

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

DOTTORATO DI RICERCA IN
Ingegneria Energetica, Nucleare e del Controllo Ambientale

Ciclo XIII

Settore Concorsuale di Afferenza: 09/C2

Settore Scientifico Disciplinare: ING-IND/10

**ANALISI SPERIMENTALE DELL'INFLUENZA
DEI PARAMETRI DI PROCESSO SULLA
RESISTENZA DI CONTATTO TRA POLIMERO
E STAMPO DURANTE LA FORMATURA**

Presentata da: Ing. **RICCARDO MORSIANI**

Coordinatore Dottorato
Chiar.mo Prof.
ANTONIO BARLETTA

Relatore
Chiar.mo Prof.
MARCO LORENZINI

Esame Finale Anno 2012

Indice

1	Introduzione	1
2	Lo stampo	5
3	Resistenza termica di contatto	21
3.1	La trasmissione di energia termica	21
3.2	La conduzione	22
3.2.1	Il regime stazionario	27
3.3	Conduzione all'interfaccia	31
3.4	La meccanica del contatto	33
3.5	Resistenza di accoppiamento	37
3.5.1	Il metodo semi-analitico	40
3.5.2	Il metodo numerico	42
3.6	Contatto tra superfici conformi	45
3.6.1	Deformazione plastica pura	49
3.6.2	Deformazione plastica con flusso di materiale	52
3.6.3	Deformazione elasto-plastica	53
3.6.4	La deformazione elastica	58
3.6.5	Probabilità che avvenga un flusso plastico	61
4	Problemi di conduzione termica inversa	63
4.1	Il teorema di Duhamel	64
4.2	Le differenze finite	69
4.2.1	La discretizzazione spaziale	71
4.2.2	La discretizzazione temporale	74
4.2.3	Forma matriciale	76

4.2.4	Forma standard per i problemi IHCP	78
4.3	Applicazione delle differenze finite ai problemi IHCP	82
4.3.1	I coefficienti di sensibilità	82
4.3.2	Matrici di calcolo per problemi IHCP	86
4.3.3	Algoritmo TriDiagonal Matrix Algorithm	88
4.3.4	Unico sensore, singolo Future Time Step	90
4.3.5	Molteplici sensori, singolo Future Time Step	92
4.3.6	Unico sensore, multipli Future Time Step	93
4.3.7	Molteplici sensori, multipli Future Time Step	96
4.4	Flussi termici multipli	97
4.4.1	Procedura di calcolo adottata	100
5	La sperimentazione	103
5.1	La strumentazione utilizzata	104
5.1.1	Le scelte del provino	105
5.1.2	I sensori adottati	107
5.1.3	L'apparecchiatura di prova	113
5.1.4	Lo stampo utilizzato	116
5.2	Le prove	119
5.3	I risultati	120
5.3.1	Analisi dei dati di output	120
5.3.2	Il metodo ANOVA	129
6	Conclusioni e sviluppi futuri	141
	Bibliografia	145

Capitolo 1

Introduzione

Fin dai tempi passati si è avuto il bisogno di trasportare i beni di prima necessità, come ad esempio cibo e bevande, da una città ad un'altra o da una nazione ad un'altra o addirittura da un continente ad un altro. Questo perché la mancanza di un bene in una determinata area geografica non garantisce lo sviluppo e la crescita di una popolazione nell'area stessa. Da questa necessità sono stati sviluppati, e via via perfezionati, contenitori asettici che garantissero la commestibilità degli alimenti anche dopo svariati giorni di trasporto sotto varie condizioni di stress come ad esempio sbalzi termici, urti, condizioni climatiche avverse ed altre. Una delle prime soluzioni adottate per risolvere il problema appena descritto sono state le scatolette metalliche, ma tali contenitori presentavano un grosso inconveniente, ovvero la mancanza di apertura facilitata. Per ovviare si è reso necessario introdurre l'apriscatole.

Con il passare degli anni la tecnologia si è evoluta, e dai contenitori metallici, si è passati a quelli realizzati in vetro con chiusure metalliche rimovibili. Un esempio famoso sono state (e tutt'ora lo sono) le bottiglie in vetro sigillate con un tappo a corona applicato sul collo.

L'azienda SACMI Imola s.c.r.l., con la quale è stato sviluppato questo progetto, è stata una delle pioniere per lo sviluppo e realizzazione di macchinari per produrre tappi a corona, con flussi di vendita che, ad oggi, ammontano a diverse migliaia di macchinari.

Negli ultimi decenni, però, con l'avvento della produzione a basso costo dei polimeri altamente tecnici, il mercato del settore dei contenitori alimenta-

ri si è modificato enormemente, riducendo la richiesta di chiusure metalliche e bottiglie di vetro e facendo spazio ad una crescita smisurata dei contenitori e chiusure polimeriche. Questo ha indotto i produttori di contenitori alimentari a richiedere macchine automatiche sempre più veloci e performanti tali da produrre volumi sempre più alti con minor costo specifico della chiusura. Questo cambio di domanda ha stimolato sia SACMI, che i suoi concorrenti, a concentrarsi sullo sviluppo di nuove macchine per la produzione di tappi in polietilene o polipropilene.

Usualmente, per produrre manufatti polimerici, si utilizza la tecnologia ad iniezione, con la quale si fluidifica un polimero per poi iniettarlo direttamente all'interno dello stampo ottenendo così il manufatto desiderato. Totalmente diverso è stato l'approccio di SACMI, infatti questa compagnia ha adottato e messo a punto un processo basato sulla tecnologia a compressione. Questo processo, a differenza di quello di iniezione, è composto principalmente da tre fasi: fusione del polimero fino uno stato pastoso (e quindi a temperatura minore rispetto al polimero fluidificato per iniezione), tranciatura dello stesso in piccole dosi controllate in peso e quindi formatura per compressione della dose tra due stampi in movimento.

Per massimizzare le prestazioni dei macchinari e minimizzare i propri costi produttivi è necessario conoscere in modo molto dettagliato quale sia la fisica del problema del raffreddamento del manufatto in quanto tale fase è quella che determina il tempo ciclo della macchina. Il tempo ciclo, definito come il tempo che intercorre tra due cicli di macchina, rappresenta un valore di confronto: più è basso, migliore è la prestazione della macchina. Ad oggi, questo tempo (per una capsula polimerica standard) si attesta mediamente attorno ai 2.5 secondi.

Dunque, per minimizzare tale valore, occorre innanzi tutto comprendere quali siano i fattori che lo influenzano, per poi analizzarli in dettaglio. In linea di massima, il tempo ciclo è principalmente influenzato da:

- caratteristica chimico-fisica del polimero che forma la capsula,
- peso della capsula,
- morfologia della capsula,

- efficienza dello scambio termico dello stampo,
- altri elementi di secondario effetto.

I primi tre fattori sono molto spesso definiti dal cliente (o comunque sono frutto di una cooperazione tra il cliente ed i laboratori tecnologici) in quanto le capsule sono personalizzate in forma, dimensione e materiale; è il quarto fattore quello che ogni ufficio tecnico di ogni azienda deve cercare di migliorare.

Con gli strumenti informatici disponibili oggi per le industrie, in particolare modo coi software CAE, è possibile simulare in maniera più che soddisfacente i fenomeni fisici presenti in natura. Anche il raffreddamento di un manufatto in polimero può venire simulato, a patto che si conoscano tutti i dati dei materiali e delle condizioni al contorno. Per quanto riguarda i dati dei materiali, i produttori di polimeri sono molto spesso in grado di fornirli, mentre le condizioni al contorno devono essere padroneggiate dal detentore della tecnologia. Nella pratica, tale conoscenza è al più incompleta, quindi si fanno ipotesi per colmare le lacune.

Una tra le ipotesi più forti fatte è quella di una perfetta conduzione all'interfaccia tra due corpi. Questo è un vincolo troppo forte, se paragonato alla precisione di tutti gli altri dati necessari alla simulazione, e quindi si è deciso di eseguire una campagna sperimentale per stimare la resistenza al passaggio flusso termico all'interfaccia polimero-stampo ovvero determinare la conduttanza termica di contatto.

L'attività svolta in questa tesi di dottorato ha come scopo quello di fornire un contributo significativo allo sviluppo e al miglioramento dell'efficienza termica degli stampi di formatura dei polimeri termoplastici con tecnologia a compressione. L'elaborato qui presente si compone di cinque capitoli strutturati nel modo illustrato di seguito. La prima parte illustra il funzionamento dello stampo brevettato da SACMI (Capitolo 2) al fine di descrivere quale sia l'apparecchiatura reale che compie l'operazione di formatura. Dalle ricerche bibliografiche condotte, che hanno individuato una ingente quantità di articoli inerenti la conduttanza termica di contatto tra solidi, si è potuto verificare che ben pochi lavori si concentrano sulla determinazione della conduttanza termica di contatto durante il processo di raffreddamento dei polimeri e quei

pochi presenti sono riferiti a tecnologie di iniezione [3] e di soffiaggio [35]. Nel capitolo successivo (Capitolo 3) si sono voluti riportare comunque i concetti che stanno alla base della conduzione termica all'interfaccia tra solidi perché parzialmente estendibili anche al caso di raffreddamento di polimeri. In conseguenza dei risultati della ricerca bibliografica, si è deciso di determinare per via sperimentale i valori della conduttanza termica di contatto, e a tale scopo si è reso necessario -oltre alla costruzione dell'apparecchiatura di prova- la scelta delle tecniche di misura e del metodo di determinazione della conduttanza termica, che viene calcolata tramite le temperature di interfaccia e del flusso termico, che si ottiene utilizzando tecniche inverse di analisi termica. Nel capitolo seguente, pertanto, si sviluppa la necessaria trattazione della risoluzione dei problemi inversi di conduzione termica (capitolo 4) per ricavare il flusso termico, e quindi il campo di temperatura dello stampo, a partire da misure di temperatura puntuali all'interno dello stampo per tutto il tempo di chiusura stampo. Nel capitolo 5 vengono poi descritte le prove effettuate e i risultati ottenuti. Infine, (capitolo 6) vengono riassunte tutte le attività svolte e i risultati ottenuti, fornendo anche suggerimenti per le possibili attività future.

Capitolo 2

Lo stampo

Per descrivere il funzionamento dello stampo utilizzato a livello industriale, se ne riporta la descrizione di una realizzazione brevettuale.

L'apparecchiatura è impiegata per la fabbricazione di articoli in materiale plastico, in particolare di capsule per la chiusura di contenitori. Sono note apparecchiature per lo stampaggio a compressione di capsule (tappi) per la chiusura di contenitori comprendenti una giostra girevole secondo un asse verticale, sulla quale è montata una pluralità di gruppi di stampaggio angolarmente equidistanziati. Ogni gruppo comprende un semistampo maschio superiore allineato con un semistampo femmina inferiore. Durante la rotazione della giostra una dose di materiale plastico allo stato pastoso viene introdotta nel semistampo femmina e pressata mediante un movimento relativo fra i due semistampi. Nelle apparecchiature del tipo indicato è altresì uso prevedere nel semistampo superiore mezzi di refrigerazione, aventi la funzione di raffreddare il punzone formatore, e mezzi espulsori che provvedono a rimuovere la capsula a stampaggio ultimato. Per assicurare la rimozione delle capsule dal punzone formatore, l'azione meccanica di espulsione esercitata sulle capsule viene coadiuvata da un'azione pneumatica esercitata iniettando aria compressa all'interno delle capsule la quale, gonfiandole, le distacca dalla superficie del punzone rendendo più efficace l'azione meccanica. Attualmente l'azione pneumatica non viene convenientemente sfruttata poichè l'aria compressa, nel suo tragitto fino agli orifizi di iniezione nella capsula, deve attraversare numerosi interstizi e cavità che determinano un calo di pressio-

ne ritardando l'azione sulle capsule. Per ovviare a tali inconvenienti, cioè recuperare rapidità di intervento ed aumento di portata dell'aria si rendono necessari elevati valori pressori con conseguente difficile gestione degli effetti sul prodotto, come deformazioni ed irregolarità delle pareti. Inoltre l'azione pneumatica, come concepita nelle attuali apparecchiature, provoca inquinamenti dell'articolo stampato in quanto l'aria convogliata trasporta particelle del fluido utilizzato per mantenere lubrificate le parti mobili del semistampo superiore. Un ulteriore inconveniente è rappresentato dal fatto che le parti mobili del semistampo superiore generano un effetto pistone che spesso crea indesiderati spostamenti di alcuni componenti meccanici. A differenza di quelle per lo stampaggio a compressione, nelle apparecchiature per lo stampaggio ad iniezione l'espulsione degli articoli è ottenuta prevalentemente per via meccanica e quindi con elevato rischio di danneggiare i prodotti. Si rende pertanto necessario perfezionare il funzionamento delle apparecchiature del tipo indicato ovviando sostanzialmente alle deficienze sopra lamentate e consentendo una sicura rimozione degli articoli dallo stampo. Tale compito viene raggiunto con un'apparecchiatura le cui caratteristiche sono descritte nel seguito. Ulteriori particolarità risulteranno evidenti dalla descrizione di una delle possibili realizzazioni. Di seguito si dà una sintetica indicazione di quanto illustrato nelle figure del presente capitolo:

- la figura 2.1 mostra una vista in alzato di un gruppo di stampaggio a compressione, sezionato secondo un piano verticale, per la formazione di un tappo a vite con banda di garanzia;
- la figura 2.2 mostra una vista in scala ingrandita della metà superiore del gruppo illustrato in figura 2.1;
- la figura 2.3 mostra una vista in scala ingrandita della metà inferiore del gruppo illustrato in figura 2.1 a stampo aperto;
- la figura 2.4 mostra una vista in alzato di un gruppo di stampaggio ad iniezione, sezionato secondo un piano verticale, per la formazione di un tappo a vite con banda di garanzia;
- le figure 2.5 e 2.6 mostrano due viste in sezione ed in pianta della parte superiore di un gruppo di stampaggio.

Facendo riferimento alle figure 2.1-2.3, l'apparecchiatura è costituita da una giostra girevole secondo un asse verticale, la quale porta sulla periferia una pluralità di gruppi per lo stampaggio di capsule (tappi) A in materiale plastico (vedi figura 2.3). Nel seguito si suppone che tali capsule A siano composti da uno scodellino B dotato di una filettatura interna C e di una banda anulare D che si estende dal bordo dello scodellino e costituisce la banda di garanzia in grado di rilevare manomissioni del tappo. Ogni gruppo è composto da un semistampo maschio superiore, indicato complessivamente con 1, e da un semistampo femmina inferiore, indicato complessivamente con 2. Il semistampo maschio 1 comprende un piattello 3 il quale, con un suo codolo tubolare 4, è avvitato in un canotto 5 che, a sua volta, è avvitato all'estremità inferiore di una canna 5a così da formare un unico stelo tubolare 6 (figura 2.1) Nel codolo tubolare 4 è inserito a tenuta un tubo 7 che, con lo stelo tubolare 6 (cioè con il canotto 5 e la canna 5a), individua un'intercapedine 8 tubolare. Il canotto 5 presenta all'estremità inferiore una porzione 9 allargata a campana e centrata a tenuta sul piattello 3, la quale con il codolo tubolare 4 individua una camera 10 che comunica con l'intercapedine 8 attraverso aperture 11 della porzione tubolare. Inoltre la camera 10, attraverso aperture 12, ricavate nella zona del codolo 4 immediatamente al di sopra del piattello 3, comunica con l'interno del tubo 7. La porzione a campana 9 del canotto 5 ed il piattello 3 formano il punzone formatore 13 che determina, all'interno della capsula A, la modanatura della filettatura C, del fondo E e della banda anulare di garanzia D che, nell'esempio, è costituita da un anello pieghettato secondo piani radiali che si restringe verso l'alto formando un angolo ottuso con la parete cilindrica dello scodellino B. La banda di garanzia D in una separata fase di lavorazione verrà resa staccabile dallo scodellino B da una linea di frattura perimetrale che ne permette il distacco quando la capsula viene svitata dal contenitore alla quale è stata applicata. Da notare che, prima dell'applicazione sul contenitore, la banda D verrà rivoltata all'interno della capsula in modo da racchiudere un angolo acuto con la parete dello scodellino e potersi impegnare contro un collare di ritegno formato sul collo del contenitore immediatamente sotto la zona di avvitamento della capsula. L'estremità superiore del tubo 7 è connessa a tenuta in una sede di un corpo cilindrico o inserto 14 dotato di un collare

esterno 15 con cui è centrato in una sede formata da un allargamento 16 dell'estremità superiore della camma 5a dello stelo tubolare 6. Il corpo 14 è bloccato sullo stelo 6 da una ghiera 17 avvitata sull'allargamento 16 ed agente sul collare 15. Nel corpo 14 è ricavato un foro 18 coassiale al tubo 7 ed in comunicazione con l'interno di quest'ultimo. Attraverso il foro 18 ed il tubo 7 si estende coassialmente una cannula 19 che, con il tubo 7 ed il foro 18, delimita internamente un canale tubolare 20. Le estremità inferiore della cannula 19 è inserita a tenuta in una boccola 21 (figura 2.3) che a sua volta è inserita a tenuta nel fondo del codolo 4. La cannula 19, attraverso il foro assiale 22 della boccola 21, comunica con una serie di fori 23 ricavati radialmente nello spessore del piattello 3 e sfocianti radialmente all'esterno del punzone 13 attraverso orifizi 23a costituiti da meati ricavati nella zona di centraggio della porzione a campana 9 fra il bordo di quest'ultima ed il piattello 3. L'estremità superiore della cannula 19 è inserita a tenuta in cilindretto 24 (figura 2.2), alloggiato in un pozzetto 25 ricavato alla sommità del corpo 14, e comunica con un foro diametrale 26 del cilindretto 24. Il corpo 14 è inserito in una sede 27 di un elemento cilindrico o manicotto 28 di altezza tale che il corpo 14 sporge, con una sua porzione filettata, dalla faccia superiore del manicotto. Su tale porzione filettata è avvitato un cappellotto 29 che serra il manicotto 28 contro la ghiera 17. Il foro diametrale 26 comunica, attraverso una scanalatura anulare interna 30, fori 31 del corpo 14 ed una scanalatura anulare 32 esterna al corpo 14, con un raccordo 33 collegato con un'alimentazione di aria compressa. In tal modo l'aria compressa, convogliata attraverso il raccordo 33, dopo aver percorso la cannula 19, perviene ai fori 23 e può fuoriuscire radialmente dal punzone 13 attraverso i meati 23a ricavati fra i bordi del piattello 13 e della porzione a campana. Nel corpo 14, sotto al pozzetto 25, è ricavato un foro diametrale 34 sfociante in una scanalatura anulare 34a del manicotto 28 la quale circonda il corpo 14 ed è collegata con un raccordo 35 di alimentazione di un fluido refrigerante. Un analogo raccordo 36 è disposto ad una quota sottostante il raccordo 35 e comunica, attraverso una scanalatura anulare 37 del corpo 14 ed una pluralità di fori 38, che si estendono coassialmente dalla scanalatura 37 attraverso il collare 15, con l'intercapedine 8 e con la camera 10 attraverso le aperture 12. In tal modo si viene a creare un collegamento fra i raccordi 35 e 36 che permette il

ricircolo del fluido refrigerante. Il canotto 5 è guidato scorrevolmente in una camicia cilindrica 39 solidale, mediante un accoppiamento per avvitamento, con un elemento tubolare 40 in cui scorre lo stelo 6. Il bordo inferiore della camicia 39 presenta internamente una smussatura conica 41 (figura 2.3) contrapposta assialmente ad una complementare smussatura conica 42 con cui la porzione a campana 9 è raccordata al canotto 5. La smussatura 41 funge da spallamento per la smussatura 42. All'interno del tratto terminale inferiore della camicia 39 è ricavato internamente uno smanco anulare 43 che forma un gradino 44. Un analogo gradino 45, contrapposto assialmente al gradino 44, è ricavato fra la smussatura conica 42 ed il canotto 5. Nella sede che resta definita fra i gradini 44,45 e le superfici cilindriche contrapposte del canotto 5 e della camicia 39, è alloggiato un anello distanziale 46 fungente da spallamento e dimensionato in modo da definire fra le smussature 41 e 42, durante lo stampaggio, una cavità destinata alla formazione della banda di garanzia. La camicia 39 e l'elemento 40 sono coassiali ad una rispettiva sede cilindrica 47 di un corpo portante facente parte della struttura della giostra. In pratica tale corpo è costituito da una sorta di tamburo girevole 48, montato su un albero verticale il cui asse F è l'asse di rotazione della giostra. Nella sede 47 è inserita una bussola 49 che, con un labbro anulare 50, appoggia sul bordo superiore della sede 47. Sul labbro 50 appoggia, con l'interposizione di un anello di un anello 51 di materiale elastico, un anello distanziale 52, su cui a sua volta appoggia, tramite una sua flangia esterna 53, l'elemento tubolare 40. Sulla flangia 53 s'impegna un organo di bloccaggio 54 che, per mezzo di viti 55, blocca, sulla faccia superiore del tamburo 48, l'elemento tubolare 40 e la bussola 49 coassialmente fra di loro ed alla sede 47. Fra la bussola 49 e la superficie esterna della camicia 39 e dell'elemento 40 resta definita una camera cilindrica 56 nella quale si estende, dal basso, un canotto 57 guidato assialmente sulla camicia 39 da un cuscinetto interno 58 e, nella bussola 49, da un cuscinetto esterno 59. Il canotto 57, all'altezza della porzione a campana 9, termina con un collare 60 il cui spigolo interno è indicato con 61. Il collare 60 ha diametro interno maggiore del diametro esterno della porzione della campana 9 così da individuare, in posizione di stampaggio, una intercapedine per la formatura della parete cilindrica dello scodellino. Il canotto 57, tramite un braccio 62, è collegato rigidamente

ad una colonna 63 ad esso parallela. La colonna 63 è guidata in una sede 64 del tamburo 48 e supporta a sbalzo, alla sommità, una coppia di rullini 65,66 che seguono una camma circolare (non illustrata nel disegno) solidale alla struttura dell'apparecchiatura e quindi stazionaria, avente uno sviluppo concentrico all'asse F di rotazione della giostra. Alla sommità della colonna 63 è applicata l'estremità di un braccio 67 avente l'estremità opposta fissata, tramite un dado 68, al codolo filettato 69 del cappellotto 29. L'estremità del braccio 67 applicata sulla colonna 63 presenta una boccola 70 sulla quale agisce, spingendola contro uno spallamento della colonna, una molla 71. La molla 71 riscontra su un dado 72 avvitato in modo registrabile su un gambo terminale 73 della colonna prolungantesi verso l'alto. La camma stazionaria, attraverso la colonna 63, comanda positivamente verso il basso gli spostamenti del cannotto 57 solo lungo un angolo sufficiente a rimuovere il tappo dal punzone 13, lungo il rimanente angolo di rotazione essendo prevista la possibilità per il cannotto 57 di spostarsi verso l'alto in contrasto con mezzi elastici di riscontro. Tali mezzi sono costituiti da una molla 74 interposta fra la flangia 53 dell'elemento tubolare 40 ed una ralla 75 che appoggia su un astuccio tubolare 76 alloggiato nella camera cilindrica 56. L'astuccio 76 presenta un labbro interno 77 su cui appoggia una molla cilindrica 78 atta ad agire contro la ralla 75. Per impedire che il cannotto 5 possa ruotare rispetto alla camicia 39, all'esterno del cannotto 5 è praticata una cava assiale 79 nella quale è in impegno scorrevole una chiavetta 80 che si aggetta verso l'interno dalla camicia 39. Completa il semistampo superiore 1 una molla 81 interposta fra la flangia 53 dell'elemento tubolare 40 e la ghiera 17. La molla 81 sollecita verso l'alto lo stelo 6 e quindi il punzone 13 mantenendolo in una posizione di arresto determinata dal riscontro dell'anello 46 contro il gradino 44 della camicia 39 in corrispondenza del quale si ha il contatto fra le superfici coniche complementari delle smussature 42 e 41 del punzone 13 e rispettivamente della camicia 39. Il semistampo inferiore 2 è composto da una tazza 82 definente una cavità tale da consentire l'inserimento del segmento anulare 60 fino al riscontro di uno spallamento 83 e la chiusura della camera di formatura della capsula. Nella parete della tazza 82 sono previsti fori 84 che mantengono la cavità della tazza in comunicazione con l'esterno per consentire all'aria, che durante la fase di stampaggio è rima-

sta intrappolata nello stampo, di sfiatare. La tazza 82, tramite una ghiera esterna 85, viene bloccata contro un disco 86 col quale individua una camera 87 collegata con un condotto di adduzione 88 ed uno di deflusso 89 di un liquido di raffreddamento. I condotti 88, 89 si estendono all'interno di uno stelo cavo 90 sul quale è montato il disco 86. Lo stelo cavo 90 è guidato nella struttura dell'apparecchiatura coassialmente al punzone 13 ed è azionato da un attuatore idraulico in modo da avvicinare ed allontanare la tazza 82 rispetto al punzone 13. Il funzionamento dell'apparecchiatura descritta è il seguente. In fase di stampaggio e con il semistampo inferiore aperto si ha deflusso del liquido verso il raccordo di ritorno 36 attraverso le aperture 12, l'intercapedine 8, i fori assiali 38 e la scanalatura anulare 37. Per talune applicazioni potrebbe essere utile e opportuno invertire la mandata ed il ritorno del liquido refrigerante. Quando il desiderato punto di solidificazione è stato raggiunto, viene comandata la discesa della tazza 82. Tuttavia, nonostante il distanziamento dei due semistampi 1,2, la capsula non cade, ma rimane attaccata al punzone per effetto dei sottosquadri interni rappresentati dalla filettatura C. Quando la tazza 82 si è disimpegnata dalla capsula, attraverso il raccordo 33, la scanalatura anulare 32, i fori 31, la scanalatura 30, il foro 26, la cannula 19, i fori 22 e 23 e gli orifizi 23a, viene convogliata aria compressa che stacca la capsula dal punzone gonfiandola leggermente e consentendo che, con la discesa della colonna 63 comandata dalla camma stazionaria a cui sono asserviti i rullini 65, 66, si abbia il distacco della capsula dal punzone per effetto della spinta assiale esercitata dallo spigolo 61 sul bordo della capsula a cui è unita la banda di garanzia. Il distacco della capsula è da ricondurre alle proprietà elastiche del materiale che consente un allargamento dello scodellino B e, non appena la capsula è stata sfilata dal punzone, il recupero della forma originaria con la banda di garanzia convergente verso l'asse della capsula. Nel frattempo la giostra ha ruotato fino ad occupare una posizione in cui la capsula rimossa cade su uno scivolo di allontanamento. Il ciclo descritto si ripete, durante la rotazione della giostra, per ognuno dei gruppi di stampaggio. In pratica, prevedendo una giostra con 32 gruppi di stampaggio, la fase di raffreddamento della capsula si estende per circa 315°, mentre per i restanti 45 vengono effettuate le operazioni di introduzione della dose di materiale plastico nella cavità della tazza 82, lo stampaggio e l'estrazione della

capsula. Le capsule A all'uscita dell'apparecchiatura vengono sottoposte a successive lavorazioni. In particolare con il tipo di capsula illustrato è prevista l'esecuzione di incisioni che definiscono la linea di frattura lungo la quale la banda di garanzia viene separata dallo scodellino B ed il rovesciamento della banda di garanzia all'interno dello scodellino per far sì che essa, una volta applicata su un contenitore, possa agire di punta su un collare dello stesso e resistere alla trazione durante lo svitamento fino alla frattura della banda. Secondo la prerogativa fondamentale fra il punzone 13 ed il raccordo di mandata 33 di aria compressa è stato realizzato un collegamento diretto che ne abbrevia i tempi di intervento consentendo una maggiore redditività dell'apparecchiatura. Inoltre il flusso d'aria non trafile fra parti lubrificate e pertanto non trascina con se particelle di lubrificante o simile che, espulse dai meati 23a fra piattello 3 e porzione a campana 9, potrebbero depositarsi sulle capsule prodotte ed inquinare. Da un punto di vista realizzativo si è dimostrata particolarmente vantaggiosa l'adozione del manicotto 28 che consente di centralizzare tre distinte utenze, cioè le mandate del liquido refrigerante e dell'aria compressa ed il ritorno del refrigerante. La figura 2.4 mostra una forma di realizzazione in cui il concetto inventivo è applicato ad un'apparecchiatura per la fabbricazione di capsule mediante gruppi di stampaggio ad iniezione, le cui uniche differenze rispetto a quelli dell'apparecchiatura delle figure 2.1-2.3 riguardano l'assenza degli elementi da 74 a 78, per consentire il riscontro del canotto 57 direttamente contro uno spailamento 91 dell'elemento tubolare 40, e la presenza nel fondo della tazza 82 di un ugello 92 di iniezione del materiale plastico. Quando i due semistampi 1 e 2 sono stati accostati il bordo della tazza 82 riscontra sul bordo del collare 60 e fra la parete interna della tazza 82 e quella esterna del punzone 13 resta definita una camera di forma esattamente uguale a quella della capsula che si vuole realizzare e che viene riempita di materiale plastico iniettato a pressione attraverso l'ugello 92. La solidificazione del materiale plastico e la rimozione della capsula dopo l'apertura dei semistampi 1 e 2 si svolge come nell'apparecchiatura delle figure 2.1-2.3. L'invenzione è suscettibile di numerose modifiche e varianti tutte rientranti nel concetto inventivo. Una di tali varianti prevede l'impiego di un raccordo 33 dotato di una valvola dotata di un otturatore asservito al movimento del manicotto 28. Una ulteriore variante

dell'invenzione è rappresentata nelle figure 2.5 e 2.6 e riguarda il collegamento dell'intercapedine tubolare 8 e del canale tubolare 20 con l'alimentazione del fluido refrigerante ed il collegamento della cannula 19 con l'alimentazione di aria compressa. Nelle figure 2.5,2.6 gli elementi o parti costruttivamente diversi, ma funzionalmente equivalenti a quelli dell'apparecchiatura delle figure 2.1-2.3 sono indicati con gli stessi numeri di riferimento. Si riconosce lo stelo tubolare 6 che con la porzione tubolare superiore si proietta al di sopra di una flangia 93 scorrevole su di esso e fungente da appoggio per la molla 81. La porzione terminale superiore è internamente filettata per l'avvitamento di un inserto cilindrico 94 che equivale al conglobamento dei pezzi 14 e 24 dell'apparecchiatura delle figure 2.1-2.3. L'inserto 94 è percorso assialmente da un foro composto da più tratti 95,96,97 di diametro decrescente fra i quali restano individuate due sedi 98, 99. Nelle sedi 98 e 99 sono inserite a tenuta le sommità del tubo 7 e rispettivamente di una boccola 100 fissata all'estremità della cannula 19. L'inserto cilindrico 94 è alloggiato in una sede 101 formata eccentricamente in un elemento cilindrico 102 presentante un collare interno 103. Il collare 103, quando l'inserto 94 viene avvitato nello stelo 6, rimane bloccato fra uno spallamento 104 interno all'inserto 94 ed il bordo superiore dello stelo 6. L'inserto 94 presenta una porzione superiore 105 filettata che si prolunga al di sopra della faccia superiore 106 dell'elemento 102. Su tale porzione 105 sono fissati il braccio radiale 67 che collega l'inserto alla colonna 63 ed il raccordo 33 per il collegamento del foro 97 alla alimentazione di aria compressa la quale, pertanto, attraverso la cannula 19, può venire convogliata direttamente agli orifici di uscita 23a del punzone formatore 13. Nell'elemento 102 sono ricavati due fori ciechi 107,108 paralleli e sfocianti nella faccia 106, nei quali sono avvitati i due raccordi 35, 36 collegati con la mandata ed il ritorno del fluido refrigerante. Il foro 107, tramite un foro radiale 109 dell'elemento 102, una scanalatura anulare 110, fori radiali 111 ed il tratto 96 dell'inserto 94, comunica con il canale tubolare 20. Analogamente il foro 108, tramite il foro radiale 112 dell'elemento 102, la scanalatura 113, i fori radiali 114 ed il tratto 95 dell'inserto 94, comunica con l'intercapedine cilindrica 8 cosicché il fluido refrigerante può venire convogliato nella camera 10 del punzone e da questa defluire. Per evitare la rotazione dell'elemento 102 e delle parti a questo solidali, nella periferia dell'elemento 102, fra i due

fori ciechi 107,108 è ricavata una scanalatura 115 nella quale s'impegna una colonnetta 116 fissata sull'organo 54 per mezzo di una vite 117. La scanalatura 115 e la colonnetta 116 sono parallele allo stelo 6 per permetterne spostamenti assiali, mentre ne impediscono la rotazione. Il sostanziale vantaggio della variante delle figure 2.5 e 2.6 è da intravedere nella disposizione verticale dei raccordi 33, 35, 36 che favorisce i collegamenti con le alimentazioni di fluido refrigerante ed aria compressa e consente una semplificazione costruttiva. Nella pratica attuazione dell'invenzione gli stampi maschio 1 e femmina 2 potranno essere strutturati in modo da consentire qualsiasi forma di capsula con o senza banda di garanzia.

