., Plesha M. E. (2002), *Discrete element method for sand-structure interaction*, 3rd International Conference on Discrete Element Methods, Santa Fe, New Mexico, pp. 317-322;
- [172] Zeghal M. (2004), *Discrete element method investigation of the resilient behaviour of granular materials*, Journal of Transportation Engineering, vol. 130, n.4;
- [173] Zelelew H.M. (2008), *Simulation of the permanent deformation of asphalt concrete mixtures using discrete element method (DEM)*, PhD Thesis;
- [174] Zelelew H.M. & Papagiannakis A.T. (2009), *DEM simulation of asphalt concrete uniaxial creep*, Mairepav6;

- [175] Zelelew H. M. & Papagiannakis A. T. (2010), *Simulation of asphalt concrete uniaxial creep using discrete element method (DEM)*, Pavements & Materials, ASCE;
- [176] Zhang Z. P., Liu L. F., Yuan Y. D., Yu A. B. (2001), *A simulation study of the effects of dynamic variables on the packing of spheres*, Powder Technology, vol. 116;
- [177] Zhang L., Thornton C. (2002), *DEM simulations of the direct shear test*, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, 2-5 June, Columbia University, New York;
- [178] Zienkiewicz O. C., Best B., Dullage C., Stagg K. G. (1970), *Analysis of nonlinear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems*, International Society of Rock Mechanics, Proceedings, vol. 3, n. 8-14, pp. 501-509;
- [179] [www.itasca.com](http://www.itasca.com);
- [180] [http://www.treccani.it/export/sites/default/Portale/sito/altre\\_aree/Tecnologia\\_e\\_Sienze\\_applicate/enciclopedia/italiano\\_vol\\_2/089-104ITA3.pdf](http://www.treccani.it/export/sites/default/Portale/sito/altre_aree/Tecnologia_e_Sienze_applicate/enciclopedia/italiano_vol_2/089-104ITA3.pdf).