

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

**DOTTORATO DI RICERCA IN**

**Ingegneria Energetica, Nucleare e del Controllo Ambientale**

Ciclo XXI

**Settore scientifico-disciplinare di afferenza: ING-IND/19 IMPIANTI NUCLEARI**

**Analisi di Sistemi a rete  
e applicazioni di Misure di Importanza**

**Presentata da:** Stefano La Rovere

**Coordinatore Dottorato**

Prof. Antonio Barletta

**Relatore**

Prof. Ruben Scardovelli

**Esame finale anno 2010**

---

*Al mio impegno*

---

## SOMMARIO BREVE

Lo studio ha per oggetto l'analisi delle caratteristiche di disponibilità e vulnerabilità di sistemi che si configurano in termini di "rete"; ne sono un esempio le infrastrutture per la distribuzione di fluidi, di energia elettrica, di dati ..... Più in generale, è valutato l'utilizzo di Misure Differenziali per l'analisi di Importanza di sistemi costituiti da componenti soggetti a guasto e riparazione, anche in presenza di fenomeni di invecchiamento.

Lo studio ha permesso di ottenere i seguenti risultati principali in tema di analisi di "Sistemi a rete":

- è fornita una definizione di Sistema a rete utile alle valutazioni di disponibilità e vulnerabilità di infrastrutture di distribuzione; le prestazioni del Sistema sono definite in termini di "Rischi parziali" riferiti ai singoli nodi Utilizzatori e di "Rischio complessivo" riferito alla rete nel suo complesso;
- sono individuate metodologie di analisi che non richiedono la conoscenza analitica delle "Funzioni di Sistema", come l'identificazione delle configurazioni che la rete può assumere (Numerazione degli stati) e l'utilizzo di metodi MonteCarlo; in entrambi i casi, un algoritmo ad Automa Cellulare è utilizzato per la "soluzione della rete";
- è proposto un approccio di indagine della Struttura di un Sistema a rete che, prescindendo dalle caratteristiche specifiche dei suoi elementi, si concretizza nella definizione di un loro ordinamento con un significato di "Importanza" e "Sensibilità"; a tal fine, le definizioni delle Misure Differenziali di Importanza (del primo ordine, del secondo ordine e "totale") e di una Misura Ibrida consistente con un approccio di Decomposizione della varianza sono riferite all'analisi di Sistemi a rete; l'utilizzo di misure additive permette di definire un ordinamento dei nodi Utilizzatori ("infallibili"), come "indotto" dall'ordinamento delle Connessioni (soggette a guasto e riparazione);
- sono fornite espressioni analitiche utili alla stima delle Misure per l'analisi della Struttura della rete; più in generale, è verificata l'applicabilità di metodi di stima differenti, analitici o che richiedono l'utilizzo di Tecniche di campionamento.

Parte dei risultati hanno una validità generale e forniscono un contributo innovativo in tema di affidabilità e sicurezza:

- per un sistema "multi-funzione", è evidenziata la necessità di definire e riferire le Misure di Importanza e Sensibilità alle sue prestazioni complessive;
- è proposto l'utilizzo di due tecniche di Campionamento dell'Importanza di applicabilità sufficientemente generale (Forzatura "del Guasto Certo" e Forzatura "della Transizione Specifica"), quando l'analisi è realizzata mediante metodi MonteCarlo e sono considerati valori "realistici" dei parametri che definiscono l'Indisponibilità dei componenti;
- è proposto un approccio generale per l'analisi della Struttura del sistema; le valutazioni sono riferite all'intervallo di variazione di ciascuna variabile; le Misure Differenziali sono utilizzate per valutare l'Importanza di ciascun componente, singolo e/o in relazione con i restanti componenti e per l'ottenimento di informazioni sulla "dominanza" delle relazioni (AND / OR) che lo interessano; la Misura ibrida è utilizzata per definire un ordinamento con significato di Sensibilità, da utilizzare come indagine preliminare allo sviluppo di una analisi "Globale" di Incertezza;
- sono fornite le espressioni analitiche per la stima della Misura Differenziale di Importanza del primo e del secondo ordine, riferita ai parametri caratteristici di componenti soggetti a guasto e riparazione, con eventuali fenomeni di invecchiamento;
- è proposta una relazione tra il Periodo di manutenzione ed il Tasso di guasto dei componenti che, riconoscendo gli interventi di manutenzione preventiva come necessari ed efficaci solo in presenza di fenomeni di invecchiamento, realizza una "naturale" ottimizzazione della politica manutentiva;

*I risultati ottenuti sono stati presentati in convegni nazionali (VGR2006) e internazionali (PSAM8 2006, PSAM9 2007) o sono in corso di presentazione / pubblicazione su rivista.*

*Avendo fornito elementi utili alla definizione di una strategia complessiva di analisi di Sistemi a rete e, più in generale, avendo contribuito alla definizione di metodi e modelli per l'analisi di sistemi costituiti da componenti soggetti a guasto e riparazione, con eventuali fenomeni di invecchiamento, si ritiene raggiunto lo scopo ultimo dello studio.*

## SOMMARIO ESTESO

Lo studio ha per oggetto l'analisi delle caratteristiche di disponibilità e vulnerabilità di sistemi che si configurano in termini di "rete"; ne sono un esempio le infrastrutture per la distribuzione di fluidi (sistemi di approvvigionamento idrico, distribuzione gas, distribuzione di fluidi di servizio in impianti di processo,...), di energia elettrica (sistemi di distribuzione in alta, media e bassa tensione), di dati (sistemi di telecomunicazione, sistemi per il telecontrollo-telecomando), .....

Lo studio è stato realizzato con due obiettivi principali: fornire una definizione di "Sistema a rete" e delle relative prestazioni che risulti utile alle valutazioni di disponibilità e vulnerabilità di infrastrutture di distribuzione e identificare, integrare e verificare l'applicazione di modelli, metodi e tecniche per l'analisi di Sistemi a rete. Un ulteriore obiettivo, con un campo di applicazione più generale, riguarda l'utilizzo di Misure Differenziali di Importanza per l'analisi di sistemi costituiti da componenti soggetti a guasto e riparazione, anche in presenza di fenomeni di invecchiamento.

In ambito RAM (Reliability, Availability, Maintainability), interessa fornire una stima delle prestazioni del Sistema, esatta o approssimata, a partire da valori "realistici" dei "parametri caratteristici" degli elementi soggetti a guasto e riparazione. Come indagine di primo approccio in ambito RAM o per lo sviluppo di un'analisi di rischio riferita ad atti intenzionali (Security Assessment), interessa indagare la "Struttura" del Sistema, prescindendo dalle caratteristiche dei suoi elementi.

Un "Sistema a rete" costituisce il "modello di una infrastruttura dedicata alla distribuzione di un bene verso un utenza diffusa sul territorio, con un livello di astrazione tale da rappresentare i componenti fisici soggetti a guasto e riparazione mediante Connessioni orientate, che permettono la raggiungibilità dei nodi Utilizzatori da uno o più nodi Sorgente". Le prestazioni di un Sistema a rete devono essere riferite a ciascuna utenza ed all'intero territorio servito. A tal fine, è proposta una definizione del "Rischio complessivo" associato ad un Sistema a rete, somma dei "Rischi parziali" riferiti ai singoli nodi Utilizzatori. Alla non raggiungibilità di un nodo Utilizzatore da almeno un nodo Sorgente è assegnato un "danno" (ad esempio, in relazione al numero di utenti serviti); a ciascuna configurazione che la rete può assumere è associato un "danno complessivo", pari alla somma del danno prodotto dai nodi Utilizzatori che risultano non raggiungibili in tale stato. Per l'analisi di Sistemi di medio-piccole dimensioni (qualche decina di elementi) è proposta l'identificazione esplicita delle configurazioni che la rete può assumere in seguito al guasto / riparazione delle sue Connessioni (Numerazione degli stati del Sistema); la "Tabella degli stati" fornisce una rappresentazione del modello alternativa alla conoscenza analitica delle "Funzioni di Sistema", da riferire a ciascun nodo Utilizzatore.

"L'esplosione combinatoria" del numero di configurazioni della rete all'aumentare del numero di elementi soggetti a guasto e riparazione, rende la Numerazione degli stati non proponibile per l'analisi Sistemi complessi. In tali casi, è proposto l'utilizzo di metodi MonteCarlo per la simulazione della vita operativa del Sistema. L'accuratezza della stima, infatti, dipende dal valore della/e grandezza/e di interesse ma non dal numero delle variabili del modello.

Per la "soluzione della rete", intesa come verifica della raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore, da almeno un nodo Sorgente, mediante almeno un percorso costituito da Connessioni disponibili, è utilizzato un algoritmo ad Automa Cellulare, integrato nella simulazione MonteCarlo o a supporto della compilazione della Tabella degli stati del Sistema.

Nel considerare valori "realistici" dei parametri che definiscono l'Indisponibilità delle Connessioni, l'utilizzo di metodi MonteCarlo richiede l'impiego di opportune Tecniche di riduzione della varianza. Per la stima dell'Indisponibilità di sistemi costituiti da componenti riparabili è necessario agevolare il campionamento degli eventi multipli di guasto, stante il differente ordine di grandezza tipico dei Tassi di guasto e dei Tassi di riparazione. Per l'analisi di Sistemi a rete tale circostanza è aggravata dalla presenza di percorsi ridondanti che permettono la raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore. Nello studio è proposto l'utilizzo di due tecniche di Campionamento dell'Importanza, di applicabilità sufficientemente generale (Forzatura del Guasto Certo e Forzatura della Transizione Specifica).

L'analisi della Struttura del Sistema si concretizza nella definizione di un ordinamento dei suoi elementi che prescinde dalle caratteristiche specifiche di ciascuno.

Nello studio si distingue tra un ordinamento degli elementi del Sistema con significato di "Importanza" e un ordinamento con significato di "Sensitività". Un ordinamento con significato di "Importanza" è realizzato con riferimento ai valori noti (privi di incertezza) delle variabili di ingresso del modello; l'ordinamento è definito dal contributo sulla variabile di uscita (Rischi parziali e Rischio complessivo associato al Sistema a rete) dovuto a ciascuna variabile di ingresso (Indisponibilità di una specifica Connessione), considerata singolarmente o in qualsiasi combinazione e numero con le restanti variabili. Un ordinamento degli elementi del Sistema con significato di "Sensitività" è realizzato con riferimento alle incertezze che caratterizzano le variabili di ingresso del modello; l'ordinamento è definito dal contributo sulla incertezza associata alla variabile di uscita dovuta alla incertezza associata a ciascuna variabile di ingresso (Analisi di Sensitività) ovvero dalla propagazione della variabilità delle variabili di ingresso sulle variabili di uscita del modello (Analisi di incertezza).

Una analisi di Importanza e/o Sensitività ha l'obiettivo di fornire un ordinamento delle variabili che, nelle versioni più "s sofisticate", vuole tener conto delle "interazioni" che tra loro intercorrono e che si manifestano con la loro variazione contemporanea. Per un Sistema a rete costituito da componenti riparabili si identificano tre potenziali fonti di interazioni: relazioni tra i "parametri caratteristici" che definiscono il modello di Indisponibilità di ciascun componente; relazioni che intercorrono tra i Rischi parziali riferiti ai diversi nodi Utilizzatori; relazioni dovute alle caratteristiche intrinseche della Struttura della rete. Tali interazioni sono associate alla presenza nella espressione analitica delle Funzioni di Sistema di termini non lineari (se riferite ai parametri caratteristici) o di termini lineari ma di ordine superiore al primo (prodotto tra l'Indisponibilità di più Connessioni in logica AND, se riferite agli eventi).

Lo studio considera il modello di Indisponibilità di un componente binario, assumendo una distribuzione di probabilità esponenziale per i processi di guasto e riparazione, con o senza fenomeni di invecchiamento. Se non sussistono dipendenze tra i parametri caratteristici di componenti diversi, il modello del Sistema può essere analizzato assumendo come variabili di ingresso l'Indisponibilità dei componenti. La definizione del Rischio complessivo associato al Sistema come somma dei Rischi parziali riferiti ai singoli nodi Utilizzatori permette di non introdurre ulteriori interazioni tra le variabili, almeno fintanto che il danno associato alla non raggiungibilità di un nodo Utilizzatore è un parametro certo. La "Struttura" del Sistema a rete introduce le interazioni tra le variabili del modello (Indisponibilità delle Connessioni) di cui è necessario tener conto.

Come ipotesi iniziale per indagare la Struttura del Sistema a rete è assunto lo stesso valore di Indisponibilità (asintotica) pari a 0,5 per tutte le Connessioni. In tal caso, la probabilità che la rete assuma una specifica configurazione è la medesima per tutte le configurazioni; il suo valore dipende unicamente dal numero di Connessioni.

La Struttura della Sistema a rete è analizzata mediante l'applicazione di Misure di Importanza e Sensitività. A tal fine, è fornita la definizione delle Misure Differenziali di Importanza del primo ordine, del secondo ordine e "totale" e la definizione di una Misura Ibrida di Sensitività consistente con un approccio di Decomposizione della varianza, da utilizzare per l'analisi di Sistemi a rete.

Entrambe le misure sono riferite al Rischio complessivo associato al Sistema. Nella definizione della Misura Ibrida, inoltre, sono considerate le correlazioni esistenti tra i Rischi parziali, che caratterizzano la Struttura della rete. Più in generale, lo studio evidenzia la necessità per sistemi "multi-funzione" di definire e riferire le Misure di Importanza e Sensitività alle sue prestazioni complessive.

Come approccio complessivo di indagine, è realizzato un ordinamento delle Connessioni, soggette a guasto e riparazione, mediante l'utilizzo di misure additive, come la Misura Differenziale di Importanza del primo ordine e la Misura Ibrida di Sensitività. Tali misure sono utilizzate per definire un ordinamento di Importanza e di Sensitività dei nodi Utilizzatori del Sistema a rete.

---

Nel testo sono fornite le espressioni analitiche utilizzabili per la stima delle Misure Differenziali di Importanza (del primo e del secondo ordine) nel caso particolare, di interesse per l'analisi della Struttura del Sistema, in cui è assunto lo stesso valore di Indisponibilità (0,5) per tutte le Connessioni.

Più generale, per la stima della Misura Differenziale di Importanza (del primo ordine), anche in corrispondenza di valori diversi per l'Indisponibilità delle Connessioni e/o per l'analisi di Sistemi costituiti da un elevato numero di elementi, è verificata l'applicabilità di metodi differenti quali la (ri-)valutazione del modello per una "variazione finita" delle variabili di ingresso e l'applicazione di Tecniche di campionamento e regressione lineare dei dati.

La stima della Misura Ibrida di Sensività è realizzata mediante la valutazione analitica della "propagazione" delle incertezze associate all'Indisponibilità delle Connessioni sui Rischi parziali e sul Rischio complessivo del Sistema a rete e mediante l'applicazione di Tecniche di campionamento.

Parte dei risultati ottenuti hanno una validità generale in tema di affidabilità e sicurezza di sistemi.

Se non sussistono dipendenze tra i parametri caratteristici di componenti diversi, le Indisponibilità dei componenti possono essere assunte come variabili di ingresso del modello; nel testo sono fornite le espressioni analitiche per la stima "a posteriori" delle Misure Differenziali di Importanza riferite ai parametri caratteristici di componenti soggetti a guasto e riparazione, con eventuali fenomeni di invecchiamento.

Volendo riconoscere che gli interventi di manutenzione preventiva sono necessari ed efficaci solo in presenza di fenomeni di invecchiamento, è proposta una diversa assunzione per la relazione che intercorre tra il Periodo di manutenzione ed il Tasso di guasto dei componenti e sono fornite le espressioni analitiche per la stima delle Misure differenziali del primo ordine riferite ai parametri caratteristici. Mediante un confronto con un caso di letteratura è evidenziato come tale assunzione realizzi una "naturale" ottimizzazione nella definizione della politica manutentiva.

Lo studio mostra la possibilità di realizzare una analisi della struttura di sistemi complessi mediante un approccio generale in cui, fermo restando l'assunzione della medesima Indisponibilità per tutti i componenti, le valutazioni sono riferite all'intero intervallo di variazione delle variabili [0,1].

L'applicazione delle Misure Differenziali permette di valutare l'Importanza di ciascun componente considerando i contributi al Rischio associati alla variazione della relativa Indisponibilità, singola (mediante la Misura del primo ordine) e/o contemporanea con la variazione dell'Indisponibilità dei restanti componenti in qualsiasi combinazione e numero (mediante la Misura totale), di valutare l'Importanza di coppie (o gruppi) di componenti, di identificare i componenti che costituiscono un Cut-set o un Path-set di ordine uno per una o più funzioni del Sistema e di avere informazioni sulla dominanza delle relazioni (logica AND / OR) che interessano ciascun componente.

L'applicazione della Misura Ibrida permette un ordinamento degli elementi del Sistema con significato di Sensività. La Misura Ibrida ha un contenuto informativo differente dalla Misura Differenziale di Importanza (del primo ordine) e può essere stimata senza oneri computazionali aggiuntivi. L'utilizzo di Tecniche di campionamento permette di generalizzarne la definizione e fornire una stima preliminare degli Indici di Sensività propri di una analisi "Globale" di Incertezza, da utilizzare come indagine preliminare.

## **POSSIBILI SVILUPPI**

Si individuano due principali indirizzi di sviluppo sui temi affrontati nel corso dello studio:

- applicazione e generalizzazione dei risultati avuti per l'analisi di più Sistemi a rete tra loro interconnessi;
- definizione di una metodologia complessiva di indagine, a supporto della pianificazione di "interventi di miglioramento", per sistemi costituiti da componenti soggetti a guasto, riparazione e fenomeni di invecchiamento, mediante l'utilizzo di Misure di importanza e sensitività, e sua implementazione.

# INDICE

<b>PARTE I</b> .....	<b>I</b>
<b>1 METODI DI SIMULAZIONE PER L'ANALISI DI SISTEMI</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Metodo MonteCarlo</b> .....	<b>1</b>
1.1.1 Stima di integrali definiti .....	1
1.1.2 Tecniche di riduzione della varianza .....	2
<b>1.2 Metodo MonteCarlo per l'analisi di sistemi</b> .....	<b>3</b>
<b>1.3 Metodi di simulazione per l'analisi di incertezza e Sensitività</b> .....	<b>5</b>
<b>1.4 Metodi di simulazione in presenza di dipendenze e correlazioni</b> .....	<b>6</b>
<b>2 MISURE DI IMPORTANZA PER L'ANALISI DI SISTEMI</b> .....	<b>8</b>
<b>2.1 Indisponibilità di sistemi costituiti da componenti riparabili</b> .....	<b>8</b>
2.1.1 Indisponibilità asintotica di un componente riparabile .....	8
2.1.2 Indisponibilità di un componente riparabile con fenomeni di invecchiamento .....	10
2.1.3 Indisponibilità di un sistema di componenti riparabili.....	11
<b>2.2 Misure di Importanza Locale</b> .....	<b>12</b>
2.2.1 Birnbaum measure.....	14
2.2.2 Criticality measure.....	14
2.2.3 Risk Reduction Worth .....	14
2.2.4 Risk Achievement Worth.....	14
2.2.5 Differential Importance Measure .....	15
2.2.6 Differential Importance Measure di ordine superiore.....	16
<b>3 ANALISI DI INCERTEZZA E SENSITIVITÀ</b> .....	<b>19</b>
<b>3.1 Approccio Locale e Globale per l'analisi delle incertezze</b> .....	<b>19</b>
<b>3.2 Analisi di Sensitività mediante un approccio Locale</b> .....	<b>20</b>
3.2.1 Varianza, Covarianza e Coefficiente di correlazione.....	20
3.2.2 Metodi analitici approssimati per l'Analisi di Sensitività.....	21
3.2.3 Analisi di Sensitività mediante Misure OAT.....	23
3.2.4 Analisi di Sensitività mediante Tecniche di regressione lineare .....	24
<b>3.3 Analisi di Sensitività mediante un approccio Globale</b> .....	<b>25</b>
3.3.1 Decomposizione della varianza.....	25
3.3.2 Decomposizione ANOVA .....	26
3.3.3 Definizione degli Indici di Sensitività .....	26
3.3.4 Stima degli Indici di Sensitività .....	28
<b>4 SISTEMI A RETE: STATO DELL'ARTE</b> .....	<b>29</b>
<b>4.1 Teoria dei grafi</b> .....	<b>29</b>
<b>4.2 Misure di centralità</b> .....	<b>30</b>
<b>4.3 Utilizzo di Misure di Importanza</b> .....	<b>30</b>
<b>4.4 Utilizzo di Metodi di simulazione</b> .....	<b>31</b>
<b>4.5 Algoritmi Automa Cellulare</b> .....	<b>31</b>

<b>PARTE II.....</b>	<b>32</b>
<b>5 MISURE DI IMPORTANZA PER SISTEMI DI COMPONENTI RIPARABILI.....</b>	<b>33</b>
5.1 Misure Differenziali di Importanza per componente riparabile.....	33
5.2 Misure Differenziali di Importanza per un sistema di componenti riparabili .....	35
5.3 Misure Differenziali di Importanza con fenomeni di invecchiamento .....	38
<b>6 ANALISI DI SISTEMI A RETE.....</b>	<b>45</b>
6.1 Definizione di Sistemi a rete .....	47
6.2 Metodologie per l'analisi di Sistemi a rete.....	47
6.2.1 Applicazione di algoritmi ad Automa cellulare.....	48
6.2.2 Numerazione degli stati del Sistema .....	49
6.2.3 Applicazione di metodi di simulazione.....	50
6.3 Rischi parziali e Rischio complessivo di Sistemi a rete .....	54
6.4 Analisi della Struttura di Sistemi a rete .....	56
6.5 Misure Differenziali di Importanza per l'analisi di Sistemi a rete.....	58
6.5.1 Misura Differenziale di Importanza del primo ordine .....	58
6.5.2 Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine.....	62
6.5.3 Misura Differenziale di Importanza totale .....	65
6.6 Misura Ibrida di Sensitività per l'analisi di Sistemi a rete .....	67
<b>7 CASO APPLICATIVO .....</b>	<b>72</b>
7.1 Valutazione dei Rischi parziali e del Rischio complessivo del Sistema .....	74
7.1.1 Soluzione esatta dalle Funzioni del Sistema.....	74
7.1.2 Soluzione esatta mediante Numerazione degli stati del Sistema.....	74
7.1.3 Soluzione mediante metodi MonteCarlo .....	75
7.2 Caratteristiche della Struttura della rete.....	77
7.2.1 Valutazione delle derivate parziali.....	77
7.2.2 Valutazione delle correlazioni tra i Rischi parziali del Sistema .....	82
7.3 Stima delle misure con significato di "Importanza" .....	85
7.3.1 Stima della Misura Differenziale di Importanza del primo ordine.....	86
7.3.2 Stima della Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine.....	89
7.3.3 Stima della Misura Differenziale di Importanza totale .....	92
7.4 Stima delle misure con significato di "Sensitività" .....	99
7.4.1 Stima della Misura Ibrida mediante Metodi analitici approssimati .....	100
7.4.2 Stima della Misura Ibrida mediante Tecniche di campionamento .....	102
7.4.3 Confronto tra la Misura Ibrida e la Misura Differenziale del primo ordine.....	105
7.4.4 Confronto tra la Misura Ibrida e gli Indici di Sensitività.....	107

## PREMESSA

Con riferimento alle problematiche di affidabilità e disponibilità, la modellazione delle infrastrutture di distribuzione ha ricevuto in passato attenzioni inferiori rispetto a quelle rivolte ai sistemi di processo, stoccaggio e produzione. La maggiore economicità di tali sistemi e la “ripartizione del danno”, generalmente in termini di disservizio, su una utenza distribuita sul territorio sono certamente tra le principali cause [45]. In anni recenti è cresciuto sensibilmente l’interesse rivolto alle cosiddette “Infrastrutture Critiche”; essenziale è stata la crescente consapevolezza della loro vulnerabilità rispetto ad azioni deliberate di sabotaggio e delle interdipendenze, fisiche e funzionali, che tra queste intercorrono.

Sebbene non esista una classificazione univoca e condivisa, tra le “Infrastrutture Critiche” sono generalmente inclusi i sistemi per la produzione, trasporto e distribuzione di energia, i sistemi di telecomunicazioni, i circuiti bancari e finanziari, i sistemi di trasporto (aereo, viario, ferroviario, navale ecc.). La presenza di molteplici forme di interdipendenza tra le Infrastrutture Critiche, molte delle quali caratterizzate da una configurazione a rete, è ormai riconosciuta a livello internazionale e oggetto di specifici indirizzi di ricerca [46].

In ambito RAM, lo studio delle caratteristiche di affidabilità e disponibilità di una infrastruttura di distribuzione permette di soddisfare molteplici esigenze: produrre stime previsionali sulla “continuità” del servizio offerto a ciascuna utenza; offrire un supporto nelle fasi di progettazione al fine di adottare una adeguata configurazione della rete; offrire supporto, sempre di carattere progettuale, durante la vita del Sistema in occasione di modifiche o potenziamenti; identificare i componenti “critici” in termini di impatto del relativo guasto sulle prestazioni complessive [45].

Per lo sviluppo di una analisi di rischio riferita ad atti intenzionali finalizzati a determinare la perdita di funzionalità di uno o più elementi del Sistema (Security Assessment) occorre generalmente prescindere dalla stima della probabilità “assoluta” degli eventi iniziatori. In tale contesto, si procede alla valutazione della vulnerabilità di ciascun elemento intesa come probabilità, condizionata al tentativo di sabotaggio, che l’atto abbia successo [56], [58], [59]. Le problematiche da affrontare nello studio delle vulnerabilità di una infrastruttura distribuita sono sostanzialmente differenti dalle problematiche tipiche di edifici o impianti localizzati. La topologia della infrastruttura, infatti, introduce interdipendenze tra i suoi elementi; queste determinano maggiori alternative per gli effetti di un evento di guasto e la possibilità che uno o più eventi contemporanei, ben specifici, possano produrre un danno particolarmente significativo [47].

Da quanto detto emerge uno specifico interesse per la disponibilità di modelli, metodi e tecniche di analisi di Sistemi a rete, con particolare riferimento alla valutazione delle caratteristiche intrinseche che derivano dalla specifica “Struttura”.

Lo studio si pone due obiettivi principali. In primo luogo interessa fornire una definizione di “Sistema a rete” utile alle valutazioni di disponibilità e vulnerabilità di infrastrutture di distribuzione ed una definizione delle prestazioni da assumere come riferimento. In conformità a tali definizioni, tenendo conto delle specificità del problema, si vuole identificare, integrare e verificare l’applicazione di modelli, metodi e tecniche di indagine di Sistemi a rete. Lo scopo ultimo è fornire gli elementi necessari per la definizione di una strategia complessiva di analisi di un Sistema a rete, da definire sulla base delle sue caratteristiche specifiche, del campo di applicazione e delle finalità dello studio.

Si individuano due principali campi di applicazione. Con riferimento ad applicazioni RAM, interessa realizzare una stima predittiva delle prestazioni del Sistema a rete, in forma esatta o approssimata, a partire da valori “realistici” dei parametri caratteristici degli elementi soggetti a guasto e riparazione. Come indagine di primo approccio in ambito RAM o per lo sviluppo di un Security assessment interessa investigare la “Struttura” del Sistema a rete, prescindendo dalla affidabilità o vulnerabilità delle Connessioni (rappresentati i componenti fisici) e dal danno prodotto dalla non raggiungibilità dei Nodi (rappresentanti le utenze distribuite).

---

Un ulteriore obiettivo dello studio, con un campo di applicazione più generale, riguarda l'applicazione delle Misure Differenziali di Importanza per l'analisi di sistemi costituiti da componenti soggetti a processi di guasto e riparazione, anche in presenza di fenomeni di invecchiamento.

Le principali problematiche affrontate nel corso dello studio riguardano: la necessità di procedere alla "soluzione della rete" prescindendo dalla conoscenza analitica delle Funzioni di Sistema; la necessità di applicare Tecniche di riduzione della varianza quando sono utilizzati metodi di simulazione MonteCarlo per la stima delle prestazioni di sistemi "reali"; la presenza in letteratura di definizioni alternative delle Misure di Importanza e le perplessità evidenziate sulla loro validità in relazione alla analisi di Incertezza e Sensività; le complicazioni derivanti dal riferire lo studio ai "parametri caratteristici" che definiscono il modello di Indisponibilità dei singoli elementi del Sistema.

Le attività realizzate a fronte delle suddette problematiche comprendono: la verifica della possibilità di applicare in modo integrato metodi MonteCarlo, Tecniche di riduzione della varianza e algoritmi ad Automa Cellulare per la "soluzione della rete"; la revisione critica delle Misure di Importanza proposte in letteratura, con particolare riferimento alle Misure Differenziali ed alle relazioni che intercorrono con le Misure di Importanza "tradizionali"; la realizzazione di approfondimenti specifici sui metodi proposti per l'Analisi di Incertezza e Sensività "Locale" (Metodi analitici approssimati, Tecniche di regressione lineare, Simulazioni OAT) e "Globale" (Indici di Sensività basati sulla Decomposizione della varianza); la verifica dei diversi approcci utilizzabili per la stima delle Misure di Importanza e Sensività.

La Parte I del documento fornisce una sintesi delle tecniche, dei metodi e dei modelli proposti in letteratura, che si ritengono adeguati ad essere applicati nell'analisi di sistemi costituiti da componenti riparabili; è inoltre fornita una breve descrizione dei principali indirizzi proposti in letteratura per lo studio di Sistemi a rete. Le informazioni riportate sono il risultato della revisione critica dello "stato dell'arte" in tema di applicazione di metodi di simulazione e di sviluppo di analisi di Importanza e Sensività. Il principale obiettivo è fornire una presentazione unitaria e coerente delle suddette tematiche e garantire una consistenza interna del documento. La trattazione è articolata nei seguenti capitoli principali:

§1 - Metodi di simulazione per l'analisi di sistemi ;

§2 - Misure di Importanza per l'analisi di sistemi;

§3 - Analisi di Incertezza e Sensività;

§4 - Sistemi a Rete: stato dell'arte.

La Parte II fornisce gli approfondimenti teorici sviluppati nel corso dello studio sui due argomenti di interesse: applicazione delle Misure Differenziali di Importanza a sistemi costituiti da componenti soggetti a guasto e riparazione; definizione e applicazione di modelli, metodi e tecniche per l'analisi di Sistemi a rete. La possibilità di indagare la Struttura di un Sistema a rete è mostrata mediante un Caso applicativo.

La trattazione è articolata nei seguenti capitoli principali:

§5 - Misure di Importanza per sistemi di componenti riparabili;

§6 - Analisi di Sistemi a rete;

§7 - Caso applicativo.

## LISTA DEI SIMBOLI E DEGLI ACRONIMI

- $A$  : Matrice di Adiacenza del grafo.
- $AC$  : algoritmo Automa Cellulare.
- $B_j$  : Birnbaum measure per il componente  $j$ .
- $C_j$  : Criticality measure per il componente  $j$ .
- $Cov[X, Y]$  : Covarianza tra  $X$  e  $Y$ .
- $DIM$  : Misura Differenziale di Importanza (Differential Importance measure).
- ${}^I DIM$  : Misura Differenziale di Importanza del primo ordine.
- ${}^I DIM_{\lambda, \lambda_0, a, \mu}$  : Misura Differenziale di Importanza del primo ordine riferita al parametro  $\lambda, \lambda_0, a, \mu$
- ${}^I DIM_j^i$  : Misura Differenziale di Importanza del primo ordine per la Connessione  $j$ , rispetto al nodo  $i$ .
- ${}^I DIM_j$  : Misura Differenziale di Importanza del primo ordine per la Connessione  $j$ , rispetto al Sistema.
- ${}^I DIM_{j,k}^i$  : Misura Differenziale di Importanza del primo ordine per le Connessioni  $j$  e  $k$ , rispetto al nodo  $i$ .
- ${}^I DIM_j^{i,l}$  : Misura Differenziale di Importanza del primo ordine per la Connessione  $j$ , rispetto ai nodi  $i$  e  $l$ .
- ${}^{II} DIM$  : Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine.
- ${}^{II-1} DIM$  : Contributo del primo ordine al  ${}^{II} DIM$ .
- ${}^{II-2} DIM$  : Contributo del secondo ordine al  ${}^{II} DIM$ .
- ${}^{II} DIM_{jk}$  : Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine per la coppia di Connessioni  $j$  e  $k$ .
- ${}^{II} DIM_j$  : Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine per la Connessione  $j$ .
- ${}^{II} DIM_{jk}^i$  : Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine per la coppia di Connessioni  $j$  e  $k$ , rispetto al nodo  $i$ .
- ${}^{II} DIM_j^i$  : Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine per la Connessione  $j$ , rispetto al nodo  $i$ .
- ${}^T D$  : Misura Differenziale di Importanza totale.
- ${}^{T-1} D$  : Contributo al  ${}^T D$  del primo ordine.
- ${}^{T-tot} D$  : Contributo al  ${}^T D$  di ordine superiore al primo.
- ${}^T D_j$  : Misura Differenziale di Importanza totale per la Connessione  $j$ .
- ${}^T D_j^i$  : Misura Differenziale di Importanza totale per la Connessione  $j$ , rispetto al nodo  $i$ .
- $I$  : Matrice di Incidenza del grafo.
- $I$  : Misura Ibrida di Sensitività.

- $^*I_i$  : Misura Ibrida di Sensitività con normalizzazione alternativa (stima di  $S_i$  );
- $^-I_i$  : Misura Ibrida di Sensitività da simulazione OAT- (stima approssimata di  $S_{Ti}$ );
- $I_j^i$  : Misura Ibrida di Sensitività della Connessione j, rispetto al nodo i.
- $I_j$  : Misura Ibrida di Sensitività della Connessione j.
- $I^i$  : Misura Ibrida di Sensitività del nodo i.
- $MC$  : metodi MonteCarlo.
- $N_j^+$  numero di stati del Sistema in cui la Connessione j è guasta.
- $N_j^-$  numero di stati del Sistema in cui la Connessione j è funzionante.
- $N_{jk}^{--}$  numero di stati del Sistema in cui la Connessione j e la Connessione K sono funzionanti.
- $N_{jk}^{+-}$  numero di stati del Sistema in cui la Connessione j è guasta e la Connessione K è funzionante.
- $N_{jk}^{-+}$  numero di stati del Sistema in cui la Connessione j è funzionante e la Connessione K è guasta.
- $N_{jk}^{++}$  numero di stati del Sistema in cui la Connessione j e la Connessione K sono guaste.
- $N[\bar{X}; \sigma_x]$  : distribuzione Normale con valore medio  $\bar{X}$  e deviazione standard.
- $Nc$  : numero di Connessioni.
- $Nn$  : numero di nodi Utilizzatori.
- $OAT$  : variazione singola di una variabile del modello (One-At-Time);
- $OAT -$  : variazione di tutte le variabili del modello, tranne la variabile in oggetto;
- $Pr[X]$  : probabilità di  $X$  .
- $Pr_s$  : probabilità che il Sistema sia nello stato s.
- $R$  : Rischio complessivo associato al Sistema a rete;
- $R^i$  : Rischio parziale associato al Sistema a rete, riferito al nodo Utilizzatore i;
- $RAW_j$  : Risk Achievement Worth per il componente j;
- $RRW_j$  : Risk Reduction Worth per il componente j;
- $R_U$  : Coefficiente di determinazione della regressione per  $U$  ;
- $SAIDI$  : System Average Interruption Duration Index.
- $S_i$  : Indice di Sensitività principale
- $S_{Ti}$  : Indice di Sensitività globale.
- $U$  Indisponibilità del componente / Sistema.

