

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

*DOTTORATO DI RICERCA IN
MERCATI E INTERMEDIARI FINANZIARI*

Ciclo XXIV

*Settore concorsuale: 13/B4
Settore scientifico-disciplinare: SECS-P/11*

L'EFFICIENZA DEGLI INDICI AZIONARI: UN'ANALISI EMPIRICA

Tesi presentata da: GUIDO ABATE

Coordinatore del Dottorato: Chiar.mo prof. Giuseppe Torluccio

Relatore: Chiar.mo prof. Pierpaolo Ferrari

Esame finale anno 2012

La concezione deterministica della natura racchiude in sé una reale causa di debolezza nell'irrimediabile contraddizione che essa incontra con i dati più certi della nostra coscienza.

Ettore Majorana (1942) Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali. *Scientia*, vol. 71, nn. 358-359, pp. 58-66.

**THE EFFICIENCY OF STOCK INDICES:
EMPIRICAL ANALYSIS**

Guido Abate

Abstract

The study of the efficiency of an index has increased its importance in asset management industry due to the widespread use of benchmarks and indexed investment products.

This thesis evaluates the efficiency level of the most commonly used US, Euro Area and Italian stock indices. The empirical study employs four measures of efficiency: the GRS, a small-sample multivariate test based upon the CAPM; the large-sample Wald test, implemented through a bootstrap simulation; the Generalized Method of Moments test, which has been applied in a non-Gaussian framework through a block bootstrap simulation; and Kandel and Stambaugh's relative efficiency measure.

The empirical results provide strong evidence of the superior efficiency of equally weighted indices. These findings are interpreted according to the scientific literature available, analyzing the different theoretical and empirical causes that have been proposed.

Indice

Introduzione	1
1. L'efficienza e la sua valutazione	4
1.1. <i>Il concetto di efficienza nella Modern Portfolio Theory</i>	4
1.2. <i>Il concetto di efficienza nel Capital Asset Pricing Model</i>	8
1.3. <i>Le critiche all'efficienza del portafoglio di mercato nel CAPM</i>	10
2. I test di efficienza	15
2.1. <i>Le prime prove empiriche</i>	15
2.2. <i>Il test GRS</i>	17
2.3. <i>Il test GRS: interpretazione geometrico-finanziaria</i>	22
2.4. <i>Il test GMM</i>	26
2.5. <i>Il block bootstrap del test GMM</i>	28
2.6. <i>La misura di efficienza relativa di Kandel e Stambaugh</i>	30
2.7. <i>Il ricampionamento applicato alla misura di Kandel e Stambaugh</i>	36
2.8. <i>La "distanza" di Levy e Roll</i>	38
3. L'analisi empirica	41
3.1. <i>La composizione del campione</i>	41
3.2. <i>La costruzione dei portafogli beta-sorted</i>	44
3.3. <i>La metodologia applicativa dell'analisi empirica</i>	47
3.4. <i>I risultati dell'analisi empirica</i>	55
4. L'equiponderazione: determinanti dell'efficienza	74
4.1. <i>La Noisy Market Hypothesis</i>	74
4.2. <i>La finanza comportamentale</i>	78
4.3. <i>L'errore di stima</i>	81
4.4. <i>Il turnover nei portafogli equiponderati</i>	86
Conclusioni	90
Bibliografia	92

Introduzione

Gli indici del mercato azionario hanno subito, nel corso dell'ultimo secolo, profonde trasformazioni, non solo in termini di tecniche di calcolo, ma anche e soprattutto di finalità ad essi attribuite. Come sottolineato in Basile (2002), da strumenti meramente informativi, concepiti per rappresentare in un unico valore l'andamento di un intero mercato o di un singolo settore economico, essi sono divenuti metri di valutazione, ovvero *benchmark*,¹ dell'operatività degli *asset manager* da parte sia degli studiosi che della platea degli investitori. Da ultimo, sono stati trasformati in oggetti essi stessi di investimento, tramite l'utilizzo di strumenti finanziari quali, a titolo d'esempio, i fondi comuni d'investimento indicizzati e gli *exchange traded fund*.²

I fondamenti della propensione all'impiego di tecniche di investimento passive, finalizzate alla replica di un indice di borsa, possono essere rintracciati nelle ricerche di Alfred Cowles sulla capacità previsionale degli analisti finanziari dagli anni Venti agli anni Quaranta.³

Nel corso degli anni Sessanta e Settanta la diffusione del concetto di portafoglio di mercato, sorto con il Capital Asset Pricing Model,⁴ lo sviluppo della teoria dei mercati efficienti da parte di Eugene Fama⁵ e del *random walk* da parte di Burton Malkiel hanno portato quest'ultimo a rivolgere apertamente un appello alla comunità degli *asset manager* affinché istituisse un "New Investment

¹ Il termine *benchmark* deriva dalla geodesia: a metà Ottocento i cartografi inglesi erano soliti scolpire un marchio nelle rocce in corrispondenza di quei punti di cui fossero già state misurate con precisione coordinate e altitudine. Da quel momento in poi esso fungeva come punto di riferimento per le misurazioni successive.

² Oltre che, ovviamente, come oggetto di speculazione, arbitraggio e copertura tramite il ricorso a molteplici strumenti derivati.

³ Cowles (1933), Cowles (1944).

⁴ Il tema sarà approfondito nel paragrafo 1.2.

⁵ Fama (1970).

Instrument: a no-load, minimum management-fee mutual fund that simply buys the hundreds of stocks making up the market averages and does no trading".⁶

Nei quarant'anni successivi la ricerca in campo finanziario ha apportato numerosi contributi riguardanti il livello limitato o nullo della persistenza delle *performance* dei gestori attivi, completando con rigore scientifico gli studi di Cowles e affiancando importanti risultati empirici alle teorie fautrici degli investimenti passivi.⁷

Lo scopo che si propone questo studio è quindi quello di analizzare quali tra i principali indici del mercato azionario statunitense, dell'Area Euro e italiano, risultino più efficienti, in modo da poter fornire agli investitori e agli *asset manager* indicazioni sulle principali caratteristiche che dovrebbero essere rispettate dai *benchmark* selezionati per i loro investimenti.

Il lavoro è composto da un primo capitolo di rassegna della letteratura, finalizzato alla definizione precisa del concetto di efficienza nell'ambito della Modern Portfolio Theory e del Capital Asset Pricing Model, evidenziando l'impatto delle principali critiche rivolte al loro impianto teorico.

Il secondo capitolo espone i dettagli delle tecniche di valutazione dell'efficienza impiegate in questo studio, ovvero i *test* GRS, Wald, che rientrano pienamente nell'orizzonte concettuale del CAPM, il *test* GMM, che considera rendimenti non gaussiani e autocorrelati, e la misura Kandel e Stambaugh, concepita nell'ambito della più generale Modern Portfolio Theory di Markowitz.

⁶ Malkiel (1973), p. 226. L'appello di Malkiel è stato condiviso anche da Paul Samuelson sulle pagine del primo numero del "Journal of Portfolio Management" (Samuelson, 1974). Malkiel ha collaborato per 28 anni, dal 1977, con la società Vanguard, che nel 1976 ha istituito il primo fondo comune d'investimento indicizzato sottoscrivibile da qualsiasi investitore. L'anno di istituzione non è stato casuale, in quanto sino a quel momento negli USA le *fee* di gestione di tutti i fondi comuni erano identiche e inderogabili, impedendo quindi la nascita di prodotti caratterizzati da profili commissionali ridotti, coerenti con una strategia d'investimento non-discrezionale. In precedenza, nel 1971, era già stato istituito un fondo pensione indicizzato, il Samsonite Luggage Fund, ma essendo rivolto ai soli dipendenti della società non ha avuto un impatto paragonabile a quello del Vanguard 500 Index Fund.

⁷ Tra i molteplici contributi sullo studio dell'incostanza delle *performance* degli investimenti attivi si ricordano: Elton et al. (1993), Goetzmann, Ibbotson (1994), Malkiel (1995), Gruber (1996), Carhart (1997). Per una esposizione della logica sottostante agli investimenti passivi si rimanda al breve ma fondamentale Sharpe (1991a).

Il terzo capitolo, strutturato come il prosieguo applicativo del precedente, è dedicato interamente alla esposizione delle prove empiriche, effettuate, tramite la programmazione di appositi *script* di Matlab, su di un campione complessivo di 51 indici azionari e di dieci portafogli *beta-sorted* per ciascuna delle tre *asset class* geografiche.

Il quarto e ultimo capitolo approfondisce le caratteristiche della equiponderazione degli indici, tecnica di calcolo che, sulla base dell'analisi condotta, è risultata maggiormente efficiente, con lo scopo di valutare le possibili cause di ordine teorico e operativo sottese al risultato conseguito. Tra le prime sono affrontate la Noisy Market Hypotesis, la finanza comportamentale e l'impatto dell'*estimation error*. Di carattere sia teorico che tecnico è invece l'influenza sugli indici *equal weight* derivante dal ribilanciamento periodico dei portafogli.

Nelle conclusioni sono esplorate le interazioni tra le teorie esposte ed è evidenziata la complementarità delle stesse, soprattutto alla luce dei più recenti contributi della letteratura scientifica sul tema dell'*estimation error*.

1. L'efficienza e la sua valutazione

1.1. Il concetto di efficienza nella Modern Portfolio Theory

Il concetto di efficienza è indissolubilmente legato alla Modern Portfolio Theory di Harry Markowitz, fondata sul suo articolo del 1952 intitolato *Portfolio Selection*.⁸

Come risulta necessario in ogni modello, Markowitz impone alcune ipotesi restrittive rispetto alla realtà.

In primo luogo, si ipotizza che l'investitore "razionale" effettui le sue scelte allocative sulla base di due soli parametri: la media (o, in un'ottica prospettica, il valore atteso $E(R)$) e la matrice di varianza-covarianza dei rendimenti. L'investitore razionale di Markowitz ha come scopo la massimizzazione di una funzione d'utilità che tenga in considerazione sia il raggiungimento del rendimento più elevato sia la minimizzazione del rischio connesso all'investimento.

Terza e ultima ipotesi del modello è che l'orizzonte temporale dell'investimento sia uniperiodale e che durante tale lasso di tempo unitario il portafoglio non sia oggetto di ribilanciamento.

Queste ipotesi poste alla base dello sviluppo della teoria possono condurre allo sviluppo di alcune riflessioni. Ad esempio, ciò che può sorprendere lo studioso di oggi è l'indifferenza nei confronti dei momenti superiori al secondo. La letteratura scientifica successiva alla pubblicazione di *Portfolio Selection* ha infatti

⁸ Markowitz (1952). Sempre nel 1952 Andrew D. Roy pubblicò un articolo frutto di studi pienamente indipendenti da quelli Markowitz, che giungeva ad una teorizzazione simile. Va altresì ricordato il contributo del matematico italiano Bruno de Finetti (de Finetti, 1940), un autentico precursore delle teorie del premio Nobel americano, il quale è venuto a conoscenza di quest'articolo solo nel 2006 (Markowitz, 2006).

ampiamente rilevato come le distribuzioni dei rendimenti azionari mostrino sia asimmetria sia eccesso di curtosi.⁹

D'altro canto, è opportuno sottolineare che queste caratteristiche statistiche non sono sfuggite a Markowitz, che infatti ha dedicato una parte del suo articolo all'esposizione del motivo per cui non ritiene teoricamente corretto includere anche tali misure di rischio nel proprio modello.

Si consideri una generica funzione di utilità media-varianza $U = U(E, V)$, tale che $\partial U/\partial E > 0$ e $\partial U/\partial V < 0$: in questa formulazione, non esiste alcun caso particolare nel quale sia possibile accettare di investire un ammontare di denaro in una scommessa equa, ovvero un investimento aleatorio nel quale il valore atteso dei guadagni è uguale al valore atteso delle perdite.¹⁰ Invece, nel caso in cui la funzione di utilità considerasse anche l'asimmetria M_3 , ovvero assumesse la formulazione $U(E, V, M_3)$, con $\partial U/\partial M_3 \neq 0$, allora esisterebbero delle scommesse eque accettabili per l'investitore: in altri termini, egli sarebbe disposto ad acquistare un'attività rischiosa (con il rischio espresso in termini di varianza) nonostante il suo rendimento atteso sia pari a zero.

E' per questa ragione che Markowitz ritiene che l'uso dei momenti superiori al secondo, per quanto possa essere giustificabile dagli studi empirici sulle serie storiche dei rendimenti, non sia accettabile da un punto di vista teorico, essendo tali misure statistiche legate non alla scelta di un investimento ottimale, bensì piuttosto ad una propensione alle scommesse.¹¹

Una volta definite le basi teoriche, è necessario soffermarsi sugli input del modello di portafoglio. Dal momento che lo scopo di questo modello è quello di giungere ad un'allocazione ottimale degli investimenti, è utile definire le misure caratterizzanti tali investimenti:

⁹ Fra i numerosi contributi, si segnala Bodie et al. (2009), pag. 138 per un'analisi empirica condotta sulle azioni USA e mondiali sull'arco temporale 1926-2005.

¹⁰ Si noti che tali scommesse sono definite "eque" in quanto concepite in un ambito *risk neutral*.

¹¹ Una recente analisi empirica, condotta su un campione di 78.000 investitori al dettaglio statunitensi (patrimonio medio: 35.629 \$), ha evidenziato, presso gli strati della popolazione dotati di un livello educativo più basso, una diffusa propensione all'allocazione delle risorse in titoli con elevata asimmetria, data forse la somiglianza dei *pay-off* di tali investimenti con quelli di una lotteria (Kumar, 2009).

1. il vettore dei rendimenti attesi della matrice \mathbf{R} (dimensioni $N \times T$), costituita dalle serie storiche di durata T degli N titoli:

$$\bar{\mathbf{R}}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} E(R_1) \\ E(R_2) \\ \vdots \\ E(R_N) \end{bmatrix}$$

2. il vettore $N \times 1$ delle deviazioni *standard* dei rendimenti:

$$\boldsymbol{\sigma}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix}$$

3. la matrice simmetrica, definita positiva, delle $(N^2 - N)/2$ correlazioni tra i rendimenti di coppie di titoli:

$$\mathbf{C}_{N \times N} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N,1} & \rho_{N,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

4. ricordando che la covarianza tra due variabili è il prodotto della correlazione e delle deviazioni *standard*, si deriva la matrice di varianza-covarianza \mathbf{V} :¹²

$$\mathbf{V}_{N \times N} = \underset{N \times N}{\text{diag}(\boldsymbol{\sigma})} \underset{N \times N}{\mathbf{C}} \underset{N \times N}{\text{diag}(\boldsymbol{\sigma})} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdots & \sigma_{N,N} \end{bmatrix}$$

ovvero, in forma matriciale e calcolando direttamente le covarianze senza ricorrere alla stima dei coefficienti di correlazione:

$$\mathbf{V}_{N \times N} = \frac{\mathbf{R} \mathbf{R}'}{T} - \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}'$$

¹² Con $\text{diag}(\boldsymbol{\sigma})$ si indica la matrice quadrata avente sulla diagonale principale gli elementi del vettore $\boldsymbol{\sigma}$.

Indicando con w_i il peso dell' i -esimo titolo nel portafoglio P e con \mathbf{w} il vettore $N \times 1$ dei pesi, il valore atteso di tale portafoglio è la media ponderata dei suoi componenti:

$$E(R_p) = \mathbf{w}' \bar{\mathbf{R}}$$

$1 \times N$ $N \times 1$

La varianza di portafoglio è quindi, sempre in forma matriciale:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w}$$

$1 \times N$ $N \times N$ $N \times 1$

Una volta considerati gli input e le formule di calcolo di media e varianza dell'investimento globale, si possono tradurre in termini matematici le tre ipotesi poste da Markowitz. In altre parole, è possibile seguire un procedimento iterativo avente lo scopo di indicare i vettori dei pesi \mathbf{w} per ciascun portafoglio compatibile con la funzione di utilità espressa dall'investitore razionale.

Dato un certo livello di rendimento obiettivo R_p^* , si deve calcolare il vettore dei pesi di portafoglio che comporti il rischio minore, ovvero:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}' \mathbf{V} \mathbf{w}$$

Tale minimizzazione viene effettuata tenendo conto dei seguenti vincoli:

- il rendimento del portafoglio caratterizzato dai pesi \mathbf{w} sia pari al rendimento prescelto R_p^* :

$$\mathbf{w}' \bar{\mathbf{R}} = R_p^*$$

- la somma dei pesi sia pari ad 1:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

- ciascun peso sia non negativo:

$$w_i \geq 0, \forall i \in [1, N]$$

Una volta che questo problema di programmazione quadratica è stato risolto per un dato livello di rendimento, si ripete la procedura per un diverso valore atteso del portafoglio. La globalità dei portafogli così calcolati giace quindi sulla frontiera efficiente, ossia il luogo dei punti, nello spazio media-deviazione *standard*, tali che non sia possibile ottenere combinazioni di rischio inferiore a parità di rendimento (o, viceversa, rendimenti superiori a parità di rischio).

Nella Modern Portfolio Theory un portafoglio è efficiente se e solo se è posto sulla frontiera e tutti i portafogli della frontiera stessa sono efficienti. L'investitore, a seconda della sua avversione al rischio, ha modo di selezionare il punto della frontiera sul quale collocare i propri investimenti.

1.2. Il concetto di efficienza nel Capital Asset Pricing Model

Il modello di Markowitz è stato oggetto di critiche a causa dell'elevata mole di stime che devono essere condotte per generare gli *input* necessari.¹³ Per questa ragione sono stati introdotti i *single factor model*, ossia modelli nei quali i rendimenti dei titoli dipendono da un unico fattore, che può essere rappresentato da un indice (si parla in questo caso di *single index model*).

Il vero salto concettuale è però avvenuto nel 1964 grazie all'articolo di Sharpe intitolato *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium*, seguito poi da importanti lavori di Lintner e Mossin.¹⁴

Mentre la Portfolio Theory di Markowitz ha valore puramente normativo, ossia descrive un modello comportamentale che dovrebbe essere seguito dagli investitori nella costruzione dei loro portafogli, il Capital Asset Pricing Model (CAPM) è una teoria positiva, ovvero una rappresentazione formale di ciò che si ritiene sia il metodo di investimento seguito realmente da parte degli attori di mercato.¹⁵

Il CAPM giunge alla definizione di un modello di valutazione dei prezzi dei titoli, non prima, però, di aver imposto le seguenti ipotesi:

1. l'ammontare della ricchezza di ciascun investitore è trascurabile rispetto al totale di tutte le attività;
2. gli investitori seguono un'ottica d'investimento uniperiodale;
3. gli unici beni investibili sono i titoli trattati sui mercati;

¹³ Per la precisione: N rendimenti attesi, N varianze e $(N^2-N)/2$ correlazioni, per un totale di $(N^2+3N)/2$ parametri da stimare.

¹⁴ Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966); già nel 1961 Jack L. Treynor aveva scritto, ma non pubblicato, uno studio analogo a quello di Sharpe, intitolato *Toward a Theory of Market Value of Risky Assets* (French, 2003).

¹⁵ Markowitz (1984), Fabozzi et al. (2002).

4. i costi di transazione (commissioni, *spread* denaro-lettera, ecc.) e le imposte sono irrilevanti;
5. tutti gli investitori detengono portafogli efficienti in termini di media-varianza;
6. tutti gli investitori hanno aspettative omogenee e analizzano i titoli in modo identico e corretto, stimando ugualmente medie, varianze e covarianze;
7. gli investitori possono investire e indebitarsi illimitatamente al tasso privo di rischio.

Date queste premesse, il CAPM arriva alle seguenti conclusioni:

1. tutti gli investitori detengono un portafoglio di titoli rischiosi identico al “portafoglio di mercato”, costituito dalla totalità dei titoli trattati;¹⁶
2. il portafoglio di mercato giace sulla frontiera efficiente di Markowitz;
3. la linea che, nello spazio media-deviazione *standard*, congiunge il rendimento del titolo privo di rischio (per definizione, con volatilità pari a zero) e il portafoglio di mercato è tangente alla frontiera efficiente e prende il nome di Capital Market Line;
4. l’extrarendimento del portafoglio di mercato rispetto al titolo *risk-free* (ossia il suo “premio al rischio”) dipende solamente dall’avversione al rischio media degli operatori di mercato $\bar{\lambda}$:

$$E(R_M) - R_F = \bar{\lambda} \sigma_M^2$$

5. il premio al rischio di ciascun titolo è proporzionale al premio al rischio di mercato e al beta del titolo stesso. Dato $\beta_i = \sigma_{i,M} / \sigma_M^2$ è quindi possibile derivare l’equazione della Security Market Line, ossia della retta (nel piano beta-rendimenti) sulla quale giacciono tutti i titoli, essendo il loro extrarendimento atteso in un rapporto di dipendenza lineare diretta dal β :

$$\text{SML: } E(R_i) - R_F = \beta_i [E(R_M) - R_F]$$

Con riguardo al concetto di efficienza, si può quindi osservare una maggiore specificazione rispetto al modello di Markowitz: nel CAPM si giunge alla

¹⁶ Ne consegue, come condizione di equilibrio, che ogni titolo è rappresentato in tale portafoglio in proporzione alla sua capitalizzazione di mercato.

conclusione che tutti i rendimenti siano esplicabili tramite una combinazione tra il tasso *risk-free* e un portafoglio efficiente, rappresentato dal portafoglio di mercato. Essendo un modello positivo, il CAPM postula che tale relazione si verifichi anche empiricamente, e che quindi i rendimenti dei titoli siano realmente soggetti alla relazione lineare rappresentata dalla SML: come si vedrà nei paragrafi seguenti, è stato quindi possibile concepire diversi *test* di efficienza basati sul CAPM tramite l'impiego dei rendimenti effettivi di strumenti finanziari.

Prima però di proseguire nella loro esposizione, è necessario rilevare alcune critiche a questo modello, con particolare riferimento a quegli interventi che mettono in rilievo la possibilità teorica che il portafoglio di mercato non sia necessariamente efficiente.

1.3. Le critiche all'efficienza del portafoglio di mercato nel CAPM

Poiché la teorizzazione del CAPM impone una serie di ipotesi molto forti¹⁷ relativamente sia alle attività finanziarie sia agli investitori, appare particolarmente importante l'analisi dell'influenza di tali premesse sulla conclusione numero 2, in base alla quale il portafoglio di mercato risulta essere efficiente in termini media-varianza.

Fischer Black si è soffermato sulla ipotesi del CAPM relativa alla possibilità non solo di investimento, ma anche di indebitamento illimitato al tasso privo di rischio.¹⁸ Si noti però che Black ammette come ulteriore assunto, sulla scorta di Lintner e Mossin ma non di Sharpe, che sia possibile effettuare vendite allo scoperto illimitate di strumenti finanziari.¹⁹

Derivando quello che è poi divenuto noto come *Zero- β CAPM*, Black osserva che:

¹⁷ Sharpe stesso afferma apertamente: "these are highly restrictive and undoubtedly unrealistic assumptions" (Sharpe, 1964, p. 434).

¹⁸ Black (1972).

¹⁹ L'investitore può, ad esempio, depositare 1.000 \$ in garanzia, vendere allo scoperto titoli per 1.000.000 \$ e, con il ricavato della vendita, acquistare 1.000.000 \$ di altri titoli. Si noti che in USA, in realtà, a un deposito di 1.000 \$ possono corrispondere al massimo 2.000 \$ lunghi o 2.000 \$ corti o 1.000 \$ lunghi e 1.000 \$ corti (*Federal Reserve Regulation T*).

1. in assenza di un tasso *risk-free*, ogni portafoglio efficiente può essere scritto come una combinazione lineare del portafoglio di mercato e del portafoglio *zero-β*, ossia di quel portafoglio completamente scorrelato con il mercato e avente rendimento atteso $E(R_Z)$, che rappresenta l'intercetta nel piano beta-rendimento atteso in sostituzione del tasso R_F ;
2. in presenza di un titolo *risk-free*, ma in assenza della facoltà di indebitarsi al suo tasso (in pieno accordo con quella che è la realtà del sistema finanziario), i portafogli efficienti più rischiosi sono sempre composti dal portafoglio di mercato e dal portafoglio *zero-β* (il cui rendimento si suppone sia superiore a R_F), mentre i meno rischiosi sono una combinazione di R_F e del portafoglio di tangenza, composto a sua volta dal portafoglio di mercato M e dall'attività *zero-β*.²⁰

Di fatto, nella situazione descritta nella seconda osservazione, la SML diviene una linea spezzata, della quale il segmento dei portafogli meno rischiosi ha un coefficiente angolare maggiore rispetto a quello dei portafogli più rischiosi.

Questa formulazione del Capital Asset Pricing Model mantiene quindi la possibilità che il portafoglio di mercato sia efficiente, ma al prezzo di ammettere una ulteriore ipotesi che non si può verificare nei mercati finanziari, ovvero la vendita allo scoperto illimitata.

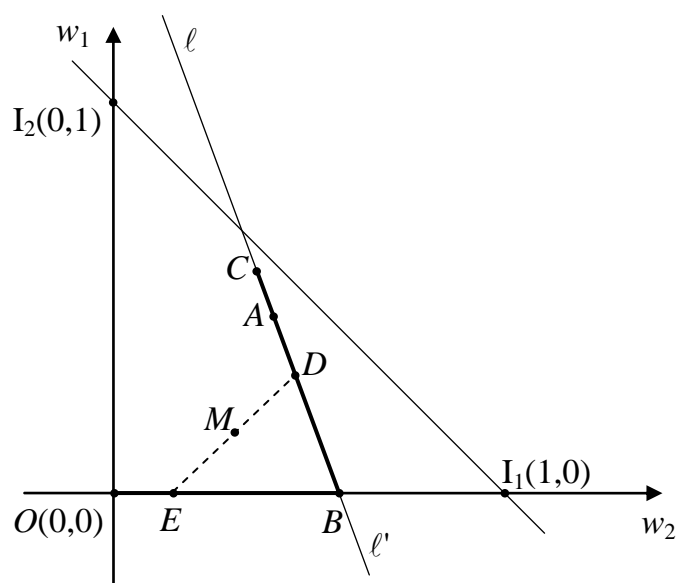
Ciò ha condotto Markowitz ad analizzare l'impatto della cancellazione di quest'ultima astrazione teorica sull'efficienza del portafoglio di mercato all'interno del CAPM. L'autore procede tramite una elegante dimostrazione geometrica, utilizzando il grafico riprodotto in figura 1 nel quale sono rappresentate le allocazioni percentuali w_i in tre titoli I_1, I_2, I_3 scorrelati tra loro:²¹

- w_1 sull'asse delle ascisse;
- w_2 sull'asse delle ordinate;
- w_3 è pari a $1-w_1-w_2$.

²⁰ Più in dettaglio il portafoglio di tangenza è il portafoglio efficiente caratterizzato dal più elevato indice di Sharpe, ossia il più elevato rapporto tra l'extrarendimento rispetto a r_F e la sua deviazione *standard*.

²¹ Markowitz (2005). Una trattazione meno dettagliata era già stata tenuta da Sharpe nella sua prolusione alla consegna del premio Nobel il 7 dicembre 1990, Sharpe (1991b). Si rimanda inoltre ad Haugen, Baker (1991).

Figura 1: Critical line con e senza vincoli di indebitamento



Fonte: Markowitz (2005).

In un mondo come quello ipotizzato dal CAPM, la linea $\overline{\ell\ell'}$ (ovvero la *critical line*, CL) rappresenta tutte le combinazioni possibili fra i tre titoli (in particolare, C è il portafoglio a varianza minima). Se invece si esclude ogni forma di finanziamento al tasso R_F e di vendita allo scoperto, la *critical line* diviene la spezzata rappresentata in grassetto, poiché le è precluso di estendersi al di fuori del triangolo $I_1\hat{O}I_2$. Ricordando che il teorema di separazione di Tobin afferma che, dati due portafogli, tutte le loro combinazioni giacciono su una retta del piano dei pesi di allocazione,²² la combinazione di due portafogli su due diversi segmenti della *critical line* sarà collocato in un segmento non appartenente alla CL stessa e quindi risulterà inefficiente. Supponendo che nel mercato siano presenti solo due portafogli, D ed E , il portafoglio di mercato M sarà composto necessariamente da una loro combinazione lineare che, essendo un punto del segmento \overline{DE} , è esterna alla *critical line* $O-B-C$ e quindi inefficiente.

²² Tobin (1958). Il ricorso a figure geometriche come la retta e il piano è possibile poiché la presente esposizione è fondata sull'impiego di tre soli titoli. Nel caso reale, nel quale sono disponibili N asset, è necessario ragionare in termini di geometria analitica in uno spazio di dimensione $N-1$ con la *critical line* costituita da una curva di grado $(N-2)$.

L'esempio grafico qui esposto può essere successivamente esteso ad N titoli in $N-1$ dimensioni, tramite l'utilizzo del *critical line algorithm*, senza per questo inficiare la validità del ragionamento effettuato in uno spazio bidimensionale.

Markowitz giunge quindi alla conclusione che, non essendo possibile stabilire *a priori* l'efficienza o meno del portafoglio di mercato, sia preferibile abbandonare l'idea che solamente esso e le sue combinazioni lineari con il tasso privo di rischio, ovvero le allocazioni di investimenti site sulla Capital Market Line, siano da interpretare come gli unici portafogli efficienti. L'efficienza di un insieme di titoli dovrebbe invece essere valutata tenendo conto della sola frontiera efficiente, composta da portafogli ciascuno con un'allocazione diversa in titoli rischiosi, ma tutti egualmente efficienti in termini di media-varianza.

Per concludere questa rassegna delle principali critiche poste alla nozione di efficienza derivante dal CAPM, non può essere tralasciata la più nota di tutte: la "critica di Roll".