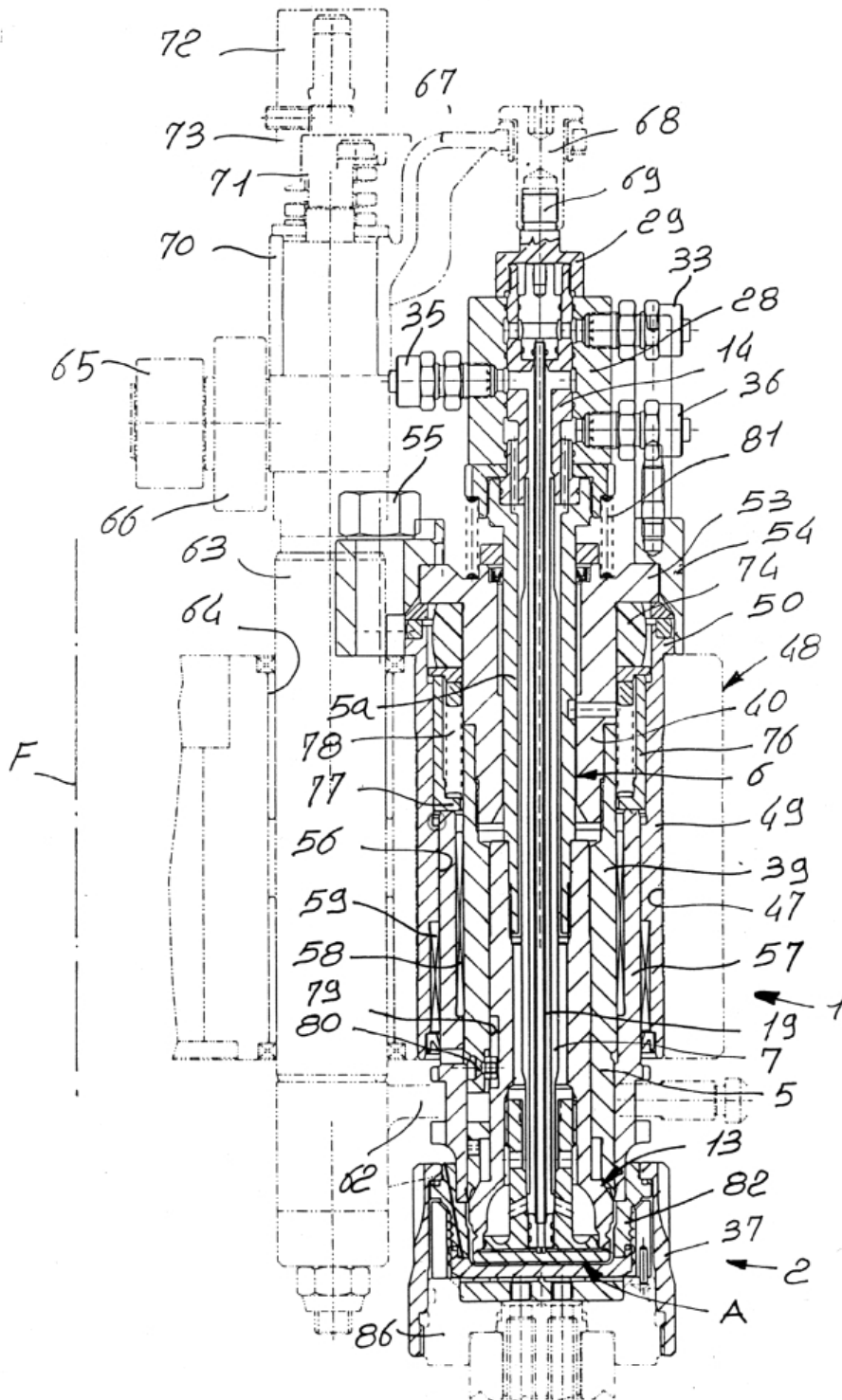


Figura 2.1: Schema no. 1 di funzionamento stampi

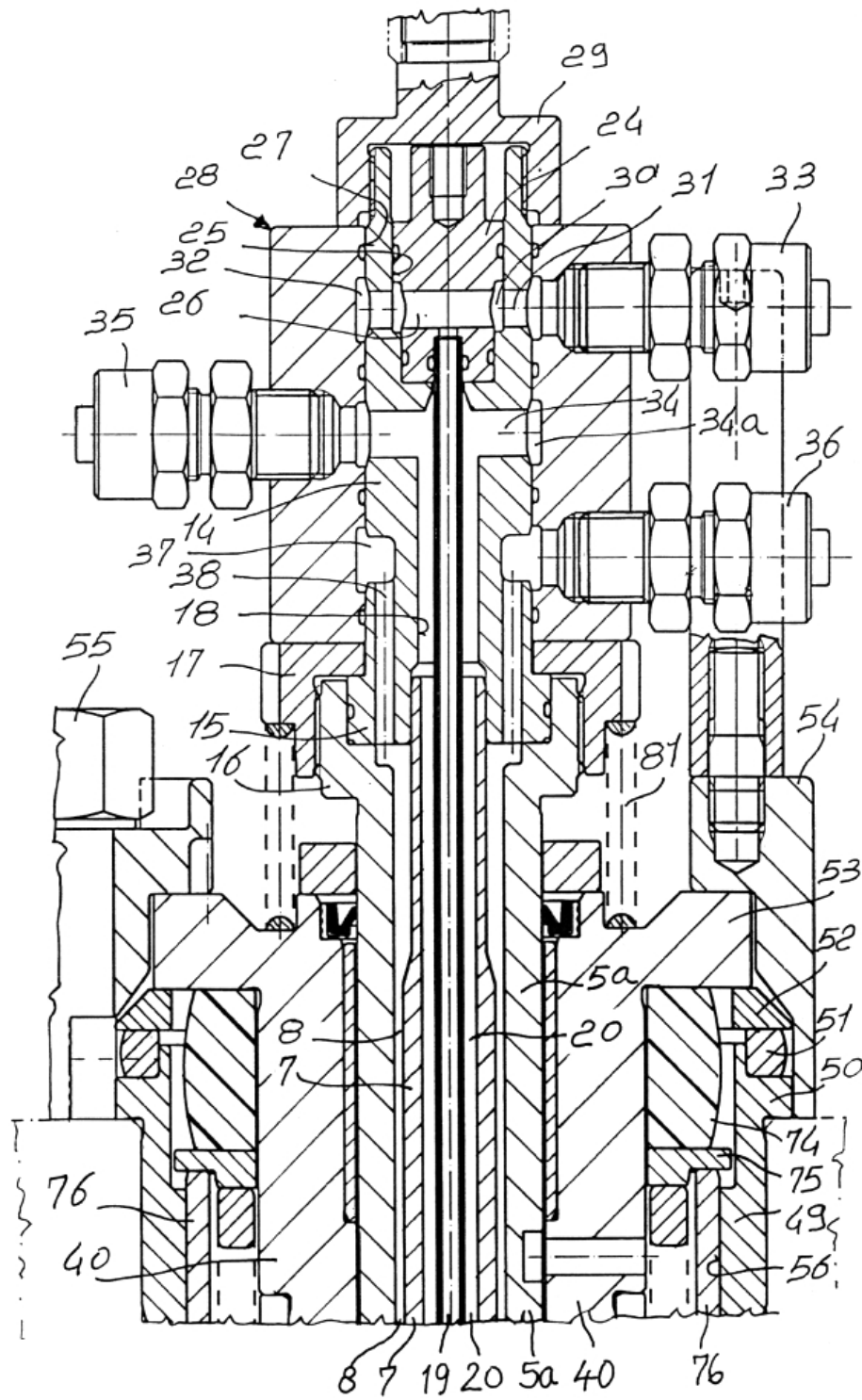


Figura 2.2: Schema no. 2 di funzionamento stampi

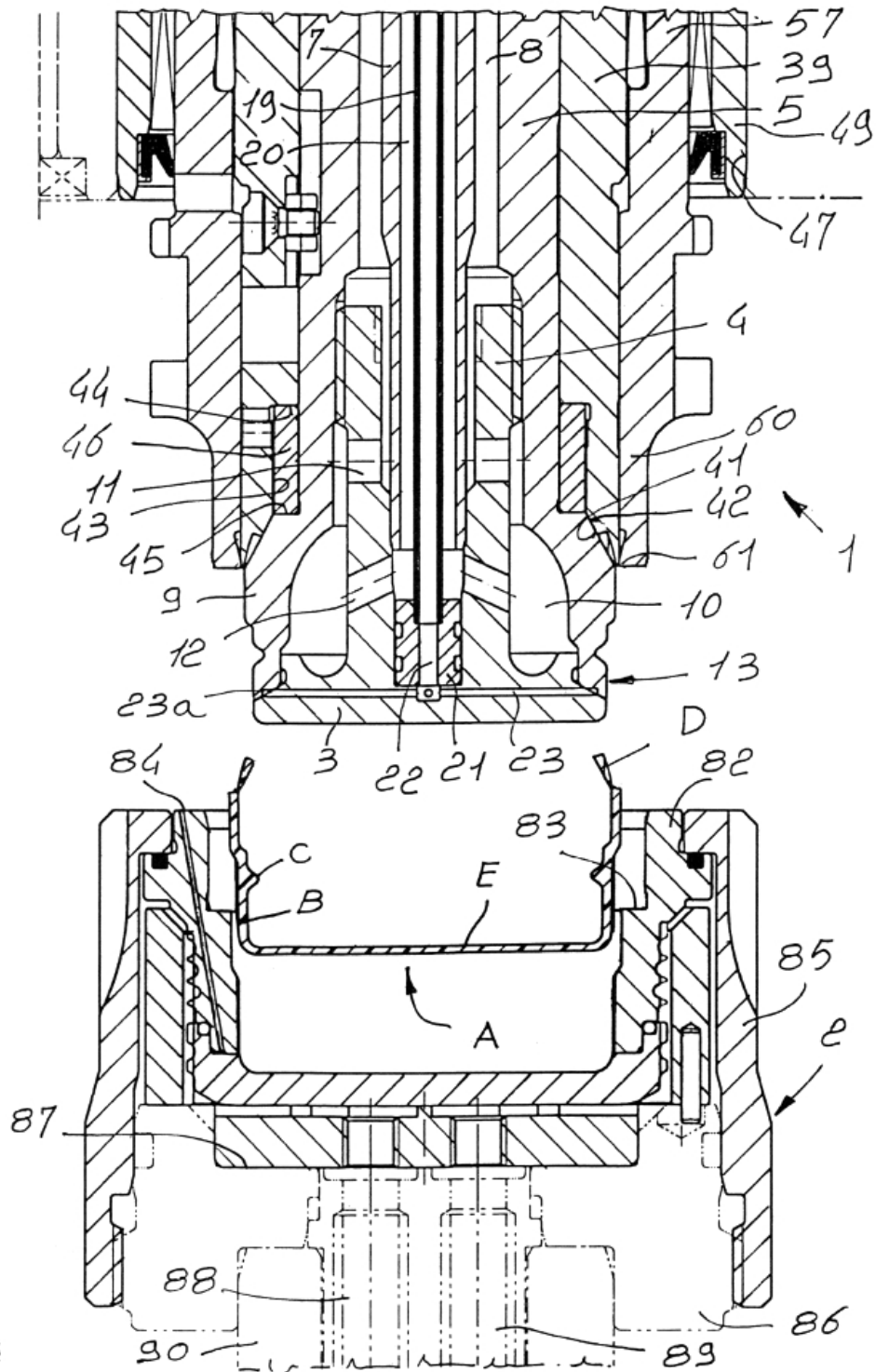


Figura 2.3: Schema no. 3 di funzionamento stampi

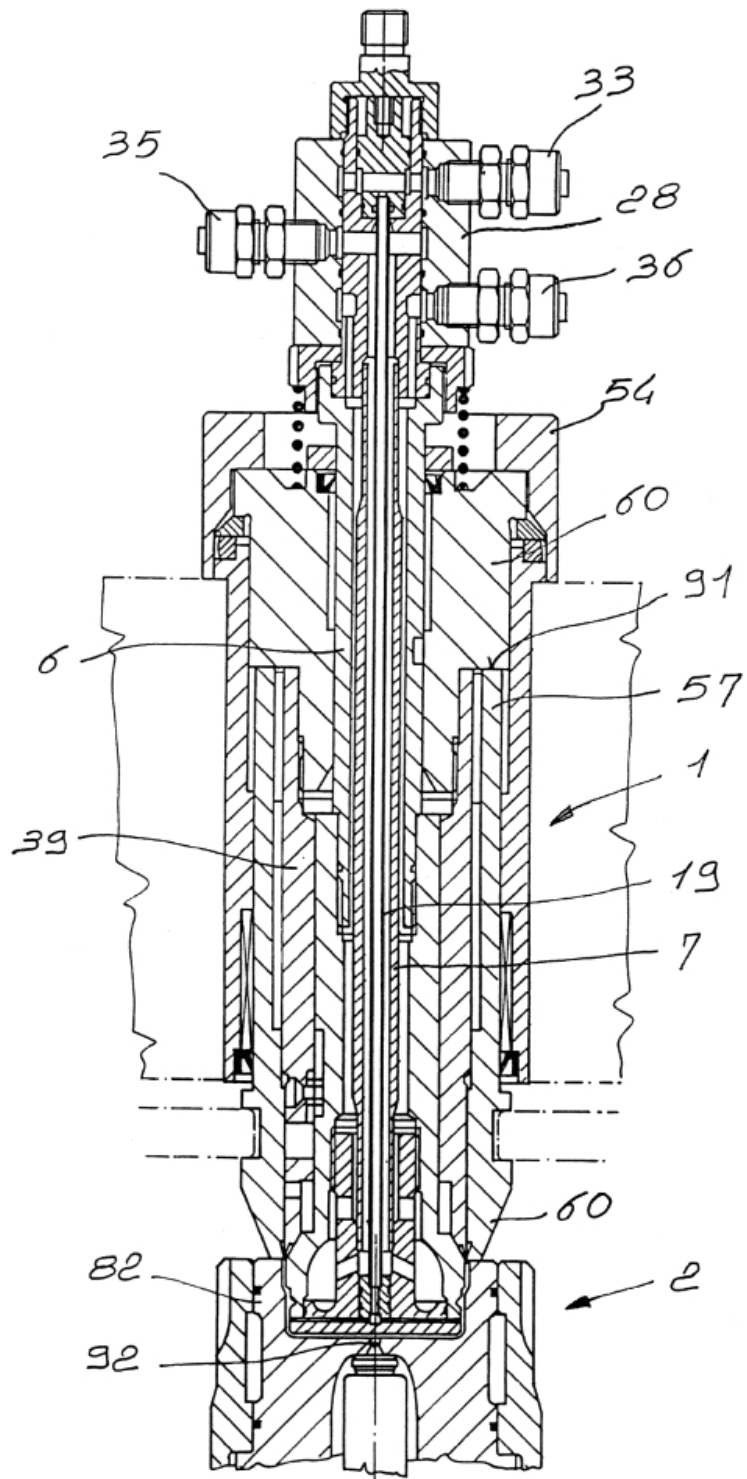


Figura 2.4: Schema no. 4 di funzionamento stampi

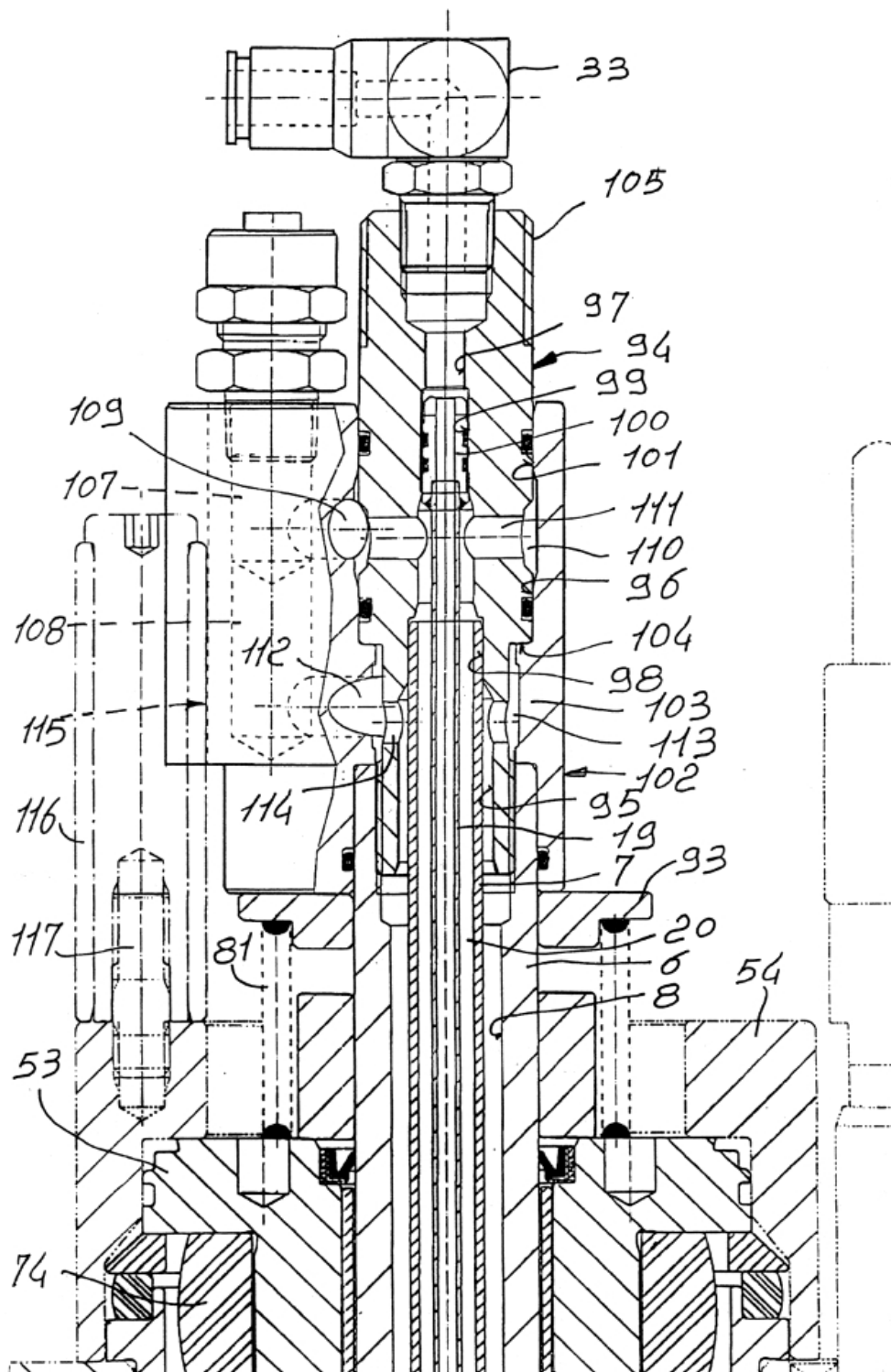


Figura 2.5: Schema no. 5 di funzionamento stampi

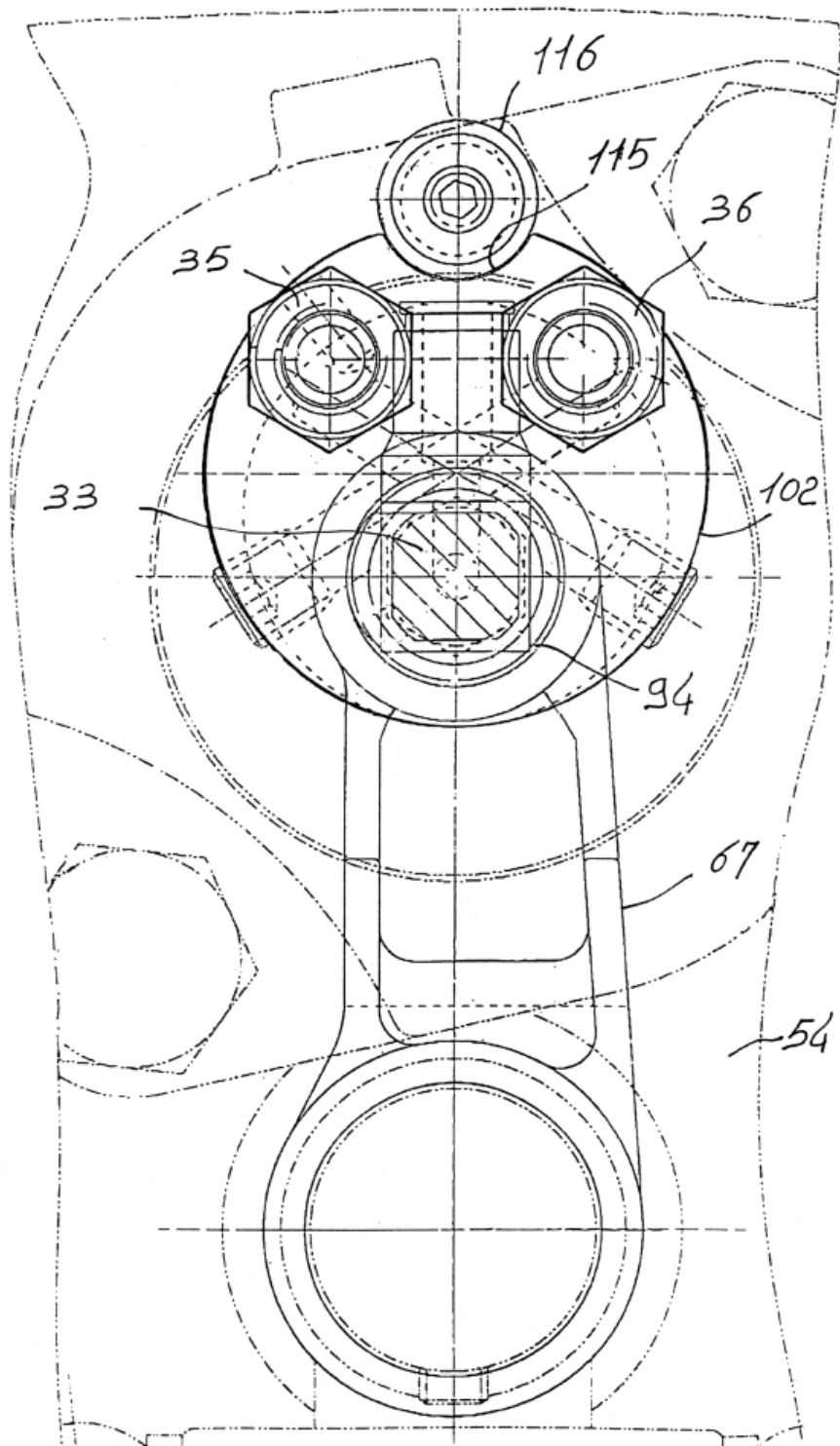


Figura 2.6: Schema no. 6 di funzionamento stampi

Capitolo 3

Resistenza termica di contatto

3.1 La trasmissione di energia termica

Presi due corpi (o più genericamente due sistemi) a diversa temperatura se li si fa interagire, allora si può misurare un trasferimento di energia (calore) dal corpo più caldo al corpo più freddo. La scienza che studia la trasformazione dell'energia è la termodinamica; la frase appena scritta, difatti, contiene due concetti: il carattere energetico del trasferimento del 'calore' e la sua spontanea propagazione dal corpo più caldo al corpo più freddo, formalizzati rispettivamente dal primo e dal secondo principio della termodinamica.

I fenomeni di scambio termico (propagazione dell'energia termica) vengono analizzati dalla trasmissione del calore. Questa scienza è basata su concetti fondamentali (quali principio zero, 1° e 2° della termodinamica, conservazione della massa e quantità di moto, ecc.) da cui ne derivano i modelli fisico-matematici che descrivono i fenomeni. Ad essi vanno affiancate le equazioni costitutive come la legge di Fourier, la legge di Newton e la legge di Stefan-Boltzman. Le tre equazioni appena denominate sono la trascrizione matematica dei tre diversi meccanismi di trasmissione dell'energia termica:

1. **conduzione:** è il modo nel quale lo scambio di energia tra corpi a differente temperatura avviene mediante l'oscillazione o il diretto impatto delle molecole (per i fluidi) e mediante la deriva degli elettroni (per i solidi). La legge che sta alla base di questo meccanismo è la legge di

Fourier.

$$\dot{q} = -k \cdot \mathbf{grad} T \quad (3.1)$$

2. **convezione**: è un trasferimento di energia termica tra solido e fluido a diversa temperatura come conseguenza del moto relativo del fluido sulla superficie. Il modello descrittivo per essa è:

$$\dot{q} = h \cdot (T_{parete} - T_{fluido}) \quad (3.2)$$

3. **irraggiamento**: è un trasferimento di energia termica sotto forma di onde elettromagnetiche emesse da una superficie di un corpo a causa dell'agitazione degli atomi superficiali. La legge che sta alla base di questo meccanismo è la legge di Stefan-Boltzaman.

$$\dot{q} = \epsilon \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.3)$$

In questo capitolo verrà trattata solo ed esclusivamente la parte di scambio termico conduttivo in quanto nelle resistenze termiche di contatto è il meccanismo più importante. Il meccanismo di irraggiamento viene trascurato perché le temperature in gioco nello scambio termico all'interno degli stampi di formatura è inferiore ai 300 °C, mentre il meccanismo di convezione attraverso un meato centesimale è completamente trascurabile.

3.2 La conduzione

Per studiare i flussi termici in un solido, è necessario fare l'analisi della distribuzione della temperatura al suo interno. Per risolvere tale problema in maniera analitica occorre: stabilire alcune ipotesi (che ora verranno elencate) che sviluppare algebricamente le relazioni fondamentali. Le tre principali ipotesi sono:

1. il mezzo analizzato è costituito da un solido opaco a baricentro fermo con proprietà fisiche definite e indipendenti dal tempo;
2. le variazioni di volume, conseguenti alle variazioni di temperatura, sono trascurabili in confronto del volume stesso;

3. le sorgenti di calore interne descritte da $\dot{q}(x, y, z)$ rappresentano l'energia generata per unità di volume, nell'unità di tempo.

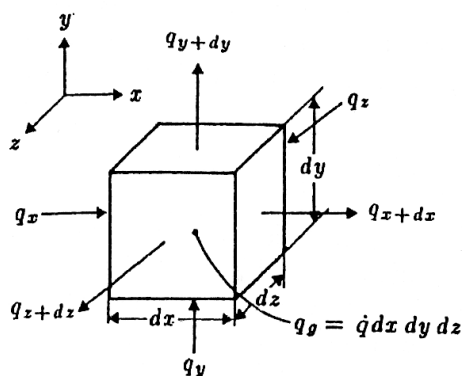


Figura 3.1: Elemento infinitesimo

Si prenda dunque un elemento infinitesimo di volume dV come quello di figura 3.1 tale che abbia gli spigoli di lunghezza dx , dy , dz orientati rispettivamente nelle direzioni x , y e z di un sistema di riferimento cartesiano. Considerando tale volumetto come un sistema chiuso, è possibile applicare il primo principio della termodinamica per i sistemi chiusi al corpo, ovvero

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{\delta Q}{d\tau} - \frac{\delta L}{d\tau} \quad (3.4)$$

dove dE , δQ e δL rappresentano rispettivamente l'energia totale del sistema, il calore e il lavoro scambiato dal sistema con l'ambiente circostante attraverso il contorno. L'energia totale del sistema è composta da vari contributi, in particolare dall'energia interna dU , dall'energia cinetica $mcdc$ e dall'energia potenziale $mgdz$. Fra questi tre addendi, l'unico ad essere diverso da zero è l'energia interna perché il solido è fermo (energia cinetica nulla) e ad altezza invariante (energia potenziale nulla). Inoltre, non avendo lavoro esterno, il termine δL si annulla. Il primo principio si semplificherà come segue:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dQ}{d\tau}. \quad (3.5)$$

Ricordando la definizione dell'energia interna

$$dU = C_v dT = \rho c_v dT dV \quad (3.6)$$

la (3.5) diventa

$$\frac{\rho c dT}{d\tau} dV = \frac{dQ}{d\tau} \quad (3.7)$$

dove nella (3.7) si è ommesso il pedice v dalla capacità termica specifica in quanto per i solidi non c'è differenza tra quella a volume costante e quella a pressione costante: $c_v = c_p = c$. Il termine nel membro di destra della (3.7), $dQ/d\tau$, rappresenta la potenza termica che viene scambiata dal volumetto dV e questo può avvenire in due modi: attraverso il suo contorno (quindi si parla di scambio termico conduttivo) oppure mediante la generazione/dissipazione interna. Per esplicitare tale termine si prenda di nuovo in considerazione l'elemento infinitesimo di figura 3.1. Si analizzi per il momento la sola componente in direzione x . Sulla faccia sinistra dell'elemento (di area $dydz$) entra un flusso termico \dot{q}_x che, avanzando della quantità dx , uscirà modificato in \dot{q}_{x+dx} . Il flusso termico uscente si può approssimare utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor troncando la scomposizione al secondo ordine:

$$\dot{q}_{x+dx} = \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \cdot dx + O(dx^2). \quad (3.8)$$

Il flusso termico netto nella direzione x sarà pertanto dato da $\dot{q}_{x+dx} - \dot{q}_x$, ovvero, usando la (3.8), equivalente a

$$\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx} = \dot{q}_x - \dot{q}_x - \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \cdot dx = -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \cdot dx. \quad (3.9)$$

Prendendo l'equazione (3.7), scrivendo la (3.9) anche per la direzione y e z , e introducendo l'ipotesi di Fourier (3.1), si ottiene

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV &= -\frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \cdot dydz - \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy \cdot dx dz - \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz \cdot dx dy + \dot{q}_g dx dy dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \cdot dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \cdot dx dz + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \cdot dx dy + \dot{q}_g dV. \end{aligned} \quad (3.10)$$

che dividendo ambi i membri per dV si ottiene l'equazione generale della conduzione termica

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_g \quad (3.11)$$

Tale equazione si riesce a scrivere in forma più compatta adottando la notazione vettoriale ottenendo così

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathbf{div} (k \mathbf{grad} T) + \dot{q}_g. \quad (3.12)$$

Se poi il materiale costituente il mezzo possiede una conducibilità termica k indipendente dalla temperatura, si può estrarre k dall'operatore divergenza, trasformando l'equazione (3.12) in

$$\alpha \mathbf{div}(\mathbf{grad} T) + \frac{\dot{q}_g}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (3.13)$$

dove $\alpha = k/(\rho c)$ è la diffusività termica.

Il termine $\mathbf{div}(\mathbf{grad} T)$ (o $\nabla^2 T$) espresso nella (3.13) è noto anche come laplaciano della temperatura e lo si esprime in modi diversi a seconda del sistema di riferimento preso in considerazione. Se cartesiano vale

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (3.14)$$

se cilindrico vale

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.15)$$

e se sferico vale

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \cdot \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (3.16)$$

La (3.13), l'equazione generale della conduzione per materiali con conducibilità termica indipendente dalla temperatura, assume vari denominazioni e varie forme a seconda del problema a cui è associata. Se si tratta di problema di scambio termico non stazionario in assenza di generazione di calore, l'equazione si trasforma in

$$\alpha \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (3.17)$$

e viene denominata *equazione di Fourier*. Mentre se si tratta di problema stazionario con generazione di calore l'equazione (3.13) si trasforma in

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3.18)$$

e viene denominata *equazione di Poisson*. Nel caso invece di conduzione stazionaria senza generazione di calore, l'equazione (3.13) si trasforma in

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3.19)$$

e prende il nome di *equazione di Laplace*.

Sebbene si conoscano la geometria e le proprietà termofisiche (ρ, c, k, \dots) del mezzo oggetto di studio, le equazioni appena viste non descrivono univocamente il fenomeno fisico di conduzione termica. Per avere un'unica soluzione è necessario specificare delle condizioni che si riferiscono ad un dominio spazio-temporale. Tali condizioni si dividono principalmente in due categorie: condizioni iniziali e condizioni al contorno. Le prime definiscono la distribuzione di temperatura nel mezzo all'istante temporale iniziale (usualmente per $\tau=0$), mentre le seconde definiscono la temperatura e/o flussi termici al contorno del mezzo considerato. In specifico, esistono 4 tipi di condizioni al contorno ed esse sono:

1. condizioni del primo tipo o di Dirichelet

Questa situazione si ha quando la distribuzione di temperatura è definita nel tempo e nello spazio sulla superficie S del mezzo:

$$T = T(x, y, z, \tau) \text{ su } S.$$

2. condizioni del secondo tipo o di Neumann

Questa situazione si ha quando la distribuzione di flusso termico è definita nel tempo e nello spazio sulla superficie S del mezzo:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}_n = \dot{q}_n(x, y, z, \tau) \text{ su } S$$

dove con n viene denotata la direzione normale alla superficie S .

3. condizioni del terzo tipo

Questa è la condizione al contorno di convezione ed è modellata come segue:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} - hT = hT_\infty(x, y, z, \tau)$$

dove con T_∞ è indicata, per genericità, la funzione temperatura ambiente e con h è indicato il coefficiente di convezione.

4. condizioni del quarto tipo o condizione di interfaccia

Questa condizione al contorno la si ha quando due componenti, di diversa conduttività termica k_1 e k_2 rispettivamente, si trovano ad essere in contatto. Se si esegue un bilancio di energia all'interfaccia, si ha che la potenza termica uscente dal materiale 1 (\dot{Q}_1) deve uguagliare la potenza termica entrante nel materiale 2 (\dot{Q}_2). Dunque, preso il sistema di riferimento come in figura 3.2, deve essere

$$\dot{Q}_1 = S \cdot \dot{q}_{1,n} = S \cdot k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = S \cdot k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = S \cdot \dot{q}_{2,n} = \dot{Q}_2$$

da cui ne deriva il modello matematico generico di questa quarta condizione:

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_i = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_i \quad (3.20)$$

dove con i è stata indicata una generica interfaccia.

Per facilità di comprensione, le quattro condizioni al contorno sono indicate in figura 3.2, facendo riferimento al caso di raffreddamento transitorio.

3.2.1 Il regime stazionario

Quando ci si riferisce ad un regime stazionario il fenomeno fisico risulta essere indipendente dal tempo. Nel caso particolare di conduzione in regime stazionario significa risolvere l'equazione di Poisson (3.18) o l'equazione di Laplace (3.19) in quanto nelle equazioni non compare la variabile temporale. In questa sezione ci si limiterà a risolvere solo il problema di conduzione termica stazionaria in assenza di generazione di calore (equazione di Laplace) in due casi unidimensionali: pareti a simmetria piana e pareti a simmetria cilindrica.

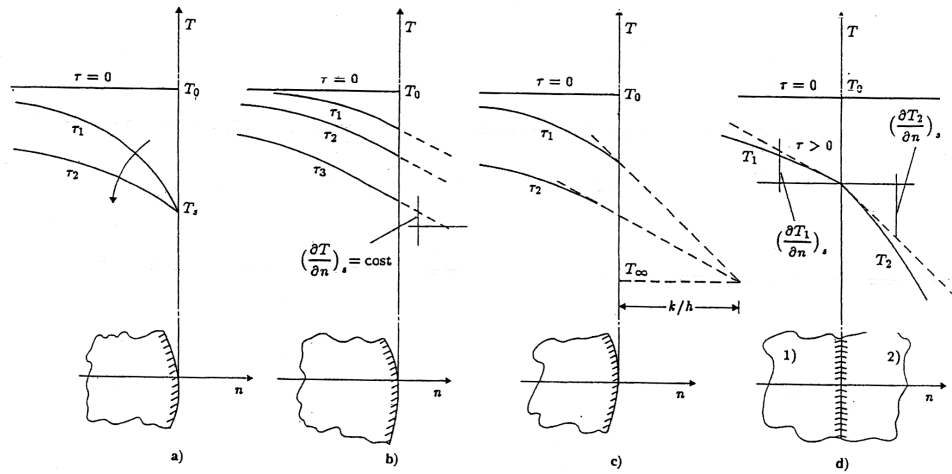


Figura 3.2: Rappresentazione schematica delle condizioni al contorno: a. del primo tipo, b. del secondo tipo, c. del terzo tipo e d. del quarto tipo

La lastra piana

Si consideri una lastra piana di spessore L e la si posizioni come indicato da figura 3.3, in cui sia infinitamente estesa nelle direzioni y e z e che abbia una superficie passante per $x = 0$. Si consideri poi che le temperature ad $x = 0$ e ad $x = L$ siano mantenute costanti e rispettivamente a T_1 e a T_2 , con $T_1 > T_2$. Il sistema di equazioni che governano il fenomeno sono le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 \\ T(x = 0) = T_1 \\ T(x = L) = T_2. \end{cases}$$

Avendo preso come sistema di riferimento un sistema di riferimento cartesiano, il termine $\nabla^2 T = 0$ è conveniente assumerlo come in (3.14). In aggiunta, visto che non esistono gradienti di temperatura nelle direzioni y e z a causa dell'assunzione di piastre infinitamente estese, $\nabla^2 T = 0$ si trasforma nella semplice equazione (3.21).

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (3.21)$$

Andando ad integrare due volte quest'ultima equazione differenziale, si ottiene l'integrale generale:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2 \quad (3.22)$$

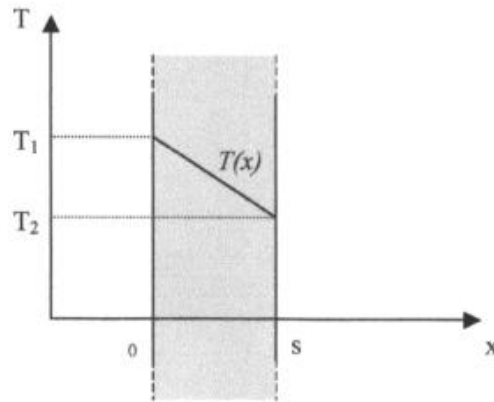


Figura 3.3: Conduzione di una lastra piana con conduttività termica costante

con C_1 e C_2 costanti di integrazione. Applicando ora le condizioni al contorno, si ha che

$$\begin{cases} T_1 = C_1 \cdot 0 + C_2 \\ T_2 = C_1 \cdot L + C_2 \end{cases}$$

da cui si ricavano le costanti di integrazione:

$$\begin{cases} C_1 = -(T_1 - T_2)/L \\ C_2 = T_1 \end{cases}$$

Sostituendo queste due costanti nella (3.22) si ottiene l'equazione che regola il fenomeno di scambio termico conduttivo in una lastra piana:

$$T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{L} \cdot x + T_1. \quad (3.23)$$

Per ricavare il flusso termico che viene ad instaurarsi tra le due superfici è sufficiente applicare l'equazione di Fourier (3.1):

$$\dot{\mathbf{q}} = -k \cdot \mathbf{grad}T \quad \text{da cui} \quad \dot{q} = -k \cdot \frac{dT}{dx} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{L}. \quad (3.24)$$

Nel caso sia necessario conoscere la potenza termica scambiata tra gli estremi della piastra, occorre moltiplicare il flusso termico appena ricavato con l'estensione della superficie della piastra.

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot A = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{L} \cdot A \quad (3.25)$$

La (3.25) si può rielaborare ottenendo così la nuova equazione

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R} = \frac{\Delta T}{R} \quad (3.26)$$

dove

$$R_{piastra} = \frac{L}{A \cdot k}. \quad (3.27)$$

Il termine R viene chiamato *resistenza termica di una piastra*. Questo nome deriva dal fatto che esiste una certa analogia con la legge di Ohm ($V = R \cdot I$) dove R sarebbe la resistenza, Q l'intensità di corrente I e ΔT il potenziale elettrico V .

Il cilindro

Si consideri un cilindro cavo infinitamente esteso con raggio esterno R_e e raggio interno R_i . Lo si posizioni nello spazio definito da coordinate cilindriche in modo tale che l'asse del cilindro sia sovrapposto all'asse z . Si consideri inoltre che sulle due superfici laterali, interna ed esterna, si abbiano temperature T_i e T_e rispettivamente, con $T_i > T_e$. Allora si può scrivere, analogamente al caso precedente, il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 \\ T(r = R_i) = T_i \\ T(r = R_e) = T_e. \end{cases}$$

Avendo preso come sistema di riferimento il sistema di riferimento cilindrico, il termine $\nabla^2 T = 0$ è conveniente assumerlo come in (3.15). In aggiunta, visto che il problema è assialsimmetrico e visto che non esiste gradiente di temperatura nelle direzione z a causa dell'assunzione di cilindro infinitamente esteso, $\nabla^2 T = 0$ si trasforma nella semplice equazione (3.28).

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.28)$$

Andando ad integrare due volte quest'ultima equazione differenziale, si ottiene l'integrale generale:

$$T(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad (3.29)$$

con C_1 e C_2 costanti di integrazione. Applicando ora le condizioni al contorno, si ha che

$$\begin{cases} T_i = C_1 \cdot \ln R_i + C_2 \\ T_e = C_1 \cdot \ln R_e + C_2 \end{cases}$$

da cui si ricavano le costanti di integrazione:

$$\begin{cases} C_1 = (T_e - T_i) / \ln(R_e/R_i) \\ C_2 = T_i - (T_e - T_i) \cdot \ln R_i / \ln(R_e/R_i) \end{cases}$$

Sostituendo queste due costanti nella (3.29) si ottiene l'equazione che regola il fenomeno di scambio termico conduttivo in un cilindro forato:

$$\frac{T(x) - T_i}{T_e - T_i} = \frac{\ln(r/R_i)}{\ln(R_e/R_i)}. \quad (3.30)$$

Derivando una volta rispetto a r , e moltiplicando il tutto per $-k$ si ottiene il flusso termico

$$\dot{q}(r) = -k \cdot \frac{(T_i - T_e)}{\ln(R_i/R_e)} \cdot \frac{1}{r}. \quad (3.31)$$

Volendo ricavare come prima la resistenza termica per il caso di cilindro forato, occorre moltiplicare il flusso termico per l'estensione della superficie laterale del cilindro di lunghezza ipotizzata pari a H . Da cui si ricava:

$$\dot{Q} = \dot{q}(r) \cdot 2\pi r H = 2\pi k H \frac{(T_i - T_e)}{\ln(R_e/R_i)}. \quad (3.32)$$

Rielaborando l'equazione e sfruttando l'analogia elettrica si ottiene la *resistenza termica di un cilindro* pari a

$$R_{cil} = \frac{\ln(R_e/R_i)}{2k\pi H}. \quad (3.33)$$

3.3 Conduzione all'interfaccia

Il concetto di resistenza termica è spesso utilizzato nello studio della conduzione in regime stazionario in quanto permette di risolvere con poco sforzo innumerevoli problemi tecnici. Si prenda per esempio il caso di una piastra costituita da due strati di materiale con proprietà termofisiche diverse (vedi fig. 3.4).

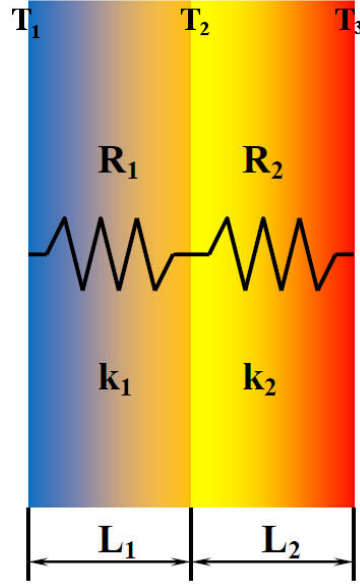


Figura 3.4: Conduzione attraverso piastra composta da due strati di materiali distinti

Posto di conoscere le temperature sulle facce esterne T_1 e T_3 e imponendo la condizione del quarto tipo all'interfaccia (3.20), si ha che il flusso termico deve essere

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L_1}{k_1 \cdot A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{L_2}{k_2 \cdot A}} \quad (3.34)$$

Rielaborando la (3.34) si ottiene

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_3}{\sum_{i=1}^2 R_i} \quad (3.35)$$

dove

$$\sum_{i=1}^2 R_i = \frac{L_1}{k_1 \cdot A} + \frac{L_2}{k_2 \cdot A}. \quad (3.36)$$

Questo è il tipico caso di resistenze in serie.

Occorre porre particolare attenzione all'equazione (3.34) in quanto, quando è stata scritta, si è assunto implicitamente una ulteriore condizione al contorno ovvero quella di avere su entrambi i lati dell'interfaccia la medesima temperatura T_2 . Infatti, la condizione del quarto tipo impone solamente di avere lo stesso flusso termico all'interfaccia, non la stessa temperatura.

Basti pensare, per esempio, che se i due strati della piastra non fossero perfettamente combacianti (a causa di superfici di contatto non perfettamente lisce e conformi tali da generare dei contatti puntiformi solo su alcune zone) sull'interfaccia si presenterebbe un certo salto di temperatura tra la piastra 1 e la piastra 2. Ciò che provoca questa caduta di temperatura viene denominata *resistenza termica di contatto*. Questo nome deriva dal fatto che questo fenomeno tende a ridurre il flusso termico tra due corpi accoppiati, e quindi a fare resistenza. Matematicamente, questa resistenza termica di contatto è definita

$$R_{TCR} = \frac{\Delta T_{Interfaccia}}{\dot{Q}} = \frac{1}{h_c \cdot A} \quad (3.37)$$

dove h_c è una sorta di ‘coefficiente convettivo’ che viene chiamato *conduttanza termica di contatto* o *Thermal Contact Conductance* da cui l’acronimo TCC.