- 
- $U_j$  : Indisponibilità della Connessione j.
  - $U_j^0$  : valore iniziale dell'Indisponibilità della Connessione j.
  - $\Delta = U_j - U_j^0$  : variazione finita dell'Indisponibilità della Connessione j.
  - $U^i$  : Indisponibilità del nodo Utilizzatore i (probabilità che il nodo non sia raggiungibile);
  - $U^{j+}$  : Indisponibilità del Sistema quando la Connessione j è sempre guasta.
  - $U^{j-}$  : Indisponibilità del Sistema quando la Connessione j è sempre funzionante.
  - $U[X;Y]$  : distribuzione uniforme con valori limite X e Y.
  - $Var[X]$  : Varianza di X .
  - $w_i$  : peso associato al nodo Utilizzatore i, misura del danno prodotto in caso di non “raggiungibilità”.
  - $w_s$  : peso associato allo stato s del Sistema.
  - $x_j$  : stato della Connessione j.
  - $x_i$  : stato del nodo i.
  - $x_j^s$  : stato della Connessione j nello stato s del Sistema.
  - $x_i^s$  : stato del nodo i nello stato s del Sistema.
  - $\bar{X}$  : valore medio di X .
  - $\beta_i$  : Coefficiente standardizzato della regressione per la variabile i.
  - $\lambda$  : Tasso di guasto.
  - $\lambda_0$  : valore iniziale del Tasso di guasto per componenti soggetti a fenomeni di invecchiamento.
  - $a$  : parametro di “crescita” del Tasso di guasto per componenti soggetti a fenomeni di invecchiamento.
  - $\alpha$  : parametro di relazione tra Periodo di manutenzione e Valore efficace del Tasso di guasto, per componenti soggetti a fenomeni di invecchiamento.
  - $\sigma_{ij}$  : elementi  $i, j$  della Matrice di Covarianza tra le variabili di ingresso del modello.
  - $\lambda^*$  : Valore efficace del Tasso di guasto di componenti soggetti a fenomeni di invecchiamento.
  - $\mu$  : Tasso di riparazione.
  - $\rho_{X,Y}$  : Coefficiente di correlazione tra X e Y.
  - $\tau, \tau^*$  : Periodo di manutenzione.
  - $\otimes$  : Operatore logico AND.
  - $\oplus$  : Operatore logico OR.
-

---

# PARTE I

---

# 1 METODI DI SIMULAZIONE PER L'ANALISI DI SISTEMI

## 1.1 Metodo MonteCarlo

Per metodo MonteCarlo (MC) si intende, in generale, una procedura numerica basata sulla assegnazione di distribuzioni di probabilità alle variabili di ingresso di un modello e sull'impiego di numeri casuali, per l'ottenimento di stime statistiche delle grandezze di interesse. Le idee unificanti le diverse applicazioni riguardano l'impiego in cammini casuali (di Markov), in un naturale contesto stocastico o per la soluzione di equazioni differenziali e integrali, e lo sviluppo di metodi per la riduzione della varianza associata ai risultati ottenuti [1], [2]. Una immediata introduzione alla applicazione di metodi MC è fornita con riferimento alla Stima di integrali definiti [5], [6].

### 1.1.1 Stima di integrali definiti

Sia oggetto di stima l'integrale definito, n-dimensionale,  $G = \int_{\Omega} g(X) \cdot p(X) dX$  con  $X \in \Omega \subset \mathcal{R}^n$  (per semplicità di notazione è omessa l'indicazione di integrale multiplo).

E' sempre possibile supporre (con una eventuale normalizzazione) che  $X$  sia una variabile casuale con una funzione Densità di probabilità (pdf):  $p(X) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega$  e  $\int_{\Omega^n} p(X) dX = 1$ . Pertanto:

$$G = \int_{\Omega} g(X) \cdot p(X) dX = \overline{g(X)} \quad (1.1)$$

La stima MC dell'integrale definito  $G$  è data dal valore atteso della Funzione peso  $g(X)$ , realizzata mediante  $n$  estrazioni casuali:

$$G = \overline{G_N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{g(x_i)} \quad \text{dove} \quad G_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n g(x_i) \quad (1.2)$$

La varianza associata alla stima MC dell'integrale definito  $G$  risulta:

$$\begin{aligned} \text{Var}[G_N] &= \int_{\Omega} [g(X) - G]^2 \cdot f(X) dX = \overline{g(X)^2} - G^2 \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}[g(x_i)] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{g(x_i)^2} - \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{g(x_i)} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

La stima MC è poco efficiente se in corrispondenza della maggior parte dei valori estratti dalla pdf  $p(X)$ , la Funzione peso  $g(X)$  assume valori piccoli. E' in tal caso possibile / necessario procedere mediante l'applicazione di tecniche per la riduzione della varianza associata alla stima MC, come il Campionamento dell'Importanza (Importance sampling).

L'accuratezza della stima MC è espressa dal Coefficiente di variazione definito come  $\alpha = \frac{1}{G_N} \cdot \sqrt{\text{Var}[G_N]}$  [4].

Dalle eq. (1.2) e (1.3), l'accuratezza della stima MC dipende dal valore della grandezza da stimare  $G$  ma è indipendente dal numero delle variabili del modello ( $n$ ). Ne consegue la possibile applicazione di metodi MonteCarlo per l'analisi di sistemi costituiti complessi (costituiti da un elevato numero di componenti), che si realizza mediante la stima di un integrale multi-dimensionale che esprime la grandezza di interesse.

## 1.1.2 Tecniche di riduzione della varianza

Gli eventi più ricorrenti in una simulazione sono quelli che più spesso vengono campionati al contrario degli “eventi rari”. Lo scopo delle “Tecniche di riduzione della varianza” è di ridurre la dispersione associata alla stima MC delle grandezze di interesse. Tra queste, le tecniche di Campionamento di Importanza operano una “distorsione” della funzione Densità di probabilità in modo da aumentare il campionamento degli eventi rari, concentrando l'estrazione di numeri casuali nelle aree della distribuzione dove altrimenti risulterebbe meno frequente. La procedura deve garantire una stima corretta dei valori attesi ed una effettiva riduzione della varianza associata.

La possibilità di realizzare una simulazione “forzata” è efficacemente mostrata per la valutazione di integrali definiti [5], [6]. La trattazione fornita nel §1.1.1 rappresenta la procedura di stima mediante la cosiddetta simulazione “analogica”.

Sia  $p_1(X)$  una pdf per la variabile casuale  $X \in \mathfrak{R}^n$  e poniamo  $g_1(X) = \frac{g(X)p(X)}{p_1(X)}$ .

L'integrale definito oggetto di valutazione può essere scritto nella forma:

$$G = \int_{\Omega} \frac{g(X)p(X)}{p_1(X)} \cdot p_1(X) \, dX = \int_{\Omega} g_1(X) \cdot p_1(X) \cdot dX = \overline{g_1(X)} \quad (1.4)$$

La stima MonteCarlo dell'integrale definito G realizzata mediante N estrazioni casuali risulta:

$$G = \overline{G_{1N}} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{g_1(x_i)} \quad \text{dove} \quad G_{1N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n g_1(x_i). \quad (1.5)$$

La varianza associata a tale stima risulta:

$$\text{Var}[G_{1N}] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}[g_1(x_i)] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{g_1(x_i)^2} - \left( \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{g_1(x_i)} \right)^2. \quad (1.6)$$

Dalla suddetta espressione è evidente che la varianza da cui è affetta la stima MC di G dipende dalla scelta di  $p_1(X)$ . La procedura è particolarmente efficace nei casi in cui una parte del dominio è particolarmente significativa ai fini della stima dell'integrale definito G.

Il valore ottimale  $p_1(X)^*$  è quello che rende minima la varianza associata  $G_{1N}$ , nel rispetto delle condizioni di normalizzazione; risulta [6]:

$$p_1(X)^* = \frac{g(X) \cdot p(X)}{\int g(X') \cdot p(X') \cdot dX'}. \quad (1.7)$$

Tale espressione mostra come per la determinazione del valore ottimale  $p_1(X)^*$  è necessario stimare un integrale definito, con una complicazione generalmente equivalente a quella del problema iniziale.

Nella applicazione di tecniche di Campionamento di Importanza per la stima dell'affidabilità di un componente, la condizione di riduzione della varianza è soddisfatta per un definito intervallo di valori e risulta massima in corrispondenza di uno specifico valore del “Parametro di distorsione”, definito dal prodotto tra il Tasso di guasto ed il tempo di missione del componente. Il valore ottimale del Parametro di distorsione può essere ottenuto imponendo la condizione di minimizzazione della varianza associata alla stima ed procedendo mediante soluzione numerica [10].

## 1.2 Metodo MonteCarlo per l'analisi di sistemi

L'applicazione di metodi di simulazione MonteCarlo per l'analisi delle caratteristiche di affidabilità di sistemi complessi è introdotta in letteratura con un pregevole approccio riferito alla Teoria del trasporto [2], [5], [6], [7].

Consideriamo un Sistema costituito da un certo numero di componenti, ciascuno dei quali può assumere diversi stati: funzionante, guasto, standby, ... Gli stati del Sistema sono definiti da tutte le combinazioni possibili tra gli stati dei suoi componenti. Durante la vita operativa del Sistema, ciascun componente può essere oggetto di una cambiamento di stato che avviene in modo stocastico nel tempo e con riferimento allo stato raggiunto. Il cambiamento di stato del singolo componente determina una transizione tra gli stati del Sistema.

Con riferimento alla Figura 1, supponiamo che il Sistema sia nello stato  $s^1$  dal tempo  $t^1$  e consideriamo una generica transizione che avviene al tempo  $t$  e porta il Sistema allo stato  $s$ .

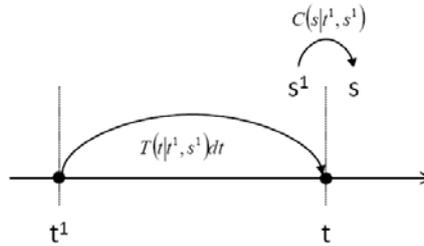


Figura 1: Transizione  $(t, s) \rightarrow (t^1, s^1)$

Si definisce Kernel di trasporto probabilistico (Probabilistic Transport Kernel) per la transizione  $(t, s) \rightarrow (t^1, s^1)$  il prodotto  $K(t, s|t^1, s^1) = T(t|t^1, s^1) \cdot C(s|s^1, t)$  tra le due probabilità condizionate che governano l'evoluzione del Sistema:

- $T(t|t^1, s^1) \cdot dt$  - Termine di "collisione" che rappresenta la probabilità condizionata che il Sistema effettua la transizione tra  $t$  e  $t + dt$ , dato che il Sistema è entrato nello stato  $s^1$  al tempo  $t^1$ ;
- $C(s|s^1, t)$  - Termine di "transizione" che rappresenta la probabilità condizionata che il Sistema entra nello stato  $s$  per effetto della transizione occorsa al tempo  $t$ , dallo stato  $s^1$  in cui è entrato al tempo  $t^1$ .

Valgono le seguenti condizioni di normalizzazione:  $\int_{t^1}^{\infty} T(t|t^1, s^1) \cdot dt \leq 1$ ;  $\sum_s C(s|s^1, t) = 1$ ,  $C(s|s, t) = 0$ .

Sia  $\Psi(t, s|t^1, s^1)$  la funzione Densità di probabilità associata alla transizione del Sistema. Questa può essere sviluppata in serie rispetto alle distribuzioni densità di probabilità per n successive transizioni.

Sia  $\Psi^n(t, s)$  la pdf associata alla n-esima transizione del Sistema, verso lo stato  $s$  al tempo  $t$ . Si ricava in tal modo l'Equazione (integrale di Boltzmann) che governa l'evoluzione dinamica del Sistema, in termini di trasporto nello spazio dei possibili stati:

$$\Psi(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^n(t, s) = \Psi^0(t, s) + \sum_{s'} \int_{t_0}^t \Psi(t', s') \cdot K(t, s|t', s') \cdot dt' \quad (1.8)$$

La soluzione della equazione per la stima della  $\Psi(t, s)$  può essere ottenuta analiticamente solo in caso estremamente semplici; l'applicazione di metodi MonteCarlo permette la soluzione numerica dell'integrale multi-dimensionale.

Sia  $\Gamma$  il sottoinsieme degli stati in cui il Sistema è guasto. L'inaffidabilità del Sistema al tempo  $t$  è data dalla probabilità che il Sistema entri in uno dei suoi stati di guasto prima del tempo  $t$ , somma delle probabilità dei "cammini casuali", mutuamente esclusivi, che conducono il Sistema in uno di tali stati:

$$F(t) = \sum_{s \in \Gamma} \int_0^t \psi(\tau, s) \cdot d\tau \quad (1.9)$$

In modo analogo, l'Indisponibilità del Sistema al tempo  $t$  è data dalla probabilità che il Sistema sia in uno dei suoi stati di guasto al tempo  $t$ , somma delle probabilità dei "cammini casuali", mutuamente esclusivi, che conducono il Sistema in uno stato di guasto al tempo  $\tau < t$  e nel quale il Sistema rimane fino al tempo  $t$ :

$$F(t) = \sum_{s \in \Gamma} \int_0^t \psi(\tau, s) \cdot R_s(\tau, t) \cdot d\tau \quad (1.10)$$

dove  $R_s(\tau, t)$  è la probabilità che il Sistema non esca prima del tempo  $t$  dallo stato  $s$  in cui è entrato al tempo  $\tau$ .

Ciascuna "storia" della simulazione MonteCarlo consiste nella generazione di un "cammino casuale" compiuto dal Sistema, in termini di successive transizioni tra i suoi stati, in seguito al guasto/riparazione (in generale, alla transizione tra gli stati) dei suoi componenti, in istanti di tempo differenti. Durante ciascuna storia, a partire da uno stato  $s^1$  in cui si trova il Sistema al tempo  $t^1$ , occorre determinare il tempo in cui avviene la successiva transizione e lo stato raggiunto dal Sistema.

Operativamente, il Tempo di missione ( $T$ ) è suddiviso in  $m$  intervalli di uguale durata  $\Delta t = T / m$ . A ciascun intervallo sono associati  $n$  contatori, uno per ciascuno stato del Sistema; in particolare, interessano i Contatori associati agli "stati di guasto" del Sistema ( $s \in \Gamma$ ). Quando il Sistema per effetto di una transizione entra nello stato  $s$  al tempo  $t \in \Delta t_i$ , il contatore associato  $C_{si}$  è incrementato di una unità. Eseguite  $N$  storie, il contatore  $C_{si}$  è uguale al numero di transizioni del Sistema (di qualsiasi ordine) che sono avvenute nell'intervallo  $\Delta t_i$  portando il Sistema nello stato  $s$ . Una stima non forzata della funzione Densità di probabilità di transizione è fornita dalla:

$$\Psi(t, s) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t_i} \Psi(t, s) \cdot d\tau = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{C_{si}}{N} \quad \text{dove } t \in \Delta t_i \quad i = 1, \dots, m \quad s = s^1, \dots, s^n \quad (1.11)$$

Possono essere seguiti due approcci distinti – Diretto e Indiretto - per la valutazione della Inaffidabilità / Indisponibilità di un Sistema mediante metodi MonteCarlo [7], [11].

Seguendo un approccio Indiretto, la simulazione è realizzata procedendo:

- alla valutazione del tempo  $t$  di transizione del Sistema dallo stato  $s^1$  in cui era entrato al tempo  $t^1$ , mediante campionamento dalla relativa densità di probabilità condizionata  $T(t|t^1, s^1)$ ;
- alla valutazione del nuovo stato del Sistema  $s$ , dato che la transizione avviene al tempo  $t$ , partendo dallo stato  $s^1$  in cui il Sistema era entrato al tempo  $t^1$ , mediante campionamento dalla relativa densità di probabilità condizionata  $C(s|s^1, t)$ .

Seguendo un approccio Diretto, le transizioni del Sistema non sono campionate dal Kernel di trasporto del Sistema complessivo. Si procede alla valutazione del tempo  $t$  di transizione per ciascun componente del Sistema, considerato singolarmente. I tempi di transizione sono ordinati in modo crescente; il componente che effettua la transizione è il primo della lista. E' così valutato il tempo di transizione del Sistema e lo stato in cui evolve il Sistema.

L'aggiornamento dei Contatori è diversamente realizzato per la stima dell'inaffidabilità o dell'Indisponibilità del Sistema:

- nel primo caso, se il Sistema entra in uno stato di guasto nell'intervallo  $\Delta t_i$ , sono incrementati di un unità tutti i contatori associati a tale intervallo ed a tutti i successivi intervalli fino al raggiungimento del Tempo di missione;
- nel secondo caso, se il Sistema entra in uno stato di guasto nell'intervallo  $\Delta t_i$  da cui ne esce (per effetto della riparazione del componente) nell'intervallo  $\Delta t_j$ , sono incrementati di un unità tutti i contatori associati a tale intervallo ed a tutti i successivi intervalli fino al raggiungimento dell'intervallo  $\Delta t_j$ .

Aggiornato il riferimento temporale della simulazione, si procede allo stesso modo per successive transizioni di stato del Sistema, fino al raggiungimento del Tempo di missione definito. Mediante l'eq. (1.11), i valori registrati nei contatori al termine delle  $N$  storie della simulazione permettono di stimare l'Inaffidabilità / Indisponibilità del Sistema.

### 1.3 Metodi di simulazione per l'analisi di incertezza e Sensitività

Nello sviluppo di Analisi di Incertezza e Sensitività di modelli complessi è frequente il ricorso a metodi di simulazione. In tale contesto è diffuso l'utilizzo di una tecnica di campionamento denominata "Latin Hypercube" [8], [30].

La tecnica Latin Hypercube costituisce l'estensione al caso multi-dimensionale del Campionamento stratificato, una delle possibili tecniche di Campionamento dell'Importanza. L'effetto complessivo è una riduzione della varianza associata alla stima delle variabili di interesse, rispetto ad una simulazione "analogica" mediante metodi MonteCarlo, a parità del numero di storie.

La strategia di campionamento è immediatamente intuibile per una singola variabile casuale  $x$ , a cui è associata una funzione Cumulata di probabilità  $F(x)$ . L'asse delle  $y$  è suddivisa in  $n$  intervalli disgiunti di uguale ampiezza; attraverso la  $F^{-1}(x)$  l'asse delle  $x$  è suddivisa in  $n$  intervalli disgiunti, di diversa ampiezza, ma uguale probabilità.

Il campionamento è realizzato estraendo un numero casuale per ciascun intervallo (dell'asse  $y$  e, attraverso la  $F^{-1}$ , dell'asse  $x$ ) e realizzando così una "esplorazione uniforme" dell'intervallo di variazione della variabile.

E' di seguito descritta una possibile procedura per l'applicazione della tecnica Latin Hypercube ad una funzione di  $n$  variabili casuali  $X = (x_1, \dots, x_n)$  [8]. Si vuole utilizzare la tecnica Latin Hypercube per estrarre un campione di ampiezza  $n \cdot S$  vettori  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ .

Il dominio di ciascuna variabile è suddiviso in intervalli disgiunti con uguale ampiezza (intervalli equiprobabili), come descritto per una singola variabile casuale. Si procede alla estrazione di un valore per ciascuna intervallo. Dalla distribuzione di probabilità associata alla prima variabile sono estratti  $n \cdot S$  valori. Questi sono accoppiati casualmente, senza sostituzione, a  $n \cdot S$  valori estratti dalla distribuzione di probabilità associata alla seconda variabile, formando un set di  $n \cdot S$  coppie di valori. Questi sono accoppiati casualmente, senza sostituzione, a  $n \cdot S$  valori estratti dalla distribuzione di probabilità associata alla terza variabile, formando un set di  $n \cdot S$  triplette di valori. Si procede in tal modo fino alla valutazione di un set di  $n \cdot S$  vettori  $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ .

La tecnica Latin Hypercube è da preferire quando l'accuratezza delle stime è essenzialmente legata alla "uniformità della esplorazione" degli intervalli di variazione delle variabili. Altre tecniche sono da preferire quando si individuano specifiche aree dei domini delle variabili in cui la distribuzione di probabilità assume valori relativamente bassi (ad esempio in presenza di "eventi rari"). Diverse tecniche di campionamento possono essere utilizzate contestualmente [3].

## 1.4 Metodi di simulazione in presenza di dipendenze e correlazioni

Tra le variabili di ingresso di un modello possono sussistere specifiche dipendenze e/o correlazioni. I due termini sono spesso utilizzati in modo interscambiabile; rigorosamente, una Dipendenza rappresenta un nesso di causalità che sussiste tra i valori assunti da due (o più) variabili del modello; il valore assunto da una variabile (indipendente) determina, secondo una ben definita relazione, il valore assunto da una seconda variabile (dipendente). Una Correlazione è una misura statistica che descrive il grado con cui una variabile è in relazione con un'altra [59].

Una parte significativa dei modelli e delle tecniche per l'analisi di Importanza e Sensività richiede che sia verificata l'ipotesi di variabili di ingresso tra loro indipendenti. L'introduzione nel modello delle correlazioni e dipendenze esistenti tra le variabili di ingresso costituisce un aspetto di particolare complessità. Nella generazione di un campione di dati occorre garantire che per le variabili non dipendenti risulti il livello di correlazione voluto e che i valori estratti per le variabili indipendenti risultino effettivamente non correlati.

L'introduzione nel modello delle correlazioni esistenti tra le variabili di ingresso può essere realizzata mediante la cosiddetta Correlazione per ranghi [2]. Tale tecnica non parametrica, cioè utilizzabile in modo indipendente dalle specifiche distribuzioni di probabilità, permette di produrre un insieme di valori per le variabili di ingresso del modello che "rispettano" le correlazioni definite. A tal fine, i valori delle variabili sono ordinati (in modo crescente) e caratterizzati dalla relativa posizione (rango).

Il Coefficiente di correlazione per ranghi (di Spearman) è definito come:

$$\rho = 1 - \left( \frac{6 \cdot \sum (\Delta R)^2}{n \cdot (n^2 - 1)} \right) \quad (1.12)$$

dove  $\Delta R = \text{rango}(x) - \text{rango}(y)$  e  $n$  è il numero di coppie di valori delle due variabili  $(x, y)$ .

Il Coefficiente di correlazione per ranghi rappresenta il Coefficiente di correlazione di Pearson (vedi §3.2.1) applicato non ai valori ma ai ranghi associati.

Il Coefficiente di correlazione per ranghi assume valori tra -1 e +1:

- un valore pari a -1 "forza" le due distribuzioni di probabilità ad essere esattamente, negativamente correlate; un valore pari al  $i$ -esimo percentile della prima distribuzione è campionato nella stessa iterazione in cui è campionato il valore pari al  $(100-i)$ -esimo percentile dalla seconda distribuzione;
- un valore pari a +1 "forza" le due distribuzioni di probabilità ad essere esattamente, positivamente correlate; un valore pari al  $i$ -esimo percentile della prima distribuzione è campionato nella stessa iterazione in cui è campionato il valore pari al  $i$ -esimo percentile dalla seconda distribuzione;
- un valore minore di 0 produce un certo grado di correlazione inversa; un basso valore è campionato dalla prima distribuzione in corrispondenza di un elevato valore campionato dalla seconda, o viceversa;
- un valore maggiore di 0 produce un certo grado di correlazione positiva; un basso valore è campionato dalla prima distribuzione in corrispondenza di un basso valore campionato dalla seconda;
- un valore pari a 0 produce la perdita di qualsiasi relazione tra le due distribuzioni.

I passi principali della procedura da seguire per il campionamento dei valori di due variabili casuali dalle relative distribuzioni di probabilità e la contestuale induzione di una definita correlazione riguardano [2]:

- la definizione di un ordinamento per ranghi delle due variabili, in numero equivalente al numero di coppie di valori volute dal campionamento, tale da produrre la correlazione voluta, misurata mediante Coefficiente di correlazione definito dalla eq. (1.12);

- l'estrazione dei valori delle variabili dalle relative distribuzioni di probabilità e l'assegnazione del rango a ciascun valore;
- l'utilizzo dei valori campionati, in accordo all'ordinamento per ranghi precedentemente definito per le due variabili.

Un approccio analogo può essere adottato per l'introduzione di correlazioni tra più di due variabili, a partire dalla Matrice di correlazione associata (vedi §3.2.2), che dovrà rispettare una serie di restrizioni (ad esempio, se le variabili A & B e le variabili B & C sono correlate positivamente, le variabili A & C non possono essere correlate negativamente).

La tecnica della Correlazione per ranghi produce una correlazione tra le variabili caratterizzata da una maggiore variabilità nei valori centrali dei relativi intervalli di variazione e da una minore variabilità in entrambi gli estremi.

L'utilizzo di Funzioni di dipendenza (Funzioni Copula) costituisce un approccio alternativo, non trattato nel documento, per l'introduzione nel modello di differenti dipendenze tra le variabili. Qualitativamente, è possibile "estrarre" una funzione Copula da una data distribuzione multivariata ed utilizzarla per definire le relazioni che intercorrono tra le relative distribuzioni univariate [59].

## 2 MISURE DI IMPORTANZA PER L'ANALISI DI SISTEMI

Con riferimento alle problematiche di affidabilità, sicurezza e vulnerabilità, le Misure di Importanza hanno lo scopo di quantificare il contributo alle prestazioni di un Sistema dovuto ai singoli componenti, ovvero ai relativi parametri caratteristici, o più in generale agli eventi base del modello.

Nelle applicazioni PRA (Probabilistic Risk Assessment), le prestazioni del Sistema coincidono con le misure di rischio oggetto di valutazione. Ad esempio, in applicazioni nucleari l'Importanza è tipicamente riferita al contributo di ciascun evento alle misure di "Core Damage Frequency" e "Large Early Release Frequency" [20]. Nelle applicazioni RAM (Reliability, Availability, Maintainability), le prestazioni del Sistema coincidono con le caratteristiche di Affidabilità e Disponibilità (per componenti riparabili), opportunamente riferite ad un Profilo di missione che ne specifica le condizioni ambientali e di esercizio e le funzionalità di riferimento. Nello sviluppo di Security assessment, le prestazioni del Sistema possono essere definite in termini di Indisponibilità del servizio, con un accezione tipicamente affidabilistica, e/o in termini di accadimento di scenari danno maggiori procurati da atti intenzionali di sabotaggio [56], [57], [58].

Le Misure di Importanza maggiormente significative, selezionate tra le numerose ed eterogenee definite in letteratura, sono sinteticamente presentate nei paragrafi successivi. La trattazione è riferita a sistemi costituiti da componenti soggetti a fenomeni di guasto e riparazione, come avviene tipicamente in ambito RAM. Tale approccio è stato scelto per differenti ragioni: l'estensione ad applicazioni PRA e di Security assessment è immediata, interpretando l'Indisponibilità come una specifica definizione di una più generale misura di rischio; le Misure di Importanza proposte in ambito RAM sono generalmente riferite alla affidabilità di componenti non riparabili; un ordinamento di "Importanza" dei parametri che definiscono l'Indisponibilità dei componenti fornisce informazioni utili per la pianificazione della manutenzione correttiva (ottimizzazione del supporto logistico) e preventiva (se il modello include i fenomeni di degrado) del Sistema.

In via preliminare, sono introdotte le nozioni base di Indisponibilità di un componente riparabile, eventualmente soggetto a fenomeni di invecchiamento, e di un Sistema costituito da componenti riparabili

### 2.1 Indisponibilità di sistemi costituiti da componenti riparabili

#### 2.1.1 Indisponibilità asintotica di un componente riparabile

Il modello di un Sistema costituito da componenti soggetti a fenomeni di guasto e riparazione è di interesse comune nelle applicazioni RAM, PRA e di Security assessment. La distribuzione esponenziale è la distribuzione di riferimento in tali ambiti, per la sua semplicità e perché associata a fenomeni che determinano l'accadimento di eventi casuali, cioè governati da un Processo di Poisson [53].

I processi fisici che determinano l'accadimento di eventi casuali soddisfano le seguenti ipotesi:

- il processo è "omogeneo" (la frequenza attesa di eventi in un definito periodo di osservazione è costante nel tempo);
- il processo è "senza memoria" (l'accadimento di un evento è indipendente dagli accadimenti passati);
- la probabilità di accadimento di due o più eventi nella stessa unità di tempo è trascurabile.

In tal caso, la probabilità di osservare  $m$  eventi nell'intervallo di tempo  $[t, t + \tau]$  è descritta dalla distribuzione di Poisson con parametro caratteristico  $\lambda$ , assunto costante:

$$P_m(N(t + \tau) - N(t) = m) = \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^m}{m!} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

La distribuzione di Poisson rappresenta una approssimazione della distribuzione Binomiale, di validità generale, applicabile quando la probabilità di accadimento dell'evento è molto bassa e contemporaneamente la grandezza del campione è molto alta, ovvero quando l'evento è raro.

La funzione Densità di probabilità (pdf: Probability Density Function) risulta:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad x > 0 \quad \int_0^{\infty} f(t) dt = 1. \quad (2.2)$$

La funzione Cumulata di probabilità (cdf: Cumulative Distribution Function) risulta:

$$F(t) = \int_0^t f(u) \cdot du = 1 - e^{-\lambda t} \quad 0 \leq F(t) \leq 1. \quad (2.3)$$

Il parametro caratteristico della distribuzione risulta:  $\lambda = \frac{f(t)}{F(t)} \quad h^{-1}$ .

Il Tempo medio tra due eventi risulta  $\int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad h$ .

Consideriamo un componente binario, cioè caratterizzato da due stati di funzionamento: 1 se guasto, 0 altrimenti.

E' assunta una distribuzione esponenziale per i processi di guasto del componente, con parametro caratteristico ( $\lambda$ ) denominato "Tasso di guasto" (o, in termini equivalenti, con Tempo medio tra guasti  $MTBF = 1/\lambda$ <sup>1</sup>);

Una utile classificazione degli eventi di guasto che possono interessare un componente può essere realizzate in base alla loro distribuzione durante la vita operativa; si distinguono:

- "guasti infantili", dovuti a difetti intrinseci del componente, ad errori di progettazione, costruzione e/o di montaggio, che non sono emersi durante le attività di collaudo e che si manifestano generalmente durante la fase iniziale della vita dei componenti, con una probabilità che decresce nel tempo;
- guasti che avvengono durante e la "vita utile" del componente e rappresentano la manifestazione casuale di meccanismi non predetti / non predicibili;
- "guasti per invecchiamento", dovuti a fenomeni di usura e deterioramento che si manifestano generalmente durante la fase finale della vita del componente, con una probabilità che cresce nel tempo.

Con riferimento a tale classificazione, l'assunzione di una distribuzione esponenziale è associata alla accadimento di "guasti casuali"; sono quindi esclusi i guasti infantili e i guasti dovuti a fenomeni di invecchiamento.

Anche per i processi di riparazione è assunta una distribuzione esponenziale con parametro caratteristico ( $\mu$ ) denominato "Tasso di riparazione" (o, in termini equivalenti, con Tempo medio di riparazione  $MTTR = 1/\mu$ <sup>2</sup>).

L'assunzione di una distribuzione esponenziale per la riparazione del componente è certamente meno attendibile rispetto alla stessa assunzione per gli eventi di guasto in quanto, realisticamente, i tempi necessari per l'esecuzione dell'intervento dipendono dalla specifica modalità di guasto occorsa al componente. In tal caso, l'evento di riparazione non è indipendente dagli accadimenti passati e non è soddisfatta l'ipotesi che definisce l'occorrenza di eventi casuali. L'adozione di distribuzioni di probabilità diverse dalla distribuzione esponenziale determina una maggiore complicazione delle stime analitiche, che diventano rapidamente proibitive, richiedendo l'adozione di metodi di simulazioni.

<sup>1</sup> MTBF: Mean Time Between Failures.

<sup>2</sup> MTTR: Mean Time To Repair.

La “Manutenibilità” di un componente riparabile (ovvero di un Sistema costituito da componenti riparabili) è definita come “la probabilità che un’azione di manutenzione sul componente (Sistema), in condizioni assegnate, possa essere eseguita durante un dato intervallo di tempo, mediante l’uso di procedure e mezzi prescritti”. La “Disponibilità” di un componente riparabile (ovvero di un Sistema costituito da componenti riparabili) è definita come “la probabilità che il componente (Sistema) soddisfi la missione assegnatagli, sotto date condizioni, in un dato istante di tempo o in un dato intervallo di tempo, assumendo che siano fornite le risorse esterne richieste” [54].

E’ di seguito desunta l’espressione per l’Indisponibilità di un componente riparabile [53].

La matrice dei tassi di transizione tra gli stati del componente risulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda \\ 1 & \mu & 1 - \mu \end{bmatrix}.$$

Il Sistema di equazioni differenziali associate al processo risulta:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_1'(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \end{cases}.$$

La Disponibilità del componente (numero puro) si ottiene come soluzione del Sistema mediante trasformazione di Laplace, con condizioni iniziali  $P_0(0) = 1$  e  $P_1(0) = 0$ :

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}. \quad (2.4)$$

Per tempi sufficientemente grandi, la Disponibilità del componente assume il valore asintotico:

$$A = P_0(t \rightarrow \infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (2.5)$$

“L’Indisponibilità asintotica” del componente risulta pertanto:

$$U = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (2.6)$$

## 2.1.2 Indisponibilità di un componente riparabile con fenomeni di invecchiamento

I fenomeni di invecchiamento possono essere introdotti nel modello di un componente riparabile assumendo un andamento lineare del Tasso di guasto [12], [27]:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + a \cdot t \quad (2.7)$$

dove  $\lambda_0$  è il “Valore iniziale” e  $a$  è il “Parametro di crescita” del Tasso di guasto.

In tal caso risulta  $F(t) = 1 - e^{-(\lambda_0 t + \frac{1}{2} a t^2)}$  e  $f(t) = (\lambda_0 + at) \cdot e^{-(\lambda_0 t + \frac{1}{2} a t^2)}$ .

Gli effetti dei fenomeni di invecchiamento sono mitigati da adeguati interventi di manutenzione preventiva, realizzati con un “Periodo di manutenzione”  $\tau$  (intervallo tra due successivi interventi) assunto costante.

La  $F(t)$  è sostituita con una distribuzione esponenziale con parametro caratteristico  $\lambda^*$ , assunto costante durante il Periodo di manutenzione, tale da fornire la stessa probabilità di guasto nell’intervallo  $[0; \tau]$ .