Il CAPM, come tutti i modelli, si fonda su ipotesi che risultano semplificate rispetto alla realtà: per verificarne la robustezza, sin dai primi anni successivi alla sua enunciazione sono state concepite svariate prove empiriche.²³ Nel 1977 Richard Roll ha esaminato le metodologie e le logiche dei *test* del CAPM condotti sino a quel momento, criticandone l'impostazione teorica: gli studi precedenti, infatti, avevano sempre impiegato delle *proxy* del vero indice di mercato per testare la linearità della relazione tra il beta e i rendimenti dei titoli.²⁴ Questa procedura veniva seguita trascurando il fatto, non solo di significato economico ma anche puramente matematico, che tale relazione è empiricamente verificata solo e soltanto se il portafoglio di mercato è efficiente. Una volta testata questa sola ipotesi, le implicazioni del CAPM sono dimostrabili direttamente tramite passaggi algebrici: di fatto, l'efficienza del portafoglio di mercato è la sola ipotesi del modello che necessita di essere valutata. Si pone però ora un problema non più di ordine teorico, bensì pratico: la costruzione di un indice rappresentativo di tutte

²³ Per "robustezza" di un modello si intende la sensibilità della sua capacità predittiva rispetto a violazioni delle ipotesi.

²⁴ Roll (1977).

le attività negoziabili è, di fatto, impossibile. Questa conclusione implica che il modello risulti non verificabile empiricamente.

Grazie alla critica di Roll è stato possibile proporre una serie di *test* non più del CAPM, bensì di efficienza dell'indice impiegato come *proxy* del portafoglio di mercato. In altri termini: ipotizzando che l'equazione del CAPM rappresenti il vero processo generatore dei rendimenti, sulla base di analisi statistiche è possibile definire se l'indice sottoposto a verifica sia efficiente o meno, entro un dato intervallo di confidenza. In questo modo da quelli che, involontariamente, erano dei *test* congiunti (sia della validità del CAPM come modello positivo sia, al contempo, dell'efficienza del portafoglio di mercato), la letteratura scientifica è pervenuta a nuovi *test* univoci, dichiaratamente validi solo all'interno della cornice teorica del CAPM.

2. I test di efficienza

2.1. Le prime prove empiriche

L'articolo del 1972 di Black, Jensen e Scholes,²⁵ antecedente alla critica di Roll e anzi spunto di riflessione per quest'ultimo autore, ha, seppure in modo implicito, esposto un primo esempio di *test* di efficienza. Si parla di una procedura "implicita" perché lo scopo dichiarato dagli autori è quello di appurare la validità empirica del CAPM e, per ottenere questo risultato, è stato necessario costruire una *proxy* dell'indice di mercato. Quindi, alla luce della critica di Roll, è possibile invertire la logica del procedimento, che può quindi essere considerato come una prova di efficienza della *proxy*.

Tale prova, un *t-test* univariato, consiste nell'accertare la significatività statistica dell'intercetta α_i nell'equazione:

$$E(R_i) - R_f = \alpha_i + \beta_i [E(R_p) - R_f]$$

Affinché si possa ritenere empiricamente fondato il CAPM, è necessario che le intercette di tutti i titoli *i*-esimi siano nulle. Alternativamente, tenendo per valido il CAPM, si può affermare che il portafoglio avente rendimento $E(R_p)$ è efficiente se e solo se tutti gli α_i sono pari a zero.

Negli anni successivi alla critica di Roll si è assistito all'introduzione dei primi *test* di efficienza propriamente detti. Nel 1980 Ross ha presentato un *paper* fondamentale, intitolato *A Test of the Efficiency of a Given Portfolio*, nel quale per primo ha applicato il *test* del logaritmo del rapporto di verosimiglianza (*log-likelihood ratio test*) allo studio di efficienza di un portafoglio di titoli.²⁶ Il *test* prevede, in primo luogo, la stima vincolata del parametro $\tilde{\beta}_{i,p}$ dell'equazione del CAPM per ciascun titolo *i*-esimo e della matrice vincolata di varianza-covarianza dei residui $\tilde{\Sigma}$. Con "stima vincolata" in questo caso si intende il valore ottenuto

²⁵ Black et al. (1972).

²⁶ Ross (1980). Da non confondersi con l'articolo, dal medesimo titolo, pubblicato da Ross in collaborazione con Gibbons e Shanken (Gibbons et al., 1989).

tramite una regressione lineare nella quale l'intercetta, in accordo con la teoria, sia posta pari a zero. Successivamente, la regressione viene condotta senza porre vincoli, lasciando quindi libera la stima degli $\hat{\alpha}_i$.

Il rapporto di log-verosimiglianza LR si ottiene quindi come differenza tra la funzione di log-verosimiglianza \tilde{L} calcolata sulla base dei parametri vincolati e la medesima funzione, ma in versione non vincolata e indicata con la lettera L :

$$LR = \tilde{L} - L = -\frac{T}{2}(\log|\tilde{\Sigma}| - \log|\hat{\Sigma}|)$$

Essendo noto che, sotto l'ipotesi che gli $\hat{\alpha}_i$ siano pari a zero, $-2LR$ si distribuisce asintoticamente²⁷ come una chi-quadro con N gradi di libertà (in notazione matematica: χ_N^2), è quindi possibile stimare l'efficienza dell'indice composto dagli N titoli sulla base di una serie storica di rendimenti.

Nel 1982 Jobson e Korkie hanno effettuato una modifica del *test*, in modo da ottenere proprietà migliori, ma comunque non ottimali, nel caso di un campione di rendimenti aventi durata finita T .²⁸ In questo caso, a distribuirsi come una chi-quadro con N gradi di libertà è la seguente statistica, denominata *adjusted likelihood ratio test*:

$$ALR = -2LR \frac{(T - N/2 - 2)}{T}$$

Nonostante questa miglioria, l'unica distribuzione nota rimane sempre quella nel caso asintotico. Problematica identica si verifica con altri due *test* statistici che, di conseguenza, non sono impiegabili in prove empiriche senza ricorrere a tecniche di simulazione: il *test* di Wald (WT) e il *test* del moltiplicatore di Lagrange (LM). Come è stato dimostrato nel 1977 da Berndt e Savin, i risultati dei tre *test*, che sono in realtà delle trasformazioni lineari l'uno dell'altro, seguono sempre la seguente catena di disuguaglianze:²⁹

$$WT \geq LR \geq LM$$

²⁷ In altri termini, tale distribuzione è nota solo nel caso, puramente teorico, in cui il campione sia di durata T tendente a infinito.

²⁸ Jobson, Korkie (1982).

²⁹ Berndt, Savin (1977). Più in dettaglio, il *likelihood ratio test* è pari a $T \times \ln(1+WT)$, mentre il *Lagrange multiplier test* è uguale a $(T \times WT)/(1+WT)$.

Poiché la distribuzione asintotica è la medesima per tutti e tre (ovvero χ_N^2), di fatto il *test* di Wald può portare maggiormente ad incorrere in errori di primo tipo, mentre il *test LM* in errori di secondo tipo.³⁰ In un'ottica conservativa, è quindi opportuno l'utilizzo della prima prova statistica, al fine di limitare il rischio derivante della scelta di un indice inefficiente.

2.2. Il test GRS

Gibbons, Ross e Shanken hanno proposto un *test* multivariato, nel quale l'ipotesi nulla oggetto di valutazione è $H_0 : \hat{\alpha} = \mathbf{0}$, con $\hat{\alpha}$ vettore $N \times 1$ delle intercette delle regressioni sull'extrarendimento³¹ di P degli extrarendimenti della serie storica di durata T degli N titoli componenti l'indice P .³²

$$r_{i,t} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i r_{p,t} + \hat{\varepsilon}_{i,t}$$

I residui $\hat{\varepsilon}$ (matrice $N \times T$) si distribuiscono secondo una normale con media zero e matrice di varianza-covarianza $\hat{\Sigma}$ di dimensioni $N \times N$,³³ ipotizzata diagonale: ne consegue che i residui devono essere scorrelati tra di loro. L'ipotesi di normalità, per quanto imposta dagli autori, non sarebbe strettamente necessaria ai fini della valutazione del risultato del *test*, ma studi successivi³⁴ hanno evidenziato una sua sensibilità alla presenza di eteroschedasticità condizionale³⁵ degli $\hat{\varepsilon}$.

³⁰ Si ricorda che un errore di primo tipo consiste nel rigettare come falsa un'ipotesi che invece è verificata, mentre un errore di secondo tipo porta ad accettare come vera un'ipotesi falsa.

³¹ Con extrarendimento $r_{i,t}$ di un titolo i -esimo si intende la differenza tra il suo rendimento $R_{i,t}$ nel periodo t -esimo e il tasso *risk-free* R_F .

³² Gibbons et al. (1989).

³³ Si noti che N deve essere minore o uguale di $T-2$ al fine di garantire che la matrice di varianza-covarianza dei residui sia non-singolare e quindi invertibile. La condizione di non singolarità implica inoltre che nessuna combinazione lineare dei rendimenti dei titoli possa avere correlazione pari ad uno con un altro portafoglio di *asset*. Si ricorda infine che, essendo le medie dei residui pari a zero, il calcolo di $\hat{\Sigma}$ in forma matriciale assume la seguente forma semplificata: $\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}'/T$.

³⁴ Per una breve rassegna di tali studi, si rimanda a Shanken (1996).

³⁵ In altri termini, la volatilità degli $\varepsilon_{i,t}$ dato $r_{p,t}$ varia dal tempo t al tempo $t+1$ e mostra una dipendenza da $r_{p,t}$.

Allo scopo di valutare la significatività statistica delle intercette è possibile considerare l'impiego di un *test* di Wald nella seguente formulazione:

$$WT = T \left[1 + \frac{\hat{\mu}_P^2}{\hat{\sigma}_P^2} \right]^{-1} \hat{\mathbf{a}}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{a}}$$

$1 \times N$ $N \times N$ $N \times 1$

Indicando con $\hat{\mu}_P$ e $\hat{\sigma}_P^2$ rispettivamente la media e la varianza degli extra-rendimenti del portafoglio P di cui si desidera valutare l'efficienza.

Il problema di questo approccio consiste, come esposto in precedenza, nell'indeterminatezza della distribuzione della statistica WT nel caso in cui il campione sia finito. Per ovviare a tale seria limitazione, è però possibile ricorrere al teorema di Muirhead (1982), grazie al quale è possibile dimostrare che se H_0 è vera allora:

$$\frac{WT}{T} \frac{(T - N - 1)}{N} \sim F(N, T - N - 1)$$

In altri termini, è possibile effettuare una trasformazione lineare del *test* di Wald che si distribuisca come una F con gradi di libertà N al numeratore e $T - N - 1$ al denominatore. La distribuzione F risulterebbe però non centrale nel caso in cui l'ipotesi nulla non fosse accolta, dato che il suo parametro di non centralità δ si annulla per $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$:

$$\delta = T \left[1 + \frac{\hat{\mu}_P^2}{\hat{\sigma}_P^2} \right]^{-1} \hat{\mathbf{a}}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{a}}$$

$1 \times N$ $N \times N$ $N \times 1$

Si tratta quindi di una distribuzione nota che permette il calcolo dei quantili corrispondenti ai valori della statistica in oggetto.³⁶

Apportando le modifiche indicate al *test* di Wald si può quindi definire il *test* di Gibbons, Ross e Shanken:

$$GRS = \frac{(T - N - 1)}{N} \left[1 + \frac{\hat{\mu}_P^2}{\hat{\sigma}_P^2} \right]^{-1} \hat{\mathbf{a}}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\mathbf{a}}$$

$1 \times N$ $N \times N$ $N \times 1$

³⁶ Si noti che gli autori, nel loro articolo originale, hanno dimostrato la derivazione del loro *test* partendo dal *test* T^2 di Hotelling (ovvero una generalizzazione multivariata del *t-test* utilizzato in Black et al., 1972); si è preferito ricorrere all'esposizione di Campbell et al. (1997) poiché nel presente studio il *test* di Wald sarà oggetto di una prova empirica basata sull'impiego della tecnica di simulazione *bootstrap*.

Nell'eseguire il *test* GRS è necessario, come si evince dalla sua formulazione, introdurre un'ipotesi restrittiva riguardante la media degli extra-rendimenti: essendo $\hat{\mu}_p$ introdotto in forma quadratica e quindi con segno positivo, nel caso in cui fosse minore di zero si testerebbe, per assurdo, l'efficienza di un indice che sarebbe valutabile come inefficiente già *ex-ante*. Si impone quindi che $\hat{\mu}_p \geq 0$.

Si osservi, peraltro, che il prodotto dei vettori degli alfa diviso per la matrice di varianza-covarianza dei residui è l'estensione multivariata del quadrato del *t-test* condotto da Black, Jensen e Scholes. Questi autori avevano eseguito la loro analisi statistica relativamente alla significatività delle intercette di ciascun titolo *i*-esimo preso distintamente dagli altri, mentre in questa nuova formulazione è possibile valutare tramite un unico algoritmo l'efficienza del portafoglio con riferimento a tutti i suoi componenti contemporaneamente.

La formula del *test* GRS contiene inoltre alcuni fattori di agevole interpretazione economica. Si può infatti notare che il rapporto tra il quadrato della media degli extrarendimenti di *P* e la sua varianza altro non è che il quadrato dell'indice di Sharpe, indicato con SR_p .³⁷

Meno intuitivo è il valore rappresentato dalla forma quadratica $\hat{\alpha}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha}$: tale prodotto matriciale è infatti la sommatoria dei quadrati degli alfa divisi per le varianze dei residui (sempre e soltanto nell'ipotesi che questi ultimi siano indipendenti). Si può ora ricordare che una misura di *risk-adjusted* performance marginale è l'*appraisal ratio*, definito come il rapporto tra l'intercetta della regressione dei rendimenti di un titolo rispetto al *benchmark* e la volatilità dei residui. In conclusione:

$$\hat{\alpha}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N AR_i^2$$

³⁷ Si ricorda che lo Sharpe *ratio* rappresenta il rapporto tra la media dei rendimenti di un generico titolo *i*, al numeratore, e il tasso privo di rischio r_F e la deviazione *standard* dei rendimenti di *i*, al denominatore. Lo scopo di tale indicatore è quello di rappresentare sinteticamente che livello di extrarendimento sia offerto dal titolo *i* per ciascuna unità di rischio che esso porta all'investitore. Essendo r_F privo di volatilità per sua stessa definizione, il denominatore indica, a sua volta, l'extrarischio intrinseco all'investimento in *i*.

Il *test* GRS può quindi essere riscritto nella seguente notazione, non più strettamente econometrica bensì basata sugli strumenti valutativi tipici dell'*asset management*:

$$GRS = \frac{(T - N - 1)}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N AR_i^2}{(1 + SR_p^2)}$$

Sulla base della sua distribuzione F , sappiamo che la probabilità che il portafoglio P sia efficiente cresce all'approssimarsi a zero del valore della statistica GRS. Quindi, data la formulazione precedente, possiamo affermare che il grado di efficienza di P è:

- direttamente proporzionale al quadrato del suo Sharpe *ratio*;
- inversamente proporzionale alla somma dei quadrati degli *appraisal ratio* dei componenti.

La considerazione sull'indice di Sharpe appare di per sé evidente: secondo il CAPM, il portafoglio di tangenza di una frontiera efficiente giace sulla Capital Market Line, ovvero la *capital allocation line* con il coefficiente angolare più elevato (nel piano cartesiano media-deviazione *standard*). Poiché tale coefficiente altro non è che l'indice di Sharpe, è graficamente dimostrato che maggiore è il suo valore, maggiore è il livello di efficienza dell'attività finanziaria cui si riferisce.

Anche la significatività dell'*appraisal ratio* è legata alla formulazione stessa del CAPM: poiché la presenza di intercette non è contemplata dalla sua equazione fondamentale, l'osservazione di AR_i elevati sarebbe contraria all'efficienza dell'indice sottoposto ad analisi. D'altro canto, l'*appraisal ratio* non è calcolato solamente sulla base dell'alfa, ma anche della sua deviazione *standard*: al crescere di quest'ultima, il rapporto tende a zero, evidenziando quindi una maggiore efficienza. Ciò è dovuto al fatto che ogni misura media perde di significatività all'aumentare della sua volatilità e quindi valori anche elevati delle intercette potrebbero essere controbilanciati dalla loro spiccata aleatorietà.

E' d'altronde necessario evidenziare che l'*appraisal ratio* viene introdotto nella formulazione del *test* GRS in forma quadratica: questo implica che anche intercette significativamente negative sarebbero indicatori di inefficienza

dell'indice P . Tale conclusione è apparentemente controintuitiva, e richiede quindi un approfondimento. Sulla scorta del CAPM, tutti i rendimenti medi attesi dei titoli sono linearmente dipendenti dal rendimento del portafoglio di mercato M , il quale a sua volta è efficiente e si compone di tutte le attività investibili, ciascuna con coefficiente di ponderazione positivo. Ciò porta a rigettare l'efficienza di un indice il quale, se utilizzato come sostituto di M , generi intercette di qualsiasi entità, anche inferiore a zero.

Il valore assunto della statistica del *test* GRS dipende, oltre che da questi indicatori di performance, da due coefficienti impliciti nella costruzione del campione di titoli utilizzato per il *test*: la durata T delle serie storiche e il numero di componenti N . Inoltre, tali quantità influenzano i gradi di libertà e quindi la conformazione della distribuzione F : questo comporta che, a valori assunti da GRS uguali possono corrispondere quantili anche significativamente differenti, a seconda dell'influenza esercitata dai coefficienti T ed N sul raggiungimento del risultato numerico della statistica GRS.

Nel caso di T si può ricordare che al crescere di una serie storica aumenta la confidenza nella significatività dell'analisi condotta. Se infatti si effettuasse un *test* statistico sulla base di pochi dati, relativi ad un arco temporale ridotto, si potrebbe incorrere nel rischio di valutare un indice solamente in particolari condizioni di mercato, ignorando quale possa essere il suo andamento in situazioni differenti e, in generale, sul lungo periodo.

L'impatto del valore di N non è invece altrettanto esplicito: si potrebbe ipotizzare che ad un più elevato numero di *asset* disponibili corrisponda una accresciuta significatività dell'analisi, essendo questa fondata sulla base di un campione più rappresentativo. D'altro canto, la formulazione stessa del *test* in esame impone alcune considerazioni:

- se N fosse uguale a $T-1$, la statistica GRS sarebbe pari a zero per qualsiasi valore di AR_i e SR_p , essendo nullo il suo primo fattore;
- per $N > T-1$ il valore di GRS sarebbe negativo, e quindi non compatibile con la distribuzione F che, si ricorda, è limitata inferiormente a zero.

Queste prime constatazioni sono però sovrastate per impatto da questioni statistiche più complesse: le analisi empiriche condotte sul *test* GRS³⁸ hanno mostrato come la sua potenza³⁹ sia estremamente sensibile alle dimensioni del campione. In particolare, al crescere di T la potenza è sempre crescente, mentre declina fortemente al crescere di N : si ritiene quindi che sia buona norma ricondurne la dimensione entro un massimo di 10 elementi⁴⁰ e, in ogni caso, entro un rapporto di circa uno a tre rispetto a T .⁴¹

2.3. Il test GRS: interpretazione geometrico-finanziaria

Della statistica GRS è inoltre possibile derivare un'interpretazione in termini di geometria cartesiana applicata al piano media-deviazione *standard*. Allo scopo è necessario iniziare dalla costruzione dei portafogli giacenti sulla frontiera efficiente tramite una procedura che, come già esposto, consiste nella minimizzazione della varianza di un generico portafoglio k dato uno specifico livello di extra-rendimento atteso μ_k^* .

La procedura seguita da Gibbons, Ross e Shanken non segue la medesima logica di Markowitz, bensì l'ipotesi esposta da Lintner⁴², secondo la quale è possibile considerare la facoltà di vendere allo scoperto i titoli. Di conseguenza, il problema non deve più sottostare ai vincoli relativi ai pesi dei componenti dei portafogli di frontiera e può essere risolto analiticamente come una ottimizzazione quadratica. All'interno di quest'ottica teorica, ricorrendo al moltiplicatore di Lagrange e con alcuni passaggi algebrici si può dimostrare che il quadrato dello Sharpe *ratio* del portafoglio di tangenza è:

$$SR_M^2 = \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\mathbf{V}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}$$

³⁸ Gibbons et al. (1989); Campbell et al. (1997); Sentana (2009).

³⁹ La potenza di un *test* è la probabilità di non incorrere in errori del secondo tipo: è quindi la probabilità di rigettare correttamente l'ipotesi H_0 come falsa quando infatti essa non è verificata.

⁴⁰ Campbell et al. (1997).

⁴¹ Gibbons et al. (1989).

⁴² Lintner (1965). Si noti che Sharpe segue invece esplicitamente l'impostazione di Markowitz (Sharpe, 1964).

E' inoltre dimostrabile che:⁴³

$$\hat{\alpha}' \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\alpha} = \sum_{i=1}^N AR_i^2 = SR_M^2 - SR_P^2$$

In altri termini, si espone nuovamente la constatazione che, in presenza del vero portafoglio di mercato, le intercette delle regressioni basate sull'equazione del CAPM sono pari a zero e, al contempo, che tanto maggiore è la distanza tra lo Sharpe *ratio* del portafoglio *P* rispetto a quello del portafoglio di mercato, tanto maggiore è la sua inefficienza.

Si noti, inoltre, che entrambe le equivalenze qui espone sono esatte solo e solamente nel caso in cui siano verificate le ipotesi in termini di normalità dei rendimenti e, soprattutto, di indipendenza dei residui. In caso contrario, come solitamente avviene quando si opera con dati reali, le diverse formulazioni non portano a risultati coincidenti.

Sostituendo nella formula originaria del *test* GRS i valori equivalenti qui esposti, si ottiene:

$$GRS = \frac{(T - N - 1)}{N} \cdot \frac{SR_M^2 - SR_P^2}{1 + SR_P^2} = \frac{(T - N - 1)}{N} \cdot \left(\frac{1 + SR_M^2}{1 + SR_P^2} - 1 \right)$$

L'ultimo fattore può essere anche visto in questa diversa forma:

$$\frac{1 + SR_M^2}{1 + SR_P^2} - 1 = \left(\frac{\sqrt{1 + SR_M^2}}{\sqrt{1 + SR_P^2}} \right)^2 - 1$$

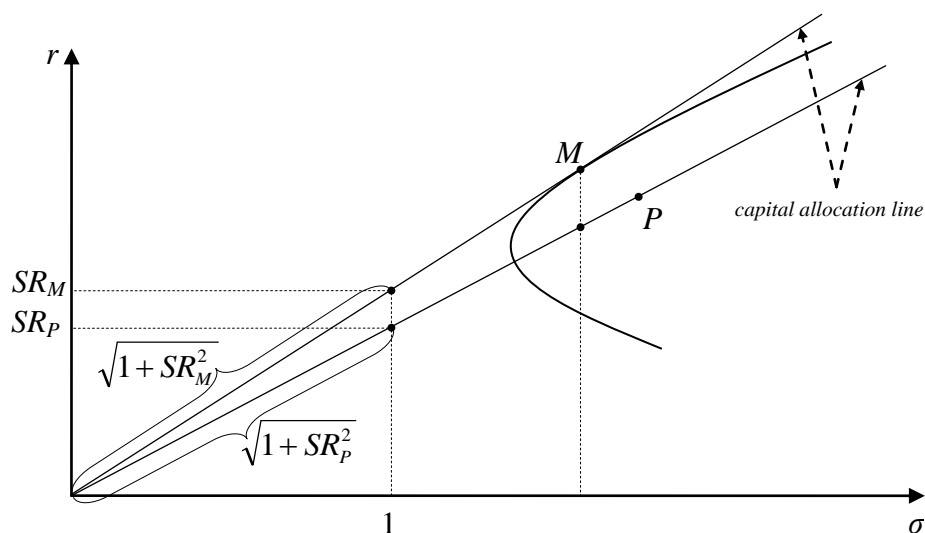
Questa diversa notazione della formula è alla base della sua interpretazione geometrica (figura 2): il numeratore e il denominatore altro non sono che la lunghezza, secondo il teorema di Pitagora, dell'ipotenusa di due triangoli rettangoli. Tali triangoli sono composti da un cateto orizzontale identico per entrambi formato dall'asse delle ascisse fino al punto (1, 0) e da due cateti verticali rappresentati dai segmenti paralleli all'asse delle ordinate aventi lunghezza pari agli Sharpe *ratio* di *M* e *P*.

Quando la pendenza della *capital allocation line* di *P* si approssima a quella di *M*, il rapporto delle ipotenuse tende ad uno e quindi il valore di GRS si avvicina a

⁴³ Gibbons et al. (1989), Grinold (1992).

zero, corrispondente nella distribuzione F alla massima probabilità che l'efficienza di P sia accettabile statisticamente.

Figura 2: Rappresentazione geometrica del test GRS



Fonte: Gibbons et al. (1989).

Il ricorso alla rappresentazione grafica esemplifica la procedura seguita, consentendo, peraltro, di esporre con chiarezza un aspetto non pienamente condivisibile nell'impostazione teorica alla base del *test* GRS. Si nota infatti che l'assenza di vincoli alle quote allocate nei singoli componenti della frontiera efficiente porta quasi certamente a portafogli a varianza minima con forti posizioni "corte" su alcuni degli *asset*.⁴⁴ Questo però comporta una conseguenza non desiderabile nell'applicazione empirica del *test* ai più diffusi indici del mercato azionario. Tali panieri sono sempre rappresentativi di investimenti positivi (posizioni "lunghe") nei loro componenti: compararne il livello di efficienza con quello di un portafoglio che possa ricorrere alla vendita allo scoperto dei titoli con le peggiori performance potrebbe determinare una

⁴⁴ Ciò accadrebbe con qualsiasi campione di *asset*, salvo il caso in cui le varianze di ciascun titolo siano maggiori delle covarianze del titolo stesso con tutti gli altri: $\sigma_i^2 > \sigma_{i,j}$ per ogni $i \neq j$, Roll (1977).

valutazione eccessivamente severa, generando di fatto errori del primo tipo, se non in un'ottica strettamente statistica per lo meno nell'ottica dell'*asset management*.

Inoltre, ipotizzare che il portafoglio di tangenza sia posizionato su una frontiera efficiente non vincolata può portare a conclusioni poco condivisibili anche dal punto di vista della teoria del CAPM. Come evidenziato da Roll, allorquando si consideri una frontiera a varianza minima composta da panieri di titoli con quote di allocazione che possono assumere valori negativi, salvo le già ricordate particolari e pressoché ipotetiche proprietà statistiche del campione, nessun portafoglio con pesi positivi può essere collocato su di essa.⁴⁵ Se quindi si identifica la vera frontiera efficiente con questa frontiera a varianza minima, allora il portafoglio di mercato, che per definizione è composto da tutte le attività investibili ponderate per la loro capitalizzazione (quindi per un peso strettamente positivo), non è posizionato su di essa. Da ciò conseguirebbe che M non sia efficiente, negando quindi la base principale del CAPM.

Per queste ragioni, si può ritenere che portare il *test* GRS alle sue estreme conseguenze, per quanto logiche da un punto di vista matematico, possa condurre a conclusioni in disaccordo con la teoria economica, al punto da inficiare l'utilità stessa dell'uso di questa prova statistica.

Inoltre va notato che tali considerazioni sono estendibili anche ai *test* di Wald, del moltiplicatore lagrangiano e del rapporto di verosimiglianza, in quanto sono tutti trasformazioni lineari del *test* GRS.

Alla luce di queste problematiche si ritiene che sia preferibile ricorrere all'interpretazione originaria di questo *test* multivariato, ossia la verifica della significatività statistica delle intercette derivanti dalle regressioni degli extra-rendimenti dei componenti sull'extra-rendimento del portafoglio oggetto di analisi, essendo tale verifica in pieno accordo con la teoria del CAPM e tale da non richiedere l'introduzione di ulteriori assunti, i quali potrebbero condurre ad un allontanamento dell'analisi statistica dalla realtà dei dati empirici.

⁴⁵ Roll (1977).

2.4. Il test GMM

Il test GRS rientra nella categoria dei test cosiddetti *small sample*, ovvero basati su un campione finito di dati. Tali metodi di valutazione dell'efficienza risultano particolarmente utili nell'ipotesi di normalità dei rendimenti, in quanto in tal caso i loro valori assumono una distribuzione nota, ma possono risultare inadeguati se tale restrizione viene superata. In questo caso è invece necessario ricorrere a test per i quali la distribuzione dei valori della statistica non è nota e, di conseguenza, è necessario ricorrere a tecniche di ricampionamento per definire la funzione di densità del test. Per questa ragione, si opera in un'ottica *large sample*.

Una volta rigettata l'ipotesi di normalità deve però essere valutata la presenza o meno di correlazione seriale dei residui $\hat{\varepsilon}$. Nel caso di omoschedasticità, ossia di residui indipendentemente e identicamente distribuiti, anche le statistiche *small sample* riescono a mantenere un'elevata potenza esplicativa, tanto che, come dimostrato in Kan e Zhou, i loro risultati, simulati utilizzando dei residui distribuiti come una t di Student con 5 gradi di libertà, sono pressoché indistinguibili da quelli conseguiti in presenza di residui gaussiani, persino in campioni con una durata T pari solo a 60 periodi.⁴⁶

Nel caso di eteroschedasticità, invece, i test *small sample* sin qui esposti non sono più trattabili analiticamente⁴⁷ ed è quindi necessario ricorrere al test GMM, proposto da MacKinlay e Richardson⁴⁸ sulla base delle precedenti ricerche econometriche condotte da Hansen sul *generalized method of moments*.⁴⁹

Il test GMM può essere effettuato utilizzando diverse notazioni, in particolare esso può assumere la forma di un test di Wald, ed è definito come:

$$J_1 = T \hat{\alpha}' \underbrace{\begin{bmatrix} \eta & [\mathbf{D}'_T & \mathbf{S}_T^{-1} & \mathbf{D}_T]^{-1} & \eta' \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Omega}_T} \hat{\alpha}$$

$\begin{matrix} 1 \times N & N \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times N \\ & & \mathbf{\Omega}_T & & & \end{matrix}$
 $2N \times 2N$

con:

⁴⁶ Kan, Zhou (2008). La conclusione di questo studio concorda con quella di Zhou (1993).