Dunque, le equazioni (3.34) e (3.36) si devono modificare aggiungendo un terzo termine: quello della resistenza termica di contatto. La (3.34) diventerà

$$\dot{q} = \frac{T_1 - T_{2,1}}{\frac{L_1}{k_1 \cdot A}} = \frac{\Delta T_2}{h_c \cdot A} = \frac{T_{2,2} - T_3}{\frac{L_2}{k_2 \cdot A}} \quad (3.38)$$

con $\Delta T_2 = T_{2,1} - T_{2,2}$, mentre la (3.36) diventerà

$$\sum_{i=1}^3 R_i = \frac{L_1}{k_1 \cdot A} + \frac{1}{h_c \cdot A} + \frac{L_2}{k_2 \cdot A}. \quad (3.39)$$

Il secondo pedice della temperatura T_2 identifica a quale strato della piastra si riferisce (i.e. $T_{2,1}$ significa temperatura all’interfaccia 2, dal lato del corpo 1).

Generalmente i valori di conduttanza termica di contatto sono tabulati e graficati (vedi diagrammi 3.5), lo scopo di questa tesi di dottorato è ottenerli per via sperimentale, essendo i dati per gli accoppiamenti metallo-polimero non presenti in letteratura.

3.4 La meccanica del contatto

Quando si prendono due corpi solidi distinti e si cerca di farli compenetrare l’uno nell’altro, essi, entrano in contatto ed iniziano ad opporsi alla loro

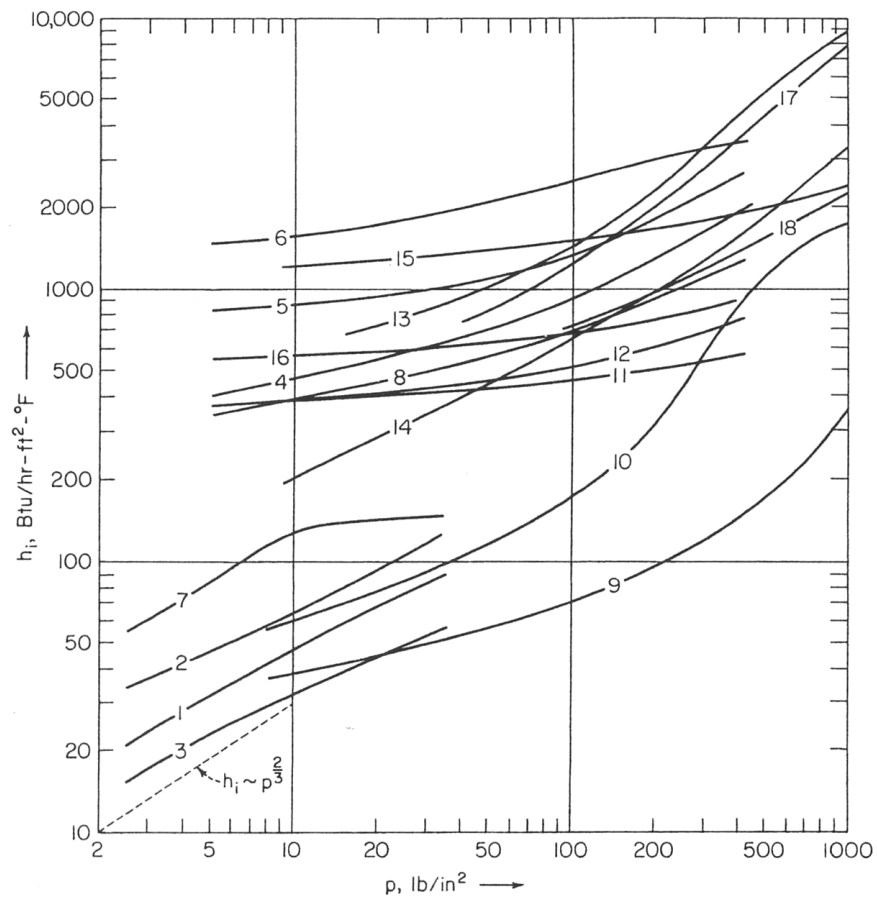


Figura 3.5: Le curve rappresentano le conduttanze termiche di contatto di materiali diversi a contatto e con diversa morfologia della superficie, secondo tabella 3.6

Curve	Material pair	RMS surface finish (μ in.)	Gap material	Mean contact temp. ($^{\circ}$ F)
1	aluminum (2024-T3)	48-65	vacuum (10^{-4} mm Hg)	110
2	aluminum (2024-T3)	8-18	vacuum (10^{-4} mm Hg)	110
3	aluminum (2024-T3)	6-8 (not flat)	vacuum (10^{-4} mm Hg)	110
4	aluminum (75S-T6)	120	air	200
5	aluminum (75S-T6)	65	air	200
6	aluminum (75S-T6)	10	air	200
7	aluminum (2024-T3)	6-8 (not flat)	lead foil (0.008 in.)	110
8	aluminum (75S-T6)	120	brass foil (0.001 in.)	200
9	stainless (304)	42-60	vacuum (10^{-4} mm Hg)	85
10	stainless (304)	10-15	vacuum (10^{-4} mm Hg)	85
11	stainless (416)	100	air	200
12	stainless (416)	100	brass foil (0.001 in.)	200
13	magnesium (AZ-31B)	50-60 (oxidized)	vacuum (10^{-4} mm Hg)	85
14	magnesium (AZ-31B)	8-16 (oxidized)	vacuum (10^{-4} mm Hg)	85
15	copper (OFHC)	7-9	vacuum (10^{-4} mm Hg)	115
16	stainless/aluminum	30/65	air	200
17	iron/aluminum	—	air	80
18	tungsten/graphite	—	air	270

Figura 3.6: Tipi di provini a contatto

compenetrazione generando una reazione interna tale da equilibrare la forza applicata esternamente. Questa forza, che si trasmette mutuamente tra i corpi, provoca una deformazione dei corpi stessi. Lo studio accurato di cosa accade nell'intorno della zona di contatto è trattato nella *meccanica del contatto*.

La base di partenza per comprendere il fenomeno del contatto è capire innanzitutto qual'è realmente la morfologia delle superfici dei corpi. Molto spesso, ad occhio nudo, una superficie ci può apparire liscia (come ad esempio quella di uno specchio oppure di un componente meccanico lappato), ma se la si osserva al microscopio si può vedere che non differisce da una superficie ruvida in quanto entrambe le superfici sono dotate di una certa rugosità. La rugosità è definita, dalla normativa UNI ISO 4287, come l'insieme delle irregolarità superficiali, con passo relativamente piccolo, lasciate dal processo di lavorazione utilizzato o da altri fattori influenti, dove con il termine irregolarità si intende l'ammontare delle asperità (creste e valli) presenti sulla superficie. Quello che distingue una superficie ruvida da una superficie liscia è quindi la conformazione delle creste e delle valli. Ne deriva che accostando fra loro due corpi, il contatto interessa dapprima le creste più accentuate, e poi via via altre sporgenze, fino a che l'area complessiva delle zone di contat-

to effettivo è sufficiente per sostenere il carico. Ne deriva quindi che l'area di contatto effettiva (A_r , dove il pedice r sta per reale) è sempre minore dell'area apparente di contatto (A_a), che sarebbe l'area di contatto tra i due corpi se si toccassero con superfici perfettamente lisce. Usualmente l'area effettiva di contatto (A_r) non supera mai il 10% di quella apparente (A_a).

Se si sottopongono i due corpi anche ad una differenza di temperatura, trascurando sia l'effetto dell'irraggiamento che la presenza di fluidi interposti tra i copri, il flusso di energia termica dal corpo a temperatura più alta a quello a temperatura più bassa deve per forza attraversare l'area effettiva di contatto. Si capisce quindi che si ha un forte impedimento all'attraversamento del flusso termico. Lo studio accurato della resistenza termica di contatto prevede quindi una simultanea presa in considerazione della teoria della meccanica del contatto e della teoria della trasmissione del calore.

Prima di approfondire lo studio della conduttanza termica di contatto è opportuno classificare le tipologie dei contatti in quanto per ogni categoria esistono diversi modelli matematici per il calcolo della TCC. Una prima importante classificazione è quella in base alle caratteristiche delle superfici che entrano in contatto ovvero:

- Contatto tra superfici *conformi* e
- Contatto tra superfici *non-conformi*

dove con il termine *conformi* si intendono superfici che si adagiano perfettamente l'una sull'altra, per tutta la loro estensione. Un caso tipico di superfici conformi sono ad esempio due piastre a contatto. Invece il contatto tra superfici non-conformi si intendono quei contatti che avvengono limitatamente a una piccola zona della superficie del corpo. Un esempio possono essere dei pneumatici di un'autovettura sull'asfalto oppure delle sfere appoggiate ad un piano, ecc. A sua volta i contatti tra superfici non-conformi possono suddividersi in:

- contatto di punto (sfera su piano/su cilindro/con sfera) e
- contatto di linea (cilindro su cilindro)

Il fatto di avere due superficie di contatto conformi, implica una sostanziale semplificazione del problema del calcolo della superficie apparente di contatto A_a e del calcolo della pressione di contatto media P . Infatti, l'area apparente A_a è data dalla massima estensione della superficie più piccola tra i corpi in contatto e la pressione risulta essere semplicemente costante per tutta la superficie e di valore $P = F/A_a$ dove con F si indica la forza applicata ai due corpi. Ben diversa sarebbe stata la condizione di superfici non-conformi in quanto sia l'area apparente che la pressione di contatto sarebbero risultate funzioni non lineari del carico applicato: per esempio, nel caso di corpi sferici in deformazione puramente elastica (sotto tutte le ipotesi relative ai contatti Hertziani), l'area di contatto apparente sarebbe stata una circonferenza di raggio a pari a

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi F(k_1 + k_2)R_1R_2}{4(R_1 + R_2)}}$$

con pressione massima pari a

$$P_{max} = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2}$$

dove con R e k si sono indicati rispettivamente i raggi e le caratteristiche elastiche delle sfere. I pedici 1 e 2, invece, indicano il numero della sfera. In particolar modo, le costanti elastiche k valgono

$$k = \frac{1 - \nu^2}{\pi E}$$

dove ν ed E sono rispettivamente il coefficiente di Poisson e il modulo di elasticità.

3.5 Resistenza di accoppiamento

Dopo questa brevissima digressione sulle superfici non conformi, occorre capire come modellare il trasferimento di energia termica tra un corpo e l'altro. Una prima ipotesi che si fa è quella di considerare il flusso termico solo tra i punti di contatto delle irregolarità superficiali, trascurando così un eventuale effetto irraggiamento (in base a [19] è trascurabile se $T \leq 300^\circ C$) ed

un effetto conduttivo/convettivo del fluido che si interpone negli interstizi tra le creste delle rugosità. A questo punto si può pensare di modellare il singolo punto di contatto come in figura 3.7: ovvero due cilindri di raggio R infinitamente estesi che entrano in contatto solo in una areola di raggio c concentrica col cilindro. Questa schematizzazione, che oltretutto è la base di molti studi [8, 9, 10, 25, 34] ed è tanto più vera quanto più le altezze delle asperità superficiali risultano essere maggiori del raggio di curvatura delle creste. E' dimostrato da Cetinkale e Fishenden [8] che i due cilindri a contatto, seppur aventi conducibilità termiche diverse, possiedono, in corrispondenza del punto di contatto, un piano isoterma: questa dimostrazione porta ad una semplificazione del problema in quanto, piuttosto che studiare l'intero assieme, è sufficiente studiare un singolo cilindro imponendo sulla superficie di contatto una distribuzione uniforme di temperatura.

Si consideri allora il solo cilindro superiore. Per trovare la distribuzione di temperatura nel corpo occorre risolvere l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 T = 0$$

che soddisfi alle seguenti condizioni al contorno:

$$T = T_0 = \text{uniforme} \quad \text{per} \quad 0 < r < a, z = 0 \quad (3.40)$$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{per} \quad a < r < b, z = 0 \quad (3.41)$$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow \frac{Q}{\pi b^2} \quad \text{per} \quad z \rightarrow \infty \quad (3.42)$$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{per} \quad r = b \quad (3.43)$$

$$\text{no singularità} \quad \text{per} \quad r = 0. \quad (3.44)$$

Purtroppo un problema con tali condizioni al contorno non è analiticamente risolvibile e quindi si possono scegliere 2 strategie per aggirare l'ostacolo: la prima, è quella di sostituire la condizione al contorno di temperatura nella regione $0 < r < a, z = 0$ con una condizione di flusso termico come hanno proposto Roess [34] e Mikic [25]; la seconda, è quella di trattare il problema per via numerica come proposto da Clausing [9].

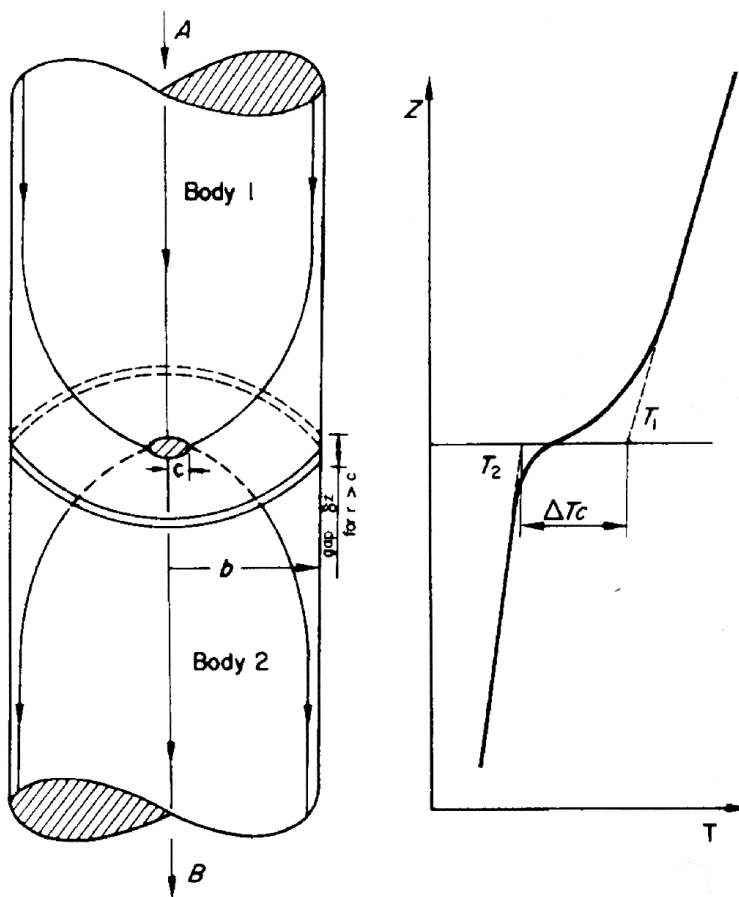


Figura 3.7: Canale di flusso elementare

3.5.1 Il metodo semi-analitico

Adottando il primo metodo, il problema può essere così risolto. Le (3.42) e (3.44) forniscono una soluzione della forma:

$$T = \frac{Q}{k_1 \pi b^2} z + \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n e^{-\alpha_n z} J_0(\alpha r)\} + C_0 \quad (3.45)$$

dove gli autovalori α_n sono determinati dalla (3.43) mediante la relazione

$$J_1(\alpha_n b) = 0, \quad (3.46)$$

mentre i valori di C_0 e C_n dovrebbero essere ricavati dalla (3.40) e (3.41). Per rendere risolvibile il sistema si sostituisce ora la condizione al contorno di temperatura uniforme (3.40) con una condizione al contorno di gradiente di temperatura tale che generi una distribuzione di temperatura sull'area $0 < r < a, z = 0$ quasi uniforme. Quando il rapporto a/b è piuttosto piccolo, si ha che il gradiente deve valere

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{2\pi k_1 a \sqrt{a^2 - r^2}}$$

e quindi, sotto tali ipotesi, si sostituiscono alla (3.40) e (3.41) le seguenti relazioni:

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{Q}{2\pi k_1 a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad \text{per} \quad 0 < r < a, z = 0 \quad (3.47)$$

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{per} \quad a < r < b, z = 0. \quad (3.48)$$

Ritenendo che questa approssimazione sia accettabile, si possono determinare i coefficienti C_n di (3.45) usando la (3.46), la (3.47), la (3.48), le proprietà di ortogonalità delle funzioni di Bessel e la relazione di integrale

$$\int_0^a \frac{r J_0(\alpha r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha} \quad (3.49)$$

ricavando così

$$\frac{Q}{\pi k_1 b^2} \int_0^b r J_0(\alpha r) dr + C_n \alpha_n \int_0^b r J_0^2(\alpha r) dr = \frac{Q}{2\pi k_1 a} \int_0^a \frac{r J_0(\alpha r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \quad (3.50)$$

e quindi

$$C_n \alpha_n \frac{b^2}{2} J_0^2(\alpha_n b) = \frac{Q}{2\pi k_1 a} \frac{\sin(\alpha_n a)}{\alpha_n}. \quad (3.51)$$

Sostituendo i C_n ottenuti dalla (3.51) nella equazione (3.45) si ottiene:

$$T = \frac{Q}{k_1 \pi b^2} z + \frac{Q}{k_1 \pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\alpha_n z} \frac{\sin(\alpha_n a) J_0(\alpha_n r)}{(\alpha_n b)^2 J_0^2(\alpha_n b)} \right\} + C_0. \quad (3.52)$$

Da notare che, per $z \rightarrow \infty$ T risulta essere indipendente da raggio b del cilindro, infatti

$$z \rightarrow \infty \implies T \rightarrow \left\{ C_0 + \frac{Q}{\pi k_1 b^2} z \right\}. \quad (3.53)$$

Da questo limite si vede che il valore di $T|_{z=0}$ deve essere pari a C_0 nel caso di contatto ipotetico ($a = b$) perché il secondo addendo rappresenta solo l'incremento di temperatura lungo l'asse z a causa del flusso termico. Ma, avendo posto le condizioni (3.47) e (3.48) al posto delle (3.40) e (3.41) perché il rapporto a/b è stato ipotizzato piccolo, si può calcolare l'effettiva temperatura media T_0 per $z = 0$ con una semplice media integrale sulla superficie a $z = 0$ ed $r < a$. La temperatura media T_0 sarà quindi:

$$T_0 = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a (T)_{z=0} 2\pi r dr = C_0 + \frac{Q}{4k_1 a} \psi(a/b) \quad (3.54)$$

dove

$$\psi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{8b}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha_n a) J_1(\alpha_n r)}{(\alpha_n b)^3 J_0^2(\alpha_n b)}. \quad (3.55)$$

Come si può notare, la differenza di temperatura tra caso $a = b$ e caso a/b molto piccolo consiste in

$$\Delta T_1 = \frac{Q}{4k_1 a} \psi\left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.56)$$

Dividendo la (3.56) per la potenza termica Q , si ottiene la resistenza di costrizione R_c

$$R_c = \frac{\Delta T_1}{Q} = \frac{1}{4k_1 a} \psi\left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.57)$$

Ricordando che tutto ciò che è stato trattato vale solo per il corpo 1, e quindi, essendo 2 le asperità a contatto, occorre ripetere il ragionamento per il corpo 2 e sommare i due ΔT risultando così:

$$\Delta T_{tot} = \frac{Q}{2ka} \psi\left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.58)$$

con

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (3.59)$$

Per calcolare il valore numerico di ψ in funzione del parametro a/b occorre risolvere integralmente l'equazione (3.55), ma diversi autori [34, 10], per facilità di calcolo, hanno fornito delle approssimazioni limitando il campo di utilizzo. Nella tabella (3.1) vengono riportate le equazioni con il relativo autore. Le funzioni elencate sono graficate in figura (3.8).

Autore	Approssimazione	Campo validità
Roess	$\psi(a/b) \approx 1 - 1.40925(a/b) + 0.29591(a/b)^3 + 0.05254(a/b)^5 + 0.02105(a/b)^7 + 0.01107(a/b)^9 + O(a/b)^9$	$0 \leq (a/b) \leq 1$
Cooper et al. (1)	$\psi \approx [1 - (a/b)]^{1.5}$	$0 \leq (a/b) \leq 1$
Cooper et al. (2)	$\psi \approx 1 - 1.4(a/b)$	$(a/b) \leq 0.5$
Cooper et al. (3)	$\psi \approx 1$	(a/b) molto piccoli

Tabella 3.1: Correlazioni Calcolo ψ

3.5.2 Il metodo numerico

Col secondo metodo, invece, è stato possibile ricavare il valore di ψ per tutto l'intervallo $[0; 1]$ senza alcuna approssimazione, se non quelle derivanti dagli errori di troncamento e discretizzazione spaziale del modello alle differenze finite. Utilizzando un algoritmo alle differenze finite non si ha più l'opzione di trattare un cilindro di lunghezza infinita, quindi non si può più applicare la condizione (3.42). Clausing ha ovviato a questa limitazione realizzando diversi modelli a lunghezza ℓ crescente fino ad osservare una costanza del risultato: a quel punto, l'autore ha supposto che quel risultato fosse lo stesso del modello a lunghezza infinita. Inoltre, adottando questa strategia, l'autore è riuscito a stimare la dipendenza del valore di resistenza di costrizione dall'estensione assiale del cilindro. Per rendere i risultati indipendenti dalla geometria da lui utilizzata, ha deciso di adimensionalizzarli scegliendo come

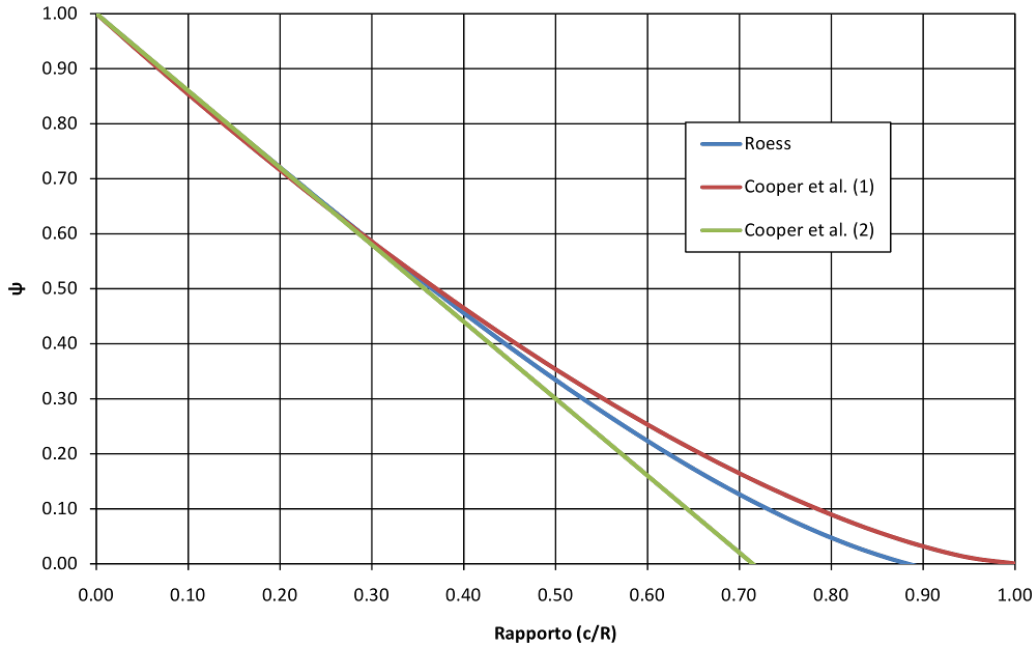


Figura 3.8: Grafico approssimazioni della funzione ψ

grandezza di confronto la resistenza di costrizione adimensionale. Questa grandezza è definita come:

$$R_c^* = \frac{kR_c\pi b^2}{b} \quad (3.60)$$

che si può ritrascrivere in termini di ψ utilizzando la definizione (3.57). Per comodità del lettore, il legame diretto tra ψ ed R_c^* viene esplicitato:

$$\psi = \frac{4a}{\pi b} R_c^* \quad (3.61)$$

In tabella (3.1) sono rappresentati i valori di R_c^* in funzione del rapporto a/b e del rapporto ℓ/b .

Volendo confrontare i risultati ottenuti per via numerica col primo metodo, occorre confrontare i valori dell'ultima riga della tabella una volta convertiti in ψ . Per semplicità di confronto, nella tabella (3.3), vengono riportati i valori di ψ derivanti dall'equazione di Roess (3.1), dalla simulazione numerica di Clausing e il confronto tra di essi.

Come si può notare i valori ottenuti tra i due metodi sono molto simili se si considera un intervallo $[0;0.6]$ in quanto il metodo Roess sottostima il valore di ψ fino ad un massimo del 5%. Per valori più grandi di estensione

Tabella 3.2: Resistenza di costruzione adimensionale R_c^*

R_c^*	Valori di (a/b)													
	0.167	0.233	0.3	0.367	0.433	0.5	0.567	0.633	0.7	0.767	0.833			
0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0667	1.689	0.906	0.552	0.3600	0.247	0.173	0.122	0.0856	0.0589	0.0389	0.0231			
0.1333	2.542	1.446	0.911	0.6080	0.4216	0.2970	0.210	0.1460	0.0990	0.0630	0.0352			
0.2000	3.000	1.772	1.145	0.7760	0.5425	0.3830	0.270	0.1861	0.1240	0.0765	0.0407			
0.2670	3.257	1.972	1.299	0.8878	0.6237	0.4410	0.3090	0.2115	0.1387	0.0836	0.0434			
0.4000	3.494	2.169	1.452	1.006	0.7105	0.5014	0.3495	0.2360	0.1522	0.0897	0.0452			
0.6000	3.597	2.258	1.526	1.063	0.7523	0.5306	0.3680	0.2470	0.1575	0.0919	0.0459			
0.8000	3.618	2.277	1.542	1.077	0.7615	0.5368	0.3720	0.2493	0.1584	0.0923	0.0459			
1.0000	—	2.281	1.544	1.080	0.7636	0.5380	0.3728	0.2498	0.1585	0.0924	0.0460			
1.2000	—	—	—	—	0.764	—	0.3729	—	—	—	—			
∞	3.625	2.283	1.545	1.080	0.764	0.539	0.373	0.250	0.159	0.0924	0.0460			

Tabella 3.3: Confronto dei valori di ψ

Confronto ψ			
(a/b)	Roess	Clausing	Err
0.000	1.000	1.000	0.0%
0.167	0.766	0.771	-0.6%
0.233	0.675	0.677	-0.3%
0.300	0.585	0.590	-0.8%
0.367	0.498	0.505	-1.4%
0.433	0.415	0.421	-1.5%
0.500	0.334	0.343	-2.6%
0.567	0.258	0.269	-4.0%
0.633	0.189	0.201	-6.0%
0.700	0.126	0.142	-11.1%
0.767	0.071	0.090	-21.5%
0.833	0.026	0.049	-46.3%

della zona di contatto ($a/b < 0.6$) occorre utilizzare i valori di Clausing. Per quanto riguarda la dipendenza della resistenza di costrizione dal valore di ℓ/b , vengono illustrati, in tabella (3.4), i dati di R_c^* scalati rispetto ai valori relativi a $\ell/b \rightarrow \infty$.

3.6 Contatto tra superfici conformi

Illustrate le fondamenta per il calcolo della resistenza termica di contatto, si può iniziare ora a trattare l'argomento partendo dal contatto tra due corpi che possiedono superfici conformi. Per poter stimare il valore della conduttanza termica di contatto si può partire dall'equazione (3.58) che, ritrascritta esplicitando il flusso termico Q e aggiungendo il pedice i per indicare l' i -esimo punto di contatto tra le asperità, ha la forma:

$$Q_i = 2 \cdot k \cdot a_i \cdot \Delta T_c \cdot \frac{1}{\psi_i}$$

Tabella 3.4: Effetto della lunghezza del cilindro (ℓ/b)

$\frac{R_c^*}{R_c^* _{\ell/b \rightarrow \infty}}$	Valori di (a/b)										
	0.167	0.233	0.3	0.367	0.433	0.5	0.567	0.633	0.7	0.767	0.833
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.067	0.466	0.397	0.357	0.333	0.323	0.321	0.327	0.342	0.370	0.421	0.502
0.133	0.701	0.633	0.590	0.563	0.552	0.551	0.563	0.584	0.623	0.682	0.765
0.2	0.828	0.776	0.741	0.719	0.710	0.711	0.724	0.744	0.780	0.828	0.885
0.267	0.898	0.864	0.841	0.822	0.816	0.818	0.828	0.846	0.872	0.905	0.943
0.4	0.964	0.950	0.940	0.931	0.930	0.930	0.937	0.944	0.957	0.971	0.983
0.6	0.992	0.989	0.988	0.984	0.985	0.984	0.987	0.988	0.991	0.995	0.998
0.8	0.998	0.997	0.998	0.997	0.997	0.996	0.997	0.997	0.996	0.999	0.998

Valori di (ℓ/b)

Il flusso di energia termica per unità di superficie apparente A_a diventa

$$\frac{Q}{A_a} = \frac{\sum Q_i}{A_a} = 2 \cdot k \cdot \Delta T_c \cdot \sum \frac{a_i/A_a}{\psi_i}.$$

Trascurando poi le variazioni del parametro geometrico ψ_i rispetto a quelle di a_i per tutti i punti di contatto, si ottiene

$$\frac{Q}{A_a} \approx \frac{2k\Delta T_c}{\psi} \sum a_i/A_a \quad (3.62)$$

dove ψ è stato supposto pari a

$$\psi = [1 - (a_i/b_i)_{avg}]^{1.5}.$$

Segue che la conduttanza termica di contatto è

$$h_c = \frac{Q/A_a}{\Delta T_c} = \frac{2k}{\psi} \sum a_i/A_a. \quad (3.63)$$

Dunque, per calcolare il valore di h_c , occorre conoscere $\sum a_i/A_a$. Per la determinazione di questa sommatoria esistono diversi approcci e tutti quanti vertono sulla costruzione di un modello matematico a partire da parametri derivanti dalla caratterizzazione morfologica della superficie (rugosità media, altezza delle asperità, la media del valore assoluto della pendenza, ecc...) per poi finire alla trattazione delle deformazioni che subisce la superficie. La descrizione morfologica, fino a qualche anno fa, è stata sempre ricavata dall'analisi della superficie mediante profilometro monodimensionale in quanto non esistevano altre tipologie di strumentazione da laboratorio.

Il fatto però di avere rilievi 1-D ha portato ad avere grosse limitazioni nel descrivere le superfici in quanto tali rilievi sono insensibili alla tipologia di lavorazione a macchina utensile. Molto spesso, infatti, a seconda del verso di scansione del componente, si ottengono valori di rugosità estremamente diversi; basti pensare ad una lavorazione di fresatura: la rugosità ottenuta analizzando la superficie in direzione longitudinale alla lavorazione meccanica è molto più fine rispetto a quella in direzione trasversale.

Oggi, però, c'è sicuramente la possibilità di poter migliorare questi modelli in quanto esistono attrezzature da laboratorio tali da eseguire addirittura rilievi 3-D.

In questa trattazione sono stati scelti come parametri di riferimento per la descrizione della superficie la distribuzione delle altezze delle asperità (picchi assoluti e relativi) e la distribuzione delle pendenze media lungo il profilo acquisito, supponendo che le distribuzioni siano gaussiane. In particolar modo, i valori numerici corrispondenti alle due distribuzioni appena nominate sono rispettivamente la deviazione standard dell'altezza del profilo σ e la media del valore assoluto della pendenza del profilo $\tan \theta$. Altri modelli di caratterizzazione della superficie, come ad esempio quelli di Greenwood [13] e Archard [38], utilizzano rispettivamente:

- la distribuzione delle altezze dei picchi assoluti e la forma delle asperità e
- la distribuzione delle altezze della asperità superficiali (picchi assoluti e relativi) e la funzione di autocorrelazione.

Non sono stati adottati questi modelli in quanto il primo, per come è formulato nella pubblicazione [13], è inconsistente a causa dell'imposizione di legame tra il raggio di curvatura dell'asperità e l'altezza della asperità stessa (in realtà non esiste alcuna correlazione tra i due valori), mentre il secondo tende ad essere maggiormente restrittivo rispetto a quello utilizzato. Usando i parametri σ e $\tan \theta$, è possibile ritrascrivere le equazioni (3.63) in forma adimensionale

$$h^* = \frac{2 \cdot \alpha}{\psi} \quad (3.64)$$

dove

$$h^* \equiv \frac{h\sigma}{k \tan \theta} \quad (3.65)$$

e

$$\alpha \equiv \frac{\sigma}{\tan \theta} \sum \frac{a_i}{A_a}. \quad (3.66)$$

Da notare che la relazione (3.64) non dipende dal modo di deformazione, ma i parametri sì; quindi ora si cercherà di ottenere i parametri ψ e α a seconda che la deformazione delle asperità sia plastica, elastica o elastoplastica.

3.6.1 Deformazione plastica pura

Nella maggior parte dei casi pratici, è possibile trattare le deformazioni plastiche come pure interazioni geometriche tra le asperità delle superfici di contatto. Con il concetto di una sola superficie rugosa, avendone una con rugosità equivalente in contatto con una liscia, questo modello presuppone che le asperità vengano appiattite o, equivalentemente, penetrino nella superficie liscia senza cambiamento di morfologia di superficie (vedi figura 3.9). Dunque, prendendo le due superfici e ponendole ad una distanza di Y , significa tagliare il profilo alla distanza Y dalla linea media della superficie equivalente e trascurare la parte superiore.

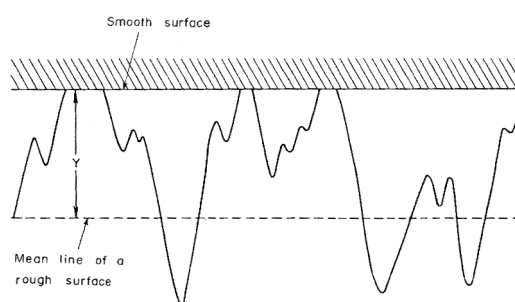


Figura 3.9: Contatto con deformazione plastica

Si è visto [10] che, usando questo modello, e descrivendo la superficie con una distribuzione Gaussiana delle altezze dei picchi e una distribuzione delle pendenze casuale, ma indipendente dalle altezze dei picchi, diversi importanti parametri di contatto sono espressi in funzione della distanza Y dei corpi. L'ipotesi di distribuzione Gaussiana delle altezze dei picchi è certamente rispettata nei casi di nostro interesse in quanto, essendo gli stampi interamente finiti a mano, non esiste una direzione preferenziale di lavorazione perché tutte le lavorazioni avvengono in direzione del tutto casuale. Alla luce delle ipotesi fatte, si definisce la frazione dell'area reale a contatto come:

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \equiv Q(\eta) \quad (3.67)$$

con

$$\eta \equiv \frac{Y}{\sigma}$$

e la somma dei raggi di curvatura come:

$$\alpha = \frac{\exp^{-\eta^2/2}}{4 \cdot \sqrt{2\pi}}. \quad (3.68)$$

Imponendo che

$$Z(\eta) = \frac{e^{-\eta^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

si ottiene che

$$\alpha = \frac{Z(\eta)}{4}. \quad (3.69)$$

I valori della Q-Function $Q(\eta)$ sono ricavabili dalla tabella 3.5.

η	$Q(\eta)$	η	$Q(\eta)$	η	$Q(\eta)$	η	$Q(\eta)$
-2.0	0.97725	0.0	0.50000	0.0	0.50000	2.0	0.02275
-2.1	0.98214	-0.1	0.53983	0.1	0.46017	2.1	0.01786
-2.2	0.98610	-0.2	0.57926	0.2	0.42074	2.2	0.01390
-2.3	0.98928	-0.3	0.61791	0.3	0.38209	2.3	0.01072
-2.4	0.99180	-0.4	0.65542	0.4	0.34458	2.4	0.00820
-2.5	0.99379	-0.5	0.69146	0.5	0.30854	2.5	0.00621
-2.6	0.99534	-0.6	0.72575	0.6	0.27425	2.6	0.00466
-2.7	0.99653	-0.7	0.75804	0.7	0.24196	2.7	0.00347
-2.8	0.99744	-0.8	0.78814	0.8	0.21186	2.8	0.00256
-2.9	0.99813	-0.9	0.81594	0.9	0.18406	2.9	0.00187
-3.0	0.99865	-1.0	0.84134	1.0	0.15866	3.0	0.00135
-3.1	0.99903	-1.1	0.86433	1.1	0.13567	3.1	0.00097
-3.2	0.99931	-1.2	0.88493	1.2	0.11507	3.2	0.00069
-3.3	0.99952	-1.3	0.90320	1.3	0.09680	3.3	0.00048
-3.4	0.99966	-1.4	0.91924	1.4	0.08076	3.4	0.00034
-3.5	0.99977	-1.5	0.93319	1.5	0.06681	3.5	0.00023
-3.6	0.99984	-1.6	0.94520	1.6	0.05480	3.6	0.00016
-3.7	0.99989	-1.7	0.95543	1.7	0.04457	3.7	0.00011
-3.8	0.99993	-1.8	0.96407	1.8	0.03593	3.8	0.00007
-3.9	0.99995	-1.9	0.97128	1.9	0.02872	3.9	0.00005

Tabella 3.5: Valori della Q-Function

Inoltre, la pressione di contatto reale P_r in questo modo di deformazione è stata ipotizzata uguale alla microdurezza H del materiale più morbido

$$P_r = \frac{F}{A_r} = H$$

e quindi, essendo il carico F uguale a

$$F = P_a \cdot A_a$$

si ricava che

$$A = \frac{A_r}{A_a} = \frac{P_a}{H} \equiv P_p \quad (3.70)$$

dove con P_p si intende pressione superficiale adimensionale per il caso di deformazione plastica. Dalle equazioni (3.67) e (3.70) segue che

$$\eta = Q^{-1}(P_p),$$

e, inserendo quest'ultima nella (3.69), si ottiene

$$\alpha = \frac{1}{4} Z [Q^{-1}(P_p)].$$

Inserendo queste ultime due equazioni in 3.64 e (3.62) si ottiene

$$h_p^* = \frac{1}{2} \frac{Z [Q^{-1}(P_p)]}{(1 - \sqrt{P_p})^{1.5}} \quad (3.71)$$

che corrisponde ad un'espressione in forma chiusa per la conduttanza termica di contatto adimensionale. Da notare che questa equazione è funzione del solo parametro P_p e quindi della pressione di contatto. In figura 3.10 è mostrato l'andamento di tale funzione (curva con $\gamma = 0$). Molti autori [10, 25], anziché determinarsi il valore di Z e Q , hanno preferito ritrascrivere l'equazione apportando un piccola semplificazione ottenendo la correlazione semi-empirica

$$h_p^* = 1.13 \cdot P_p^{0.94} \rightarrow h_p = 1.13 \cdot \frac{k \tan \theta}{\sigma} \cdot \left(\frac{P_a}{H} \right)^{0.94} \quad (3.72)$$

che ricalca molto bene l'andamento originale della (3.71).