Il "Valore efficace" del Tasso di guasto risulta:

$$\lambda^* = \lambda_0 + \frac{1}{2} a \cdot \tau. \quad (2.8)$$

Dalla eq. (2.6), l'espressione dell'Indisponibilità asintotica del componente risulta:

$$U = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + \mu} = \frac{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \cdot \tau \right)}{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \cdot \tau + \mu \right)} \quad (2.9)$$

Affinché tale approssimazione sia accettabile occorre che il Tasso di guasto aumenti in modo non eccessivo nel Periodo di manutenzione. In caso contrario, le due distribuzioni (cumulate) di probabilità coincidono solo per  $t = \tau$  (per costruzione), mentre forniscono stime differenti dei tempi di accadimento del guasto.

Assumendo che l'intervallo di tempo tra due interventi di manutenzione sia una frazione del tempo medio tra due guasti

successivi  $t^*(\tau)$ , ovvero  $\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \cdot \tau \right)}$ , esplicitando il periodo di manutenzione, risulta:

$$\tau = \frac{\lambda_0}{a} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha \cdot \frac{\lambda_0^2}{2 \cdot a}} - 1} \right). \quad (2.10)$$

Tale relazione vincola il Periodo di manutenzione  $\tau$  alle caratteristiche del componente (Tasso di guasto iniziale  $\lambda_0 = \lambda(t)$  e parametro  $a$ ), limitando l'ottimizzazione della manutenzione alla definizione del valore del parametro  $\alpha$ .

### 2.1.3 Indisponibilità di un sistema di componenti riparabili

Se non diversamente indicato, le ipotesi di base assunte nella presente trattazione sono le seguenti:

- il Sistema è costituito da componenti binari, il cui stato è descritto da una variabile dicotomica (1 se guasto, 0 altrimenti); il tempo di transizione di stato (guasto o riparazione) di ciascun componente è una variabile casuale che segue una distribuzione esponenziale con tasso costante (non sono considerati fenomeni di invecchiamento);
- non sussistono dipendenze di alcun tipo tra i componenti (ad esempio, condivisione di carico, stand-by, ...), incluso i limiti derivanti dal supporto logistico (es. limiti nel personale manutentore, ...);
- in seguito ad un intervento di manutenzione il componente torna nelle condizioni iniziali.

In generale, la Disponibilità di un Sistema è riferita ad un Profilo di missione che ne specifica le condizioni ambientali e di esercizio e le funzionalità (missioni) di riferimento. Per ciascuna missione del Sistema risultano coinvolti un sottoinsieme di componenti, soggetti ai fenomeni di guasto e riparazione. La "Funzione di Sistema", riferita ad una specifica missione, è la relazione che esprime lo stato del Sistema sulla base dello stato di funzionamento dei componenti.

Considerando componenti e sistemi binari, la Funzione di Sistema può essere espressa mediante un'equazione booleana. Tale relazione esprime lo stato (guasto / funzionate) del Sistema mediante gli operatori logici AND e OR (NOT per sistemi "non coerenti"<sup>3</sup>) tra le variabili che rappresentano lo stato (guasto / funzionate) di ciascun componente.

<sup>3</sup> Un sistema è detto "coerente" se tutti i suoi componenti sono significativi (hanno influenza sulla sua affidabilità) e se il miglioramento dell'affidabilità di un componente determina sempre un miglioramento dell'affidabilità del sistema.

Consideriamo le due configurazioni elementari - Serie e Parallelo - per un Sistema costituito da più componenti soggetti fenomeni di guasto e riparazione, per i quali è assunto il modello di (in)disponibilità asintotica definito dalla eq. (2.6).

Un Sistema di componenti in configurazione Serie è in stato di funzionamento finché tutti i componenti sono in stato di funzionamento; in altri termini, il guasto di uno solo dei componenti comporta il fallimento della missione definita.

L'operatore OR è la traduzione logica dell'operazione di somma tra eventi: perché si verifichi l'evento  $A \cup B$  deve verificarsi l'evento A o l'evento B"; se gli eventi sono indipendenti  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ .

La disponibilità asintotica di un Sistema di n componenti in Serie risulta  $A = \prod_{i=1}^{nc} A_i$ . Pertanto, dalla (2.6),

l'Indisponibilità asintotica di un Sistema composto da n componenti in Serie risulta:

$$U = 1 - \prod_{i=1}^{nc} (1 - U_i) = 1 - \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (2.11)$$

Un Sistema di componenti in configurazione Parallelo è in stato di funzionamento finché almeno un componente è in stato di funzionamento; in altri termini, solo il guasto contemporaneo di tutti i componenti determina fallimento della missione definita.

L'operatore AND è la traduzione logica del prodotto tra eventi: perché si verifichi l'evento  $A \cup B$  deve verificarsi sia l'evento A che l'evento B; se gli eventi sono indipendenti  $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$ . Pertanto, dalla (2.6), l'Indisponibilità asintotica di un Sistema composto da n componenti in Parallelo risulta:

$$U = \prod_{i=1}^{nc} U_i = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (2.12)$$

La Funzione di Sistema può essere espressa, in algebra booleana, con forme diverse che possono fare riferimento ai "Path-set" o ai "Cut-set" che caratterizzano il Sistema:

- un Path-set rappresenta il sottoinsieme di componenti che devono risultare contemporaneamente funzionanti per garantire il successo della missione definita per il Sistema;
- un Cut-set rappresenta il sottoinsieme di componenti che devono risultare contemporaneamente guasti per determinare il fallimento della missione definita per il Sistema.

"L'Ordine" di un Cut-set è dato dal numero di componenti che lo costituiscono. Un Minimal Cut-set è un Cut-set "esclusivo" ovvero tale da non comprende alcun altro Cut-set. Le definizioni per i Path-set sono analoghe.

La funzione che rappresenta il fallimento del Sistema può essere espressa come OR tra i Minimal Cut-set del Sistema; la funzione che rappresenta il successo del Sistema può essere espressa come AND tra i Minimal Path-set del Sistema.

## 2.2 Misure di Importanza Locale

Le Misure di Importanza sono state originariamente introdotte da Birnbaum, al fine di quantificare il contributo alla inaffidabilità di un Sistema, dovuto alla inaffidabilità dei suoi componenti [13]. Più in generale, l'applicazione di Misure di Importanza ha l'obiettivo di produrre un ordinamento dei singoli componenti del Sistema, ovvero dei relativi parametri caratteristici, in accordo alla "Importanza" che questi hanno sulle sue prestazioni [21], [26].

E' di seguito è fornita la definizione di cinque principali Misure di Importanza, tra le numerose e differenti proposte in letteratura: Birnbaum measure, Criticality measure, Risk Achievement Worth e Risk Reduction Worth e Differential Importance measure [20], [21], [24], [26].

Le misure tradizionalmente utilizzate per l'Analisi di Importanza hanno carattere "locale", sono cioè valide per "piccole" variazioni di ciascuna variabile di ingresso del modello attorno al proprio valore nominale; la validità della misura può essere estesa a tutto l'intervallo di variazione della variabile ipotizzandone un andamento lineare. Tali Misure di Importanza sono essenzialmente caratterizzate da un approccio OAT (One-At-Time), cioè sono valutate con riferimento alla variazione singola di ciascuna variabile del modello.

L'adozione di Misure di Importanza diverse può portare ad un diverso ordinamento dei componenti / parametri / eventi. Particolare cautela è quindi richiesta all'analista nella selezione delle misure da considerare e nella interpretazione dei risultati. In merito, misure diverse possono fornire punti di vista complementari per la valutazione dell'Importanza [20]:

- una misura con un "significato di rischio" è riferita al contributo del componente nel procurare il fallimento del Sistema; l'ordinamento prodotto permette di identificare i componenti per i quali un miglioramento delle prestazioni è maggiormente efficace nel determinare un miglioramento delle prestazioni del Sistema;
- una misura con un "significato di sicurezza" è riferita al contributo del componente nel prevenire il fallimento del Sistema; l'ordinamento prodotto permette di identificare i componenti per i quali il mantenimento delle prestazioni è maggiormente efficace nel garantire il mantenimento delle prestazioni del Sistema.

Consideriamo un Sistema costituito da  $n$  componenti binari e sia  $U = (U_1, \dots, U_j, \dots, U_n)$  l'Indisponibilità del Sistema in funzione dell'Indisponibilità dei suoi componenti, come definita nel §2.1. La definizione delle Misure di Importanza è fornita a partire dalla Decomposizione di Shannon della Indisponibilità del Sistema, rispetto alla Indisponibilità di uno dei suoi componenti [55]:

$$U = U_j \cdot U^{j+} + (1 - U_j) \cdot U^{j-} = (U^{j+} - U^{j-}) \cdot U_j + U^{j-}, \text{ dove} \quad (2.13)$$

- $U^{j+} = \Pr[\Phi(\dots, x_j = 1, \dots) = 1]$  è l'Indisponibilità del Sistema quando il componente  $j$  è sempre guasto;
- $U^{j-} = \Pr[\Phi(\dots, x_j = 0, \dots) = 1]$  è l'Indisponibilità del Sistema quando il componente  $j$  è sempre funzionante.

Le espressioni fornite sono direttamente utilizzabili per la stima, analitica o numerica, delle Misure di Importanza. La trattazione evidenzia il carattere locale delle Misure di Importanza, valide in un intorno del valore nominale di ciascuna variabile ovvero valide nell'intero intervallo di variazione, con l'estensione dell'ipotesi di linearità. Le definizioni fornite possono essere estese considerando esplicitamente la dipendenza dalla variabile temporale. Ciascuna misura di Importanza ha un andamento nel tempo che, per le caratteristiche della funzione Indisponibilità (vedi eq. (2.4)), è caratterizzato da un transitorio iniziale ed un valore asintotico.

Nonostante la diffusione nella letteratura e nelle applicazioni pratiche in ambito RAM e PRA, diverse perplessità sono state avanzate in merito all'impiego delle Misure di Importanza [20]; tra le principali [21], [23], [29]:

- non considerano le reali incertezze associate alle variabili del modello e sono definite per componenti binari;
- forniscono un ordinamento dei componenti mediante la valutazione delle prestazioni del Sistema nelle sole condizioni limite in cui ciascun componente è sempre guasto o sempre funzionante;
- forniscono un ordinamento dei componenti considerati singolarmente e non sono direttamente applicabili per la valutazione del contributo associato a gruppi di componenti (ad esempio, per variazione contemporanea dei parametri caratteristici) e delle relative interdipendenze.

In merito, si ritiene che il contenuto informativo associato alle misure di Importanza sia essenzialmente differente dal contenuto informativo associato alle misure utilizzate per l'analisi di Incertezza e Sensività. Inoltre, un importante contributo è stato portato dalla introduzione delle Misure Differenziali di Importanza, dalle quali è possibile desumere informazioni riguardanti le interazioni tra i componenti. Infine, anche se non considerate nella presente trattazione, da diversi anni [14] e più recentemente [28] sono state proposte estensioni delle misure tradizionali per l'analisi di Importanza di sistemi costituiti da componenti con più stati di funzionamento.

### 2.2.1 Birnbaum measure

Il Birnbaum measure è definito come derivata parziale della Indisponibilità del Sistema rispetto alla Indisponibilità del componente a cui la misura è riferita:

$$B_j = \frac{\partial U}{\partial U_j} = U^{j+} - U^{j-} \quad (2.14)$$

Il Birnbaum measure è una misura con un “significato di rischio”; l'Importanza di un componente è misurata dalla variazione prodotta sulla Indisponibilità del Sistema, dalla variazione della sua Indisponibilità rispetto al valore nominale.

Rispetto alla Decomposizione di Shannon espressa dalla eq. (2.13), il Birnbaum measure:

- è pari alla differenza tra il massimo incremento di Indisponibilità (quando il componente  $j$  è sempre guasto) e la massima diminuzione di Indisponibilità (quando il componente  $j$  non è soggetto a guasto);
- rappresenta la probabilità che il Sistema sia in uno stato “critico” per il componente  $j$  ovvero in uno stato tale da risultare indisponibile se e solo se è indisponibile il componente  $j$ .

E' evidente il carattere locale della misura, valida in un intorno del valore nominale dell'Indisponibilità del componente (valore in cui è calcolata la derivata parziale) ovvero, estendendo l'ipotesi di linearità nell'intero intervallo di variazione  $[0, 1]$ , stimata rispetto ai valori estremi.

### 2.2.2 Criticality measure

Se l'Indisponibilità del Sistema è una funzione lineare della Indisponibilità del componente  $j$  e tutti i componenti sono tra loro indipendenti, il Birnbaum measure del componente  $j$  non dipende dalla sua Indisponibilità. Il Criticality importance measure, definito e utilizzato per superare tale limite, rappresenta la probabilità, condizionata alla Indisponibilità del Sistema, che questa sia dovuta al guasto del componente  $j$  mentre il Sistema era in uno stato critico per tale componente:

$$C_j = \frac{B_j \cdot U_j}{U} \quad (2.15)$$

### 2.2.3 Risk Reduction Worth

Il Risk Reduction Worth è definito dal rapporto tra l'Indisponibilità del Sistema ed e la massima diminuzione di Indisponibilità (quando il componente  $j$  è sempre funzionante, cioè non soggetto a guasto):

$$RRW_j = \frac{U}{U^{j-}} \quad (2.16)$$

Il  $RRW$  è una misura di Importanza con un “significato di rischio” che fornisce una stima della potenzialità del componente nel ridurre il presente livello di Indisponibilità. E' evidente il carattere locale della misura.

### 2.2.4 Risk Achievement Worth

Il Risk Achievement Worth è definito dal rapporto tra il massimo incremento di Indisponibilità (quando il componente  $j$  è sempre guasto) e l'Indisponibilità del Sistema:

$$RAW_j = \frac{U^{j+}}{U} \quad (2.17)$$

Il  $RAW$  è una misura di Importanza con un “significato di sicurezza”, che fornisce una stima della potenzialità del componente nell'aumentare il presente livello di disponibilità. E' evidente il carattere locale della misura..

## 2.2.5 Differential Importance Measure

Un limite comune delle Misure di Importanza “tradizionali” descritte nei precedenti paragrafi riguarda la necessità di procedere ad una nuova valutazione del modello per la valutazione dell'Importanza di combinazioni o gruppi di componenti / parametri / eventi. Esempi pratici in cui tale limite si manifesta riguardano la valutazione dell'Importanza di eventi associati a diversi modi di guasto di un componente, di gruppi di componenti aventi caratteristiche omogenee (ad esempio, della stessa tipologia), di parametri che hanno impatto sulle prestazioni di più componenti (ad esempio, una frequenza di ispezione / manutenzione). Al fine di superare è stata recentemente proposta una Misura Differenziale di Importanza con un “significato di rischio”, denominata “Differential Importance measure” (*DIM*) [24]. Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor dell'Indisponibilità di un Sistema costituito da  $n$  componenti riparabili, con punto iniziale  $U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0$  (è omessa l'indicazione del calcolo delle derivate nel punto iniziale):

$$U = U^0 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta U_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial^2 U}{\partial U_i \partial U_l} \cdot \Delta U_i \cdot \Delta U_l \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial^3 U}{\partial U_i \partial U_l \partial U_m} \cdot \Delta U_i \cdot \Delta U_l \cdot \Delta U_m \right) + \dots \quad (2.18)$$

con  $U^0 = U(U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0)$  e  $\Delta U_i = U_i - U_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ .

L'approssimazione del primo ordine della variazione totale dell'Indisponibilità del Sistema, valida in un intorno (multi-dimensionale) del valore nominale dell'Indisponibilità delle Connessioni (punto iniziale), risulta:

$$\Delta U = U - U^0 \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta U_i \quad (2.19)$$

Il *DIM* di un componente misura la frazione della variazione totale della Indisponibilità del Sistema dovuta alla variazione singola dell'Indisponibilità del componente, nell'intorno del relativo valore nominale:

$$DIM_j = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta U_i} \quad (2.20)$$

Il *DIM* può essere espresso con l'ipotesi di Incrementi uniformi (I1) o di Incrementi percentuali uniformi (I2):

$$\begin{array}{ll} \text{Ipotesi 1: } \Delta U_i = \Delta U_j \quad \forall i, j & \text{Ipotesi 2: } \Delta U_i / U_i = \Delta U_j / U_j \quad \forall i, j \\ DIM_j = \frac{B_j}{\sum_{i=1}^n B_i} \quad B_j = \frac{\partial U}{\partial U_j} & DIM_j = \frac{C_j}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad C_j = \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot U_j \end{array} \quad (2.21)$$

Le suddette espressioni definiscono le relazioni esistenti tra il *DIM*, il Birnbaum measure ed il Criticality measure. Nel caso in cui la misura è riferita a variabili aventi differenti unità di misura, è necessario utilizzare l'ipotesi 2; altrimenti, possono essere utilizzate entrambe le ipotesi e le definizioni associate.

Per sua definizione, il *DIM* è una misura additiva: il *DIM* di un gruppo di componenti è valutabile come somma dei *DIM* di ciascuno, senza necessità di una nuova valutazione del modello:

$$DIM_{j,k} = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j + \frac{\partial U}{\partial U_k} \cdot \Delta U_k}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta U_i} = DIM_j + DIM_k \quad (2.22)$$

Il *DIM*, valutando il contributo alla variazione totale di Indisponibilità del Sistema dovuto alla variazione singola della loro Indisponibilità, permette un ordinamento dei componenti o di gruppi di componenti con un significato di Importanza.

## 2.2.6 Differential Importance Measure di ordine superiore

Per sua definizione, il *DIM* è una misura di Sensitività del primo ordine; in altri termini non permette di tener conto degli effetti dovuti alle interazioni tra i singoli componenti / parametri / eventi, che si manifestano indagando la variazione della variabile di uscita del modello dovuta alla variazione contemporanea di più variabili di ingresso. In letteratura sono definite ulteriori Misure Differenziali di Importanza che comprendono il contributo dei termini di ordine superiore al primo dello sviluppo in serie di Taylor (2.18).

Con riferimento a quanto riportato nel §2.1.3, la Funzione di Sistema esprime lo stato (guasto / funzionate) del Sistema attraverso gli operatori logici AND e OR tra le variabili che rappresentano lo stato (guasto / funzionate) dei componenti. L'Indisponibilità asintotica del Sistema è espressa in funzione della Indisponibilità asintotica dei suoi componenti mediante le forme riportate nelle eq. (2.11) e (2.12) o loro combinazioni. E' evidente la presenza di termini associati al prodotto tra le variabili, che rendono non nulle le derivate parziali di ordine superiore al primo, trascurate nella definizione del *DIM* e determinano la presenza di interazioni tra i componenti.

Il "Joint Failure Importance di ordine due" per i componenti  $j$  e  $k$  è dato dalla derivata parziale di secondo ordine della Indisponibilità del Sistema, rispetto alla Indisponibilità di due componenti [17], [18]<sup>4</sup>:

$${}^2J_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial U_j \partial U_k} \quad \forall j, k \quad j \neq k \quad (2.23)$$

Tale misura fornisce informazioni sulle interazioni esistenti tra il componente  $j$  ed il componente  $k$ . In particolare, il segno di  ${}^2J_{jk}$  fornisce informazioni sulle relazioni logiche AND / OR tra i componenti, distinguendo i casi in cui la derivata prima (quindi l'Importanza misurata dal *DIM* aumenta all'aumentare dell'Indisponibilità del componente ( ${}^2J_{jk} \geq 0$ ) o diminuisce ( ${}^2J_{jk} \leq 0$ ).

Per sistemi coerenti di componenti indipendenti, in accordo a quanto riportato nel §2.1.3, risulta:

- ${}^2J_{jk} \geq 0$  se non ci sono Path-set contenenti entrambi i componenti ovvero se non è richiesto il funzionamento contemporaneo di entrambi i componenti per assicurare il funzionamento del Sistema; è questo il caso di componenti in Parallelo;
- ${}^2J_{jk} \leq 0$  se non ci sono Cut-set contenenti entrambi i componenti ovvero se non è richiesto il guasto contemporaneo di entrambi i componenti per determinare il guasto Sistema; è questo il caso di componenti in Serie.

Nei casi in cui è verificata l'ipotesi di "eventi rari",  ${}^2J_{jk} \neq 0$  solo se i componenti appartengono ad un medesimo Cut-set.

Il Joint Failure Importance di ordine due fornisce informazioni sulle interazioni esistenti ma non sull'Importanza complessiva del gruppo costituito dai due componenti, che deve comprendere anche il contributo del primo ordine dei due componenti. A tal fine, è stata recentemente proposta una Misura differenziale del secondo ordine denominata "Second order Differential Importance Measure" [31]:

$${}^2DIM_{jk} \approx \frac{\frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j + \frac{\partial U}{\partial U_k} \cdot \Delta U_k + \frac{\partial^2 U}{\partial U_j \partial U_k} \cdot \Delta U_j \cdot \Delta U_k}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta U_i \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=i}^n \left( \frac{\partial^2 U}{\partial U_i \partial U_l} \cdot \Delta U_i \cdot \Delta U_l \right)} \quad (2.24)$$

<sup>4</sup> La definizione del Joint Failure Importance di ordine due fornita in letteratura [17], [18], [39] (acronimo JFI) è riferita alla Affidabilità di un sistema; le valutazioni espresse per il segno di  $J_{jk}$  sono pertanto coerenti con le valutazioni riferite in letteratura al segno di (-JFI).

Nella definizione del  ${}^{\text{II}}DIM_{ij}$  si sottintende che i termini del secondo ordine rispetto a ciascuna variabile sono nulli in quanto l'Indisponibilità del Sistema è il risultato di un'equazione Booleana tra gli stati dei componenti (binari). Tale osservazione ha validità generale ovvero anche per i termini di ordine superiore.

Il  ${}^{\text{II}}DIM_{ij}$  permette un ordinamento di Importanza delle coppie di componenti del Sistema e costituisce una generalizzazione della eq. (2.22). Il numeratore rappresenta la variazione totale della variabile di uscita dovuta alla variazione singola e contemporanea dell'Indisponibilità dei due componenti a cui la misura è riferita. Il denominatore coincide con lo sviluppo in serie di Taylor della variabile di uscita, troncato al secondo ordine e rappresenta la sua variazione totale dovuta alla variazione dell'Indisponibilità di ciascun componente, singola e contemporanea alla variazione dell'Indisponibilità di ciascuna coppia formata con i restanti componenti del Sistema.

Diversamente dal  ${}^{\text{I}}DIM$ , il  ${}^{\text{II}}DIM$  non gode della proprietà additiva: la somma delle misure riferite a due coppie di componenti non include le derivate parziali (di ordine due) rispetto alla Indisponibilità dei componenti di coppie diverse.

Al fine di avere informazioni sulle interazioni esistenti tra più di due componenti del Sistema, è stato recentemente introdotto il "Joint Failure Importance di ordine k" [32]:

$${}^k J_{l\dots k} = \frac{\partial^k U}{\partial U_l \cdot \dots \cdot \partial U_k} \quad (2.25)$$

Dallo sviluppo in Serie di Taylor dell'Indisponibilità del Sistema (2.18), l'approssimazione di ordine k della variazione totale risulta:

$$\Delta U = \sum_{l=1}^n (B_l \cdot \Delta U_l) + \dots + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l<\dots<k} \left( {}^k J_{l\dots k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right) \quad \text{dove} \quad \sum_{l<\dots<k} \dots = \sum_{l=1}^n \sum_{i=j}^n \dots \sum_{m=\dots k=m}^n \dots \quad (2.26)$$

L'Indisponibilità asintotica del Sistema, in quanto associata ad una Funzione di Sistema espressa da una equazione booleana, può essere sempre espressa in forma polinomiale (lineare nei coefficienti) rispetto all'Indisponibilità asintotica dei suoi componenti, con termini di ordine crescente rispetto alle variabili del modello). Ne consegue che l'espansione in serie di Taylor dell'Indisponibilità asintotica del Sistema può essere troncata ad un certo ordine  $m < n$  fornendo una stima esatta. Se è verificata l'ipotesi di "eventi rari", l'ordine  $m$  a cui può essere arrestato lo sviluppo in serie coincide con il massimo ordine dei Cut-set (massimo numero di variabili che compaiono in un Cut-set) [39].

Dallo sviluppo in serie di Taylor della variabile di uscita troncato all'ordine  $m < n$ , ipotizzato essere l'ordine massimo per ottenere una stima esatta, si ottiene la variazione dell'Indisponibilità del Sistema dovuta alla variazione dell'Indisponibilità di ciascun componente, singola ed in qualsiasi combinazione con la variazione dell'Indisponibilità dei restanti  $m - 1$  componenti:

$${}^T \Delta U = \sum_{l=1}^n (B_l \cdot \Delta U_l) + \sum_{k=2}^m \sum_{l<\dots<k} \left( {}^k J_{l\dots k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right) \quad (2.27)$$

La variazione della variabile di uscita dovuta alla variazione dell'Indisponibilità del componente  $l$ , singola ed in qualsiasi combinazione con la variazione dell'Indisponibilità dei restanti  $m - 1$  componenti, risulta:

$${}^T \Delta U_j = B_j \cdot \Delta U_j + \sum_{k=2}^m \sum_{\substack{l<\dots<k \\ j \in l\dots k}} \left( {}^k J_{l\dots k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right) \quad (2.28)$$

La Misura Differenziale di Importanza totale (Total order importance measure) del componente  $l$  è definita come [39]:

$${}^T D_j = \frac{{}^T \Delta U_j}{{}^T \Delta U} = \frac{B_j \cdot \Delta U_j + \sum_{k=2}^m \sum_{\substack{l < \dots < k \\ j \in l, \dots, k}} \left( {}^k J_{l, \dots, k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right)}{\sum_{l=1}^n (B_l \cdot \Delta U_l) + \sum_{k=2}^m \sum_{l < \dots < k} \left( {}^k J_{l, \dots, k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right)}. \quad (2.29)$$

La stima della Misura Differenziale di Importanza totale mediante la stima di tutte le derivate parziali che vi compaiono richiede, in generale, un numero estremamente elevato di valutazioni del modello. Per  $N$  variabili di ingresso ed una variabile di uscita, la stima delle derivate parziali di primo e secondo ordine richiede  $1/2 \cdot (N + N^2)$  valutazioni).

E' possibile valutare la Misura Differenziale di Importanza totale operando variazioni finite delle variabili. La procedura richiede  $N + 2$  valutazioni del modello e può quindi essere utilizzato per sistemi complessi (costituiti da un elevato numero di componenti) [39], [39]. Operativamente, si considera la variazione finita  $U_j^0 \rightarrow U_j$  dell'Indisponibilità di ciascun componente e si procede alla stima dei seguenti  $(N + 2)$  valori della variabili di uscita del modello:

- $U^0 = U(U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0)$  Indisponibilità del Sistema quando tutti componenti assumono il valore iniziale di Indisponibilità;
- $U = U(U_1, \dots, U_j, \dots, U_n)$  Indisponibilità del Sistema quando tutti componenti assumono il valore finale di Indisponibilità;
- $U^{-j} = U(U_1, \dots, U_j^0, \dots, U_n)$  Indisponibilità del Sistema quando tutti componenti assumono il valore finale di Indisponibilità, tranne il componente a cui è riferita la misura per il quale è assunto il valore iniziale.

La Misura Differenziale di Importanza totale è stimata mediante l'espressione [39]:

$${}^T D_j = \frac{U - U^{-j}}{U - U^0} \quad (2.30)$$

Dalle eq. (2.29) e (2.30),  $U - U^{-j}$  rappresenta la somma di tutti i termini dello sviluppo in serie di Taylor della Indisponibilità del Sistema  $U$  che non dipendono dalla Indisponibilità del componente in oggetto  $U_l$  [39]. Se le Indisponibilità dei componenti sono affette da incertezza, rappresentata dalle distribuzioni di probabilità associate,  $U - U^{-j}$  rappresenta la somma di tutti i termini della Decomposizione ANOVA dell'Indisponibilità del Sistema [38], come definita nel §3.3.2.

## 3 ANALISI DI INCERTEZZA E SENSITIVITÀ

### 3.1 Approccio Locale e Globale per l'analisi delle incertezze

L'Analisi di Incertezza si propone l'obiettivo di propagare nelle variabili di uscita le incertezze associate alle variabili di ingresso (incertezza stocastica) ed alla struttura del modello (incertezza epistemica).

L'Analisi di Sensitività riguarda lo studio di come la variabilità delle variabili di uscita di un modello può essere allocata alle sorgenti di incertezza.

Strumento comune è la definizione di opportune "misure di Sensitività" per realizzare un ordinamento delle variabili di ingresso affette da incertezza, rispetto all'incertezza che caratterizza le variabili di uscita [29].

Nella presente trattazione è utilizzata una caratterizzazione probabilistica dell'incertezza aleatoria associata alle variabili del modello. Non sono considerate rappresentazioni alternative, ad esempio mediante la Teoria della possibilità, la Teoria dell'evidenza, i Fuzzy set o approcci specifici per l'incertezza epistemica [9].

L'incertezza associata a ciascuna variabile del modello è rappresentata mediante distribuzione di probabilità definita sul relativo intervallo di variazione. Il modello può essere deterministico o probabilistico; nel secondo caso, le variabili incerte definiscono le distribuzioni di probabilità che descrivono i fenomeni stocastici del modello (es. occorrenza di eventi di guasto o riparazione) [59].

Storicamente, l'analisi delle incertezza associata alle variabili di uscita di un modello matematico si è sviluppata secondo un approccio "locale" nel dominio delle variabili di ingresso. In tale contesto, interessa valutare l'effetto sulle variabili di uscita del modello di piccole variazioni delle variabili di ingresso rispetto a predefiniti valori nominali, generalmente considerate singolarmente.

Se il modello è fortemente non lineare (ad esempio è non monotono) e non si è focalizzati ai valori nominali delle variabili di ingresso ma interessa considerare un intervallo di variazione relativamente ampio è necessario adottare un approccio "Globale" per l'analisi di incertezza e Sensitività. Gli aspetti comuni dei metodi proposti in letteratura riguardano la considerazione di tutto il dominio delle variabili e la valutazione dell'effetto della loro variazione contemporanea [29].

L'elevata potenzialità dei metodi per l'analisi Globale di Incertezza e Sensitività, che si traduce nella maggiore quantità e qualità di informazioni desumibili dall'analisi, comporta un elevato onere computazionale richiedendo la valutazione ripetuta delle variabili di uscita del modello, per differenti valori delle variabili di ingresso. La loro applicazione risulta particolarmente gravosa quando il modello non è definito in modo analitico ma richiede l'applicazione di algoritmi numerici più o meno complessi e l'eventuale ricorso a tecniche di simulazione (se il modello include processi stocastici).

Nello studio è considerato un approccio di analisi di Incertezza e Sensitività basato sulla Decomposizione varianza, sintesi del "Metodo di Sobol" [16], [22] e delle integrazioni proposte in letteratura [19], [25].

Non sono considerati metodi alternativi basati sulla Decomposizione varianza come il Fourier Amplitude Sensitivity Test (FAST) [29] o sulla valutazione dell'effetto prodotto sulla distribuzione [34] di probabilità associata alle variabili di uscita dalla variazione delle variabili di ingresso.

## 3.2 Analisi di Sensitività mediante un approccio Locale

### 3.2.1 Varianza, Covarianza e Coefficiente di correlazione

Introduciamo alcuni elementi teorici essenziali, riguardanti i sistemi stocastici [59].

Consideriamo una variabile casuale  $X = (x_1, x_2)$  con una funzione Densità di probabilità congiunta  $p(X)$ .

La funzione Cumulata di probabilità è  $P(X) = \int p(x_1, x_2) \cdot dx_1 dx_2$   $0 \leq P(X) \leq 1$  (è omessa l'indicazione di integrale multiplo e del dominio di integrazione).

Risulta  $p(X) = \frac{\partial^2 P(X)}{\partial x_1 \partial x_2}$ . Si definisce:

- “Distribuzione marginale” per  $x_1 \rightarrow g(x_1) = \int_{\Omega_{x_2}} p(x_1, x_2) dx_2$ ; analogamente per  $x_2$ ;
- “Distribuzione condizionata” per  $x_1$  fissato  $x_2$  al valore  $x_2^o \rightarrow p(x_1 | x_2^o) = \frac{p(x_1, x_2^o)}{\int_{\Omega_{x_1}} p(x_1, x_2^o) \cdot dx_1}$ ; analogamente per  $x_2$ .

Se le variabili sono indipendenti, la Densità di probabilità congiunta  $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2)$  coincide con la funzione “Copula” delle distribuzioni marginali  $p_1(x_1), p_2(x_2)$ ; la Distribuzione marginale e la Distribuzione condizionata coincidono.

Consideriamo una variabile casuale  $X = (x_1, \dots, x_n)$  con funzione Densità di probabilità  $f(X)$ . La funzione Cumulata di probabilità è  $P(X) = \int p(X) \cdot d^n X$   $0 \leq P(X) \leq 1$ . Risulta  $p(X) = \frac{\partial^n P(X)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$ .

Il “Momento di ordine zero” della distribuzione esprime la condizione di normalizzazione:

$$\int p(X) \cdot d^n X = 1. \quad (3.1)$$

Il “Momento di ordine uno” della distribuzione esprime il valore medio (o valore atteso) rispetto a ciascuna variabile:

$$\bar{x}_i = \int x_i \cdot p(X) \cdot d^n X. \quad (3.2)$$

Il “Momento di ordine due” esprime la “Varianza” associata a ciascuna variabile e la “Covarianza” tra coppie di variabili:

$$Var(x_j) = \overline{(x_j - \bar{x}_j)^2} = \int (x_j - \bar{x}_j)^2 \cdot p(X) \cdot d^n X \quad (3.3)$$

$$Cov(x_i, x_j) = Cov(x_j, x_i) = \overline{(x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_j - \bar{x}_j)} = \int (x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_j - \bar{x}_j) \cdot p(X) \cdot d^n X \quad (3.4)$$

Si definisce “Matrice di covarianza” la matrice  $n \times n$ , simmetrica e semi-definita positiva, con:

- gli elementi sulla diagonale principale uguali alla varianza associata a ciascuna variabile  $\sigma_{ii} = Var(x_i)$ ;
- i restanti elementi uguali alla covarianza associata a ciascuna coppia di variabili  $\sigma_{ij} = Cov(x_i, x_j) = Cov(x_j, x_i)$ .

Se le variabili sono indipendenti  $p(X) = \prod_i p_i(x_i)$  la Matrice è diagonale essendo nulli i termini di covarianza.

Il determinante della Matrice di covarianza è nullo se e solo se esiste almeno una relazione lineare tra le variabili.