⁴⁷ Si può dimostrare che in questo caso la loro distribuzione asintotica è una combinazione lineare di $2N$ variabili casuali indipendenti distribuite come una χ^2 con un grado di libertà (Kan, Zhou, 2008).

⁴⁸ MacKinlay, Richardson (1991).

⁴⁹ Hansen (1982). Per una trattazione più aggiornata si rimanda a Hall (2005).

$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{I}_N \otimes [1, 0]$: matrice composta solamente da numeri 1 e 0;

$\boldsymbol{\Omega}_T = [\mathbf{D}'_T \mathbf{S}_T^{-1} \mathbf{D}_T]^{-1}$: matrice di varianza-covarianza dei parametri della regressione, calcolata tramite il prodotto di:

$\mathbf{D}_T = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t']$: matrice simmetrica composta da sottomatrici

quadrate identiche, allineate lungo diagonale principale, contenenti le statistiche descrittive del portafoglio P ;

$\mathbf{S}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' \otimes \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t']$: matrice di densità spettrale;

$\mathbf{Z} = [\mathbf{1}, \mathbf{r}_p']$: matrice $2 \times T$ avente nella prima riga solo numeri 1 e nella seconda riga la serie storica degli extrarendimenti del portafoglio P .

In altri termini, si effettua un *test* simile a quello di Wald, ma nel quale le varianze-covarianze dei residui dipendono anche dai rendimenti dei componenti dell'indice P , come evidenziato dalla costruzione della matrice di densità spettrale \mathbf{S}_T . Formalmente, si può quindi affermare che il *test* GMM opera in una ipotesi di eteroschedasticità dei residui.

La statistica J_I si distribuisce asintoticamente come una chi-quadro con N gradi di libertà: dovendo quindi utilizzare un campione di durata potenzialmente illimitata è necessario ricorrere a tecniche di ricampionamento. Tale soluzione può però portare a risultati subottimali in una situazione di autocorrelazione dei residui se il ricampionamento è effettuato tramite le comuni metodologie. Esse infatti prevedono che si definisca una funzione di densità dalla quale poi effettuare estrazioni casuali.⁵⁰

Contro tale procedura si possono però evidenziare alcune controindicazioni, dovute sia alla complessità sia alla potenziale impossibilità nel definire una distribuzione che abbia un *fitting*⁵¹ corretto sia alla perdita di informazione sui rendimenti. Tali rendimenti, infatti, sono correlati sia tra di loro (correlazione

⁵⁰ Si evidenzia che è impossibile parlare di casualità in processi generati in modo comunque deterministico da calcolatori elettronici: con maggior rigore le si dovrebbe infatti definire estrazioni pseudo-casuali.

⁵¹ Letteralmente “adattamento”. Nel caso in oggetto, il *curve fitting* è il processo di costruzione di una distribuzione che abbia la migliore corrispondenza con la serie storica dei rendimenti.

cross-section) sia con quelli che li precedono e seguono (autocorrelazione o correlazione *time series*): se fossero ricampionati per ciascun periodo temporale t , potrebbero conservare solo la prima delle due forme di dipendenza. Il campionamento *cross-section* è sempre possibile per una distribuzione multivariata N -dimensionale, mentre la scelta di rendimenti isolati temporalmente cancella completamente qualsiasi autocorrelazione *time series* presente nel campione di dati originari. Al fine di superare queste limitazioni, è possibile far ricorso ad una tecnica euristica quale il *block bootstrap*.

2.5. Il *block bootstrap* del test GMM

Il metodo di simulazione *bootstrap*, introdotto da Efron (1979), è finalizzato alla stima della distribuzione del valore della statistica *test* tramite il ricampionamento dei dati disponibili. Tali dati, di numerosità finita, sono considerati come rappresentativi dell'intera popolazione, di dimensione infinita. A differenza della tradizionale teoria asintotica, che non sempre consente di definire una distribuzione campionaria, il metodo *bootstrap* ne permette sempre la stima, poiché opera per mezzo di un processo a forte intensità di calcolo e non tramite il ricorso a modelli statistico-matematici.

Questa procedura può, d'altro canto, comportare due tipi di errori. In primo luogo, è necessario ipotizzare che la distribuzione del campione disponibile sia una approssimazione accettabile della distribuzione teorica (principio di analogia). Tale problematica può essere parzialmente superata utilizzando un campione di durata più lunga possibile e che includa situazioni di mercato variegata ed estreme. Il secondo problema invece è dato dal livello di accuratezza della stima della distribuzione simulata. In questo caso la soluzione è ancora più semplice, poiché è solamente necessario ricorrere ad un numero più elevato di scenari simulati. Quindi, mentre il primo problema dipende dalla natura del campione disponibile e può quindi essere ineliminabile, il secondo può essere sempre superato in quanto limitato dalla sola potenza di calcolo disponibile.

Il *block bootstrap* consiste nell'estrazione congiunta di blocchi di residui dei

rendimenti, ciascuno di durata b predefinita.⁵² E' proprio la durata di tali blocchi a permettere di rappresentare il fenomeno dell'autocorrelazione, ma solamente all'interno di ciascuno di essi: si noti che nel momento in cui il ricampionamento passa al blocco successivo, questo può essere estratto dalla serie storica in un qualsiasi punto non consecutivo al precedente ed essere quindi privo di correlazione con questo. Di conseguenza la scelta di b risulta essere sottoposta a due contrastanti problematiche:

- al diminuire di b si associa una minore considerazione per l'autocorrelazione;
- al crescere di b corrisponde un minor numero di permutazioni possibili sulla base della serie storica disponibile, necessariamente limitata.

Al fine di applicare il *block bootstrap* al *test* GMM di efficienza dell'indice P è necessario seguire la seguente procedura:⁵³

1) effettuare la regressione degli extrarendimenti degli N titoli sull'extrarendimento dell'indice P ;

2) calcolare i residui per ciascuno degli N titoli in ogni periodo t sulla base della seguente regressione *unrestricted*: $\hat{\varepsilon}_{it} = r_{it} - \hat{\beta}_i r_{Pt} - \hat{\alpha}_i$;⁵⁴

3) stimare i coefficienti di regressione β_i nel caso *restricted*: $r_i = \tilde{\beta}_i r_P$;⁵⁵

4) estrarre un numero l di blocchi *cross-section* di residui, ciascuno di durata b , dalla matrice $\hat{\varepsilon}$ (dimensioni $N \times T$), con $T = l \times m$;⁵⁶

5) simulare M serie storiche dell'extrarendimento di P tramite il *block bootstrap*, ottenendo la matrice \mathbf{r}_P^* di dimensioni $M \times T$;⁵⁷

6) simulare N serie di rendimenti, ciascuna di durata T , secondo la seguente equazione esemplificativa relativa al solo titolo i al tempo t : $r_{it}^* = \tilde{\beta}_i r_{Pt}^* + \varepsilon_{ik}^*$,

⁵² Shao, Tu (1995).

⁵³ Chou, Zhou (2006).

⁵⁴ La regressione è definita *unrestricted* (non vincolata) in quanto effettuata senza porre alcuna limitazione al valore dell'intercetta α_i .

⁵⁵ In questo caso la regressione, *restricted* (vincolata), segue la teoria del CAPM, la quale postula che in equilibrio i rendimenti dei titoli dipendano solamente dalla loro sensibilità al portafoglio di mercato e quindi non mostrino intercette α_i diverse da zero.

⁵⁶ Si evidenzia che l'estrazione è compiuta con sostituzione (*replacement*): un blocco di dati, o una sua parte, può essere campionato nuovamente in seguito.

⁵⁷ L'asterisco a fianco del rendimento è qui utilizzato convenzionalmente per indicare che si tratta di un valore ottenuto in seguito alla simulazione *block bootstrap*.

con $1 < k < T$;

7) ripetere il punto 6 un numero M molto elevato di volte (circa 10.000).

In questo modo si ottiene una matrice tridimensionale di extrarendimenti simulati, avente dimensioni $N \times T \times M$.

Con quest'ultimo passaggio si conclude l'implementazione del *block bootstrap* e quindi i dati così simulati possono essere utilizzati per calcolare M valori della statistica *test* J_1^* . Tali valori sono utilizzati per ricostruire la distribuzione empirica di J_1 tramite la seguente procedura:

1) regredire in ognuno degli M scenari la serie storica simulata degli N componenti sugli extrarendimenti simulati dell'indice P , al fine di stimare il vettore $N \times 1$ delle intercette $\hat{\alpha}_i^*$ e la matrice $N \times T$ dei residui $\hat{\epsilon}^*$;

2) calcolare la statistica J_1^* sulla base dei dati stimati al punto 1 per ciascuno scenario;

3) confrontare il valore delle M statistiche J_1^* con la statistica J_1 calcolata con i dati storici e stimarne quindi il *p-value*;

4) nel caso in cui tale *p-value* sia superiore ad uno meno l'intervallo di confidenza prescelto, l'indice P è efficiente.

2.6. La misura di efficienza relativa di Kandel e Stambaugh

I *test* sin qui esposti operano tutti all'interno della cornice teorica del CAPM, seppure con alcune distinzioni rispetto a questo modello. Il metodo di analisi dell'efficienza di un indice proposto da Kandel e Stambaugh trascende invece il CAPM, evitando di ricorrere alle sue stringenti ipotesi e, in genere, a concetti quali la dipendenza lineare dei rendimenti dei titoli rispetto al portafoglio di mercato.⁵⁸ Al contrario, esso riparte dai fondamenti stessi della Modern Portfolio Theory, dopo aver osservato le limitazioni degli approcci basati sul modello di Sharpe, Lintner e Mossin.

E' utile, in primo luogo, osservare il valore esplicativo assunto dall'equazione del CAPM nel caso in cui la *proxy* del portafoglio di mercato costituita da un

⁵⁸ Kandel, Stambaugh (1995).

generico indice P sia inefficiente. Gli autori dimostrano che è sempre possibile aggregare un campione di titoli in portafogli tali che, se i rendimenti di questi ultimi sono regrediti sui β precedentemente stimati tramite una regressione OLS sull'indice P , essi forniscano coefficienti di regressione φ_1 e φ_2 di valore arbitrariamente prestabilito.⁵⁹ Questo risultato implica che la presenza di una relazione quasi perfettamente lineare tra i β e i rendimenti attesi non è sinonimo di validità del CAPM né di efficienza dell'indice utilizzato in sostituzione del portafoglio di mercato.

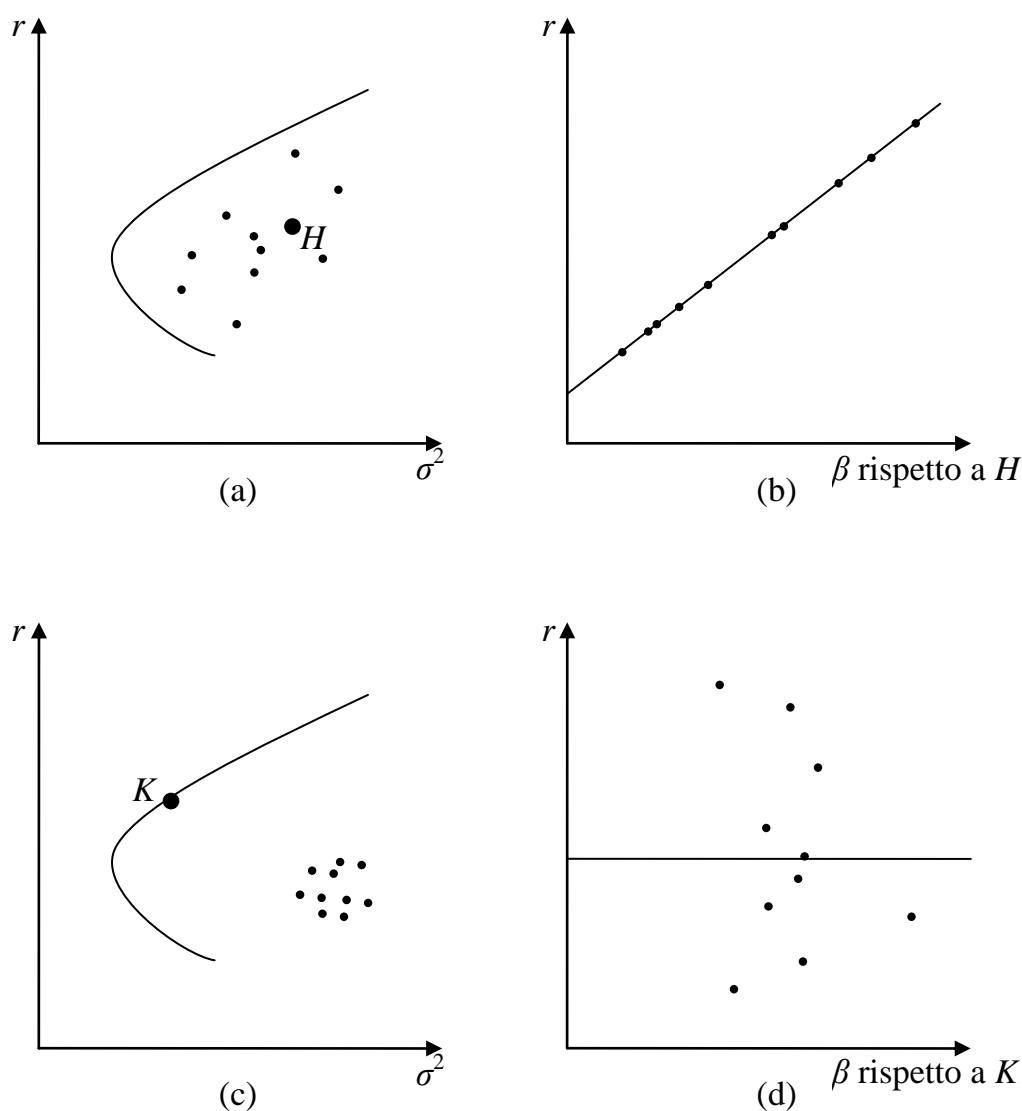
La figura 3 consente di illustrare graficamente quanto affermato da Kandel e Stambaugh. Le frontiere efficienti sono state tracciate utilizzando dieci portafogli, composti da titoli quotati sul NYSE raggruppati per decile di capitalizzazione. Successivamente sono stati costruiti venti portafogli, utilizzando gli stessi titoli azionari ma aggregandoli secondo criteri differenti. Dieci di questi portafogli sono riportati nei riquadri (a) e (b) e gli altri dieci nei riquadri (c) e (d). Gli indici H e K sono medie ponderate dei portafogli presenti nei rispettivi piani cartesiani.

Quanto rappresentato in (a) e (b) ha lo scopo di evidenziare come un indice H pienamente inefficiente, se utilizzato come variabile indipendente nell'equazione del CAPM, consenta la stima di coefficienti β tali da collocare i suoi dieci componenti lungo una retta che appare simile alla Security Market Line.

Al contrario, nei riquadri (c) e (d) un portafoglio K posizionato quasi perfettamente sulla frontiera efficiente, formato dai medesimi *asset* del primo, ma raggruppati in portafogli con modalità differenti, non fornisce alcuna informazione esplicativa sui rendimenti dei suoi componenti. Di conseguenza, un portafoglio come quest'ultimo sarebbe considerato fortemente inefficiente nell'ottica del CAPM, quando invece nella Modern Portfolio Theory si colloca talmente in prossimità della frontiera da essere distinguibile da questa solo in termini geometrici, ma non in termini che appaiano significativi da un punto di vista finanziario.

⁵⁹ Il primo coefficiente rappresenta l'intercetta della retta di regressione, mentre il secondo è la sua pendenza.

Figura 3: Relazioni beta - excess return



Fonte: Kandel, Stambaugh (1995).

Quanto esposto è in accordo con le conclusioni cui erano giunti anche altri autori. Si ricorda in particolare Roll, che sottolinea come, nel caso in cui si utilizzino degli indici inefficienti come *proxy* del portafoglio di mercato, è possibile costruire graduatorie completamente arbitrarie degli *asset* basate sull'intercetta della loro regressione su tali *proxy*.⁶⁰

⁶⁰ Roll (1978). Si rimanda anche a Roll, Ross (1994).

Il tema è stato ulteriormente approfondito da Green nel suo noto studio sul *benchmark error*, ovvero la misura delle deviazioni dalla Security Market Line dei rendimenti dei titoli sulla base dei loro α e β stimati tramite regressione su di un indice inefficiente.⁶¹ L'autore è giunto alla conclusione che, mentre i *benchmark error* hanno un andamento continuo al passare da un indice subottimale ad un altro, le graduatorie degli investimenti ottenute tramite misure derivanti dal CAPM possono assumere andamenti arbitrari e mostrare fenomeni di inversione (*reversal*) a seconda della *proxy* del portafoglio di mercato utilizzata per la loro stima. Fama e French hanno condotto una semplice analisi empirica di lungo periodo (1928-2003) sul mercato azionario americano, evidenziando una sostanziale assenza di correlazione tra i rendimenti di portafogli *value-weighted* e la SML costruita ricorrendo all'indice CRSP, a conferma di quanto già enunciato da Green e previsto dalla critica di Roll.⁶²

Ritornando all'ambito della valutazione dell'efficienza, le conclusioni di Kandel e Stambaugh possono portare a privilegiare l'impiego di misure di efficienza relativa, misurata non rispetto ad un modello di *pricing* degli strumenti finanziari, bensì rispetto alla frontiera efficiente. Si tratta quindi di effettuare un confronto tra l'extrarendimento di P rispetto al portafoglio a varianza minima g e l'extrarendimento di x , portafoglio efficiente avente la medesima volatilità di P , sempre rispetto a g .

In termini formali, si definisce ψ_P , ovvero la misura di efficienza relativa del portafoglio P , come:

$$\psi_P = \frac{\mu_P - \mu_g}{\mu_x - \mu_g}$$

Il *range* di ψ_P è compreso tra $-\infty$ e $+1$. A una perfetta efficienza è associato il valore pari a $+1$, che si verifica nel caso in cui si assista ad una coincidenza tra P e x : il portafoglio P giace quindi sulla frontiera. Nel caso in cui, invece, ψ_P assuma il valore pari a -1 essa indica che P è posto sulla parte inferiore della frontiera

⁶¹ Green (1986). L'autore ha sviluppato le analisi effettuate in Dybvig, Ross (1985). Per un'applicazione del modello di Green agli indici del mercato azionario italiano negli anni Novanta si rimanda allo studio condotto da Roberto Savona in Basile (2002).

⁶² Fama, French (2004).

efficiente, ovvero sul segmento di tale curva che rappresenta i portafogli a rendimento minimo dato un livello di volatilità. L'asimmetria della distribuzione di ψ_P è dovuta al fatto che la frontiera efficiente è costruita considerando anche la presenza del portafoglio P : nel caso in cui questo fosse perfettamente efficiente potrebbe al massimo essere collocato su tale curva, limitando quindi a +1 i valori che possono essere assunti da ψ_P . Al contrario, non esiste alcun vincolo teorico che imponga un livello massimo di inefficienza raggiunto da parte di un indice.

Se invece si ragiona non in termini di rendimenti medi, bensì di varianze, la misura ψ_P deve essere valutata al quadrato:⁶³

$$\psi_P^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_g^2}{\sigma_P^2 - \sigma_g^2}$$

Questo cambio di variabili può essere giustificabile nel caso in cui P presenti una volatilità superiore a quella del portafoglio efficiente avente rendimento massimo,⁶⁴ ma al contempo un rendimento tale da non posizionarlo sulla frontiera. In questa situazione, infatti, la notazione originaria dell'indice ψ_P non potrebbe essere utilizzata, in quanto nessuna combinazione lineare efficiente dei titoli disponibili avrebbe la medesima deviazione *standard* di P e quindi sarebbe impossibile calcolare μ_x .

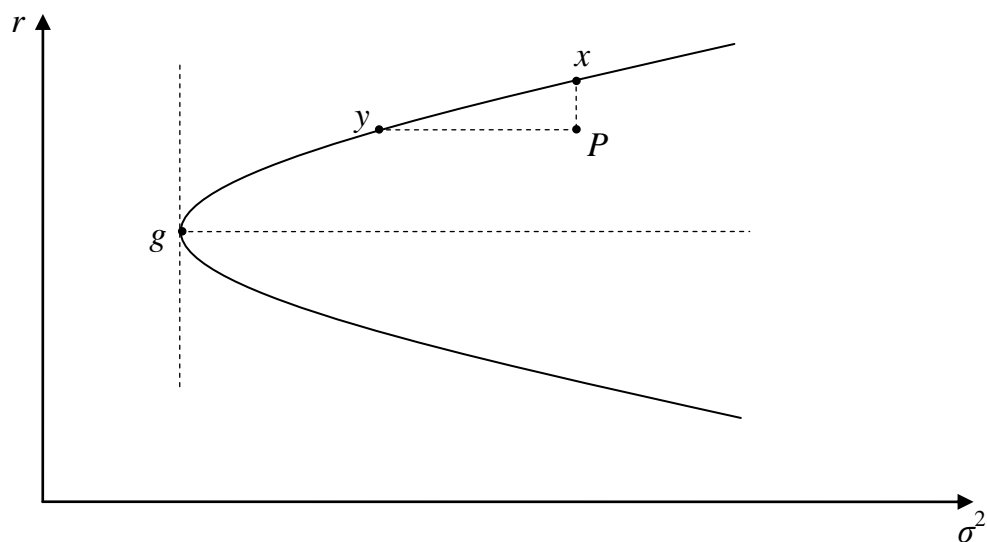
Nell'impiego del quadrato di ψ_P il confronto avviene con il portafoglio y , ovvero il punto sulla frontiera efficiente avente il medesimo rendimento di P , ma, salvo nel caso in cui che quest'ultimo sia perfettamente efficiente, con una volatilità inferiore. Questa notazione è però altamente discutibile, in quanto assegna il medesimo livello di efficienza relativa ai portafogli posti simmetricamente rispetto alla retta parallela all'asse delle ascisse passante per il portafoglio a varianza minima g . Quindi, in presenza di varianze identiche ma

⁶³ Tale formulazione discende direttamente dall'equazione della parabola. Si rammenta infatti che la frontiera efficiente assume la conformazione di un'iperbole nel piano media-deviazione *standard* e di una parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse σ^2 , nel caso in cui il rischio sia misurato tramite la varianza (figura 4).

⁶⁴ Si ricorda che, in assenza di vendite allo scoperto, la frontiera efficiente è limitata tra il portafoglio a varianza minima g e il portafoglio composto al 100% dal titolo i -esimo avente rendimento massimo.

extrarendimenti differenti, due portafogli sarebbero classificati sullo stesso livello di efficienza: un risultato chiaramente errato.

Figura 4: Misura di efficienza di Kandel e Stambaugh



Fonte: Kandel, Stambaugh (1995).

Questo approccio, per quanto semplice, offre alcuni vantaggi rispetto a quelli esposti in precedenza e fondati sui presupposti teorici del CAPM: tramite la misura di Kandel e Stambaugh è sempre possibile costruire classifiche di efficienza relativa degli indici, anche se la validità empirica del modello di Sharpe, Lintner e Mossin non è verificata.

La finalità delle classifiche stilate tramite la misura di Kandel e Stambaugh, quindi, non è e non può essere quella di determinare quale sia il portafoglio di mercato, da utilizzare poi, ad esempio, per l'analisi del valore atteso in equilibrio dei titoli oppure per la stima di indicatori di *performance* relativa quale l'*appraisal ratio*. Al contrario, questa metodologia d'analisi risulta particolarmente utile nel campo dell'*asset management*, in quanto consente di determinare, a titolo d'esempio, quale sia l'indice più efficiente all'interno di un dato mercato, allo scopo di impiegarlo come *benchmark* per investimenti passivi.

2.7. Il ricampionamento applicato alla misura di Kandel e Stambaugh

Così come i *test* fondati sul CAPM rientrano necessariamente nell'ambito teorico di tale modello, e quindi risentono delle sue limitazioni, anche la misura di Kandel e Stambaugh è influenzata non solo dai vincoli teorici della Modern Portfolio Theory, ma anche dalle limitazioni di ambito pratico riscontrabili in tale approccio. Un problema che infatti coinvolge le applicazioni finanziarie consiste nella difficoltà di misurare empiricamente i parametri delle distribuzioni dei rendimenti dei titoli. In un processo di ottimizzazione media-varianza, come quello proposto da Markowitz, questa limitazione empirica può portare a risultati irrealistici a causa dell'effetto di *error maximization*. Tale "irrealismo" deriva dal fatto che, in caso di errori di stima, l'ottimizzazione giunge a soluzioni corrette numericamente, ma distorte dal punto di vista logico e finanziario.

La letteratura scientifica si occupa da decenni del tema dell'*estimation error*,⁶⁵ ovvero delle problematiche legate alla stima dei parametri "veri" delle distribuzioni dei rendimenti e ha proposto il ricorso a varie procedure finalizzate al suo contenimento, non essendo in ogni caso possibile giungere ad un suo completo superamento.⁶⁶

Nell'analisi empirica che viene effettuata nel presente studio si è ritenuto opportuno ricorrere alla tecnica euristica del ricampionamento (*resampling*) tramite una simulazione Monte Carlo.⁶⁷ Tale metodo consente di superare le problematiche riscontrate nel modello di Markowitz tramite la stima di molteplici frontiere efficienti costruite sulla base dei rendimenti simulati in M scenari, ciascuno di durata solitamente pari a quella del campione storico. La frontiera *resampled* è composta da portafogli i cui componenti hanno un peso pari alla media dei pesi di ciascuno di essi in ogni scenario simulato.

⁶⁵ Per una prima analisi delle distorsioni derivanti da questa ottimizzazione si rimanda a Jobson, Korkie (1980), Best, Grauer (1991) e Chopra, Ziemba (1993), mentre per una rassegna più aggiornata si rimanda Michaud, Michaud (2008). Un ulteriore approfondimento è svolto nel paragrafo 4.3.

⁶⁶ Si ricordano in particolare gli approcci bayesiani (quali il ricorso a *shrinkage estimator* oppure il modello di Black e Litterman (1992)) e quelli euristici (vincoli di ponderazione oppure l'utilizzo del ricampionamento).

⁶⁷ La procedura del ricampionamento è stata esposta per da Richard O. Michaud nella prima edizione, del 1998, di Michaud, Michaud (2008).

Questa tecnica consente di calcolare frontiere i cui portafogli siano maggiormente diversificati rispetto a quanto accade nella comune ottimizzazione media-varianza sulla base di *input* stimati sulla base di una singola serie storica. Tale superiore grado di diversificazione è raggiunto per ragioni eminentemente statistiche. Si supponga infatti che i titoli o *asset class* scelti come componenti della frontiera efficiente mostrino livelli di volatilità molto diversi. I componenti caratterizzati da una limitata deviazione *standard* avranno rendimenti simulati che, in ogni scenario, si discostano in modo non estremo da quelli originari. Al contrario, i componenti caratterizzati da elevata variabilità dei loro rendimenti mostreranno, nella simulazione Monte Carlo, medie molto difformi da uno scenario all'altro. Di conseguenza, in alcuni scenari i portafogli efficienti li includeranno con pesi significativi, mentre in altri meno o affatto. Grazie però alla loro presenza sulla frontiera efficiente, perlomeno in alcune simulazioni, essi saranno comunque inseriti nella frontiera *resampled*, inclusione che invece potrebbe non verificarsi con l'ottimizzazione "monoscenario" alla Markowitz.

Nel caso specifico della misura di efficienza relativa di Kandel e Stambaugh, l'impiego della tecnica del *resampling* consente di ottenere una stima dell'indicatore ψ_P nettamente più robusta rispetto a quella calcolata con il metodo proposto dei due autori tre anni prima che Michaud esponesse il proprio procedimento.

Ciò nonostante l'applicazione del ricampionamento al modello di Kandel e Stambaugh non è del tutto esente da difetti. Come ricordato, la frontiera ricampionata è costituita da un insieme discreto di portafogli, non da una serie continua. Nella formula della misura di efficienza ψ_P si ipotizza che sia possibile costruire un qualsiasi portafoglio efficiente, vincolato ad un dato livello di deviazione *standard*. Questo è perfettamente possibile allorquando si effettua una singola ottimizzazione media-varianza, ma in presenza di una simulazione Monte Carlo, data la numerosità degli scenari, può accadere che in almeno uno di questi nessun portafoglio efficiente abbia una volatilità pari a quella dell'indice oggetto di studio P .

Per ovviare a questo problema di ordine eminentemente pratico si è quindi deciso di procedere con la costruzione dell'intera frontiera sulla base dei pesi medi dei portafogli efficienti *resampled* per ciascuno degli M scenari simulati. In seguito, la stima dell'extrarendimento del portafoglio x , ovvero di quel portafoglio efficiente avente la stessa deviazione *standard* di P , è stata eseguita per interpolazione. Il metodo prescelto è il cosiddetto *cubic spline*, che permette di superare sia il problema di linearità a tratti (con conseguente concavità nulla) della comune interpolazione lineare, in disaccordo con la conformazione concava della frontiera efficiente, sia il fenomeno di Runge⁶⁸ tipico delle interpolazioni polinomiali di grado elevato.⁶⁹

2.8. La “distanza” di Levy e Roll

In un loro recente articolo, Moshe Levy e Richard Roll hanno rivisitato il tema dell'analisi di efficienza di un indice in una cornice teorica intermedia tra il CAPM e la Modern Portfolio Theory.⁷⁰ Lo scopo del loro *test*, infatti, è quello di stimare la distanza tra la *proxy* del portafoglio di mercato sottoposta a valutazione e la frontiera efficiente. Di fatto, l'unico richiamo esplicito al modello di Sharpe risiede nell'identificazione dell'indice sottoposto al *test* con il portafoglio di mercato. Dato però che tale eguaglianza è inserita dagli autori a causa delle finalità della loro ricerca (ossia l'individuazione di un indice da utilizzare per il

⁶⁸ Tale fenomeno consiste nell'oscillazione della linea interpolante tra i punti lontani dal centro della serie e nell'incremento dell'errore di interpolazione al crescere del grado del polinomio. In altri termini, polinomi di grado elevato (o, comunque, superiore al secondo) mostrano derivate seconde di segno alterno tra un punto e l'altro della serie da interpolare e derivate prime via via di valore più elevato al crescere del loro grado.