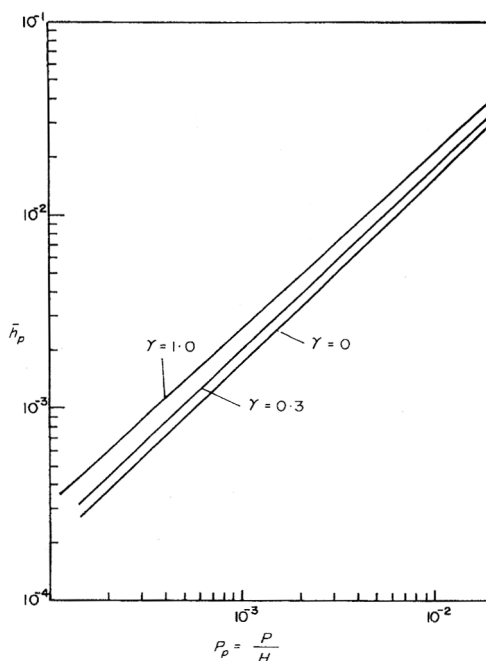


Figura 3.10: Andamento di h_p^* in funzione di P_p [25]

3.6.2 Deformazione plastica con flusso di materiale

Ammettere che le creste delle asperità delle superfici si possano elidere oltre alla quota Y dalla linea media di rugosità non è sempre corretto, soprattutto quando i carichi sono molto elevati e quindi la quota Y tende ad essere molto piccola. Una semplice analisi dell'equazione (3.67) mette in evidenza che per valori di η (o di Y) tendenti a zero, la frazione dell'area effettiva A acquisisce il valore di $1/2$ ($Q(\eta = 0) = 0.5$). Dunque, l'equazione (3.67) sovrastima l'area realmente a contatto perché il materiale che si sta deformando plasticamente (quello della cresta della rugosità) defluisce verso le valli della rugosità.

Alcuni ricercatori, come ad esempio Williamson e Pullen [33], hanno concluso dopo alcune sperimentazioni che il volume di materiale deformato rimane costante e che il materiale spostato plasticamente si comporta come se provocasse un aumento uniforme di tutta la superficie.

Dal momento che l'aumento uniforme non influenzerà la forma della superficie esterna alla zona di contatto, le equazioni (3.67) e (3.69) possono essere riutilizzate sostituendo il parametro η , correlato alla separazione reale,

con λ , correlato ad una separazione immaginaria, mediante una considerazione geometrica basata sul modello dell'aumento uniforme [33]. La risoluzione di tale modello porta al seguente sistema:

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda - \lambda \cdot Q(\lambda) - Z(\lambda) && \text{per } \lambda > 0 \\ \eta &= Z(\lambda) - |\lambda| Q(\lambda) && \text{per } \lambda < 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Per grandi valori positivi di λ ($\lambda > 1$) si ha che $\lambda \approx \eta$, mentre per $\lambda \rightarrow -\infty$ si ha che $\eta = 0$, e quindi dalla relazione (3.67), quando la separazione è nulla ($\lambda = -\infty$), la frazione di area a contatto diventa unitaria. In più, sempre Williamson e Pullen [33], hanno trovato che l'area interessata al microcontatto delle asperità non è proporzionale al carico, ma segue una legge empirica del tipo

$$A = \frac{P_p}{1 + P_p}. \quad (3.74)$$

Ricordando che la (3.71) è stata ricavata dalla (3.64) e sostituendo all'interno di α e ψ il valore di A con P_p usando l'equazione (3.70), possiamo ritrascrivere la (3.72) usando la (3.74) ottenendo così

$$h_p = 1.13 \cdot \frac{k \tan \theta}{\sigma} \cdot \left(\frac{P}{H + P} \right)^{0.94}. \quad (3.75)$$

Da notare che questa equazione, all'aumentare del carico, tende a ridurre il valore di h_p .

3.6.3 Deformazione elasto-plastica

Entrambi i modelli appena descritti non considerano l'effetto della deformazione elastica sotto i punti di contatto ed è lecito trascurare tale effetto solo se il modulo di elasticità della superficie è molto elevato oppure se la distanza tra i punti di contatto adiacenti è talmente piccola che si possa considerare approssimativamente, su tutta la superficie, uno stesso spostamento elastico. Alcune volte questi modelli non possono essere applicati in quanto normalmente esiste sempre uno spostamento elastico al di sotto del punto di contatto che risulta essere sempre maggiore rispetto allo spostamento elastico esterno dell'area di contatto. Come conseguenza, l'area di contatto per

la singola asperità deve essere più piccola per una data separazione se paragonata a quella del modello di una pura deformazione plastica. Questo è vero per tutti i punti di contatto; quindi, per l'intera superficie a data separazione, l'area di contatto risulta essere più piccola, o inversamente, per aver la stessa area in contatto, la separazione tra le superfici di contatto deve essere più piccola. Assumendo che la deformazione delle singole asperità non influenzi lo spostamento delle asperità adiacenti, per esempio che ogni deformazione dell'asperità possa essere considerata indipendente, si può concludere che il numero dei punti di contatto a data separazione rimanga invariato. Conseguentemente, segue da quanto appena descritto che la stessa area in contatto, con le modifiche proposte, è formata da un numero di contatti maggiore. Questo certamente influenzerà il valore della conduttanza termica di contatto.

Quando un carico è applicato ad una asperità che si deforma plasticamente, lo spostamento risultante ad essa associato è una combinazione di deformazione plastica della punta e da una deformazione elastica del substrato dell'asperità. Se si ipotizza che il materiale abbia un modulo di elasticità infinito, il contributo della deformazione elastica risulta essere nullo. Osservando la figura 3.11, per questo caso, si ha che lo spostamento vale

$$\Delta C_p = \frac{a_i^2}{2\rho_i} \quad (3.76)$$

dove a è il raggio della zona di contatto e ρ il raggio di curvatura della punta dell'asperità. La pressione sull'area di contatto, visto che il modo di

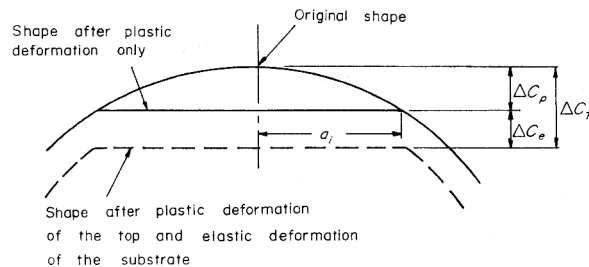


Figura 3.11: Deformazione di una asperità [25]

deformazione è stato assunto principalmente plastico, risulta essere pari alla

microdurezza H del materiale più tenero tra i due corpi a contatto. Ora, se si rimuove la condizione di modulo di elasticità infinito, lo spostamento verrà incrementato della quota parte della deformazione elastica ΔC_e ovvero

$$\Delta C_{tot} = \Delta C_p + \Delta C_e.$$

Per calcolare ΔC_e ci si può ricondurre al caso di deformazione elastica di un disco di raggio a_i con applicata una pressione pari a H . Tale problema ammette come soluzione [37]:

$$\Delta C_e = \frac{\pi a_i H}{2 E'} \quad (3.77)$$

Ne deriva che lo spostamento totale ΔC_{tot} vale:

$$\Delta C_{tot} = \frac{a_i^2}{2\rho_i} + \frac{\pi a_i H}{2 E'} \quad (3.78)$$

Se η è la distanza adimensionale tra i piani medi di contatto e chiamiamo ζ la medesima distanza considerata quando le asperità entrano in contatto, segue che la compressione delle asperità deve essere

$$C_{tot} = \sigma (\zeta - \eta) \quad (3.79)$$

con σ la deviazione standard delle altezze delle asperità. Dalle equazioni (3.78) e (3.79) ci si ricava il valore di a_i e, ritrascrivendolo in forma adimensionale, si ottiene:

$$a_i^* = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}(\rho^*)^2\gamma^2 + 2\rho^*(\zeta - \eta) - \frac{\pi}{2}\rho^*\gamma} \quad (3.80)$$

dove i parametri adimensionali valgono

$$a_i^* = \frac{a_i}{\sigma} \tan \theta \quad (3.81)$$

$$\gamma = \frac{H}{E' \tan \theta} \quad (3.82)$$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\sigma} \tan^2 \theta. \quad (3.83)$$

Con il parametro E si indica l'elasticità equivalente tra i corpi a contatto e viene definito come

$$\frac{1}{E'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Se denotiamo con n il numero dei punti di contatto per unità di area che provocano una variazione della separazione da ζ a $\zeta + \Delta\zeta$, si può esprimere la frazione di area di n punti di contatto (A) e α a data separazione η come:

$$A = \pi \int_{\eta}^{\infty} (a_i^*)^2 n'^* d\zeta \quad (3.84)$$

e

$$\alpha = \int_{\eta}^{\infty} a_i^* n'^* d\zeta \quad (3.85)$$

dove con n'^* si indica il gruppo

$$n'^* = \frac{n\sigma}{\tan^2 \theta}.$$

L'equazione (3.84) si ritrascrive, usando la (3.77) e (3.78), nella seguente forma:

$$A = 2\pi \int_{\eta}^{\infty} (\zeta - \eta) \rho^* n'^* d\zeta - \pi^2 \gamma \int_{\eta}^{\infty} a_i^* \rho^* n'^* d\zeta. \quad (3.86)$$

Essendo il primo integrale riguardante la parte plastica, esso deve valere come indicato nel primo modo di deformazione e quindi

$$A = Q(\eta) - \pi^2 \gamma \int_{\eta}^{\infty} a_i^* \rho^* n'^* d\zeta. \quad (3.87)$$

Il secondo integrale, invece, rappresenta la correzione dovuta alla deformazione elastica del substrato. Le equazioni per calcolare n'^* e ρ^* sono state ricavate da [24] e valgono:

$$\rho^* n'^* = \frac{\zeta}{2\pi} Z(\eta) \quad (3.88)$$

$$\rho^* \approx \frac{4}{\sqrt{\pi^3}} \frac{1}{\zeta}. \quad (3.89)$$

I valori di A ed α sono stati calcolati da [25], per diversi valori di η , in funzione di γ risolvendo le equazioni (3.80), (3.85), (3.87), (3.88) e (3.89). I risultati ottenuti sono mostrati in figura 3.12.

In questa figura sono rappresentati i valore di A/A_0 e α/α_0 ed i pedici 0 stanno ad indicare che i valori si riferiscono al modello puramente plastico. Analizzando il grafico si vede che l'area in contatto è maggiormente influenzata dalla modifica introdotta rispetto al parametro α . Inoltre, la variazione

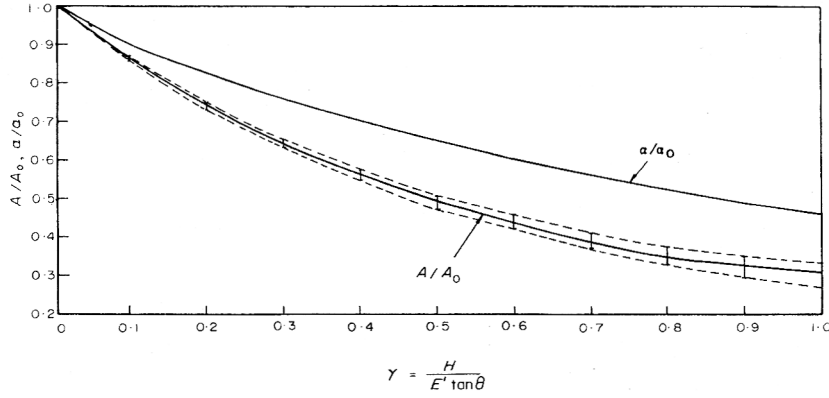


Figura 3.12: Effetto della deformazione elastica del substrato della asperità [25]

in α per dato γ è insensibile alla separazione. L'effetto della separazione η su A , a parità di γ , è presente, ma piuttosto debole; infatti le due curve a tratti mostrate sopra e sotto la linea continua di A/A_0 rappresentano una separazione con $\eta = 1$ e $\eta = 3$ rispettivamente (estremi dell'intervallo molto spesso utilizzato).

Si possono poi approssimare A e α , per il modello modificato che include la deformazione elastica del substrato, con

$$\begin{aligned} A &= \phi_1(\gamma)Q(\eta) \\ \alpha &= \phi_2(\gamma)\frac{Z(\eta)}{4} \end{aligned} \quad (3.90)$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le seguenti espressioni analitiche:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{1 + 2.5\gamma^{1.2}} \\ \phi_2 &= \frac{1}{1 + 1.05\gamma}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Dalle equazioni (3.64), (3.67), (3.69), (3.90) e (3.91) segue la relazione per h_p^* con inserimento della modifica della deformazione elastica:

$$h_{p,e}^* = \frac{Z(Q^{-1}[(1 + 2.5 \cdot \gamma^{1.2}) \cdot P_p])}{2 \cdot (1 + 1.05 \cdot \gamma)(1 - \sqrt{P_p})^{1.5}}. \quad (3.92)$$

In figura 3.10 è rappresentato h^* per valori di $\gamma = 0$ (h_p^*) e, $\gamma = 0.3$ e $\gamma = 1$ ($h_{p,e}^*$). Si può notare che un incremento di γ (un incremento della deformazione elastica) porta ad un incremento di h^* . Questo effetto è maggiormente

evidente a bassi carichi (bassi valori di P_p). Già in prossimità di $P_p = 10^{-3}$ con un acciaio inox con la superficie micro-pallinata ($\tan \theta \equiv 0.1$), si può stimare questo incremento in quasi il 17%.

Si noti che alle alte pressioni, l'effetto reale della deformazione elastica del substrato dovrebbe essere minore di quella indicata in figura perché il modello considera indipendenti le deformazioni delle singole asperità. Quando la distanza media tra i contatti non è così grande, gli spostamenti non possono più esser considerati indipendenti in quanto gli spostamenti di un contatto influenzano le asperità vicine. Questo causa una maggior uniformità di spostamento elastico delle asperità e quindi una riduzione dell'effetto della deformazione elastica del substrato sulla conduttanza termica di contatto.

3.6.4 La deformazione elastica

Se si considera il contatto Hertziano tra una asperità ed una superficie piana infinitamente rigida [37] di figura 3.11, l'area di contatto πa_i^2 è correlata allo spostamento ΔC_i dalla relazione

$$(\pi a_i^2)_e = \pi \cdot \Delta C_i \cdot \rho_i. \quad (3.93)$$

dove con a_i si intende il raggio dell'areola di contatto i-esima e ρ_i il raggio di curvatura della punta dell'i-esima asperità. Se invece la deformazione fosse puramente plastica, si otterrebbe da una considerazione geometrica

$$(\pi a_i^2)_p = 2 \cdot \pi \cdot \Delta C_i \cdot \rho_i. \quad (3.94)$$

Confrontando (3.93) con la (3.94) si evince che, alla stessa separazione η tra le superfici di contatto, l'area di contatto in pura deformazione plastica per una specifica asperità è doppia rispetto a quella elastica. Dato che questo è vero per tutte le asperità, allora deve valere anche per l'intera superficie interessata al contatto. Quindi, dato uno stesso valore di η , si ha

$$\frac{A_e}{A_p} = \frac{1}{2}$$

Usando questa relazione nella (3.67), si ha che per una deformazione elastica deve valere

$$A = \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \equiv \frac{1}{2} \cdot Q(\eta). \quad (3.95)$$

Analogamente, dall'equazione (3.69), si ottiene per la somma di tutti i raggi di contatto,

$$\alpha = \frac{\exp^{-\eta^2/2}}{8 \cdot \sqrt{2\pi}} \equiv \frac{Z(\eta)}{4\sqrt{2}}. \quad (3.96)$$

Alcuni ricercatori, come Greenwood e Williamson [13], hanno riportato che da rilievi sperimentali anche se il modo di deformarsi è elastico, l'effettiva area di contatto è approssimativamente proporzionale al carico applicato F : più i modelli utilizzati dai ricercatori per la descrizione della superficie sono complicati, più si sono avvicinati ad una diretta proporzionalità tra i due fattori. Mikic e Roca [26] hanno poi osservato la diretta proporzionalità. La relazione di questi ultimi è:

$$A = \frac{\sqrt{2}P_a}{E' \tan \theta} \equiv P_e \quad (3.97)$$

dove P_e è correlato ai parametri P_p e γ , utilizzando la (3.82), mediante l'equazione

$$P_e = \sqrt{2} \cdot P_p \cdot \gamma.$$

Dalle equazioni (3.64), (3.95), (3.96) e (3.97) segue una relazione per h_e^* (con pedice e in quanto ci si riferisce alla deformazione elastica) che vale:

$$h_e^* = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{Z[Q^{-1}(2P_e)]}{(1 - \sqrt{P_e})^{1.5}}. \quad (3.98)$$

In figura 3.13, h_e^* è rappresentato in funzione di P_e . Per confronto, sulla stessa figura, è stato riportato anche l'andamento di h_p^* in funzione di P_p . Facendo tutte le semplificazioni del caso, come già fatto per la (3.72), si ottiene l'equazione:

$$h_e^* = 1.55 \cdot P_e^{0.94} \rightarrow h_e^* = 1.55 \cdot \frac{k \tan \theta}{\sigma} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}P}{E' \cdot \tan \theta} \right)^{0.94} \quad (3.99)$$

Si può osservare dall'equazione (3.99) che h_e^* è debolmente dipendente dalla funzione $\tan \theta$ ($\approx \tan^{0.06} \theta$) e quindi, imponendo per esempio $\tan \theta = 0.1$, si ottiene una versione semplificata della (3.99):

$$h_e^* = 1.9 \cdot \frac{k}{\sigma} \cdot \left(\frac{P}{E'} \right)^{0.94}. \quad (3.100)$$

Dai modelli visti fino ad ora si possono trarre alcune prime conclusioni:

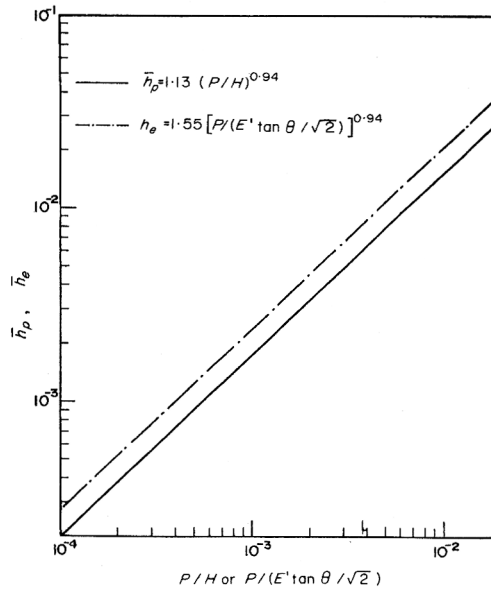


Figura 3.13: Effetto della pressione di contatto su h^* [25]

1. La pendenza della curva conduttanza termica-pressione di contatto è pressoché identica tra deformazione plastica e deformazione elastica ed assume un valore poco sotto l'unità (poco sotto i 45°), vedi figura 3.13;
2. Se P_e e P_p coincidono, la conduttanza termica di contatto è più alta per contatti con deformazione elastica. Non bisogna però trarre conclusioni affrettate in quanto, quando si ha l'uguaglianza tra i valori di pressione, non si ha la stessa pressione superficiale P_a in quanto P_e e P_p sono definiti dalla (3.97) e (3.70) rispettivamente. Quindi $P_e = P_p$ implicano la stessa pressione superficiale solo se soddisfatta l'uguaglianza

$$\frac{H}{E' \tan \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.101)$$

Guardando il grafico di figura 3.13, ci si può chiedere allora a che valore del rapporto P_e/P_p , con la stessa pressione superficiale, i due approcci forniscono la stessa conduttanza h^* . Dalle equazioni (3.99) e (3.72) si ottiene $P_e/P_p = 0.734$ o $\gamma = 0.52$. Ulteriormente, per $\gamma < 0.52$, alla medesima pressione, il modello della pura deformazione plastica raggiunge un valore di h^* più alto. Se $\gamma > 0.52$, accade esattamente l'opposto. Le osservazioni

appena fatte valgono solo se si osserva la figura 3.13 in quanto non vengono fornite esplicite indicazioni sul tipo di deformazione delle asperità avvengono realmente (elastica oppure plastica). Nel prossimo paragrafo si cercherà di delineare un metodo per identificare quale deformazione assumere.

3.6.5 Probabilità che avvenga un flusso plastico

Una assunzione a priori di un modo di deformazione delle asperità porta a conclusioni spesso sbagliate. Per esempio, se si assumesse una deformazione elastica delle asperità quando $\gamma \leq 0.52$, si avrebbe una sottostima del valore di h perché potrebbe avere luogo una deformazione plastica. Ad ogni modo, una maggior area di contatto si ha solo se la pressione di contatto eccede durezza del componente più morbido in quanto tale pressione garantirebbe un flusso di materiale deformato plasticamente. Contemporaneamente è vero anche che la deformazione elastica non può sussistere se la pressione di contatto è maggiore della durezza. Dunque, da [7], quando la pressione di contatto eccede $1.1\sigma_s$ (con σ_s carico di snervamento), il limite elastico sarà appena superato. Per praticità, viene fornita una correlazione [7] tra σ_s e la microdurezza H , ovvero:

$$\sigma_s = H/3.$$

Usando i questo risultato e rielaborando i dati si ottiene che per $\gamma \leq 0.33$ si ha deformazione plastica, mentre per $\gamma \geq 3$ si ha deformazione elastica. Per valori intermedi è giusto ritenere coesistano sia l'effetto elasticità che l'effetto plasticità delle asperità e perciò devono essere tenuti in considerazione entrambi mediante l'approccio elastico-plastico. In aggiunta, si è visto che il modo di deformazione dipende solo ed esclusivamente dalle proprietà del materiale (H ed E') e dalla forma delle asperità ($\tan \theta$) e non è sensibile al livello di pressione.

Capitolo 4

Problemi di conduzione termica inversa

Nello studio dello scambio termico, si può utilizzare l'analisi inversa per valutare ad esempio il flusso termico che attraversa una superficie, oppure una proprietà termo-fisica di un dato componente (conduttività termica k , calore specifico c , ecc.) sfruttando la misurazione della temperatura in uno o più punti definiti nel corpo analizzato in regime transitorio.

In questa tesi si farà uso di questa tecnica in quanto sarà l'approccio che ci permetterà di calcolare quale sia il flusso termico che si instaurerà tra stampo e polimero durante la fase di raffreddamento del manufatto. In specifico, le potenze termiche asportate dal punzone e dalla matrice verranno ricavate analizzando la distribuzione di temperatura del materiale che costituisce lo stampo, mentre la resistenza termica di contatto verrà calcolata a partire dalla temperatura superficiale del componente e dalla temperatura del polimero.

Le difficoltà riscontrate nell'implementazione di questa tecnica inversa è riconosciuta in quanto la soluzione del problema inverso risulta essere molto sensibile alle variazioni dei dati di input (valori di temperatura misurati) e agli errori di modellazione. In matematica questi tipi di problemi vengono classificati come problemi mal posti ('ill-posed problems') in quanto la loro soluzione non risulta soddisfare il criterio di esistenza, unicità e stabilità della soluzione al variare di una quantità infinitesima dei valori di input.

Per fare fronte a queste difficoltà sono stati studiati da diversi autori differenti tecniche di risoluzione: per esempio Stoltz [16] fu uno dei primi investigatori e utilizzò la risoluzione analitica del teorema di Duhamel. Di seguito è riportata la trattazione secondo la metodologia di Beck [2], stabile per passi temporali relativamente ridotti e applicabile sia in campo lineare che non lineare della proprietà del materiale.

4.1 Il teorema di Duhamel

Il teorema di Duhamel sta alla base del calcolo della soluzione dei problemi inversi in quanto, supponendo una linearità di calcolo, permette di sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti per ottenere la temperatura di un oggetto in ogni punto ed in ogni istante temporale. Si suppongano le seguenti condizioni:

- che $\phi(\mathbf{r}, t)$ sia una soluzione tale che corrisponda all'aumento (o risposta) di temperatura del corpo alla coordinata \mathbf{r} data dalla applicazione di una funzione gradino unitaria di flusso termico definito come

$$\begin{aligned} q(t) &= 0 \text{ per } t < 0 \\ q(t) &= 1 \text{ per } t > 0; \end{aligned} \tag{4.1}$$

- che le proprietà termiche dei corpi siano indipendenti dalla temperatura, ma eventualmente variabili con la coordinata spaziale;
- che il corpo si trovi ad una temperatura iniziale pari a $T_0 = T(t = 0)$;
- che il flusso termico sia funzione della sola variabile tempo ¹.

Ragionando a livello discreto (e non a livello infinitesimale, almeno per ora) si può pensare al flusso termico entrante in una superficie come quello

¹Questa supposizione è molto forte, ma è stata supposta tale per la trattazione del problema della tesi. In realtà la trattazione di questo problema è del tutto estendibile ad una condizione di flusso termico così definito: $q(s, t) = f(t)g(s)$ dove si nota che le funzioni f e g dipendono rispettivamente solo dalla coordinata tempo e coordinata spaziale lungo la superficie.

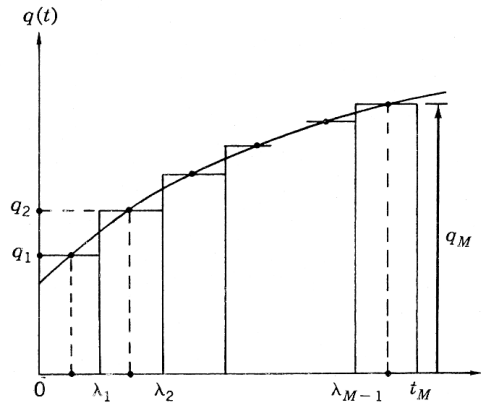


Figura 4.1: Approssimazione del flusso termico $q(t)$ in M passi discreti

rappresentato in figura 4.1 dove il flusso termico discreto q_n viene valutato all'istante temporale $\lambda_{n-1/2}$ ovvero al tempo medio tra gli estremi temporali in cui il flusso risulta essere considerato costante: λ_{n-1} e λ_n . In altri termini si può descrivere il flusso termico come

$$q_n = q(\lambda_{n-1/2}) = q[(n - 1/2)\Delta\lambda]. \quad (4.2)$$

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene che la temperatura di un punto qualsiasi ubicato alla coordinata \mathbf{r} al tempo t_M è dato dalla composizione dei singoli contributi dovuti alle componenti dei flussi termici da q_1 a q_M inclusi:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t_M) = & T_0 + q_1[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_0) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_1)] + \\ & + q_2[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_1) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_2)] + \\ & \vdots \\ & + q_n[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n)] + \\ & \vdots \\ & + q_M[\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{M-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_M)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove $\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_M) = \phi(\mathbf{r}, 0) = 0$.

Usando passi di integrazione costanti e pari a $\Delta\lambda$ la (4.3) diventa

$$T(\mathbf{r}, t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \frac{\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n)}{\Delta\lambda} \Delta\lambda. \quad (4.4)$$

Se $\Delta\lambda \rightarrow 0$ e se il tempo generico t_M diventa $t_M = t$, la (4.4) si trasforma da forma discreta a forma integrale continua come segue:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \int_0^t q_\lambda \left[-\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial\lambda} \right] d\lambda. \quad (4.5)$$

Facendo poi il cambio variabile di variabile di derivazione usando la relazione

$$-\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial t} \quad (4.6)$$

si ottiene il teorema di Duhamel:

$$T(\mathbf{r}, t) = T_0 + \int_0^t q_\lambda \left[-\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t - \lambda)}{\partial t} \right] d\lambda. \quad (4.7)$$

La (4.4) si può riscrivere in maniera ancora più compatta, sostituendo a ϕ la funzione $\Delta\phi$ come segue

$$\phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(\mathbf{r}, t_M - \lambda_n) = \phi(\mathbf{r}, t_{M-n+1}) - \phi(\mathbf{r}, t_{M-n}) = \Delta\phi(\mathbf{r}, t_{M-n}). \quad (4.8)$$

ed omettendo (solo a livello di scrittura delle equazioni) la dipendenza delle variabili dalla coordinata spaziale \mathbf{r} . Si ottiene quindi

$$T(t_M) = T_0 + \sum_{n=1}^M q_n \Delta\phi(t_{M-n}) \quad \text{con} \quad \Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i \quad (4.9)$$

dove q_n è valutato al tempo $(n - 1/2)\Delta t$ come indicato in (4.2). Se il flusso termico fosse realmente costante nell'intervallo temporale Δt , allora la (4.9) fornirebbe l'espressione esatta della temperatura T_M ; al contrario, se il flusso termico variasse all'interno di un intervallo temporale, la (4.9) fornirebbe una soluzione approssimata. Questa equazione diventa importante per l'analisi dei problemi di inversione perché fornisce una espressione della temperatura in funzione della sola variabile flusso termico.

Per effettuare manipolazioni algebriche del modello matematico basato sul teorema di Duhamel è conveniente trascrivere le equazioni in notazione matriciale. Si espanda l'equazione (4.9) aumentando i termini della

sommatoria da M a $M + r - 1$, si otterrà:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= T_0 + q_1 \Delta \phi_0 \\
 T_2 &= T_0 + q_1 \Delta \phi_1 + q_2 \Delta \phi_0 \\
 T_3 &= T_0 + q_1 \Delta \phi_2 + q_2 \Delta \phi_1 + q_3 \Delta \phi_0 \\
 &\vdots \\
 T_M &= T_0 + q_1 \Delta \phi_{M-1} + q_2 \Delta \phi_{M-2} + \dots + q_{M-1} \Delta \phi_1 + q_M \Delta \phi_0 \\
 &\vdots \\
 T_{M+r-1} &= T_0 + q_1 \Delta \phi_{M+r-2} + \dots + q_{M+r-2} \Delta \phi_1 + q_{M+r-1} \Delta \phi_0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

la quale può essere scritta in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_M \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \phi_0 & & & & & \\ \Delta \phi_1 & \Delta \phi_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \Delta \phi_{M-1} & \Delta \phi_{M-2} & \dots & \Delta \phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ \Delta \phi_{M+r-2} & \Delta \phi_{M+r-3} & \dots & \Delta \phi_{r-1} & \dots & \Delta \phi_0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix} + T_0 \mathbf{I} \tag{4.11}$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità. In forma più compatta, l'equazione (4.11) si può scrivere:

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{q} + T_0 \mathbf{I} \tag{4.12}$$

IHCP. Riducendo il numero di equazioni alle sole necessarie per il calcolo delle incognite q_M, \dots, q_{M+r-1} si otterranno i seguenti termini dell'equazione (4.15):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

\mathbf{X} la matrice dei coefficienti di sensibilità all'impulso

$$X = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \Delta\phi_{r-1} & \Delta\phi_{r-2} & \dots & \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

\mathbf{T} il vettore delle temperature

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_M \\ T_{M+1} \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

e $\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0}$ il vettore delle temperature calcolate a partire dai valori stimati di $\hat{\mathbf{q}}$ negli istanti temporali antecedenti ad t_M

$$\hat{\mathbf{T}}|_{\mathbf{q}=0} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_M|_{\mathbf{q}_M=0} \\ \hat{\mathbf{T}}_{M+1}|_{\mathbf{q}_M=\mathbf{q}_{M+1}=0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{T}}_{M+r-1}|_{\mathbf{q}_M=\mathbf{q}_{M+1}=\dots=\mathbf{q}_{M+r-1}=0} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

4.2 Le differenze finite

Sebbene il teorema di Duhamel sia una tecnica di risoluzione dei problemi inversi di conduzione termica molto potente, esso non è affatto utilizzabile

quando il problema diventa non lineare, come per esempio in quei problemi in cui le proprietà termofisiche dei corpi risultino essere dipendenti dalla temperatura. Per fare fronte a questa lacuna, vengono in ausilio i metodi numerici i quali possono essere usati per convertire le equazioni a derivate parziali in sistemi algebrici lineari. Tra questi metodi matematici quelli

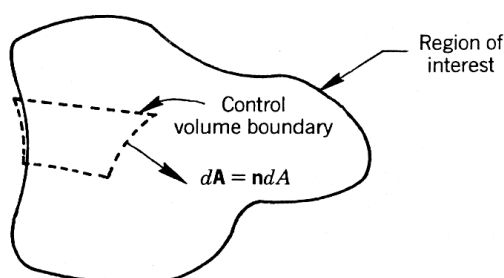


Figura 4.2: Modello generico di volume di controllo

più diffusi sono le differenze finite e gli elementi finiti, ma quello utilizzato in questa tesi è quello dei volumi finiti (FCV). Il metodo dei volumi finiti (FCV) impiega un volume di controllo di dimensione finita e arbitraria (vedi figura 4.2) a cui viene applicata l'equazione della conservazione dell'energia in forma integrale. La legge di conservazione dell'energia, applicata ad un solido in quiete, afferma che la somma dei flussi termici che attraversano la superficie di contorno del volume di controllo e della variazione temporale dell'energia interna del corpo deve essere uguale alla variazione dell'energia che è prodotta all'interno del volume di controllo. In termini di equazione, la legge di conservazione dell'energia è così espressa:

$$\int_A \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dV = \int_V q''' dV \quad (4.20)$$

dove A è la superficie che delimita il volume di controllo di volume V , \mathbf{q} è il vettore dei flussi termici uscenti il volume di controllo, e è l'energia interna specifica e q''' è l'energia prodotta dalla sorgente termica per unità di volume.

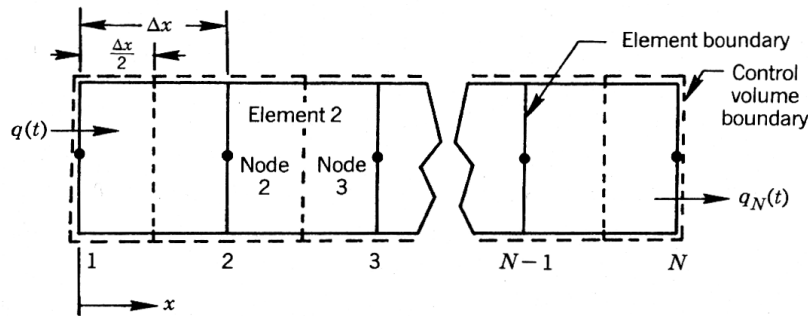


Figura 4.3: Modello 1D per geometria piana

4.2.1 La discretizzazione spaziale

Dato che le prove sperimentali che vengono eseguite per questa tesi sono tutte riconducibili (come modellazione matematica) ad un modello planare monodimensionale, allora si descriverà il metodo FCV applicato al caso 1D piano. Si divida il corpo di interesse (come per esempio il corpo di figura 4.3) in tante parti uguali: ogni parte prende il nome di elemento. Ogni elemento è circoscritto da una superficie di contorno chiamata interfaccia del materiale e possiede le sue proprietà termiche (che possono essere anche differenti dall'elemento adiacente). Il volume di controllo non coincide con l'elemento, ma passa per un piano intermedio a due elementi contigui. Questa scelta è del tutto arbitraria, ma si opera in questo modo sia per semplicità che per permettere di avere due diversi materiali all'interno di uno stesso volume di controllo. Ogni elemento contiene due nodi, uno per ogni interfaccia, che a loro volta possiedono il valore della temperatura del corpo discretizzato. Questi nodi sono rappresentati graficamente in figura 4.3 dal simbolo ●.

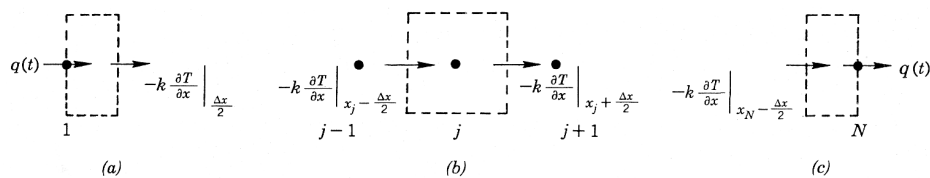


Figura 4.4: Visualizzazione dei due volumi di controllo estremi (a, c) e di quello interno al corpo (b)

Applicando l'equazione (4.20) al primo volume di controllo, ai volumi di

controllo centrali e all'ultimo volume di controllo della figura 4.3 utilizzando come supporto grafico la figura 4.4, si ottengono le tre rispettive equazioni di conservazione:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\Delta x/2} - q_1(t) + \frac{d}{dt} \int_0^{\Delta x/2} \rho c T dx = 0 \quad (4.21)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_j + \Delta x/2} + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_j - \Delta x/2} + \frac{d}{dt} \int_{x_j - \Delta x/2}^{x_j + \Delta x/2} \rho c T dx = 0 \quad (4.22)$$

$$q_N(t) + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_N - \Delta x/2} + \frac{d}{dt} \int_{x_N - \Delta x/2}^{x_N} \rho c T dx = 0 \quad (4.23)$$

dove $e = cT$ per definizione di energia interna, $q''' = 0$ perché non c'è sorgente termica e indicando con il pedice j un nodo arbitrario all'interno del corpo. Con $q_1(t)$ e $q_N(t)$ si sono indicati i flussi termici che esistono sulle superficie esterne del corpo 1D.

Questo approccio dei volumi di controllo assicura che l'energia termica di conduzione in uscita da un volume di controllo entri in quello successivo. A questo punto, per valutare gli integrali e le derivate delle equazioni (4.21), (4.22) e (4.23), e convertirli in algoritmo computazionalmente poco dispendioso, occorre fare delle ipotesi sul profilo di temperatura che esiste all'interno di ogni elemento. Per semplicità di calcolo si ipotizza che la legge di variazione della temperatura all'interno dell'elemento sia di tipo lineare. Si ha allora che per un elemento delimitato da $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ la distribuzione di temperatura vale:

$$T(x) = T_{j-1} \frac{(x - x_j)}{(x_{j-1} - x_j)} + T_j \frac{(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j-1})} \quad \text{con } x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (4.24)$$

dove con T_j si indica la temperatura al nodo x_j .

Differenziando la (4.24) ed usando la legge di Fourier (3.1) si determina il flusso termico locale dell'elemento:

$$q(x) = -k \frac{\partial T}{\partial x} = -k \frac{(T_j - T_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \quad \text{con } x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (4.25)$$

Da notare che una distribuzione lineare della temperatura all'interno dell'elemento provoca un flusso termico costante all'interno dello stesso. Questo

però non significa che debba essere uguale per tutti gli elementi, infatti esso cambia da elemento ad elemento.