Per una distribuzione bivariata, e in modo analogo per ciascuna una coppia di variabili di una distribuzione multivariata, si definisce “Coefficiente di correlazione” il valore della covarianza tra le variabili, normalizzato sulla radice quadrata del prodotto tra la varianza di ciascuna.

$$\rho_{x_i, x_j} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{ii})^{\frac{1}{2}} \cdot (\sigma_{jj})^{\frac{1}{2}}} \quad (3.5)$$

Rispetto a  $n$  valutazioni di due variabili scalari il Coefficiente di correlazione (di Pearson) è stimato come:

$$\rho_{x_i, x_j} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_j - \bar{x}_j)}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{dove} \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{e} \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_j \quad (3.6)$$

Il Coefficiente di correlazione assume valori tra -1 e +1 e fornisce una misura della “forza” della relazione lineare che sussiste tra due variabili. Un valore positivo indica che le variabili tendono ad aumentare o diminuire in accordo; un valore negativo indica che le variabili si muovono in direzione opposta. I valori  $\pm 1$  indicano una relazione (esattamente) lineare tra le variabili. Un valore nullo indica l'assenza di relazioni lineari ma non preclude la presenza di ben definire relazioni non lineari tra le variabili (es.  $y = \sin(x)$ ).

### 3.2.2 Metodi analitici approssimati per l'Analisi di Sensitività

Metodi analitici basati su una rappresentazione approssimata del modello oggetto di studio possono essere utilizzati per lo sviluppo di una analisi di Sensitività secondo un approccio Locale [30], [29].

Consideriamo un modello ad “una risposta” (con una variabile di uscita), con  $n$  variabili di ingresso  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ , descritto dalla funzione (differenziabile)  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Lo sviluppo in Serie di Taylor della  $f(X)$  troncato al secondo ordine, con origine  $X^0 = x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ , risulta:

$$f(X) \approx f(X^0) + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{X^0} \cdot (x_i - x_i^0) \right] + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X^0} \cdot (x_i - x_i^0) \cdot (x_j - x_j^0) \right] \quad (3.7)$$

In forma compatta  $f(X) \approx f(X^0) + (\nabla f|_{X^0}) \cdot (X - X^0) + \frac{1}{2} \cdot (X - X^0)^T \cdot [Hf|_{X^0}] \cdot (X - X^0)$ ,

dove  $(\nabla f|_{X^0})_{-i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{x_i^0}$  è l'operatore Gradiente e  $[Hf|_{X^0}]_{-i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_i^0}$  è la Matrice Hessiana.

Supponiamo che alle variabili di ingresso sia associata una distribuzione di probabilità Normale  $p_i(x_i) = N(\bar{x}_i, \sigma_{x_i})$ .

Con riferimento alla Matrice di covarianza associate alle variabili di ingresso, con elemento generico  $\sigma_{ij}$ :

- l'approssimazione al secondo ordine del valore atteso della funzione  $f(X)$  risulta

$$\overline{f(X)} \approx f(\bar{X}) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\bar{x}} \cdot \sigma_{ij}; \quad (3.8)$$

- l'approssimazione al primo ordine della varianza associata alla funzione  $f(X)$  risulta:

$$Var[f(X)] = \overline{(f(X) - \overline{f(X)})^2} \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{X^0} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{X^0} \cdot \sigma_{ij}. \quad (3.9)$$

Se le variabili sono indipendenti le eq. (3.8) e (3.9) si semplificano essendo nulli i termini di covarianza.

Consideriamo un modello a “risposta multipla” (con  $m$  variabili di uscita), con  $n$  variabili di ingresso  $X = x_1, \dots, x_n$ , descritto dalla  $G(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$

Lo sviluppo in Serie di Taylor di ciascuna  $G_l(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  ipotizzata differenziale, troncato al primo ordine risulta:

$$G(X) \approx G(X^0) + [JG|_{X^0}] \cdot (X - X^0), \text{ dove } [JG|_{X^0}]_{i,j} = \left. \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right|_{X^0} \text{ è la Matrice Jacobiana della funzione } G(X).$$

L'approssimazione al primo ordine della Covarianza tra due “risposte del modello”  $G_l(X), G_m(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  risulta:

$$Cov[G_l, G_m] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G_l}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial G_m}{\partial x_j} \cdot \sigma_{ij} \right). \quad (3.10)$$

In forma compatta  $Cov[G] = JG \cdot Cov[X] \cdot JG^T$ , dove  $Cov[G]$  è la Matrice di covarianza ( $m \times m$ ) tra le variabili del codominio e  $Cov[X]$  è la Matrice di covarianza ( $n \times n$ ) tra le variabili del dominio della funzione con elemento generico  $\sigma_{ij}$ .

L'eq. (3.10), nota come “Legge di propagazione degli errori”, esprime la propagazione delle incertezze (varianze e covarianze) associate alle variabili di ingresso, sulle incertezze associate variabili di uscita del modello.

In modo analogo è possibile esprimere l'approssimazione al primo ordine della covarianza tra una risposta del modello  $G_l(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  e ciascuna variabile di ingresso:

$$Cov[G_l, x_i] \approx \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G_l}{\partial x_j} \cdot \sigma_{ij} \right) \quad (3.11)$$

Per un modello a “risposta multipla” con  $m$  variabili di uscita e  $n$  variabili di ingresso  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ , si definiscono:

- Coefficienti di correlazione tra due variabili di ingresso  $\rho_{x_i, x_j} = \frac{\sigma_{ij}}{(\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj})^{\frac{1}{2}}}$ ;
- Coefficienti di correlazione tra due risposte del modello  $\rho_{G_l, G_m} = \frac{Cov[G_l, G_m]}{(Var[G_l] \cdot Var[G_m])^{\frac{1}{2}}}$ ;
- Coefficienti di correlazione tra una risposta del modello e ciascuna variabile  $\rho_{G_l, x_j} = \frac{Cov[G_l, x_j]}{(Var[G_l] \cdot Var[x_j])^{\frac{1}{2}}}$ .

Si definisce “Matrice di correlazione delle variabili di ingresso” la matrice  $n \times n$ , simmetrica e semi-definita positiva, con elementi uguali a 1 sulla diagonale ed i restanti elementi uguali al Coefficiente di correlazione tra le variabili  $\rho_{x_i, x_j}$ .

Si definisce “Matrice di correlazione delle risposte del modello” la matrice  $m \times m$  simmetrica e semi-definita positiva, con elementi uguali a 1 sulla diagonale ed i restanti elementi uguali al Coefficiente di correlazione tra le variabili  $\rho_{G_l, G_m}$ .

### 3.2.3 Analisi di Sensitività mediante Misure OAT

Lo sviluppo di una analisi di Sensitività secondo un approccio Locale può essere realizzato mediante l'adozione di una misura OAT (One-At-Time), cioè riferita alla variazione di ciascuna variabile di ingresso del modello considerata singolarmente, in modo consistente con un approccio di Decomposizione della varianza [37].

Consideriamo un modello con  $n$  variabili di ingresso  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ , descritto dalla funzione differenziabile  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ . Supponiamo che le variabili di ingresso siano affette da incertezza, rappresentata con una distribuzione di probabilità Normale  $p_i(x_i) = N(\bar{x}_i, \sigma_{x_i})$ .

Una misura di Sensitività OAT (One-At-Time) deve fornire informazioni sulla Importanza delle variabili di ingresso incerte  $x_i$ , singolarmente considerate, nella determinazione della variabile di uscita  $f$ .

Una prima misura, consistente con l'Analisi di Importanza descritta nel §5, è rappresentata dalla derivata parziale della variabile di uscita rispetto a ciascuna variabile di ingresso:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Tale misura, per il suo carattere "locale", non permette

di tener conto nell'ordinamento delle variabili delle caratteristiche specifiche delle distribuzioni che ne rappresentano l'incertezza associata.

Una misura che realizza un ordinamento con un significato di "Sensitività" è definita dal prodotto tra il quadrato della derivata parziale della variabile di uscita rispetto alla variabile di ingresso considerata ed il rapporto tra i valori della varianza associata alle variabili di ingresso e uscita:

$$I_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \frac{Var(x_i)}{Var(f)}. \quad (3.12)$$

Tale misura è definita "ibrida" in quanto risulta dal contributo di una misura "locale" rappresentata dalla derivata parziale, calcolata in un intorno del valore nominale e di una misura "globale" rappresentata dal rapporto tra la varianza associata alla variabile di ingresso e la varianza associata alla variabile di uscita.

Dalla eq. (3.9), l'approssimazione al primo ordine della varianza associata alla funzione  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , risulta:

$$Var[f] \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \sigma_{ij} \right) \quad (3.13)$$

Per variabili di ingresso tra loro indipendenti l'eq. (3.13) si semplifica nella  $Var[f] \approx \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot Var(x_i) \right]$ .

Dalla eq. (3.12) risulta  $I_i = \frac{{}^i Var(f)}{Var(f)}$ , dove  ${}^i Var(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot Var(x_i)$ , rappresenta il contributo alla varianza

associata alla funzione  $f$  dovuto alla variabile di ingresso  $x_i$  e fornisce un ordinamento delle variabili consistente con un approccio di Decomposizione della varianza, come descritto nel §3.3.1.

L'eq (3.13) fornisce una stima esatta per modelli descritti da una funzione lineare, del tipo  $f = \sum_i a_i \cdot x_i$  con  $a_i$

coefficienti fissi (parametri noti, non affetti da incertezza). In tal caso  $\sum_i I_i = 1$ . Per modelli non lineari  $\sum_i I_i < 1$ ;

un ordinamento mediante la  $I_i$  potrebbe non tener conto di importanti effetto dovuti alle non linearità delle relazioni.

### 3.2.4 Analisi di Sensitività mediante Tecniche di regressione lineare

Tecniche di regressione lineare dei dati possono essere utilizzate nello sviluppo di una analisi di Sensitività [30]. Consideriamo un modello con  $n$  variabili di ingresso  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ , descritto dalla funzione differenziabile  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ . Supponiamo che le variabili di ingresso, tra loro indipendenti, siano affette da incertezza, rappresentata con una distribuzione di probabilità Normale con valore atteso nullo  $x_i \approx N(0, \sigma_{x_i})$ .

Supponiamo di disporre di un adeguato numero di coppie di valori della funzione  $f$  e del valore assunto dalle variabili indipendenti. Ad esempio è possibile procedere al campionamento (mediante metodi MonteCarlo / Latin Hypercube) di vettori delle variabili di ingresso e, per ciascuno, alla valutazione delle variabili di uscita.

Effettuando una regressione lineare della variabile  $f$ , ad esempio mediante metodo dei Minimi quadrati<sup>5</sup>, si ottiene una stima del tipo:  $\hat{f} = a_0 + \sum_i a_i \cdot x_i$  dove i parametri  $a_i$  sono denominati "Coefficienti non standardizzati".

I Coefficienti non standardizzati della regressione forniscono una stima della derivata parziale della variabile di uscita rispetto a ciascuna variabile di ingresso; tale stima può essere realizzata in termini di valore atteso e relativi limiti di confidenza:  $\overline{a_0} \approx 0$  e  $a_i \approx \frac{\partial f}{\partial x_i}$   $i = 1, \dots, n$ . Si definiscono Coefficienti standardizzati della regressione le quantità:

$$\beta_i = \overline{a_i} \cdot \frac{Var(x_i)^{\frac{1}{2}}}{Var(f)^{\frac{1}{2}}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Dalle eq. (3.5) e (3.11), il Coefficiente standardizzato della regressione risulta coincidere con il Coefficiente di correlazione tra le variabili:  $\rho_{F,U_i} = \beta_i$ . Pertanto, la conoscenza delle derivate parziali permette una stima del coefficiente di correlazione; la conoscenza del coefficiente di correlazione permette una stima delle derivate parziali:

Per modelli lineari, ovvero con riferimento ad uno lo sviluppo in Serie di Taylor troncato al primo ordine di una funzione differenziabile  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , e variabili di ingresso indipendenti la misura  $\beta_i$  fornisce un ordinamento con significato di "Importanza" mentre la misura  $\beta_i^2$  fornisce un ordinamento con significato di "Sensitività".

Per modelli lineari e variabili di ingresso tra loro indipendenti, i valori di ottenuti per i Coefficienti standardizzati della regressione forniscono una stima delle misure di Sensitività OAT:  $\beta_i^2 = I_i$  e  $\sum_i \beta_i^2 = \sum_i I_i = 1$ .

Per modelli non lineari risulta  $\sum_i \beta_i^2 = \sum_i I_i < 1$ .

L'utilizzo di  $\beta_i^2$  come misura di Sensitività risulta più generale rispetto all'utilizzo delle misure OAT in quanto [29]:

- può essere valuta anche per modelli non-lineari, nel qual caso il Coefficiente di determinazione permette di quantificare la frazione della varianza totale associata alle non linearità del modello;
- rappresenta un misura "multi-dimensionale", ottenuta da operazioni di media rispetto a più variabili, mentre la misura  $I_i$  è strettamente riferita alla variazione singola di ciascuna variabile del modello.

<sup>5</sup> Il metodo dei Minimi quadrati è un metodo non parametrico che "seleziona" i valori  $a_i$  per i quali è minima la somma dei quadrati degli Scarti  $e_i = f_i - \hat{f}_i$ , differenza tra il valore della funzione ed il valore stimato dalla regressione, nelle diverse osservazioni.

L'efficacia nell'utilizzo di  $\beta_i^2$  come misura di Sensitività può essere stimata mediante il Coefficiente di determinazione della regressione lineare:

$$R_U^2 = \frac{\sum_j \left( \hat{f}^j - \bar{f} \right)^2}{\sum_j \left( f^j - \bar{f} \right)^2} = \frac{VAR(y_{regr})}{VAR(y)} \quad (3.15)$$

Il Coefficiente di determinazione  $R_U^2$ , variabile tra 0 e 1, è definito dal rapporto tra lo scarto quadratico del valore predetto per la variabile di uscita e lo scarto quadratico dei "residui" della regressione, rispetto al valore atteso. Tale misura rappresenta quindi la frazione della varianza totale associata alla variabile di uscita del modello, tenuta in conto dal modello di regressione.  $R_U^2$  è uguale 1 per modelli esattamente lineari ed assume valori prossimi a 1 quando il modello di regressione tiene conto della maggior parte dell'incertezza associata alla variabile in uscita. Un valore di  $R_U^2$  prossimo a 0 indica che il modello di regressione non è efficace nel tener conto dell'incertezza associata alla variabile in uscita, per la presenza di forti non linearità (es. andamenti non monotoni).

### 3.3 Analisi di Sensitività mediante un approccio Globale

#### 3.3.1 Decomposizione della varianza

La Decomposizione della varianza della/e variabili di uscita di un modello nei contributi associati alle variabili in ingresso rappresenta un approccio "Globale" per l'analisi di Sensitività ed ha il principale vantaggio di non introdurre ipotesi limitative sulla struttura del modello [19], [22], [30], [37].

Consideriamo un modello descritto da una  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , le cui variabili di ingresso sono affette da incertezza rappresentata mediante una qualche distribuzione di probabilità.

La varianza associata alla funzione  $F$  può essere espressa con riferimento ad una delle variabili di ingresso

$$Var(f) = Var\left(\overline{f|x_i = x_i^*}\right) + \overline{Var(f|x_i = x_i^*)} \quad \text{dove} \quad (3.16)$$

- $\overline{f|x_i = x_i^*} = \int_y f \cdot p(x_1, \dots, x_n | x_i) d^{n-1} X$  è il valore medio della funzione  $f$ , condizionata all'aver fissato la variabile  $x_i$  al valore  $x_i^*$
- $Var\left(\overline{f|x_i = x_i^*}\right)$  è la varianza del valore medio della funzione  $f$ , condizionata all'aver fissato la variabile  $x_i$  al valore  $x_i^*$ , per tutti i possibili valori  $x_i^*$  nel relativo intervallo di variazione; tale contributo, denominato "Effetto principale" rappresenta la variabilità della funzione  $f$  dovuta alla variabile  $x_i$ ;
- $\overline{Var(f|x_i = x_i^*)}$  è il valore medio della varianza associata alla funzione  $f$ , condizionata all'aver fissato la variabile  $x_i$  al valore  $x_i^*$ , per tutti i possibili valori  $x_i^*$  nel relativo intervallo di variazione; tale contributo, denominato "Residuo" rappresenta la variabilità della funzione  $f$  non controllata da  $x_i$  ma dovuta alle restanti variabili.

### 3.3.2 Decomposizione ANOVA

Supponiamo che  $X$  sia una variabile casuale con funzione Densità di probabilità  $p(X) \geq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{R}^m$  ovvero che ciascuna  $x_i \quad i = 1, \dots, n$  sia una variabile casuale con funzione Densità di probabilità  $p_i(x_i)$ .

Nel conteso delle analisi globali di Sensitività mediante metodi basati sulla varianza, la decomposizione ANOVA di una funzione  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  è definita dalla somma di termini dipendenti da un numero crescente di variabili, tra loro ortogonali (il cui prodotto scalare è nullo) [16]:

$$f(X) = f_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \phi_{ij}(x_i, x_j) + \dots + \phi_{i\dots n}(x_i, \dots, x_n) \quad (3.17)$$

Per variabili  $x_i$  tra loro indipendenti risulta  $p(X) = \prod_i p_i(x_i)$ .

Il termine costante  $f_0$  corrisponde al valore medio della  $f(X)$  rispetto a tutte le variabili (è omessa l'indicazione di

integrale multiplo ed il dominio di integrazione):  $f_0 = \int f(X) \cdot p(X) dX = \int f(X) \cdot \prod_{k=1}^n p_k(x_k) dx_k$ .

$n$  termini  $\phi_i$  sono denominati "Effetti principali"; ciascun termine dipende da una sola variabile ed è ottenuto dalla differenza tra il valore medio della  $f(X)$  rispetto a tutte le variabili ad eccezione della variabile in oggetto (fissa al suo

valore nominale) ed il termine costante precedentemente stimato:  $\phi_i(x_i) = \int f(X) \cdot \prod_{k=1, \neq i}^n p_k(x_k) dx_k - f_0$ .

$n/2$  termini  $\phi_{ij}$  sono denominati "Interazione di secondo ordine"; ciascun termine dipende da due variabili ed è ottenuto dalla differenza tra il valore medio della  $f(X)$  rispetto a tutte le variabili ad eccezione delle due variabili in

oggetto ed i termini precedentemente stimati:  $\phi_{ij}(x_{ij}) = \int f(X) \cdot \prod_{k=1, \neq i, j}^n p_k(x_k) dx_k - \phi_i(x_i) - \phi_j(x_j) - f_0$ .

In generale, il termine di Interazione  $\phi_{i\dots m}$  è ottenuto come differenza tra il valore medio della  $f(X)$  rispetto a tutte le  $n-m$  restanti variabili ed il contributo dovuto a qualsiasi termini di ordine inferiore.

### 3.3.3 Definizione degli Indici di Sensitività

Lo sviluppo di una per l'analisi di Sensitività "Globale" in un contesto di Decomposizione della varianza, può essere realizzato mediante la valutazione degli Indici di Sensitività definiti dal "Metodo di Sobol" [16], [22] e delle integrazioni proposte [19], [25].

Elevando al quadrato ed integrando l'eq. (3.17) e sfruttando l'ortogonalità tra i termini della decomposizione ANOVA della funzione  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , la varianza associata può essere stimata come somma di contributi (varianza parziale) dipendenti da un numero crescente di variabili:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n V_{ij} + \dots + V_{i\dots n} \quad \text{dove} \quad (3.18)$$

- $V = Var[f(X)] = \int f^2(X) \cdot p(X) dX - f_0^2$
- $V_{1...m} = Var[\phi_{1...m}(x_1, \dots, x_m)] = \int \phi_{1...m}^2(x_1, \dots, x_m) \cdot \prod_{k=1}^m p(x_k) dx_k$

Gli Indici di Sensitività sono definiti dal rapporto tra la varianza parziale dovuta alla/e variabile/i di interesse e la varianza totale associata alla variabile di uscita:

$$S_{1...m} = \frac{V_{1...m}}{V} \quad \text{dove} \quad \sum S_i + \sum S_{ij} + \dots + S_{1...n} = 1 \quad (3.19)$$

A ciascuna variabile considerata singolarmente è associato il relativo “Indice di Sensitività principale”; dalla Decomposizione della varianza espressa dalla eq. (3.16) risulta:

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{Var(f|x_i = x_i^*)}{Var(f)} \quad (3.20)$$

L’Indice di Sensitività principale misura la riduzione della varianza associata alla variabile di uscita, mantenendo fissa la variabile di ingresso in oggetto.

$\sum_i S_i \leq 1$  con il segno di uguaglianza valido solo per modelli “additivi”<sup>6</sup>. La differenza  $1 - \sum_i S_i$  misura la riduzione

della varianza associata alla variabile di uscita, dovuta alle interazioni tra le variabili di ingresso, in qualsiasi numero e combinazione, che si manifestano per la loro variazione contemporanea.

Gli indici associati alla interazione tra due o più variabili, denominati “Indici di Sensitività delle interazioni”, forniscono una misura degli effetti della variazione contemporanea di più variabili di ingresso del modello, che non sono descritti dalla sovrapposizione degli effetti dovuti alla variazione singola di ciascuna variabile.

Per ciascuna variabile considerata da sola ed in relazione in qualsiasi combinazione con le restanti variabili è definito il relativo “Indice di Sensitività globale” [19], dato dalla somma di tutti gli indici in cui compare la variabile in oggetto:

$$S_{T_i} = S_i + \sum_i \left[ \sum_j S_{ij} + \dots + S_{1...n} \right] = 1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \left[ S_l + \sum_j S_{lj} + \dots + S_{1...n} \right] \quad (3.21)$$

L’ultimo termine dell’eq. (3.21) rappresenta il contributo alla varianza totale dovuto alla variazione di tutte le variabili, in qualsiasi combinazione, tranne la variabile *i*-esima mantenuta fissa al proprio valore nominale; dalla Decomposizione della varianza espressa dalla eq. (3.16) risulta:

$$S_{T_i} = 1 - \frac{Var(f|x_i = x_i^*)}{Var(f)} = \overline{Var(f|x_i = x_i^*)} \quad (3.22)$$

La differenza  $S_{T_i} - S_i$  misura il contributo alla varianza dovuto alle interazioni tra la variabile *i* e le restanti variabili di ingresso del modello, che si manifestano per la loro variazione contemporanea, in qualsiasi combinazione e numero.

<sup>6</sup> Un modello  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  è additivo se può essere decomposto nella summa di *n* funzioni, ciascuna dipendente da una singola variabile  $x_i$ .  $f = \sum_i x_i^2$  è un modello non è lineare ma additivo;  $f = \prod_i x_i$  è un modello non lineare e non additivo.

### 3.3.4 Stima degli Indici di Sensitività

L'applicazione del "Metodo di Sobol", che si concretizza nella definizione degli Indici di Sensitività definiti nel §3.3.3, a partire dalla decomposizione ANOVA di una funzione definita nel §3.2.4, richiede la valutazione di integrali multi-dimensionali, generalmente mediante il ricorso a metodi MonteCarlo [16], [22].

In letteratura sono proposti diversi metodi per la stima degli Indici di Sensitività. Abitualmente interessa valutare l'Indice principale e l'Indice globale per ciascuna variabile del modello; raramente si è interessati alla stima degli Indici delle interazioni (o raramente è ragionevole procedere alla loro stima per l'onere computazionale richiesto) [29].

E' immediatamente ipotizzabile l'utilizzo di approccio "Brute-force" per la stima degli indici di Sensitività principale e globale, dallo loro espressione fornita dalla eq. (3.20) e dalla eq. (3.22), a partire dalla Decomposizione della varianza. Consideriamo un modello con  $n$  variabili di ingresso  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$  affette da incertezza, descritto dalla funzione differenziabile  $f(X) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ . La varianza parziale  $Var\left(f|_{x_i = x_i^*}\right)$  può essere stimata mediante la realizzazione di un set di simulazioni in cui la sola variabile è mantenuta fissa ad un certo valore  $x_i^*$ , ripetute per i differenti valori che la variabile può assumere nel suo intervallo di variazione. Il costo computazionale totale richiesto da tale approccio, in termini di numero di valutazioni della funzione  $F$  è  $N^2$ .

E' di seguito descritta una procedura proposta in letteratura per il calcolo degli Indici di Sensitività delle  $n$  variabili di ingresso di un modello mediante  $N$  simulazioni, di facile implementazione e con minor costo computazionale [25].

Si effettua un campionamento di  $2N \cdot n$  valori delle variabili di ingresso dalle relative distribuzioni di probabilità, utilizzati per la costruzione delle matrici A e B. Si costruisce la matrice C formata da tutte le colonne della matrice B, ad eccezione della colonna i-esima, presa dalla matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(M)} & \dots & x_i^{(M)} & \dots & x_n^{(M)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_n^{(N)} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_j^{(N+1)} & \dots & x_n^{(N+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(Q)} & \dots & x_j^{(Q)} & \dots & x_n^{(Q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_j^{(2N)} & \dots & x_n^{(2N)} \end{bmatrix} \quad C_i = \begin{bmatrix} x_1^{(N+1)} & \dots & x_i^{(1)} & \dots & x_n^{(N+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(Q)} & \dots & x_i^{(M)} & \dots & x_n^{(Q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(2N)} & \dots & x_i^{(N)} & \dots & x_n^{(2N)} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Si stima la funzione  $F$  per ciascun vettore delle variabili di ingresso costituito dalle righe delle matrici  $A$ ,  $B$  e  $C_i$  ottenendo i vettori ( $n$  dimensionali)  $f^A = f(A)$ ,  $f^B = f(B)$ ,  $f^{C_i} = f(C_i)$ .

Si stimano gli Indici di Sensitività mediante le espressioni:

$$S_i = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^A \cdot f_j^{C_i} - \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^A \right)^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (f_j^A)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^A \right)^2} \quad S_{Ti} = 1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^B \cdot f_j^{C_i} - \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^A \right)^2}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (f_j^A)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^A \right)^2} \quad (3.24)$$

Il costo computazionale richiesto dalla procedura è pari a  $N \cdot (k + 2)$  ( $2 \cdot N$  valutazioni della funzione  $F$  sono necessarie per le matrici A e B;  $n \cdot N$  valutazioni della funzione  $F$  sono necessarie per le matrici  $C_i$ ).

Il campionamento può essere migliorato dall'adozione di "tecniche di stratificazione" che garantiscano una "esplorazione" uniforme degli intervalli di variazione delle variabili di ingresso, quali le Tecniche Latin Hypercube introdotte nel §1.3.

## 4 SISTEMI A RETE: STATO DELL'ARTE

### 4.1 Teoria dei grafi

La nascita della teoria dei grafi risale al 1736, anno in cui il matematico svizzero Eulero cominciò il proprio studio discutendo il cosiddetto "Problema dei ponti di Königsberg". Esempi di problemi tipicamente affrontati mediante la Teoria dei grafi riguardano la determinazione del cammino più breve, la determinazione del massimo flusso trasportabile per la limitata capacità delle Connessioni e la determinazione delle loro orientazioni "ottimali" [42].

Una rete, logica o fisica, è rappresentabile da un grafo  $G(N, E)$  costituito da  $N$  nodi ed  $E$  Connessioni (o archi).

E' utile richiamare alcune definizioni base nell'abito della Teoria dei grafi:

- un grafo  $G$  è detto "Orientato" se le coppie di nodi sono ordinate, ovvero se ciascuna Connessione è caratterizzata da un verso di percorrenza che indivia un nodo "origine" ed un nodo "terminale";
- un grafo  $G$  è detto "Pesato" se ad ogni Connessione e' associato un peso;
- il numero degli Connessioni incidenti su un nodo è detto "Grado" del nodo;
- un "Percorso" (o cammino) dal nodo  $i$  al nodo  $j$  e' una successione di Connessione consecutive tale che la prima Connessione è uscente dal nodo  $i$  e l'ultima Connessione è entrante nel nodo  $j$ .
- un grafo è detto "Connesso" se esiste un percorso per ogni coppia di nodi  $i$  e  $j$ .

La topologia di un grafo non orientato è definita dalla "Matrice di adiacenza"  $A$ , quadrata, di ordine  $n$ , con elementi:

- $[A_{ij}] = 1$  se esiste una Connessione tra i nodi  $i$  e  $j$ ;
- $[A_{ij}] = 0$  altrimenti.

La topologia di un grafo orientato è definita dalla "Matrice di incidenza"  $I$ , quadrata, di ordine  $n$ , con elementi:

- $[I_{ij}] = +1$  se esiste una Connessione con nodo origine  $i$  e nodo terminale  $j$ ;
- $[I_{ij}] = -1$  se esiste una Connessione con nodo origine  $j$  e nodo terminale  $i$ ;
- $[I_{ij}] = 0$  altrimenti.

Un grafo è descritto da due caratteristiche principali: Connettività e/o Capacità di trasporto.

Nella teoria dei Grafi, la Connettività di una rete è tipicamente descritta con riferimento alla capacità di garantire un percorso tra due nodi (Two terminal reliability), tra più nodi ( $k$  terminal reliability) e tra tutti i nodi della rete (All terminal reliability).

La Capacità di trasporto, che caratterizza le Connessioni del grafo, introducono ulteriori "modalità di fallimento" del Sistema, anche quando è garantita la Connettività tra i nodi.

Una distinzione informale ma di grande rilievo è quella posta tra i problemi di cui si conoscono algoritmi di risoluzione efficienti ed i problemi cosiddetti "difficili". E' noto che un elevato numero di problemi inerenti la Teoria dei grafi sono problemi "difficili" [44], [49].

## 4.2 Misure di centralità

Nello studio delle “reti sociali”<sup>7</sup>, il problema dell’analisi topologica del Sistema al fine ultimo di disporre di un ordinamento dei suoi elementi sulla base di una opportuna definizione di “Importanza” è affrontato mediante le cosiddette “Misure di centralità” (Centrality measure). In tale contesto, il termine “Importanza” è utilizzato per qualificare il ruolo che la presenza e la particolare posizione di ciascun elemento hanno sulle caratteristiche della rete [41].

Ad esempio, il “Topologic Centrality measure” è una misura definita sulla base dell’assunzione che l’Importanza di ciascun elemento (nodo della rete) derivi dal livello di interConnessione con i restanti elementi. Tale misura, compresa tra 0 e 1, è definita dal rapporto tra il numero di Connessioni entranti e/o uscenti da ciascun nodo ed il massimo numero di Connessioni che questo potrebbe avere (numero complessivo di nodi -1)[41].

L’adozione di un tale approccio in un contesto di analisi delle caratteristiche di affidabilità, sicurezza e vulnerabilità di infrastrutture complesse è stato recentemente proposto in due principali direzioni:

- applicazioni della Misura di centralità per lo studio delle caratteristiche topologiche della rete [51];
- estensione della Misura di Centralità per lo studio delle caratteristiche di affidabilità dei componenti del Sistema [52].

Nel primo caso, in accordo agli studi recentemente presentati dal IPSC (Institute for the Protection and Security of the Citizen), l’analisi di vulnerabilità di infrastrutture distribuite è sviluppata con riferimento ad un numero limitato di scenari principali, assunti come riferimento per la valutazione del disservizio prodotto. Tali scenari sono definiti sulla base di un ordinamento dei nodi del Sistema definito sulla base del Grado che li caratterizza.

L’estensione delle Misure di centralità può essere realizzata associando ad ogni Connessione della rete un peso che ne specifica la probabilità che questa sia funzionante / guasta. Si definisce in tal modo una misura, denominata Reliability degree Centrality, che tiene conto del Grado dei nodi e dell’affidabilità delle Connessioni.

## 4.3 Utilizzo di Misure di Importanza

Diversi “Indici delle prestazioni del Sistema” sono utilizzati nelle valutazioni di Adeguatezza di sistemi di distribuzione di energia elettrica [4] e proposti per altri tipi di Sistemi a rete, quali acquedotti e sistemi di tele-riscaldamento [45]. L’Adeguatezza di un Sistema di distribuzione di energia elettrica è riferita alla capacità di soddisfare la domanda dei nodi Utilizzatori, rispetto ai limiti di produzione dei nodi Sorgente ed ai limiti di capacità di trasporto delle Connessioni, in condizioni nominali e di guasto.

Un indice comunemente utilizzato è il System Average Interruption Duration Index (SAIDI), definito come:

$$SAIDI = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} N_i \cdot U_i}{\sum_{i=1}^{N_n} N_i} \quad (4.1)$$

Studi dedicati alla analisi di infrastrutture interconnesse [47] ed alla analisi di sistemi di distribuzione di energia [50] propongono l’utilizzo del RAW come misura di Importanza per la classificazione degli elementi di Sistemi a rete. L’approccio adottato prevede la valutazione del RAW di ciascun componente rispetto a ciascuna utenza considerata singolarmente. La loro somma è utilizzata come misura di Importanza del componente rispetto al Sistema complessivo.

Nella parte II del documento è fornita l’evidenza della necessità di definire le prestazioni “globali” da assumere come riferimento per il Sistema a rete nel suo complesso e di valutare rispetto a queste le Misure di Importanza.

<sup>7</sup> Le “reti sociali” (social network) sono modelli delle relazioni che intercorrono tra gli appartenenti a gruppi di persone, utilizzate come base di studi in sociologia e antropologia.

## 4.4 Utilizzo di Metodi di simulazione

In letteratura è diffusa l'applicazione di metodi MonteCarlo per lo studio di Grafi casuali (Random Graph) [4], [44], [45], [48], [47], [49]. Un "Grafo casuale" è caratterizzato da un numero di Connessioni variabile secondo una assegnata probabilità; più in generale, alle Connessioni di un Grafo Casuale è associata una variabile aleatoria e la relativa distribuzione di probabilità.

In generale, l'applicazione di metodi MonteCarlo richiede la conoscenza della Funzione di Sistema, che nel caso specifico dei Sistemi a rete deve essere definita per ciascun nodo Utilizzatore. In tale contesto, l'evoluzione del Sistema è simulata in termini di successivi guasti (e eventuali riparazioni) delle Connessioni; ad ogni transizione, le Funzioni di Sistema sono utilizzate per valutare lo stato di ciascun nodo Utilizzatore, per ciascuna configurazione assunta dalla rete.

Diversamente, metodi MonteCarlo possono essere utilizzati per identificare i (minimal) Cut-set (o in modo equivalente i minimal Path-set) che caratterizzano ciascun nodo Utilizzatore del Sistema a rete, impiegando in modo integrato tecniche proprie della Teoria dei grafi [45].

Tra le possibili modalità di utilizzo di metodi di simulazione per l'analisi di Sistemi a rete, un approccio ritenuto particolarmente adeguato e pertanto sviluppato nella Parte II del documento riguarda l'impiego di metodi MonteCarlo integrati ad un algoritmo ad Automa Cellulare per la "soluzione della rete" [44], [48], [49].

Nelle analisi di Sistemi a rete mediante metodi MonteCarlo non è frequente l'impiego di Tecniche di riduzione della varianza. Ciononostante, nelle applicazioni tipiche in ambito RAM occorre realizzare una stima predittiva delle prestazioni del Sistema, a partire da valori "realistici" dei parametri che definiscono il modello di Indisponibilità degli elementi soggetti a guasto e riparazione. In tali condizioni, l'utilizzo di metodi di simulazione per l'analisi del Sistema richiede la contestuale applicazione di Tecniche di riduzione della varianza associata alle grandezze oggetto di stima [48].

## 4.5 Algoritmi Automa Cellulare

Un Automa Cellulare costituisce una classe generale di modelli matematici in grado di riprodurre, con semplici regole, il comportamento dinamico di sistemi complessi [43].