⁶⁹ A titolo di curiosità, si noti come sia il metodo Monte Carlo sia il *cubic spline* traggano la loro origine dalla ricerca applicata al campo militare durante la Seconda Guerra Mondiale. Il metodo Monte Carlo, infatti, era stato concepito, ma non formalizzato scientificamente, da Fermi già negli anni Trenta, ed è poi stato trattato con precisione da von Neumann e Ulam per la simulazione delle traiettorie dei neutroni nelle bombe termonucleari. L'origine del *cubic spline*, invece, risiede nelle tecniche di progettazione in campo navale e aeronautico, che richiedevano la costruzione di modelli formati da piccole strisce di legno (*spline* in dialetto dell'East Anglia) per poter riprodurre i progetti. Il timore per un'eventuale perdita di tali forme di legno in seguito ad un bombardamento portò allo sviluppo di una procedura matematica, formulata per la prima volta da Schoenberg nel 1946, che consentisse di definire la conformazione delle superfici senza il ricorso a costruzioni fisiche.

⁷⁰ Levy, Roll (2010).

pricing dei titoli azionari secondo l'equazione del CAPM) e non è invece strettamente necessaria per le ipotesi fondanti del *test*, si può affermare che la misura proposta possa essere inserita nell'ambito della MPT, piuttosto che del più restrittivo CAPM.

Levy e Roll propongono di effettuare una misura della distanza D tra, da un lato, la media e la deviazione *standard* di un indice P^{sam} e, dall'altro, le corrispondenti misure di un portafoglio efficiente P^{eff} . Quest'ultimo è formato da N componenti "sintetici" caratterizzati da medie e deviazioni *standard* il più possibile prossime a quelle dei titoli di P^{sam} . Il vettore dei pesi dei componenti di P^{eff} , inoltre, è identico a quello di P^{sam} . E' un procedimento fondato, quindi, sui precedenti lavori di Best e Grauer (1985) e Sharpe (2007), che si basano sulla logica dell'ottimizzazione inversa: mantenendo costanti i pesi dei componenti di P^{sam} , sono individuati i loro profili di rischio e rendimento che renderebbero efficiente il portafoglio costruito con le stesse proporzioni.

Si tratta quindi di minimizzare D :⁷¹

$$D[(\bar{R}_P^{eff}, \sigma_P^{eff}), (\bar{R}_P^{sam}, \sigma_P^{sam})] = \sqrt{\frac{k}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\bar{R}_i^{eff} - \bar{R}_i^{sam}}{\sigma_i^{sam}} \right)^2 + \frac{(1-k)}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sigma_i^{eff} - \sigma_i^{sam}}{\sigma_i^{sam}} \right)^2}$$

dato il vincolo:

$$diag(\sigma^{eff})_{N \times N} \mathbf{C}_{N \times N} diag(\sigma^{eff})_{N \times N} \mathbf{w}_{N \times 1} = q \overbrace{[\bar{\mathbf{R}}^{eff} - R_Z]}^{\boldsymbol{\mu}^{eff}}_{N \times 1}$$

La minimizzazione viene effettuata agendo sui seguenti $2N + 2$ parametri misurati empiricamente:

$\bar{\mathbf{R}}_{N \times 1}^{sam}$: vettore dei rendimenti medi;

$\boldsymbol{\sigma}_{N \times 1}^{sam}$: vettore delle deviazioni *standard* dei rendimenti;

q : costante di proporzionalità, strettamente positiva, pari a $(\sigma_P^{sam})^2 / (\bar{R}_P^{sam} - R_Z)$;⁷²

⁷¹ Il parametro k , compreso tra zero e uno, rappresenta il peso relativo assegnato al primo addendo della misura D . Al crescere di k si osservano, a seguito dell'ottimizzazione, valori di \mathbf{R}^{eff} più prossimi alle medie empiriche, controbilanciati da una maggiore distanza di $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$ dalle deviazioni *standard* dei titoli i .

R_Z : rendimento dell'attività *zero- β* .

Al contrario, il vettore \mathbf{w} dei pesi degli N componenti degli indici P e la matrice delle correlazioni \mathbf{C} sono mantenuti fissi, senza agire sulle loro misure empiriche per motivi di semplicità.

E' quindi possibile valutare l'efficienza di P^{sam} tramite semplici *test* univariati⁷³ della significatività statistica della differenza tra le misure ottimizzate ed empiriche della media e della deviazione *standard* di ciascuno dei componenti. In alternativa, si possono adottare *test* multivariati che stimino congiuntamente la significatività delle differenze delle misure, quali il *likelihood ratio* oppure la misura della distanza euclidea tra medie e deviazioni *standard* efficienti e i valori che esse assumono negli M scenari di una simulazione *bootstrap*.

L'approccio di Levy e Roll, per concludere, è estremamente innovativo ma, al contempo, non utilizzabile per i fini della presente ricerca: infatti il presupposto che i pesi \mathbf{w} dei componenti di P siano costanti nel tempo rende la misura della distanza D inutilizzabile per la valutazione degli indici del mercato azionario, dati i ribilanciamenti e le variazioni di composizione cui periodicamente essi sono sottoposti. Al contrario, la distanza di Levy e Roll appare di notevole utilità per la costruzione di portafogli efficienti utilizzabili per la stima del rendimento atteso dei titoli azionari.

⁷² Levy e Roll non definiscono tale costante, che invece, sulla scorta di Roll (1977), è così calcolata in Ni et al. (2011).

⁷³ Il *t-test* per le medie e, per le deviazioni *standard*, il *test* seguente: $(N - 1)(\sigma_i^{sam})^2 / (\sigma_i^{eff})^2$, distribuito come una chi-quadro con $N-1$ gradi di libertà.

3. L'analisi empirica

3.1. La composizione del campione

Lo scopo della presente analisi consiste nella valutazione dell'efficienza dei principali indici del mercato azionario utilizzati nell'ambito dell'*asset management*, al fine di individuare i migliori *benchmark* in termini di efficienza.

Nello specifico, sono state prese in considerazione tre aree geografiche: USA, Area Euro e Italia. La scelta di selezionare solo regioni omogenee in termini valutari è finalizzata ad escludere potenziali effetti distorsivi delle performance azionarie derivanti dalla presenza del fattore di rischio legato al tasso di cambio. Questa decisione ha inoltre consentito di limitare l'impatto della scelta del tasso *risk-free*: come evidenziato da Levy e Roll, il *test* GRS è infatti sensibile alla scelta della *proxy* rappresentativa dell'attività priva di rischio.⁷⁴ L'utilizzo di indici del mercato monetario relativi ad una sola valuta consente quindi di minimizzare l'influenza che tale variabile può avere sui *test* effettuati.

Per il mercato statunitense il tasso *risk free* è stato considerato pari all'indice Citigroup Treasury Bill 1 Month USD, calcolato come media mensile dei rendimenti dei T-Bill con scadenza all'emissione pari a quattro settimane. Il *benchmark* del mercato monetario europeo è invece il Citigroup EUR EuroDeposit 1 Month EUR, calcolato come media mensile dei tassi *bid* sugli eurodepositi con scadenza mensile denominati in euro.

Le tabelle da 1 a 3 elencano gli indici azionari utilizzati nella presente ricerca e ne riportano le principali caratteristiche, ovvero il metodo di ponderazione dei componenti e l'eventuale reinvestimento dei proventi.

La selezione è stata effettuata sulla base di criteri quali-quantitativi. Gli indici scelti sono infatti tra i più utilizzati come *benchmark* nella prassi operativa, inoltre devono rispettare le seguenti caratteristiche:

⁷⁴ Levy, Roll (2010). Dato che, di fatto, GRS e GMM sono entrambi derivati dal *test* di Wald, la considerazione dei due autori è estendibile a tutti e tre i *test*.

- avere un *track record* di rendimenti mensili, prelevati dal *database* Morningstar Direct, risalente almeno a gennaio 2003;
- essere composti, completamente o in parte, da titoli azionari appartenenti ai portafogli *beta-sorted*, descritti in dettaglio nel paragrafo 3.2.

Tabella 1: Indici azionari statunitensi

Indice	Ponderazione	Proventi reinvestiti
DJ Composite Average PR	Prezzo	No
DJ Composite Average TR	Prezzo	Lordi
DJ Industrial Average PR	Prezzo	No
DJ Industrial Average TR	Prezzo	Lordi
MSCI USA GR	Flottante	Lordi
MSCI USA NR	Flottante	Netti
MSCI USA PR	Flottante	No
Russell 1000 CEW TR	Equiponderato	Lordi
Russell 1000 SEW NR	Equiponderato per settori	Netti
Russell 1000 SEW PR	Equiponderato per settori	No
Russell 1000 SEW TR	Equiponderato per settori	Lordi
Russell 1000 PR	Flottante	No
Russell 1000 TR	Flottante	Lordi
Russell 3000 CEW TR	Equiponderato	Lordi
Russell 3000 PR	Flottante	No
Russell 3000 TR	Flottante	Lordi
S&P 500 Equal Weighted TR	Equiponderato	Lordi
S&P 500 NR	Flottante	Netti
S&P 500 PR	Flottante	No
S&P 500 TR	Flottante	Lordi
Value Line New Arithmetic PR	Equiponderato	No
Wilshire 5000 Equal Weight PR	Equiponderato	No
Wilshire 5000 Total Market PR	Flottante	No
Wilshire 5000 Total Market TR	Flottante	Lordi

Fonte: manuali metodologici degli indici.

Tabella 2: Indici azionari dell'Area Euro

Indice	Ponderazione	Proventi reinvestiti
EURO STOXX 50 GR	Flottante, cap 10%	Lordi
EURO STOXX 50 NR	Flottante, cap 10%	Netti
EURO STOXX 50 PR	Flottante, cap 10%	No
EURO STOXX 50 EW NR	Equiponderato	Netti
EURO STOXX 50 EW PR	Equiponderato	No
EURO STOXX GR	Flottante, cap 20%	Lordi
EURO STOXX NR	Flottante, cap 20%	Netti
EURO STOXX PR	Flottante, cap 20%	No
FTSEurofirst 80 TR	Flottante	Lordi
FTSEurofirst 300 Eurozone PR	Flottante	No
MSCI EMU GR	Flottante	Lordi
MSCI EMU NR	Flottante	Netti
MSCI EMU PR	Flottante	No
S&P Euro PR	Flottante	No
S&P Euro TR	Flottante	Lordi

Fonte: manuali metodologici degli indici.

Tabella 3: Indici azionari italiani

Indice	Ponderazione	Proventi reinvestiti
Comit Globale	Capitalizzazione	No
Comit Performance	Capitalizzazione	Lordi
Fideuram Azionari Italia TR	AUM degli OICR italiani	Netti
FTSE Italia AllShare PR	Flottante	No
FTSE Italia AllShare TR	Flottante	Netti
FTSE Italia MIB Storico PR	Capitalizzazione – azioni proprie	No
FTSE Italia MIB Storico TR	Capitalizzazione – azioni proprie	Lordi
FTSE MIB PR	Flottante, cap 15%	No
FTSE MIB TR	Flottante, cap 15%	Netti
MSCI Italy GR	Flottante	Lordi
MSCI Italy NR	Flottante	Netti
MSCI Italy PR	Flottante	No

Fonte: manuali metodologici degli indici.

Come evidenziato nel paragrafo riguardante il *test* GRS, le analisi statistiche qui esposte sono influenzate dalla dimensione del campione utilizzato. Inoltre, e indipendentemente dal *test* impiegato, deve essere sottolineato che la matrice di

varianza e covarianza dei residui $\hat{\Sigma}$, nel caso in cui il numero di *asset* N superi il numero di intervalli temporali disponibili T , è singolare e quindi non invertibile: ciò renderebbe inutilizzabile il *test* di Wald e i suoi derivati. Con riguardo invece al *test* di Kandel e Stambaugh, l'impatto dimensionale è meno importante da un punto di vista strettamente statistico, ma assume rilevanza in un'ottica di *asset management*. Al crescere di N , infatti, diviene più probabile includere nel campione titoli con *performance* estreme. Da ciò deriverebbe una maggiore probabilità di tracciare una frontiera efficiente composta da portafogli costituiti da titoli caratterizzati da profili di rischio e rendimento difficilmente replicabili *out of sample*. Di conseguenza, la problematica della numerosità campionaria si pone anche per questo *test*, al fine di garantire che sia effettuato in condizioni il più possibile realistiche.

3.2. La costruzione dei portafogli beta-sorted

Date queste premesse, si è posto il problema di ridurre il rapporto N/T agendo sul numeratore. A tal fine, la letteratura scientifica propone un metodo di aggregazione degli *asset* ampiamente utilizzato: il ricorso ai portafogli *beta-sorted*.⁷⁵

Il primo passo per la loro costruzione consiste nella stima del vettore $\hat{\beta}_i$ dei coefficienti angolari delle rette della regressione OLS dei rendimenti degli N titoli sul rendimento del portafoglio di cui essi sono componenti.

In seguito, questi titoli sono ordinati dal minore al maggiore a seconda del livello del loro beta e suddivisi in un numero arbitrario di quantili (indicato con Q). Nel caso specifico, si è deciso di proseguire con il metodo esposto da Gibbons, Ross e Shanken e quindi di utilizzare dieci quantili.⁷⁶

Ogni q -esimo portafoglio *beta-sorted* è composto in parti uguali dai titoli del relativo quantile: si tratta quindi di un portafoglio equiponderato, il cui

⁷⁵ Black, Jensen, Scholes (1972).

⁷⁶ Si noti che dieci è anche dimensione massima ritenuta idonea per i *test* qui utilizzati. Campbell, Lo, MacKinlay (1997).

rendimento medio è pari alla media dei rendimenti. Da questo deriva che $\hat{\beta}_q$ è pari al rischio sistematico medio delle azioni di q e che $\hat{\alpha}_q$ è l'intercetta media. Inoltre, dato il livello simile dei beta dei titoli inclusi nel medesimo portafoglio, quest'ultimo risulta non diversificato e quindi i portafogli *beta-sorted* presentano tra di loro una dispersione delle esposizioni al fattore di rischio sistematico ben superiore rispetto a quella riscontrabile in portafogli costruiti con altre metodologie, oppure casualmente.⁷⁷

Un rischio cui è possibile incorrere con questa aggregazione è quello di introdurre una distorsione nella selezione dei componenti di ogni portafoglio *beta-sorted*. Ciò è dovuto alla presenza di errori di stima, tali per cui i beta di valore più elevato contengono al loro interno una componente spuria positiva, mentre l'opposto si verifica per i beta di valore minore. A causa di tale *bias* i titoli (e quindi portafogli *beta-sorted*) con una forte esposizione al rischio sistematico mostrerebbero intercette inferiori al reale, mentre avverrebbe l'opposto in presenza di beta di valore limitato. Questa distorsione può essere evitata separando temporalmente la costruzione dei portafogli e il loro utilizzo all'interno dei *test*, rendendo indipendenti questi ultimi dalla precedente selezione dei titoli in base al loro beta.

Per effettuare l'analisi di efficienza è stato necessario, in primo luogo, selezionare le serie storiche dei componenti di un indice per ciascun mercato disponibili sul *database* Datastream. Per l'azionario statunitense sono state utilizzate le azioni che costituiscono l'indice S&P 500, formato dalle prime cinquecento società, per capitalizzazione, quotate presso il New York Stock Exchange. L'azionario dell'Area Euro, invece, è stato rappresentato dai *constituent* dell'indice Euro Stoxx 50. Con riguardo all'azionario italiano la scelta è ricaduta sull'indice Comit Performance, composto da tutti i titoli presenti sul Mercato Telematico Azionario di Borsa Italiana. In tutti e tre i casi si tratta di indici *total return*, calcolati reinvestendo ogni provento distribuito (dividendi, assegnazioni di azioni a titolo gratuito, ecc.).

⁷⁷ Lo, MacKinlay (1990).

Dato che ciascun indice è soggetto ad una revisione periodica (trimestrale per l'S&P 500 e l'Euro Stoxx 50, settimanale il Comit Performance), con riguardo sia ai componenti sia ai loro pesi, sarebbe stato errato utilizzare i soli titoli azionari presenti nell'ultima data disponibile. Al contrario, per ogni indice è stata seguita la seguente procedura, implementata tramite la programmazione di un apposito *script* di Matlab:

- è stato scaricato da Datastream l'elenco dei componenti per ogni trimestre a partire da dicembre 2002 fino a settembre 2010;
- di ogni elenco sono stati scaricati 63 mesi di rendimenti *total return*, calcolati da Datastream, di cui i primi 60 mesi (*in sample*) utilizzati per la stima dei beta e 3 (*out of sample*) per la costruzione dei portafogli *beta-sorted*;
- per ogni finestra *rolling* di 63 mesi, sono stati regrediti sull'indice i primi 60 rendimenti di quei componenti aventi almeno 24 mesi *in sample* e almeno due mesi *out of sample*;
- i titoli sono stati riordinati in base al beta e aggregati in dieci portafogli *beta-sorted*;⁷⁸
- il rendimento mensile R_q di ciascun portafoglio *beta-sorted* è la media aritmetica semplice dei rendimenti dei suoi componenti nei mesi *out of sample*, coprendo il periodo gennaio 2003-dicembre 2010.

Da questo procedimento deriva che la composizione di ciascun portafoglio è variabile nel tempo, modificandosi ogni tre mesi: di fatto, i *beta-sorted portfolio* possono essere considerati alla stregua di fondi comuni, dotati di una loro identità autonoma ma la cui composizione interna è sempre variabile.

Relativamente alla non-stazionarietà dei beta, la ricalibrazione dei portafogli comporta un importante vantaggio: essa infatti consente di riallocare i titoli in portafogli diversi a seconda della variazione della loro esposizione al fattore di rischio sistematico, seppure non istantaneamente bensì con un *lag* temporale

⁷⁸ Nel caso in cui il numero totale di componenti dell'indice azionario non sia un multiplo di dieci, i portafogli mediani hanno visto attribuirsi un titolo in più ciascuno. Quindi, nel caso in cui il resto della divisione sia pari a nove, solo il portafoglio con il beta medio più estremo risulterebbe con un elemento in meno rispetto agli altri.

massimo di tre mesi.⁷⁹ Quindi, a fronte di una variabilità nella composizione dei portafogli *beta-sorted*, si mantiene sostanzialmente costante il profilo di rischio di ciascuno di loro, in quanto sono i titoli ad essere trasferiti nel caso in cui il loro beta subisse delle variazioni e non è invece il portafoglio nel suo complesso a subire tale mutamento.

A fronte di questi vantaggi, è necessario rilevare anche un potenziale difetto del raggruppamento in portafogli dei singoli titoli componenti un indice: come rilevato da Roll, le intercette di segno opposto delle singole azioni, specie se indipendenti dai beta, possono elidersi quando sono inserite in un portafoglio, comportandone una sottostima.⁸⁰

3.3. La metodologia applicativa dell'analisi empirica

Le serie *out of sample* dei portafogli sono state utilizzate come *panel* di componenti di tutti gli indici inclusi in ciascuna *asset class*, indipendentemente dal fatto che tali *beta-sorted portfolio* siano o meno costituiti dai medesimi titoli inclusi in ciascuno degli indici analizzati. Questa scelta, oltre ad essere dettata dalla mancanza di serie storiche dei *component* di ogni indice, è fondata anche su di una *ratio* teorica: al fine di individuare il miglior *benchmark* rappresentativo di un mercato, è utile che tutti gli indici azionari di quello specifico mercato siano confrontati con lo stesso campione di titoli.

Data l'ipotesi di normalità degli extrarendimenti insita nei *test* effettuati, con l'eccezione del GMM, prima di tutto è stato verificato l'eventuale scostamento delle serie storiche qui utilizzate rispetto alla distribuzione gaussiana tramite l'utilizzo del noto *test* di Jarque-Bera. Questa misura statistica, che si distribuisce asintoticamente come una chi-quadro con due gradi di libertà, soffre però di serie distorsioni nel caso in cui il campione sia di dimensioni limitate. Per questa

⁷⁹ A titolo di paragone, si rammenta che Black et al. (1972) ricalibrano i loro portafogli *beta-sorted* ogni 12 mesi, quindi con minore precisione. Va comunque notato che due periodi *in sample* consecutivi si sovrappongono per 57 mesi, quindi la variabilità dei beta è alquanto ridotta, essendo dovuta solamente a *shock* intervenuti nei tre rendimenti mensili non comuni ad entrambe le finestre temporali.

⁸⁰ Roll (1977).

ragione l'analisi è stata effettuata utilizzando il programma Matlab, che stima il *p-value* del *test* non tramite la distribuzione asintotica, bensì ricorrendo ad una tabella di valori critici computata tramite simulazioni Monte Carlo, tale da correggere il *bias* che si manifesta in particolare per le serie storiche di durata inferiore ai 2.000 periodi, come in questo caso (96 periodi).

Tabella 4: Statistiche descrittive degli extrarendimenti degli indici statunitensi

Indice	Media	Deviazione Standard	Asimmetria	Curtosi	JB stat	p-value (1)	Normalità
DJ Composite Average PR	0,48%	4,21%	-0,80	4,53	19,51	0,36%	No
DJ Composite Average TR	0,68%	4,20%	-0,79	4,50	19,12	0,38%	No
DJ Industrial Average PR	0,26%	4,11%	-0,70	4,40	15,72	0,61%	No
DJ Industrial Average TR	0,47%	4,10%	-0,69	4,37	15,06	0,67%	No
MSCI USA GR	0,49%	4,39%	-0,85	5,07	28,79	0,14%	No
MSCI USA NR	0,44%	4,40%	-0,86	5,07	28,90	0,13%	No
MSCI USA PR	0,33%	4,40%	-0,86	5,08	29,15	0,13%	No
Russell 1000 CEW TR	0,95%	5,66%	-0,34	6,29	45,24	0,10%	No
Russell 1000 SEW NR	1,03%	5,40%	-0,57	6,58	56,43	0,10%	No
Russell 1000 SEW PR	0,94%	5,40%	-0,57	6,59	56,74	0,10%	No
Russell 1000 SEW TR	1,07%	5,41%	-0,57	6,58	56,29	0,10%	No
Russell 1000 PR	0,36%	4,47%	-0,88	5,14	30,80	0,11%	No
Russell 1000 TR	0,52%	4,46%	-0,87	5,13	30,43	0,12%	No
Russell 3000 CEW TR	1,01%	6,34%	-0,21	5,14	19,04	0,38%	No
Russell 3000 PR	0,39%	4,55%	-0,88	5,07	29,48	0,13%	No
Russell 3000 TR	0,54%	4,55%	-0,87	5,07	29,10	0,13%	No
S&P 500 Equal Weighted TR	0,83%	5,38%	-0,51	5,86	36,82	0,10%	No
S&P 500 NR	0,42%	4,38%	-0,84	4,97	26,77	0,16%	No
S&P 500 PR	0,31%	4,39%	-0,84	4,93	26,08	0,17%	No
S&P 500 TR	0,47%	4,38%	-0,83	4,97	26,61	0,17%	No
Value Line New Arithmetic PR	1,11%	6,17%	-0,22	5,25	20,92	0,31%	No
Wilshire 5000 Equal Weight PR	1,31%	6,61%	-0,15	4,48	9,09	1,94%	No
Wilshire 5000 Total Market PR	0,41%	4,53%	-0,87	5,03	28,64	0,14%	No
Wilshire 5000 Total Market TR	0,56%	4,53%	-0,86	5,04	28,48	0,14%	No

(1) Arrotondato a 0,10% da Matlab se tendente a zero.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 5: Statistiche descrittive degli extrarendimenti degli indici dell'Area Euro

Indice	Media	Deviazione Standard	Asimmetria	Curtosi	JB stat	p-value (1)	Normalità
EURO STOXX 50 GR	0,40%	5,21%	-0,34	4,26	8,22	2,34%	No
EURO STOXX 50 NR	0,33%	5,20%	-0,35	4,21	7,82	2,59%	No
EURO STOXX 50 PR	0,10%	5,18%	-0,38	4,04	6,61	3,51%	No
EURO STOXX 50 EW NR	0,65%	7,17%	-0,40	4,63	13,18	0,89%	No
EURO STOXX 50 EW PR	0,28%	5,62%	-0,06	4,92	14,88	0,69%	No
EURO STOXX GR	0,51%	5,17%	-0,47	4,53	12,93	0,93%	No
EURO STOXX NR	0,45%	5,16%	-0,48	4,49	12,55	1,00%	No
EURO STOXX PR	0,23%	5,13%	-0,52	4,33	11,36	1,23%	No
FTSEurofirst 80 TR	0,44%	5,19%	-0,39	4,36	9,84	1,67%	No
FTSEurofirst 300 Eurozone PR	0,19%	5,08%	-0,52	4,28	10,93	1,34%	No
MSCI EMU GR	0,48%	5,16%	-0,45	4,53	12,61	0,99%	No
MSCI EMU NR	0,42%	5,15%	-0,47	4,48	12,21	1,06%	No
MSCI EMU PR	0,20%	5,12%	-0,50	4,31	10,93	1,34%	No
S&P Euro PR	0,19%	5,12%	-0,48	4,20	9,50	1,79%	No
S&P Euro TR	0,47%	5,15%	-0,44	4,40	10,95	1,33%	No

(1) Arrotondato a 0,10% da Matlab se tendente a zero.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 6: Statistiche descrittive degli extrarendimenti degli indici italiani

Indice	Media	Deviazione Standard	Asimmetria	Curtosi	JB stat	p-value (1)	Normalità
Comit Globale	-0,10%	5,41%	-0,21	5,17	19,52	0,36%	No
Comit Performance	0,22%	5,42%	-0,22	5,33	22,47	0,26%	No
Fideuram Azionari Italia TR	0,02%	4,39%	-0,34	4,44	10,09	1,58%	No
FTSE Italia AllShare PR	-0,17%	5,44%	-0,21	4,39	8,47	2,21%	No
FTSE Italia AllShare TR	0,15%	5,44%	-0,24	4,53	10,32	1,51%	No
FTSE Italia MIB Storico PR	-0,10%	5,42%	-0,24	5,06	17,83	0,45%	No
FTSE Italia MIB Storico TR	0,21%	5,43%	-0,24	5,21	20,38	0,33%	No
FTSE MIB PR	-0,20%	5,66%	-0,11	4,68	11,54	1,19%	No
FTSE MIB TR	0,13%	5,65%	-0,14	4,81	13,41	0,86%	No
MSCI Italy GR	0,14%	5,45%	-0,19	4,36	7,93	2,52%	No
MSCI Italy NR	0,05%	5,45%	-0,18	4,33	7,60	2,73%	No
MSCI Italy PR	-0,22%	5,46%	-0,17	4,18	6,06	4,11%	No

(1) Arrotondato a 0,10% da Matlab se tendente a zero.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 7: Statistiche descrittive degli extrarendimenti dei portafogli *beta-sorted*

Indice	Media	Deviazione Standard	Asimmetria	Curtosi	JB stat	p-value (1)	Normalità
USA Beta 1	0,17%	3,91%	-1,01	4,80	29,47	0,13%	No
USA Beta 2	0,38%	3,83%	-0,93	4,61	24,41	0,21%	No
USA Beta 3	0,49%	4,29%	-1,17	6,43	68,92	0,10%	No
USA Beta 4	0,56%	4,48%	-0,89	5,05	29,46	0,13%	No
USA Beta 5	0,49%	5,64%	-1,15	6,76	77,78	0,10%	No
USA Beta 6	0,40%	5,32%	-0,84	4,85	24,96	0,20%	No
USA Beta 7	0,50%	6,20%	-1,02	5,82	48,41	0,10%	No
USA Beta 8	0,74%	6,41%	-0,59	3,98	9,35	1,84%	No
USA Beta 9	0,72%	7,39%	-0,72	5,29	29,15	0,13%	No
USA Beta 10	0,47%	9,76%	-0,21	3,30	1,08	50,00%	Sì
Area Euro Beta 1	-0,01%	4,73%	-0,33	4,71	13,38	0,87%	No
Area Euro Beta 2	0,80%	3,93%	-0,48	3,63	5,31	5,17%	Sì
Area Euro Beta 3	0,60%	4,52%	-0,31	3,36	2,09	25,94%	Sì
Area Euro Beta 4	0,43%	5,77%	-0,24	5,58	27,68	0,15%	No
Area Euro Beta 5	0,94%	5,91%	0,01	4,68	11,31	1,24%	No
Area Euro Beta 6	0,66%	7,03%	0,56	7,81	97,52	0,10%	No
Area Euro Beta 7	0,57%	6,76%	0,55	6,12	43,92	0,10%	No
Area Euro Beta 8	0,59%	8,21%	-0,09	5,87	33,18	0,10%	No
Area Euro Beta 9	0,94%	9,75%	0,28	6,60	52,98	0,10%	No
Area Euro Beta 10	0,29%	11,08%	-0,28	10,66	236,19	0,10%	No
Italia Beta 1	0,11%	3,77%	-0,41	4,01	6,75	3,38%	No
Italia Beta 2	0,25%	4,90%	-0,96	4,80	27,62	0,15%	No
Italia Beta 3	0,40%	5,20%	-0,38	5,52	27,77	0,15%	No
Italia Beta 4	0,34%	5,25%	-0,84	4,75	23,63	0,23%	No
Italia Beta 5	0,26%	5,94%	-0,04	4,32	7,04	3,14%	No
Italia Beta 6	0,14%	5,93%	-0,42	4,90	17,35	0,48%	No
Italia Beta 7	0,44%	6,97%	0,16	5,69	29,40	0,13%	No
Italia Beta 8	0,49%	6,60%	-0,25	4,80	13,92	0,79%	No
Italia Beta 9	0,16%	6,96%	-0,28	5,75	31,44	0,11%	No
Italia Beta 10	0,71%	8,89%	0,55	7,47	84,76	0,10%	No

(1) Arrotondato a 0,10% da Matlab se tendente a zero.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Le tabelle da 4 a 7, che rappresentano le statistiche descrittive sia degli indici sottoposti ad analisi sia dei portafogli sintetici, evidenziano una spiccata non-normalità dei rendimenti (con un livello di significatività del 5%). Di fatto, solamente due portafogli *beta-sorted* dell'Area Euro e uno statunitense non si discostano dalla gaussiana.