Dopo aver ritrascritto in forma algebrica le derivate spaziali delle equazioni (4.21)-(4.23), ora si tenta di risolvere gli integrali. Assumendo che per ogni elemento la capacità termica volumetrica (ρc) sia costante, la valutazione degli integrali per ogni volume di controllo si semplifica diventando nella forma

$$\int T(x)dx.$$

A questo punto è conveniente scindere questo integrale nella somma di due integrali: ciascuno calcolato per ogni elemento che forma il volume di controllo. Utilizzando poi l'equazione (4.24), si ottengono i seguenti risultati:

$$\int_{x_j}^{x_j+\Delta x/2} T dx = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{3}{4}T_j + \frac{1}{4}T_{j+1} \right) \quad (4.26)$$

$$\int_{x_j-\Delta x/2}^{x_j} T dx = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{1}{4}T_{j-1} + \frac{3}{4}T_j \right). \quad (4.27)$$

Dunque le equazioni differenziali (4.21)-(4.23) del bilancio di energia sono diventate un sistema di N equazioni differenziali ordinarie di primo grado nei nodi j (con $j = 1, 2, \dots, N$).

$$k \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} - q_1(t) + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_2 \right) = 0$$

$$k \frac{T_j - T_{j+1}}{\Delta x} - k \frac{T_{j-1} - T_j}{\Delta x} + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4}T_{j-1} + \frac{3}{4}T_j \right) + \dots$$

$$\dots + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{4}T_j + \frac{1}{4}T_{j+1} \right) = 0 \text{ per } j = 2, 3, \dots, N-1$$

$$q_N(t) - k \frac{T_{N-1} - T_N}{\Delta x} + \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4}T_{N-1} + \frac{3}{4}T_N \right) = 0$$

Introducendo la diffusività termica α , definita come $\alpha = k/(\rho c)$, ed esplicitando il termine d/dt si ottiene

$$\frac{d}{dt} (\beta T_1 + \gamma T_2) = -\frac{\alpha}{\Delta x^2} (T_1 - T_2) + \frac{q_1(t)}{\rho c \Delta x} \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma T_{j-1} + 2\beta T_j + \gamma T_{j+1}) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}) \text{ per } j = 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma T_{N-1} + \beta T_N) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_{N-1} - T_N) - \frac{q_N(t)}{\rho c \Delta x} \quad (4.30)$$

dove le due costanti β e γ valgono rispettivamente $3/8$ e $1/8$.

Applicando però la stessa funzione di distribuzione di temperatura, si ricavano esattamente le stesse equazioni (4.28), (4.29) e (4.30) ma con i valori di β e γ diversi. Per comodità vengono riportati i coefficienti nella tabella (4.1).

Metodo	β	γ
Parametri concentrati	1/2	0
Volumi di controllo finiti	3/8	1/8
Elementi finiti	2/6	1/6

Tabella 4.1: Valori delle costanti β e γ

4.2.2 La discretizzazione temporale

Sebbene le equazioni (4.28), (4.29) e (4.30) siano risolvibili analiticamente in quanto equazioni differenziali ordinarie di primo ordine, in questo elaborato vengono applicate le tecniche di analisi per la loro risoluzione numerica. In questo modo è possibile applicare l'algoritmo illustrato a breve anche a problemi in cui esistano non linearità (p.e. dipendenza delle proprietà termofisiche del materiale dalla temperatura).

Una delle tecniche più semplici è quella del metodo di Eulero (o anche chiamato metodo *forward difference*) il quale può essere ricavato dallo sviluppo in serie di Taylor. Sia genericamente $u(t)$ una funzione del tempo che sia soluzione della equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$\frac{du}{dt} = f(u, t).$$

Sviluppando in serie di Taylor la funzione $u(t + \Delta t)$ si ottiene:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{du(t)}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (4.31)$$

Trascurando il termine $O(\Delta t^2)$, la (4.31) diventa

$$u(t + \Delta t) \approx u(t) + \frac{du(t)}{dt} \Delta t. \quad (4.32)$$

Introducendo la nomenclatura $u(t_n) = u_n$ e indicando la derivata du/dt come u' la (4.32) si trasforma in

$$u_{n+1} \approx u_n + u'_n \Delta t \quad (\text{FWD}). \quad (4.33)$$

L'algoritmo dato dalla (4.33) è mostrato nella figura 4.5: qui si nota che l'algoritmo estrapola il valore di (u_{n+1}, t_{n+1}) a partire dal calcolo della pendenza della funzione nel punto (u_n, t_n) . Inoltre, come si può notare dalla stessa figura, il metodo di Eulero tende a sottostimare il valore di $u(t)$ se la funzione è concava. Un altro difetto di questo metodo è che instabile, infatti esso si basa sul calcolo del valore futuro u_{n+1} a partire dal valore u_n .

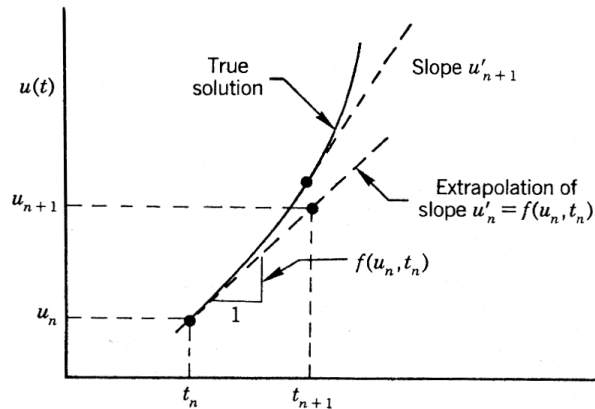


Figura 4.5: Metodi di Eulero (FWD) e implicito (BWD)

Un altro metodo che tende a migliorare la stabilità del calcolo è quello implicito (o anche chiamato metodo *backward difference*) in cui il valore di u_{n+1} viene calcolato a partire dalla pendenza stimata in (u_{n+1}, t_{n+1}) , infatti, a partire dall'equazione (4.31), si ottiene

$$u_n = u_{n+1} - u'_{n+1} \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (4.34)$$

Trascurando anche qui il termine $O(\Delta t^2)$ si ottiene

$$u_{n+1} \approx u_n + u'_{n+1} \Delta t \quad (\text{BWD}). \quad (4.35)$$

Dalla (4.35) si capisce che il metodo implicito si chiama così in quanto appare l'incognita u_{n+1} anche al membro di destra sotto forma di derivata.

Esiste anche un ulteriore metodo, che sotto certe condizioni risulta essere più preciso perché si trascurano $O(\Delta t^4)$, che è denominato metodo di Crank-Nicholson (o anche metodo *central difference*). Esso deriva dai seguenti due sviluppi in serie di Taylor:

$$u_{n+1/2} = u_n + u'_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{u''_n}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 + \dots \quad (4.36)$$

$$u_{n+1/2} = u_{n+1} - u'_{n+1} \frac{\Delta t}{2} + \frac{u''_{n+1}}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 - \dots \quad (4.37)$$

Sostituendo la (4.37) in (4.36) ed esplicitando il termine u_{n+1} si ottiene la forma *central difference*:

$$u_{n+1} \approx u_n + (u'_n + u'_{n+1}) \frac{\Delta t}{2} \quad (\text{CD}). \quad (4.38)$$

Riassumendo, i tre metodi illustrati si possono generalizzare in una equazione parametrica

$$u_{n+1} = u_n + (\theta u'_{n+1} + \theta' u'_n) \Delta t \quad (4.39)$$

dove $\theta' = (1 - \theta)$ e θ parametro dipendente dai tre metodi secondo la tabella (4.2).

Metodo	θ
<i>Forward Difference</i>	$\theta = 0$
<i>Central Difference</i>	$\theta = 1/2$
<i>Backward Difference</i>	$\theta = 1$

Tabella 4.2: Valori del parametro θ

4.2.3 Forma matriciale

Dopo aver compreso come trasformare le equazioni differenziali ordinarie in equazioni algebriche, si è giunti alla trascrizione del sistema di N equazioni differenziali (4.28)-(4.30) in un sistema di N equazioni algebriche. La procedura per applicare la (4.39) è quella di valutare ogni singola equazione

differenziale al tempo t_n ed t_{n+1} , moltiplicarle rispettivamente per $(1 - \theta)$ e θ e poi sommarle. Per esempio, per l'equazione (4.28) si ha

$$\begin{aligned}\theta' \frac{d}{dt}(\beta T_1 + \gamma T_2)^n &= -\theta' \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^n - T_2^n) + \theta' \frac{q_1^n}{\rho c \Delta x} \\ \theta \frac{d}{dt}(\beta T_1 + \gamma T_2)^{n+1} &= -\theta \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n+1} - T_2^{n+1}) + \theta \frac{q_1^{n+1}}{\rho c \Delta x}.\end{aligned}$$

Sommamdo ambo le equazioni si ottiene

$$\begin{aligned}\theta \frac{d}{dt}(\beta T_1 + \gamma T_2)^{n+1} + \theta' \frac{d}{dt}(\beta T_1 + \gamma T_2)^n &= -\theta \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n+1} - T_2^{n+1}) + \\ &\quad -\theta' \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^n - T_2^n) + \frac{1}{\rho c \Delta x}(\theta q_1^{n+1} + \theta' q_1^n)\end{aligned}\quad (4.40)$$

Ora, la (4.39) può essere applicata al membro di sinistra della (4.40) ottenendo

$$\begin{aligned}\beta \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta t} + \gamma \frac{T_2^{n+1} - T_2^n}{\Delta t} &= -\theta \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^{n+1} - T_2^{n+1}) + \\ &\quad -\theta' \frac{\alpha}{\Delta x^2}(T_1^n - T_2^n) + \frac{q^{n+\theta}}{\rho c \Delta x}\end{aligned}\quad (4.41)$$

dove per convenienza è stata utilizzata la seguente convenzione:

$$q^{n+\theta} = \theta q^{n+1} + \theta' q^n. \quad (4.42)$$

Introducendo il numero di Fourier per modelli discreti $Fo = \alpha \Delta t / \Delta x^2$ e semplificando la (4.41) si ricava una nuova equazione pronta per essere scritta in forma matriciale:

$$\begin{aligned}(\text{Fo } \theta + \beta) T_1^{n+1} - (\text{Fo } \theta - \gamma) T_2^{n+1} &= -(\text{Fo } \theta' - \beta) T_1^n + \\ &\quad + (\text{Fo } \theta' - \gamma) T_2^n + \frac{\Delta t}{\rho c \Delta x} q^{n+\theta}.\end{aligned}\quad (4.43)$$

Estendendo questa procedura anche per le (4.29) e (4.30) si ottengono rispettivamente

$$\begin{aligned}- (\text{Fo } \theta - \gamma) T_{j-1}^{n+1} + 2((\text{Fo } \theta + \beta) T_j^{n+1} - (\text{Fo } \theta - \gamma) T_{j+1}^{n+1}) &= (\text{Fo } \theta' + \gamma) T_{j-1}^n + \\ - 2(\text{Fo } \theta' - \beta) T_j^n + (\text{Fo } \theta' + \gamma) T_{j+1}^n &\text{ con } j = 2, 3, \dots, N-1\end{aligned}\quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
-(\text{Fo } \theta - \gamma)T_{N-1}^{n+1} + ((\text{Fo } \theta + \beta)T_N^{n+1} = (\text{Fo } \theta' + \gamma)T_{N-1}^n + \\
-(\text{Fo } \theta' - \beta)T_N^n - \frac{\Delta t}{\rho c \Delta x} q_N^{n+\theta}. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Le equazioni (4.43), (4.44) e (4.45), come già detto, formano un sistema lineare algebrico ad N equazioni ed N incognite. Queste equazioni godono di una struttura speciale denominata tridiagonale in quanto, come si vede dalla (4.46), le matrici sono composte tutte da valori nulli ad eccezione di quelli della diagonale principale e della prima banda. Per il caso di proprietà termiche costanti le (4.43)-(4.45) diventano

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \text{Fo } \theta + \beta & \gamma - \text{Fo } \theta & & & & & \\ \gamma - \text{Fo } \theta & 2(\text{Fo } \theta + \beta) & \gamma - \text{Fo } \theta & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \gamma - \text{Fo } \theta & 2(\text{Fo } \theta + \beta) & \gamma - \text{Fo } \theta \\ & & & & \gamma - \text{Fo } \theta & \text{Fo } \theta + \beta & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{n+1} \\ T_N^{n+1} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} \beta - \text{Fo } \theta' & \gamma - \text{Fo } \theta' & & & & & \\ \gamma - \text{Fo } \theta' & 2(\beta - \text{Fo } \theta') & \gamma - \text{Fo } \theta' & & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \gamma - \text{Fo } \theta' & 2(\beta - \text{Fo } \theta') & \gamma - \text{Fo } \theta' \\ & & & & \gamma - \text{Fo } \theta' & \beta - \text{Fo } \theta' & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_{N-1}^n \\ T_N^n \end{bmatrix} + \\
& + \frac{\Delta t}{\rho c \Delta x} \begin{bmatrix} q_1^{n+\theta} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_N^{n+\theta} \end{bmatrix} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

4.2.4 Forma standard per i problemi IHCP

Se si sostituisce all'apice $n + 1$ l'apice M , la (4.46) si può ritrascrivere come

$$\mathbf{A}\mathbf{T}^M = \mathbf{B}\mathbf{T}^{M-1} + C\mathbf{q}^M + \mathbf{g}^M \quad (4.47)$$

dove \mathbf{A} è la matrice quadrata al membro di sinistra della (4.46), \mathbf{B} è la matrice quadrata al membro di destra e $C = \Delta t / \rho c \Delta x$. Come si può notare,

nella (4.47) sembra esserci un vettore aggiuntivo \mathbf{g}^M : in realtà questo termine è stato aggiunto in quanto si è definito \mathbf{q}^M come segue:

$$\mathbf{q}^M = \begin{bmatrix} q_1^{n+\theta-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque il termine \mathbf{g}^M rappresenta la sorgente termica nota e applicata al nodo N, quale ad esempio la convezione, flusso termico imposto o generazione di calore volumetrica.

Se si applica in specifico il metodo di Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$) si osserva che

$$q^{M+\theta-1} = q^{M-1/2}$$

il quale corrisponde al flusso di calore superficiale valutato al tempo $t_{M-1/2} = (M - 1/2)\Delta t$ che è stato ricavato dal teorema di Duhamel (4.2).

L'equazione (4.47) viene risolta moltiplicando ambi i membri per l'inversa della matrice \mathbf{A} dato che il vettore incognito è \mathbf{T}^M . Si ottiene pertanto

$$\mathbf{T}^M = \mathbf{D}\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{E}\mathbf{q}^M + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M \quad (4.48)$$

dove è stato posto $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ e $\mathbf{E} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$. Vale la pena notare che \mathbf{T}^M risulta essere una funzione lineare di \mathbf{q}^M .

Rimpiazzando M nella equazione (4.48) con $M + 1$ si ottiene

$$\mathbf{T}^{M+1} = \mathbf{D}\mathbf{T}^M + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1} \quad (4.49)$$

ed sostituendo \mathbf{T}^M con il valore ricavato nella (4.48) si giunge al risultato

$$\mathbf{T}^{M+1} = \mathbf{D}^2\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^M + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1}. \quad (4.50)$$

Anche da questa equazione \mathbf{T}^{M+1} risulta essere una funzione lineare di \mathbf{q}^{M+1} e \mathbf{q}^M . Sostituendo poi M della equazione (4.48) con $M + 2$, $M + 3$, ..., $M + r - 1$ ed applicando lo stesso procedimento si ricava che

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^M &= \hat{\mathbf{T}}^M|_{\mathbf{q}^M=0} + \mathbf{E}\mathbf{q}^M \\ \mathbf{T}^{M+1} &= \hat{\mathbf{T}}^{M+1}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=0} + \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^M + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1} \\ \mathbf{T}^{M+2} &= \hat{\mathbf{T}}^{M+2}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=\mathbf{q}^{M+2}=0} + \mathbf{D}^2\mathbf{E}\mathbf{q}^M + \mathbf{D}\mathbf{E}\mathbf{q}^{M+1} + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+2} \\ \mathbf{T}^{M+r-1} &= \hat{\mathbf{T}}^{M+r-1}|_{\mathbf{q}^M=\dots=\mathbf{q}^{M+r-1}=0} + \mathbf{D}^{M+r-1}\mathbf{E}\mathbf{q}^M + \dots + \mathbf{E}\mathbf{q}^{M+r-1} \end{aligned} \quad (4.51)$$

dove le temperatura $\hat{\mathbf{T}}$ valutate a $\mathbf{q}^M = \dots = \mathbf{q}^{M+r-1}$ uguali a 0 sono definite come:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}^M|_{\mathbf{q}^M=0} &= \mathbf{D}\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M \\ \hat{\mathbf{T}}^{M+1}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=0} &= \mathbf{D}^2\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1} \\ \hat{\mathbf{T}}^{M+2}|_{\mathbf{q}^M=\mathbf{q}^{M+1}=\mathbf{q}^{M+2}=0} &= \mathbf{D}^3\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{D}^2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+2} \\ \hat{\mathbf{T}}^{M+r-1}|_{\mathbf{q}^M=\dots=\mathbf{q}^{M+r-1}=0} &= \mathbf{D}^{M+r}\mathbf{T}^{M-1} + \mathbf{D}^{M+r-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^M + \dots + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}^{M+r-1}\end{aligned}\quad (4.52)$$

Da notare che le componenti di temperatura definite nella (4.52) sono funzioni lineari della sola distribuzione di temperatura al tempo t_{M-1} e delle sorgenti di calore note ai tempi $t_M, t_{M+1}, t_{M+2}, \dots, t_{M+r-1}$. Nel caso di flussi futuri nulli (ovvero per $t > t_M, \mathbf{q} = 0$), le (4.52) coincidono con (4.51).

Si ricorda che le equazioni che compongono la (4.51) sono a loro volta vettori di equazioni, nel senso che per ogni tempo t_M, t_{M+1}, \dots le equazioni devono essere risolte per ogni nodo del corpo discretizzato. Al fine del calcolo, però, non tutti i nodi servono; infatti i sensori di temperatura sono ubicati solo in corrispondenza di alcuni nodi. Per semplicità di trattazione, solo un sensore di temperature è preso in considerazione per il calcolo e la sua dipendenza dalla posizione è identificata dall'aggiunta del pedice K . Allora, per il K -esimo nodo, le equazioni (4.52) diventano:

$$\begin{aligned}T_K^M &= \hat{T}_K^M|_{q^M=0} + X_{11}q^M \\ T_K^{M+1} &= \hat{T}_K^{M+1}|_{q^M=q^{M+1}=0} + X_{21}q^M + X_{11}q^{M+1} \\ T_K^{M+2} &= \hat{T}_K^{M+2}|_{q^M=q^{M+1}=q^{M+2}=0} + X_{31}q^M + X_{21}q^{M+1} + X_{11}q^{M+2} \\ T_K^{M+r-1} &= \hat{T}_K^{M+r-1}|_{q^M=\dots=q^{M+r-1}=0} + X_{(M+r)1}q^M + \dots + X_{11}q^{M+r-1}\end{aligned}\quad (4.53)$$

dove per semplicità di notazione è stato ipotizzato $\theta = 1$ in $q^{M+\theta-1}$. I simboli X_{11}, X_{21}, \dots descrivono il coefficiente di sensibilità alla posizione K del sensore di temperature e non sono funzioni del tempo t_M . Queste componenti di sensibilità sono date da

$$\begin{aligned}X_{11} &= \frac{\partial T_K^M}{\partial q^M} = \frac{\partial T_K^{M+1}}{\partial q^{M+1}} = \dots = \frac{\partial T_K^{M+r-1}}{\partial q^{M+r-1}} \\ X_{21} &= \frac{\partial T_K^{M+1}}{\partial q^M} = \frac{\partial T_K^{M+2}}{\partial q^{M+1}} = \dots = \frac{\partial T_K^{M+r-1}}{\partial q^{M+r-2}} \\ X_{31} &= \frac{\partial T_K^{M+2}}{\partial q^M} = \frac{\partial T_K^{M+3}}{\partial q^{M+1}} = \dots = \frac{\partial T_K^{M+r-1}}{\partial q^{M+r-3}} \\ X_{(M+r)1} &= \frac{\partial T_K^{M+r-1}}{\partial q^M}.\end{aligned}\quad (4.54)$$

Le equazioni (4.54) possono scriversi in forma matriciale

$$\mathbf{T}_K = \mathbf{X}_K \mathbf{q} + \hat{\mathbf{T}}_K|_{\mathbf{q}=0} \quad (4.55)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_K &= \begin{bmatrix} T_K^M \\ T_K^{M+1} \\ T_K^{M+2} \\ \vdots \\ T_K^{M+r-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_K &= \begin{bmatrix} X_{11} & & & & & \\ X_{21} & X_{11} & & & & \\ X_{31} & X_{21} & X_{11} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ X_{(M+r)1} & \dots & X_{31} & X_{21} & X_{11} & \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{T}}_K|_{\mathbf{q}=0} &= \begin{bmatrix} \hat{T}_K^M|_{q^M=0} \\ \hat{T}_K^{M+1}|_{q^M=q^{M+1}=0} \\ \hat{T}_K^{M+2}|_{q^M=q^{M+1}=q^{M+2}=0} \\ \vdots \\ \hat{T}_K^{M+r-1}|_{q^M=\dots=q^{M+r-1}=0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Va osservato che, mentre ciascuna equazione dei vettori (4.47)-(4.52) sono riferite ad un nodo spaziale all'istante temporale fissato t_M , le (4.56) si riferiscono al nodo K -esimo per tutto l'arco temporale desiderato. L'equazione (4.55) è chiamata forma standard delle temperatura perché la stessa equazione viene derivata applicando il teorema di Duhamel (4.12); infatti i singoli termini della (4.12) sono riferiti allo stesso istante temporale (4.55): nella forma derivata del teorema di Duhamel gli istanti temporale vengono indicati dai pedici, mentre nelle differenze finite dagli apici. I valori X_{11} , X_{21} , X_{31} , ..., $X_{(M+r)1}$ corrispondono a

$$X_{11} = \Delta\phi_0, X_{21} = \Delta\phi_1, X_{31} = \Delta\phi_2, \dots, X_{(M+r)1} = \Delta\phi_{M+r-1}$$

usati nel metodo del teorema di Duhamel. Il simbolo ϕ_i rappresenta l'aumento di temperatura all'istante t_i al nodo x_k per la soluzione numerica di (4.47) per $q^{M+\theta-1} = 1$ per $i = M = 1, 2, 3, \dots$ e $\mathbf{g}^M = 0$.

4.3 Applicazione delle differenze finite ai problemi IHCP

Alla fine della sezione precedente si è parlato di coefficienti di sensibilità X e, visto che la loro comprensione è la base per la comprensione di tutti gli algoritmi per i calcoli dei problemi inversi di conduzione termica, in questa sezione se ne approfondirà la trattazione. Inoltre, vista anche la presenza di matrici a banda tridiagonali, verrà illustrato l'algoritmo TDMA per la risoluzione dei sistemi di equazioni tipo (4.47). Si procederà alla spiegazione delle basi dell'algoritmo di calcolo adottato per poi concludere con la specifica dell'algoritmo adottato e successiva validazione.

4.3.1 I coefficienti di sensibilità

I coefficienti di sensibilità sono di fondamentale importanza per determinare il flusso termico che sta uscendo (o entrando) dal corpo preso in esame in quanto essi rappresentano, in maniera intuitiva, la risposta termica temporale del corpo in una determinata coordinata spaziale a fronte di un impulso unitario di flusso termico. In questa sede saranno trattati due tipologie di coefficienti di sensibilità a seconda della caratteristica dell'impulso: il primo, indicato con Z , è la risposta termica dovuta ad una funzione gradino (step) del flusso termico q_M per un tempo infinito e il secondo, indicato con X , dovuto ad un impulso di flusso termico q_M per una durata temporale $t_M - t_{M-1}$. Entrambe le variazioni di flusso termico e di corrispondente variazione di coefficiente di sensibilità sono illustrate nella figura 4.6.

La curva denominata A della figura 4.6 identifica il coefficiente di sensibilità per il caso in cui il flusso termico sia uno step che inizia al tempo t_{M-1} e persiste fino ad un tempo $t \rightarrow \infty$: coefficiente Z , che corrisponde al coefficiente ϕ della sezione precedente. La curva C , invece, identifica lo stesso coefficiente di sensibilità, ma con l'istante iniziale al tempo t_M . Per un sensore di temperatura posizionato alla profondità x_k , la risposta termica dovuta allo step del flusso termico q_M viene identificato con $T(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M)$.

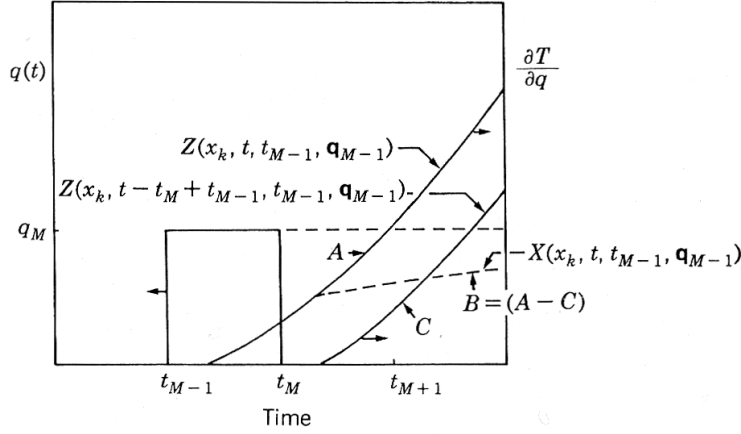


Figura 4.6: Schematizzazione del coefficiente di sensibilità a fronte di un impulso e di una funzione gradino

Dunque si definisce il coefficiente di sensibilità della funzione gradino come:

$$\frac{\partial T(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} = Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M). \quad (4.57)$$

dove

x_k è la posizione del sensore;

t è il tempo arbitrario;

t_{M-1} è il tempo dell'inizio della funzione gradino del flusso termico;

$\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$ è la storia dei flussi termici antecedenti a t_M ;

q_M è l'intensità della funzione gradino.

Per un problema di tipo lineare, Z è indipendente da q_M e quindi T è lineare in q_M . A seconda del tipo di problema trattato, la forma del coefficiente di sensibilità Z può assumere diverse forme perché soggetto a semplificazioni. Esistono casi in cui il problema si può considerare quasi-lineare in quanto le proprietà termofisiche del mezzo vengono supposte variabili nel tempo, ma costanti all'interno di una stessa fase di calcolo del *Future Time Step*. Per questo caso si ha che Z è indipendente da q_M , ma dipendente dal tempo

t_{M-1} e $\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$ in quanto le proprietà vengono estrapolate dal profilo di temperatura all'istante t_{M-1} . Se poi le proprietà termofisiche sono costanti per tutto l'arco temporale del problema, allora Z è indipendente da q_M e $\hat{\mathbf{q}}_{M-1}$ e la variabile temporale importante per il calcolo di Z diventa solo l'arco temporale da cui inizia la funzione gradino $t - t_{M-1}$. Da notare inoltre che, quando Z è indipendente da q_M , la temperatura T è lineare in q_M . Questi tipologie di casi sono riassunti nella tabella 4.3.

Caso	Applicabilità	Notazione Z
I	Caso generale	$Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q_M)$
II	Proprietà termiche quasilineari	$Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1})$
III	Proprietà termiche costanti	$Z(x_k, t - t_{M-1}) = \phi(x_k, t - t_{M-1})$

Tabella 4.3: Casistiche di coefficienti di sensibilità Z

Il secondo tipo di coefficiente di sensibilità è quello riferito, anzichè ad una funzione gradino di ampiezza q_M , ad una funzione impulsiva di ampiezza q_M . Esso è denominato X . Per problemi quasi-lineari e con proprietà costanti, con il metodo della sovrapposizione degli effetti è possibile calcolare il valore di X dal valore di Z .

$$X(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) - Z[x_k, t - (t_M - t_{M-1}), t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}] \quad (4.58)$$

I due termini nel membro di destra della equazione (4.58) sono mostrati nella figura 4.6 con la curva A e C ; per proprietà termiche costanti, la curva C è identica alla curva A , ma traslata nell'asse dei tempi di $(t_M - t_{M-1}), t_{M-1}$. La curva B è la differenza tra A e C ($B = A - C$) e rappresenta il coefficiente di sensibilità X , che nella sezione precedente è stato indicato come $\Delta\phi$.

Usando il metodo delle differenze finite, i valori discreti di X e Z sono importanti. Al tempo $t = t_M$ si ha che

$$X(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = Z(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) \quad (4.59)$$

perché $Z(x_k, t_{M-1}, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = 0$. Per il caso di proprietà costanti, una notazione più compatta può essere utilizzata:

$$Z_{k,j-M+1} = Z(x_k, t_{j-M+1}).$$

Questa stessa notazione può essere utilizzata anche per il caso di proprietà quasi-lineari dove viene sottinteso che tutte le proprietà devono essere valutate in base al profilo di temperatura al tempo t_{M-1} . Sfruttando l'equazione (4.59) e la notazione appena vista, si può dimostrare che per il caso di proprietà costanti

$$Z_{k,r} = \sum_{j=1}^r X_{k,j}$$

la quale mostra che, per il caso di problemi lineari, la risposta termica dovuta ad una funzione gradino è uguale alla somma delle risposte dovute alla serie di impulsi a intensità costante e distribuiti per lo stesso intervallo temporale.

Per i problemi non lineari, i coefficienti di sensibilità possono essere calcolati dalle differenze delle temperature allo stesso tempo e posizione per due valori di flusso termico. Per esempio, la distribuzione di temperatura è calcolata per due differenti valori di flusso termico, q^* e $(1 + \epsilon)q^*$, dove ϵ è un piccolo parametro dell'ordine di grandezza 0.001. Allora il coefficiente di sensibilità X sarà dato da:

$$X(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}) = \frac{T[x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, (1 + \epsilon)q^*] - T(x_k, t, t_{M-1}, \hat{\mathbf{q}}_{M-1}, q^*)}{\epsilon q^*} \tag{4.60}$$

L'unica differenza nel calcolo dei coefficienti di sensibilità X e Z sono nelle condizioni al contorno:

Coefficienti di Sensibilità	Condizioni al Contorno
X (Impulso)	$q(t) = \begin{cases} q^*, & t_{M-1} \leq t \leq t_M \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$
Z (Funzione gradino)	$q(t) = q^*, t \geq t_{M-1}$

Tabella 4.4: Condizioni al contorno per il calcolo dei coefficienti di sensibilità

La valutazione della (4.60) richiede due differenti calcoli della temperatura: uno per $q = q^*$ e uno per $q = (1 + \epsilon)q^*$. E' computazionalmente più efficiente calcolare il coefficiente X direttamente dalle sue equazioni differenziali, le quali possono essere risolte dalle equazioni che descrivono il transitorio termico di conduzione. Per esempio, considerando il problema

quasi-lineare di conduzione termica monodimensionale per geometrie piane per $t \geq t_{M-1}$, si ha il risultato di tabella 4.5.

Temperatura	Coeff. Sensibilità Z
$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = q(t)$	$-k \frac{\partial Z}{\partial x} \Big _{x=0} = 1$
$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	$\rho c \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$
$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=L} = q_L(t)$	$-k \frac{\partial Z}{\partial x} \Big _{x=L} = 1$
$T(x, t_{M-1}) = F(x)$	$Z(t, t_{M-1}) = 0$

Tabella 4.5: Equazioni per il calcolo dei coefficienti di sensibilità

Dalla tabella 4.5 si evince che i sistemi di equazioni per T e Z soddisfano le stesse equazioni differenziali e le condizioni al contorno di Z sono notevolmente più semplici da risolvere. Se occorre calcolare X anziché Z allora la condizione al contorno per $x = 0$ deve essere modificata in:

$$-k \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 1 & \text{per la durata dell'impulso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.61)$$

Le restanti equazioni differenziali e condizioni al contorno sono le medesime di quelle di Z .

4.3.2 Matrici di calcolo per problemi IHCP

Si riprenda l'equazione per la risoluzione del problema diretto di conduzione termica monodimensionale piana (4.46) e la si riscriva in maniera compatta e simbolica per una griglia non uniforme:

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & & & & \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -c_{N-1} & b_{N-1} & -a_{N-1} \\ & & & & -c_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ \vdots \\ T_{N-1}^M \\ T_N^M \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b'_1 & a'_1 & & & & \\ c'_2 & b'_2 & a'_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & c'_{N-1} & b'_{N-1} & a'_{N-1} & \\ & & & c'_N & b'_N & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{M-1} \\ T_2^{M-1} \\ \vdots \\ T_{N-1}^{M-1} \\ T_N^{M-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{(\rho c \Delta x)_1} q_1^M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_N^M \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

I coefficienti a_j , b_j , c_j , a'_j , b'_j e c'_j di questo sistema dipendono dal passo spaziale, dalle proprietà termiche del corpo e in più sono indipendenti dal valore del flusso termico q_M . La (4.62) può essere scritta in maniera ancora più compatta cercando di isolare i termini T^M e q_M e raccogliendo tutto il resto in delle costanti d' . Si ottiene quindi

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & & & & \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -c_{N-1} & b_{N-1} & -a_{N-1} & \\ & & & -c_N & b_N & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ \vdots \\ T_{N-1}^M \\ T_N^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 + g_1 q^M \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Vale la pena notare che il sistema risulta essere esplicito nei termini T_j^M e quindi, se il problema fosse stato di tipo diretto (q_M il termine noto e T_j^M con $j = 1, 2, \dots, N - 1, N$ incognite) la complessità di calcolo sarebbe stata tutta nella inversione della matrice al membro di sinistra. Nei problemi di conduzione inversa invece accade che è nota la temperatura T_k^M (dove k indica il nodo corrispondente al sensore di temperatura) e sono incogniti q_M e T_j^M con $j = 1, 2, \dots, k - 1, k + 1, \dots, N - 1, N$. A questo punto, per rendere esplicito il vettore delle incognite, occorrerebbe rielaborare il sistema in maniera alquanto complessa e contorta. Infatti, ipotizzando di avere discretizzato il corpo in 5 nodi equispaziati con il sensore di temperatura posizionato in corrispondenza del nodo 3, il sistema (4.63) si trasforma da così

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & b_3 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & b_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ T_3^M \\ T_4^M \\ T_5^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 + g_1 q^M \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix}$$

a così

$$\begin{bmatrix} b_1 & -a_1 & g_1 & 0 & 0 \\ -c_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^M \\ T_2^M \\ \hat{q}^M \\ T_4^M \\ T_5^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 + a_2 Y_M \\ d_3 + b_3 Y_M \\ d_4 + c_4 Y_M \\ d_5 \end{bmatrix}.$$

Come si può notare, esplicitare il vettore delle incognite porta ad avere una doppia penalizzazione: 1) la matrice al primo membro non più tridiagonale e 2) l'unico modo per risolvere questo sistema è passare attraverso il calcolo della matrice inversa. Questo fatto, in termini numerici, è molto svantaggioso.

L'approccio migliore per risolvere tale sistema è quello di cercare di mantenere la matrice di tipo tridiagonale, sia che il problema sia diretto o inverso. Nel caso di problema diretto, il problema di tridiagonalità della matrice non si pone in quanto le incognite sono già esplicite; mentre per il caso di problema inverso, come si vedrà in maniera più approfondita tra due sezioni, l'approccio è quello di ipotizzare un valore di $\hat{q}^M = q^*$, calcolare la temperatura T_k^M , confrontarla con il valore misurato Y^M , e correggere il valore stimato di \hat{q}^M .

4.3.3 Algoritmo TriDiagonal Matrix Algorithm

Il fatto di avere la matrice tridiagonale ha sicuramente un vantaggio enorme nel calcolo della soluzione del sistema (4.63) in quanto piuttosto che invertire la matrice si applica l'algoritmo TDMA o anche algoritmo di Thomas (nome dovuto al ricercatore Llewellyn Thomas) che si basa su di una forma semplificata dell'eliminazione di Gauss. Si prenda la eq. (4.63). Essa è della forma:

$$\begin{aligned} b_1 u_1 - a_1 b_2 &= d_1 \\ -c_j b_{j-1} + b_j u_j - a_j b_{j+1} &= d_j \quad \text{con } j = 2, 3, \dots, N-1 \\ -c_N b_{N-1} + b_N u_N &= d_N \end{aligned} \tag{4.64}$$

Eseguendo l'eliminazione in avanti a partire dal nodo N si ha

$$\begin{aligned}\omega_N &= \frac{1}{b_N}, \quad e_N = \omega_N c_N, \quad f_N = \omega_N d_N \\ \omega_j &= \frac{1}{b_j - a_j e_{j+1}} \quad \text{con } j = N-1, \dots, 2, 1 \\ f_j &= \omega_j (d_j + a_j f_{j+1}), \quad e_j = \omega_j c_j \quad \text{con } j = N-1, \dots, 3, 2 \\ f_1 &= \omega_1 (d_1 + a_1 f_2)\end{aligned}\tag{4.65}$$

A questo punto, eseguendo la sostituzione all'indietro si ottengono i valori di u :

$$\begin{aligned}u_1 &= f_1 \\ u_j &= e_j u_{j-1} + f_j \quad \text{con } j = 2, 3, \dots, N-1\end{aligned}\tag{4.66}$$

Confrontando la serie di equazioni di tabella 4.5 si possono ottenere le seguenti conclusioni:

T		X
a_j, b_j, c_j	← medesimi →	a_j, b_j, c_j
ω_j, e_j	← medesimi →	ω_j, e_j
$d_1 = d'_1 + g_1 q_M$		$d_1 = g_1$
$d_j \neq 0, \quad j = 2, 3, \dots, N$		$d_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, N$

Da notare che le differenti equazioni per X possono essere ottenute anche differenziando le equazioni di T rispetto a q_M . Analizzando in particolare l'eliminazione in avanti per le equazioni per X , si vede che tutti gli f_j sono nulli ad eccezione di f_1 perché d_1 è l'unico coefficiente ad essere diverso da zero. Dunque si ha

$$f_1 = g_1 \omega_1$$

e quindi i coefficienti di sensibilità diventano

$$X_1 = f_1 = g_1 \omega_1$$

$$X_j = e_j X_{j-1}.$$

4.3.4 Unico sensore, singolo Future Time Step

Dato che i segnali di temperatura acquisiti con qualsiasi strumento di misura sono affetti sempre da errori, e visto che il problema che si va a trattare in questa tesi richiede intervalli di campionamento molto piccoli, questo algoritmo sarebbe da scartare a priori perché provoca sul risultato di uscita q_M delle grosse fluttuazioni tali da ridurre fortemente l'efficacia. Si è proceduto comunque a descrivere questo algoritmo in quanto esso è la base per lo sviluppo della versione finale utilizzata nelle sperimentazioni pratiche fatte.

Si consideri allora un sensore di temperatura installato alla profondità x_k dalla superficie attiva della barra monodimensionale (usualmente superficie corrispondente al nodo 1). Se il flusso q_M risulta essere costante nell'intervallo temporale $t_{M-1} \leq t \leq t_M$, allora il valore di q_M , che soddisfa l'esatta corrispondenza tra la temperatura rilevata e quella calcolata ad x_k , può essere ricavato.

Il campo di temperatura $T(x, t)$ dipende in maniera continua da un flusso ignoto q_M che è costante nell'intervallo $t_{M-1} \leq t \leq t_M$. Questa dipendenza la si indica come $T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)$ dove il vettore \mathbf{q}_{M-1} indica tutti i flussi termici precedenti al tempo t_M , e t_{M-1} il tempo in cui inizia lo step del flusso termico. Dato che il campo di temperatura è continuo in q_M , lo si può espandere in serie di Taylor attorno al valore di flusso termico q^* , noto e scelto in modo arbitrario:

$$\begin{aligned}
T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) &= T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*) + \\
&+ (q_M - q^*) \left. \frac{\partial T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} \right|_{q_M=q^*} \\
&+ \frac{(q_M - q^*)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M^2} \right|_{q_M=q^*} + \\
&+ \dots \tag{4.67}
\end{aligned}$$

Data la linearità del problema, tutti i termini con derivata seconda e successivi devono essere per forza nulli e quindi la soluzione esatta è la seguente:

$$\begin{aligned}
T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) &= T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*) + \\
&+ (q_M - q^*) X(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) \tag{4.68}
\end{aligned}$$

dove

$$X(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \left. \frac{\partial T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} \right|_{q_M=q^*} \quad (4.69)$$

Vale la pena fare notare che X non dipende dal valore q_M in quanto lui è costante ed il calcolo è lineare.