La dinamica di un Automa Cellulare si sviluppa in uno spazio costituito da una matrice di celle discreta ed omogenea: tutte le celle siano caratterizzate dalle medesime proprietà. La singola cella è descritta da una variabile di stato che può assumere solo un numero finito di valori discreti; la sua evoluzione è influenzata dalle celle contigue, appartenenti alla "Regione di vicinato", che interagiscono con essa; tale interazione è regolata da una "Funzione di transizione", identica per tutte le celle ed invariante nel tempo. Un algoritmo ad Automa Cellulare realizza un aggiornamento dello stato del Sistema applicando la Funzione di transizione simultaneamente a tutte le celle. Operativamente, l'algoritmo prevede un adeguato numero di iterazioni in ciascuna delle quali il valore della variabile di stato è aggiornato sulla base dei valori assunti al passo corrente dalla cella considerata e da quelle appartenenti alla sua Regione del vicinato.

In letteratura è proposto l'utilizzo di un algoritmo ad Automa Cellulare per la "soluzione della rete", intesa come verifica della raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore, da almeno un nodo Sorgente, mediante almeno un percorso costituito da Connessioni disponibili (non oggetto di guasto). A ciascun nodo è associata una cella dello spazio; la regione di vicinato è definita dai nodi che ad esso risultano connessi [44], [48], [49].

Nella applicazione base dell'algoritmo, la regola locale di transizione utilizzata per verificare la raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore, è costituita da una funzione logica di tipo OR: "se almeno una delle celle della Regione di vicinato è attiva, allora anche la cella considerata passa allo stato attivo o vi rimane se era già attiva al passo precedente".

## PARTE II

## 5 MISURE DI IMPORTANZA PER SISTEMI DI COMPONENTI RIPARABILI

Nel presente capitolo sono riportati i risultati avuti da approfondimenti preliminari dedicati alla applicazione delle Misure Differenziali di Importanza introdotte nel §2.2.5 e nel §2.2.6, a sistemi costituiti da componenti soggetti a guasto e riparazione, con eventuali fenomeni di invecchiamento, per i quali è assunto il modello di Indisponibilità definito nel §2.1.

Le informazioni riportate sono complementari al successivo studio dedicato a Sistemi a rete, fornendo la possibilità di estendere i risultati ottenuti per gli “eventi” (Indisponibilità delle Connessioni) ai relativi “parametri caratteristici”.

Un ordinamento di “Importanza” dei parametri che definiscono il modello di Indisponibilità dei componenti fornisce informazioni utili per la pianificazione della manutenzione correttiva (ottimizzazione del supporto logistico) e preventiva (se il modello include i fenomeni di degrado) del Sistema. In tale contesto, se non sussistono dipendenze tra i componenti l’analisi può essere suddivisa in due momenti distinti:

- in primo luogo interessa valutare l’Importanza che ciascun componente ha in relazione alla sua Indisponibilità ed alla struttura del Sistema, al fine di identificare i componenti “critici” sui quali intervenire;
- in un secondo momento interessa valutare l’Importanza dei parametri caratteristici del componente al fine di definire la tipologia di intervento (miglioramento delle caratteristiche di affidabilità e/o di manutenibilità).

### 5.1 Misure Differenziali di Importanza per componente riparabile

Consideriamo un componente per il quale è assunto il modello di Indisponibilità definito nel §2.1.1.

In Figura 2 è graficamente rappresentata l’Indisponibilità asintotica del componente riparabile espressa dalla eq. (2.6),

$$U = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \text{ per un intervallo di variazione } [0, 1] \text{ h}^{-1} \text{ dei parametri caratteristici}^8.$$

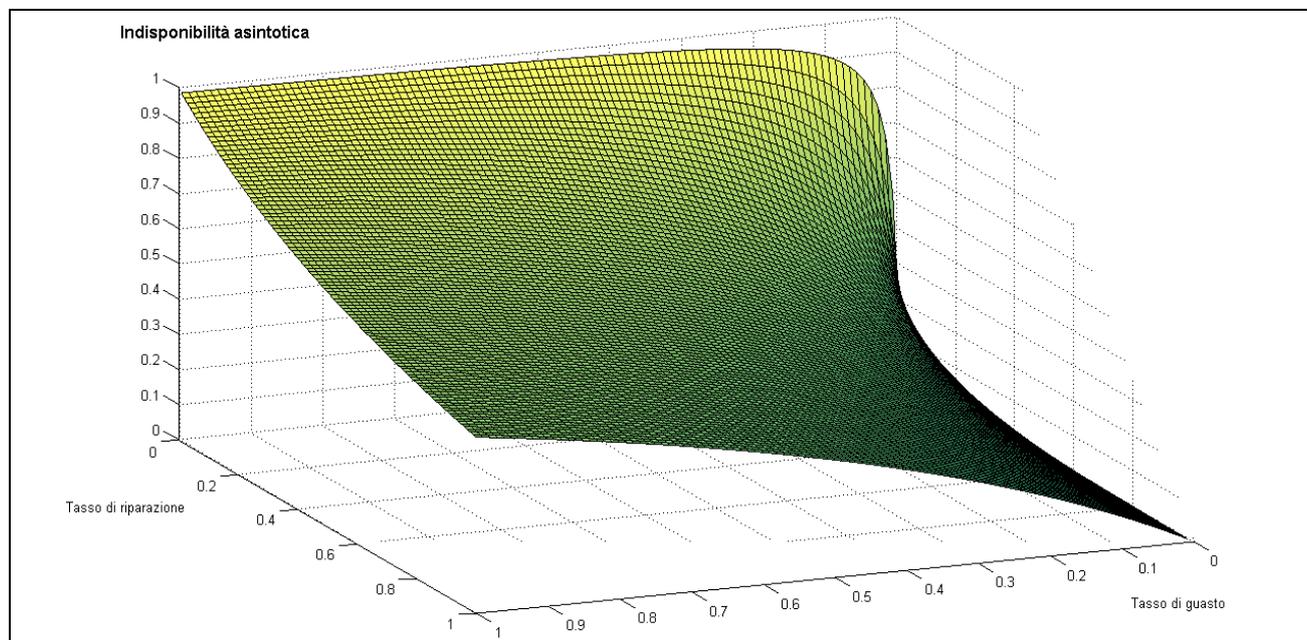


Figura 2: Indisponibilità asintotica di un componente riparabile

Dalla Figura 2 è evidente la non linearità delle relazioni tra le variabili del modello di Indisponibilità del componente, che si manifesta in modo significativo per piccoli valori del Tasso di guasto e del Tasso di riparazione.

<sup>8</sup> Il limite superiore dell’intervallo è indicativo. In ambito RAM è possibile che il Tasso di riparazione assuma valori > 1 (MTTR < 1 h).

Con riferimento alla Figura 3, la relazione tra l'Indisponibilità asintotica del componente ed il relativo Tasso di guasto, considerando per questo un intervallo tipico di variazione  $\lambda \leq 10^{-2} h^{-1}$ , risulta:

- significativamente non lineare per Tassi di riparazione dell'ordine di  $10^{-2} h^{-1}$  o inferiori ( $MTTR \geq 100h$ );
- approssimativamente lineare per Tassi di riparazione dell'ordine di  $10^{-1} h^{-1}$  o superiori ( $MTTR \leq 10h$ );

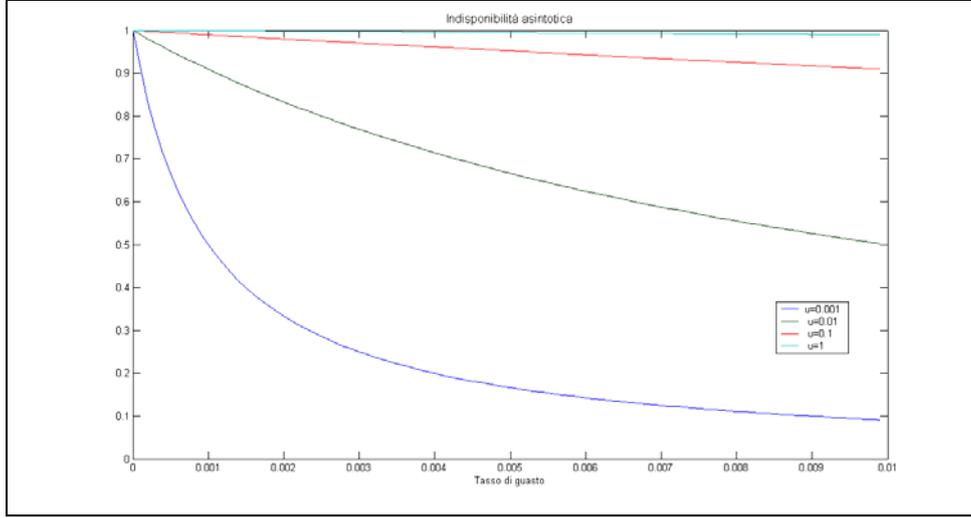


Figura 3: Relazione tra Indisponibilità asintotica e Tasso di guasto

Dalla eq. (2.6), le derivate parziali di primo e secondo ordine della Indisponibilità asintotica di un componente riparabile rispetto ai parametri caratteristici  $\lambda$  e  $\mu$  risultano:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} = -\frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} = -\frac{2\mu}{(\lambda + \mu)^3} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} = \frac{2\lambda}{(\lambda + \mu)^3} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \mu \partial \lambda} = \frac{\lambda - \mu}{(\lambda + \mu)^3} \quad (5.2)$$

Dalla eq. (2.20), la Misura Differenziale di importanza del primo ordine riferita ai due parametri caratteristici risulta:

$${}^1 DIM_{\lambda} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu} = \frac{\frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} d\lambda}{\frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} d\lambda - \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} d\mu} \quad (5.3)$$

$${}^1 DIM_{\mu} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu}{\frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu} = \frac{-\frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} d\mu}{\frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2} d\lambda - \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)^2} d\mu} \quad (5.4)$$

Nell'ipotesi di Incrementi uniformi (H1:  $d\lambda = d\mu$ ), sostituendo le eq. (5.1) nelle eq. (5.3) e (5.4) si ottiene:

$$\boxed{{}^1 DIM_{\lambda} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}} \quad \boxed{{}^1 DIM_{\mu} = \frac{-\lambda}{\mu - \lambda}} \quad (5.5)$$

In Figura 4 è graficamente rappresentato il  ${}^1DIM$  per il Tasso di guasto e il  ${}^1DIM$  per il Tasso di riparazione di un componente riparabile, nell'ipotesi di Incrementi uniformi ( $H1: d\lambda = d\mu$ ).

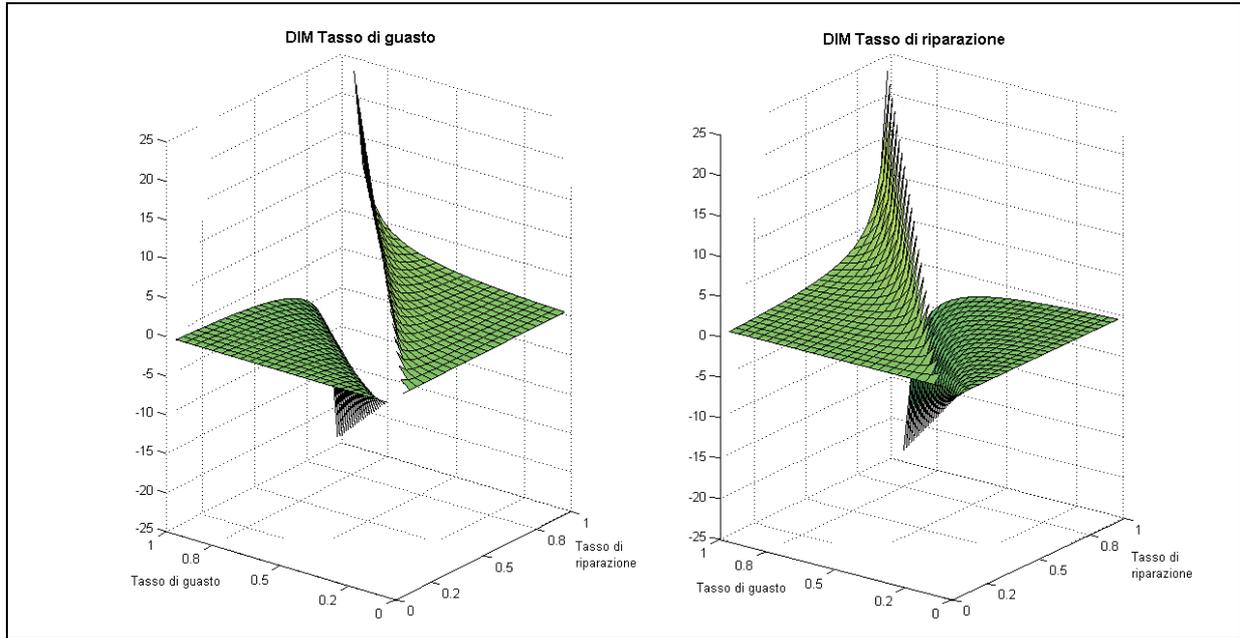


Figura 4: DIM per il Tasso di guasto e il Tasso di riparazione di un componente riparabile

Nel caso particolare  $\lambda = \mu = c$  risulta  $U = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0,5$  indipendente da  $c$ . Inoltre  ${}^1DIM_{\lambda}, {}^1DIM_{\mu} \rightarrow \pm\infty$ .

Per l'omogeneità delle unità di misura dei parametri potrebbero essere utilizzate entrambe le ipotesi di Incrementi uniformi e di Incrementi percentuali uniformi [27]. Tuttavia, dalla differenziale dell'Indisponibilità del Sistema

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu \text{ risulta } dU = 0 \rightarrow \frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \lambda}}{\frac{\partial U}{\partial \mu}} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Affinché  $dU \neq 0$ , deve risultare  $\left| \frac{d\mu}{\mu} \right| \neq \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right|$  ovvero il  ${}^1DIM$  riferito al Tasso di guasto e al Tasso di riparazione di un componente riparabile non può essere definito nell'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi.

## 5.2 Misure Differenziali di Importanza per un sistema di componenti riparabili

Consideriamo un Sistema costituito da componenti riparabili, per i quali è assunto il modello di Indisponibilità definito nel §2.1.1.

La Misura differenziale del primo ordine definita dalla eq. (2.20) può essere riferita alla Indisponibilità del Sistema  $U(\dots, U_i(\lambda_i, \mu_i), \dots)$  ed ai parametri caratteristici dei suoi componenti (Tasso di guasto  $\lambda_i$  e Tasso di riparazione  $\mu_i$ ), mediante l'espressione [27]:

$${}^1DIM^i = \frac{\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial U}{\partial \mu_i} d\mu_i}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial \lambda_j} d\lambda_j + \sum_j \frac{\partial U}{\partial \mu_j} d\mu_j} = {}^1DIM_{\lambda}^i + {}^1DIM_{\mu}^i \quad (5.6)$$

Se i componenti sono tra loro indipendenti, cioè se non sussistono relazioni tra i relativi parametri caratteristici, è possibile derivare una espressione del  ${}^I DIM^i$  che richiede la sola valutazione delle derivate parziali dalla Indisponibilità del Sistema  $U(\dots, U_i, \dots)$  rispetto all'Indisponibilità di ciascun componente  $U_i$ .

Dalla eq. (2.6) che definisce l'Indisponibilità asintotica del componente e dalle eq. (5.1) che esprimono le sue derivate parziali di primo ordine, nell'ipotesi di Incrementi uniformi dei parametri caratteristici  $d\mu_i = d\lambda_i = d\mu_j = d\lambda_j \quad \forall i, j$ , il  ${}^I DIM$  del componente  $i$  può essere espresso nella forma:

$$\boxed{{}^I DIM^i = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_i} \Delta_i}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \Delta_j} \quad \Delta = \frac{\mu - \lambda}{(\lambda + \mu)^2}} \quad (5.7)$$

Nell'ipotesi di Incrementi uniformi dell'Indisponibilità dei componenti  $dU_i = dU_j \quad \forall i, j$ , vale l'eq. (5.7) con  $\Delta = 1$ .

Dalle eq. (5.5) e dalla eq. (5.7) risulta  $\Delta = DIM_\lambda + DIM_\mu$ .

Dalle eq. (5.1), il  ${}^I DIM$  dei parametri caratteristici del componente  $i$  può essere espresso nella forma:

$$\boxed{{}^I DIM^i_\lambda = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta_\lambda}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \Delta_j} \quad \Delta_\lambda = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2}} \quad \boxed{{}^I DIM^i_\mu = -\frac{\frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \Delta_\mu}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \Delta_j} \quad \Delta_\mu = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2}} \quad (5.8)$$

L'utilizzo delle eq. (5.7) e (5.8) permette di riferire lo studio alle relazioni che intercorrono tra l'Indisponibilità del Sistema e l'Indisponibilità dei suoi componenti, con la conseguente semplificazione delle derivate parziali oggetto di stima.

Inoltre, sono isolati i contributi associati alle non linearità della relazione tra l'Indisponibilità del Sistema e l'Indisponibilità dei suoi componenti, trascurate nella approssimazione del primo ordine della  $U(\dots, U_i, \dots)$  ed alla non linearità tra l'Indisponibilità di ciascun componente ed i parametri caratteristici, trascurate nel calcolo della quantità  $\Delta$ .

La definizione di  $\Delta$  può essere estesa in modo da includere il contributo associato alle non linearità tra l'Indisponibilità asintotica di ciascun componente ed i parametri caratteristici (Tasso di guasto e Tasso di riparazione), se non trascurabile. Dalla definizione generale fornita dalla eq. (2.24), tenendo conto dei termini del secondo ordine rispetto a ciascuna variabile (non nulli), la Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine per il componente  $i$  risulta:

$${}^{II} DIM^i = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_i} \left( \frac{\partial U_i}{\partial \lambda_i} d\lambda_i + \frac{\partial U_i}{\partial \mu_i} d\mu_i + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \lambda_i^2} d^2 \lambda_i + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \mu_i^2} d^2 \mu_i + \frac{\partial^2 U_i}{\partial \lambda_i \partial \mu_i} d\lambda_i d\mu_i \right)}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \left( \frac{\partial U_j}{\partial \lambda_j} d\lambda_j + \frac{\partial U_j}{\partial \mu_j} d\mu_j + \frac{\partial^2 U_j}{\partial \lambda_j^2} d^2 \lambda_j + \frac{\partial^2 U_j}{\partial \mu_j^2} d^2 \mu_j + \frac{\partial^2 U_j}{\partial \lambda_j \partial \mu_j} d\lambda_j d\mu_j \right)} \quad (5.9)$$

Dalle eq. (5.2), nell'ipotesi di Incrementi uniformi  $d\mu_i = d\lambda_i = d\mu_j = d\lambda_j \quad \forall i, j$ , la eq. (5.9) assume la forma:

$$\boxed{{}^{II} DIM^i = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_i} \Delta''_i}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \Delta''_j} \quad \text{dove} \quad \Delta'' = \left( \frac{\mu - \lambda}{(\lambda + \mu)^2} \right) dc - \left( \frac{3(\mu - \lambda)}{(\lambda + \mu)^3} \right) dc^2} \quad (5.10)$$

**Caso applicativo**

Come caso applicativo utilizziamo un esempio proposto in letteratura [27] per l'applicazione della Misura Differenziale di Importanza del primo ordine ai parametri caratteristici del modello di Indisponibilità di componenti riparabili.

Consideriamo il Sistema costituito da tre componenti, il cui Diagramma a blocchi di affidabilità è riportato in Figura 5.

L'Indisponibilità del Sistema risulta:  $U = U_3 + U_1 \cdot U_2 - U_1 \cdot U_2 \cdot U_3$ . Dai valori in Tabella 1 risulta  $U = 0.05574$ .

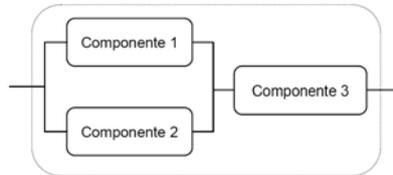


Figura 5: Diagramma a blocchi di affidabilità

In Tabella 1 sono forniti:

- i dati del problema  $\lambda$  e  $\mu$  [27] e la conseguente Indisponibilità (asintotica)  $U_i$  del componente;
- la derivata parziale della Indisponibilità del Sistema rispetto all'Indisponibilità del componente, calcolata analiticamente;
- la quantità  $\Delta_i$  e la misura  ${}^I DIM$  riferita al componente  $i$  stimata mediante le eq. (5.7);
- la misure  ${}^I DIM$  riferita ai parametri caratteristici di ciascun componente, stimata mediante le eq. (5.8).

Componente	$\lambda$ [ $h^{-1}$ ]	$\mu$ [ $h^{-1}$ ]	$U_i$	$\frac{\partial U}{\partial U_i}$	$\Delta_i = \frac{\mu_i - \lambda_i}{(\lambda_i + \mu_i)^2}$ [h]	${}^I DIM^i$	${}^I DIM^i_\lambda$	${}^I DIM^i_\mu$
1	0,0050	0,0200	0,2000	0,197	24,000	<b>0,118</b>	0,158	-0,039
2	0,0050	0,0200	0,2000	0,197	24,000	<b>0,118</b>	0,158	-0,039
3	0,0005	0,0300	0,0164	0,960	31,713	<b>0,763</b>	0,776	-0,013

Tabella 1: Dati del problema e stima del  $DIM_i$

I valori stimati per il  ${}^I DIM^i$  mediante l'eq. (5.7) coincidono con i valori riportati in letteratura [27], stimati mediante il calcolo delle derivate parziali dalla Indisponibilità del Sistema rispetto ai parametri caratteristici dei singoli componenti. Inoltre, la misura  ${}^I DIM^i$  corrisponde alla somma delle misure  ${}^I DIM^i_\lambda$  e  ${}^I DIM^i_\mu$  stimate mediante le eq. (5.8).

In accordo a quanto riportato nel §2.2.6, il  ${}^I DIM^i$  non permette di tener conto degli effetti dovuti alle interazioni tra i parametri, che si manifestano per la loro variazione contemporanea. Il  ${}^{II} DIM^i$  definito dall'eq. (5.10) include il contributo dei termini di secondo ordine dello sviluppo in serie dell'Indisponibilità dl componente. In Tabella 2 sono riportati i valori dei contributi alla quantità  $\Delta_{II}$  ed i valori del  ${}^{II} DIM^i$  per ciascun componente e per diversi valori dell'incremento  $dc$ .

	Componente	$d\mu_i = d\lambda_i = d\mu_j = d\lambda_j = dc \quad \forall i, j$			
		1,00E-05	5,00E-04	5,00E-03	3,00E-02
$\left(\frac{\mu - \lambda}{(\lambda + \mu)^2}\right) \cdot dc$	1	0,0002	0,0127	0,1920	58,3200
	2	0,0002	0,0127	0,1920	58,3200
	3	0,0003	0,0166	0,2365	63,3354
$\left(\frac{3(\mu - \lambda)}{(\lambda + \mu)^3}\right) \cdot dc^2$	1	4,73E-05	0,0025	0,0378	11,4728
	2	4,73E-05	0,0025	0,0378	11,4728
	3	3,05E-04	0,0160	0,2271	60,8020
${}^{II} DIM^i$	1	<b>0,118</b>	<b>0,119</b>	<b>0,125</b>	<b>0,137</b>
	2	<b>0,118</b>	<b>0,119</b>	<b>0,125</b>	<b>0,137</b>
	3	<b>0,763</b>	<b>0,761</b>	<b>0,750</b>	<b>0,726</b>

Tabella 2: Dati del problema e stima del  ${}^{II} DIM^i$

I contributi di primo e secondo ordine al  ${}^{II}DIM^i$  dipendono dal valore dell'incremento  $dc$ . Per piccoli valori di  $dc$ , i valori del  ${}^{II}DIM^i$  coincidono con i valori del  ${}^IDIM^i$  riportati in Tabella 1. All'aumentare di  $dc$  aumenta il contributo del termine del secondo ordine. L'ordinamento di Importanza definito dal  ${}^IDIM^i$  e dal  ${}^{II}DIM^i$  è il medesimo.

### 5.3 Misure Differenziali di Importanza con fenomeni di invecchiamento

I fenomeni di invecchiamento possono essere introdotti nel modello di un componente riparabile assumendo un andamento lineare del relativo Tasso di guasto, come nell'eq. (2.7):  $\lambda(t) = \lambda_0 + a \cdot t$ .

In accordo a quanto riportato nel §2.1.2, gli effetti dei fenomeni di invecchiamento sono mitigati da adeguati interventi di manutenzione preventiva, realizzati con un Periodo di manutenzione  $\tau$  costante. Se il Tasso di guasto aumenta in modo non eccessivo, una approssimazione accettabile della funzione Cumulata di probabilità di guasto è rappresentata da una distribuzione esponenziale con parametro caratteristico espresso dalla eq. (2.8), denominato "Valore efficace" del Tasso di guasto e assunto costante durante l'intervallo di tempo tra due interventi di manutenzione.

In accordo a quanto proposto in letteratura [27] e riportato nel §2.1.2, assumiamo che il Periodo di manutenzione sia una frazione del tempo medio tra due guasti ovvero  $\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^*}$ . In tal caso, l'eq. (2.10) esprime il Periodo di manutenzione in funzione dei restanti parametri. Tale relazione rende uno dei quattro parametri caratteristici del modello di Indisponibilità del componente  $(\lambda_0, a, \mu, \alpha)$  dipendente dai restanti tre. In un contesto di ottimizzazione della manutenzione,  $\alpha$  è un parametro noto ed interessa valutare l'Importanza dei restanti parametri.

E' possibile ottenere le espressioni analitiche delle derivate parziali dell'Indisponibilità del componente espressa dalla eq. (2.9) rispetto ai parametri caratteristici, necessarie al calcolo delle relative Misure Differenziali di Importanza:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_0} = \frac{\frac{1}{2} \mu \left( 1 + \lambda_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha \lambda_0^2 + 2a}} \right)}{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \tau + \mu \right)^2} \quad \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{1}{2} \mu \left( \tau + \frac{\lambda_0}{a} - \frac{\alpha \lambda_0^2 + a}{a} \sqrt{\frac{1}{\alpha (\alpha \lambda_0^2 + 2a)}} \right)}{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \tau + \mu \right)^2} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} = \frac{-\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \tau \right)}{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \tau + \mu \right)^2} \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{-\frac{a \mu}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{\alpha (\alpha \lambda_0^2 + 2a)}}}{\left( \lambda_0 + \frac{1}{2} a \tau + \mu \right)^2} \quad (5.12)$$

Il  $DIM^i$  del componente deve necessariamente essere valutato nell'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi

$$\frac{d\lambda_{0i}}{\lambda_{0i}} = \frac{d\mu_i}{\mu_i} = \frac{da_i}{a_i} \quad \forall i, \text{ in quanto i parametri hanno diverse unità di misura } \lambda, \mu = [h^{-1}] \quad a = [h^{-2}]. \text{ Risulta:}$$

$${}^IDIM^i = \frac{\frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda_{0i}} \lambda_{0i} + \frac{\partial U}{\partial \mu_i} \mu_i + \frac{\partial U}{\partial a_i} a_i \right)}{\sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \lambda_{0j}} \lambda_{0j} + \frac{\partial U}{\partial \mu_j} \mu_j + \frac{\partial U}{\partial a_j} a_j \right)} = {}^IDIM_{\lambda_0}^i + {}^IDIM_{\mu}^i + {}^IDIM_a^i \quad (5.13)$$

Dalle eq. (5.11) e (5.12), avendo assunto  $\alpha$  come parametro noto, risulta:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_{0i}} \lambda_{0i} + \frac{\partial U}{\partial \mu_i} \mu + \frac{\partial U}{\partial a_i} a_i = \frac{-a_i \mu_i \sqrt{\frac{1}{\alpha_i (\alpha_i \lambda_{0i}^2 + 2a_i)}}}{\left( \lambda_{0i} + \frac{1}{2} a_i \tau_i + \mu_i \right)^2} \quad (5.14)$$

Note le derivate parziali dell'Indisponibilità del Sistema rispetto all'Indisponibilità di ciascun componente, dalle eq. (5.13) e (5.14) la Misura Differenziale di Importanza per il componente  $i$ , nell'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi, risulta:

$${}^i DIM^i = \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \left[ \frac{-a_i \mu_i \sqrt{\frac{1}{\alpha_i (\alpha_i \lambda_{0i}^2 + 2a_i)}}}{\left( \lambda_{0i} + \frac{1}{2} a_i \tau_i + \mu_i \right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left( \frac{-a_j \mu_j \sqrt{\frac{1}{\alpha_j (\alpha_j \lambda_{0j}^2 + 2a_j)}}}{\left( \lambda_{0j} + \frac{1}{2} a_j \tau_j + \mu_j \right)^2} \right) \right]^{-1} \quad (5.15)$$

Dalle eq. (5.11), (5.12), (5.13) e (5.14), la Misura Differenziale di Importanza riferita ai parametri caratteristici risulta:

$${}^i DIM_{\lambda_0}^i = \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \left[ \frac{\frac{1}{2} \mu_i \left( 1 + \lambda_{0i} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_i \lambda_{0i}^2 + 2a_i}} \right)}{\left( \lambda_{0i} + \frac{1}{2} a_i \tau_i + \mu_i \right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left( \frac{-a_j \mu_j \sqrt{\frac{1}{\alpha_j (\alpha_j \lambda_{0j}^2 + 2a_j)}}}{\left( \lambda_{0j} + \frac{1}{2} a_j \tau_j + \mu_j \right)^2} \right) \right]^{-1} \quad (5.16)$$

$${}^i DIM_a^i = \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \left[ \frac{\frac{1}{2} \mu_i \left( \tau + \frac{\lambda_{0i}}{a_i} - \frac{\alpha_i \lambda_{0i}^2 + a_i}{a_i} \sqrt{\frac{1}{\alpha_i (\alpha_i \lambda_{0i}^2 + 2a_i)}} \right)}{\left( \lambda_{0i} + \frac{1}{2} a_i \tau_i + \mu_i \right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left( \frac{-a_j \mu_j \sqrt{\frac{1}{\alpha_j (\alpha_j \lambda_{0j}^2 + 2a_j)}}}{\left( \lambda_{0j} + \frac{1}{2} a_j \tau_j + \mu_j \right)^2} \right) \right]^{-1} \quad (5.17)$$

$${}^i DIM_{\mu}^i = \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left[ \frac{-\left( \lambda_{0i} + \frac{1}{2} a_i \tau_i \right)}{\left( \lambda_{0i} + \frac{1}{2} a_i \tau_i + \mu_i \right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left( \frac{-a_j \mu_j \sqrt{\frac{1}{\alpha_j (\alpha_j \lambda_{0j}^2 + 2a_j)}}}{\left( \lambda_{0j} + \frac{1}{2} a_j \tau_j + \mu_j \right)^2} \right) \right]^{-1} \quad (5.18)$$

### Assunzione alternativa per il Periodo di Manutenzione

Una trattazione alternativa, che si concretizza in una diversa politica manutentiva, può essere definita a partire da una diversa assunzione per la relazione che intercorre tra il Periodo di Manutenzione ed il Tasso di guasto dei componenti. Si vuole riconoscere che gli interventi di manutenzione preventiva sono necessari ed efficaci solo in presenza di fenomeni di invecchiamento. Dalla eq. (2.10) assunta nella precedente applicazione, infatti, risulta che in assenza di fenomeni di

invecchiamento (per  $a \rightarrow 0$ ) il Periodo di Manutenzione assume un valore finito pari a  $\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda_0}$ . In alternativa,

assumiamo che il Periodo di manutenzione sia esclusivamente legato all'incremento del Tasso di guasto:

$$\tau^* = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot \tau \right)} \quad \text{da cui} \quad \tau^* = \sqrt{\frac{2}{\alpha \cdot a}} \quad (5.19)$$

Al diminuire dei fenomeni di invecchiamento (per  $a \rightarrow 0$ ) il Periodo di manutenzione  $\tau^*$  aumenta indefinitamente.

Assumendo per il Periodo di manutenzione  $\tau^*$  l'espressione fornita dalla eq. (5.19), le derivate parziali dell'Indisponibilità del componente espressa dalla eq. (2.9) rispetto ai parametri caratteristici risultano:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_0} = \frac{\mu}{\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}a\tau + \mu\right)^2} \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} = \frac{-\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}a\tau\right)}{\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}a\tau + \mu\right)^2} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{1}{2}\mu\left(\tau - \sqrt{\frac{1}{2\alpha \cdot a}}\right)}{\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}a\tau + \mu\right)^2} \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{-\frac{1}{4}\frac{a\mu}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\alpha \cdot a}}}{\left(\lambda_0 + \frac{1}{2}a\tau + \mu\right)^2} \quad (5.21)$$

Dalle eq. (5.20) e (5.21), avendo assunto  $\alpha$  come parametro noto, risulta:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \lambda_{0i}} \lambda_{0i} + \frac{\partial U_i}{\partial \mu_i} \mu_i + \frac{\partial U_i}{\partial a_i} a_i = \frac{-\frac{1}{2}a_i\mu_i\sqrt{\frac{1}{2\alpha_i \cdot a_i}}}{\left(\lambda_{0i} + \frac{1}{2}a_i\tau_i + \mu_i\right)^2}. \quad (5.22)$$

Note le derivate parziali dell'Indisponibilità del Sistema rispetto all'Indisponibilità di ciascun componente, dalle eq. (5.13) e (5.22) la Misura Differenziale di Importanza per il componente  $i$ , nell'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi, risulta:

$${}^i DIM^i = \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \frac{-\frac{1}{2}a_i\mu_i\sqrt{\frac{1}{2\alpha_i \cdot a_i}}}{\left(\lambda_{0i} + \frac{1}{2}a_i\tau_i + \mu_i\right)^2} \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \frac{-\frac{1}{2}a_j\mu_j\sqrt{\frac{1}{2\alpha_j \cdot a_j}}}{\left(\lambda_{0j} + \frac{1}{2}a_j\tau_j + \mu_j\right)^2} \right]^{-1} \quad (5.23)$$

Dalle eq. (5.13), (5.20), (5.21) e (5.22) le Misure di Importanza per i parametri caratteristici del componente  $i$  risultano:

$${}^i DIM_{\lambda_0}^i = \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \left[ \frac{\mu_i}{\left(\lambda_{0i} + \frac{1}{2}a_i\tau_i + \mu_i\right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \frac{-\frac{1}{2}a_j\mu_j\sqrt{\frac{1}{2\alpha_j \cdot a_j}}}{\left(\lambda_{0j} + \frac{1}{2}a_j\tau_j + \mu_j\right)^2} \right]^{-1} \quad (5.24)$$

$${}^i DIM_a^i = \frac{\partial U}{\partial U_i} \cdot \left[ \frac{\frac{1}{2}\mu_i\left(\tau_i - \sqrt{\frac{1}{2\alpha_i \cdot a_i}}\right)}{\left(\lambda_{0i} + \frac{1}{2}a_i\tau_i + \mu_i\right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \frac{-\frac{1}{2}a_j\mu_j\sqrt{\frac{1}{2\alpha_j \cdot a_j}}}{\left(\lambda_{0j} + \frac{1}{2}a_j\tau_j + \mu_j\right)^2} \right]^{-1} \quad (5.25)$$

$${}^i DIM_{\mu}^i = \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \left[ \frac{-\left(\lambda_{0i} + \frac{1}{2}a_i\tau_i\right)}{\left(\lambda_{0i} + \frac{1}{2}a_i\tau_i + \mu_i\right)^2} \right] \cdot \left[ \sum_j \frac{\partial U}{\partial U_j} \cdot \frac{-\frac{1}{2}a_j\mu_j\sqrt{\frac{1}{2\alpha_j \cdot a_j}}}{\left(\lambda_{0j} + \frac{1}{2}a_j\tau_j + \mu_j\right)^2} \right]^{-1} \quad (5.26)$$

### Caso applicativo

Consideriamo il Sistema di tre componenti del precedente Caso applicativo, il cui Diagramma a blocchi di affidabilità è riportato in Figura 5. Valutiamo gli effetti delle due alternative assunzioni per la relazione che intercorre tra il Periodo di manutenzione ed il Tasso di guasto dei componenti.