Alla luce di questa misurazione, si ritiene che risulterà particolarmente significativo il *test* GMM: in quanto estraneo all'ipotesi di normalità, sarà utilizzato come metro di valutazione della sensibilità degli altri *test* in condizioni statistiche differenti da quelle per le quali erano stati concepiti.

Il *test* GRS è stato utilizzato nella notazione originaria, anziché nella sua scomposizione in *Sharpe ratio* e *appraisal ratio*, in quanto quest'ultima risulta troppo distorta in presenza di correlazioni tra i residui.

La seconda delle prove condotte è stata il *test* di Wald, realizzato attraverso la tecnica euristica del *bootstrap* al fine di costruire una distribuzione empirica che consenta di superare le problematiche relative a campioni di dimensione finita. Sono quindi stati simulati 10.000 scenari per ogni gruppo di Q portafogli *beta-sorted* corrispondente a ciascun indice sottoposto a valutazione tramite il ricorso ad una procedura identica a quella esposta nel paragrafo 2.4, eccezion fatta per la durata b dei blocchi, che in questo caso è posta pari ad uno.⁸¹ In ognuno degli scenari è stato calcolato il valore assunto dalla statistica WT^* e confrontato con WT , ottenuto con le serie storiche originarie. Il *p-value* è risultato quindi pari al numero di WT^* superiori a WT , diviso per 10.000.

A differenza degli altri *test*, quello proposto da Kandel e Stambaugh non richiede che il campione si mantenga entro determinati vincoli di numerosità, sia con riguardo ai componenti, sia alle durate. Ciò nonostante si è deciso di impiegare nella costruzione della frontiera efficiente *resampled* non i singoli componenti degli indici, bensì, anche in questo caso, i dieci portafogli *beta-sorted*. La scelta è stata dettata sia da ragioni di coerenza con gli altri indicatori di efficienza qui utilizzati sia per motivi statistici. Il raggruppamento in portafogli, infatti, consente di limitare l'impatto di rendimenti *outlier*, riducendo quindi il ben noto fenomeno di *error maximization* tipico dell'approccio di Markowitz, già parzialmente compensato grazie all'uso del *resampling*. In dettaglio, quest'ultima procedura è stata applicata compiendo i seguenti *step*:

⁸¹ Si tratta, in altri termini, di un *bootstrap* tradizionale, non di un *block bootstrap*. Il *test* di Wald, infatti, presume che i residui siano indipendentemente e identicamente distribuiti: la presenza di correlazione seriale e quindi la necessità di ricorrere a blocchi di durata maggiore di uno sono escluse *a priori* dal modello.

- in 10.000 scenari, ciascuno composto da 96 periodi, sono stati simulati congiuntamente gli extrarendimenti mensili dei dieci portafogli *beta-sorted* e di tutti gli indici appartenenti al medesimo mercato azionario;
- in ogni scenario e per ciascun indice p -esimo sono state calcolate le frontiere efficienti composte dai dieci portafogli *beta-sorted* e da un singolo indice alla volta;
- per ogni indice è stata calcolata la frontiera *resampled* e, tramite un'interpolazione *cubic spline*, è stato individuato il corrispondente portafoglio efficiente x ;
- infine per ogni indice è stato calcolato il valore di ψ_p .

Nel *test* GMM è stato seguito il seguente approccio: in sostituzione della valutazione del valore della statistica del *test* basata sulla sua distribuzione asintotica si è fatto ricorso alla distribuzione empirica stimata tramite *block bootstrap* di 10.000 scenari, utilizzando blocchi di lunghezza unitaria pari a sei periodi. Questa durata è stata definita sulla base dell'analisi dell'autocorrelazione degli extrarendimenti degli indici azionari selezionati: nella grande maggioranza dei casi (47 su 51 indici), infatti, l'autocorrelazione è significativa solo fino al quarto *lag* temporale, mentre dall'undicesimo in poi non sono mai significative (si vedano le tabelle da 8 a 10).

L'uso di blocchi di sei periodi è infatti un compromesso che consente di catturare, all'interno di ciascun blocco, l'autocorrelazione:

- del primo ordine in cinque periodi su sei;
- del quarto ordine in due periodi su sei.

Al fine di modellare anche l'autocorrelazione di sesto ordine presente solamente in 21 indici statunitensi sarebbe stato necessario utilizzare blocchi di durata pari almeno a 7 periodi, ma il loro allungamento avrebbe ridotto il numero di combinazioni possibili e si sarebbe discostato ancor più sensibilmente dagli esempi di *block bootstrap* presenti in letteratura.⁸²

⁸² In Chou, Zhou (2006) i periodi utilizzati sono pari a tre, ma la logica sottostante tale scelta non è argomentata dagli autori.

Tabella 8: Autocorrelazione degli extrarendimenti degli indici statunitensi

Indice	Lag temporali									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DJ Composite Average PR	0,20	-0,06	0,13	<u>0,27</u>	-0,02	<u>-0,24</u>	0,05	0,12	<u>-0,21</u>	<u>-0,21</u>
DJ Composite Average TR	<u>0,21</u>	-0,06	0,13	<u>0,27</u>	-0,02	<u>-0,24</u>	0,05	0,12	<u>-0,21</u>	<u>-0,21</u>
DJ Industrial Average PR	0,19	-0,06	0,14	<u>0,29</u>	0,00	-0,19	0,04	0,16	<u>-0,22</u>	-0,20
DJ Industrial Average TR	0,19	-0,06	0,13	<u>0,30</u>	0,00	-0,19	0,04	0,17	<u>-0,22</u>	<u>-0,20</u>
MSCI USA GR	<u>0,26</u>	-0,02	0,13	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,22</u>	0,03	0,12	-0,15	-0,14
MSCI USA NR	<u>0,26</u>	-0,02	0,13	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,22</u>	0,03	0,12	-0,15	-0,14
MSCI USA PR	<u>0,26</u>	-0,02	0,14	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,22</u>	0,03	0,12	-0,14	-0,14
Russell 1000 CEW TR	<u>0,26</u>	-0,10	0,15	<u>0,27</u>	-0,09	<u>-0,34</u>	0,04	0,14	-0,12	-0,16
Russell 1000 SEW NR	<u>0,28</u>	-0,05	0,12	<u>0,21</u>	-0,07	<u>-0,31</u>	0,01	0,12	-0,12	-0,13
Russell 1000 SEW PR	<u>0,28</u>	-0,05	0,12	<u>0,21</u>	-0,07	<u>-0,31</u>	0,01	0,12	-0,12	-0,13
Russell 1000 SEW TR	<u>0,28</u>	-0,05	0,12	<u>0,21</u>	-0,07	<u>-0,31</u>	0,01	0,12	-0,12	-0,13
Russell 1000 PR	<u>0,27</u>	-0,02	0,14	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,23</u>	0,04	0,12	-0,14	-0,14
Russell 1000 TR	<u>0,27</u>	-0,02	0,14	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,24</u>	0,04	0,12	-0,14	-0,14
Russell 3000 CEW TR	0,20	-0,10	0,11	0,16	-0,12	<u>-0,33</u>	0,04	0,16	-0,03	-0,13
Russell 3000 PR	<u>0,26</u>	-0,03	0,14	<u>0,22</u>	-0,04	<u>-0,24</u>	0,04	0,13	-0,13	-0,13
Russell 3000 TR	<u>0,26</u>	-0,03	0,14	<u>0,22</u>	-0,04	<u>-0,24</u>	0,04	0,13	-0,13	-0,14
S&P 500 Equal Weighted TR	<u>0,28</u>	-0,07	0,13	<u>0,25</u>	-0,05	<u>-0,29</u>	0,04	0,15	-0,12	-0,15
S&P 500 NR	<u>0,26</u>	-0,03	0,13	<u>0,24</u>	-0,03	<u>-0,22</u>	0,03	0,13	-0,15	-0,14
S&P 500 PR	<u>0,26</u>	-0,02	0,14	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,22</u>	0,03	0,13	-0,15	-0,14
S&P 500 TR	<u>0,26</u>	-0,03	0,13	<u>0,23</u>	-0,03	<u>-0,22</u>	0,03	0,13	-0,15	-0,14
Value Line New Arithmetic PR	<u>0,22</u>	-0,07	0,13	0,19	-0,08	<u>-0,32</u>	0,04	0,15	-0,08	-0,14
Wilshire 5000 Equal Weight PR	<u>0,34</u>	0,08	0,17	0,16	0,04	-0,16	-0,03	0,11	-0,03	-0,11
Wilshire 5000 Total Market PR	<u>0,26</u>	-0,02	0,14	<u>0,21</u>	-0,04	<u>-0,23</u>	0,04	0,12	-0,13	-0,13
Wilshire 5000 Total Market TR	<u>0,26</u>	-0,02	0,14	<u>0,21</u>	-0,04	<u>-0,24</u>	0,04	0,12	-0,13	-0,13
Numero di autocorrelazioni significative	20	0	0	21	0	21	0	0	4	3

Le autocorrelazioni statisticamente significative (confidenza del 95%) sono sottolineate.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 9: Autocorrelazione degli extrarendimenti degli indici dell'Area Euro

Indice	Lag temporali									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
EURO STOXX 50 GR	0,16	-0,07	0,09	<u>0,25</u>	-0,05	-0,12	0,05	0,12	-0,11	-0,17
EURO STOXX 50 NR	0,15	-0,07	0,09	<u>0,26</u>	-0,05	-0,11	0,05	0,13	-0,11	-0,17
EURO STOXX 50 PR	0,15	-0,08	0,11	<u>0,27</u>	-0,05	-0,10	0,05	0,14	-0,10	-0,18
EURO STOXX 50 EW NR	0,19	-0,13	0,11	0,17	0,02	-0,16	-0,04	-0,01	-0,12	-0,15
EURO STOXX 50 EW PR	0,14	-0,11	0,11	<u>0,26</u>	-0,05	-0,12	0,03	0,14	-0,07	-0,20
EURO STOXX GR	0,20	-0,05	0,14	<u>0,27</u>	-0,04	-0,10	0,03	0,12	-0,09	-0,18
EURO STOXX NR	0,20	-0,05	0,14	<u>0,28</u>	-0,03	-0,10	0,03	0,13	-0,08	-0,18
EURO STOXX PR	0,20	-0,05	0,15	<u>0,29</u>	-0,03	-0,08	0,04	0,13	-0,07	-0,18
FTSEurofirst 80 TR	0,17	-0,06	0,10	<u>0,27</u>	-0,05	-0,12	0,04	0,12	-0,11	-0,18
FTSEurofirst 300 Eurozone PR	0,19	-0,05	0,14	<u>0,28</u>	-0,04	-0,09	0,04	0,13	-0,08	-0,18
MSCI EMU GR	0,20	-0,04	0,13	<u>0,27</u>	-0,04	-0,10	0,03	0,13	-0,09	-0,17
MSCI EMU NR	0,20	-0,04	0,14	<u>0,28</u>	-0,04	-0,10	0,03	0,13	-0,09	-0,17
MSCI EMU PR	0,19	-0,04	0,15	<u>0,29</u>	-0,03	-0,09	0,04	0,13	-0,08	-0,18
S&P Euro PR	0,18	-0,05	0,15	<u>0,29</u>	-0,04	-0,08	0,04	0,13	-0,08	-0,18
S&P Euro TR	0,19	-0,05	0,13	<u>0,28</u>	-0,04	-0,10	0,04	0,13	-0,10	-0,17
Numero di autocorrelazioni significative	0	0	0	14	0	0	0	0	0	0

Le autocorrelazioni statisticamente significative (confidenza del 95%) sono sottolineate.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 10: Autocorrelazione degli extrarendimenti degli indici italiani

Indice	Lag temporali									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Comit Globale	0,13	-0,05	0,18	<u>0,24</u>	0,02	-0,07	0,00	0,11	-0,02	-0,19
Comit Performance	0,14	-0,05	0,17	<u>0,23</u>	0,01	-0,07	0,01	0,09	-0,02	-0,18
Fideuram Azionari Italia TR	0,17	0,01	0,20	<u>0,22</u>	-0,01	-0,05	0,03	0,09	-0,03	-0,16
FTSE Italia AllShare PR	0,14	-0,07	0,20	<u>0,27</u>	-0,01	-0,09	0,02	0,12	-0,05	-0,18
FTSE Italia AllShare TR	0,15	-0,06	0,19	<u>0,25</u>	-0,02	-0,10	0,02	0,10	-0,06	-0,18
FTSE Italia MIB Storico PR	0,12	-0,05	0,18	<u>0,25</u>	0,01	-0,07	0,01	0,11	-0,02	-0,19
FTSE Italia MIB Storico TR	0,14	-0,04	0,17	<u>0,23</u>	0,00	-0,08	0,01	0,08	-0,03	-0,18
FTSE MIB PR	0,13	-0,11	<u>0,21</u>	<u>0,28</u>	-0,02	-0,12	0,02	0,12	-0,08	-0,20
FTSE MIB TR	0,14	-0,10	0,19	<u>0,26</u>	-0,03	-0,12	0,02	0,10	-0,09	-0,19
MSCI Italy GR	0,13	-0,08	0,19	<u>0,24</u>	0,00	-0,08	0,04	0,10	-0,07	-0,19
MSCI Italy NR	0,13	-0,08	0,19	<u>0,25</u>	0,00	-0,08	0,04	0,11	-0,07	-0,19
MSCI Italy PR	0,12	-0,09	<u>0,21</u>	<u>0,26</u>	0,00	-0,08	0,03	0,12	-0,05	-0,20
Numero di autocorrelazioni significative	0	0	2	12	0	0	0	0	0	0

Le autocorrelazioni statisticamente significative (confidenza del 95%) sono sottolineate.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

3.4. I risultati dell'analisi empirica

La valutazione dell'efficienza degli indici del mercato azionario tramite *test* molto diversi, sia come impostazione teorica sia come costruzione dei campioni (serie storiche contro serie ricampionate), ha portato a risultati sostanzialmente concordi e utili sia per finalità di ordine pratico, quale l'individuazione dei *benchmark* ottimali, sia di tipo teorico, distinguendo nettamente tra loro le diverse tecniche di costruzione degli indici.

Le tabelle da 11 a 13 rappresentano, rispettivamente nelle *asset class* azionarie USA, Area Euro e Italia, i valori assunti dalle statistiche dei diversi *test* e, ove disponibile, il livello percentuale del *p-value*, ossia della probabilità che non si possa rigettare l'ipotesi di efficienza di ciascun indice.

Tabella 11: Livello di efficienza degli indici statunitensi

Indice	Kandel e Stambaugh	GRS		Wald		GMM	
		GRS	p-value	WT	p-value (1)	J1	p-value (1)
DJ Composite Average PR	0,4896	0,7882	95,49%	8,9019	93,09%	8,4437	59,22%
DJ Composite Average TR	0,9363	0,7969	95,42%	9,0008	95,80%	8,6592	60,65%
DJ Industrial Average PR	-0,0472	0,8725	94,80%	9,8545	84,78%	9,6189	57,34%
DJ Industrial Average TR	0,4929	0,7926	95,45%	8,9523	92,68%	8,5761	65,76%
MSCI USA GR	0,4971	0,7962	95,42%	8,9918	92,21%	8,3761	86,59%
MSCI USA NR	0,3779	0,8053	95,35%	9,0953	92,66%	8,5220	82,51%
MSCI USA PR	0,0909	0,8494	94,98%	9,5935	90,20%	9,1762	81,50%
Russell 1000 CEW TR	0,8838	0,7650	95,69%	8,6395	96,04%	8,1204	93,10%
Russell 1000 SEW NR	0,9667	0,8010	95,38%	9,0471	96,75%	9,0581	91,02%
Russell 1000 SEW PR	0,9105	0,7802	95,56%	8,8122	96,23%	8,4511	92,35%
Russell 1000 SEW TR	0,9843	0,8128	95,28%	9,1798	97,36%	9,3989	89,20%
Russell 1000 PR	0,1612	0,8370	95,08%	9,4536	90,39%	8,9910	81,90%
Russell 1000 TR	0,5505	0,7948	95,43%	8,9762	93,79%	8,3464	86,72%
Russell 3000 CEW TR	0,8638	0,7665	95,67%	8,6572	95,33%	7,9410	93,91%
Russell 3000 PR	0,2262	0,8280	95,16%	9,3516	89,89%	8,8369	83,67%
Russell 3000 TR	0,5891	0,7936	95,44%	8,9629	94,08%	8,3128	87,47%
S&P 500 Equal Weighted TR	0,8341	0,7854	95,51%	8,8704	96,64%	8,4389	91,91%
S&P 500 NR	0,3288	0,8104	95,30%	9,1529	90,88%	8,6104	81,56%
S&P 500 PR	0,0403	0,8593	94,90%	9,7055	88,71%	9,3234	78,48%
S&P 500 TR	0,4535	0,7987	95,40%	9,0205	92,89%	8,4266	84,42%
Value Line New Arithmetic PR	0,9334	0,8272	95,17%	9,3427	96,67%	9,5587	93,45%
Wilshire 5000 Equal Weight PR	0,9687	0,8693	94,82%	9,8181	94,45%	9,3997	88,86%
Wilshire 5000 Total Market PR	0,2925	0,8174	95,25%	9,2322	91,85%	8,6749	82,54%
Wilshire 5000 Total Market TR	0,6333	0,7949	95,43%	8,9778	95,04%	8,3249	86,23%

(1) P-value stimato tramite la simulazione di 10.000 scenari.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 12: Livello di efficienza degli indici dell'Area Euro

Indice	Kandel e Stambaugh	GRS		Wald		GMM	
		GRS	p-value	WT	p-value (1)	J1	p-value (1)
EURO STOXX 50 GR	-0,1769	1,0359	93,54%	11,7001	84,45%	11,9253	46,52%
EURO STOXX 50 NR	-0,2880	1,2282	92,23%	13,8718	76,12%	14,0423	33,94%
EURO STOXX 50 PR	-0,6786	2,0008	88,40%	22,5977	51,76%	22,6221	8,74%
EURO STOXX 50 EW NR	0,1666	0,7281	96,00%	8,2236	90,71%	8,6829	75,04%
EURO STOXX 50 EW PR	-0,3364	1,2819	91,89%	14,4778	74,88%	14,4842	29,67%
EURO STOXX GR	-0,0009	0,7247	96,03%	8,1850	92,74%	8,4055	71,82%
EURO STOXX NR	-0,1026	0,7887	95,49%	8,9075	92,03%	9,0460	70,40%
EURO STOXX PR	-0,4623	1,1754	92,57%	13,2753	74,03%	13,2399	36,01%
FTSEurofirst 80 TR	-0,1171	0,9100	94,50%	10,2780	88,80%	10,5630	54,28%
FTSEurofirst 300 Eurozone PR	-0,5457	1,3676	91,38%	15,4463	69,31%	15,4468	30,79%
MSCI EMU GR	-0,0426	0,7537	95,78%	8,5126	92,23%	8,6949	71,07%
MSCI EMU NR	-0,1526	0,8392	95,07%	9,4775	90,22%	9,5809	65,26%
MSCI EMU PR	-0,5261	1,2915	91,83%	14,5866	71,97%	14,5407	33,50%
S&P Euro PR	-0,5345	1,3751	91,34%	15,5306	68,40%	15,5419	27,71%
S&P Euro TR	-0,0580	0,7794	95,56%	8,8030	91,91%	9,0043	64,94%

(1) P-value stimato tramite la simulazione di 10.000 scenari.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 13: Livello di efficienza degli indici italiani

Indice	Kandel e Stambaugh	GRS		Wald		GMM	
		GRS	p-value	WT	p-value (1)	J1	p-value (1)
Comit Globale	-0,3782	0,7547	95,77%	8,5235	91,54%	8,5280	83,18%
Comit Performance	0,1990	0,3984	98,78%	4,4994	99,18%	4,5025	97,44%
Fideuram Azionari Italia TR	-0,1870	0,6633	96,56%	7,4914	92,53%	7,4909	83,82%
FTSE Italia AllShare PR	-0,4978	0,8375	95,08%	9,4592	88,81%	9,4818	82,15%
FTSE Italia AllShare TR	0,0689	0,4417	98,45%	4,9882	97,94%	4,9748	97,15%
FTSE Italia MIB Storico PR	-0,3948	0,7806	95,55%	8,8166	89,26%	8,8259	84,00%
FTSE Italia MIB Storico TR	0,1766	0,4057	98,73%	4,5819	98,33%	4,5849	96,73%
FTSE MIB PR	-0,5180	0,7836	95,53%	8,8500	89,35%	8,8710	84,73%
FTSE MIB TR	0,0265	0,4462	98,41%	5,0399	97,66%	5,0291	96,31%
MSCI Italy GR	0,0583	0,4292	98,55%	4,8476	98,32%	4,8130	97,66%
MSCI Italy NR	-0,1108	0,4961	98,01%	5,6025	96,01%	5,5880	94,60%
MSCI Italy	-0,5779	0,8036	95,36%	9,0761	87,05%	9,1723	82,99%

(1) P-value stimato tramite la simulazione di 10.000 scenari.

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Si osserva, innanzitutto, che nella finestra temporale considerata, caratterizzata da una crescita generalizzata dei corsi azionari seguita da un periodo di forte turbolenza, tutti gli indici risultano essere efficienti. Inoltre, la grande maggioranza degli indici mostra livelli di *p-value* superiori al 90% in almeno uno degli indicatori. Accanto a questo giudizio complessivo risulta però maggiormente

utile analizzare i *ranking* conseguiti utilizzando i risultati dei quattro *test*, elencati nelle tabelle 14, 15 e 16. Tramite tali classifiche, è possibile stabilire quali siano gli indici di più elevata efficienza e quindi maggiormente meritevoli di essere oggetto di investimenti passivi.

Tabella 14: Classifica dell'efficienza degli indici statunitensi

Indice	Kandel e	GRS	Wald	GMM
DJ Composite Average PR	15	5	13	23
DJ Composite Average TR	4	11	7	22
DJ Industrial Average PR	24	24	24	24
DJ Industrial Average TR	14	6	15	21
MSCI USA GR	13	10	17	11
MSCI USA NR	17	14	16	16
MSCI USA PR	22	21	21	19
Russell 1000 CEW TR	7	1	6	3
Russell 1000 SEW NR	3	13	2	6
Russell 1000 SEW PR	6	3	5	4
Russell 1000 SEW TR	1	16	1	7
Russell 1000 PR	21	20	20	17
Russell 1000 TR	12	8	12	10
Russell 3000 CEW TR	8	2	8	1
Russell 3000 PR	20	19	22	14
Russell 3000 TR	11	7	11	9
S&P 500 Equal Weighted TR	9	4	4	5
S&P 500 NR	18	15	19	18
S&P 500 PR	23	22	23	20
S&P 500 TR	16	12	14	13
Value Line New Arithmetic PR	5	18	3	2
Wilshire 5000 Equal Weight PR	2	23	10	8
Wilshire 5000 Total Market PR	19	17	18	15
Wilshire 5000 Total Market TR	10	9	9	12

Fonte: Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Tabella 15: Classifica dell'efficienza degli indici dell'Area Euro

Indice	Kandel e Stambaugh	GRS	Wald	GMM
EURO STOXX 50 GR	8	8	8	8
EURO STOXX 50 NR	9	10	9	10
EURO STOXX 50 PR	15	15	15	15
EURO STOXX 50 EW NR	1	2	5	1
EURO STOXX 50 EW PR	10	11	10	13
EURO STOXX GR	2	1	1	2
EURO STOXX NR	5	5	3	4
EURO STOXX PR	11	9	11	9
FTSEurofirst 80 TR	6	7	7	7
FTSEurofirst 300 Eurozone PR	14	13	13	12
MSCI EMU GR	3	3	2	3
MSCI EMU NR	7	6	6	5
MSCI EMU PR	12	12	12	11
S&P Euro PR	13	14	14	14
S&P Euro TR	4	4	4	6

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010

Tabella 16: Classifica dell'efficienza degli indici italiani

Indice	Kandel e Stambaugh	GRS	Wald	GMM
Comit Globale	8	8	8	10
Comit Performance	1	1	1	2
Fideuram Azionari Italia TR	7	7	7	9
FTSE Italia AllShare PR	10	12	11	12
FTSE Italia AllShare TR	3	4	4	3
FTSE Italia MIB Storico PR	9	9	10	8
FTSE Italia MIB Storico TR	2	2	2	4
FTSE MIB PR	11	10	9	7
FTSE MIB TR	5	5	5	5
MSCI Italy GR	4	3	3	1
MSCI Italy NR	6	6	6	6
MSCI Italy PR	12	11	12	11

Fonte: elaborazione dell'autore su rendimenti mensili, gennaio 2003 - dicembre 2010.

Prima di formulare conclusioni riguardo agli indici, è utile osservare l'andamento delle classifiche ottenute con i diversi indicatori di efficienza tramite l'utilizzo del coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman (tabella 17).⁸³ Nel confronto fra le tre *asset class* risaltano alcune anomalie nelle correlazioni

⁸³ Si tratta, di fatto, del noto coefficiente di correlazione di Pearson, ma applicato a serie di dati ordinali. L'interpretazione dei valori assunti da questi due coefficienti è quindi la medesima.

nell'azionario statunitense. Mentre infatti nell'Area Euro e in Italia gli indici sono classificati in modo sostanzialmente concorde da parte di tutte e quattro le misure utilizzate, negli Stati Uniti solo i *test* di Wald e di Kandel e Stambaugh consentono una valutazione pressoché univoca dei *benchmark*. Al contrario, il *test* GMM ordina i portafogli analizzati secondo una classifica parzialmente distinta dalle altre e, rispetto al *test* GRS, con correlazione molto limitata.

Tabella 17: Correlazione di Spearman degli indicatori di efficienza

Stati Uniti				
	K&S	GRS	Wald	GMM
K&S	1,0000			
GRS	0,4183	1,0000		
Wald	0,9391	0,5296	1,0000	
GMM	0,6852	0,4061	0,7270	1,0000
Area Euro				
	K&S	GRS	Wald	GMM
K&S	1,0000			
GRS	0,9786	1,0000		
Wald	0,9536	0,9643	1,0000	
GMM	0,9464	0,9750	0,9286	1,0000
Italia				
	K&S	GRS	Wald	GMM
K&S	1,0000			
GRS	0,9720	1,0000		
Wald	0,9720	0,9860	1,0000	
GMM	0,8462	0,9021	0,9021	1,0000

Fonte: elaborazione dell'autore.

Le cause di queste differenze fra i tre mercati azionari non sono di agevole esplicazione, ma è possibile avanzare alcune ipotesi. Si può infatti osservare, tramite il *p-value* medio del *test* di Jarque-Bera, che gli indici statunitensi sono caratterizzati da una deviazione dalla gaussiana più forte rispetto agli altri: 0,28% contro 1,51% dell'Area Euro e dell'Italia (tabelle 4-6). Questo fatto comporta certamente una più limitata validità di *test* fondati sull'ipotesi di normalità, *in primis* il GRS. Inoltre, come già esposto, la presenza di significative autocorrelazioni di sesto, nono e persino decimo ordine (tabella 8) genera

problematiche nella costruzione di simulazioni, siano esse Monte Carlo o *block bootstrap*, non superabili con le serie storiche di dati disponibili, necessariamente limitate nel tempo.

Focalizzando l'attenzione sui valori assunti dai *p-value* del *test* GRS sul mercato azionario americano, si nota immediatamente una sua capacità discriminante molto limitata. I *p-value*, ancor più di quanto avvenga nelle altre *asset class*, si collocano tutti attorno alla medesima percentuale (ovvero ~95%), comportando una classificazione degli indici sulla base di scostamenti di pochi decimi di punto. Si può quindi ipotizzare che, date le dimensioni dei *test* (numero di *asset* e durata delle serie storiche) costanti per tutti gli indici di ogni area geografica, la ragione di questa inconsistenza del GRS nel solo caso statunitense sia da attribuire alla netta non-normalità riscontrata soprattutto in quel mercato.

La prossimità dei valori assunti dalla statistica del *test* di Wald e del *test* GMM tradisce la comune origine, pur con alcuni scostamenti derivanti dalla correzione per la non-normalità apportata da quest'ultimo. Peraltro, il ricorso nel *test* GMM al *block bootstrap* in luogo del comune *bootstrap*, utilizzato invece per il Wald, ha permesso di simulare scenari nettamente più realistici, con una più forte discriminazione tra i diversi livelli di *p-value*.