Per il calcolo dei problemi inversi di conduzione termica in cui i dati del sensore di temperatura sono esattamente accoppiati, il membro di sinistra dell'equazione (4.68) è rimpiazzato dalla temperatura ricavata sperimentalmente Y_M ; quindi la (4.68) diventa

$$Y_M = \dot{T}_k^M + (\hat{q}_M - q^*)X_{k,1} \quad (4.70)$$

Risolvendo l'equazione (4.70) esplicitando il termine incognito \hat{q}_M si ottiene:

$$\hat{q}_M = q^* + \frac{Y_M - \dot{T}_k^M}{X_{k,1}} \quad (4.71)$$

dove con \hat{q}_M viene indicato la stima del valore del flusso termico sul nodo 1 all'istante t_M , con q^* il valore di flusso termico ipotizzato, con Y_M il valore di temperatura misurato all'istante t_M nella posizione k -esima, con \dot{T}_k^M il valore di temperatura all'istante t_M per un sensore di temperatura sul nodo k -esimo con flusso termico sul nodo 1 pari $q = q^*$ per l'arco temporale $t_{M-1} \leq t \leq t_M$ e $X_{k,1}$ il coefficiente di sensibilità del nodo k -esimo a fronte di una funzione step unitaria del flusso termico al nodo 1.

La procedura di calcolo del flusso termico per il caso di singolo sensore di temperatura e *function specification* uguale ad una costante si traduce quindi in una sequenza di 5 passi da ripetersi per ogni istante temporale fino

- Ipotesi di un valore arbitrario q^* , che usualmente viene scelto pari al valore q_{M-1} oppure pari al valore nullo;
- Calcolo dell'intero campo di temperatura $T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*)$ mediante l'algoritmo TDMA;
- Calcolo dei coefficienti di sensibilità utilizzando i risultati parziali del punto precedente dell'algoritmo TDMA;
- Calcolo del flusso termico corretto mediante (4.71) e

- Calcolo dell'intero campo di temperatura $T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}^M)$ a partire dal flusso termico corretto.

4.3.5 Molteplici sensori, singolo Future Time Step

L'utilizzo di sensori di temperatura multipli è raccomandato in quanto maggiori sono le informazioni ricavate dai dati sperimentali meglio è: sia sensori diversi posizionati alla stessa profondità che sensori diversi installati a profondità diverse. Dal paragrafo precedente si è visto che per rendere risolvibile il sistema (4.63) è sufficiente un solo dato di temperatura, ma in questo caso, essendoci J sensori, il problema diventa sovraincolato. Per ovviare a questo problema, una soluzione è quella di aumentare i gradi di libertà del sistema aggiungendo la funzione di errore quadratico medio S e di porre come obiettivo la minimizzazione della stessa. La funzione di errore quadratico medio S è definita

$$S = \sum_{k=1}^J [Y_{k,M} - T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)]^2 \quad (4.72)$$

dove k è l'indice del sensore (non il nodo corrispondente alla posizione del sensore) ed M è l'indice dell'istante temporale a cui è stata misurata la temperatura $Y_{k,M}$. Per ottenere la minimizzazione della (4.72), la si differenzia rispetto alla variabile incognita di interesse q_M e poi si annulla la derivata:

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 0 = 2 \sum_{k=1}^J [Y_{k,M} - T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)] [-X(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1})] \quad (4.73)$$

dove X è definito come

$$X(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \frac{\partial T(x_k, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} = X_{k,1} \quad (4.74)$$

Ricordando il risultato ottenuto precedentemente nella (4.68) si può ritrascrivere per questo caso come:

$$T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) = \dot{T}_k^M + (q_M - q^*)X_{k,1} \quad (4.75)$$

Sostituendo la (4.75) nella (4.73), rimpiazzando q_M con \hat{q}_M e risolvendo per \hat{q}_M si ottiene:

$$\hat{q}_M = q_* + \frac{\sum_{k=1}^J X_{k,1} (Y_{k,M} - \dot{T}_k^M)}{\sum_{k=1}^J X_{k,1}^2}. \quad (4.76)$$

Se $J = 1$, allora la (4.76) si riduce alla (4.71).

Il processo di calcolo è simile al caso della sezione precedente, ma con una piccola variazione al punto 4; i passi sono quindi:

- Ipotesi di un valore arbitrario q^* , che usualmente viene scelto pari al valore q_{M-1} oppure pari al valore nullo;
- Calcolo dell'intero campo di temperatura $T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q^*)$ mediante l'algoritmo TDMA;
- Calcolo dei coefficienti di sensibilità utilizzando i risultati parziali del punto precedente dell'algoritmo TDMA;
- Calcolo del flusso termico corretto mediante (4.76) e
- Calcolo dell'intero campo di temperatura $T(x, t, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}^M)$ a partire dal flusso termico corretto.

4.3.6 Unico sensore, multipli Future Time Step

In questa sottosezione si considererà lo stesso algoritmo delle sottosezioni precedenti applicandolo però al caso di un solo sensore di temperatura e assumendo un flusso termico costante per un numero arbitrario di passi temporali arbitrari.

Si supponga che l'algoritmo sia stato risolto fino ad un tempo t_{M-1} e che il flusso termico stimato \hat{q}_{M-1} e l'intero campo di temperatura \hat{T}_i^{M-1} siano noti. Successivamente il tempo avanza a t_M e la stima di q_M è fatta. Una assunzione temporanea di flusso termico costante viene fatta sui passi temporali futuri r . Una schematizzazione del significato della temporanea assunzione è visibile in figura 4.7.

Il procedimento per ottenere il valore del flusso termico atteso, è quello di ricercare il valore del flusso termico q_M (costante per gli r passi temporali futuri) tali che minimizzino gli errori quadratici medi tra i valori calcolati e quelli misurati dal sensore di temperatura. La funzione quadratica media è:

$$S = \sum_{i=1}^r [Y(x_k, t_{M+i-1}) - T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)]^2 \quad (4.77)$$

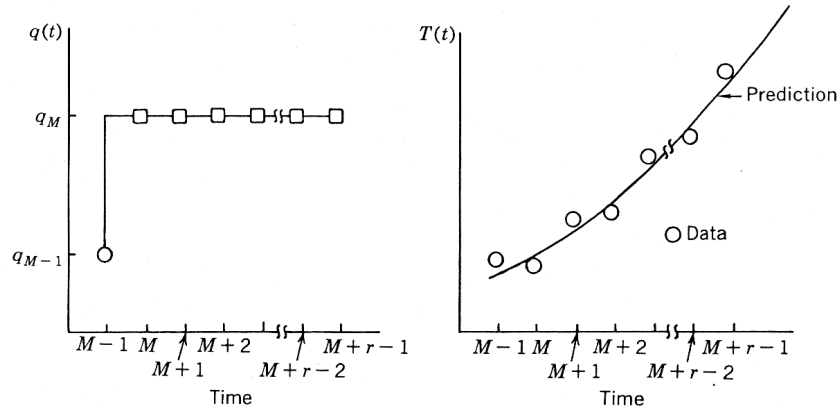


Figura 4.7: Rappresentazione schematica del funzionamento degli r passi temporale futuri

Differenziando S rispetto a q_M , sostituendo \hat{q}_M a q_M e ponendo $\partial S / \partial q_M = 0$ si ottiene:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial q_M} = -2 \sum_{i=1}^r [Y(x_k, t_{M+i-1}) + T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}_M)] Z(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) \quad (4.78)$$

dove il coefficiente di sensibilità è definito da

$$Z_{k,i} = Z(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \frac{\partial T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M}. \quad (4.79)$$

Visto che q_M è supposto costante per tutto l'arco temporale di r future time step, il coefficiente di sensibilità Z è stato usato al posto di X : vedi in figura 4.6 per la comparativa tra i coefficienti. Sviluppando in serie di Taylor il campo di temperatura, come già fatto similamente in equazione (4.67), si ottiene

$$T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}_M) = T(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}^*) + (q_M - \hat{q}^*) Z(x_k, t_{M+i-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}). \quad (4.80)$$

Nella figura 4.8 è rappresentato uno schizzo della sviluppo della serie di Taylor.

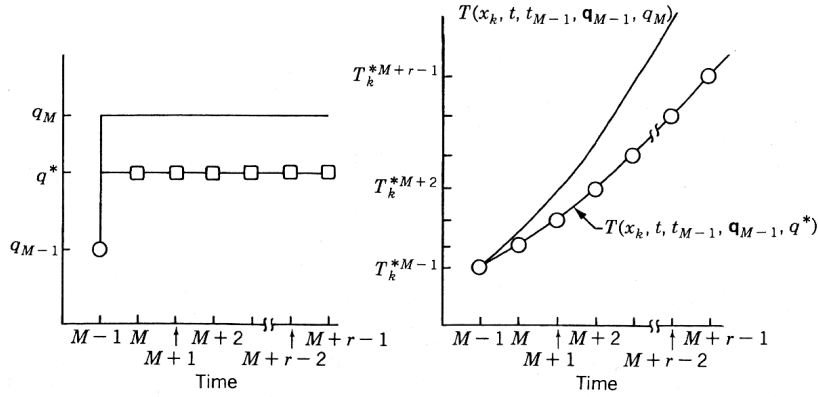


Figura 4.8: Condizioni di riferimento nel calcolo di q_M

Ritrascrivendo il tutto utilizzando la notazione compatta la (4.80) si ottiene:

$$T_k^{M+i-1} = \dot{T}_k^{M+i-1} + (\hat{q}_M - q^*)Z_{k,i}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.81)$$

Sostituendo l'equazione (4.81) nell'equazione (4.78) e risolvendo il tutto per ottenere \hat{q}_M si ha:

$$\hat{q}_M = q_M^* + \frac{\sum_{i=1}^r (Y_{k,M+i-1} - \dot{T}_k^{M+i-1})Z_{k,i}}{\sum_{i=1}^r (Z_{k,i})^2}. \quad (4.82)$$

I passi da compiere per determinare il flusso termico sulla superficie interessata diventano:

- Assunzione di un valore arbitrario q^* per un periodo $t_{M-1} \leq t \leq t_{M+r-1}$;
- Calcolo, per ogni future time step, del campo di temperatura $\dot{T}_j^M, \dot{T}_j^{M+1}, \dots, \dot{T}_j^{M+r-1}$;
- Calcolo, per ogni future time step, dei coefficienti di sensibilità;
- Calcolo del flusso termico corretto \hat{q}_M dall'equazione (4.82);
- Calcolo del campo di temperatura corretto $\hat{T}(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}^M)$.

4.3.7 Molteplici sensori, multipli Future Time Step

In una delle sottosezioni precedenti era già stato trattato il problema dei diversi sensori di temperatura applicati ad uno stesso corpo a diverse profondità. Ora viene estesa l'analisi includendo un arbitrario numero di passi temporali futuri con una temporanea assunzione di flusso termico costante. La funzione scarto quadratico medio deve essere modificata. Per J sensori e r passi temporali futuri, la somma delle funzioni quadratiche diventano:

$$S = \sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^r [Y_{k,M+j-1} - T(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)]^2 \quad (4.83)$$

Il valore di q_M , costante sul periodo degli r futuri passi temporali, che minimizza la funzione S di equazione (4.83) deve soddisfare la seguente:

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 0 = 2 \sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^r [T(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M) - Y_{k,M+j-1}] Z_{k,j} \quad (4.84)$$

dove il coefficiente di sensibilità è definito da:

$$Z_{k,j} = Z(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}) = \frac{\partial T(x_k, t_{M+j-1}, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, q_M)}{\partial q_M} \quad (4.85)$$

Espandendo il campo di temperatura nella serie di Taylor nell'intorno del flusso termico q^* si ottiene:

$$T_k^{M+j-1} = \dot{T}_k^{M+j-1} + (\hat{q}_M - q^*) Z_{k,j}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (4.86)$$

e sostituendola nell'equazione (4.84) esplicitando il flusso termico estrapolato \hat{q}_M si ha:

$$\hat{q}_M = q_M^* + \frac{\sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^r (Y_{k,M+j-1} - \dot{T}_k^{M+j-1}) Z_{k,j}}{\sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^r (Z_{k,j})^2}. \quad (4.87)$$

L'equazione (4.87) può essere scritta in forma più compatta:

$$\hat{q}_M = q_M^* + \sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^r K_{k,j} (Y_{k,M+j-1} - \dot{T}_k^{M+j-1}) \quad (4.88)$$

dove

$$K_{k,j} = \frac{Z_{k,j}}{\sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^r Z_{k,j}^2}. \quad (4.89)$$

I dettagli dell'aspetto computazionale dell'algoritmo per il caso di flusso termico ipotizzato costante per gli r Future Time Step e con J sensori applicati al corpo diventa:

- Si ipotizza un valore arbitrario q^* costante per un periodo $t_{M-1} \leq t \leq t_{M+r-1}$ e, applicando l'algoritmo TDMA eseguendo l'eliminazione in avanti a partire dal nodo N , si ottengono i coefficienti ω_j , e_j e f_j usando il set di equazioni (4.65).
- Calcolo, per ogni future time step, del campo di temperatura \dot{T}_j^M , \dot{T}_j^{M+1} , \dots , \dot{T}_j^{M+r-1} effettuando l'eliminazione a ritroso del TDMA;
- Calcolo, per ogni future time step, dei coefficienti di sensibilità;
- Calcolo del flusso termico corretto \hat{q}_M dall'equazione (4.82);
- Calcolo del campo di temperatura corretto $\hat{T}(x, t_M, t_{M-1}, \mathbf{q}_{M-1}, \hat{q}^M)$.

4.4 Flussi termici multipli

Nella sezione appena vista si è trattato il caso di stima della storia temporale di un flusso termico che attraversa una superficie quando sono noti gli andamenti temporali delle temperature in determinate coordinate spaziali. Ora invece si estenderà il metodo al caso di stima della storia temporale di flussi termici multipli.

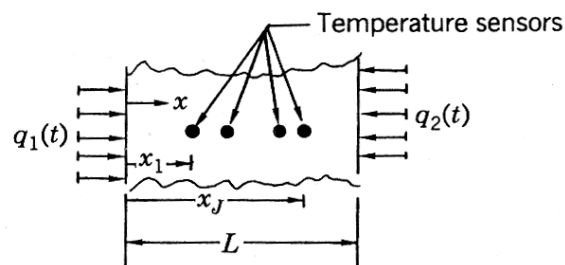


Figura 4.9: Caso monodimensionale di corpo soggetto a doppio flusso termico ignoto

Per un corpo monodimensionale, il caso di flusso termico multiplo si presenta se entrambe le superfici sono esposte ciascuna ad un flusso termico ignoto variabile nel tempo. In particolar modo, per una lastra piana (si veda figura 4.9), entrambe le superfici sono riscaldate da due flussi termici indipendenti variabili nel tempo $q_1(t)$ e $q_2(t)$. Dunque la variazione di $q_1(t)$ non ha effetto su $q_2(t)$.

La procedura che a breve verrà esposta non si limita alla sola applicabilità al caso monodimensionale, ma anche al caso di problemi 2D e 3D.

Le temperature in corpi di tipo 1-D, 2-D o 3-D con proprietà termofisiche indipendenti da temperatura possono essere descritte dalla forma standard

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} + \mathbf{X}\mathbf{q} \quad (4.90)$$

dove con $\mathbf{T}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$ si indicano le temperature \mathbf{T} calcolate utilizzando il vettore dei flussi termici \mathbf{q} (equazione (4.92)) pari al vettore nullo $\mathbf{0}$. Per il caso di $p = 2$ due flussi termici $q_1(t)$ e $q_2(t)$, J sensori di temperatura ed r future time step (passi temporali futuri) la variazione delle componenti del vettore temperature \mathbf{T} sono:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}(M) \\ \mathbf{T}(M+1) \\ \vdots \\ \mathbf{T}(M+r-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(i) = \begin{bmatrix} T_1(i) \\ T_2(i) \\ \vdots \\ T_J(i) \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

dove \mathbf{T} è un vettore $Jr \times 1$;

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(M) \\ \mathbf{q}(M+1) \\ \vdots \\ \mathbf{q}(M+r-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}(i) = \begin{bmatrix} q_1(i) \\ q_2(i) \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

dove \mathbf{q} è un vettore $rp \times 1$;

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1) & & & & \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) & & & \\ \mathbf{a}(3) & \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{a}(r) & \mathbf{a}(r-1) & \mathbf{a}(r-2) & \cdots & \mathbf{a}(1) \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

dove \mathbf{X} è una matrice $Jr \times pr$ con

$$\mathbf{a}(i) = \begin{bmatrix} a_{11}(i) & a_{12}(i) \\ a_{21}(i) & a_{22}(i) \\ \vdots & \vdots \\ a_{J1}(i) & a_{J1}(i) \end{bmatrix}, \quad a_{jk}(i) = \frac{\partial T(\mathbf{x}_j, t_i)}{\partial [q_k(i)]} \quad (4.94)$$

dove $\mathbf{a}(i)$ è una matrice $J \times p$ con $p = 2$. Per il caso specifico di un solo flusso termico ignoto ($p = 1$) ed un solo sensore di temperatura ($J = 1$), a_{11} diventa $\Delta\phi_{i-1}$ usato nelle sezioni precedenti. Dunque, le componenti di \mathbf{X} sono i coefficienti di sensibilità. Per i primi due tempi di calcolo (t_M e t_{M+1}) una parziale scrittura per esteso della equazione (4.90) è

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(M) &= \mathbf{T}(M)|_{\mathbf{q}(M)=0} + \mathbf{a}(1)\mathbf{q}(M) \\ \mathbf{T}(M+1) &= \mathbf{T}(M+1)|_{\mathbf{q}(M)=\mathbf{q}(M+1)=0} + \mathbf{a}(1)\mathbf{q}(M+1) + \mathbf{a}(2)\mathbf{q}(M) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Entrambe le matrici di equazioni rappresentano J scalari equazioni, di cui alcune sono:

$$\begin{aligned} T_1(M) &= T_1(M)|_{q_1(M)=\dots=q_J(M)=0} + a_{11}(1)q_1(M) + a_{12}(1)q_2(M) \\ &\vdots = \vdots \\ T_J(M) &= T_J(M)|_{q_1(M)=\dots=q_J(M)=0} + a_{J1}(1)q_1(M) + a_{J2}(1)q_2(M) \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} T_1(M+1) &= T_1(M+1)|_{q_1(M)=\dots=q_J(M)=q_1(M+1)=\dots=q_J(M+1)=0} + \\ &\quad + a_{11}(1)q_1(M+1) + a_{12}(1)q_2(M+1) + \\ &\quad + a_{11}(2)q_1(M) + a_{12}(2)q_2(M) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} T_J(M+1) &= T_J(M+1)|_{q_1(M)=\dots=q_J(M)=q_1(M+1)=\dots=q_J(M+1)=0} + \\ &\quad + a_{J1}(1)q_1(M+1) + a_{J2}(1)q_2(M+1) + \\ &\quad + a_{J1}(2)q_1(M) + a_{J2}(2)q_2(M) \end{aligned}$$

Da notare che in questo problema inverso di conduzione termica vi sono due componenti di flusso termico q incognite al tempo t_M rispettivamente $q_1(M)$ e $q_2(M)$. Ci sono inoltre J misurazioni di temperature tali da soddisfare la disuguaglianza $J \geq q$. Nel caso di $J = 2$ è possibile risolvere l'equazione (4.96) contemporaneamente per $q_1(M)$ e $q_2(M)$ con $T_1(M)$ imposto uguale a $Y_1(M)$ e $T_2(M)$ imposto uguale a $Y_2(M)$. Conoscendo $q_1(M)$ e $q_2(M)$, dalla

equazione (4.97) si ricava $q_1(M+1)$ e $q_2(M+1)$. Questa procedura è analoga a quella di Stolz (caso di un sensore di temperatura, senza future time step) e perciò presenta anche gli stessi difetti: estrema sensibilità agli errori di misura e all'ordine di grandezza dei passi temporali di calcolo. Per risolvere queste criticità, si adotterà lo stesso espediente delle sezioni precedenti ovvero l'implementazione della sequential function specification.

4.4.1 Procedura di calcolo adottata

Per il caso della function specification method, la funzione flusso termico \mathbf{q} è temporaneamente ipotizzata pari al valore $\tilde{\mathbf{q}}$. La funzione più semplice da adottare per descrivere $\tilde{\mathbf{q}}$ è quella di costante. Dunque si può scrivere

$$\mathbf{q}(M) = \mathbf{q}(M+1) = \dots = \mathbf{q}(M+r-1) \quad (4.98)$$

ed, in maniera più esplicita, per $\mathbf{q}(M)$ a due componenti significa

$$\begin{aligned} q_1(M) &= q_1(M+1) = \dots = q_1(M+r-1) \\ q_2(M) &= q_2(M+1) = \dots = q_2(M+r-1) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Si veda figura 4.10) per la descrizione grafica dell'assunzione di $q_1(M)$ e $q_2(M)$ uguali a delle costanti. L'obiettivo dell'algoritmo è quindi diventato quello di stimare $q_1(M)$ e $q_2(M)$ al tempo M -esimo. Per rendere l'algoritmo il più generico possibile si trascrive il vettore flusso termico \mathbf{q} di equazione (4.92) come

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\beta, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1) \\ \mathbf{A}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(r) \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} q_1(M) \\ q_2(M) \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

Per l'ipotesi di costanza del valore di flusso termico \mathbf{q} (equazione (4.98)), le matrici $\mathbf{A}(i)$ sono tutte pari alla matrice identità:

$$\mathbf{A}(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Usando poi la relazione

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A} \quad (4.102)$$

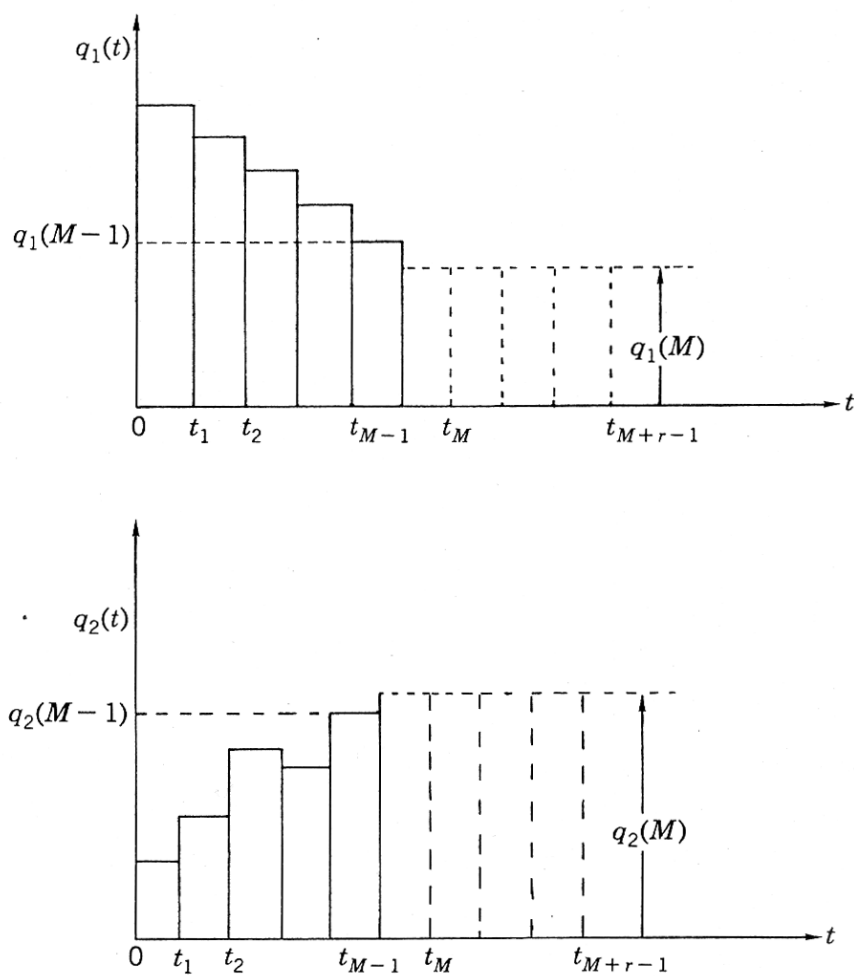


Figura 4.10: ipotesi temporanea, per i passi temporali futuri successivi al tempo t_M , del vettore flusso termico \mathbf{q}

la funzione da minimizzare rispetto a β è

$$S = \left(\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\beta=\mathbf{0}} - \mathbf{Z}\beta \right)^T \psi^{-1} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\beta=\mathbf{0}} - \mathbf{Z}\beta \right) \quad (4.103)$$

dove con ψ si identifica la matrice di correlazione. La derivazione matriciale della equazione (4.103) rispetto a β porta all'estimatore

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \psi^{-1} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \psi^{-1} \left(\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\beta=\mathbf{0}} \right) \quad (4.104)$$

il quale fornisce il valore del vettore $\hat{\mathbf{q}}(M)$ come indicato dall'equazione (4.100). Dopo aver ottenuto i valori dei flussi termici, M viene aumentato di una unità e l'equazione (4.104) risolta nuovamente. Da notare che nel caso in cui siano verificate le seguenti ipotesi sull'errore di misura, ovvero:

Errori additivi : $Y_i = T_i + \epsilon_i$ con Y_i temperatura misurata all'istante t_i , T_i la temperatura 'vera' e ϵ_i errore casuale;

Errori a media nulla : $E(\epsilon_i) = 0$ con $E(\cdot)$ operatore media;

Valori a varianza σ^2 costante : $V(Y_i) = \sigma^2$ con $V(\cdot)$ operatore varianza;

Correlazione degli errori nulla : $cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ per $i \neq j$ dove l'operatore covarianza degli errori è definita come

$$cov(\epsilon_i, \epsilon_j) \equiv E \{ [\epsilon_i - E(\epsilon_i)] [\epsilon_j - E(\epsilon_j)] \};$$

si ha che ψ si può esprimere come $\psi = \sigma^2 \mathbf{I}$ e quindi segue che l'equazione (4.104) si trasforma in:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \left(\mathbf{Y} - \mathbf{T}|_{\beta=\mathbf{0}} \right) \quad (4.105)$$

Capitolo 5

La sperimentazione

Tra i materiali utilizzati per la produzione di capsule di chiusura per bibite e medicinali, due categorie di poliolefini sono largamente impiegate: il polipropilene (PP) e il polietilene ad alta densità (HDPE)

Le capsule che vengono prodotte da questi macchinari sono caratterizzate da tre diverse zone funzionali:

- il pannello centrale,
- la parete laterale, che contiene i filetti, e
- la banda di garanzia.

La prima, il pannello centrale, è quella parte piana di capsula dove sono presenti gli organi di tenuta per mantenere la pressione all'interno della bottiglia al livello desiderato: questi possono essere ricavati integralmente nel tappo (come ad esempio i plug ad oliva, anelli di tenuta circonferenziali esterni) oppure essere riportati (come ad esempio nelle capsule in '2 pezzi' in cui la tenuta viene fatta da una guarnizione a base elastomerica). La seconda zona, la parete laterale, invece, è adibita al fissaggio della capsula al collo della bottiglia. Questo fissaggio è realizzato mediante sottosquadri come ad esempio una filettatura. In ultimo, la banda di garanzia è l'elemento che, se intatto, garantisce l'assenza di manomissione del prodotto imbottigliato. Una volta che viene aperta la bottiglia, la banda si spezza rimanendo imprigionata nel collo della bottiglia stessa.

Nella capsula in uscita dalla macchinario, se analizzata con termocamera ad infrarossi o con termometro a contatto, è possibile distinguere delle aree in cui la temperatura risulta essere molto più elevata che in altre. Queste aree, che generalmente sono piuttosto circoscritte, rappresentano le zone critiche per il raffreddamento in quanto, se il polimero risulta ancora essere in uno stato pastoso una volta ultimata la fase di raffreddamento, l'estrazione meccanica della capsula dallo stampo porta ad una completa rottura dell'oggetto. Dunque queste zone determinano il tempo ciclo minimo di produzione capsula. Le zone critiche identificabili si possono così classificare:

1. zone in cui sono presenti degli addensamenti di materiale polimerico fuso (come ad esempio il filetto della parete laterale e/o, quando presente, il plug ad oliva sul pannello centrale) e
2. zone in cui, durante il processo di raffreddamento, si manifesta un generarsi di intercapedini di gas e/o vuoto a causa del ritiro del materiale.

Mentre per le prime zone non esiste rimedio per accelerare il raffreddamento a meno di non creare un condotto per il fluido di refrigerazione in prossimità di quegli elementi di capsula (incorrendo poi nel problema di cedimento strutturale dello stampo), per le seconde invece è possibile modificare parametri di processo del polimero (quali ad esempio la pressione di formatura) e parametri di costruzione degli stampi (quali ad esempio finitura superficiale, il materiale base dello stampo, i trattamenti superficiali, eccetera). Per ottenere la massima prestazione dello stampo è quindi indispensabile conoscere gli effetti della variazione dei parametri appena citati, in particolare occorre massimizzare la conduttanza termica di contatto rispetto alle variabili progettuali dello stampo e alle variabili di processo del polimero.

5.1 La strumentazione utilizzata

Data la difficoltà nella comprensione dell'effetto dei parametri di processo del polimero e dei parametri di produzione degli stampi da un manufatto di forma altamente complessa come può essere una capsula, si è deciso di semplificare significativamente la geometria oggetto di studio, orientandosi su

di un manufatto molto semplice: un dischetto. Tale prodotto viene realizzato da uno stampo che funziona in maniera assai simile a quella riportata nel capitolo sul brevetto SACMI (capitolo 2). Nella figura 5.1 è rappresentata l'utensileria per la produzione del dischetto (comprensiva di cavità e punzone) installata sulla macchina di laboratorio denominata CCMLAB.

5.1.1 Le scelte del provino

Il simulatore che si è scelto di produrre è un dischetto rotondo liscio in cui lo spessore risulta essere molto piccolo se paragonato al diametro (rapporto $D/s \approx 70$). La scelta è ricaduta su di un oggetto di questo tipo in quanto occorre ridurre al minimo il numero di parametri che compongono il modello fisico-matematico che sta alla base del calcolo della conduttanza termica di contatto e semplificare il più possibile le espressioni matematiche che descrivono il modello stesso. Dal capitolo 4 è apparso in maniera piuttosto esplicita che risolvere un problema di conduzione termica inversa richiede notevoli sforzi perché il problema così formulato fa decadere sia l'unicità della soluzione che la sua stabilità a fronte di errori di misura/sistematici. Dunque, un modo per ottenere risultati di accettabile credibilità è di semplificare il sistema stampo-polimero-stampo in modo tale da ricavare una condizione di mono-dimensionalità. In più, per poter ridurre al minimo l'incertezza di misura del valore delle temperature, si utilizzano sensori di temperatura ridondanti ovvero sensori in zone distinte dello stampo che, per regioni di simmetria, leggono le stesse temperature. Questo significa chiedere almeno una indipendenza della temperatura da una coordinata spaziale. Dunque la soluzione più semplice è quella di avere un provino assialsimmetrico: questo garantisce una lettura nominalmente uguale della temperatura su tutta la coordinata circonferenziale. In ultimo, visto che la condizione di mono-dimensionalità è stata richiesta e visto che la coordinata che descrive tale condizione è la coordinata assiale, occorre essere certi che nella coordinata radiale il flusso termico sia nullo. Per ridurre al minimo la dispersione termica radiale (e quindi ridurre al minimo anche gli effetti di bordo) si è scelto di eseguire il provino con rapporto altezza/diametro molto piccolo. Un'immagine del provino che è stato realizzato è mostrata in figura 5.2.

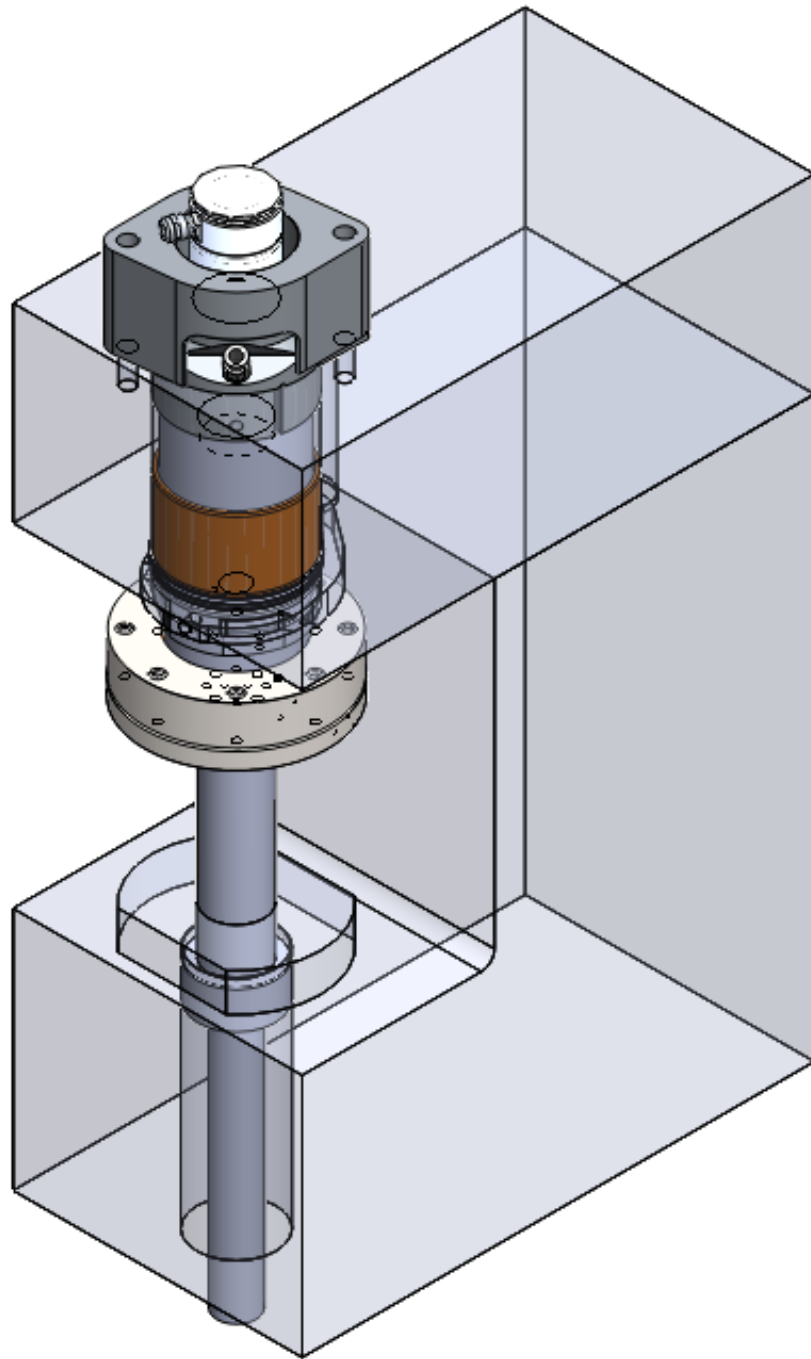


Figura 5.1: Stampo montato in macchina CCMLAB

Riassumendo, in definitiva, la scelta del simulatore di forma cilindrica e con spessore sottile è dettato dalle 3 richieste di:

1. condizioni di assialsimmetria,
2. mono-dimensionalità del flusso termico e
3. minimizzazione degli effetti di bordo.

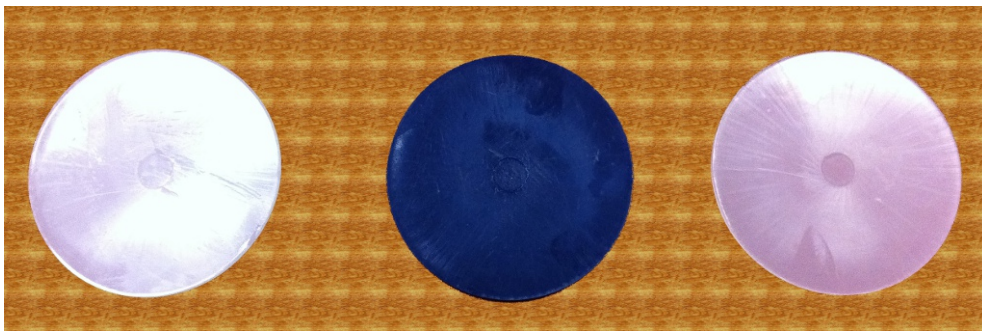


Figura 5.2: Alcuni provini realizzati

5.1.2 I sensori adottati

Per poter ricavare il valore della conduttanza termica durante il raffreddamento del provino occorre conoscere i seguenti tre fattori:

1. il flusso termico \dot{q} che attraversa l'interfaccia di contatto tra polimero e stampo
2. la temperatura superficiale del polimero $T_{polymer}$ e
3. la temperatura superficiale dello stampo T_{wall}

in quanto essi sono correlati alla conduttanza termica di contatto dalla relazione:

$$h_c(t) = \frac{\dot{q}(t)}{T_{polymer}(t) - T_{wall}(t)} \quad (5.1)$$

Per conoscere il flusso termico in funzione del tempo $\dot{q}(t)$ è necessario applicare la tecnica inversa della risoluzione dei problemi di conduzione vista nel

capitolo precedente. Dunque, c'è la necessità di collocare diversi sensori di temperatura a varie profondità all'interno dello stampo raffreddato. Occorre tenere in considerazione che lo stampo è soggetto ad un doppio flusso termico ignoto: uno entrante (energia termica asportata dal polimero) ed uno uscente (energia termica ceduta al fluido refrigerante). Questa condizione vincola la scelta del numero di sensori da adottare ad un valore minimo di due, posti a due altezze differenti. Per avere una migliore stabilità di calcolo è stato deciso di applicarne 4 in totale: due ad una distanza di $0.5mm$ dalla superficie riscaldata e due ad una distanza maggiorata di $1.5mm$. Visto che il transitorio dello stampaggio è molto veloce, si è reso necessario scegliere dei sensori di temperatura con tempi di risposta molto piccoli. Dunque la scelta è ricaduta su delle termoresistenze anziché su delle termocoppie perché nettamente più veloci in termini di risposta, notevolmente più precise e miniaturizzate.

Ricavati i flussi termici entranti ed uscenti dallo stampo, è di immediata estrapolazione la temperatura di interfaccia $T_{wall}(t)$ dello stampo in quanto il campo di temperatura è completamente definito. Per ricavare questo valore non è quindi necessario installare altri sensori.

Diverso è invece il metodo seguito per l'ottenimento della temperatura $T_{polymer}(t)$ in quanto occorre misurarla direttamente all'interno dello stampo. Per compiere questa misurazione è stato installato un sensore di temperatura infrarossi che, attraverso un vetro, rileva la temperatura del manufatto all'interno della camera di formatura.