#### Caso A :

Il Periodo di manutenzione è espresso dalla eq. (2.10), conseguente alla assunzione:  $\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\lambda^*}$  [27].

In Tabella 3 sono forniti i dati del problema  $\lambda_0$ ,  $a$ ,  $\mu$  e  $\alpha$  per ciascun componente, desunti dalla letteratura [27].

Componente	$\lambda_{0i}$ [ $h^{-1}$ ]	$\mu_i$ [ $h^{-1}$ ]	$\alpha_i$ [ $h^{-1}$ ]	$a_i$ [ $h^{-1}$ ]
1	0,0050	0,0200	1,30	1,30E-05
2	0,0050	0,0200	1,30	1,30E-05
3	0,0005	0,0300	1,30	8,00E-05

Tabella 3: Dati di base

In Tabella 4 sono riportati i valori stimati per le caratteristiche di base di ciascun componente (Periodo di manutenzione, Valore efficace del Tasso di guasto, Indisponibilità asintotica) e per la derivata parziale della Indisponibilità del Sistema rispetto all'Indisponibilità del componente, calcolata analiticamente dalla  $U(\dots, U_i, \dots)$ .

Componente	$\tau_i$ [ $h^{-1}$ ]	$\lambda_i^*$ [ $h^{-1}$ ]	$U_i$	$\partial U / \partial U_i$
1	131.400	5.854E-03	0.226	0.1897
2	131.400	5.854E-03	0.226	0.1897
3	132.566	5.803E-03	0.162	0.9487

Tabella 4: Caratteristiche di base dei componenti

Dai valori riportati in Tabella 4 risulta  $U = 0.2050$ .

In Tabella 5 sono riportate le derivate parziali della Indisponibilità di ciascun componente rispetto ai suoi parametri caratteristici, calcolate analiticamente mediante le eq. (5.11) e (5.12).

Componente	$\partial U_i / \partial a_i$	$\partial U_i / \partial \lambda_{oi}$	$\partial U_i / \partial \mu_i$	$\partial U_i / \partial \alpha_i$
1	1715,503	26,111	-8,758	-0,017
2	1715,503	26,111	-8,758	-0,017
3	810,567	12,229	-4,527	-0,050

Tabella 5: Stima analitica delle derivate parziali della Indisponibilità dei componenti

Al fine di verificare la correttezza delle espressioni analitiche ricavate per le derivate parziali dell'Indisponibilità di un componente rispetto ai suoi parametri caratteristici, il caso applicativo è stato risolto numericamente. Sono realizzate quattro simulazioni indipendenti, in ciascuna delle quali è associata una incertezza (fittizia) ad uno dei parametri caratteristici, di uno dei componenti del Sistema. In ciascun caso è assunta una distribuzione Normale con valore medio pari al valore del parametro riportato in Tabella 3 e deviazione standard di un ordine di grandezza inferiore. Da ciascuna simulazione sono ottenute coppie di valori per l'Indisponibilità del Componente e per il parametro in oggetto; le derivate parziali di interesse sono stimate mediante regressione lineare dei dati, in accordo a quanto riportato nel §3.2.4. In Tabella 6 sono riportati i risultati avuti per i parametri caratteristici del componente 1, approssimativamente coincidenti con i valori riportati in Tabella 5.

Componente	$\partial U_i / \partial a_i$	$\partial U_i / \partial \lambda_{oi}$	$\partial U_i / \partial \mu_i$	$\partial U_i / \partial \alpha_i$
1	1716,4755	26,0663	-8,9191	-0,0176

Tabella 6: Stima numerica delle derivate parziali della Indisponibilità del componente

I dati di simulazione sono graficamente rappresentati in Figura 6 e forniscono gli andamenti dell'Indisponibilità del Sistema al variare di ciascun parametro caratteristico del componente 1 (su scale differenti per l'asse delle ascisse).

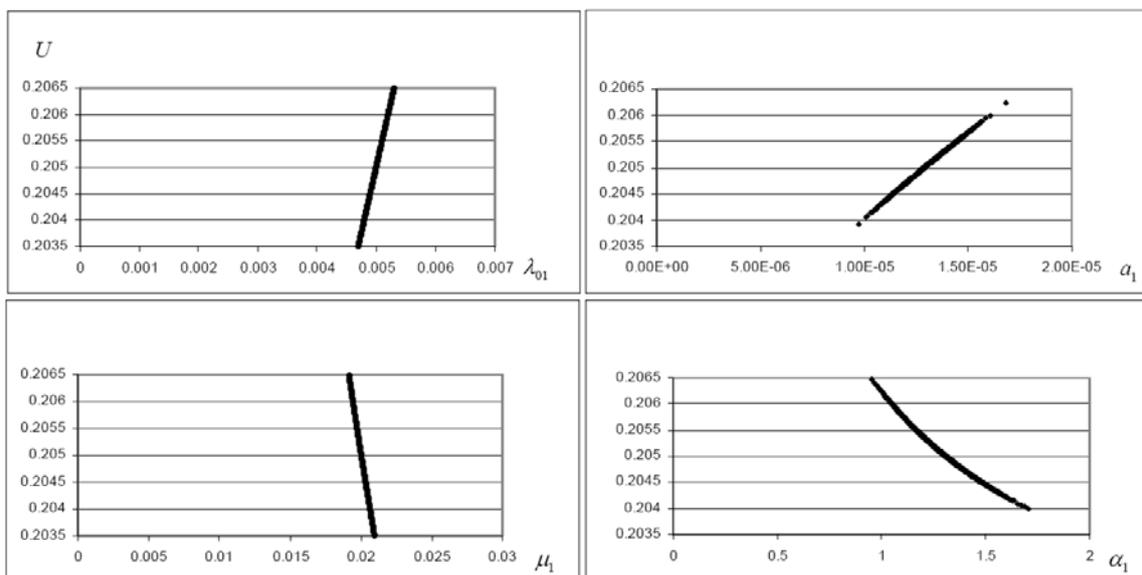


Figura 6: Andamenti dell'Indisponibilità del Sistema al variare dei parametri del componente 1

All'aumentare del Valore iniziale  $\lambda_0$  e del Parametro di crescita  $a$  del Tasso di guasto aumenta l'Indisponibilità del componente. All'aumentare del Tasso di riparazione  $\mu$  diminuisce l'Indisponibilità del componente. All'aumentare del parametro  $\alpha$  diminuisce il Periodo di manutenzione specificato per il componente, determinando una diminuzione del Valore efficace del relativo Tasso di guasto, quindi una diminuzione della sua Indisponibilità.

Le Misure Differenziali di Importanza del primo ordine sono valutate assumendo  $\alpha$  come parametro noto, nell'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi. Le Misure di Importanza riferite ai parametri caratteristici di ciascun componente sono ottenuti mediante le eq. (5.16), (5.17), (5.18), a partire dai valori riportati in Tabella 4 e Tabella 5. La Misure Differenziale di Importanza riferita a ciascun componente nel suo complesso si ottiene come somma dei valori riferiti ai parametri caratteristici o, in modo equivalente, mediante l'eq. (5.15). In Tabella 7 sono riportati i valori ottenuti.

Componente	$DIM_a^i$	$DIM_\lambda^i$	$DIM_\mu^i$	$DIM^i$
1	-0,060	-0,354	0,475	0,060
2	-0,060	-0,354	0,475	0,060
3	-0,879	-0,083	1,841	0,879

Tabella 7: Misure Differenziali di Importanza

L'ordinamento definito dai valori del  $DIM$  riportati in Tabella 7 per i componenti ed i relativi parametri è il medesimo fornito in letteratura [27]. I valori numerici risultano differenti, per la diversa definizione adottata nel tentativo comune di valutare l'Importanza dei componenti tenendo conto dei fenomeni di invecchiamento introdotti nel modello.

Le definizioni delle misure differenziali utilizzate nel presente Caso applicativo tengono esplicitamente conto delle relazioni che intercorrono tra il parametro  $a$  (che determina l'incremento del Tasso di guasto) ed i restanti parametri del modello di ciascun componente. Tale circostanza richiede il calcolo del  $DIM$  con l'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi, in quanto i parametri hanno diverse unità di misura. In letteratura [27] il calcolo del  $DIM$  è realizzato a partire dalla derivata parziale dell'Indisponibilità del Sistema rispetto al Valore efficace del Tasso di guasto, che dipende dal parametro  $a$ . Tale parametro non è esplicitamente introdotto nel modello, permettendo l'utilizzo dell'ipotesi di Incrementi uniformi. Il confronto tra i valori numerici delle misure non è pertanto significativo.

Inoltre, non si ritiene significativo il confronto con l'ordinamento dei componenti che risulta dal precedente Caso applicativo (in assenza di fenomeni di invecchiamento) in quanto, anche se parte dei dati di base sono i medesimi, il valore dell'Indisponibilità del Sistema risulta significativamente diverso. Più in generale, un confronto tra l'ordinamento dei componenti in assenza e in presenza di fenomeni di invecchiamento e manutenzione è inficiato dalla necessità di adottare l'ipotesi di Incrementi uniformi nel primo caso e l'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi nel secondo.

### Caso B

Assumiamo per il Periodo di manutenzione l'espressione fornita dalla eq. (5.19).

In Tabella 8 sono forniti i dati del problema. L'unica modifica introdotta rispetto al Caso A riguarda il parametro  $\alpha_i$ , assunto pari a 1.75 per tutti i componenti. Tale valore permette di avere approssimativamente la stessa Indisponibilità del Sistema del Caso A, nonostante le diverse assunzioni per il Periodo di manutenzione. Dai valori riportati in Tabella 8 e Tabella 9 risulta infatti  $U = 0.2060$  (rispetto a  $U = 0.2050$  nel Caso A).

Componente	$\lambda_{0i} [h^{-1}]$	$\mu_i [h^{-1}]$	$\alpha_i [h^{-1}]$	$a_i [h^{-1}]$
1	0,0050	0,0200	1,75	1,30E-05
2	0,0050	0,0200	1,75	1,30E-05
3	0,0005	0,0300	1,75	8,00E-05

Tabella 8: Dati di base

In Tabella 9 sono riportati i valori stimati per le caratteristiche di base di ciascun componente (Periodo di manutenzione, Valore efficace del Tasso di guasto, Indisponibilità asintotica) e per la derivata parziale della Indisponibilità del Sistema rispetto all'Indisponibilità del componente, calcolata analiticamente dalla  $U(\dots, U_i, \dots)$ .

Componente	$\tau_i^* [h^{-1}]$	$\lambda_i^* [h^{-1}]$	$U_i$	$\frac{\partial U}{\partial U_i}$
1	296,50	6,93E-03	0,257	0,2188
2	296,50	6,93E-03	0,257	0,2188
3	119,52	5,28E-03	0,150	0,9338

Tabella 9: Caratteristiche di base dei componenti

Gli effetti di una diversa assunzione per il Periodo di manutenzione nei due casi analizzati sono evidenti dal confronto tra i valori riportati in Tabella 4 e Tabella 9. A fronte di una Indisponibilità del Sistema essenzialmente inalterata, associare il Periodo di manutenzione al solo incremento del Tasso di guasto determina:

- un aumento dell'intervallo tra due successivi interventi per i componenti 1 e 2 (in AND logico), che si traduce in un incremento del Valore efficace del Tasso di guasto e quindi dell'Indisponibilità di ciascun componente;
- una diminuzione dell'intervallo tra due successivi interventi per il componenti 3 (in OR logico e caratterizzato da un valore maggiore del parametro  $a$  associato all'incremento del Tasso di guasto), con conseguente diminuzione del Valore efficace del Tasso di guasto e quindi dell'Indisponibilità del componente.

A titolo di esempio, consideriamo come riferimento temporale 10 anni di esercizio del Sistema (48.760 h). In accordo ai valori riportati in Tabella 4 e Tabella 9 per il Periodo di manutenzione di ciascun componente, nel caso A occorre realizzare 1.110 interventi (circa 370 per ciascun componente); nel caso B occorre realizzare 737 interventi (circa 160 per il componente 1 e 2, circa 400 per il componente 3).

Il confronto evidenzia come l'adozione di una politica manutentiva che riconosce necessari ed efficaci gli interventi di manutenzione preventiva solo in presenza di fenomeni di invecchiamento dei componenti determini una ottimizzazione nella definizione degli interventi. L'assunzione alternativa proposta per il Periodo di manutenzione, espressa dalla eq. (5.19), che permette di associarne il valore al solo incremento del Tasso di guasto dei componenti, realizza tale ottimizzazione.

In Tabella 10 sono riportate le derivate parziali della Indisponibilità di ciascun rispetto ai suoi parametri caratteristici, calcolate analiticamente mediante le eq. (5.20), (5.21).

Componente	$\partial U_i / \partial a_i$	$\partial U_i / \partial \lambda_{oi}$	$\partial U_i / \partial \mu_i$	$\partial U_i / \partial \alpha_i$
1	2044,609	27,583	-9,554	-0,015
2	2044,609	27,583	-9,554	-0,015
3	720,166	24,101	-4,243	-0,033

Tabella 10: Stima analitica delle derivate parziali della Indisponibilità dei componenti

Al fine di verificare la correttezza delle espressioni analitiche ricavate per le derivate parziali dell'Indisponibilità di un componente rispetto ai suoi parametri caratteristici, il caso applicativo è stato risolto numericamente. Sono realizzate quattro simulazioni indipendenti, in ciascuna delle quali è associata una incertezza (fittizia) ad uno dei parametri caratteristici di uno dei componenti del Sistema. In ciascun caso è assunta una distribuzione Normale con valore medio pari al valore del parametro riportato in Tabella 8 e deviazione standard di un ordine di grandezza inferiore. Da ciascuna simulazione sono ottenute coppie di valori per l'Indisponibilità del Componente e per il parametro in oggetto; e derivate parziali di interesse sono stimate mediante regressione lineare dei dati. In Tabella 11 sono riportati i risultati avuti per i parametri caratteristici del componente 1, approssimativamente coincidenti con i valori riportati in Tabella 10.

Componente	$\partial U_i / \partial a_i$	$\partial U_i / \partial \lambda_{oi}$	$\partial U_i / \partial \mu_i$	$\partial U_i / \partial \alpha_i$
1	2049,840	27,612	-9,718	-0,015

Tabella 11: Stima numerica delle derivate parziali della Indisponibilità del componente

Le Misure Differenziali di Importanza del primo ordine sono valutate assumendo  $\alpha$  come parametro noto, nell'ipotesi di Incrementi percentuali uniformi. Le Misure di Importanza riferite ai parametri caratteristici di ciascun componente si ottengono mediante le eq. (5.24), (5.25) e (5.26), a partire dai valori riportati in Tabella 9 e Tabella 10. Le Misure di Importanza riferita a ciascun componente nel suo complesso si ottengono come somma delle misure riferite ai parametri caratteristici o, in modo equivalente, mediante l'eq. (5.23). In Tabella 12 sono riportati i valori ottenuti.

Componente	$DIM_a^i$	$DIM_\lambda^i$	$DIM_\mu^i$	$DIM^i$
1	-0,089	-0,461	0,639	0,089
2	-0,089	-0,461	0,639	0,089
3	-0,822	-0,172	1,817	0,822

Tabella 12: Misure Differenziali di Importanza

Dal confronto tra i valori riportati in Tabella 7 e Tabella 12 si evince il medesimo ordinamento dei parametri e dei componenti del Sistema realizzato dalle Misure Differenziali di Importanza nei due casi analizzati, differenti per la diversa definizione del Periodo di manutenzione.

Dai valori numerici si evidenzia un aumento dell'Importanza dei componenti 1 e 2, per i quali è previsto un incremento del Periodo manutenzione, ed una diminuzione dell'importanza del componente 3 per il quale è prevista una diminuzione Periodo manutenzione.

## 6 ANALISI DI SISTEMI A RETE

Nel presente capitolo sono forniti gli approfondimenti teorici sviluppati in tema di analisi di Sistemi a rete. In tale contesto, lo studio si propone due obiettivi principali: fornire una definizione di Sistema a rete utile alle valutazioni di disponibilità e vulnerabilità di infrastrutture di distribuzione ed una definizione delle prestazioni da assumere come riferimento; fornire le definizioni e le integrazioni necessarie ai modelli, ai metodi ed alle tecniche di analisi presentate nella Parte I, per l'applicazione allo studio di Sistemi a rete, con particolare riferimento alla caratteristiche intrinseche derivanti dalla sua Struttura.

E' di seguito riassunto il contenuto dei paragrafi in cui è articolato il capitolo.

### §6.1 - Definizione di Sistemi a rete

La definizione di "Sistema a rete" è fornita con riferimento alla analisi delle caratteristiche di disponibilità e vulnerabilità delle infrastrutture di distribuzione. In tale contesto è evidenziata la necessità di considerare una infrastruttura a rete come un Sistema "multi-funzione", riferendo le Funzioni di Sistema a ciascuna utenza servita.

### §6.2 - Metodologie per l'analisi di Sistemi a rete

La caratteristica dei Sistemi a rete con massimo impatto sui metodi e sulle tecniche di analisi utilizzabili riguarda la difficoltà nel determinare analiticamente le "Funzioni di Sistema", che esprimono la raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore mediante relazioni AND / OR tra lo stato, funzionante o guasto, delle Connessioni.

Le metodologie proposte per l'analisi di Sistemi a rete, che non richiedono la conoscenza analitica Funzioni di Sistema, riguardano l'applicazione di algoritmi ad Automa Cellulare per la "soluzione della rete", l'identificazione esplicita delle configurazioni che la rete può assumere in seguito al guasto o riparazione dei suoi elementi (compilazione della Tabella degli stati) e l'applicazione di tecniche di campionamento e metodi di simulazione "tempo-dipendenti".

### §6.3 - Rischi parziali e Rischio complessivo di Sistemi a rete

E' proposta una definizione del Rischio complessivo associato ad un Sistema a rete, come somma dei Rischi parziali riferiti ai singoli nodi Utilizzatori. Alla non raggiungibilità di un nodo Utilizzatore da almeno un nodo Sorgente, attraverso un percorso di Connessioni disponibili, è assegnato un "danno" (ad esempio, in relazione al numero di utenti serviti); a ciascuna configurazione che la rete può assumere è associato un "danno complessivo", pari alla somma del danno prodotto dai nodi Utilizzatori non raggiungibili in tale stato.

### §6.4 - Analisi della Struttura di Sistemi a rete

Per "analisi della Struttura" si intende l'insieme delle valutazioni che riguardano la topologia della rete, a prescindere dalle caratteristiche specifiche dei suoi elementi. Come ipotesi iniziale di indagine, si assume che le Connessioni siano caratterizzate dal medesimo valore di Indisponibilità, pari a 0,5, e che il danno prodotto dalla non raggiungibilità di un qualsiasi nodo Utilizzatore sia il medesimo per tutti i nodi.

L'analisi ha l'obiettivo di valutare (eventuali) caratteristiche che integrano la conoscenza del Rischio complessivo e dei Rischi parziali associati Sistema e di realizzare un ordinamento dei suoi elementi. Tale ordinamento è definito mediante misure di "Importanza" e "Sensibilità" che richiedono la stima delle derivate parziali del Rischio complessivo e dei Rischi parziali rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni. A tale scopo sono fornite le espressioni analitiche utilizzabili a partire dalla Tabella degli stati del Sistema per la stima esatta delle derivate parziali del primo e del secondo ordine, nelle ipotesi caratteristiche dell'analisi della Struttura della rete.

Nello studio si distingue tra un ordinamento con significato di "Importanza" e con significato di "Sensibilità". Un ordinamento degli elementi del Sistema con significato di Importanza è realizzato con riferimento ai valori noti (privi di incertezza) delle variabili di ingresso del modello; l'ordinamento è definito dal contributo sulla variabile di uscita (Rischi parziali e Rischio complessivo associato al Sistema a rete) dovuto a ciascuna variabile di ingresso (Indisponibilità di una specifica Connessione), considerata singolarmente o in qualsiasi combinazione e numero con le restanti variabili.

Un ordinamento degli elementi del Sistema con significato di Sensibilità è realizzato con riferimento alle incertezze che caratterizzano le variabili di ingresso del modello; l'ordinamento è definito dal contributo sulla incertezza associata alla variabile di uscita dovuta alla incertezza associata a ciascuna variabile di ingresso considerata singolarmente o in qualsiasi combinazione e numero con le restanti variabili (Analisi di Sensibilità) ovvero dalla propagazione dell'incertezza associata alle variabili di ingresso sulle variabili di uscita del modello (Analisi di incertezza).

#### §6.5 - Misure Differenziali di Importanza per l'analisi di Sistemi a rete

In accordo a quanto riportato nel §2, è fornita la definizione delle Misure Differenziali del primo ordine, del secondo ordine e "totale", da utilizzare per l'analisi di Importanza di Sistemi a rete.

Come approccio complessivo di indagine, mediante l'utilizzo di una misura additiva, come la Misura Differenziale di Importanza del primo ordine è realizzato un ordinamento delle Connessioni, soggette a guasto e riparazione. Le misure stimate inducono un ordinamento con significato di Importanza dei nodi Utilizzatori del Sistema a rete.

L'applicazione delle Misure Differenziali di Importanza permette di riferire le valutazioni all'intero intervallo di variazione delle variabili di ingresso, valutare l'Importanza di coppie di Connessioni (analogamente per gruppi di più elementi), valutare l'Importanza di ciascuna Connessione considerando i contributi associati alla variazione della sua Indisponibilità singola (Misura del primo ordine) e/o contemporanea con la variazione dell'Indisponibilità delle restanti Connessioni, in qualsiasi combinazione e numero ed avere informazioni sulla dominanza delle relazioni (logica AND / OR) che interessano ciascuna Connessione rispetto al Sistema complessivo o a ciascun nodo Utilizzatore.

#### §6.6 - Misura Ibrida di Sensibilità per l'analisi di Sistemi a rete

L'analisi della Struttura del Sistema a rete è completata dalla applicazione di una misura adeguata a realizzare un ordinamento degli elementi con significato di Sensibilità. In accordo a quanto riportato nel §3, è fornita la definizione di una "Misura Ibrida" consistente con un approccio di Decomposizione della varianza associata al Rischio complessivo, per il quale è assunta una approssimazione del primo ordine. Tale misura, valutabile senza oneri aggiuntivi, ha un contenuto informativo differente dalla Misura Differenziale di Importanza (del primo ordine) ed è utilizzabile per uno "screening" preliminare ad una analisi Globale di Incertezza e Sensibilità.

Come per le Misure di Importanza, la Misura Ibrida è riferita al Rischio complessivo associato al Sistema; in tal caso, inoltre, è necessario tener conto delle correlazioni esistenti tra i Rischi parziali riferiti ai singoli nodi Utilizzatori, che caratterizzano la Struttura del Sistema a rete.

Come approccio complessivo di indagine, mediante l'utilizzo della Misura Ibrida è realizzato un ordinamento delle Connessioni. Le misure stimate inducono un ordinamento con significato di Sensibilità dei nodi Utilizzatori del Sistema

Nello studio del caso applicativo proposto nel §7 sono utilizzati algoritmi ad Automa Cellulare e algoritmi per la simulazione tempo-dipendente del Sistema mediante metodi MonteCarlo sviluppati in ambiente MATLAB®. Tali algoritmi, di semplice implementazione e non oggetto di specifiche ottimizzazioni, non sono riportati nel testo in quanto il contenuto dello studio è essenzialmente metodologico e non sono affrontate in dettaglio le problematiche di implementazione. La Tabella degli stati del Sistema è implementata mediante un foglio di calcolo Excel®; in tale ambiente, le stime analitiche sono realizzate operando opportuni filtri per il conteggio degli stati del Sistema e sono applicate le Tecniche di campionamento per lo sviluppo di analisi di Incertezza e Sensibilità.

## 6.1 Definizione di Sistemi a rete

In accordo agli indirizzi suggeriti dalla Institute for the Protection and the Security of the Citizen (IPSC) [51], il modello di una infrastruttura di distribuzione può essere definito a livello di “componente fisico” soggetto ai fenomeni di guasto (casuale o intenzionale) e riparazione, a livello di “Sistema a rete” inteso come insieme di elementi, nodi e Connessioni, per la distribuzione del bene ed a livello di “territorio” sul quale è distribuita l’utenza servita. Ne consegue la definizione di “Sistema a rete” come: *“modello di una infrastruttura dedicata alla distribuzione di un bene verso un utenza diffusa sul territorio, con un livello di astrazione tale da rappresentare i componenti fisici soggetti a guasto e riparazione mediante Connessioni orientate, che permettono la raggiungibilità dei nodi Utilizzatori da uno o più nodi Sorgente”*.

Un Sistema a rete è rappresentato mediante un grafo orientato, la cui topologia è completamente definita dagli elementi della Matrice di incidenza definita nel §4.1. Generalmente, il modello è definito a partire dal Sistema reale in modo da associare alle sole Connessioni i componenti fisici soggetti ai processi di guasto e successiva riparazione, mentre i nodi rappresentano le sorgenti del bene da distribuire e le utenze/aree servite sul territorio, entrambe supposte “infallibili”. I modelli, i metodi e le tecniche di analisi sono le medesime anche nel caso di nodi soggetti a guasto e riparazione. Infatti, è sempre possibile sostituire un nodo soggetto a guasto mediante una Connessione tra due nodi fittizi, supposti infallibili. Un Sistema a rete ha la missione di garantire la raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore da almeno un nodo Sorgente, attraverso almeno un percorso costituito da Connessioni disponibili (non oggetto di guasto o ad avvenuta riparazione) ed è pertanto da considerare un Sistema “multi-funzione”<sup>9</sup>.

Nelle condizioni nominali di funzionamento (quando tutti i componenti sono funzionanti) e nelle condizioni di degrado in cui sono efficaci le ridondanze presenti, tutti i nodi Utilizzatori risultano raggiungibili. Differenti condizioni di degrado sono definite per le restanti configurazioni, in relazione ai nodi Utilizzatori che non risultano raggiungibili.

La necessità di riferire le funzioni realizzate dal Sistema a ciascuna utenza servita non preclude la definizione di una misura delle prestazioni riferite alla rete nel suo complesso, che al contrario risulta determinante per uno studio corretto. La caratteristica dei Sistemi a rete con massimo impatto sulle tecniche di analisi utilizzabili riguarda la difficoltà nel determinare analiticamente le Funzioni di Sistema che aumenta con il crescere del numero delle Connessioni, in quanto aumenta il numero di configurazioni differenti che il Sistema può assumere, e con il livello di “magliatura” della rete in quanto si rendono disponibili più percorsi ridondati per il raggiungere ciascuna utenza.

Uno specifico interesse riguarda le caratteristiche intrinseche di un Sistema a rete che derivano dalla sua Struttura e prescindono dalle caratteristiche specifiche degli elementi costituenti. In tale contesto, riveste un ruolo essenziale l’utilizzo di misure che permettano un “ordinamento” degli elementi, nodi e Connessioni.

## 6.2 Metodologie per l’analisi di Sistemi a rete

L’analisi di sistemi stocastici è realizzata mediante tre approcci principali riguardanti l’applicazione di tecniche analitiche, l’applicazione di tecniche basate sulla numerazione degli stati del Sistema e l’applicazione di metodi di simulazione. Per l’analisi di un Sistema a rete, le tecniche analitiche richiedono o hanno come obiettivo l’identificazione esplicita delle Funzioni di Sistema, riferite a ciascun nodo Utilizzatore, nel caso utilizzando le metodologie proprie della Teoria dei grafi.

Le tecniche basate sulla Numerazione degli stati che il Sistema può assumere, pur richiedendo la memorizzazione di un elevato numero di dati permettono di derivare in modo esatto, senza la conoscenza analitica delle funzioni di Sistema, le informazioni essenziali riguardanti le prestazioni del Sistema e le misure necessarie a realizzare un ordinamento dei suoi elementi. Tale approccio è di interesse per l’analisi della Struttura di Sistemi a rete di medio-piccole dimensioni (non più di qualche decina di elementi).

---

<sup>9</sup> Sistema per il quale possono essere individuate più funzionalità da realizzare, anche in relazione tra loro, realizzate da componenti / apparati soggetti a guasto, anche condivisi tra le funzioni.

“L’esplosione combinatoria” del numero di configurazioni della rete all’aumentare del numero di elementi soggetti a guasto e riparazione, rende tale approccio non percorribile per Sistemi complessi. In tali casi, è possibile / necessario applicare metodi MonteCarlo per la simulazione del Sistema. L’applicazione di metodi di simulazione tempo-dipendenti permette inoltre di valutare i transitori delle grandezze di interesse, oltre che i valori a regime, e di introdurre nel modello particolari distribuzioni di probabilità e/o specifiche dipendenze tra le variabili di ingresso. L’applicazione di metodi MonteCarlo può richiedere accorgimenti specifici per la riduzione della varianza associata alle grandezze di interesse.

Le metodologie proposte per l’analisi di Sistemi a rete, descritte nei successivi paragrafi, riguardano: l’applicazione di algoritmi ad Automa Cellulare, la Numerazione degli stati del Sistema e l’applicazione di e tecniche di campionamento e metodi di simulazione tempo-dipendenti. Si individuano due campi di applicazione:

- sviluppo di analisi RAM per la stima predittiva delle prestazioni del Sistema, in forma esatta o approssimata, a partire da valori “realistici” dei parametri caratteristici degli elementi soggetti a guasto e riparazione;
- come indagine di primo approccio in ambito RAM o per sviluppo di un Security assessment interessa indagare la “Struttura” del Sistema a rete, prescindendo dalla affidabilità o vulnerabilità delle Connessioni (rappresentati i componenti fisici) e dal danno prodotto dalla non raggiungibilità dei Nodi (rappresentanti le utenza distribuite) e si concretizza con un ordinamento degli elementi del Sistema.

### 6.2.1 Applicazione di algoritmi ad Automa cellulare

Come anticipato, la prima problematica da affrontare per l’analisi dei Sistemi a rete riguarda la difficoltà nell’ottenere una espressione analitica delle Funzioni di Sistema, da riferire a ciascun nodo Utilizzatore.

Algoritmi basati su Automa Cellulare sono utilizzati per la “soluzione della rete” in combinazione con la Numerazione degli stati del Sistema e con l’applicazione di metodi MonteCarlo. In entrambi i casi non è richiesta la conoscenza analitica Funzioni di Sistema. Per “soluzione della rete” si intende la verifica della raggiungibilità di ciascun Nodo Utilizzatore, da almeno un nodo Sorgente, mediante almeno un percorso costituito da Connessioni disponibili.

Nella applicazione base dell’algoritmo, l’Automa Cellulare propaga localmente l’informazione da un nodo all’altro della rete, aggiornando lo stato di ogni cella in base al valore assunto dalle celle appartenenti alla Regione di vicinato, come definita nel §4.5. Come mostrato in Figura 7, il processo termina quando tutti i nodi Utilizzatori risultano attivi ovvero, in generale, quando si raggiunge un “punto di stagnazione”, in cui non si modifica lo stato dei nodi per successivi passi di aggiornamento. Tale approccio può essere utilizzato per la compilazione della Tabella degli stati del Sistema.

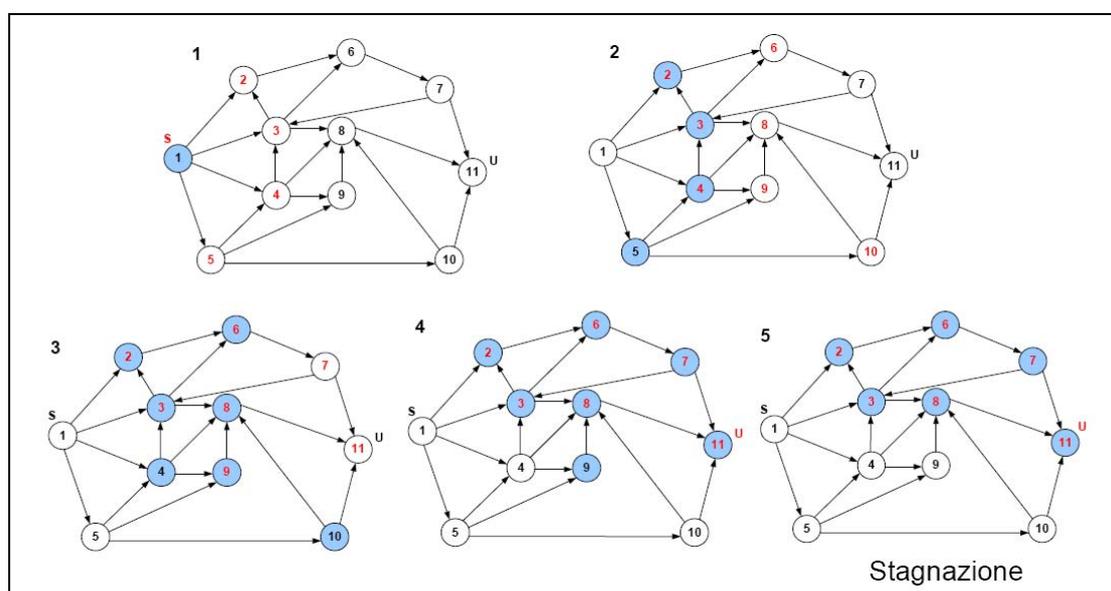


Figura 7: Applicazione base dell’algoritmo ad Automa Cellulare

Se lo studio è realizzato mediante metodi MonteCarlo per la simulazione del “cammino casuale” tra gli stati del Sistema, l'applicazione base dell'algoritmo può essere limitata alla preliminare verifica dello stato di raggiungibilità di tutti i nodi Utilizzatori nella configurazione iniziale del Sistema (Connettività della rete nelle condizioni iniziali).

Nel corso della simulazione, un diverso algoritmo può essere utilizzato per valutare le conseguenze del guasto o della riparazione di una Connessione, in termini di primo effetto sulla sua Regione di vicinato e successiva propagazione della perturbazione. In Figura 8 è mostrato un esempio di utilizzo dell'algoritmo.