Dopo aver osservato le caratteristiche degli indicatori, è ora il momento di valutare l'efficienza dei singoli indici. Poiché i *test* utilizzati sono stati quattro, non è possibile avere la certezza *a priori* di esser sempre in grado di pervenire ad un giudizio univoco. Al fine, quindi, di costruire una classifica unitaria e non più suddivisa in *test* distinti è possibile procedere con un approccio di analisi multicriterio, tipico della teoria delle decisioni, quale il PROMETHEE.⁸⁴ Si tratta di una procedura di aggregazione valutativa tramite la quale è possibile costruire una classificazione sintetica partendo da più *ranking* differenti.

In primo luogo, si effettuano una serie di comparazioni tra coppie di indici, utilizzando una semplice funzione di preferenza $P_k(i,j)$, definita come:

⁸⁴ Preference Ranking Organization Method for Enrichment of Evaluations. Esposto per la prima volta in Brans (1982).

$$P_k(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } d_k \leq 0 \\ 1 & \text{se } d_k > 0 \end{cases}$$

con:

k : criterio di classificazione;

i, j : coppia di indici del mercato azionario;

d_k : differenza tra il valore assunto dal criterio k in i e in j .

In termini meno formali, la funzione di preferenza assume valore uno se l'indice i è più efficiente dell'indice j secondo il k -esimo indicatore utilizzato, zero nel caso opposto. Il grado di preferenza multicriterio per ciascuna coppia i, j è pari alla media ponderata delle funzioni di preferenza:

$$\pi(i, j) = \sum_{k=1}^K P_k(i, j) w_k$$

Nella presente trattazione, K è pari a quattro, ovvero i tre *test* GRS, Wald e GMM e la misura di Kandel e Stambaugh. Appare evidente che il valore assunto da $\pi(i, j)$ sia fortemente influenzato dai pesi w_k .

Per giungere ad una classificazione complessiva è, infine, necessario superare l'approccio comparativo a coppie, costruendo una misura unitaria del grado di dominanza dell'efficienza di ogni indice i -esimo rispetto a tutti gli altri. A tal fine si ricorre al flusso netto di dominanza $\phi(i) = \phi^+(i) - \phi^-(i)$, ove con $\phi^+(i)$ e $\phi^-(i)$ si indicano rispettivamente la somma dei gradi di preferenza di i rispetto a ciascuno degli altri indici e la somma dei gradi di preferenza di ognuno degli altri indici rispetto a i , definiti come:

$$\phi^+(i) = \frac{1}{I-1} \sum_{\forall j \neq i} \pi(i, j)$$

$$\phi^-(i) = \frac{1}{I-1} \sum_{\forall j \neq i} \pi(j, i)$$

con I : numero complessivo di indici oggetto di valutazione.

Il flusso netto di dominanza ha come dominio l'intervallo $[-1, +1]$, indicando nel primo caso una collocazione dell'indice azionario in posizione comparativamente inefficiente rispetto a tutti gli altri indici, mentre nel secondo caso collocandolo ad un grado di efficienza massimo all'interno del campione analizzato.

Tabella 18: Flussi di dominanza delle misure di efficienza degli indici statunitensi

Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	$\varphi^+(i)$	$\varphi(i)$	
1 DJ Composite Average PR	0,00	0,25	1,00	0,50	0,50	0,75	0,75	0,00	0,25	0,00	0,25	0,75	0,25	0,00	0,75	0,25	0,00	0,75	0,75	0,75	0,25	0,25	0,75	0,25	0,43	-0,13	
2 DJ Composite Average TR	0,75	0,00	1,00	0,50	0,50	0,75	0,75	0,25	0,25	0,25	0,25	0,75	0,50	0,50	0,75	0,50	0,25	0,75	0,75	0,75	0,50	0,50	0,75	0,50	0,57	0,13	
3 DJ Industrial Average PR	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00
4 DJ Industrial Average TR	0,50	0,50	1,00	0,00	0,50	0,75	0,75	0,00	0,25	0,00	0,25	0,75	0,25	0,00	0,75	0,25	0,00	0,75	0,75	0,50	0,25	0,25	0,75	0,25	0,43	-0,13	
5 MSCI USA GR	0,50	0,50	1,00	0,50	0,00	0,75	1,00	0,00	0,25	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,75	0,25	0,25	1,00	0,25	0,49	-0,02	
6 MSCI USA NR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,25	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,25	0,25	0,75	0,00	0,36	-0,28	
7 MSCI USA PR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,14	-0,72	
8 Russell 1000 CEW TR	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,50	0,50	0,50	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	0,25	0,75	1,00	1,00	0,86	0,72	
9 Russell 1000 SEW NR	0,75	0,75	1,00	0,75	0,75	1,00	1,00	0,50	0,00	0,50	0,50	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50	1,00	1,00	0,75	0,75	0,75	1,00	0,75	0,78	0,57	
10 Russell 1000 SEW PR	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,50	0,50	0,00	0,50	1,00	1,00	0,50	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	0,25	0,75	1,00	1,00	0,85	0,70	
11 Russell 1000 SEW TR	0,75	0,75	1,00	0,75	0,75	1,00	1,00	0,50	0,50	0,00	0,50	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,50	0,75	1,00	0,75	0,75	1,00	1,00	0,75	0,77	0,54	
12 Russell 1000 PR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,20	-0,61	
13 Russell 1000 TR	0,75	0,50	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	0,00	0,25	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,25	0,25	1,00	0,50	0,59	0,17	
14 Russell 3000 CEW TR	1,00	0,50	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,25	0,50	0,50	0,50	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	0,50	0,75	1,00	1,00	0,84	0,67	
15 Russell 3000 PR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00	0,25	0,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	0,25	0,25	0,00	0,23	-0,54	
16 Russell 3000 TR	0,75	0,50	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	0,00	0,25	0,00	0,25	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,25	0,25	1,00	0,50	0,63	0,26	
17 S&P 500 Equal Weighted TR	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,25	0,50	0,25	0,50	1,00	1,00	0,25	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,25	0,75	1,00	1,00	0,80	0,61	
18 S&P 500 NR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,75	0,00	0,00	0,75	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,25	0,25	0,50	0,00	0,28	-0,43	
19 S&P 500 PR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,09	-0,83	
20 S&P 500 TR	0,25	0,25	1,00	0,50	0,25	1,00	1,00	0,00	0,25	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,25	0,25	1,00	0,00	0,45	-0,11	
21 Value Line New Arithmetic PR	0,75	0,50	1,00	0,75	0,75	0,75	1,00	0,75	0,25	0,75	0,25	1,00	0,75	0,50	1,00	0,75	0,75	0,75	1,00	0,75	0,00	0,75	0,75	0,75	0,75	0,74	0,48
22 Wilshire 5000 Equal Weight PR	0,75	0,50	1,00	0,75	0,75	0,75	0,75	0,25	0,25	0,25	0,00	0,75	0,75	0,25	0,75	0,75	0,25	0,75	0,75	0,75	0,25	0,00	0,75	0,50	0,58	0,15	
23 Wilshire 5000 Total Market PR	0,25	0,25	1,00	0,25	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,00	0,50	1,00	0,00	0,25	0,25	0,00	0,00	0,29	-0,41	
24 Wilshire 5000 Total Market TR	0,75	0,50	1,00	0,75	0,75	1,00	1,00	0,00	0,25	0,00	0,25	1,00	0,50	0,00	1,00	0,50	0,00	1,00	1,00	1,00	0,25	0,50	1,00	0,00	0,61	0,22	
Flusso negativo di dominanza $\phi^-(i)$	0,57	0,43	1,00	0,57	0,51	0,64	0,86	0,14	0,22	0,15	0,23	0,80	0,41	0,16	0,77	0,37	0,20	0,72	0,91	0,55	0,26	0,42	0,71	0,39			

Fonte: elaborazione dell'autore.

Tabella 19: Flussi di dominanza delle misure di efficienza degli indici dell'Area Euro

Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\varphi^+(i)$	$\varphi(i)$
1 EURO STOXX 50 GR	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,50	0,00
2 EURO STOXX 50 NR	0,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,50	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,39	-0,21
3 EURO STOXX 50 PR	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00
4 EURO STOXX 50 EW NR	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,50	0,75	1,00	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	1,00	0,75	0,91	0,82
5 EURO STOXX 50 EW PR	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	0,75	0,00	0,00	0,75	1,00	0,00	0,29	-0,43
6 EURO STOXX GR	1,00	1,00	1,00	0,50	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,96	0,93
7 EURO STOXX NR	1,00	1,00	1,00	0,25	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,50	0,77	0,54
8 EURO STOXX PR	0,00	0,50	1,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,36	-0,29
9 FTSEurofirst 80 TR	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,25	1,00	1,00	0,00	0,59	0,18
10 FTSEurofirst 300 Eurozone PR	0,00	0,00	1,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,00	0,14	-0,71
11 MSCI EMU GR	1,00	1,00	1,00	0,25	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,88	0,75
12 MSCI EMU NR	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,75	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,25	0,64	0,29
13 MSCI EMU PR	0,00	0,00	1,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,23	-0,54
14 S&P Euro PR	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	-0,82
15 S&P Euro TR	1,00	1,00	1,00	0,25	1,00	0,00	0,50	1,00	1,00	1,00	0,00	0,75	1,00	1,00	0,00	0,75	0,50
Flusso negativo di dominanza $\phi^-(i)$	0,50	0,61	1,00	0,09	0,71	0,04	0,23	0,64	0,41	0,86	0,13	0,36	0,77	0,91	0,25		

Fonte: elaborazione dell'autore.

Tabella 20: Flussi di dominanza delle misure di efficienza degli indici italiani

Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	13	14	15	$\phi^+(i)$	$\phi(i)$
1 Comit Globale	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,75	0,00	0,75	0,00	0,00	0,00	1,00	0,32	-0,36
2 Comit Performance	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	0,98	0,95
3 Fideuram Azionari Italia TR	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,75	0,00	0,75	0,00	0,00	0,00	1,00	0,41	-0,18
4 FTSE Italia AllShare PR	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,00	0,50	0,07	-0,86
5 FTSE Italia AllShare TR	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,25	1,00	1,00	0,25	1,00	1,00	0,77	0,55
6 FTSE Italia MIB Storico PR	0,25	0,00	0,25	1,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	1,00	0,27	-0,45
7 FTSE Italia MIB Storico TR	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75	1,00	0,00	1,00	1,00	0,75	1,00	1,00	0,86	0,73
8 FTSE MIB PR	0,25	0,00	0,25	0,75	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,25	-0,50
9 FTSE MIB TR	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,64	0,27
13 MSCI Italy GR	1,00	0,25	1,00	1,00	0,75	1,00	0,25	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,84	0,68
14 MSCI Italy NR	1,00	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,55	0,09
15 MSCI Italy PR	0,00	0,00	0,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,05	-0,91
Flusso negativo di dominanza $\phi^-(i)$	0,68	0,02	0,59	0,93	0,23	0,73	0,14	0,75	0,36	0,16	0,45	0,95		

Fonte: elaborazione dell'autore.

Tabella 21: Flussi di dominanza delle misure di efficienza, escluso il test GRS, degli indici statunitensi

Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	$\varphi^+(i)$	$\varphi(i)$	
1 DJ Composite Average PR	0,00	0,00	1,00	0,33	0,33	0,67	0,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,67	0,67	0,67	0,00	0,00	0,67	0,00	0,30	-0,39	
2 DJ Composite Average TR	1,00	0,00	1,00	0,67	0,67	0,67	0,67	0,33	0,00	0,33	0,00	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67	0,33	0,67	0,67	0,67	0,33	0,33	0,67	0,67	0,57	0,13	
3 DJ Industrial Average PR	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00
4 DJ Industrial Average TR	0,67	0,33	1,00	0,00	0,33	0,67	0,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,67	0,67	0,33	0,00	0,00	0,67	0,00	0,32	-0,36	
5 MSCI USA GR	0,67	0,33	1,00	0,67	0,00	0,67	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,67	0,00	0,00	1,00	0,33	0,45	-0,10	
6 MSCI USA NR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,33	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,33	-0,33	
7 MSCI USA PR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14	-0,71	
8 Russell 1000 CEW TR	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,33	0,33	0,33	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	0,00	0,67	1,00	1,00	0,81	0,62	
9 Russell 1000 SEW NR	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,67	0,00	0,67	0,33	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	0,67	0,67	1,00	1,00	0,88	0,77	
10 Russell 1000 SEW PR	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,67	0,33	0,00	0,33	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	0,00	0,67	1,00	1,00	0,83	0,65	
11 Russell 1000 SEW TR	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,67	0,67	0,67	0,00	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	0,91	0,83	
12 Russell 1000 PR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33	0,00	0,00	0,33	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	-0,59	
13 Russell 1000 TR	1,00	0,33	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,33	0,55	0,10	
14 Russell 3000 CEW TR	1,00	0,33	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,33	0,33	0,33	0,33	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	0,33	0,67	1,00	1,00	0,80	0,59	
15 Russell 3000 PR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,00	0,33	0,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,33	1,00	0,00	0,00	0,00	0,33	0,00	0,23	-0,54	
16 Russell 3000 TR	1,00	0,33	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,33	0,59	0,19	
17 S&P 500 Equal Weighted TR	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,33	0,33	0,33	0,33	1,00	1,00	0,33	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,67	1,00	1,00	0,78	0,57	
18 S&P 500 NR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,33	0,00	0,25	-0,51	
19 S&P 500 PR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,09	-0,83	
20 S&P 500 TR	0,33	0,33	1,00	0,67	0,33	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,42	-0,16	
21 Value Line New Arithmetic PR	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,33	1,00	0,33	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,67	1,00	1,00	0,90	0,80	
22 Wilshire 5000 Equal Weight PR	1,00	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,33	0,33	0,33	0,00	1,00	1,00	0,33	1,00	1,00	0,33	1,00	1,00	1,00	0,33	0,00	1,00	0,67	0,75	0,51	
23 Wilshire 5000 Total Market PR	0,33	0,33	1,00	0,33	0,00	0,33	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,67	0,00	0,00	0,67	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,29	-0,42	
24 Wilshire 5000 Total Market TR	1,00	0,33	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,67	0,00	1,00	0,67	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	0,33	1,00	0,00	0,59	0,19	
Flusso negativo di dominanza $\phi^-(i)$	0,70	0,43	1,00	0,68	0,55	0,67	0,86	0,19	0,12	0,17	0,09	0,80	0,45	0,20	0,77	0,41	0,22	0,75	0,91	0,58	0,10	0,25	0,71	0,41			

Fonte: elaborazione dell'autore.

Le classifiche così calcolate sono esposte nelle tabelle dalla 18 alla 20. Si evidenzia che i pesi w_k sono stati posti tutti identici (pari quindi a 1/4 ciascuno), al fine di evitare distorsioni derivanti da preferenze arbitrariamente attribuite ad una piuttosto che a un'altra misura di efficienza. Nel solo caso degli indici statunitensi, data la potenza molto limitata del *test* GRS, si è proposta una ulteriore classificazione sulla base solamente delle altre tre prove di efficienza, ciascuna ponderata con $w_k = 1/3$ (tabella 21).

Nelle tre *asset class* azionarie si osservano predominanze nette di specifiche tipologie di indici. La presenza di correlazioni molto forti tra i diversi indicatori di efficienza, già evidenziata in precedenza, ha consentito infatti di stilare classifiche sostanzialmente univoche.

Nell'azionario statunitense gli otto indici di borsa costruiti tramite la tecnica dell'equiponderazione si posizionano nelle prime otto posizioni nel *ranking* di efficienza.⁸⁵ All'interno di questo sottocampione risaltano tra i primi cinque i quattro Russell 1000 Equal Weight.

E' però necessario effettuare una distinzione tra le due tecniche di equiponderazione utilizzate per la loro costruzione da parte della società Russell Investments:

- *constituent equal weight* (CEW);
- *sector equal weight* (SEW).

Il primo segue il comune concetto di equiponderazione, che prevede un peso identico per ogni azione ad ogni data di ribilanciamento. Ad esempio, mentre nel Russell 1000 (indice *float weighted*) le prime 100 società incidono per il 58% della capitalizzazione complessiva, nella versione equiponderata, per definizione, tale percentuale si riduce al 10%.

Al contrario, la tecnica dell'equiponderazione settoriale è stata sviluppata internamente dalla società Russell e attualmente non è impiegata da altri *index provider*. Essa è stata implementata allo scopo di evitare una rappresentazione

⁸⁵ Nella graduatoria inclusiva del *test* GRS il solo Wilshire 5000 Equal Weight PR è superato da indici *value weighted*, nei quali il peso attribuito a ciascun componente è proporzionale alla sua capitalizzazione (*capitalization* o *cap weight*) o al suo flottante (*float weight*). Nel prosieguo dell'analisi si farà comunque sempre riferimento alla classifica ottenuta escludendo il *test* GRS.

distorta dei settori economici (*sector bias*). Di conseguenza, il peso di ciascun titolo viene stabilito tramite due passaggi:

- il mercato azionario è suddiviso in nove settori economici, tutti inclusi nell'indice con lo stesso peso;
- all'interno di ciascun settore le singole azioni sono equiponderate.

Tramite questo procedimento Russell supera la problematica legata all'eccessiva concentrazione in quei settori, quali il *Financial Services* e il *Consumer Discretionary*, che sono rappresentati sui mercati azionari statunitensi da parte di un numero di società particolarmente elevato. La logica sottostante a questo aggiustamento è la seguente: dato che l'allocazione tra settori economici si discosta dall'uniformità negli indici *constituent equal weight* come negli indici *value weight* (tabella 22), è preferibile equiponderare non i singoli titoli, bensì gli aggregati settoriali.

Tabella 22: Composizione settoriale degli indici Russell 1000

Settore	Russell 1000 Capitalization Weighted	Russell 1000 Constituent Equal Weight	Russell 1000 Sector Equal Weight
Consumer Discretionary	12,00%	16,90%	11,11%
Consumer Staples	9,20%	5,60%	11,11%
Energy	11,40%	7,90%	11,11%
Financial Services	15,40%	19,70%	11,11%
Health Care	12,50%	10,00%	11,11%
Materials & Processing	4,30%	7,40%	11,11%
Producer Durables	10,60%	13,10%	11,11%
Technology	17,90%	11,80%	11,11%
Utilities	6,70%	7,60%	11,11%

Fonte: Velvadapu (2011). Dati al 1° gennaio 2010.

I *test* condotti in questo studio consentono di affermare che l'innovazione introdotta da Russell ha portato alla creazione di una nuova classe di indici nettamente più efficiente rispetto alle altre. Va infatti notato che gli indici Russell SEW dominano sempre i CEW, indipendentemente dal trattamento dei proventi distribuiti dai titoli che li compongono. In altri termini, la versione di solo prezzo dell'indice Russell 1000 SEW risulta essere più efficiente rispetto alla versione *total return* lorda del Russell 1000 CEW.

All'interno della tipologia SEW viene rispettata la gerarchia che è comune a tutte le altre famiglie di indici. L'efficienza è infatti la più elevata tra quegli indici *total return*, ovvero "di *performance*", che effettuano il reinvestimento dei proventi al lordo dell'effetto fiscale (*gross total return*).

La riduzione dell'ammontare reinvestibile derivante dall'applicazione delle aliquote gravanti sui redditi di capitale comporta un grado di efficienza inferiore in capo agli indici *net total return*, mentre gli indici di prezzo si posizionano per ultimi. Questo risultato dell'analisi può apparire intuitivo, dato l'incremento di rendimento derivante dai proventi, ma è necessario rilevare che studi precedenti non erano giunti alle medesime conclusioni, valutando come maggiormente efficienti gli indici di prezzo.⁸⁶

Colpisce il fatto che il Russell 3000 CEW TR, sesto nella classifica degli indici USA, raggiunga un livello di efficienza prossimo a quello del Russell 1000 CEW TR, nonostante il primo possa vantare una diversificazione nettamente superiore, sia in termini di numero di componenti sia, come ovvio corollario dell'equiponderazione, come peso percentuale di ciascun titolo.

Il secondo indice per efficienza è il Value Line New Arithmetic PR. Si tratta dell'indice equiponderato dei circa 1.700 titoli che sono oggetto di analisi nel *Value Line Investment Survey*, un *report* periodico, pubblicato da oltre ottanta anni, dedicato all'analisi fondamentale del mercato azionario statunitense.⁸⁷ In questo caso l'elevata efficienza è raggiunta nonostante si tratti di un indice di prezzo. D'altro canto essa è giustificabile dall'ampia diversificazione e dalla

⁸⁶ Basile (2002), pag. 59. La preferenza per gli indici di prezzo è giustificata sulla base dell'accresciuta volatilità degli indici di *performance* derivante dal reinvestimento dei proventi. E' però da notare che il *test* effettuato utilizzava i *price return* dei titoli azionari componenti gli indici, mentre il presente studio si basa sui *total return*.

⁸⁷ Sin dal 30 giugno 1961 la società Value Line calcola il valore anche del Value Line Geometric Index. Nonostante sia, storicamente, il primo indice equiponderato oggetto di ampia diffusione, esso è stato ormai completamente soppiantato dalla sua versione Arithmetic, introdotta nel 1988, a causa delle diverse modalità di calcolo e delle finalità ad esse sottese. Il rendimento giornaliero del primo indice, infatti, è una media geometrica dei rendimenti dei suoi componenti, non aritmetica come invece avviene nell'altro indice equiponderato. La scelta di questa statistica, solitamente impiegata in calcoli *time series* e non, come in questo caso, *cross section*, si spiega con la decisione di concepire tale indice come un indicatore rappresentativo del rendimento mediano dei suoi componenti, dato che media geometrica e mediana coincidono in presenza di log-normalità. Va infatti ricordato che prima dell'utilizzo di programmi informatici per la statistica la stima della mediana era molto più gravosa rispetto al calcolo della media geometrica.

potenziale presenza di *selection bias* derivante dal metodo di selezione dei titoli da includere, fatto quest'ultimo che priva l'indice delle caratteristiche di oggettività tipiche di un buon *benchmark*.

Lo Standard & Poor's 500 Equal Weight TR risulta essere il settimo indice più efficiente. Il valore di questo risultato è particolarmente elevato: sono infatti i titoli appartenenti all'indice S&P 500 i componenti che sono stati utilizzati per la costruzione dei portafogli *beta-sorted* impiegati nel presente studio. Ne consegue che le analisi condotte sugli indici della famiglia S&P 500 non presentano alcun potenziale *bias* derivante dall'utilizzo di componenti non perfettamente coincidenti con quelli dell'indice o dalla presenza di difformi procedure di reinvestimento dei proventi, così come da diverse aliquote impositive applicate sugli stessi. La graduatoria invece dipende solamente dalle diverse metodologie di calcolo, essendo identico ogni altro aspetto.

I tradizionali indici *float weight* S&P 500 TR e PR, rispettivamente *net total return* e *price*, mostrano un livello di efficienza nettamente inferiore rispetto alla versione equiponderata, collocandosi rispettivamente al 14° e al 23° posto.

Come nel caso dell'S&P 500, anche gli indici Wilshire 5000 sono caratterizzati una maggiore efficienza in capo alla versione equiponderata, che, nonostante sia rappresentata da un indice di prezzo, è in grado di dominare il Wilshire 5000 Total Market Index TR (al lordo delle imposte). Ulteriore evidenza empirica a favore dell'*equal weighting*.

Gli indici della serie Averages, calcolati dalla Dow Jones Indexes, sono stati oggetto di analisi meramente per la loro importanza tradizionale nella divulgazione finanziaria, essendo essi costruiti tramite la ponderazione per il prezzo, priva di fondamenti teorici e, almeno oggi, di limitatissima utilità nella semplificazione del loro calcolo. Particolarmente significativo il valore assunto dal flusso netto di dominanza del Dow Jones Industrial Average PR: -1. Il più antico indice del mercato azionario statunitense, tuttora ampiamente citato dai *mass media*, è quindi il più inefficiente in assoluto, essendo dominato da tutti gli altri indici oggetto di questo studio.

Gli MSCI USA presentano, indipendentemente dal trattamento dei proventi, un grado di efficienza in linea con gli indici S&P 500 e inferiore solamente rispetto a quello dei più diversificati Russell e Wilshire.

I *benchmark* rappresentativi delle principali società quotate nei mercati dell'Unione Monetaria Europea evidenziano un grado di efficienza più elevato nel caso in cui prevedano il reinvestimento dei dividendi, in particolare se al lordo delle imposte. Questo risultato non si verifica, però, in modo meccanico, sottolineando come la scelta di uno specifico indice possa condurre a rapporti rendimento/rischio ottimali indipendentemente dalla “regola” appena esposta.

L'Euro Stoxx NR, infatti, si posiziona terzo nella classifica dei flussi netti di dominanza, nonostante esso sia calcolato contemplando il reinvestimento dei proventi al netto dell'effetto fiscale. Esso quindi supera, come grado di efficienza relativa, ben tre indici *total return* lordi. Si tratta di un risultato controintuitivo, che però è giustificabile alla luce della maggiore diversificazione di questo paniere di titoli, in termini di numerosità dei componenti, rispetto agli altri indici *net total return*: l'Euro Stoxx è formato da un ammontare variabile di azioni, ma solitamente pari a circa 300 elementi.

Il suo diretto concorrente, in quanto anch'esso inclusivo dei proventi netti, come *benchmark* rappresentativo del mercato dell'Area Euro è l'MSCI EMU NR. Il paniere calcolato da MSCI, quinto per efficienza relativa, è formato da circa 260 società (~84% della capitalizzazione dell'Area Euro), scelte tra quelle a più elevato valore di mercato, aggiustato per il flottante. L'Euro Stoxx presenta, invece, una più ampia diversificazione per capitalizzazioni, in quanto formato da titoli *large, mid e small cap*.

Pur rappresentativi di un'elevatissima quota di mercato, spiccano per inefficienza gli indici Euro Stoxx 50 ponderati per flottante. Noti per essere i più utilizzati *benchmark* del mercato dei titoli ad alta capitalizzazione nell'Area Euro, questi panieri, calcolati in tre versioni (*price return, net total return, gross total return*), si collocano nella metà inferiore della classifica. E' persino possibile osservare come l'Euro Stoxx 50 NR (*net total return*) abbia un flusso netto di dominanza prossimo a quello dell'Euro Stoxx PR (*price return*): un indice di

prezzo, che quindi non include alcun provento generato dai titoli, risulta avere quasi la medesima efficienza relativa di un indice che invece è calcolato considerando il reinvestimento dei proventi, seppure al netto dell'imposizione fiscale.

Il fatto che, a parità di metodologia di calcolo, l'indice con un numero minore di componenti risulti meno efficiente potrebbe consentire di attribuire alla più limitata diversificazione la causa di questa sub-ottimalità. Le analisi empiriche condotte, però, evidenziano come il metodo costruttivo di un indice risulti estremamente rilevante, tanto da permettere all'Euro Stoxx 50 EW NR di classificarsi secondo in termini di efficienza. Tale indice è calcolato considerando il reinvestimento dei proventi netti, a differenza del primo in graduatoria, l'Euro Stoxx GR. Da questo risultato è possibile concludere che la versione *equally weighted* del paniere dei primi 50 titoli azionari dell'Area Euro rappresenta il *benchmark* più efficiente che possa essere replicato in condizioni realistiche di operatività sui mercati mobiliari, data l'impossibilità di prescindere dalla variabile fiscale in capo ai gestori e agli investitori, come invece accade nel calcolo *gross total return*.

Gli indici del mercato azionario italiano si collocano in una classifica coerente con quanto già esposto. L'indice Comit Performance, *gross total return*, è il più efficiente: un risultato in linea con le aspettative, dato che questo portafoglio include tutti i titoli del Mercato Telematico Azionario italiano e prevede il reinvestimento dei proventi lordi. Per motivi fiscali, quindi, il Comit Performance, così come tutti gli altri indici *total return* lordi, non può essere considerato come un *benchmark* replicabile da un investitore, bensì piuttosto come una *proxy* dell'andamento del mercato nel suo complesso. Analoghe considerazioni possono essere estese al secondo e terzo indice per livello di efficienza, ovvero il FTSE Italia MIB Storico TR e l'MSCI Italy GR.

Al contrario, il FTSE Italia AllShare TR, che considera il reinvestimento dei proventi netti, rappresenta il miglior indice per un gestore passivo, essendo il più efficiente tra quelli ad essere realisticamente replicabili. Il FTSE MIB TR è quinto in termini di efficienza. E' composto dal sottoinsieme dei quaranta titoli del FTSE

Italia AllShare TR che, in termini di flottante e composizione settoriale, sono più i rappresentativi del mercato azionario italiano. L'ultimo indice di performance al netto della fiscalità, ovvero l'MSCI Italy NR, composto da circa 38 titoli *large cap*, si è posizionato sesto.

La mancanza di un indice equiponderato tra quelli analizzati nel mercato italiano non consente di indagare ulteriormente le qualità di tale metodo di calcolo. In compenso, il Fideuram Azionari Italia TR presenta alcune particolarità di calcolo che consentono di ampliare l'analisi dell'efficienza a forme di investimento ulteriori rispetto a quelle già osservate nelle altre due *asset class*.

Esso infatti rappresenta un paniere formato da soli fondi comuni d'investimento di diritto italiano appartenenti alla categoria Assogestioni denominata "Azionari Italia". L'inclusione di questo indice nel campione è stata dettata dall'interesse nello studio dell'efficienza conseguita da investimenti reali.

Il Fideuram Azionari Italia TR si posiziona ultimo tra gli indici *net total return*: questo indica, come prevedibile sulla base della letteratura scientifica, che le commissioni gravanti sul NAV dei fondi⁸⁸ non sono compensate da una gestione attiva sufficiente a raggiungere lo stesso livello di efficienza di una gestione puramente indicizzata.