Le termoresistenze

Le termoresistenze RTD (acronimo di Resistance Temperature Detector), a differenza delle termocoppie, sono sensori di temperatura che misurano la temperatura di un oggetto grazie alla modifica della loro resistenza elettrica calibrata. Quando la temperatura aumenta, anche la resistenza elettrica aumenta e quindi, alimentando il sensore con una corrente nota, si ricava un segnale in tensione, proporzionale alla temperatura, che è direttamente acquisibile mediante un centro di acquisizione dati. Le termoresistenze adottate per questo lavoro sono delle PT100 miniaturizzate costituite da un film in platino da $100\ \Omega$ di impedenza a $0\ ^\circ C$ e rivestite da un isolante elettrico per

evitare problemi di cortocircuazione con il materiale base su cui è applicato. Questa strategia costruttiva porterebbe a pensare di avere adottato un sensore non idoneo alla applicazione richiesta in quanto l'isolante elettrico, che è anche isolante termico, tenderebbe a ridurre notevolmente il tempo di risposta dell'RDT. In realtà, data la ridottissima massa e l'alta diffusività termica della stessa, la termoresistenza adottata, HEL-700 della Honeywell, è stata quella ritenuta più idonea per questa applicazione. Essa ha dimensioni pari a 1.65mm x 1.27mm x 0.25mm con la costante di tempo $\ll 1s$ (e se ben a contatto pari a $< 0.1s$). Un riassunto delle caratteristiche di questi sensori sono indicati in tabella 5.1. Onde evitare peggioramenti nelle prestazioni dei sensori, essi sono stati applicati allo stampo utilizzando un velo di una resina per componenti elettronici ad alta conducibilità termica. Questa resina epossidica bicomponente è la TBS (Thermal Bonding System) della Electrolube che possiede una conducibilità termica di $1.1 W/mK$.

Caratteristica	Valore
Codice Sensore	HEL-700 Honeywell
Tipo di sensore	RTD in Platino 100 Ω a film sottile
Range di temperaura	-200 $^{\circ}C \div 540^{\circ}C$
Precisione	$\pm 0.5^{\circ}C$ oppure 0.8% della temperatura
Tempo risposta	$< 1s$ su superfici metalliche, $< 0.15s$ in acqua
Dimensioni	1.65mm x 1.27mm x 0.25mm.

Tabella 5.1: Caratteristiche Termoresistenza HEL-700

Sensori di temperatura ad infrarossi

Il sensore di temperatura adottato per misurare la temperatura superficiale della plastica a contatto con lo stampo $T_{polymer}$ è di tipo ad infrarossi. La scelta è ricaduta su di un sensore di questo tipo perché, se si fosse utilizzata una termocoppia o una termoresistenza a contatto col polimero, automaticamente la temperatura letta sarebbe stata già soggetta alla resistenza termica di contatto rendendo vana la sperimentazione messa in atto. In questo modo però si presenta il problema di come andare a leggere la temperatura del

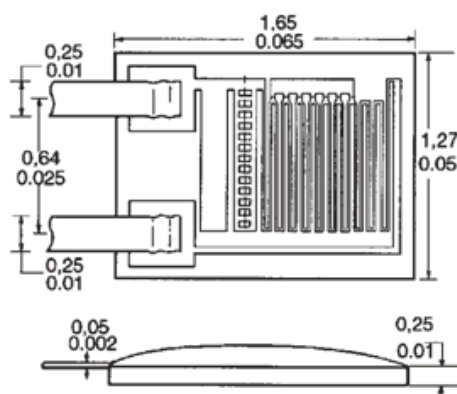


Figura 5.3: Termoresistenza

polimero all'interno della camera di formatura visto che la camera è formata da pareti opache. L'unico modo per poter far arrivare al termometro le radiazioni emesse dal polimero è stato quello di creare una finestra trasparente sullo stampo.

A tal proposito, va sottolineato che per far funzionare correttamente il sensore a infrarossi attraverso la finestra trasparente devono sussistere contemporaneamente le seguenti tre condizioni:

1. il polimero deve emettere radiazioni infrarosse alla stessa lunghezza d'onda del sensore pena la mancata lettura della temperatura da parte dello strumento stesso;
2. il vetro 'trasparente' non può essere un vetro qualunque ma un vetro 'trasparente' alla lunghezza d'onda del sensore pena la mancata visibilità del polimero;
3. il vetro IR-Trans deve resistere alle sollecitazioni meccaniche (pressione di stampaggio) a cui è soggetto, pena la rottura.

Il vetro IR-Trans adottato per queste prove è il vetro zaffiro industriale della GT Advanced Technologies (ex Crystal Systems) denominato HEM Sapphire. Esso gode di eccellenti proprietà ottiche (illustrate in figura 5.4) e proprietà meccaniche (rappresentate in tabella (5.2)). Inserire questo vetro all'interno dello stampo, specialmente se un vetro di grandi dimensioni se paragonate alla dimensione caratteristica dello stampo stesso, porta avere

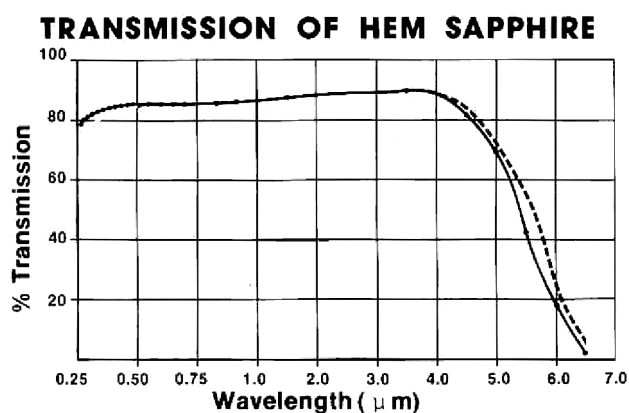


Figura 5.4: Proprietà ottiche HEM Sapphire

Prop. Meccaniche	Valore	Proprietà Termiche	Valore
Carico Rottura	275-413 MPa	Cond. Termica	27.2 W/mK
Resistenza Flex	482-896 MPa	Esp. Termica	$8.4e^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
Mod. El. Traz.	345 GPa	Calore Specifico	775 J/kgK
Mod. El. Compr.	380 GPa	Densità	3980 kg/m^3
Mod. Flessione	360 GPa	Diffusività Term.	$8.882e^{-6}$
Modulo di Bulk	240 GPa	Punto Fusione	2040 $^\circ\text{C}$
Coeff. Poisson	0.29	Durezza	9 mohs

Tabella 5.2: Caratteristiche vetro zaffiro

una decadenza della condizione di monodimensionalità del flusso termico in quanto le proprietà termofisiche del vetro e del materiale base dello stampo sono molto diverse. Per evitare quindi questo fenomeno è necessario ridurre il più possibile la dimensione del vetro: sia in diametro che spessore. Lo spessore minimo è definito principalmente dal limite di resistenza meccanica, mentre il diametro minimo è dettato dalla superficie di lettura del sensore infrarosso.

Dunque, una delle principali caratteristiche del termometro è quella di avere la superficie di lettura più piccola possibile. Le altre caratteristiche invece sono il range di lettura, tempo di risposta e, come detto in precedenza, la lunghezza d'onda. Il range di temperatura è stato delineato in funzione

della condizione dello svolgimento prove: visto che il polimero viene fuso fino ad una temperatura attorno ai 210 °C e poi raffreddato fino ad un valore che si attesta sui 50 °C, se ne è scelto uno che operasse almeno in questo range. La lunghezza d'onda scelta, seppur insolita per questo tipo di lavoro, è stata quella di 2.3 μ m anziché 8 ÷ 14 μ m per due motivi: il primo perché, come si vede dalla figura 5.4, il vetro risulta essere molto trasparente a 2.3 μ m, il secondo perché è stato garantito dalla casa madre del sensore che i polimeri analizzati avrebbero emesso sufficiente energia anche a tale lunghezza d'onda. Per quanto riguarda invece il tempo di risposta è stato scelto un sensore che potesse raggiungere il millisecondo di risposta per campionare in maniera soddisfacente la storia temporale della temperatura del polimero.

L'unico sensore tale da soddisfare tutti i requisiti è stato il modello CTLaser 3ML della Optris che possiede le caratteristiche elencate in tabella 5.3. Per diminuire la sua superficie di lettura è stato scelto l'optional della lente focale CF3 che ha permesso di ridurre lo spot da 18.3mm a 1100mm di distanza a 3.4mm a 200mm di distanza.



Figura 5.5: Termometro ad Infrarossi

Altri sensori

I sensori descritti fino ad ora sono quelli indispensabili per la determinazione del valore della conduttanza termica di contatto, ma, per tenere sotto controllo i parametri di processo che altrimenti la macchina di prova non potrebbe monitorare, sono stati installati altri sensori tra cui sensori di pressione per

Caratteristica	Valore
Codice Sensore	CTLaser 3ML
Range di temperatura	50 °C ÷ 400 °C
Range spettrale	2.3 μ m
Risoluzione	0.1 °C
Tempo esposizione	1 ms
Lente optional	CF3 - 3.4 mm @ 200 mm

Tabella 5.3: Caratteristiche CTLaser 3ML

rilevare la pressione del polimero nella camera di formatura e flussometri per garantire una stessa portata di fluido refrigerante nello stampo superiore ed inferiore. Nello specifico, il sensore di pressione adottato è il modello 6183A della Kistler, specifico per stampi, in quanto è miniaturizzato e già in possesso in azienda. Per quanto riguarda invece i flussometri, sono stati installati flussometri ad area variabile (rotametri).

5.1.3 L'apparecchiatura di prova

La macchina su cui sono state condotte le prove è una macchina da laboratorio (CCMLAB) composta nelle sue parti principali da:

- un corpo pressa, dove sono dislocati i due semistampi (denominati punzone e cavità) e la giostrina di inserimento;
- un estrusore per poliolefine;
- una centralina oleodinamica per garantire il funzionamento corretto dello stampo e
- una cabina elettrica di comando di tutte le parti.

Nella figura 5.6 sono visibili le prime due parti, quelle necessarie per capire come sono state condotte le prove.

Per entrare più in profondità sull'argomento, si procederà ad illustrare il funzionamento della CCMLAB. Quando viene messo in movimento l'estrusore, il materiale plastico presente al suo interno viene fuso, compresso e

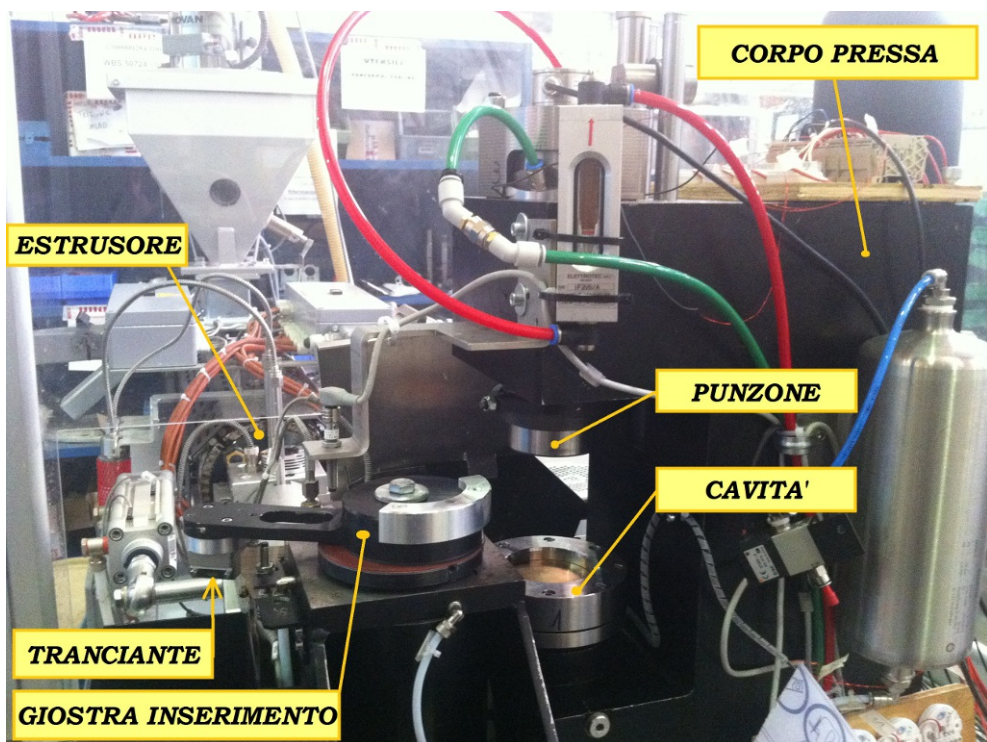


Figura 5.6: La CCMLAB, macchina da laboratorio

spinto in maniera continuativa verso la bocca di uscita chiamata ugello (vedi figura 5.7). Mentre il materiale esce con continuità dall'ugello, le parti del corpo pressa assemblato si sono azionate in maniera intermittente. Durante il tempo di un ciclo, la giostrina di inserimento (vedi figura 5.7), parte dalla condizione di riposo e compie una rotazione completa attorno al suo asse costringendo il tranciante (vedi figura 5.7) a passare sopra all'ugello e cavità dello stampo. Durante il passaggio del tranciante sopra all'ugello (che sta

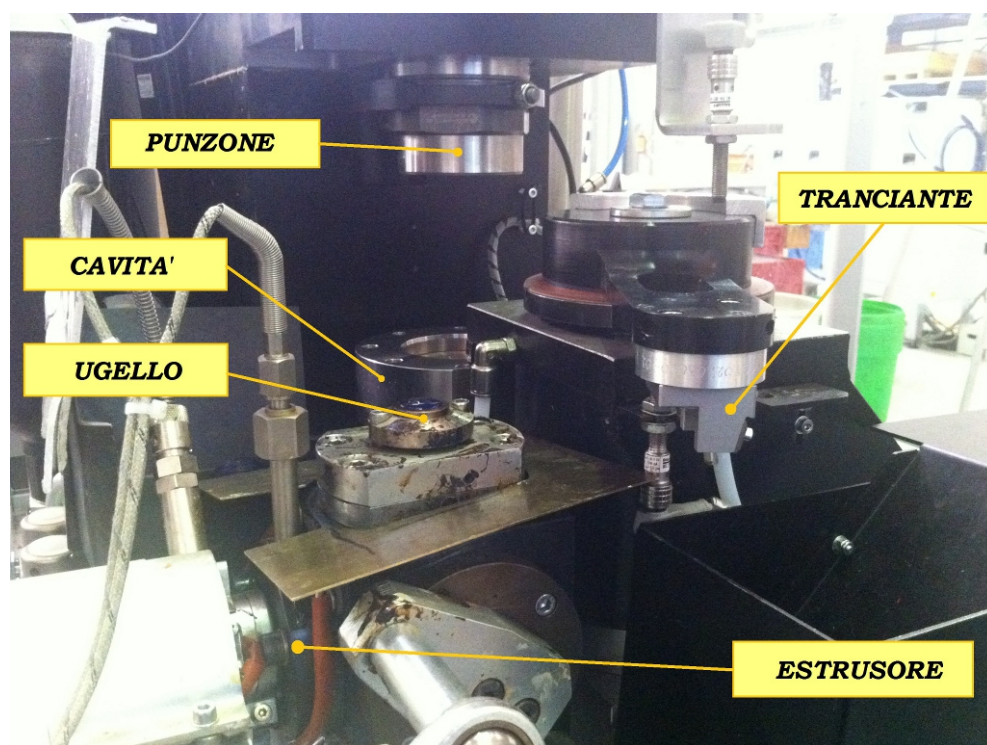


Figura 5.7: Vista della zona di estrusione

intanto estrudendo materiale), la lama di cui è dotato separa una dose di materiale plastico (denominato pellet o dose) che trasporterà in corrispondenza della cavità grazie all'adesione del polimero al tranciante stesso. Una volta raggiunto il semistampo inferiore, il circuito pneumatico presente all'interno della giostrina di inserimento farà cadere il pellet all'interno della cavità grazie ad un getto d'aria. A questo punto, appena la giostrina di inserimento esce dalla regione di spazio necessaria allo stampo per completare la sua movimentazione, lo stampo inferiore inizia a muoversi verso lo stampo

superiore ad alta velocità. Nei pressi del suo punto morto superiore la cavità si accoppia con il punzone imprigionando la dose all'interno della camera di formatura che via via ridurrà il suo volume fino a scaricare sul polimero modellato tutta la forza generata dall'impianto idraulico. A questo punto il polimero resta tra i due stampi fino ad avvenuto raffreddamento. Nel frattempo, la giostrina si è riportata nella posizione di riposo in attesa del ciclo successivo. Appena il tempo di raffreddamento imposto è trascorso, lo stampo si riapre, il manufatto viene estratto tramite un getto aria compressa e il ciclo è pronto per ripartire.

Uno schema grafico illustrativo di questa descrizione è rappresentato in figura 5.8. Va sottolineato che il ciclo rappresentato in nella figura appena citata descrive il funzionamento standard dello stampo e non il funzionamento reale della macchina per produrre il dischetto: infatti, come descritto nel capitolo 2, il ciclo standard prevede l'apertura dello stampo mantenendo il manufatto aggrappato al punzone fino al successivo passaggio del tranciante sulla cavità dove una camma lo estrarrà dal punzone per depositarlo sulla parte superiore della giostrina di inserimento.

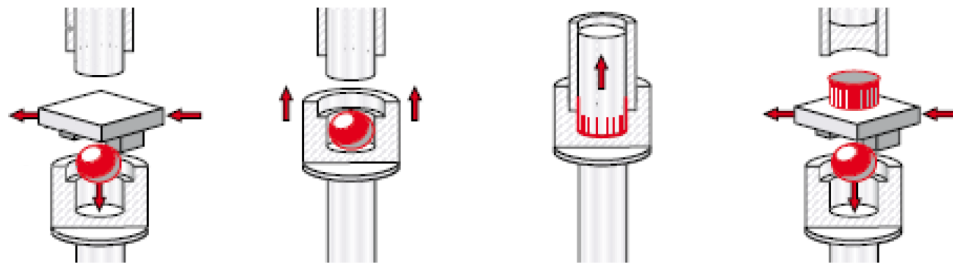


Figura 5.8: Procedimento di compressione

5.1.4 Lo stampo utilizzato

La cavità

La cavità, ovvero il semistampo inferiore, è realizzata come in figura 5.9. Il complesso cavità è collegato all'attuatore oleodinamico della CCMLAB grazie alla flangia di base 1. Quest'ultima, per evitare una deformazione accentuata del piano di stampaggio, è stata realizzata in acciaio ponendo particolare

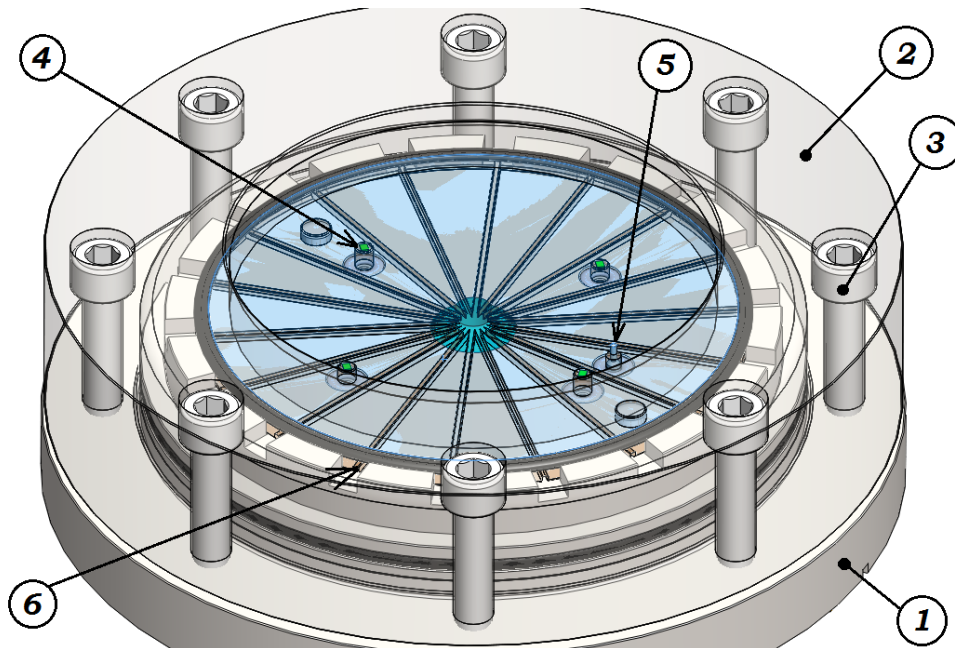


Figura 5.9: La cavità

attenzione allo spessore: alto spessore, elevata rigidità. Mediante delle viti di fissaggio 3, la ghiera 2 viene tirata verso la flangia 1 mettendo a pacco la serie di dischi 6 con un certo precarico. Questi dischi impilati generano il circuito di raffreddamento a raggiera come è ben visibile in figura 5.9. Il disco a contatto con il componente numero 2 (quello posizionato ad una quota più alta e visibile in trasparenza) è la parte che viene ‘bagnata’ dal polimero fuso: dunque esso è uno dei componenti analizzati con il metodo IHCP. Infatti, in esso sono installate quattro termoresistenze precedentemente descritte (componenti identificati dal numero 4) a due a due posizionate ad una profondità di 0.5mm e 1.5mm e un trasduttore di pressione identificato dal numero 5.

Il punzone

L'assieme punzone, ovvero il semistampo superiore, è rappresentato in sezione nella figura 5.10 ed è collegato rigidamente al corpo pressa assemblato mediante l'utilizzo di due prigionieri e rispettivi dadi. I dadi serrano alla macchina la staffa 1 che a sua volta blocca a ripetizione altri componenti fino al piattello 6. Il piattello è il componente a contatto con il polimero fuso

ed in esso è stata ricavata una finestra in vetro zaffiro 4 per permettere la lettura della temperatura del polimero fuso durante la fase di raffreddamento da parte del sensore di temperatura infrarossi 2. Per un corretto funzionamento del sensore occorre che il 'cono' di lettura 3 sia completamente libero ed in aria: ecco perché si notano diversi componenti con parti interne coniche.

Il piattello 6, visto che è la parte a contatto sia con liquido refrigerante che con polimero fuso, è sede dei sensori di temperatura e di pressione: la configurazione di questi è analoga a quella della cavità.

Un ultimo componente, presente nel semistampo superiore e degno di nota, è l'estrattore che, per questo tipo di stampo, non può essere considerato un vero e proprio estrattore del manufatto dallo stampo in quanto la sua funzione è solo quella di contenimento del polimero durante la formatura. Questo membro è sostenuto dalla forcella 5 che a sua volta è sostenuta dall'asta di estrazione e quindi la camma di estrazione: componenti non visibile in figura 5.10.

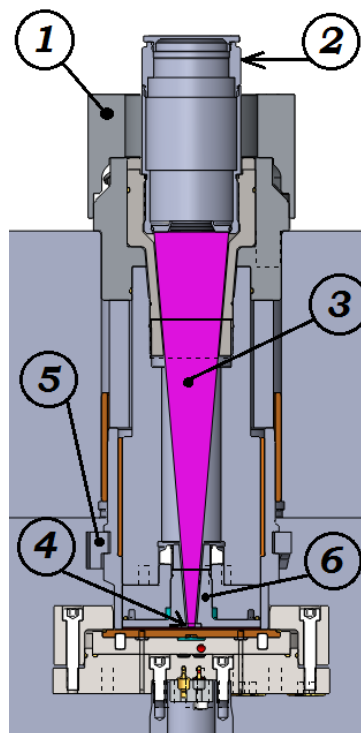


Figura 5.10: Il punzone

5.2 Le prove

Il processo di raffreddamento di un manufatto in materiale polimerico generato per compressione dipende da numerosi fattori che possono essere raggruppati in tre macro-categorie:

- fattori dipendenti dalla materia prima del manufatto,
- fattori dipendenti dai parametri di processo del polimero e
- fattori dipendenti dalla morfologia dello stampo.

La prima categoria sta ad identificare l'insieme di tutti quei fattori che sono legati alla composizione chimica del polimero. Fanno parte di questi: il monomero che sta alla base della catena molecolare del polimero, la tatticità del polimero e gli additivi quali colorante, fluidificanti, carbonato di calcio ($CaCO_3$) e altri. La seconda categoria comprende tutti quei parametri di macchina che influiscono sul processo di formatura del polimero. Fanno parte di questi: la pressione idraulica di stampaggio, la velocità di chiusura dello stampo, la temperatura del liquido di raffreddamento dello stampo, la temperatura del fuso e la portata del liquido refrigerante. L'ultima categoria, invece, riguarda la costruzione dello stampo e quindi la scelta del materiale dello stampo, il grado di finitura superficiale (rugosità), il trattamento termico, il trattamento superficiale e la scelta degli spessori che deve avere il manufatto.

Capire l'influenza di tutti i fattori sulla conduttanza termica di contatto mediante l'adozione di una progettazione degli esperimenti (DOE) sarebbe molto interessante e strategica, ma studiare tutti gli effetti dei singoli contributi con una sperimentazione soltanto significherebbe effettuare un ingente investimento monetario a fronte di una mancanza di certezza di ottenere risultati soddisfacenti. Si è quindi reso necessario scartare a priori alcuni fattori. I primi fattori tralasciati sono quelli legati alla terza macro-categoria in quanto sono quelli che implicano la costruzione di numerosi componenti e si è quindi deciso di optare per la realizzazione di un solo stampo utilizzando acciai tipici per stampi e con finiture superficiali secondo standard SACMI. Sono poi stati ulteriormente scartati i fattori di non interesse da parte dell'azienda come per esempio quelli della prima macro-categoria: ci si è limitati

alla scelta di alcuni materiali polimerici maggiormente utilizzati studiando eventualmente la sensibilità al loro colorante. Ulteriormente, visto che in tutti i macchinari venduti dalla SACMI, le portate di fluido refrigerante in gioco sono circa le stesse, il fattore portata è stato escluso.

Alla luce di tutte le osservazioni fatte, i fattori rimasti che si prestano ad essere studiati in questa sperimentazione sono stati riportati in tabella 5.4.

Fattore	U.d.M			
Materiale	—	Polimero 1	Polimero 2	Polimero 3
Colorante	—	Neutro	Blu Scuro	
Pressione St.	bar	da 100 (bar)	a 250 (bar)	con passo 25
T. Polimero	°C	175	190	210
T. Stampo	°C	15	20	30
Tempo Chiusura	ms	10	20	
Spessore disco	mm	1	1.5	

Tabella 5.4: Fattori testati e livelli scelti

5.3 I risultati

5.3.1 Analisi dei dati di output

Tutti i dati acquisiti (sia che essi derivino da termoresistenze o da termometro infrarossi o da trasduttori di pressione) sono stati campionati con una frequenza di campionamento f_c pari a 1000Hz ovvero 1ms di intervallo temporale Δt . Come si può notare da figura 5.11, i segnali di temperatura sono molto sporchi a causa dal rumore di fondo e quindi si è reso necessario un filtraggio: se il filtro non fosse stato applicato si sarebbe ottenuta un'amplificazione del rumore sul dato della conduttanza termica di contatto una volta applicato l'algoritmo IHCP, rendendo così vane le prove. Il filtro adottato è un filtro digitale di Butterworth di tipo passa-basso. L'ordine del filtro è 9 e la frequenza di taglio scelta è pari a 50Hz. I dati acquisiti, dopo l'azione di filtraggio, sono quelli mostrati in figura 5.12.

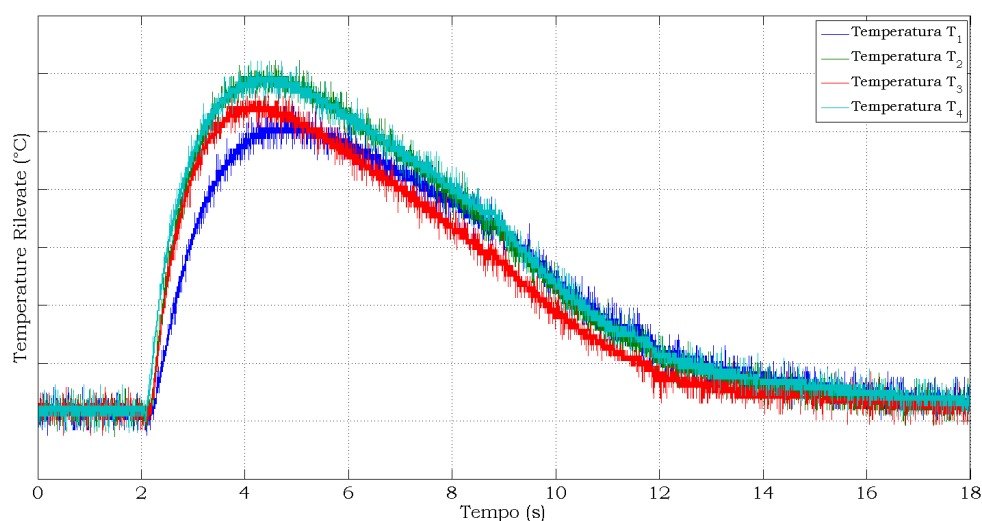


Figura 5.11: I 4 segnali grezzi di temperatura delle termoresistenze dello stampo inferiore

Come detto nel capitolo precedente, l'algoritmo di calcolo per i problemi inversi di conduzione termica è estremamente sensibile, oltre che al rumore del dato di partenza, anche al passo temporale di calcolo; dunque si è scelto di ricampionare i dati ad una frequenza di campionamento di 100Hz anziché 1000Hz. Il ricampionamento (o resampling) non porta ad eccessive perdite di informazioni sul raffreddamento in quanto, se si considera il raffreddamento più rapido di tutte le prove svolte, che avviene in 2.2s, i punti a disposizione per descrivere il fenomeno sono ben 220.

Finita la fase di preparazione dei dati per la rielaborazione finale da parte dell'algoritmo IHCP, si è mandato in esecuzione il calcolo.

Tra i vari risultati in uscita dal calcolo non ci sono solo quelli di conduttanza termica di contatto, ma anche altri di notevole interesse come i flussi termici entranti ed uscenti dallo stampo e il campo di temperatura nello stampo stesso. I primi risultati che si analizzano sono quindi i flussi termici che attraversano il metallo che compone lo stampo. I dati di figura 5.12 danno come risultato di uscita i flussi termici di figura 5.13.

Oltre ad apparire tre curve che analizzeremo a breve, appaiono tre fasi distinte di stampaggio: la fase di caricamento dose nella cavità, la fase di chiusura dello stampo (e quindi raffreddamento) e la fase di estrazione del

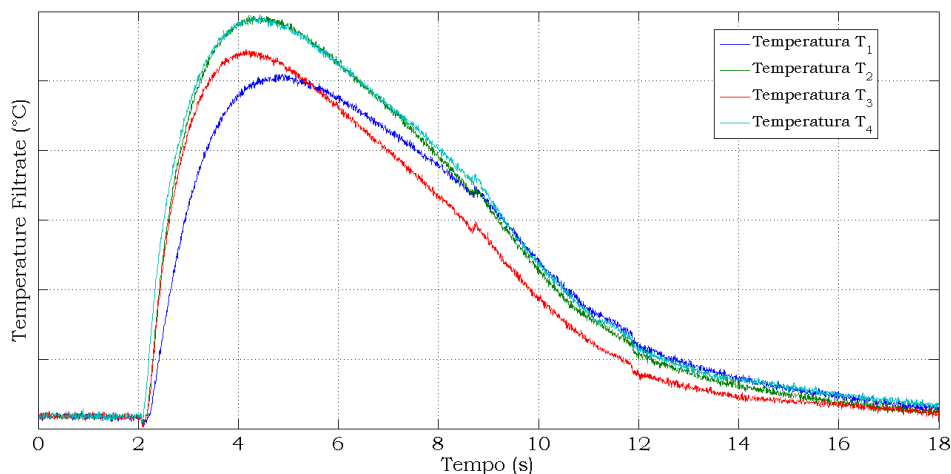


Figura 5.12: Stessi segnali di figura 5.11, ma filtrati

manufatto mediante soffio di aria compressa. La prima ed ultima fase sono quelle fasi in cui lo stampo è aperto e l'inserimento/estrazione del polimero è in atto: dunque i dati registrati in questi due lassi temporali non portano informazioni sul raffreddamento. Per chiarezza, nella figura 5.13, queste due fasi sono state rappresentate con una colorazione uniforme in grigio chiaro. La seconda fase, invece, è stata lasciata su sfondo bianco in quanto è la fase in cui è possibile studiare la conduttanza termica di contatto. Le curve presenti nella figura 5.13 sono tre:

- Linea BLU: che identifica il flusso termico entrante nello stampo dal lato polimero,
- Linea ROSSA: che identifica il flusso entrante nello stampo dal lato fluido refrigerante e
- Linea VERDE: che identifica la differenza tra i due flussi precedenti.

Nella fase di caricamento dose lo stampo non è ancora a contatto con il polimero ed è termostatato alla temperatura del fluido refrigerante. Questo significa che il flusso termico deve essere nullo (vedi prima campitura grigia). Appena la dose è depositata, lo stampo si chiude e quindi inizia la fase di raffreddamento: l'energia termica posseduta dal polimero viene ceduta al fluido refrigerante attraverso lo stampo. Ecco allora che il flusso

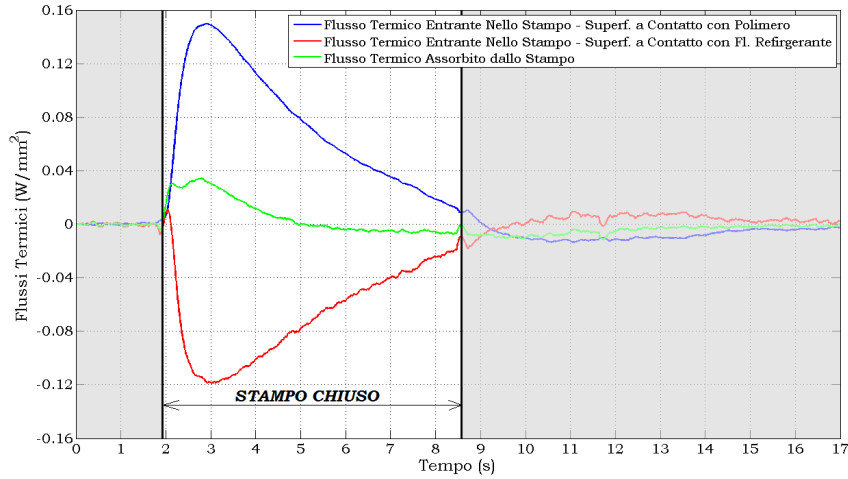


Figura 5.13: Flussi termici che attraversano le superfici dello stampo

termico sulla superficie lato polimero sarà entrante (linea blu nel quadrante delle ordinate positive) e uscente sulla superficie lato fluido refrigerante (linea rossa nel quadrante delle ordinate negative). Il fatto che l'energia termica debba attraversare lo stampo inizialmente termostato, implica, da parte dello stampo stesso, un certo assorbimento di energia. Questo assorbimento è indicato dalla differenza tra il flusso termico entrante e il flusso termico uscente ovvero la linea verde. Durante l'ultima fase, invece, lo stampo viene aperto e rimossa la dose mediante soffio d'aria compressa. In questa fase il fluido refrigerante continuerà a raffreddare il solo stampo (fino a termostatarlo), mentre alcuni soffi d'aria tenderanno a raffreddare la superficie dove era presente la dose; dunque le linee dei flussi termici oscilleranno attorno alla linea di flusso termico nullo, in maniera incontrollata, diventando via via sempre di più prossimi al valore nullo.

Ricordando che il flusso termico non è nient'altro che il gradiente della temperatura moltiplicato per la conducibilità termica del materiale (conducibilità che è stata ipotizzata costante per tutta la sperimentazione), si riescono a ricavare gli andamenti delle temperature delle superfici estreme dello stampo secondo il metodo visto nel capitolo precedente. Il risultato è mostrato in figura 5.14.

La curva blu rappresenta la temperatura della superficie dello stampo dal

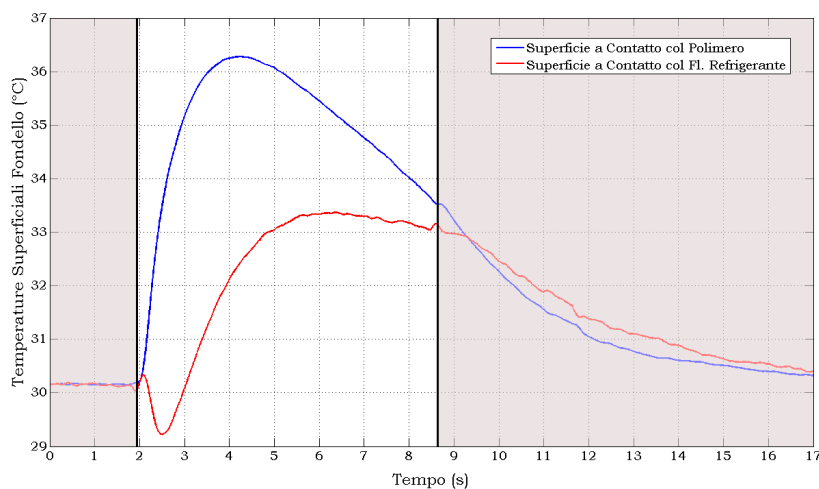


Figura 5.14: Temperature sulle due superfici estreme dello stampo

lato del polimero, mentre la curva rossa rappresenta la temperatura della superficie dello stampo dal lato del fluido refrigerante. Un risultato interessante è quello di poter dare un valore oggettivo all'incremento di temperatura dello stampo: sebbene il polimero in questa prova è stato depositato nello stampo alla temperatura di 203 °C (vedi curva verde tratteggiata di figura 5.15), la temperatura superficiale dello stampo è passata da 30 °C a 36 °C . Questo già significa che la conduttanza termica di contatto gioca un ruolo molto importante nello processo di raffreddamento in quanto il salto di temperatura all'interfaccia è molto elevato.

Vale la pena sottolineare che la diminuzione di temperatura identificata dalla linea rossa tra la prima e seconda fase è priva di significato fisico perché è impossibile che qualcosa all'interno dello stampo si raffreddi quando lo stampo viene messo a contatto con un polimero fuso. L'errore è causato da questi motivi:

1. l'algoritmo non è in grado di rappresentare in maniera fedele flussi termici soggetti a variazioni brusche e forti e quello che tenderà invece in realtà a fare è smorzare la variazione generando overshoot e undershoot;
2. visto che ciò che ci interessa per il calcolo della conduttanza è il flusso termico dal lato polimero, le termoresistenze sono state tutte posizio-

nate molto più vicino alla superficie bagnata dal polimero piuttosto che a quella bagnata dal fluido refrigerante: maggiore è la distanza tra sensore di temperatura e superficie su cui stimare il flusso termico, maggiore è l'incertezza associata alla misura;

- osservando la figura 5.12, si nota che in corrispondenza della chiusura/apertura stampo le termoresistenze captano la deformazione meccanica dei pezzi diminuendo (chiusura) o aumentando (apertura) la temperatura rilevata di $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$, inferiore all'incertezza dei sensori.