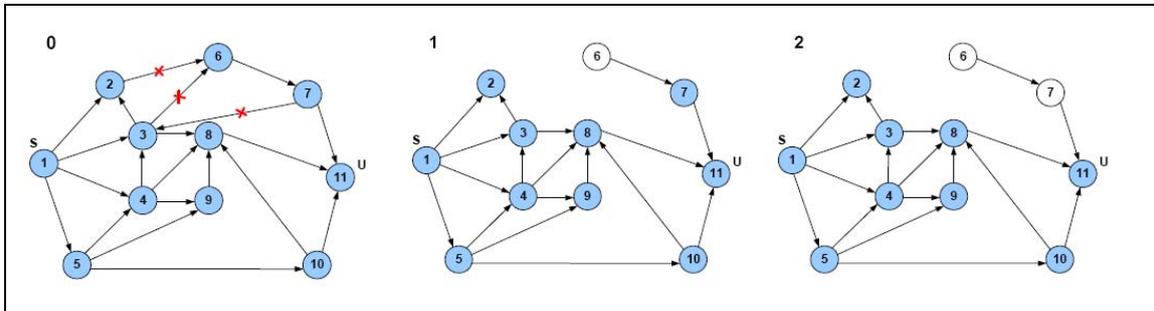


Figura 8: Applicazione dell'algoritmo ad Automa Cellulare per l'integrazione con metodi MonteCarlo

### 6.2.2 Numerazione degli stati del Sistema

Per “Numerazione degli stati del Sistema” si intende l'identificazione esplicita delle configurazioni che la rete può assumere, ciascuna definita dallo stato (guasto / funzionante) delle sue Connessioni e descritta dallo stato (raggiungibile / non raggiungibile) dei nodi Utilizzatori.

Gli stati possibili per un Sistema costituito da  $n$  componenti binari risultano  $2^n$ . Dalla Teoria dei Grafi è noto che molti problemi associati alle caratteristiche di Connettività di una rete risultano “difficili”. Pertanto, una metodologia che richiede l'identificazione esplicita delle configurazioni che la rete può assumere non può essere proposta per la soluzione di sistemi complessi (con un elevato numero non di elementi). Ciononostante, la Numerazione degli stati del Sistema costituisce un importante strumento di analisi utilizzabile per Sistemi a rete costituiti da un numero non eccessivo di elementi, per la possibilità di ottenere stime esatte delle grandezze di interesse.

La “Tabella degli stati del Sistema” fornisce una rappresentazione alternativa alle Funzioni di Sistema.

Id Stato del Sistema	Stato nodi			Stato nodi			$Pr_s$	$w_s$
	...	Connessione $j - U_j$	...	...	Nodo $i - w_i$	...		
...	...	...	...	...	0	...		...
s	...	$x_j^s$	...	...	$x^{is}$	...		...
...	...	...	...	...	0	...		...

Tabella 13: Tabella degli stati del Sistema

A ciascuno stato del Sistema, ovvero a ciascuna configurazione della rete, è associata una riga della Tabella degli stati. La Tabella degli stati è costituita da  $2^{Nc}$  righe, dove  $Nc$  è il numero di Connessioni della rete. Per ciascuna Connessione è specificato il relativo valore di Indisponibilità (asintotica)  $U_j$ . Per ciascun nodo Utilizzatore è specificato il relativo peso  $w_i$ , misura del danno prodotto dalla sua non raggiungibilità.

Ciascuna configurazione è definita dallo stato  $x_j^s$  ( guasto / funzionante) delle sue Connessioni.  $Pr_s$  è la probabilità che il Sistema si trovi nel suo stato  $s$ ;  $w_s$  è il danno complessivamente prodotto dai nodi Utilizzatori non raggiungibili.

Ciascuna configurazione della rete è descritta dallo stato  $x^{is}$  (raggiungibile / non raggiungibile) dei nodi Utilizzatori.

La compilazione della Tabella degli stati del Sistema può essere supportata da un algoritmo ad Automa Cellulare, nella sua applicazione base dell'algoritmo. A partire dalla Tabella degli stati è possibile procedere:

- alla stima esatta del Rischio complessivo e dei Rischi parziali associati al Sistema;
- alla stima esatta delle derivate parziali del Rischio complessivo e dei Rischi parziali, rispetto alla Indisponibilità delle Connessioni, nelle ipotesi proprie dell'analisi della Struttura del Sistema, operando opportuni conteggi degli stati;
- alla stima approssimata delle Misure di Importanza e Sensività mediante la ri-valutazione del modello per variazioni finite delle variabili di ingresso (Indisponibilità delle Connessioni) e mediante la rappresentazione probabilistica dell'incertezza associata alle variabili e l'utilizzo di tecniche di campionamento e regressione lineare dei dati.

### 6.2.3 Applicazione di metodi di simulazione

#### Metodi MonteCarlo per l'analisi di Sistemi a rete

L'aumento del numero di configurazioni che la rete può assumere all'aumentare del numero di elementi soggetti a guasto e riparazione rende non proponibile un approccio basato sulla Numerazione degli stati per lo studio di Sistemi complessi. In tali casi, è possibile / necessario applicare metodi MonteCarlo per la simulazione del Sistema. Come evidenziato nel §1.1.1, infatti, l'accuratezza di una stima MonteCarlo dipende dal valore della/e grandezza/e da stimare ma è indipendente dal numero delle variabili di ingresso del modello. L'applicazione di metodi di simulazione tempo-dipendenti permette inoltre di valutare i transitori delle grandezze di interesse, oltre che i valori a regime, e di introdurre nel modello particolari distribuzioni di probabilità e/o specifiche dipendenze tra le variabili di ingresso.

L'evoluzione del Sistema è simulata in termini di successive transizioni tra i suoi stati, conseguenti al guasto o alla riparazione di uno dei suoi componenti. Per ciascuna configurazione della rete, la raggiungibilità dei nodi Utilizzatori è verificata mediante un algoritmo ad Automa Cellulare.

Consideriamo il Sistema a rete rappresentato in Figura 9. E' proposto un approccio Indiretto per la valutazione della Inaffidabilità / Indisponibilità di un Sistema a rete mediante metodi MonteCarlo [48]. A ciascun nodo Utilizzatore, oltre che a ciascun intervallo temporale in cui è suddiviso il "Tempo di missione", è associato un contatore.

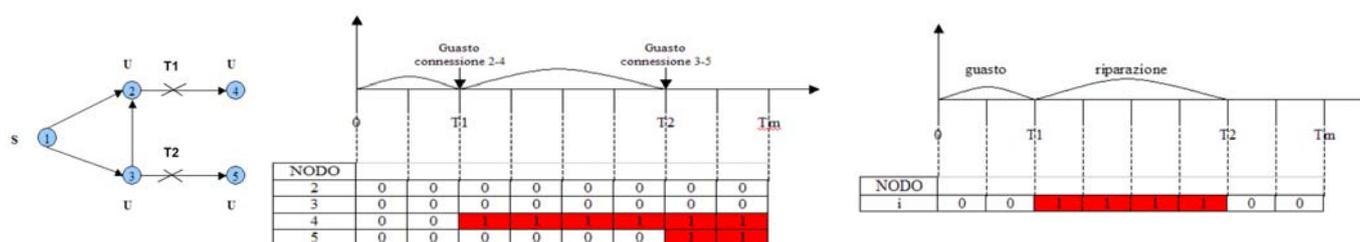


Figura 9: Simulazione per la valutazione dell'affidabilità del Sistema

Supponiamo le Connessioni siano non riparabili e che interessi valutare l'Inaffidabilità del Sistema. Se al tempo T1 avviene il guasto della Connessione 24, il nodo 4 non è più raggiungibile e sono incrementati tutti i contatori associati a tale nodo, dal tempo T1 (ovvero dall'intervallo temporale che lo comprende) fino al Tempo Tm. In modo analogo, se al tempo T2 avviene il guasto della Connessione 35, il nodo 5 è più raggiungibile e sono incrementati tutti i contatori associati a tale nodo, dal tempo T2 fino al Tempo Tm. La simulazione prosegue fino al guasto di tutte le Connessioni.

Supponiamo che le Connessioni siano riparabili e che interessi valutare l'Indisponibilità del Sistema. Ipotizziamo che al tempo T1 avviene il guasto di una Connessione che determina la non raggiungibilità di un generico nodo i e al tempo T2 avviene la sua riparazione ed il nodo torna ad essere raggiungibile. In tal caso, sono incrementati tutti i contatori associati al nodo i, dal tempo T1 (ovvero dall'intervallo temporale che lo comprende) fino al tempo T2. La simulazione prosegue fino al raggiungimento del Tempo di missione.

L'incremento di ciascun contatore può essere pari a 1 o pari al peso  $w_i$  assegnato al nodo Utilizzatore coinvolto (misura del danno prodotto dalla sua non raggiungibilità). Nel primo caso è realizzata una stima MonteCarlo dell'Indisponibilità del nodo (probabilità che non sia raggiungibile); i Rischi parziali associati sono calcolati a posteriori. Nel secondo caso è direttamente realizzata la stima MonteCarlo dei Rischi parziali associati al Sistema a rete.

### Tecniche di riduzione della varianza

Come anticipato nel §1, l'applicazione di metodi MonteCarlo per la stima delle caratteristiche di affidabilità e disponibilità di sistemi può richiedere l'adozione di Tecniche di riduzione della varianza associata alle grandezze di interesse. Tale circostanza si verifica ogni qualvolta i tassi di transizione (in generale i tassi di guasto) dei componenti del Sistema risultano bassi con riferimento al tempo di missione specificato (condizione di "eventi rari"). Per la stima dell'Indisponibilità di sistemi costituiti da componenti riparabili, l'applicazione di tecniche di riduzione della varianza è inoltre necessaria per agevolare il campionamento degli eventi di guasto multiplo, stante il differente ordine di grandezza tipico dei Tassi di guasto e dei Tassi di riparazione dei componenti. Per l'analisi di Sistemi a rete tale circostanza è aggravata dalla presenza di percorsi ridondanti che permettono la raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore e dalla conseguente necessità di campionare eventi multipli di guasto per "osservarne" una transizione di stato.

Adottando un approccio Indiretto per l'applicazione di metodi MonteCarlo, la simulazione è realizzata procedendo in modo indipendente:

- alla valutazione del nuovo stato del Sistema, mediante il campionamento dalla Connessione interessata dalla transizione (guasto se la Connessione è funzionante, riparazione se la Connessione è guasta);
- alla valutazione del tempo  $t$  di transizione del Sistema, mediante il campionamento da una funzione Cumulata di probabilità associata al Sistema del suo complesso, sulla base dei tassi di transizione (guasto / riparazione) delle singole Connessioni, in relazione al loro stato corrente.

Nella valutazione delle prestazioni di Sistemi "reali", cioè a partire da valori "realistici" dei Tassi di guasto e riparazione, la riduzione della varianza associata alla stima è realizzata mediante tecniche di Campionamento di Importanza. Al fine di fornire un approccio generale, che non richieda valutazioni specifiche per l'identificazione della "distorsione ottimale" da operare sulle distribuzioni di probabilità, sono proposte due tecniche di applicabilità generale, denominate: Forzatura del Guasto Certo e Forzatura della Transizione Specifica [48].

In accordo a quanto riportato nel §2.1.1, è assunta una distribuzione esponenziale per i processi di guasto e riparazione di ciascun componente del Sistema. Per  $t \in [0; T_m]$ , la funzione Densità di probabilità di transizione del Sistema è

$${}^I pdf_{nat}(t) = \lambda_{tot} \cdot e^{-\lambda_{tot} \cdot (t-t_0)}; \text{ la funzione Cumulata è } {}^I cdf_{nat}(t) = 1 - e^{-\lambda_{tot} \cdot (t-t_0)}.$$

La "Forzatura della Transizione Specifica" consiste nel modificare le probabilità di transizione dei componenti attribuendo una uguale probabilità al guasto di una Connessione funzionante o alla riparazione di una Connessione guasta. In tal modo è favorita l'osservazione delle configurazioni della rete in cui uno o più nodi Utilizzatori non sono raggiungibili, con la conseguente riduzione della varianza associata alla stima del Rischio complessivo e dei Rischi parziali.

Sia  $\lambda_i$  il tasso di transizione della Connessione  $i$ -esima nello stato  $K$  del Sistema. La funzione Densità di probabilità

"naturale" associata alla Connessione come responsabile della transizione del Sistema è  ${}^{II} pdf_{nat}(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{k_{tot}}}$ ,

dove  $\lambda_{k_{tot}}$  è il Tasso di transizione totale del Sistema nello stato  $k$ , somma dei Tassi di guasto dei componenti funzionanti e dei Tassi di riparazione dei componenti guasti in tale stato.

In Figura 3 è rappresentata la funzione Cumulata di probabilità.



Figura 3. Forzatura del Guasto Certo

La transizione della Connessione  $i$  è determinata dall'estrazione di un numero casuale compreso nel relativo intervallo. La forzatura della transizione specifica è realizzata ripartendo l'intervallo  $[0,1]$  in sottointervalli di uguale ampiezza.

La funzione Densità di probabilità "distorta" associata alla transizione di una qualsiasi Connessione è  $^{II} pdf_{forz}(t) = \frac{1}{Nc}$ .

Il peso della transizione con cui incrementare i contatori per ottenere una stima non forzata del valore atteso dell'inaffidabilità / Indisponibilità del Sistema è calcolato come rapporto tra la  $pdf_{nat}$  e la  $pdf_{forz}$ :

$$^I \rho = \frac{pdf_{nat}}{pdf_{forz}} = Nc \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda_{k_{tot}}} \quad (6.1)$$

La tecnica "Forzatura del Guasto Certo" consiste nel modificare la funzione Densità(pdf) / Cumulata (cdf) di probabilità di transizione del Sistema in modo da avere sicuramente una transizione entro il tempo di missione definito.

Il campionamento del tempo di transizione del Sistema è realizzato mediante una distribuzione di probabilità "distorta",

per la quale è assunto un andamento lineare:  $pdf_{forz}(t) = \frac{(t-t_o)}{(T_m-t_o)}$ ;  $cdf_{forz}(t) = \frac{t-t_o}{T_m}$ .

Mediante il "Metodo della trasformata inversa", l'estrazione di un numero casuale  $\xi$  corrisponde secondo la  $cdf_{forz}$  ad un istante di tempo compreso nell'intervallo  $[t_0; T_m]$ :  $cdf_{forz} = \xi \rightarrow t_{forz} = t_0 + \xi \cdot T_m < T_m$ .

In Figura 10 è mostrato un esempio di utilizzo della tecnica della "Forzatura del Guasto Certo" per un singolo componente caratterizzato da un Tasso di guasto pari a  $\lambda = 1E - 4h^{-1}$ , per un Tempo di missione pari a  $T_m = 5.000h$ .

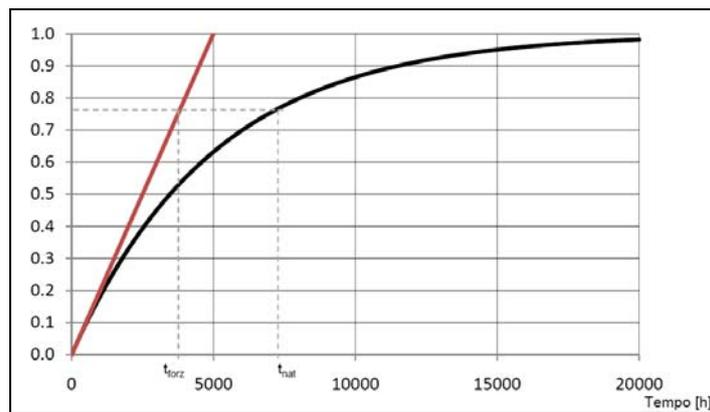


Figura 10: Funzione Cumulata di probabilità "naturale" e "distorta" per la "Forzatura del Guasto Certo"

Il peso con cui incrementare i contatori per ottenere una stima non forzata del valore atteso dell'Indisponibilità del Sistema è calcolato come rapporto tra la  $pdf_{nat}$  e la  $pdf_{forz}$ :

$$^{II} \rho_k = (T_m - t_0) \cdot \lambda_{k_{tot}} \cdot e^{-\lambda_{k_{tot}} \cdot (t-t_0)} \quad (6.2)$$

Il peso associato alla transizione  $k$  del Sistema, con cui incrementare i contatori tenendo conto di entrambi i contributi espressi dalle eq. (6.1) e (6.2), risulta:

$$\rho_k = \rho_{k-1} + \left( {}^I \rho_k \cdot {}^{II} \rho_k \right) \quad (6.3)$$

I Rischi parziali sono calcolati a partire dalla stima MonteCarlo dell'Indisponibilità dei nodi Utilizzatore del Sistema. L'ordine dei due passi con cui è realizzata la simulazione è utile alla applicazione di riduzione della varianza. In particolare, è utile impiegare la "Forzatura del Guasto Certo" solo nel caso di guasto di una Connessione precedentemente funzionante; se l'evento simulato consiste nella riparazione di una Connessione, si procede ad un campionamento "non forzato". Inoltre, nel corso della simulazione, la "Forzatura del Guasto Certo" è impiegata nella sola parte iniziale di ciascuna storia ovvero per tempi sufficientemente inferiori al Tempo di missione.

### Tecniche di campionamento per l'Analisi di Incertezza e Sensitività

Nello sviluppo di analisi di Incertezza e Sensitività di modelli complessi è frequente il ricorso a tecniche di campionamento quali MonteCarlo e Latin Hypercube.

Con riferimento allo studio di Sistemi a rete, interessa valutare le distribuzioni di probabilità associate ai Rischi parziali ed al Rischio complessivo, conseguenti alla propagazione delle incertezze assegnate alla Indisponibilità delle Connessioni. La procedura utilizzata prevede i seguenti passi:

- è assegnata una incertezza alla Indisponibilità di una Connessione (Simulazione OAT), di tutte le Connessioni tranne una (Simulazioni OAT-), di un sottoinsieme o di tutte le Connessioni, rappresentata mediante una opportuna distribuzione di probabilità definita sul relativo intervallo di variazione;
- è realizzato un numero adeguato di "storie"; in ciascuna storia è realizzato il campionamento di un vettore dei valori di Indisponibilità delle Connessioni e sono stimati i Rischi parziali ed il Rischio complessivo del Sistema.

Al termine della procedura sono disponibili le distribuzioni (Densità e Cumulata) di probabilità associate ai Rischi parziali ed il Rischio complessivo del Sistema a rete, da cui stimare le grandezze di interesse (valore medio, varianza, ...).

Per le applicazioni di interesse, le variabili di ingresso del modello (Indisponibilità delle Connessioni) sono probabilità e variano quindi nell'intervallo [0;1]. Se non diversamente specificato, l'estrazione dei valori di Indisponibilità delle Connessioni dalle relative distribuzioni di probabilità è realizzata in modo indipendente. Come descritto nel §7.4, per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete si assume una stessa distribuzione di probabilità da cui estrarre, indipendentemente, i valori di Indisponibilità delle Connessioni. Come unica eccezione, al fine di fornire l'evidenza delle correlazioni tra i Rischi parziali dovute alla Struttura della rete, nel corso del §7 è realizzato un campionamento mediante Correlazione per ranghi, in accordo a quanto riportato nel §1.4.

Il campionamento può essere realizzato con la tecnica Latin Hypercube descritta nel §1.3, permettendo una maggiore "uniformità della esplorazione" dei domini delle variabili rispetto ad un campionamento MonteCarlo, con la conseguente riduzione della varianza associata alle stime di interesse, a parità del numero di storie realizzate

La procedura descritta è utilizzata per l'analisi di Sistemi a rete insieme con la Tabella degli stati descritta nel §6.2.2. Nel corso dello studio del Caso applicativo riportato nel §7, la procedura descritta è utilizzata per:

- la stima le derivate parziali del Rischio complessivo e dei Rischi parziali del Sistema; a tal fine è assegnata una incertezza fittizia alla Indisponibilità di tutte le Connessioni e, al termine della procedura, è realizzata una regressione lineare (multivariata) dei dati di simulazione, in accordo quanto riportato nel §3.2.4;
- la stima della Misura Ibrida  $I_j, {}^* I_j \bar{I}_j$  definita in modo consistente con un approccio di Decomposizione della varianza associata al Rischio complessivo;
- la stima degli Indici di Sensitività per una analisi Globale di Incertezza, in accordo alla procedura descritta nel §3.3.4.

### 6.3 Rischi parziali e Rischio complessivo di Sistemi a rete

Consideriamo un Sistema a rete costituito da  $N_c$  Connessioni orientate soggette a fenomeni di guasto e riparazione, che permettono la raggiungibilità di  $N_n$  nodi Utilizzatori da  $N_s$  nodi Sorgente, supposti "infallibili".

Lo stato di ciascuna Connessione è descritto da una variabile binaria:  $x_j = 0$  se funzionante,  $x_j = 1$  se guasto.

L'Indisponibilità di una Connessione è definita come la probabilità che questa sia guasta  $U_j = \Pr[x_j = 1]$  ed è una variabile di ingresso del modello.

Lo stato di ciascun nodo Utilizzatore è descritto da una variabile binaria:  $x^i = 0$  se il nodo è raggiungibile da almeno un nodo Sorgente, attraverso almeno un percorso costituito da Connessioni disponibili,  $x^i = 1$  altrimenti.

Lo stato di un nodo Utilizzatore è il risultato dello stato di un sottoinsieme delle Connessioni: quelle che risultano coinvolte in almeno un percorso con uno dei nodi Sorgente, in accordo alla "Funzione parziale di Sistema"  $x^i(\dots, x_j, \dots)$ .

L'Indisponibilità di ciascun nodo Utilizzatore è una variabile di uscita del modello ed è definita come la probabilità che il nodo non risulti raggiungibile da almeno un nodo Sorgente, mediante almeno un percorso costituito da Connessioni disponibili  $U^i = \Pr[x^i(\dots, x_j, \dots) = 1]$ .

In generale, lo stato di un Sistema a rete è definito dallo stato di tutti i nodi Utilizzatori, risultato dello stato di tutte le Connessioni, in accordo ad una "Funzione Complessiva di Sistema"  $\Phi(\dots, x^i(\dots, x_j, \dots), \dots)$ .

A ciascun nodo Utilizzatore ( $i$ ) è assegnato un "peso"  $w_i$ , parametro (costante) del modello che fornisce una misura del danno prodotto nel caso in cui il nodo non risulti raggiungibile.

Le prestazioni di un Sistema a rete sono definite in termini di "Rischi parziali" riferiti ai singoli nodi Utilizzatori e "Rischio complessivo" riferito alla rete nel suo complesso.

Il Rischio parziale del Sistema a rete, riferito al nodo Utilizzatore  $i$ -esimo, è definito dal prodotto tra l'Indisponibilità del nodo Utilizzatore (probabilità che il nodo non sia raggiungibile) ed il danno che ne consegue:

$$R^i = w_i \cdot U^i \quad (6.4)$$

La definizione di Rischio complessivo è fornita considerando l'insieme dei  $2^{N_n}$  stati in cui il Sistema può trovarsi.

Sia  $x_j^s$  lo stato della Connessione e sia  $x^{is}$  lo stato del nodo Utilizzatore  $i$  nello stato  $s$  del Sistema. Con riferimento alla Tabella degli stati del Sistema definita nel §6.2.2, la probabilità che il Sistema sia nello stato  $s$  può essere espressa come:

$$Pr_s = \Pr[\Phi(\dots, x^i(\dots, x_j, \dots), \dots) = \Phi_s] = \prod_{j=1}^{N_c} (U_j)^{x_j^s} (1 - U_j)^{(1-x_j^s)}. \quad (6.5)$$

A tale stato risulta assegnato un peso che rappresenta una misura del danno complessivamente prodotto dai nodi Utilizzatori che risultano non raggiungibili:

$$w_s = \sum_{i=1}^{N_n} (w_i)^{x_i^s}, \text{ dove } (w_i)^{x_i^s} = w_i \text{ se } x_i^s = 1 \text{ e } (w_i)^{x_i^s} = 0_i \text{ se } x_i^s = 0. \quad (6.6)$$

Il Rischio complessivo associato Sistema a rete è definito dalla somma, estesa a tutti gli stati del Sistema, del prodotto tra la probabilità  $\Pr_s$  che il Sistema sia in tale stato e il peso  $w_s$  associato, misura del danno prodotto dai nodi Utilizzatori che non risultano raggiungibili:

$$R = \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s \cdot \Pr_s \cdot \quad (6.7)$$

L'Indisponibilità associata al nodo Utilizzatore  $i$ -esimo può essere stimata come probabilità che il Sistema sia in uno degli stati in cui tale nodo non è raggiungibile ( $x_i = 1$ ). Dalle eq. (6.5) e (6.6) si ottiene:

$$U^i = \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_i=1}}^{2^{Nc}} w_s \cdot \Pr_s = \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_i=1}}^{2^{Nc}} \left( \prod_{j=1}^{Nc} (U_j)^{x_j^s} (1-U_j)^{(1-x_j^s)} \right) \quad (6.8)$$

Introducendo le eq. (6.5) e (6.6) nella eq. (6.7) e tenendo conto dell'eq. (6.8) si ottiene la seguente espressione del Rischio complessivo associato al Sistema a rete:

$$R = \sum_{s=1}^{2^{Nc}} \left( \sum_{i=1}^{Nn} (w_i)^{x_i^s} \right) \left( \prod_{j=1}^{Nc} (U_j)^{x_j^s} (1-U_j)^{(1-x_j^s)} \right) = \sum_{i=1}^{Nn} w_i \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_i=1}}^{2^{Nc}} \left( \prod_{j=1}^{Nc} (U_j)^{x_j^s} (1-U_j)^{(1-x_j^s)} \right) = \sum_{i=1}^{Nn} w_i \cdot U^i = \sum_{i=1}^{Nn} R^i \quad (6.9)$$

L'eq. (6.9) evidenzia come il Rischio complessivo corrisponda alla somma, estesa a tutti i nodi Utilizzatori, del prodotto tra l'Indisponibilità del nodo Utilizzatore  $U_i$  ed il peso  $w_i$  che esprime il danno conseguente alla sua non raggiungibilità ovvero alla somma dei Rischi parziali associati al Sistema a rete.

Illustriamo brevemente alcuni casi particolari.

1. Se assegniamo a ciascun nodo ( $i$ ) il peso  $w_i = N_i / \sum_{i=1}^{Nn} N_i$ , dove  $N_i$  è il numero di utenze servite, il Rischio complessivo associato al Sistema è pari al System Average Interruption Duration Index (SAIDI) [41][45].

$$R = \left[ \sum_{i=1}^{Nn} N_i \cdot U^i \right] \left[ \sum_{i=1}^{Nn} N_i \right]^{-1} = SAIDI \quad (6.10)$$

2. Se assegniamo a ciascun nodo Utilizzatore un peso unitario  $w_i = 1 \quad \forall i$ , il peso associate a ciascun stato ( $s$ ) del Sistema è pari al numero di nodi Utilizzatori non raggiungibili in tale stato ovvero  $w_s = Nn_s \quad \forall s$ .

Dalle eq. (6.7) e (6.9) risulta per il Rischio complessivo associato al Sistema:

$$R = \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s \cdot \Pr_s = \sum_{s=1}^{2^{Nc}} Nn_s \cdot \Pr_s = \sum_{i=1}^{Nn} U^i \quad (6.11)$$

Ovviamente può risultare  $R > 1$ ;  $R$  è una misura di rischio, prodotto tra la probabilità che il Sistema operi in una data configurazione a seguito del guasto di una o più Connessioni ed il danno prodotto dalla non raggiungibilità di uno o più nodi Utilizzatori in detta configurazione.

3. Se assegniamo a ciascun nodo ( $i$ ) il peso  $w_i = 1/Nn$ , il Rischio complessivo associato al Sistema è normalizzato:

$$R = \frac{1}{Nn} \sum_{i=1}^{Nn} U^i \leq 1 \quad (6.12)$$

## 6.4 Analisi della Struttura di Sistemi a rete

### Ipotesi per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete

L'analisi della Struttura di Sistemi a rete è realizzata con le seguenti assunzioni:

- un valore unico (comune) di indisponibilità è assunto per tutte le Connessioni;
- se l'indisponibilità delle Connessioni è affetta da incertezza, questa è rappresentata mediante un'unica (comune) distribuzione di probabilità;
- a ciascun nodo Utilizzatore è assegnato un peso unitario  $w_i = 1 \quad \forall i$  che rappresenta il danno prodotto dalla sua non raggiungibilità.

Come ipotesi iniziale per il valore comune dell'indisponibilità delle Connessioni si assume  $U_j = 0,5 \quad \forall j$

In tal caso, la probabilità che il Sistema sia in uno specifico stato (che la rete assuma una specifica configurazione) risulta la stessa per tutti gli stati; il suo valore dipende dal numero di Connessioni.

$$Pr_s = \Pr[\Phi(\dots, x_i(\dots, x_j, \dots), \dots) = \Phi_s] = \prod_{j=1}^{Nc} (U_j)^{x_j^s} (1 - U_j)^{(1-x_j^s)} = \frac{1}{2^{Nc}}. \quad (6.13)$$

Quando interessa assegnare un'incertezza alla indisponibilità delle Connessioni, sono considerate due differenti assunzioni per la distribuzione di probabilità che la rappresenta:

- distribuzione normale con valore medio  $\overline{U_j} = 0,5 \quad \forall j$  e valore (comune) della deviazione standard sufficientemente piccolo;
- distribuzione uniforme sull'intero intervallo di variazione [0;1].

Per una valutazione di primo approccio, interessa prescindere dal danno prodotto dalla non raggiungibilità di uno specifico nodo Utilizzatore; è pertanto assegnato un peso unitario a ciascun nodo ovvero  $w_i = 1 \quad \forall i$ .

In tal caso, il peso associato allo stato  $s$  del Sistema definito dalla eq. (6.6) è pari al numero di nodi non raggiungibili in detto stato ovvero  $w_s = Nn_s \quad \forall s$ .

### Stima delle derivate parziali del Rischio per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete

L'analisi della Struttura di un Sistema a rete è realizzata mediante la valutazione di Misure Differenziali di Importanza che richiedono la stima delle derivate parziali del Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni.

A tal fine è possibile utilizzare la Numerazione degli stati del Sistema in accordo a quanto riportato nel §6.2.2.

Assumendo  $U_j = 0,5 \quad \forall j$  e  $w_i = 1 \quad \forall i$ , dalle eq. (6.7) e (6.13) il Rischio complessivo può essere valutato a partire dalla Tabella degli stati del Sistema riportata nel §6.2.2, mediante la seguente espressione:

$$R = \frac{1}{2^{Nc}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s = \frac{1}{2^{Nc}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{Nc}} N_s. \quad (6.14)$$

Dalla eq. (6.9) è possibile ricavare le seguenti espressioni analitiche per le derivate parziali del primo e del secondo ordine del Rischio complessivo rispetto alla Indisponibilità delle Connessioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial U_j} &= \sum_{s=1}^{2^{N_c}} (-1)^{(1-x_j^s)} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) = \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1}}^{2^{N_c}} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0}}^{2^{N_c}} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) \\
 \frac{\partial R}{\partial U_j \partial U_k} &= \sum_{s=1}^{2^{N_c}} (-1)^{(1-x_j^s)} (-1)^{(1-x_k^s)} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) = \\
 &= \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1 \\ s|x_k^s=1}}^{2^{N_c}} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1 \\ s|x_k^s=0}}^{2^{N_c}} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) - \\
 &\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0 \\ s|x_k^s=1}}^{2^{N_c}} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right) + \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0 \\ s|x_k^s=0}}^{2^{N_c}} w_s \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N_c} U_l^{x_l^s} (1-U_l)^{(1-x_l^s)} \right)
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Assumendo  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , dalla eq. (6.15) si ottengono le seguenti espressioni:

$$\frac{\partial R}{\partial U_j} = \frac{1}{2^{N_c-1}} \cdot \left( \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1}}^{2^{N_c}} w_s - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0}}^{2^{N_c}} w_s \right) \quad \frac{\partial R}{\partial U_j \partial U_k} = \frac{1}{2^{N_c-2}} \cdot \left( \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1 \\ s|x_k^s=1}}^{2^{N_c}} w_s - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1 \\ s|x_k^s=0}}^{2^{N_c}} w_s - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0 \\ s|x_k^s=1}}^{2^{N_c}} w_s + \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0 \\ s|x_k^s=0}}^{2^{N_c}} w_s \right) \tag{6.16}$$

Assumendo  $w_i = 1 \quad \forall i$ , i, le eq. (6.16) assumono la forma:

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial U_j} = \frac{1}{2^{N_c-1}} \cdot \left( \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1}}^{2^{N_c}} N_s - \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0}}^{2^{N_c}} N_s \right) = \frac{N_j^+ - N_j^-}{2^{N_c-1}}} \tag{6.17}$$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial U_j \partial U_k} = \frac{N_{jk}^{++} + N_{jk}^{--} - N_{jk}^{+-} - N_{jk}^{-+}}{2^{N_c-2}}} \tag{6.18}$$

dove:

- $N_j^+ = \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=1}}^{2^{N_c}} N_s$  è la somma del numero di nodi Utilizzatori non raggiungibili, per gli stati del Sistema in cui la Connessione  $j$  è sempre guasta ( $x_j^s = 1$ );
- $N_j^- = \sum_{\substack{s=1 \\ s|x_j^s=0}}^{2^{N_c}} N_s$  è la somma del numero di nodi Utilizzatori non raggiungibili, per gli stati del Sistema in cui la Connessione  $j$  è sempre funzionante ( $x_j^s = 0$ );

- $N_{jk}^{++} = \sum_{s=1}^{2^{N_c}} N_s \Big|_{\substack{x_j^s=1 \\ x_k^s=1}}$  è la somma del numero di nodi non raggiungibili, per gli stati del Sistema in cui le Connessioni  $j$  e  $k$  sono sempre guaste ( $x_j^s = x_k^s = 1$ );
- $N_{jk}^{+-} = \sum_{s=1}^{2^{N_c}} N_s \Big|_{\substack{x_j^s=1 \\ x_k^s=0}}$  è la somma del numero di nodi non raggiungibili, per gli stati del Sistema in cui la Connessione  $j$  è sempre guasta ( $x_j^s = 1$ ) e la Connessione  $k$  è sempre funzionante ( $x_k^s = 0$ );
- $N_{jk}^{-+} = \sum_{s=1}^{2^{N_c}} N_s \Big|_{\substack{x_j^s=0 \\ x_k^s=1}}$  è la somma del numero di nodi non raggiungibili, per gli stati del Sistema in cui la Connessione  $j$  è sempre funzionante ( $x_j^s = 0$ ) e la Connessione  $k$  è sempre guasta ( $x_k^s = 1$ );
- $N_{jk}^{--} = \sum_{s=1}^{2^{N_c}} N_s \Big|_{\substack{x_j^s=0 \\ x_k^s=0}}$  è la somma del numero di nodi Utilizzatori non raggiungibili, per gli stati del Sistema in cui le Connessioni  $j$  e  $k$  sono sempre funzionanti ( $x_j^s = x_k^s = 0$ );

Le derivate parziali di primo e secondo ordine del Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità dei componenti possono essere valutate mediante le eq. (6.17) e (6.18) a partire dalla Tabella degli stati del Sistema riportata nel §6.2.2, effettuando un opportuno conteggio delle configurazioni della rete.