D'altro canto possono essere individuate alcune giustificazioni per questo risultato conseguito da parte delle SGR italiane:

- l'impatto fiscale del meccanismo di imposizione sul maturato: la "nettizzazione" del NAV implica contestualmente una contrazione sia della media che della volatilità dei rendimenti. L'effetto complessivo, in termini di *risk-adjusted performance*, non è valutabile *a priori*, essendo dipendente sia dal *trend* di mercato nel periodo analizzato, sia da quello verificatosi negli anni precedenti, a causa della eventuale presenza di una posta contabile infruttifera, quindi avente sia media che varianza pari a zero, quale il credito d'imposta maturato a seguito di perdite in capo al fondo;⁸⁹

⁸⁸ Quindi delle commissioni di gestione e di *performance*, ma non, ovviamente, di qualsiasi altra commissione che non gravi sul NAV, quali le commissioni di sottoscrizione, di *switch* e di rimborso.

⁸⁹ Per una trattazione dettagliata si rinvia a Savona (2006).

- i costi di transazione cui va incontro una gestione con denaro reale: gli altri indici analizzati non possono tenere in considerazione le riduzioni della *performance* legate alla liquidità dei mercati e alla remunerazione degli intermediari;

- la necessaria presenza di liquidità non investita tra gli *asset* e le distorsioni derivanti dal *timing* delle sottoscrizioni e dei riscatti da parte della clientela: effetti legati a scelte di investimento estranee alla *asset allocation* progettata dai gestori dei fondi comuni.

4. L'equiponderazione: determinanti dell'efficienza

4.1. La Noisy Market Hypothesis

Lo studio empirico mostra una netta prevalenza degli indici equiponderati, in termini di efficienza, rispetto alle altre forme di calcolo qui analizzate, ovvero la ponderazione per capitalizzazione, per flottante e per prezzo.⁹⁰

Questo risultato contrasta con la teoria del Capital Asset Pricing Model. D'altro canto, come evidenziato sin dalla critica di Roll, i *test* dell'efficienza di un portafoglio non sono contestualmente una prova empirica della validità del CAPM, a causa dei noti problemi di non osservabilità del vero portafoglio di mercato.⁹¹ I risultati di quest'analisi empirica, per quanto in disaccordo con il CAPM, rientrano quindi nell'ambito delle molteplici anomalie riscontrate nell'applicazione della teoria di Sharpe, Lintner e Mossin.

Nel caso in cui le ipotesi sottostanti al CAPM fossero rispettate, il *market portfolio* coinciderebbe con il *tangency portfolio* e sarebbe non solo l'investimento più efficiente, ma sarebbe anche *cap weighted*.⁹²

E' possibile dimostrare questa affermazione ricorrendo ad una esemplificazione intuitiva. Si ipotizzi che siano disponibili solo due titoli, *A* e *B*, e che i loro pesi nel portafoglio di tangenza, wT_A e wT_B , non coincidano con quelli proporzionali alle loro capitalizzazioni, wC_A e wC_B . In particolare, $wT_A > wC_A$ e quindi, dato che $wT_A + wT_B = wC_A + wC_B = 1$, si verifica che $wT_B < wC_B$. Ritenendo valide le ipotesi del CAPM, in particolare l'omogeneità delle aspettative, tutti gli investitori desiderano detenere il portafoglio di tangenza, ma l'ammontare di titoli *A* presente sul mercato, pari alla capitalizzazione di *A*, non è sufficiente a soddisfare tutta la domanda. Ne consegue che il prezzo di *A* aumenta,

⁹⁰ All'interno delle categorie *cap* e *float weighted*, inoltre, sono presenti indici con limiti di concentrazione su di un singolo titolo.

⁹¹ Si veda il paragrafo 1.3.

⁹² Peraltro, essendo posto sulla frontiera di Markowitz, sarebbe un portafoglio efficiente anche secondo i criteri della Modern Portfolio Theory.

mentre quello di B diminuisce. L'equilibrio di mercato si raggiunge nel momento in cui il portafoglio di tangenza risulta essere *cap weighted*, ed è quindi coincidente con il portafoglio di mercato.⁹³

Quanto sin qui richiamato può non avverarsi nel caso in cui si ipotizzino alcune deviazioni dalla teoria sottostante il CAPM. Come evidenziato da Jack Treynor, infatti, è sufficiente considerare dei minimi errori nel *pricing* degli strumenti finanziari da parte dell'insieme degli investitori per far decadere la tesi di efficienza dell'indice di mercato.⁹⁴ Da questo risultato deriverebbe la scomparsa della preferenza accordata agli indici *cap weighted* sulla base della teoria finanziaria. La presenza di "rumore" nei prezzi di mercato ha portato Jason Hsu a definire la teoria esposta da Treynor come Noisy Market Hypothesis.⁹⁵

Si ipotizzi che il mercato sia composto solo da due titoli, uno sopravvalutato e l'altro sottovalutato. Si indichi con v il valore "vero", identico per entrambi i titoli, e con e l'errore di *pricing*. Un investimento ponderato per la capitalizzazione prevede una allocazione proporzionale alla seguente:

$$\underbrace{(v + e)}_{\text{Capitalizzazione del titolo sopravvalutato}} + \underbrace{(v - e)}_{\text{Capitalizzazione del titolo sottovalutato}}$$

Questa ripartizione consente di acquistare in totale $2v$ di valore "vero":

$$(v + e) \left(\frac{v}{v + e} \right) + (v - e) \left(\frac{v}{v - e} \right) = 2v$$

\swarrow \swarrow
 Percentuale di valore "vero" rispetto
 al valore di mercato del titolo

⁹³ Il portafoglio di mercato è noto anche come *market clearing portfolio*, in quanto rappresenta il portafoglio che soddisfa contemporaneamente, e in ogni istante, la domanda e l'offerta di titoli da parte degli investitori, consentendo quindi la chiusura dei conti, ovvero il *clearing*.

⁹⁴ Treynor (2005).

⁹⁵ Hsu (2006). In questo articolo, Hsu ha portato alle sue estreme conseguenze la teoria di Treynor: se il *cap weighting* risulta subottimale è preferibile utilizzare una ponderazione fondata su *proxy* del valore intrinseco delle azioni. Tali *proxy* sono individuate dall'autore, sulla scorta di Arnott et al. (2005), in alcune voci di bilancio quali i ricavi, il *book value*, ecc. Questa procedura di indicizzazione, nota come *fundamental indexing*, ha dato luogo a critiche anche accese, con un dibattito tuttora in corso sulle principali riviste scientifiche dedicate all'*asset management*. Si ricorda in particolare Perold (2007), che ritiene gli errori di stima dei valori dei titoli distribuiti in modo casuale e quindi non legati alla capitalizzazione o al valore intrinseco di un titolo. Di conseguenza, secondo Perold ponderare un indice sulla base di *proxy* di quest'ultimo valore sarebbe illogico, e quindi l'equiponderazione consentirebbe di raggiungere rendimenti mediamente identici a quelli del *cap weighting*.

Si tratta quindi di un investimento apparentemente corretto, in quanto associa ad un esborso per una somma pari a $2v$ l'acquisto di un identico ammontare di valore intrinseco "vero".

Un investitore indifferente alla capitalizzazione di mercato dei titoli acquisterebbe invece un portafoglio contraddistinto dalla seguente composizione:

$$v\left(\frac{v}{v+e}\right) + v\left(\frac{v}{v-e}\right)$$

Si noti che la quota allocata in ciascun titolo è la medesima, essendo per ipotesi v identico per entrambi, ma il valore intrinseco del portafoglio, di costo pari a $2v$, non corrisponderebbe più a $2v$, bensì a:

$$v\left[\frac{v(v-e) + v(v+e)}{v^2 - e^2}\right] = v^2\left(\frac{2v}{v^2 - e^2}\right) = \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{e}{v}\right)^2}\right]2v > 2v, \forall e, v$$

Dato che il denominatore all'ultimo membro non può mai essere superiore ad uno, ne deriva che, a parità di importo investito, il valore "vero" acquistato è sempre pari o superiore rispetto a quello di un'indicizzazione *cap weighted*.

Generalizzando l'esempio ad un insieme complesso di titoli, aventi sia valori v che capitalizzazioni diverse, il risultato non è soggetto a modifiche, inoltre Treynor nota che la distribuzione dell'errore di *pricing* risulta essere asimmetrica: è infatti più probabile che un titolo ad elevata capitalizzazione incorpori un errore positivo e, viceversa, che un titolo sottovalutato abbia, contestualmente, una ridotta capitalizzazione. Ne consegue che una gestione *cap weighted* è composta in misura più rilevante da titoli sopravvalutati piuttosto che sottovalutati.

Procedendo ad alcune semplificazioni, Treynor dimostra che l'incremento di valore "vero" di un indice equiponderato può essere approssimato da:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{e}{v}\right)^2} \approx \frac{1}{1 - \sigma^2}$$

Volatilità più elevate nei prezzi dei titoli comportano quindi una maggiore dispersione degli stessi attorno al loro valore "vero", amplificando, di

conseguenza, le opportunità per gli investitori non *cap weighted* di controbilanciare le imperfezioni presenti nel *pricing* di mercato.

Il contributo teorico di Treynor, ancorché l'autore stesso non lo affermi esplicitamente, potrebbe a prima vista essere ricondotto entro il dibattito, acceso trent'anni fa da Banz, riguardante la cosiddetta *size anomaly*, ovvero la presenza di un extra-rendimento, rispetto a quanto teorizzato dal CAPM, misurato in capo ai titoli a bassa capitalizzazione di borsa.⁹⁶ Questo accostamento, però, non pare del tutto condivisibile. La teoria di Treynor, infatti, è relativa a generiche differenze di capitalizzazione di mercato, non specificando una soglia sotto la quale l'extra-rendimento deve necessariamente essere individuato. In altri termini, per quanto sia più probabile che siano le società a bassa capitalizzazione quelle più sottovalutate, tale condizione non è necessaria.

L'analisi empirica esposta nel capitolo 3 ha evidenziato una superiore efficienza per tutti gli indici equiponderati, sia relativamente ai loro omologhi *value-weighted* sia indipendentemente dalla capitalizzazione media dei loro componenti. Il caso europeo è emblematico: l'Euro Stoxx 50 EW, infatti, è formato dai titoli a più elevata capitalizzazione di tutta l'Area Euro. Si tratta, di conseguenza, di azioni appartenenti alla sommità della categoria *large cap*. Ciò nonostante, l'equiponderazione evidenzia una maggiore efficienza non solo rispetto all'equivalente indice *float weighted*, ma anche a confronto con panieri aventi una composizione orientata verso capitalizzazioni inferiori.

Nel mercato statunitense il legame tra l'efficienza relativa, all'interno della categoria degli indici equiponderati, e la dimensione media dei loro componenti non è diretto. La classifica di efficienza è infatti maggiormente legata alle caratteristiche costruttive, quali tipologia di equiponderazione e reinvestimento dei proventi, che non ai titoli inclusi o meno nel paniere.

Limitare al solo effetto *size* la causa della migliore efficienza degli indici *equal weight* appare quindi come un approccio eccessivamente semplificante.

⁹⁶ Banz (1981).

4.2. La finanza comportamentale

Accanto alla dimostrazione di Treynor, che può essere inquadrata nell'ambito più ampio delle critiche mosse al CAPM, è possibile contemplare ulteriori concause al fenomeno empiricamente evidenziato in questo studio. Un ulteriore approccio che può essere seguito per esplicitare la superiore efficienza degli indici equiponderati è fornito dalla finanza comportamentale.

L'equiponderazione è altrimenti indicata come *naive diversification* e *1/N portfolio strategy*, ma negli ultimi anni, probabilmente per evidenziarne il carattere tradizionale, si è diffusa la definizione di “diversificazione talmudica”.⁹⁷ Tale denominazione deriva dal seguente passo del “Talmud di Babilonia”: “Un uomo dovrebbe sempre dividere il suo denaro per un terzo in terreni, per un terzo nel commercio e per un terzo in contanti”.⁹⁸ Adattato alla terminologia dell'*asset management*: allocazione equiponderata in *real estate*, azioni e liquidità.

Kenneth Fisher e Meir Statman hanno diffuso questa citazione presso la comunità scientifica, evidenziando quanto la prassi degli operatori si discosti dalla Modern Portfolio Theory e dal CAPM, prediligendo investimenti equiponderati tra le *asset class*.⁹⁹ A seguito di una ricerca condotta presso i gestori di piani pensionistici statunitensi, gli autori sono giunti alla conclusione che gli investitori raramente ragionano in termini di portafoglio complessivo, bensì effettuano la loro *asset allocation* operando per sommatoria di diversi investimenti, concepiti ciascuno singolarmente. Il risultato è un portafoglio composto dalla giustapposizione di tali unità, aventi tutte il medesimo peso.

Le motivazioni alla base di questo comportamento, irrazionale secondo i canoni della teoria finanziaria, sono state rintracciate sia nella necessità, percepita come basilare dagli investitori, di tutelarsi contro perdite eccessive¹⁰⁰ sia nella

⁹⁷ Duchin, Levy (2009), Tu, Zhou (2011).

⁹⁸ “Talmud di Babilonia”, trattato “Bavà Metzià”, cap. 42a. Il primo autore contemporaneo a notare la validità attuale del passo citato è stato Tamari (1987).

⁹⁹ Fisher, Statman (1997a) e (1997b).

¹⁰⁰ Sulla falsariga della teoria di Roy (1952), sulle cui basi Statman ha successivamente sviluppato la Behavioral Portfolio Theory (Shefrin, Statman, 2000) e, con Harry Markowitz, la Portfolio Optimization with Mental Accounts (Das et al., 2010).

prassi operativa seguita dai consulenti finanziari, influenzati, in parte, dalle prescrizioni normative.¹⁰¹

E' interessante, oltre che sorprendente, constatare come lo stesso Markowitz abbia "confessato" di non seguire l'ottimizzazione media-varianza nei propri investimenti personali, bensì di minimizzare il proprio potenziale rimorso derivante da eventuali perdite o mancati guadagni, preferendo quindi affidarsi ad una semplice *asset allocation* equiponderata.¹⁰² Questo comportamento può essere ricondotto allo schema della Regret Theory, la quale postula che gli individui valutino le proprie decisioni sulla base della responsabilità associata non solo alla scelta effettuata, considerando i profitti e le perdite da essa derivanti, ma anche ai mancati risultati legati alle altre alternative disponibili.¹⁰³

L'ottimizzazione di questa funzione di utilità risulta quindi particolarmente complessa e il raggiungimento di un ottimo assoluto si rivela pressoché impossibile. Anche nel caso in cui, ad esempio, l'investitore abbia conseguito un utile dall'allocazione prescelta, egli subisce comunque una forma di rimorso per non aver preferito un'altra ripartizione degli *asset* che avrebbe generato un rendimento superiore. La gravosità di tale condizione psicologica porta non di rado gli operatori all'abbandono di qualsiasi forma di decisione, preferendo affidarsi ad una "non-scelta".

Una ulteriore indagine del fenomeno riscontrato da Fisher e Statman è stata condotta da Benartzi e Thaler relativamente alla composizione dei piani pensionistici statunitensi.¹⁰⁴ Gli autori hanno seguito una metodologia di ricerca

¹⁰¹ In particolare dell'"Employee Retirement Income Security Act", secondo il quale il dovere dei piani pensionistici è quello di presentare investimenti diversificati tra le principali *asset class*, sottolineando l'importanza della prudenza nelle scelte allocative e scoraggiando, implicitamente, il ricorso a qualsiasi modello di ottimizzazione. Al contrario, allocazioni con ponderazioni simili nelle varie classi di investimento sono ritenute più prudenti e quindi preferibili.

¹⁰² "I should have computed the historical co-variances of the asset classes and drawn an efficient frontier. Instead, I visualized my grief if the stock market went way up and I wasn't in it - or if it went way down and I was completely in it. My intention was to minimize my future regret. So I split my contributions 50/50 between bonds and equities." Zweig (1998), p. 114.

¹⁰³ Loomes, Sudgen (1982). Un modello di ottimizzazione di portafoglio fondato sull'*expected regret* rispetto ad un livello prefissato di rendimento o ad un *benchmark* è stato sviluppato in Testuri, Uryasev (2004).

¹⁰⁴ Benartzi, Thaler (2001). Si ricorda anche la ricerca empirica di Huberman, Jiang (2006), che conferma la propensione all'equiponderazione da parte degli investitori, ma nota al contempo una tendenza alla composizione di portafogli con limitato numero di *asset*.

interdisciplinare, applicando alla finanza scoperte effettuate nel campo della psicologia applicata, quale l'“euristica della diversificazione”, di cui l'equiponderazione è un caso particolare. Tale euristica consiste nella tendenza, da parte dei soggetti analizzati, a diversificare in modo *naive* quando si trovano in situazioni che richiedano l'esecuzione di una scelta multipla simultanea. Al contrario, allorché le decisioni possono avvenire sequenzialmente, essi sono propensi alla massimizzazione della loro utilità selezionando di volta in volta ciò che ritengono migliore, potendo agire anche sulla base dell'esperienza accumulata in precedenza. E' evidente come il processo di *asset allocation*, specialmente se concepito come propedeutico ad un investimento uniperiodale, rientri nella categoria delle decisioni multiple simultanee.

Le analisi comportamentali hanno permesso di incasellare in una cornice teorica il comportamento irrazionale degli investitori. Qual è il rapporto intercorrente tra questo inquadramento e i risultati empirici che riscontrano una superiore efficienza degli indici *equal weight*?

Una volta escluso che l'*homo oeconomicus* sia l'unico protagonista dei mercati finanziari, è possibile supporre che le pressioni di domanda e offerta sui titoli non coincidano con quelle teorizzate dal CAPM. Da questo assunto consegue che il *clearing portfolio* e il *market portfolio* non sono sempre esattamente coincidenti, in quanto quest'ultimo non rappresenta il perfetto equilibrio tra acquirenti e venditori. Anzi, la preferenza accordata da alcune categorie di investitori ai portafogli *equal weighted* comporta una richiesta proporzionalmente superiore per quei titoli caratterizzati da un livello di capitalizzazione inferiore alla mediana.

E' però necessario sottolineare che non sussistono ragioni né teoriche né empiriche per ritenere che tale proporzionalità sia necessariamente costante e uniforme tra le classi dimensionali o tra i diversi titoli. Da questa riserva è possibile concludere che l'eccesso o meno di richiesta di singoli titoli da parte degli investitori non è prevedibile sulla mera base della loro capitalizzazione di mercato, ma l'impatto di tali deviazioni dall'equilibrio postulato dal CAPM è misurabile solo in forma aggregata, ad esempio tramite gli indici equiponderati.

4.3. L'errore di stima

Sin dagli anni Settanta alcuni esperimenti, condotti tramite simulazioni di portafogli ottimizzati posti a confronto con portafogli *equal weight*, hanno evidenziato quanto l'errore di stima abbia un impatto estremamente elevato sugli algoritmi di massimizzazione, tanto da evidenziare che il livello di efficienza *out of sample* dei portafogli equiponderati non è distinguibile da quello dei componenti della frontiera di Markowitz.¹⁰⁵

Ulteriori evidenze empiriche sono state riscontrate da Jobson e Korkie, portandoli a concludere che “naive portfolio formation rules, such as equal weight rule, can outperform the Markowitz rule”.¹⁰⁶ I due autori sono stati al contempo tra i primi a proporre tecniche di *shrinkage* per il superamento dell'*estimation error* nell'*asset management*, abbandonando in seguito lo studio delle proprietà dell'equiponderazione.¹⁰⁷

Come già esposto, grazie alla finanza comportamentale negli ultimi anni sono state condotte ulteriori analisi della diversificazione cosiddetta *naive*, ma i primi a proporre esplicitamente un'interpretazione bayesiana della euristica della diversificazione sono stati Windcliff e Boyle.¹⁰⁸ Il loro inquadramento, di carattere prevalentemente intuitivo, segue la nota proprietà della frontiera efficiente di coincidere con un punto, rappresentato da un portafoglio equiponderato, sotto particolari condizioni. Questa contrazione avviene nel caso, meramente ipotetico, di completa impossibilità di stima dei parametri descrittivi dei rendimenti e di assenza di un modello per la definizione dei *prior*. In questa situazione di piena incertezza è quindi ragionevole ipotizzare che medie, varianze e correlazioni siano identiche per ogni titolo. Sulla base di questo esempio estremo, gli autori evidenziano come l'equiponderazione sia il risultato più razionale in presenza di *prior* uguali per tutte le attività finanziarie e di *view* degli investitori nulle.

¹⁰⁵ Frankfurter et al. (1971), Frankfurter (1976), Bloomfield et al. (1977).

¹⁰⁶ Jobson, Korkie (1981), p. 70.

¹⁰⁷ Jobson, Korkie (1980). Con *shrinkage* si intende una tecnica bayesiana di correzione di una misura tramite la sua “contrazione” (*to shrink* = contrarre) verso un valore *prior*.

¹⁰⁸ Windcliff, Boyle (2004).

Peraltro, proprio nell'applicazione dello *shrinkage* alla stima dei valori medi di un campione caratterizzato da una generica distribuzione multivariata la letteratura statistica consiglia l'utilizzo, come *prior*, del medesimo valore per ogni componente.¹⁰⁹ A riguardo è utile osservare che, nel calcolo dei pesi dei portafogli efficienti tramite ottimizzazione, Chopra e Ziemba hanno dimostrato che un investitore con avversione al rischio media può incorrere in perdite, misurate in termini di minore utilità, undici volte superiori in caso di errata stima delle medie rispetto ad un identico errore di stima delle varianze.¹¹⁰ Alla luce di questo fenomeno, gli autori consigliano, quando non sia possibile effettuare stime attendibili, di ipotizzare identiche tra di loro le medie dei rendimenti di tutti i componenti, per lo meno se appartenenti alla stessa *asset class* (azionaria, obbligazionaria, liquidità, ecc.). In seguito a queste considerazioni, l'esempio di Windcliff e Boyle appare in una luce meno irrealistica, per quanto esso rappresenti un caso dichiaratamente estremo.

Il rinnovato interesse degli studiosi di *asset management* per l'equiponderazione si è concretizzato prima in una ripresa degli studi empirici,¹¹¹ e successivamente in un approfondimento teorico dei risultati conseguiti. Questo secondo approccio è stato seguito nella fondamentale ricerca di DeMiguel, Garlappi e Uppal volta a investigare le *performance out of sample* delle principali tecniche di *asset allocation* in presenza di *estimation risk*.¹¹²

Più in dettaglio, i tre autori hanno comparato gli approcci bayesiani e quelli euristici, oltre a vari modelli di ottimizzazione, incluso quello canonico basato su medie e varianze storiche. Accanto a queste procedure più avanzate sono stati presi in considerazione i due portafogli *cap weighted* ed *equally weighted*. Peraltro, quest'ultimo era stato incluso nell'analisi inizialmente come metro di paragone per tutti gli altri, essendo il più semplice: gli autori non avevano costruito il loro *test* empirico allo scopo specifico di valutarne l'utilizzo. Ciò

¹⁰⁹ Lehmann, Casella (1998).

¹¹⁰ Chopra, Ziemba (1993).

¹¹¹ Fra i contributi puramente empirici si ricordano Fabozzi et al. (2006) e Duchin, Levy (2009).

¹¹² DeMiguel et al. (2009).

nonostante nessuno degli altri 14 modelli è risultato superiore rispetto all'equiponderazione.

Le evidenze di questo studio consentono di proporre ulteriori giustificazioni teoriche per il fenomeno riscontrato. In primo luogo, si ricorda che il portafoglio ottimo nello spazio media-varianza, senza vincoli riguardanti le vendite allo scoperto, è formato da componenti secondo il seguente vettore dei pesi:

$$\mathbf{w}_{N \times 1} = \frac{\mathbf{V}_{N \times N}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{N \times 1}}{\mathbf{1}_{1 \times N} \mathbf{V}_{N \times N}^{-1} \boldsymbol{\mu}_{N \times 1}}$$

Generalizzando l'esempio di Windcliff e Boyle, è quindi possibile osservare che la condizione sufficiente affinché un portafoglio equiponderato coincida con il portafoglio di tangenza è che la media degli extra-rendimenti rispetto al tasso *risk free* di ogni componente sia proporzionale alla somma della sua varianza e delle covarianze tra di esso e gli altri titoli. Si rigetta quindi il CAPM, che postula un legame diretto tra rischio sistematico e rendimento, e si propone invece un nuovo modello, nel quale il rendimento dipende dal rischio totale. Al verificarsi di quest'ultima ipotesi, con un semplice passaggio algebrico si dimostra che i pesi dei componenti del portafoglio ottimo sono identici tra loro. Se $\boldsymbol{\mu} = \tau \mathbf{V} \mathbf{1}'$, con τ generica costante di proporzionalità uguale per tutti gli *asset*, allora:¹¹³

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \tau \mathbf{V} \mathbf{1}'}{\mathbf{1} \mathbf{V}^{-1} \tau \mathbf{V} \mathbf{1}'} = \frac{1}{N}$$

L'equiponderazione può quindi essere considerata sia come una forma di riduzione dell'errore di stima, come fin qui esposto, sia come il risultato di un approccio all'interrelazione rischio-rendimento differente rispetto a quello del CAPM.

L'ipotesi di stretta proporzionalità tra extra-rendimento e rischio totale può però apparire eccessivamente semplice e irrealistica. Al fine di rendere più generale la valutazione di quali siano le condizioni che garantiscano una dominanza del portafoglio equiponderato rispetto a quello di tangenza *ex post* (o

¹¹³ Si rammenta che il risultato del prodotto $\mathbf{V} \mathbf{1}'$ è un vettore $N \times 1$ i cui elementi sono ciascuno pari alla sommatoria degli elementi di una riga di \mathbf{V} .

out of sample) DeMiguel, Garlappi e Uppal hanno dimostrato le seguenti tre proposizioni. Indicando con SR_{ew}^2 e con SR_*^2 rispettivamente il quadrato dell'indice di Sharpe del portafoglio equiponderato e del portafoglio di tangenza *ex ante* (ovvero calcolato sulla base delle medie e delle varianze-covarianze storiche), si verifica che:

1) se il vettore degli extrarendimenti $\boldsymbol{\mu}$ non è noto, mentre lo è la matrice di varianza-covarianza \mathbf{V} , allora al portafoglio di tangenza *ex post* è associato un livello di utilità per l'investitore superiore a quella del portafoglio equiponderato, ovvero $U(P^*) > U(P_{ew})$, se si verifica che:

$$SR_*^2 - SR_{ew}^2 - N/T > 0;$$

2) se $\boldsymbol{\mu}$ è noto e \mathbf{V} non lo è, allora $U(P^*) > U(P_{ew})$ nel caso in cui:

$$kSR_*^2 - S_{ew}^2 > 0$$

$$\text{con } k = \left(\frac{T}{T-N-2} \right) \left(2 - \frac{T^2 - 2T}{(T-N-1)(T-N-4)} \right) < 1;$$

3) se sia $\boldsymbol{\mu}$ che \mathbf{V} non sono noti, allora $U(P^*) > U(P_{ew})$ allorquando:

$$kSR_*^2 - SR_{ew}^2 - h > 0$$

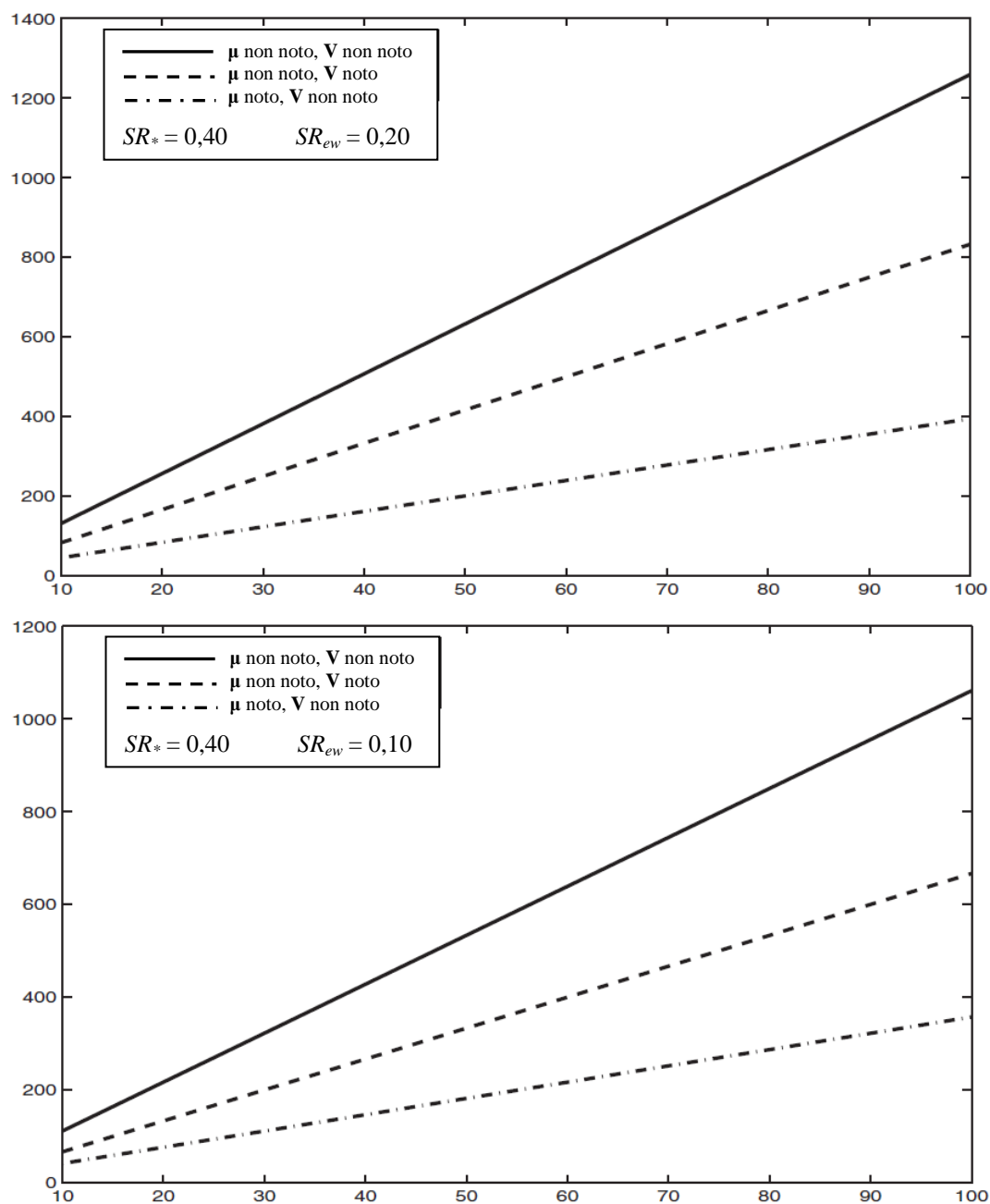
$$\text{con } h = \frac{N(T^2 - 2T)}{(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)} > 0.$$

Dalla proposizione 1 e dalla formulazione di k e h si evince che le stime dei parametri dell'ottimizzazione sono più robuste al crescere dell'orizzonte temporale T su cui sono stati misurati. D'altro canto, le caratteristiche della microstruttura dei mercati tendono a variare nel tempo e con esse l'andamento dei prezzi, rendendo quindi potenzialmente distorte le stime effettuate su periodi storici troppo prolungati. La prima proposizione evidenzia, in modo ancor più esplicito delle successive, quanto al crescere del numero di titoli N si riduca la probabilità di poter effettuare stime corrette per ciascuno degli $(N^2+3N)/2$ parametri necessari all'ottimizzazione alla Markowitz.