L'ultimo tipo di grafico ottenuto è quello di figura 5.15 dove sono presenti due curve: quella verde che identifica la temperatura del polimero durante il raffreddamento e quella blu che identifica la conduttanza termica di contatto. La curva verde, che rappresenta la temperatura superficiale rilevata

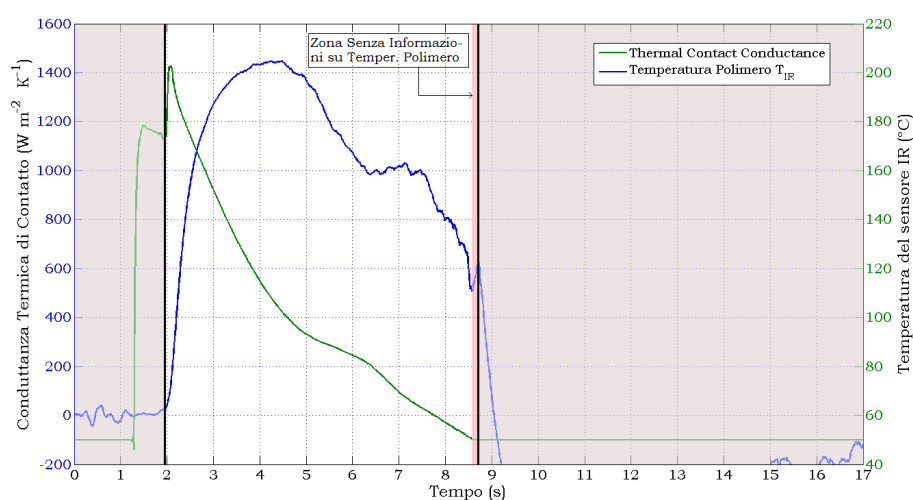


Figura 5.15: In blu, la conduttanza termica di contatto del polimero 1. In verde, la temperatura del polimero

del polimero, permette di capire con che velocità avviene il raffreddamento del manufatto. Questa curva, denominata in tecnologia meccanica *curva di raffreddamento*, è per questo caso contraddistinta da tre zone a pendenza diversa. Questa variazione di pendenza è stata attribuita, per analogia, alla variazione dei gradi di libertà della regola delle fasi di Gibbs e quindi si è supposto che in corrispondenza della seconda zona avvenga un cambiamento

di stato del polimero: la cristallizzazione. In effetti, come verrà tra poco espresso, i cambi di pendenza avvengono proprio alle temperature di cristallizzazione del polimero. Gli istanti temporali che identificano la variazione della legge di raffreddamento sono situati, per il caso illustrato in 5.15, a $t = 2s$, $t = 4.5s$ e $t = 6.8s$; mentre la temperatura media del secondo tratto è situata attorno ai 90°C . Dalle curve DSC del produttore del polimero (figura 5.16) si nota che il polimero dovrebbe teoricamente cristallizzare a 120°C anziché 90°C . Il fatto che i dati sperimentali siano diversi da quelli

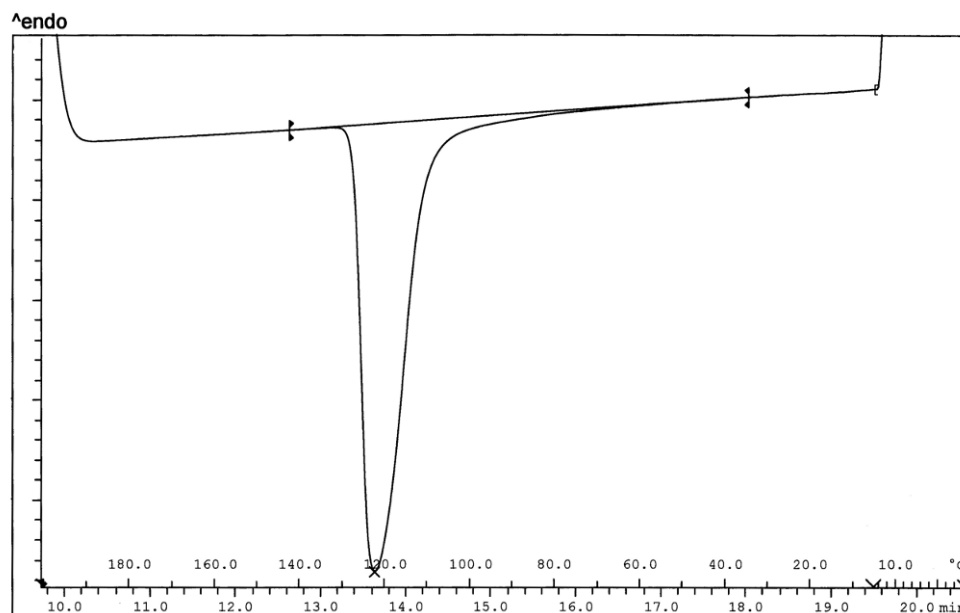


Figura 5.16: Curva DSC del polimero

dichiarati dal fornitore di polimero vergine è imputabile principalmente alla velocità di esecuzione della prova di caratterizzazione materiale; infatti, le curve DSC standard sono normate, e quindi effettuate, con una velocità di raffreddamento pari a $10^\circ\text{C}/\text{min}$, mentre le prove su CCMLAB sono state condotte con velocità di circa $2000^\circ\text{C}/\text{min}$. A ulteriore riprova di quanto detto, ricercatori come Mathot [23], hanno pubblicato diversi articoli su questo argomento mostrando che utilizzando uno scanner HyperDSC (strumento capace di raggiungere velocità di raffreddamento fino a $30\,000^\circ\text{C}/\text{min}$) si osservano questi due fenomeni:

1. la temperatura di solidificazione diminuisce all'aumentare della velocità di raffreddamento
2. il calore latente di solidificazione si riduce sempre di più.

Due immagini rappresentative di quanto detto sono visibili in figura 5.17 e 5.18

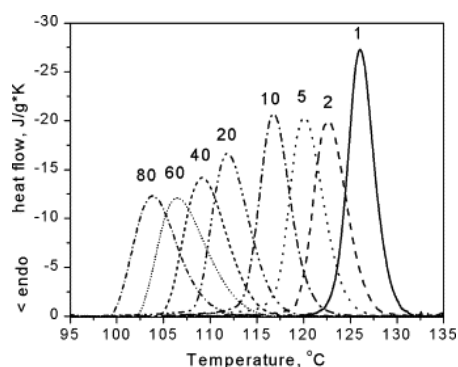


Figura 5.17: Curve DSC del polimero a basse velocità di raffreddamento [12]

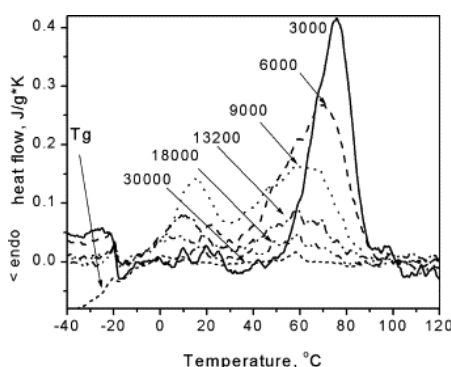


Figura 5.18: Curve DSC del polimero ad alte velocità di raffreddamento [12]

Questi semplici risultati ci permettono di affermare che aumentando la celerità del raffreddamento, oltre ad ottenere un guadagno in termini di tempo di raffreddamento per questa condizione, si ottiene una riduzione del tempo anche perché il calore latente del polimero (area dal picco della curva DSC) diminuisce. Dunque significa che sicuramente si ha un 'guadagno' di tempo ciclo nella fase di cristallizzazione.

L'ultimo risultato ottenuto dall'applicazione dell'algoritmo IHCP è la conduttanza termica di contatto TCC. Una prima analisi di questo risultato porta ad osservare che la conduttanza termica di contatto sembra avere un comportamento a gradini dove, nel primo stadio di raffreddamento, esso assume un valore alto per poi scendere, nel secondo stadio, ad un secondo valore più basso che tende a rimanere quasi costante. Se si osserva questo comportamento congiuntamente al rilievo della temperatura superficiale del polimero, si nota che il passaggio da uno stadio al successivo avviene proprio in corrispondenza della cristallizzazione del polimero. Questo fenomeno può

essere spiegato considerando che, finché il polimero è in fase liquida, la forza di stampaggio esercitata dall'attuatore trasmette una pressione idrostatica costante al polimero. Raffreddandosi, il polimero comincerà a ritirarsi in maniera piuttosto uniforme fino a quando non inizierà la fase di cristallizzazione dove le catene polimeriche inizieranno a compattarsi a blocchi generando ritiri disuniformi. Ed è qui che la pressione di contatto tra polimero e stampo risulterà avere dei crolli localizzati provocando microscopiche intercapedini di vapori/aria tra stampo e polimero. Questi gas provocano quindi una sorta di barriera isolante termica che porta ad una diminuzione della conduttanza termica di contatto. Una volta cristallizzate le catene polimeriche, il liquido si è trasformato in solido e i ritiri tornano ad essere di entità minore. Questo significa che in questo secondo stadio si deve avere una modifica del valore di TCC più contenuto.

Limitatamente alla conduttanza termica di contatto, si passa ora ad illustrare il comportamento qualitativo di tale parametro per il secondo tipo di polimero. Come si può notare da figura 5.19, questo polimero non presenta

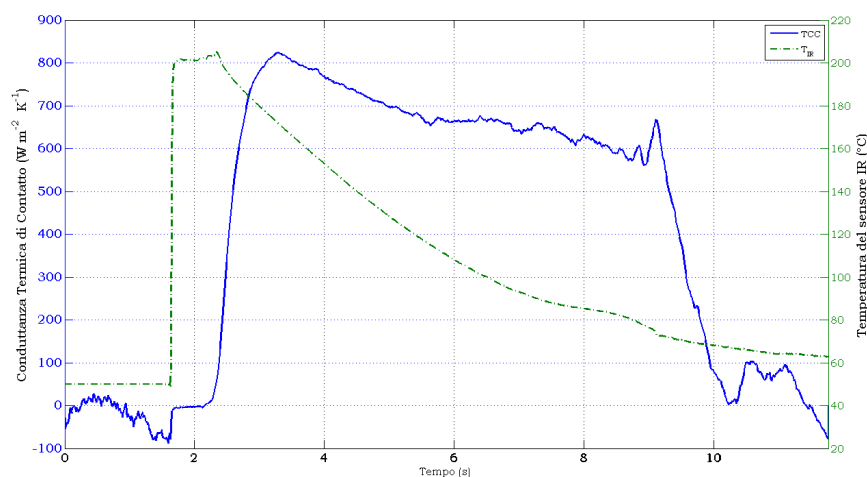


Figura 5.19: Conduttanza termica di contatto del secondo polimero

più un andamento a gradino, ma un andamento decrescente costante per tutto il periodo di raffreddamento. Anche in questo caso il polimero cristallizza, come si evince dall'andamento della temperatura $T_{Polymer}$, ma sembra non ultimarsi completamente al momento dell'apertura dello stampo.

Per quanto concerne invece la rielaborazione numerica dei valori della conduttanza termica, si nota che se si dovessero paragonare tutte le curve (specialmente quelle tra polimeri diversi) punto a punto, il confronto sarebbe quasi impossibile e privo di significato: dunque la soluzione adottata per rendere almeno confrontabili è quello di comporre le analisi sfruttando la conduttanza termica di contatto media calcolata come:

$$\hat{h}_{medio} = \frac{\int_{t_{Ap.Stampo}}^{t_{Ch.Stampo}} h(t) dt}{t_{Ap.Stampo} - t_{Ch.Stampo}} \quad (5.2)$$

dove $t_{Ch.Stampo}$ e $t_{Ap.Stampo}$ sono i due estremi temporali di validità del valore di conduttanza termica $h(t)$. Ovviamente, facendo la media integrale, si perdono tutte quelle informazioni inerenti alla tipologia di curva, ma, visto che i dati ricavati verranno utilizzati per effettuare simulazioni numeriche, si è optato per eseguire valutazioni della sensibilità da parte del TCC ai vari parametri impiegando solo il valore medio integrale.

5.3.2 Il metodo ANOVA

Il primo passo effettuato per comprendere la significatività dei dati è stato quello di applicare il metodo delle analisi delle varianze (ANOVA) sulla conduttanza termica di contatto a partire dai fattori (dati di input) elencati in tabella 5.4 ovvero:

1. tipo polimero,
2. colorante,
3. pressione di stampaggio,
4. velocità di chiusura,
5. spessore disco,
6. temperatura iniziale polimero e
7. temperatura stampo.

L'approccio più corretto per valutare l'influenza di questi fattori sulla conduttanza termica è quello di organizzare un piano di prove di tipo Full Factorial a più livelli [28]. Considerando che, per avere un dato più insensibile alle incertezze di misura è necessario eseguire delle ripetizioni, il numero di prove sarebbe ammontato a $3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 6048$ ipotizzando una ripetizione delle prove pari a 4. Per limitare il numero di prove da effettuarsi esistono 2 possibilità di azione. La prima, la più corretta, consta in una fase di esplorazione di sensibilità dei singoli fattori, ipotizzando per ogni fattore solo due livelli, e di una successiva fase di affinamento dei risultati aumentando i livelli dei soli fattori significativi. La seconda, invece, consta nella riduzione del numero di prove ipotizzando una totale assenza di interazione tra i fattori e quindi considerando di variare un solo fattore per volta. Sebbene la prima strategia sarebbe stata ottimale, si è optato per la seconda in quanto ha permesso di compattare il più possibile il tempo di occupazione macchina. Dunque, il metodo ANOVA utilizzato in questo lavoro è stato quello a singolo fattore.

Effetto del tipo di polimero

L'effetto del primo fattore tra quelli elencati in precedenza, ovvero il tipo di polimero, è già stato parzialmente trattato nei paragrafi precedenti, almeno a livello qualitativo. Per quanto riguarda invece il livello quantitativo si osserva che l'ipotesi nulla H_0 ¹ viene rifiutata con un *p-value* pari a $\approx 0\%$ e quindi significa che il valore della conduttanza termica dipende fortemente dal tipo di polimero. Infatti usualmente si rifiuta l'ipotesi nulla H_0 accettando il valore limite di *p-value* pari a 1%: questo significa che la probabilità di ottenere un test statistico almeno così estremo come quello che è stato misurato effettivamente (considerando vera l'ipotesi nulla H_0) è pari al 1% [28]. Per dare un riscontro numerico dell'affermazione appena fatta, si riportano in tabella 5.5 sia i dati raccolti sperimentalmente che la loro rielaborazione.

Vale la pena notare che, pur essendo il polimero 1, il polimero 2 e il polimero 3 tutti materiali distinti, dai risultati sembra che i polimeri 1 e 2

¹In questo contesto, accettare l'ipotesi nulla H_0 significa ammettere che un parametro di test (come per esempio il colorante, la pressione, ecc.) non influenzi il dato di output (ovvero la conduttanza termica di contatto).

Livello	Polimero 1	Polimero 2	Polimero 3	
Ripetizione 1	1331	1303	716.8	
Ripetizione 2	1355	1326	727.1	
Ripetizione 3	1366	1328	695.0	
Ripetizione 4	1359	1352	711.1	Grand Mean
Media livello	1353	1327	712.5	1131
Dev.St. livello	15.3	20.1	13.4	—
	SSQ	GdL		
SSB_c	1051438	2	MSB_c	525719
SSW_c	2450	9	MSW_c	272.2
TSS	1053888	11	F_{calc}	1931.22
			$p-value$	$\approx 0\%$

Tabella 5.5: Analisi TCC W/m^2K al variare del tipo di polimero

siano uguali. In effetti questi due polimeri appartengono alla stessa famiglia, mentre il 3 no.

Nella tabella 5.5, come anche in tutte le tabelle a seguire, compaiono delle voci i cui significati non sono stati ancora esplicitati all'interno di questa tesi e quindi, per completezza, vengono ora descritti.

Con il termine *Grand Mean* si identifica la media delle medie dei dati registrati per ogni livello. I termini SSB_c , SSW_c e TSS sono invece le somme degli scarti quadratici SSQ riferiti rispettivamente a ciascuno dei livelli del fattore di test SSB_c , al rumore SSW_c e al totale TSS . Questi ultimi valori, se divisi per i gradi di libertà del sistema (GdL), diventano le medie dei quadrati dei fattori di test MSB_c e le medie dei quadrati del rumore MSW_c . Il fattore F_{calc} a sua volta è definito come il rapporto tra MSB_c e MSW_c . Tale valore, per una distribuzione di Fischer con gradi di libertà rispettivamente pari a MSB_c e MSW_c , forniscono il valore del *p-value*.

Effetto del colorante

Il secondo fattore, il colorante, invece non ha effetto sulla conduttanza termica di contatto. Analizzando i risultati di tabella 5.6 e 5.7 si osserva che le due famiglie di polimeri (polimeri 1 e 2) e polimero 3, pur essendo insensibili al colorante con una probabilità del 1%, si nota la loro ‘insensibilità’ è nettamente diversa: per i primi si ha che il p -value è circa 2.45%, mentre per il polimero 3 si ha che il p -value è pari a 18.3% e questo significa che, se si ammettesse un valore di p -value leggermente più alto il polimero 3 rimarrebbe insensibile, mentre gli altri due no.

Livello	Neutro	Blu Scuro		
Ripetizione 1	1331	1268		
Ripetizione 2	1355	1139		
Ripetizione 3	1366	1209		
Ripetizione 4	1359	1327	Grand Mean	
Media livello	1353	1236	1294	
Dev.St. livello	15.3	80.7	—	
	SSQ	GdL		
SSB_c	27447	1	MSB_c	27447
SSW_c	20218	6	MSW_c	337.0
TSS	47665	7	F_{calc}	8.15
			p-value	2.45%

Tabella 5.6: Analisi TCC W/m^2K al variare del colorante per i polimeri 1 e 2

Effetto della pressione di stampaggio

Il terzo fattore, la pressione di stampaggio, è uno dei dati di maggiore interesse per lo stampista ed è per questo motivo che questo fattore è stato l'unico ad essere trattato su 7 livelli. Sebbene il p -value del polimero 3 sia pari a 1.47%, e quindi accettata l'ipotesi H_0 nulla per pochissimi decimi percentuali, si è visto che mediamente il valore di conduttanza termica dei

Livello	Neutro	Blu Scuro		
Ripetizione 1	648	692		
Ripetizione 2	703	636		
Ripetizione 3	610	741		
Ripetizione 4	640	704	Grand Mean	
Media livello	650	693	672	
Dev.St. livello	38.9	43.4	—	
	SSQ	GdL		
SSB_c	3691	1	MSB_c	3691
SSW_c	10184	6	MSW_c	1697
TSS	13874	7	F_{calc}	2.17
			<i>p-value</i>	$\approx 18.38\%$

Tabella 5.7: Analisi TCC W/m^2K al variare del colorante per il polimero 3

polimeri dipende in maniera estremamente sensibile dalla pressione di stampaggio. D'altronde, come si era già visto nel capitolo 3, un incremento della pressione contatto porta ad avere una maggiore adesione tra i materiali e quindi una maggiore superficie di contatto che facilita lo scambio di energia termica. In tabella 5.8, 5.9 e 5.10 si analizzeranno i dati per il polimero 1, 2 e 3 rispettivamente. A questo punto, per comprendere meglio quale tipo di correlazione descrive la conduttanza termica di contatto con la pressione di stampaggio, si ricorre all'ausilio di grafici: vedi figura 5.20. Come si può notare, il polimero 1 ha un andamento lineare e i valori misurati molto puliti (varianza inferiore a $1000W/m^2K$), mentre il polimero 2 presenta anch'esso un andamento lineare ma i dati sono molto più dispersi. Per quanto riguarda il polimero 3, invece l'andamento è quasi costante e pari ad un valore di $700W/m^2K$

Effetto della velocità di chiusura stampo

Il quarto fattore, ovvero l'effetto della velocità di chiusura stampo, non incide sulla conduttanza termica di contatto, come si supponeva. Infatti si tratta

Livello [bar]	100	125	150	175	200	225	250	
Ripetizione 1	1331	1338	1343	1356	1402	1468	1427	
Ripetizione 2	1355	1342	1372	1404	1407	1419	1449	
Ripetizione 3	1366	1344	1376	1392	1434	1436	1466	
Ripetizione 4	1359	1373	1359	1407	1409	1437	1462	Grand Mean
Media livello	1353	1349	1362	1390	1413	1440	1451	1394
Dev.St. livello	15.3	15.9	15.0	23.5	14.4	20.6	17.7	—
					SSQ	GdL		
					SSB_c	6	MSB_c	6945
					SSW_c	21	MSW_c	314.8
					TSS	27	F_{calc}	22.06
							<i>p-value</i>	$\approx 0\%$

Tabella 5.8: Analisi TCC W/m^2K al variare della pressione per polimero 1

Livello [bar]	100	125	150	175	200	225	250
Ripetizione 1	1247	1350	1274	1339	1340	1363	1314
Ripetizione 2	1240	1286	1320	1401	1316	1328	1283
Ripetizione 3	1259	1299	1363	1363	1338	1303	1286
Ripetizione 4	1304	1287	1331	1327	1312	1396	1292
Media livello	1263	1306	1322	1357	1327	1348	1294
Dev.St. livello	28.7	30.4	37.0	32.5	14.6	40.5	14.0
					SSQ	GdL	
				SSB_c	25103	6	MSB_c 4184
				SSW_c	18648	21	MSW_c 888
				TSS	43751	27	F_{calc} 4.71
							<i>p-value</i> 0.21%

Tabella 5.9: Analisi TCC W/m^2K al variare della pressione per polimero 2

Livello [bar]	100	125	150	175	200	225	250	
Ripetizione 1	717	715	712	682	753	689	684	
Ripetizione 2	727	828	467	686	737	688	743	
Ripetizione 3	695	688	646	747	781	702	718	
Ripetizione 4	711	847	648	752	757	714	684	Grand Mean
Media livello	713	769	618	717	757	698	707	711
Dev.St. livello	13.4	79.5	105.6	37.9	18.1	12.4	28.4	—
					SSQ	GdL		
					SSB_c	6	MSB_c	9568
					SSW_c	21	MSW_c	2912
					TSS	27	F_{calc}	3.29
							<i>p-value</i>	1.47%

Tabella 5.10: Analisi TCC W/m^2K al variare della pressione per polimero 3

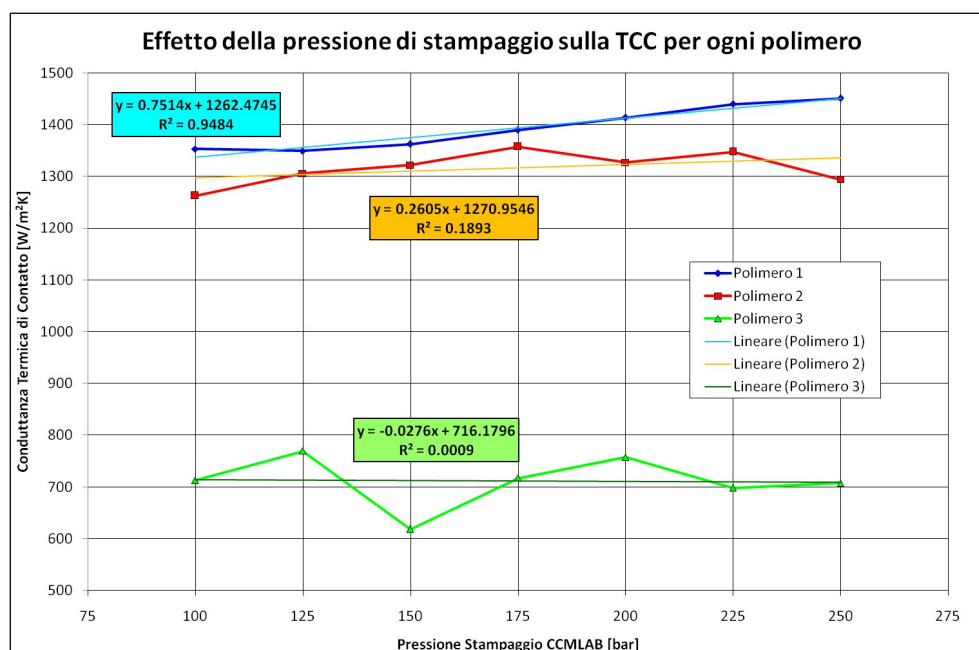


Figura 5.20: Conduttanza termica di contatto vs pressione di stampaggio

di una velocità di accostamento dello stampo e quindi si sarebbe potuto modificare il valore della conduttanza solo durante il primo impatto dello stampo col polimero. Il risultato estrapolato dalle prove col polimero 3 porta ad avere un *p-value* maggiore della soglia imposta. In tabella 5.11 appare l'analisi dei dati.

Effetto dello spessore del manufatto

Totalmente opposto invece è l'effetto dello spessore del manufatto. Si nota un forte incremento della conduttanza termica di contatto a fronte di una diminuzione dello spessore del manufatto. Questo probabilmente è dovuto al fatto che essendo minore lo spessore, il ritiro del materiale in quella direzione è minore e quindi si ha una generazione di intercapedine di gas isolante (i.e. aria) minore. I dati che confermano quanto visto sono rappresentati in tabella 5.12 e riferiti al polimero 1.

Livello	$t_{ch.} = 20ms$	$t_{ch.} = 10ms$		
Ripetizione 1	717	687		
Ripetizione 2	727	658		
Ripetizione 3	695	709		
Ripetizione 4	711	698	Grand Mean	
Media livello	713	688	700	
Dev.St. livello	13.4	21.8	—	
	SSQ	GdL		
SSB_c	1186	1	MSB_c	1186
SSW_c	1960	6	MSW_c	327
TSS	3146	7	F_{calc}	3.63
			$p-value$	$\approx 9.85\%$

Tabella 5.11: Analisi TCC W/m^2K al variare della velocità d'accostamento stampo per il polimero 3

Effetto della temperature

Gli ultimi due fattori, ovvero la temperatura iniziale del polimero e quella dello stampo, sembrano non avere alcun effetto sulla conduttanza termica di contatto in quanto il $p-value$ si attesta circa sul 35% per entrambe le famiglie di polimeri.

Livello	Sp.1.5mm	Sp.1mm		
Ripetizione 1	1343	2219		
Ripetizione 2	1372	2356		
Ripetizione 3	1376	2453		
Ripetizione 4	1359	2339	Grand Mean	
Media livello	1362	2342	700	
Dev.St. livello	15.0	96.0	—	
	SSQ	GdL		
SSB_c	1919478	1	MSB_c	1919478
SSW_c	28341	6	MSW_c	4723
TSS	1947819	7	F_{calc}	406.37
			p-value	$\approx 0\%$

Tabella 5.12: Analisi TCC W/m^2K al variare dello spessore per il polimero 1

Capitolo 6

Conclusioni e sviluppi futuri

La tesi è stata sviluppata per analizzare un aspetto dello scambio termico durante il transitorio di formatura di capsule polimeriche tramite processo di compressione, anziché quello più diffuso di iniezione. Per come sono strutturati gli stampi, i meccanismi di trasmissione dell'energia termica sono principalmente due: la convezione (dovuta al moto del fluido refrigerante) e la conduzione. Con software CAE presenti sul mercato, oggi è possibile stimare, con una buona approssimazione, sia il coefficiente convettivo del fluido che la distribuzione di temperatura all'interno dell'stampo e polimero. Per caratterizzare correttamente il fenomeno, tuttavia, si rende necessario stimare in modo accurato gli effetti delle resistenze termiche di contatto che non sono attualmente conosciuti appieno. Pertanto, questo lavoro di dottorato si è focalizzato sulla determinazione del valore istantaneo della resistenza termica di contatto durante la fase di raffreddamento e cristallizzazione di un dischetto di materiale polimerico, primo passo per la caratterizzazione del processo completo di formatura delle capsule di chiusura recipienti per bevande.

La scelta di una geometria tanto semplice è stata dettata da una doppia considerazione: da un lato, è sulla testa della capsula che l'azione refrigerante ha maggiore possibilità di venire modulata (rispetto, ad esempio, alle zone filettate), dall'altro la forma a disco permette di trattare il problema come monodimensionale e minimizzare gli effetti generati dalla presenza di pareti laterali, filetti e così via.

La scelta dell'approccio sperimentale è stata operata partendo dalla constatazione della mancanza di dati sull'argomento nella letteratura scientifica, e dalla conseguente necessità di produrne per potere impiegare i risultati come condizioni al contorno in simulazioni numeriche del processo di raffreddamento di oggetti più simili a capsule reali, e per potere, una volta ampliato lo spettro dei materiali sia per il polimero che per lo stampo, valutare la possibilità di proporre modelli per la resistenza di contatto in questo tipo di accoppiamenti.

Lo stampo realizzato per questa campagna sperimentale è stato pensato in modo tale che producesse un manufatto molto semplice (un disco con rapporto $D/l \approx 70$) e strumentato da otto termoresistenze, un termometro ad infrarossi, due trasduttori di pressione, due flussimetri e termoregolazione degli stampi. L'apparecchiatura di prova, affine alla corrispondente attrezzatura industriale, si è dimostrata in grado di fornire risultati soddisfacenti e di permettere di produrre una significativa quantità di dati che, se per restrizioni economiche e temporali, non coprono l'intera gamma di un'analisi Full Factorial, permettono - sotto le ipotesi del metodo di analisi delle varianze a singolo fattore - di stabilire innanzitutto le dipendenze della conduttanza termica di contatto dai diversi parametri esaminati, individuando su quali aspetti ci si deve focalizzare nel prosieguo delle ricerche in questo ambito.

L'utilizzo di metodi inversi per il calcolo del flusso termico con sensori e passi temporali multipli ha fornito risultati soddisfacenti in termini qualitativi e anche quantitativi, permettendo di individuare in modo chiaro il momento in cui si verifica la cristallizzazione del polimero, che risulta avvenire a temperature differenti rispetto a quelle normalmente indicate nella letteratura tecnica: questo comportamento non è tuttavia anomalo, ma rispecchia quanto succede all'aumentare della velocità di raffreddamento del polimero.

Le analisi hanno anche permesso di individuare le differenze in termini di andamenti delle conduttanze termiche di contatto per le differenti famiglie di polimeri, evidenziando come tali valori siano sempre differenti tra la fase precedente e quella successiva alla cristallizzazione del polimero, ma con variazioni e fluttuazioni fortemente dipendenti dal materiale.

La constatazione della estrema variabilità della conduttanza termica di

contatto ha indotto a scegliere di utilizzare un valore mediato sia per analizzare la dipendenza dai vari parametri di stampaggio, sia come valore da inserire in future simulazioni numeriche del processo di raffreddamento. Riguardo a questo ultimo punto, si ritiene che in prima approssimazione si possa prescindere da una caratterizzazione più articolata della conduttanza di contatto, optando al più per una condizione doppia (utilizzando un valore medio per il raffreddamento prima della cristallizzazione e uno differente dopo che questa è avvenuta).

Per quel che riguarda la dipendenza della conduttanza dalle variabili di processo, l'analisi delle varianze ha indicato una sostanziale indipendenza dalla presenza del colorante, dalla velocità di chiusura dello stampo e dalle temperature iniziale del polimero e del liquido di raffreddamento. Tali risultati sono facilmente spiegabili, tranne che nel caso delle temperature; per esse, tuttavia, si può ipotizzare che i valori mediati, sui quali l'analisi è stata effettuata, mascherino almeno parzialmente la loro influenza sul valore della conduttanza.

Come era lecito attendersi, è stata verificata la dipendenza dal tipo di polimero, e si potrebbe ipotizzare che tale dipendenza si possa allargare alle famiglie, anziché ai singoli tipi, ma questa conclusione richiede prove ulteriori su più materiali.

La pressione di stampaggio, si è dimostrata esercitare una significativa influenza sulla resistenza di contatto: per avere dati sicuramente affidabili dal punto di vista quantitativo sono comunque auspicabili ulteriori prove. Anche la dipendenza dallo spessore del disco non è sorprendente; va tuttavia detto che questo parametro non è variabile in modo troppo arbitrario, dati gli spessori che le capsule possono avere nella pratica.

Il lavoro svolto durante questa tesi è servito per progettare, costruire e collaudare una apparecchiatura sperimentale, nonché algoritmi di elaborazione dati che permettano di ricavare la conduttanza termica di contatto, di cui si è analizzata la dipendenza da diversi parametri di processo. Durante lo svolgimento della ricerca si è evidenziata la forte sensibilità dei risultati alla qualità dei sensori, che possono sicuramente essere sostituiti con altri più accurati in una versione modificata dell'apparato sperimentale; questo sembra la principale modifica da apportare prima di proseguire la sperimentazione,

mentre l'elaborazione dati appare sufficientemente robusta ed affidabile per non ritenere che siano necessari variazioni in questo ambito. Per ciò che riguarda i parametri, sicuramente è auspicabile analizzare altri materiali per lo stampo, e altri polimeri, ma certamente una volta che i sensori siano stati sostituiti è consigliabile approfondire l'analisi anche per i parametri che si sono dimostrati influenzare il valore della resistenza termica di contatto.

Bibliografia

- [1] M. Bahrami, J. Culham, M. Yovanovich, and G. Schneider. Review of thermal joint resistance models for non conforming rough surface. *Applied mechanics reviews*, 59:1–11, January 2006.
- [2] J. Beck, B. Blackwell, and C. St.Clair. *Inverse Heat Conduction: Ill posed problems*. John Wiley and Sons Inc., 1985.
- [3] A. Benada, A. Derdouri, M. Lamontagne, and Y. Simard. Analysis of thermal contact resistance between polymer and mold in injection molding. *Applied thermal engineering*, 24:2029–2040, October 2004.
- [4] A. Benada, A. Derdouri, M. Lamontagne, and Y. Simard. Advances in infrared technology for the online monitoring of injection moulding: application to the understanding of the nature of contact at the polymer-mould interface. *Transaction of the Institute of Measurement and Control*, 29:431–451, December 2007.
- [5] A. Benada, M. Lamontagne, and Y. Simard. Effect of shrinkage and process parameters on the monitoring of bulk and surface stream temperatures in injection molding via the infrared waveguide method. *Polymer Engineering and Science*, 44:955–964, May 2004.
- [6] A. Black, V. Singhal, and S. Garimella. Analysis and prediction of constriction resistance for contact between rough engineering surface. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, 18:30–36, January-March 2004.
- [7] F. Bowden and D. Tabor. *The friction and lubrication of solids*. Oxford University Press, 1950.

- [8] T. Cetinkale and M. Fishenden. Thermal conductance of metal surfaces in contact. *Int. Conf. of Heat Transfer, Inst. Mech. E.*, pages 271–275, London, 1951.
- [9] A. Clausing. Some influences of macroscopic constrictions on the thermal contact resistance. *Nasa*, Rep. No: ME-TN-242-2, 1965.
- [10] M. Cooper, B. Mikic, and M. Yovanovich. Thermal contact conductance. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12:279–300, 1969.
- [11] G. Fu. An extension of hertz’s theory in contact mechanics. *J. of Applied Mechanics*, 74:373–374, March 2007.
- [12] A. Gradys, P. Sajkiewicz, A. Minakov, S. Adamovsky, C. Schick, T. Hashimoto, and K. Saijo. Crystallization of polypropylene at various cooling rates. *Materials Science and Engineering A*, 413-414:442–446, December 2005.
- [13] J. Greenwood and J. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceeding of the Royal Society A*, 295:300–319, December 1966.
- [14] G. Guglielmini and C. Pisoni. *Elementi di trasmissione del calore, 2nd Edition*. Casa Ed. Ambrosiana, 1996.
- [15] S. Hyun and M. Robbins. Elastic contact between rough surfaces: effect of roughness at large and small wavelengths. *Tribology International*, 40:1413–1422, March 2007.
- [16] G. S. Jr. Numrical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shape. *J. of Heat Transfer*, 82:20–26, 1960.
- [17] M. Lambert, I. Cavenall, and L. Fletcher. Experimental thermal contact conductance of electronic modules. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, 11:146–152, April-June 1997.
- [18] M. Lambert and L. Fletcher. Review of models for thermal contact conductance of metals. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, 11:129–140, April-June 1997.

-
- [19] C. Madhusudana. *Thermal contact conductance, Mechanical Engineering Series*. Springer-Verlag, 1996.
- [20] M. Mantelli and M. Yovanovich. Parametric heat transfer study of bolted joints. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, 12:382–390, July-September 1998.
- [21] E. Marotta and L. Fletcher. Thermal contact conductance for aluminium and stainless steel contacts. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, 12:374–381, July-September 1998.
- [22] H. Masse, E. Arquis, D. Delaunay, S. Quilliet, and P. L. Bot. Heat transfer with mechanically driven thermal contact resistance at the polymer-mold interface in injection molding of polymers. *International J. of Heat and Mass Transfer*, 47:2015–2027, April 2004.
- [23] V. Mathot, G. V. Poel, and T. Pijpers. Improving and speeding up the characterization of substances, materials, and products: benefits and potentials of high-speed dsc. *American Laboratory*, Technical Articles, April 2006.
- [24] B. Mikic. Analytical studies of contact of nominally flat surfaces; effect of previous loading. *J. of Lubrication Technologies*, pages 451–456, October 1971.
- [25] B. Mikic. Thermal contact conductance; theoretical consideration. *International J. of Heat and Mass Transfer*, 17:205–214, February 1974.
- [26] B. Mikic and T. Roca. A solution to the contact of two rough spherical surfaces. *J. of Applied Mechanics*, 41:801–803, September 1974.
- [27] S. Mirmira, E. Marotta, and L. Fletcher. Thermal contact conductance of adhesives for microelectronic systems. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, 11:141–145, April-June 1997.
- [28] D. Montgomery. *Progettazione e analisi degli esperimenti*. McGraw-Hill, 2005.

- [29] M. Ozisik. *Heat Conduction 2nd Edition*. John Wiley and Sons Inc., 1993.
- [30] M. Ozisik. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. Taylor and Francis, 2000.
- [31] G. V. Poel and V. Mathot. High performance differential scanning calorimetry (hper dsc): a powerful analytical tool for the study of the metastability of polymers. *Thermochimica Acta*, 461:107–121, September 2007.
- [32] J. Pullen and J. Williamson. On the plastic contact of rough surfaces. *Proceeding of the Royal Society A*, 327:159–173, March 1972.
- [33] J. Pullen and J. Williamson. . *Proceeding of the Royal Society A*, 327:159–173, 1973.
- [34] L. Roess. Theory of spreading conductance. *Unpublished report of the Beacon Laboratory of Texas Company*, page Appendix A, .
- [35] G. Schmidt and W. Michaeli. High pressure blow molding, an innovative way for decreasing cooling time. *ANTEC'98*, pages 770–733, May 1998.
- [36] M. R. Sridhar and M. Yovanovich. Thermal contact conductance of tool steel and comparison with model. *International. J. of Heat and Mass Transfer*, 39:831–839, March 1996.
- [37] S. Timoshenko and J. Goodier. *Theory of Elasticity, 3rd Edition*. McGraw-Hill, 1970.
- [38] D. Whitehouse and J. Archard. The properties of random surfaces in contact. *ASME Winter Annual Meeting*, pages 36–37, November 1969.