Data la stretta positività di h , il primo membro della diseuguaglianza della proposizione 3 è sempre inferiore a quello della proposizione 2. Questa

constatazione formalizza in termini matematici l'intuizione secondo la quale l'aumentare dell'incertezza riguardo ai parametri rende più complessa la costruzione di un portafoglio che risulti più efficiente rispetto a quello equiponderato.

Figura 5: Mesi necessari per la stima dei parametri di portafogli ottimi *ex post*



Fonte: DeMiguel et al. (2009).

I grafici riportati in figura 5 rappresentano il numero di mesi (raffigurati in ordinata) necessari affinché si verifichi $U(P^*) = U(P_{ew})$ al crescere del numero N di *asset* (in ascissa), fissati dei valori costanti ed esemplificativi degli indici di Sharpe misurati *ex ante*. L'impatto derivante dall'errata stima dei rendimenti attesi, come già esposto, appare nettamente superiore a quello legato alla mancata calibrazione della matrice di varianza-covarianza. Ciò che però appare ancor più significativo è il numero estremamente elevato di mesi necessari per rendere equivalenti *ex post* un investimento equiponderato e uno ottimizzato: già solamente con trenta *asset* sono richiesti almeno dieci anni di dati.

4.4. Il turnover nei portafogli equiponderati

Dopo aver esposto le principali motivazioni teoriche che possono essere addotte a favore dell'equiponderazione è necessario valutare l'impatto negativo su questa forma d'investimento di un fattore di ordine puramente applicativo quale la percentuale annua di ribilanciamento del portafoglio (*portfolio turnover*). I costi di transazione cui va incontro un investitore reale, infatti, sono direttamente correlati al numero e all'ammontare delle operazioni che deve porre in essere nel corso dell'anno e alla liquidità dei titoli oggetto di tali compravendite.

Per costruzione, un indice di prezzo i cui componenti siano ponderati proporzionalmente alle loro capitalizzazioni va incontro a ribilanciamenti solo allorquando sia necessario sostituire alcuni titoli con altri, in quanto i primi non soddisfano più le regole di composizione dell'indice stesso, oppure in presenza di operazioni sul capitale. Nel caso in cui l'indice sia *total return*, un'ulteriore fonte di *turnover* è data dal reinvestimento degli utili distribuiti. Al contrario, il diverso apprezzamento/deprezzamento cui va incontro ciascun titolo non comporta alcun ribilanciamento, in quanto le variazioni delle capitalizzazioni sono identiche alle variazioni dei pesi dei componenti, essendo questi ultimi proporzionali al valore di mercato delle società quotate.

Il medesimo ragionamento può essere esteso agli indici *float weighted*, i quali però devono essere ribilanciati anche in caso di incremento o contrazione dei

pacchetti azionari detenuti dagli investitori di controllo. Va notato però che, a fronte di questa limitata ulteriore fonte di *turnover*, gli indici ponderati per il flottante offrono un rilevante vantaggio in termini di liquidità dei titoli che li compongono. Allorquando un indice *cap weighted* annuncia il ribilanciamento di un suo componente caratterizzato da una percentuale limitata di titoli liberamente contendibili sul mercato, la pressione della domanda o dell'offerta provocata dagli investitori indicizzati può provocare fluttuazioni nei prezzi tali da incrementare notevolmente costi di transazione cui vanno incontro.¹¹⁴

Il *turnover* degli indici equiponderati risulta essere tanto superiore a quello degli indici *cap weighted* quanto più i fattori che influenzano il ribilanciamento di questi ultimi hanno un impatto elevato sui titoli a capitalizzazione inferiore alla mediana. In particolare, la periodica revisione del paniere di titoli comporta, di norma, la sostituzione proprio delle società con un minore valore di mercato ed è quindi più rilevante per gli indici *equal weight*. Sono infatti le società più piccole quelle che sono oggetto di sostituzione da parte delle nuove entranti selezionate per il paniere di componenti.

Può apparire singolare il fatto che i portafogli *cap weighted*, dopo essere stati rigettati in quanto meno efficienti sia sulla base dell'analisi empirica sia grazie alle elaborazioni teoriche sin qui esposte, mostrino un potenziale vantaggio rispetto all'equiponderazione grazie ad un fattore esplicitamente escluso dalle ipotesi del CAPM.

E' necessario, in primo luogo, considerare l'effetto distorsivo sui prezzi provocato dall'effetto-annuncio dell'inclusione/esclusione di titoli dai principali indici azionari. Tale fenomeno influenza negativamente le *performance* delle società di cui è stata indicata la cancellazione dal paniere e positivamente, di converso, il rendimento delle azioni che le sostituiranno, comportando un costo implicito a carico dell'investitore indicizzato.¹¹⁵ D'altro canto, l'impatto di questo

¹¹⁴ Non a caso la tecnica della ponderazione per il flottante è stata sviluppata nel corso della cosiddetta "bolla della New Economy", quando società ancora in gran parte di proprietà del loro *management* e dei fondi di *private equity* avevano raggiunto capitalizzazioni di borsa elevate, cui però non corrispondeva un'altrettanto ampia disponibilità di titoli sul mercato.

¹¹⁵ Il primo contributo allo studio di questa anomalia è stato pubblicato in Goetzmann, Garry (1986), mentre la trattazione più aggiornata sul tema è presente in Petajisto (2011).

cosiddetto “index premium” è già incluso nelle *performance* degli indici analizzati nel presente studio e appare quindi insufficiente a contrastare gli effetti positivi sugli indici equiponderati derivanti dai fattori già esposti, nonostante a essere escluse/incluse nei panieri siano proprio le aziende a minore capitalizzazione.

Gli indici equiponderati, a differenza di quelli *value weighted*, devono sottoporre a ribilanciamento i loro componenti le cui *performance* si siano discostate da quella dell’indice stesso. Il *turnover* di questa categoria di indici è quindi tanto più elevato quanto più di frequente l’*index provider* decide di riportare i pesi all’originaria frazione $1/N$.¹¹⁶ Questo *turnover* “strutturale” è approssimato dal rapporto tra lo scarto medio assoluto (*mean absolute dispersion*, *MAD*) dei rendimenti e il fattore di montante dell’indice, calcolati entrambi sull’orizzonte temporale di ribilanciamento (mese, trimestre, ecc.):

$$\textit{turnover}_{\textit{strutturale}} \approx \frac{\sum_{i=1}^N |R_i - R_p|}{N(1 + R_p)} = \frac{\textit{MAD}}{(1 + R_p)}$$

L’indice S&P 500 Equal Weight è stato soggetto ad un *turnover* medio, tra il 2005 e il 2009, del 28,1% annuo, contro il 2,8% della versione *cap weighted*.¹¹⁷ Entrambi gli indici sono sottoposti a revisione trimestrale, esattamente come gli indici equiponderati calcolati da Russell e l’Euro Stoxx 50 EW. Al contrario, il Wilshire 5000 EW è ribilanciato ogni mese, mentre estremamente problematica sarebbe la replica puntuale del Value Line New Arithmetic. Quest’ultimo indice è calcolato quotidianamente come media aritmetica dei suoi ~1.700 titoli: di fatto, questa procedura implica che ogni giorno i pesi dei componenti siano riscaldati alla frazione $1/N$.

¹¹⁶ Se il *timing* dei ribilanciamenti fosse stato affrontato con la dovuta attenzione da parte dei gestori del primo fondo indicizzato, forse la storia dell’*asset management* avrebbe seguito un percorso differente. Nel 1971 la società statunitense Samsonite incaricò la Wells Fargo, in collaborazione con l’Università di Chicago, di costituire un nuovo fondo pensione che seguisse una strategia d’investimento passiva: nacque così il Samsonite Luggage Fund. Nonostante la teoria del CAPM fosse ormai nota, i gestori ritennero che un indice equiponderato sarebbe stato maggiormente rappresentativo dell’andamento del mercato e dell’economia nel suo complesso. Per mantenere il più possibile costanti le proporzioni di investimento fu deciso di effettuare il ribilanciamento quotidianamente. La gestione divenne ben presto un “nightmare”, nelle parole dell’*asset manager* William Fouse, comportando elevati costi di transazione, che causarono la chiusura del fondo nel 1976 (Schoenfeld, 2004).

¹¹⁷ Dash, Zeng (2010).

Per esemplificare l'impatto dell'orizzonte temporale di ribilanciamento è utile osservare i risultati delle simulazioni condotte dalla società Russell, in un arco temporale di 14 anni (luglio 1996-giugno 2010), sul proprio indice Russell 1000 SEW (tabella 23). Ribilanciamenti più rari consentono di limitare l'impatto del *turnover*, ma al contempo l'investitore deve affrontare superiori scostamenti dall'equiponderazione perfetta, misurati dalla *tracking error volatility*.

Tabella 23: Effetti della frequenza di ribilanciamento sull'indice Russell 1000 SEW

Frequenza di ribilanciamento	Tracking error volatility annua	Turnover annuo
Giornaliera	0,00%	177,67%
Mensile	1,03%	39,09%
Trimestrale	1,76%	26,15%
Semestrale	2,32%	21,33%
Annuale	4,60%	16,08%

Fonte: Velvadapu (2011).

Considerando che attualmente, per un operatore *non-retail*, i costi di transazione sul mercato azionario statunitense, comprendenti le commissioni e l'impatto dello *spread* denaro-lettera, sono sempre inferiori allo 0,1%,¹¹⁸ la contrazione della *performance* per un investimento indicizzato all'S&P 500 EWI è pari allo 0,0281% annuo, contro lo 0,0028% nel caso di replica dell'S&P 500 tradizionale. Il differenziale dello 0,0253% annuo risulta quindi sostanzialmente ininfluenza.

Alla luce del limitato impatto dei costi di transazione, il meccanismo del *turnover* non appare inficiare il giudizio espresso in capo agli indici *equal weight*, salvo nel caso, non verificatosi in questo campione, di un livello di efficienza prossimo a quello di una versione *value weighted* del medesimo portafoglio di titoli azionari.

¹¹⁸ Plyakha et al. (2011).

Conclusioni

Alla luce delle analisi effettuate, è possibile concludere che la scelta di indici del mercato azionario, sia allo scopo di replica passiva sia allo scopo di *performance evaluation* di un portafoglio attivo, richiede un'approfondita analisi delle loro caratteristiche costruttive.

Le tecniche di valutazione impiegate in questo studio hanno consentito di giungere a risultati sostanzialmente univoci, seppure sia necessario evidenziare la limitata capacità discriminante dimostrata dal *test* GRS in condizioni di accentuata non-normalità. Si ritiene quindi che sia opportuno il ricorso a tecniche di simulazione, come quelle impiegate nei *test* di Wald e GMM e nell'applicazione del *resampling* alla misura di Kandel e Stambaugh, date le caratteristiche delle distribuzioni dei rendimenti dei titoli azionari e le problematiche derivanti dalla stima dei loro parametri sulla base di serie storiche di durata limitata.

Tra le caratteristiche costruttive degli indici, il trattamento dei proventi è risultato cruciale per l'incremento dell'efficienza, sconsigliando quindi l'impiego sia degli indici di prezzo sia di quelli *gross total return*, i primi in quanto dominati dalle tecniche che prevedono il reinvestimento degli utili, i secondi solamente perché fondati su ipotesi di calcolo irrealistiche.

Ancor più rilevante appare il ruolo svolto dal metodo di ponderazione. Se già la teoria finanziaria escludeva la razionalità del *price weighting*, i risultati di questa analisi hanno attribuito una netta superiorità alle tecniche di equiponderazione rispetto al *cap weighting*. Queste evidenze empiriche, per quanto in netto contrasto con il Capital Asset Pricing Model, sono corroborate da un'ampia letteratura.

Nel primo capitolo sono state infatti approfondite le diverse forme che assume il concetto di efficienza, gettando implicitamente le basi teoriche per un approccio critico nei confronti del modello di Sharpe, Lintner e Mossin. Il quarto capitolo,

sulla scorta dei risultati conseguiti, ha esplorato le molteplici, differenti e probabilmente concomitanti motivazioni scientifiche a favore del ricorso all'equiponderazione. Una volta che siano poste in discussione alcune delle ipotesi più irrealistiche del CAPM, anche nella sua versione più generale concepita da Fischer Black, il portafoglio ottimo non è più necessariamente ponderato per la capitalizzazione dei suoi componenti.

La stima dei parametri necessari all'ottimizzazione di portafoglio è stata individuata come il problema fondamentale dell'*asset management* sin dal primo articolo di Markowitz sulla Modern Portfolio Theory. Nel 1952 l'allora dottorando e futuro premio Nobel riponeva la sua fiducia nella possibilità di valutare con sufficiente precisione i rendimenti attesi e le matrici di varianza-covarianza dei titoli.¹¹⁹ Dopo sessant'anni questo traguardo non è ancora stato raggiunto.

D'altro canto, l'impianto teorico proposto da DeMiguel, Garlappi e Uppal riguardo all'impatto dell'*estimation error* ha una portata unificante rispetto sia alle ipotesi di piena razionalità degli operatori economici sia riguardo all'opposta concezione tipica della finanza comportamentale. Esso infatti consente di ricondurre ad un paradigma di razionalità le scelte di *asset allocation* apparentemente subottimali compiute da molti investitori, una volta che sia tenuta nella dovuta considerazione l'incertezza sui parametri delle distribuzioni dei rendimenti.

¹¹⁹“One suggestion as to tentative μ_i, σ_{ij} is to use the observed μ_i, σ_{ij} for some period of the past. I believe that better methods, which take into account more information, can be found. I believe that what is needed is essentially a “probabilistic” reformulation of security analysis. I will not pursue this subject here, for this is “another story”. It is a story of which I have read only the first page of the first chapter.” Markowitz (1952), p. 91.

Bibliografia

- Arnott, Robert D., Jason Hsu, Philip Moore (2005) Fundamental Indexation. *Financial Analysts Journal*, 61 (2), 83-99.
- Banz, Rolf W. (1981) The Relationship Between the Return and Market Value of Common Stock. *Journal of Financial Economics*, 9 (1), 3-18.
- Basile, Ignazio (a cura di) (2002) *Benchmark e performance dei portafogli azionari e obbligazionari*. Roma: Bancaria Editrice.
- Benartzi, Shlomo, Richard H. Thaler (2001) Naive Diversification Strategies in Defined Contribution Saving Plans. *The American Economic Review*, 91 (1), 79-98.
- Berndt, Ernst R., N. Eugene Savin (1977) Conflict among Criteria for Testing Hypotheses in the Multivariate Linear Regression Model. *Econometrica*, 45 (5), 1263-1277.
- Best, Micheal J., Robert R. Grauer (1985) Capital Asset Pricing Compatible with Observed Market Value Weights. *The Journal of Finance*, 40 (1), 85-103.
- Best, Micheal J., Robert R. Grauer (1991) On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means. Some Analytical and Computational Results. *The Review of Financial Studies*, 4 (2), 315-342.
- Black, Fischer (1972) Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *The Journal of Business*, 45 (3), 444-455.
- Black, Fischer, Michael C. Jensen, Myron Scholes (1972) The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. In Michael C. Jensen (a cura di) *Studies in the Theory of Capital Markets*, New York, NY: Praeger, 79-121.
- Bloomfield, Ted, Richard Leftwich, John B. Long (1977) Portfolio Strategies and Performance. *Journal of Financial Economics*, 5 (2), 201-218.

- Bodie, Zvi, Alex Kane, Alan J. Marcus (2009) *Investments*. 8th ed. New York, NY: McGraw-Hill.
- Brans, Jean-Pierre (1982) *L'ingénierie de la décision. Elaboration d'instruments d'aide à la décision. Méthode PROMETHEE*, Québec: Université Laval.
- Campbell, John Y., Andrew W. Lo, A. Craig MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Carhart, Mark M. (1997) On Persistence in Mutual Fund Performance. *The Journal of Finance*, 52 (1), 57-82.
- Chopra, Vijay K., William T. Ziemba (1993) The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *The Journal of Portfolio Management*, 19 (2), 6-11.
- Chou, Pin-Huang, Guofu Zhou (2006) Using Bootstrap to Test Portfolio Efficiency. *Annals of Economics and Finance*, 7 (2), 217-249.
- Cowles, Alfred (1933) Can Stock Market Forecasters Forecast? *Econometrica*, 1 (3), 309-324.
- Cowles, Alfred (1944) Stock Market Forecasting. *Econometrica*, 12 (3-4), 206-214.
- Das, Sanjiv, Harry Markowitz, Jonathan Scheid, Meir Statman (2010) Portfolio Optimization with Mental Accounts. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (45) 2, 311-344.
- Dash, Srikant, Liyu Zeng (2010) *Equal Weight Indexing. Seven Years Later*. New York, NY: S&P Indices.
- de Finetti, Bruno (1940) Il problema dei «pieni». *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 18 (1), 1-88.
- DeMiguel, Victor, Lorenzo Garlappi, Raman Uppal (2009) Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient Is the 1/N Portfolio Strategy? *The Review of Financial Studies*, 22 (5), 1915-1953.

- Dibvig, Philip H., Stephen A. Ross (1985) The Analytics of Performance Measurement Using a Security Market Line. *The Journal of Finance*, 40 (2), 401-416.
- Duchin, Ran, Haim Levy (2009) Markowitz Versus the Talmudic Portfolio Diversification Strategies. *The Journal of Portfolio Management*, 35(2), 71-74.
- Efron, Bradley (1979) Computer and the Theory of Statistics: Thinking the Unthinkable. *SIAM Review*, 21 (4), 460-480.
- Elton, Edwin J., Martin J. Gruber, Sanjiv Das, Matthew Hlavka (1993) Efficiency with Costly Information: A Reinterpretation of Evidence from Managed Portfolios. *The Review of Financial Studies*, 6 (1), 1-22.
- Fabozzi, Frank J., Sergio M. Focardi, Petter Kolm (2006) *Financial Modeling of the Equity Market: From CAPM to Cointegration*. Hoboken, NJ: John Wiley, Sons.
- Fabozzi, Frank J., Francis Gupta, Harry M. Markowitz (2002) The Legacy of Modern Portfolio Theory. *The Journal of Investing*, 11 (3), 7-22.
- Fama, Eugene F. (1970) Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25 (2), 383-417.
- Fama, Eugene F., Kenneth R. French (2004) The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18 (3), 25-46.
- Fama, Eugene F., James D. MacBeth (1973) Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests. *The Journal of Political Economy*, 81 (3), 607-636.
- Fisher, Kenneth L., Meir Statman (1997a) The Mean-Variance-Optimization Puzzle: Security Portfolios and Food Portfolios. *Financial Analysts Journal*, 53 (4), 41-50.
- Fisher, Kenneth L., Meir Statman (1997b) Investment Advice from Mutual Fund Companies. Closer to the Talmud than to Markowitz. *The Journal of Portfolio Management*, 24 (1), 9-25.

- Frankfurter, George M., Herbert E. Phillips, John P. Seagle (1971) Portfolio Selection: The Effects of Uncertain Means, Variances, and Covariances. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6 (5), 1251-1262.
- Frankfurter, George M. (1976) The Effect of “Market Indexes” on the Ex-Post Performance of the Sharpe Portfolio Selection Model. *The Journal of Finance*, 31 (3), 949-955.
- French, Craig W. (2003) The Treynor Capital Asset Pricing Model. *Journal of Investment Management*, 1 (2), 60-72.
- Gibbons, Michael R., Stephen A. Ross, Jay Shanken (1989) A Test for the Efficiency of a Given Portfolio. *Econometrica*, 57 (5), 1121-1152.
- Goetzmann, William N., Mark Garry (1986) Does Delisting from the S&P 500 Affect Stock Price? *Financial Analysts Journal*, 42 (2), 64-69.
- Goetzmann, William N., Roger G. Ibbotson (1994) Do Winners Repeat? *The Journal of Portfolio Management*, 20 (2), 9-18.
- Green, Richard C. (1986), Benchmark Portfolio Inefficiency and Deviations from the Security Market Line. *The Journal of Finance*, 41 (2), 295-312.
- Greene, William H. (2003) *Econometric Analysis*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Grinold, Richard C. (1992) Are Benchmark Portfolios Efficient? *The Journal of Portfolio Management*, 19 (1), 34-40.
- Gruber, Martin J. (1996) Another Puzzle: The Growth in Actively Managed Mutual Funds. *The Journal of Finance*, 51 (3), 783-810.
- Hall, Alastair R. (2005) *Generalized Method of Moments*. Oxford: Oxford University Press.
- Hansen, Lars Peter (1982) Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50 (4), 1029-1054.
- Haugen, Robert A., Nardin L. Baker (1991) The Efficient Market Inefficiency of Capitalization-weighted Stock Portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 17 (3), 35-40.

- Hsu, Jason (2006) Cap-weighted Portfolios Are Sub-optimal Portfolios. *Journal of Investment Management*, 4 (3), 1-10.
- Huberman, Gur, Wei Jiang (2006) Offering versus Choice in 401(k) Plans: Equity Exposure and Number of Funds. *The Journal of Finance*, 61 (2), 763-801.
- Jobson, John D., Robert M. Korkie (1980) Estimation for Markowitz Efficient Portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, 75 (371), 544-554.
- Jobson, John D., Robert M. Korkie (1981) Putting Markowitz Theory to Work. *The Journal of Portfolio Management*, 7 (4), 70-74.
- Jobson, John D., Robert M. Korkie (1982) Potential Performance and Tests of Portfolio Efficiency. *Journal of Financial Economics*, 10 (4), 433-466.
- Kan, Raymond, Guofu Zhou (2008) *Tests of Mean-Variance Spanning*. University of Toronto and Washington University in St. Louis. Working paper.
- Kandel, Shmuel, Robert F. Stambaugh (1995) Portfolio Inefficiency and the Cross-section of Expected Returns. *The Journal of Finance*, 50 (1), 157-184.
- Kumar, Alok (2009) Who Gambles in the Stock Market? *The Journal of Finance*, 64 (4), 1889-1933.
- Lehmann, Erich Leo, George Casella (1998) *Theory of Point Estimation*. 2nd ed. New York, NY: Springer.
- Levy, Moshe, Richard Roll (2010) The Market Portfolio May Be Mean/Variance Efficient After All, *The Review of Financial Studies*, 23 (6), 2464-2491.
- Lintner, John (1965) The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), 13-37.
- Lo, Andrew W., A. Craig MacKinlay (1990) Data-Snooping Biases in Tests of Financial Asset Pricing Models. *The Review of Financial Studies*, 3 (3), 431-467.

- Loomes, Graham, Robert Sudgen (1982) Regret Theory: An Alternative Theory of Rational Choice under Uncertainty. *The Economic Journal*, 92 (368), 805-824.
- MacKinlay, A. Craig, Matthew P. Richardson (1991) Using Generalized Method of Moments to Test Mean-Variance Efficiency. *The Journal of Finance*, 46 (2), 511-527.
- Malkiel, Burton S. (1973) *A Random Walk Down Wall Street*. New York, NY: W. W. Norton.
- Malkiel, Burton S. (1995) Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991. *The Journal of Finance*, 50 (2), 549-572.
- Markowitz, Harry M. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.
- Markowitz, Harry M. (1984) The Two Beta Trap. *The Journal of Portfolio Management*, 11 (1), 12-20.
- Markowitz, Harry M. (2005) Market Efficiency: A Theoretical Distinction and So What? *Financial Analysts Journal*, 61 (5), 17-30.
- Markowitz, Harry M. (2006) De Finetti Scoops Markowitz. *Journal of Investment Management*, 4 (3), 3-18.
- Michaud, Richard O., Robert O. Michaud (2008) *Efficient Asset Management*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press.
- Mossin, Jan (1966) Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34 (4), 768-783.
- Muirhead, Robb J. (1982) *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. New York, NY: John Wiley, Sons.
- Ni Xiaohui, Yannick Malevergne, Didier Sornette, Peter Woehrmann (2011) Robust Reverse Engineering of Cross-Sectional Returns and Improved Portfolio Allocation Performance Using the CAPM. *The Journal of Portfolio Management*, 37 (4), 76-85.

- Perold, André F. (2007) Fundamentally Flawed Indexing. *Financial Analysts Journal*, 63 (6), 31-37.
- Petajisto, Antti (2011) The Index Premium and Its Hidden Cost for Index Funds. *Journal of Empirical Finance*, 18 (2), 271-288.
- Plyakha, Yuliya, Raman Uppal, Grigory Vilkov (2011) *Why Does an Equal-Weighted Portfolio Outperform Value- and Price-Weighted Portfolios?* Goethe University Frankfurt, CEPR and EDHEC Business School. Working paper.
- Roll, Richard (1977) A Critique to the Asset Pricing Theory's Tests. Part I: On Past and Potential Testability of the Theory. *Journal of Financial Economics*, 4 (2), 129-176.
- Roll, Richard (1978) Ambiguity when Performance Is Measured by the Securities Market Line. *The Journal of Finance*, 33 (4), 1051-1069.
- Roll, Richard, Stephen A. Ross (1994) On the Cross-Sectional Relation between Expected Returns and Betas. *The Journal of Finance*, 49 (1), 101-121.
- Ross, Stephen A. (1980) A Test of the Efficiency of a Given Portfolio. Paper presentato alla *Econometric Society World Conference* di Aix-en-Provence.
- Roy, Andrew D. (1952) Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*, 20 (3), 431-449.
- Samuelson, Paul A. (1974) Challenge to Judgment. *The Journal of Portfolio Management*, 1 (1), 17-19.
- Savona, Roberto (2006) Tax-induced Dissimilarities Between Domestic and Foreign Mutual Funds in Italy. *Economic Notes*, 35 (2), 173-202.
- Schoenfeld, Steven A. (a cura di) (2004) *Active Index Investing*, Hoboken, NJ: John Wiley, Sons.
- Sentana, Enrique (2009) The Econometrics of Mean-variance Efficiency Tests: a Survey. *Econometrics Journal*, 12 (3), C65-C101.

- Shanken, Jay (1996) Statistical Methods in Tests of Portfolio Efficiency: A Synthesis. In *Handbook of Statistics, Vol. 14: Statistical Methods in Finance*, a cura di G. S. Maddala, C. R. Rao. Amsterdam: Elsevier Science.
- Shao, Jun, Dongsheng Tu (1995) *The Jackknife and Bootstrap*. New York, NY: Springer Verlag.
- Sharpe, William F. (1964) Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium. *The Journal of Finance*, 19 (3), 425-442.
- Sharpe, William F. (1991a) The Arithmetic of Active Management. *Financial Analysts Journal*, 47 (1), 7-9.
- Sharpe, William F. (1991b) Capital Asset Prices with and without Negative Holdings. *The Journal of Finance*, 46 (2), 489-509.
- Sharpe, William F. (2007) Expected Utility Asset Allocation. *Financial Analysts Journal*, 63 (5), 18-30.
- Shefrin, Hersh, Meir Statman (2000) Behavioral Portfolio Theory. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35 (2), 127-151.
- Tamari, Meir (1987) *With All Your Possession: Jewish Ethics and Economic Life*. New York, NY: The Free Press.
- Testuri, Carlos E., Stanislav Uryasev (2004) On Relation between Expected Regret and Conditional Value-At-Risk. In Zari Rachev (a cura di) *Handbook of Computational and Numerical Methods in Finance*, Boston, MA: Birkhauser, 2004, 361-373.
- Tobin, James (1958) Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, 25 (2), 65-86.
- Treynor, Jack (2005) Why Market-Valuation-Indifferent Indexing Works. *Financial Analysts Journal*, 61 (5), 65-69.
- Tu, Jun, Guofu Zhou (2011) Markowitz Meets Talmud: A Combination of Sophisticated and Naive Diversification Strategies. *Journal of Financial Economics*, 99 (1), 204-215.

- Velvadapu, Pradeep (2011) The Evolution of Equal Weighting, *Journal of Indexes*, 14 (1), 20-29.
- Windcliff, Heath, Phelim P. Boyle (2004) The $1/n$ Pension Investment Puzzle. *North American Actuarial Journal*, 8 (3), 32-45.
- Zhou, Guofu (1993) Asset-pricing Tests under Alternative Distributions. *The Journal of Finance*, 48 (5), 1927-1942.
- Zweig, Jason (1998) How the Big Brains Invest at TIAA-CREF. *Money*, 27 (1), 114-118.