Le eq. (6.16), (6.17) e (6.18) possono essere riferite ad uno specifico nodo Utilizzatore ovvero al Rischio parziale associato, assumendo  $N_s = 1$  se il nodo non è raggiungibile,  $N_s = 0$  altrimenti (ovvero  $N_s = x^{is}$ ).

## 6.5 Misure Differenziali di Importanza per l'analisi di Sistemi a rete

### 6.5.1 Misura Differenziale di Importanza del primo ordine

#### Definizione del $^1DIM$ per l'analisi di Sistemi a rete

E' proposto l'utilizzo di una misura differenziale del primo ordine, definita dal Differential Importance Measure introdotto nel §2.2.5, per l'Analisi di Importanza degli elementi di un Sistema a rete [35], [36].

In particolare, è fornita l'evidenza della necessità di riferire la misura al Rischio complessivo associato al Sistema, è fornita la definizione del  $^1DIM$  ed una sua espressione analitica utilizzabile nello studio della Struttura della rete.

Se si applica la definizione riportata nel §2.2.5, il  $DIM$  della Connessione  $j$  rispetto alla Indisponibilità di uno specifico nodo Utilizzatore, nell'ipotesi di Incrementi uniformi, risulta:

$$DIM_j^i = \frac{\frac{\partial U^i}{\partial U_j}}{\sum_{m=1}^{N_c} \frac{\partial U^i}{\partial U_m}} = \frac{B_j^i}{\sum_{m=1}^{N_c} B_m^i} \quad \text{dove } B_j^i = \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \quad (6.19)$$

Il  $DIM$  così definito:

- è una misura additiva rispetto alle Connessioni ( $DIM_{j,k}^i = DIM_j^i + DIM_k^i$ ) e per tale motivo è stata scelta tra le diverse Misure di Importanza presentate nel §2.2;
- non è una misura additiva rispetto ai nodi Utilizzatori, cioè non permette di valutare l'Importanza di una Connessione rispetto a più nodi Utilizzatori come somma delle singole Misure di Importanza ( $DIM_j^{l,m} \neq DIM_j^l + DIM_j^m$ ).

Al fine di riferire l'Importanza di una Connessione al Sistema a rete nel suo complesso, occorre stimare le misure a partire dal Rischio complessivo, definito dalla eq.(6.9):  $R = \sum_{i=1}^{Nn} R^i = \sum_{i=1}^{Nn} w_i U^i (\dots, U_j, \dots)$ .

La derivata parziale del Rischio complessivo rispetto ai Rischi parziali è  $\frac{\partial R}{\partial U^i} = w_i$  con  $w_i$  parametro costante.

Dallo sviluppo in Serie di Taylor (2.18) dei Rischi parziali  $\mathfrak{R}^{Nc} \rightarrow \mathfrak{R}^{Nn}$  rispetto alla Indisponibilità di componenti, troncato al primo ordine, si ottiene:

$${}^I \Delta R^i = w_i \cdot \sum_{j=1}^{Nc} \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j. \quad (6.20)$$

Dallo sviluppo in Serie di Taylor (2.18) del Rischio complessivo  $\mathfrak{R}^{Nc} \rightarrow \mathfrak{R}$  rispetto alla Indisponibilità di componenti, troncato al primo ordine, si ottiene:

$${}^I \Delta R = \sum_{i=1}^{Nn} \left( \frac{\partial R^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) = \sum_{i=1}^{Nn} \left[ w_i \cdot \sum_{j=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) \right]. \quad (6.21)$$

Il  ${}^I DIM$  della Connessione  $j$  riferito ai Rischi parziali, nell'ipotesi di Incrementi uniformi  $\Delta U_j = \Delta U_k = \Delta \quad \forall j, k$ , risulta:

$${}^I DIM_j^i = \frac{w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j}}{\sum_{i=1}^{Nn} \left( w_i \cdot \sum_{j=1}^{Nc} \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \right)} \quad (6.22)$$

Il  ${}^I DIM$  è una misura additiva rispetto alle Connessioni e rispetto ai nodi Utilizzatori ovvero:

$${}^I DIM_{j,k}^i = \frac{w_i}{{}^I \Delta R} \cdot \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j + \frac{\partial U^i}{\partial U_k} \cdot \Delta U_k \right) = {}^I DIM_j^i + {}^I DIM_k^i \quad (6.23)$$

$${}^I DIM_j^{i,l} = \frac{1}{{}^I \Delta R} \cdot \left( w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j + w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) = {}^I DIM_j^i + {}^I DIM_j^l. \quad (6.24)$$

Dalla eq. (6.22) risulta:  $\sum_{j=1}^{Nc} \sum_{i=1}^{Nn} {}^I DIM_j^i = 1$ .

Il  ${}^I DIM$  della Connessione  $j$  riferito al Rischio complessivo è pari alla somma delle misure riferite ai Rischi parziali:

$${}^I DIM_j = \sum_{i=1}^{Nn} {}^I DIM_j^i \quad (6.25)$$

Il  ${}^I DIM$  definisce un ordinamento con significato di importanza delle Connessioni del Sistem a rete.

Un ordinamento dei nodi Utilizzatori può essere definito dalla somma dei valori della Misura differenziale del primo ordine di tutte le Connessioni, riferita a ciascun Rischio parziale:

$$\boxed{{}^I DIM^i = \sum_{j=1}^{Nc} {}^I DIM_j^i} \quad (6.26)$$

L'importanza di ciascun nodo Utilizzatore è valutata in relazione al contributo al Rischio complessivo prodotto dalla variazione dell'Indisponibilità delle Connessioni, considerate singolarmente, che si realizza attraverso la non raggiungibilità del nodo in oggetto.

### Stima del ${}^I DIM$ per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete

In accordo a quanto riportato nel §6.4, la Struttura della rete è indagata assegnando un peso unitario a ciascun nodo  $w_i = 1 \quad \forall i$  ovvero prescindendo dal danno prodotto dalla non raggiungibilità dello specifico nodo.

Inoltre, si assume uno stesso valore di Indisponibilità (asintotica) per tutte le Connessioni del Sistema  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ .

In tal caso, il  ${}^I DIM$  può essere valutato mediante un opportuno "conteggio" degli stati del Sistema, senza la conoscenza analitica delle Funzioni del Sistema e senza l'adozione di metodi di simulazione.

Dalla eq. (6.17), il  ${}^I DIM$  della Connessione  $j$  riferito al Rischio complessivo, nell'ipotesi di Incrementi uniformi  $\Delta U_j = \Delta U_k = \Delta \quad \forall j, k$ , può essere stimato mediante l'espressione:

$$\boxed{{}^I DIM_j = \frac{\left( \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s \Big|_{s|x_j^s=1} - \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s \Big|_{s|x_j^s=0} \right)}{\sum_{m=1}^{Nc} \left( \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s \Big|_{s|x_m^s=1} - \sum_{s=1}^{2^{Nc}} w_s \Big|_{s|x_m^s=0} \right)} = \frac{N_j^+ - N_j^-}{\sum_{m=1}^{Nc} (N_m^+ - N_m^-)}} \quad (6.27)$$

Il "conteggio" degli stati del Sistema è realizzato operando opportuni filtri sulla Tabella degli stati definita nel §6.2.2.

Interessano le situazioni limite in cui ciascuna Connessione è sempre guasta  $N_j^+$  o funzionante  $N_j^-$ .

Le stesse espressioni possono essere utilizzate per valutare il  ${}^I DIM_j$  riferito ai Rischi parziali, assumendo  $N_s = 1$

se il nodo non è raggiungibile,  $N_s = 0$  altrimenti (ovvero  $N_s = x^{is}$ ) nelle definizioni di  $N^+$  e  $N^-$  fornite nel §6.4.

### Relazioni tra differenti Misure di Importanza

Le relazioni esistenti tra le diverse Misure di Importanza definite nel §2.2 possono essere evidenziate graficamente, ripercorrendo un approccio proposto in letteratura [20].

La stima delle derivate parziali del primo ordine può essere realizzata operando una variazione finita dell'Indisponibilità di una delle Connessioni  $(U_1, \dots, U_j^0, \dots, U_n) \rightarrow (U_1, \dots, U_j, \dots, U_n)$  [15]:

$$\frac{\partial R}{\partial U_j} = \frac{R(U_1, \dots, U_j, \dots, U_n) - R(U_1, \dots, U_j^0, \dots, U_n)}{U_j - U_j^0} \quad (6.28)$$

Dalla eq. (6.28), estesa agli estremi dell'intervallo di variazione di ciascuna variabile [0; 1], si ottiene la definizione del Birnbaum measure fornita nel eq. (2.14), desunta dalla Decomposizione di Shannon della Indisponibilità del Sistema espressa dalla eq. (2.13), essendo  $R^{j+} = R(U_1, \dots, 1, \dots, U_n)$  e  $R^{j-} = R(U_1, \dots, 0, \dots, U_n)$ .

Dalla eq. (6.28) e dalle eq. (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) e (2.21) che forniscono la definizione delle Misure di Importanza, è possibile esprimere una relazione del tipo:

$$\frac{R}{R^0} = \alpha \cdot \frac{U_j}{U_j^0} + \frac{1}{RRW_j} \quad (6.29)$$

dove  $\alpha = C_j = B_j \cdot \frac{U_j^0}{U} = \frac{U_j^0}{U} \cdot \left( * DIM_j \cdot \sum_i \sigma_i \right) = U_j^0 \cdot \left( RAW_j - \frac{1}{RRW_j} \right)$ .

L'eq. (6.29) è rappresentata graficamente da una retta nel piano  $\left( \frac{R}{R^0} \right) - \left( \frac{U_j}{U_j^0} \right)$ , denominata "Risk impact curve" [20].

Tale relazione estende l'ipotesi di linearità, valida in un intorno del valore nominale, in tutto l'intervallo di variazione delle variabili di ingresso, esprimendo in modo sintetico le relazioni che intercorrono tra le diverse Misure di Importanza. Infatti, il coefficiente angolare  $\alpha$  può essere espresso in modo equivalente:

- dal Criticality importance measure;
- dal prodotto tra il Birnbaum measure ed il rapporto tra l'Indisponibilità della Connessione e l'Indisponibilità del Sistema;
- dal prodotto tra il DIM (ipotesi di Incrementi uniformi), la somma dei Birnbaum measures ed il rapporto tra l'Indisponibilità della Connessione e del Sistema;
- dalla differenza tra le misure  $RAW$  e  $1/RRW$  della Connessione.

L'intercetta con l'asse delle ordinate è pari alla misura  $1/RRW$ . Inoltre risulta  $U_j = 1 \rightarrow \frac{R}{R^0} = RAW_j$ .

Il Risk Achievement Worth è di particolare interesse perché utilizzato in letteratura per l'analisi di Sistemi a rete [47], [50]. In tali studi, la misura è stimata per ciascuna Connessione con riferimento a ciascun nodo Utilizzatore ( $RAW_j^i$ ); la somma dei valori così ottenuti ( $RAW_j$ ) è assunta come misura di Importanza riferita al Sistema complessivo.

Avendo riferito le misure alla Indisponibilità delle Connessioni e non ai parametri caratteristici il  $DIM$  (ipotesi di incrementi uniformi) e il  $RAW$  devono fornire il medesimo ordinamento [24]. Nel §7.3.1, mediante un Caso applicativo, è fornita l'evidenza con che il  $RAW$  così definito non fornisce un ordinamento corretto degli elementi del Sistema.

Utilizzando lo stesso criterio adottato per la definizione del  $DIM$ , riferiamo il Risk Achievement Worth al Rischio complessivo associato al Sistema a rete. Per ciascuna Connessione, la stima del  $RAW$  è realizzata a partire dalla definizione fornita dall'eq. (2.17) mediante la seguente espressione:

$$* RAW_j = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} (RAW_j^i \cdot R^i)}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} (RAW_j^i \cdot w_i \cdot U^i)}{\sum_{i=1}^{N_n} w_i \cdot U^i} \quad (6.30)$$

In ogni caso, il Risk Achievement Worth non può essere utilizzato per realizzare un ordinamento dei nodi Utilizzatori di un Sistema a rete in quanto la misura non è additiva rispetto ad un gruppo di eventi [24]

## 6.5.2 Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine

### Definizione del ${}^{\text{II}}DIM$ per l'analisi di Sistemi a rete

E' proposto l'utilizzo di una Misura differenziale del secondo ordine definita per l'Analisi di Importanza degli elementi di un Sistema a rete, in accordo a quanto riportato nel §2.2.6.

Al fine di riferire l'Importanza di una Connessione al Sistema a rete nel suo complesso, la misura è definita a partire dal

Rischio complessivo, definito dalla eq.(6.9):  $R = \sum_{i=1}^{Nn} R^i = \sum_{i=1}^{Nn} w_i U^i(\dots, U_j, \dots)$ .

Dallo sviluppo in Serie di Taylor (2.18) dei Rischi parziali  $\mathfrak{R}^{Nc} \rightarrow \mathfrak{R}^{Nn}$  rispetto alla Indisponibilità di componenti, troncato al secondo ordine, si ottiene:

$${}^{\text{II}}\Delta R^i = w_i \cdot \left[ \sum_{j=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) + \sum_{j=1}^{Nc} \sum_{k=j}^{Nc} \left( \frac{\partial^2 U^i}{\partial U_j \partial U_k} \cdot \Delta U_j \cdot \Delta U_k \right) \right]. \quad (6.31)$$

Dallo sviluppo in Serie di Taylor (2.18) del Rischio complessivo  $\mathfrak{R}^{Nc} \rightarrow \mathfrak{R}$  rispetto alla Indisponibilità di componenti, troncato al secondo ordine, si ottiene:

$${}^{\text{II}}\Delta R = \sum_{i=1}^{Nn} w_i \cdot \left[ \sum_{j=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) + \sum_{j=1}^{Nc} \sum_{k=j}^{Nc} \left( \frac{\partial^2 U^i}{\partial U_j \partial U_k} \cdot \Delta U_j \cdot \Delta U_k \right) \right] \quad (6.32)$$

In accordo alla eq.(2.24), il  ${}^{\text{II}}DIM$  della coppia di Connessioni j e k riferito ai Rischi parziali è definito:

$${}^{\text{II}}DIM_{jk}^i = \frac{w_i}{{}^{\text{II}}\Delta R} \cdot \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j + \frac{\partial U^i}{\partial U_k} \Delta U_k + \frac{\partial^2 U^i}{\partial U_j \partial U_k} \Delta U_j \cdot \Delta U_k \right) \quad (6.33)$$

Il  ${}^{\text{II}}DIM_{jk}$  espresso dalla eq. (6.33) costituisce una generalizzazione del  ${}^{\text{I}}DIM_{jk}$  espresso dalla eq. (6.23), in quanto include il contributo associato alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità delle due Connessioni.

Con riferimento ad uno specifico nodo Utilizzatore, è possibile isolare il contributo al  ${}^{\text{II}}DIM_{jk}$  associato alla variazione singola dell'Indisponibilità di ciascuna Connessione (6.34) ed il contributo associato alla variazione contemporanea con ciascuna delle restanti Connessioni (6.35). Si ottiene:

$$\boxed{{}^{\text{II}-1}DIM_j^i = \frac{w_i}{{}^{\text{II}}\Delta R} \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j} \quad (6.34)$$

$$\boxed{{}^{\text{II}-2}DIM_{jk}^i = \frac{w_i}{{}^{\text{II}}\Delta R} \cdot \frac{\partial^2 U^i}{\partial U_j \partial U_k} \cdot \Delta U_j \cdot \Delta U_k} \quad (6.35)$$

Le valutazioni riportate nel §2.2.6, riferite alle derivate parziali del secondo ordine, possono essere riferite al  ${}^{\text{II}-2}DIM_{jk}$  in quanto l'approssimazione del secondo ordine della variazione totale del Rischio complessivo espresso dalla eq. (6.32) è sempre maggiore di 0 ( ${}^{\text{II}}\Delta R > 0$ ), essendo il Sistema coerente.

Pertanto, il  ${}^{\text{II}-2}DIM_{jk}^i$  fornisce informazioni sulle interazioni esistenti tra le due Connessioni j e k nel permettere il raggiungimento del nodo Utilizzatore i.

In particolare, Il segno della misura fornisce informazioni sulle relazioni logiche AND / OR tra le Connessioni j e k; risulta:

- ${}^{II-2}DIM_{jk}^i \geq 0$  se non è richiesto il funzionamento contemporaneo di entrambe le Connessioni j e k per assicurare la raggiungibilità del nodo i (logica di tipo AND);
- ${}^{II-2}DIM_{jk}^i \leq 0$  se non è richiesto il guasto contemporaneo di entrambe le Connessioni j e k per determinare la non raggiungibilità del nodo i (logica di tipo OR).

In accordo alla eq. (6.33), il  ${}^{II}DIM$  della coppia di Connessioni j e k rispetto al Rischio parziale associato al nodo utilizzatore risulta:

$${}^{II}DIM_{jk}^i = {}^{II-1}DIM_j^i + {}^{II-1}DIM_k^i + {}^{II-2}DIM_{jk}^i. \quad (6.36)$$

In accordo a quanto riportato nel §2.2.6, tale misura non risulta additiva rispetto a diverse coppie di Connessioni.

L'aver definito la misura con riferimento al Rischio complessivo associato al Sistema ne preserva l'additività rispetto ai singoli nodi Utilizzatori. Ne consegue che il  ${}^{II}DIM$  della coppia di Connessioni j e k rispetto al Rischio complessivo associato al Sistema è pari alla somma dei valori della misura riferita ai Rischi parziali:

$${}^{II}DIM_{jk} = \sum_{i=1}^{Nn} {}^{II}DIM_{jk}^i. \quad (6.37)$$

Anche per il  ${}^{II}DIM$  riferito al Rischio complessivo è possibile isolare i contributi del primo e secondo ordine:

$$\begin{aligned} {}^{II}DIM_{jk} &= {}^{II-1}DIM_j + {}^{II-1}DIM_k + {}^{II-2}DIM_{jk} = \sum_{i=1}^n {}^{II-1}DIM_j^i + \sum_{i=1}^n {}^{II-1}DIM_k^i + \sum_{i=1}^n {}^{II-2}DIM_{jk}^i \\ &= \frac{1}{{}^{II}\Delta R} \cdot \sum_{i=1}^{Nn} \left( w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) + \frac{1}{{}^{II}\Delta R} \cdot \sum_{i=1}^{Nn} \left( w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_k} \cdot \Delta U_k \right) + \frac{1}{{}^{II}\Delta R} \cdot \sum_{i=1}^{Nn} \left( w_i \cdot \frac{\partial^2 U^i}{\partial U_j \partial U_k} \cdot \Delta U_j \cdot \Delta U_k \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

In accordo alla eq. (6.9), il Rischio complessivo è definito come somma dei Rischi parziali; tale assunzione permette di non introdurre interazioni tra le variabili (cioè termini in cui compare il prodotto tra le variabili nella espressione analitica della Funzione di Sistema) aggiuntive a quelle che sussistono rispetto a ciascun nodo Utilizzatore.

Il  ${}^{II-2}DIM_{jk}$  misura l'Importanza della variazione contemporanea delle Connessioni j e k rispetto al Rischio

complessivo, come somma dei contributi riferiti ai singoli Rischi parziali  $\left( {}^{II-2}DIM_{jk} = \sum_{i=1}^n {}^{II-2}DIM_{jk}^i \right)$ ; in tal caso:

- ${}^{II-2}DIM_{jk} = \sum_{i=1}^n {}^{II-2}DIM_{jk}^i \geq 0$  se sono "prevalenti" le relazioni logiche di tipo AND tra le Connessioni j e k;
- ${}^{II-2}DIM_{jk} = \sum_{i=1}^n {}^{II-2}DIM_{jk}^i \leq 0$  se sono "prevalenti" le relazioni logiche di tipo OR tra le Connessioni j e k.

A partire dalle eq. (6.34) e (6.35) è possibile riferire la misura differenziale del secondo ordine ad una singola Connessione. Il  ${}^{II}DIM$  della Connessione j riferito ai Rischi parziali associati al Sistema risulta:

$$\boxed{{}^{II}DIM_j^i = {}^{II-1}DIM_j^i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{Nc} {}^{II-2}DIM_{jk}^i} \quad (6.39)$$

Procedendo in modo analogo rispetto al Rischio complessivo associato al Sistema a rete risulta:

$$\begin{aligned} {}^{\text{II}} DIM_j &= {}^{\text{II}-1} DIM_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_c} {}^{\text{II}-2} DIM_{jk} = \\ &= \frac{1}{{}^{\text{II}} \Delta R} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} w_i \cdot \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) + \frac{1}{{}^{\text{II}} \Delta R} \cdot \sum_{i=1}^{N_n} w_i \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_c} \left( \frac{\partial^2 U^i}{\partial U_j \partial U_k} \cdot \Delta U_j \cdot \Delta U_k \right) \end{aligned} \quad (6.40)$$

In generale, risulta  ${}^{\text{II}-1} DIM_j \neq {}^{\text{I}} DIM_j$  in quanto le misure hanno diverso denominatore: approssimazione del primo  ${}^{\text{I}} \Delta U$  e del secondo  ${}^{\text{II}} \Delta U$  ordine della variazione totale del Rischio complessivo.

Il  ${}^{\text{II}} DIM_j$  espresso dalle eq. (6.39) e (6.40) costituisce una generalizzazione del  ${}^{\text{I}} DIM_j$  espresso dalle eq. (6.22) e (6.25) in quanto, oltre al contributo della variazione singola dell'Indisponibilità di ciascuna Connessione (6.27), include il contributo associato alla variazione contemporanea con ciascuna delle restanti Connessioni.

Nella definizione e nella stima del  ${}^{\text{II}} DIM$  non è possibile prescindere dalla definizione degli incrementi  $\Delta U_j$  e  $\Delta U_k$ .

Anche introducendo l'ipotesi di Incrementi uniformi  $\Delta U_j = \Delta U_k = \Delta \quad \forall j, k$ , occorre definire il valore dell'incremento  $\Delta$  che stabilisce il peso dei contributi di primo e secondo ordine.

#### Stima del ${}^{\text{II}} DIM$ per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete

Per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete si assume uno stesso valore di Indisponibilità (asintotica) per tutte le Connessioni del Sistema  $U_i = U_j = 0,5 \quad \forall i, j$ . In tal caso, il  ${}^{\text{II}} DIM$  può essere valutato mediante un opportuno "conteggio" degli stati del Sistema, senza la conoscenza analitica delle Funzioni del Sistema e senza l'adozione di metodi di simulazione o tecniche numeriche specifiche. Introduciamo inoltre l'ipotesi  $\Delta U_j = \Delta U_k = \Delta \quad \forall j, k$ .

Dallo sviluppo in Serie di Taylor (2.18) del Rischio complessivo  $\mathfrak{R}^{N_c} \rightarrow \mathfrak{R}$  rispetto alla Indisponibilità di componenti, troncato al secondo ordine, e dalle eq. (6.17) e (6.18) risulta:

$${}^{\text{II}} \Delta R = \frac{1}{2^{N_c-1}} \cdot \sum_j^{N_c} (N_j^+ - N_j^-) \cdot \Delta + \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{k=j}^{N_c} 2 \cdot (N_{jk}^{++} + N_{jk}^{--} - N_{jk}^{+-} - N_{jk}^{-+}) \cdot \Delta \cdot \Delta \quad (6.41)$$

Il  ${}^{\text{II}} DIM$  della coppia di Connessioni j e k rispetto al Rischio complessivo può essere stimato mediante l'espressione:

$${}^{\text{II}} DIM_{jk} = \frac{1}{{}^{\text{II}} \Delta R} \cdot \left[ (N_j^+ - N_j^-) \cdot \Delta + (N_k^+ - N_k^-) \cdot \Delta + 2 \cdot (N_{jk}^{++} + N_{jk}^{--} - N_{jk}^{+-} - N_{jk}^{-+}) \cdot \Delta \cdot \Delta \right] \quad (6.42)$$

Il  ${}^{\text{II}} DIM$  della Connessione j rispetto al Rischio complessivo può essere stimato mediante l'espressione:

$${}^{\text{II}} DIM_j = \frac{1}{{}^{\text{II}} \Delta R} \cdot \left[ (N_j^+ - N_j^-) \cdot \Delta + 2 \cdot \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_c} (N_{jk}^{++} + N_{jk}^{--} - N_{jk}^{+-} - N_{jk}^{-+}) \cdot \Delta \cdot \Delta \right] \quad (6.43)$$

Le espressioni possono essere utilizzate per valutare il  ${}^{\text{II}} DIM$  riferito ai Rischi parziali, assumendo  $N_s = 1$  se il nodo non è raggiungibile,  $N_s = 0$  altrimenti ( $N_s = x^{is}$ ) nelle definizioni di  $N^+, N^-, N^{++}, N^{--}, N^{+-}, N^{-+}$  fornite nel §6.4.

### 6.5.3 Misura Differenziale di Importanza totale

#### Definizione del ${}^T D$ per l'analisi di Sistemi a rete

E' proposto l'utilizzo della Misura Differenziale totale definita nel §2.2.6 per l'analisi di Importanza degli elementi di un Sistema a rete.

Al fine di riferire l'Importanza di una Connessione al Sistema a rete nel suo complesso, occorre stimare la misura

riferendola al Rischio complessivo, definito dalla eq. (6.9):  $R = \sum_{i=1}^{Nn} R^i = \sum_{i=1}^{Nn} w_i U^i(\dots, U_j, \dots)$ .

Dallo sviluppo in Serie di Taylor (2.18) del Rischio complessivo  $\mathfrak{R}^{Nc} \rightarrow \mathfrak{R}$  rispetto alla Indisponibilità di componenti, troncato all'ordine k, si ottiene:

$${}^T \Delta R \approx \sum_{i=1}^{Nn} w_i \cdot \left[ \sum_l^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_l} \cdot \Delta U_l \right) + \sum_{k=2}^m \sum_{l < \dots < k} \left( \frac{\partial^k U^i}{\partial U_l \cdot \dots \cdot \partial U_k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right) \right] \quad \text{dove} \quad \sum_{l < \dots < k} \dots = \sum_{l=1}^n \sum_{i=j}^n \dots \sum_{m=\dots}^n \sum_{k=m}^n \dots \quad (6.44)$$

Consideriamo la Misura Differenziale totale della Connessione j. Con riferimento ad uno specifico nodo Utilizzatore, isoliamo il contributo associato alla variazione singola dell'Indisponibilità della Connessione (6.45) dal contributo associato alla variazione contemporanea con le restanti Connessioni, in qualsiasi combinazione e numero (6.46):

$$\boxed{{}^{T-1} D_j^i = \frac{w_i}{{}^T \Delta R} \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j} \quad (6.45)$$

$$\boxed{{}^{T-tot} D_j^i = \frac{w_i}{{}^T \Delta R} \cdot \sum_{k=2}^m \sum_{\substack{l < \dots < k \\ j \in l, \dots, k}} \left( \frac{\partial^k U^i}{\partial U_l \cdot \dots \cdot \partial U_k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right)} \quad (6.46)$$

In accordo alla eq. (2.29), il  ${}^T D_j$  Connessione j riferito ai Rischi parziali associati al Sistema risulta:

$$\boxed{{}^T D_j^i = {}^{T-1} D_j^i + {}^{T-tot} D_j^i} \quad (6.47)$$

L'aver definito la misura con riferimento al Rischio complessivo associato al Sistema ne preserva l'additività rispetto ai singoli nodi Utilizzatori. Infatti, con riferimento al Rischio complessivo associato al Sistema a rete risulta:

$$\boxed{{}^T D_j = {}^{T-1} D_j + {}^{T-tot} D_j = \sum_{i=1}^{Nn} \left( \frac{w_i}{{}^T \Delta R} \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \Delta U_j \right) + \sum_{i=1}^{Nn} \frac{w_i}{{}^T \Delta R} \cdot \sum_{k=2}^m \sum_{\substack{l < \dots < k \\ j \in l, \dots, k}} \left( \frac{\partial^k U^i}{\partial U_l \cdot \dots \cdot \partial U_k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right) = \sum_{i=1}^{Nn} {}^T D_j^i} \quad (6.48)$$

La Misura Differenziale totale definita dalla eq. (6.47) non è additiva rispetto alle Connessioni del Sistema; risulta infatti:

$${}^T D_{jh}^i = {}^{T-1} D_j^i + {}^{T-1} D_h^i + \sum_{i=1}^{Nn} \frac{w_i}{{}^T \Delta R} \cdot \sum_{k=2}^m \sum_{\substack{l < \dots < k \\ j \in l, \dots, k \\ h \in l, \dots, k}} \left( \frac{\partial^k U^i}{\partial U_l \cdot \dots \cdot \partial U_k} \cdot \prod_{s=1}^k \Delta U_s \right) \neq {}^T D_j^i + {}^T D_h^i \quad (6.49)$$

La Misura Differenziale totale non può quindi essere utilizzata per realizzare un ordinamento di Importanza dei nodi Utilizzatori del Sistema a rete.

### Stima del ${}^T D$ per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete

In accordo a quanto riportato nel §2.2.6, è possibile stimare la Misura Differenziale totale mediante  $N + 2$  valutazioni del modello, operando una "variazione finita" dell'Indisponibilità delle Connessioni:  $(U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0) \rightarrow (U_1, \dots, U_j, \dots, U_n)$ .

La Misura Differenziale di Importanza totale di una Connessione, riferita ai Rischi parziali può essere stimata mediante la seguente espressione:

$${}^T D_j^i = \frac{R^i(U_1, \dots, U_j, \dots, U_n) - R^i(U_1, \dots, U_j^0, \dots, U_n)}{R(U_1, \dots, U_j, \dots, U_n) - R(U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0)} \quad (6.50)$$

La Misura Differenziale di Importanza totale della Connessione riferita al Rischio complessivo risulta:

$${}^T D_j = \frac{R(U_1, \dots, U_j, \dots, U_n) - R(U_1, \dots, U_j^0, \dots, U_n)}{R(U_1, \dots, U_j, \dots, U_n) - R(U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0)} = \sum_{i=1}^{N_n} {}^T D_j^i \quad (6.51)$$

Per l'analisi della struttura di un Sistema a rete interessa valutare la Misura Differenziale totale per ciascuna Connessione, con riferimento ai Rischi parziali ed al Rischio complessivo associati al Sistema a rete. In particolare, la Struttura della rete può essere indagata valutando l'andamento del  ${}^T D$ :

- al variare di  $U_j^0$ , valore iniziale dell'Indisponibilità (comune) assunta per le Connessioni;
- al variare dell'incremento  $\Delta = U_j - U_j^0$ .

L'analisi dell'andamento del  ${}^T D$  al variare di  $\Delta$  permette di valutare il contributo dei termini di interazione, associati alla variazione contemporanea di tutte le variabili.

Per  $\Delta \rightarrow 1$  è massimo il contributo dei termini di ordine superiore al primo; il  ${}^T D$  e il  ${}^I DIM$  hanno un differente contenuto informativo e possono produrre un diverso ordinamento degli elementi del sistema. Tale condizione costituisce il riferimento da assumere quando interessa valutare l'effetto di variabili "esogene" al modello, che rappresentano motivo di variazione contemporanea delle variabili interne. Nello sviluppo di un Security Assessment, l'intenzionalità dell'atto rende meno attendibile l'ipotesi di indipendenza tra i guasti degli elementi; in tal caso, è utile riferirsi alla Misura Differenziale totale, che considera il contributo della variazione contemporanea delle probabilità degli eventi base.

Per  $\Delta \rightarrow 0$  il  ${}^I DIM$  e il  ${}^T D$  coincidono.

Le informazioni fornite dalle due misure di Importanza hanno validità "locale" ma possono essere valutate per diversi valori  $U_j^0$  sul relativo intervallo di variazione. La procedura di stima della Misura Differenziale di Importanza totale permette di valutarne agevolmente l'andamento al variare di  $U_j^0$ . Risultano significativi i seguenti casi limite.

Per  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 0$ , il  ${}^I DIM \equiv {}^T D$  permette di identificare ed ordinare in relazione al contributo al Rischio complessivo le Connessioni che costituiscono un (minimal) Cut-set di ordine uno per almeno un nodo Utilizzatore del Sistema a rete; la misura è diversa da 0 se la Connessione è tale da determinare la non raggiungibilità di almeno un nodo Utilizzatore, nel caso in cui sia l'unica indisponibile. Per un Sistema a rete complesso, costituito da un elevato numero di elementi e fortemente magliato, sono ritenute critiche ed ordinate in termini di contributo al Rischio complessivo le Connessioni dirette verso un nodo Utilizzatore privo di ulteriori Connessioni in ingresso. L'ordinamento indotto sui nodi Utilizzatori segue il medesimo criterio: sono ritenuti critici ed ordinati in relazione al contributo al Rischio complessivo i nodi Utilizzatori caratterizzati da una unica Connessione entrante. Tale ordinamento è tipicamente da considerare in relazione a eventi ritenuti poco probabili, come in ambito RAM.

Per  $U_j^0 \rightarrow 1$  e  $\Delta \rightarrow 0$  ovvero per  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 1$ , il  ${}^l DIM \equiv {}^l D$  permette di identificare ed ordinare in relazione al contributo al Rischio complessivo le Connessioni che costituiscono (minimal) Path-set di ordine uno per almeno un nodo Utilizzatore; la misura è diversa da 0 se la Connessione è tale da garantire la raggiungibilità di almeno un nodo Utilizzatore nel caso in cui sia l'unica disponibile. Per un Sistema a rete complesso sono ritenuti critici ed ordinati in termini di contributo al Rischio complessivo le Connessioni in uscita dai nodi Sorgente. L'ordinamento indotto sui nodi Utilizzatori segue il medesimo criterio: sono ritenuti critici ed ordinati in relazione al contributo al Rischio complessivo i nodi Utilizzatori direttamente connessi con un nodo Sorgente. Con riferimento ai campi di applicazione di interesse, tale ordinamento è tipicamente da considerare nello sviluppo di un Security Assessment, dove le valutazioni sono riferite alle probabilità (condizionate) di successo di un atto di sabotaggio.

Assumendo  $U_j^0 \rightarrow 0$ , l'andamento di  ${}^T D_j$  al variare di  $\Delta$  sull'intervallo di variazione [0;1] fornisce informazioni sulle relazioni logiche (AND / OR) che interessano la Connessione  $j$ , in combinazione con le restanti Connessioni in qualsiasi combinazione e numero. All'aumentare di  $\Delta$ , ovvero all'aumentare di termini di ordine superiore al primo:

- se  ${}^T D_j$  aumenta in modo monotono sono "prevalenti" le relazioni logiche di tipo AND tra le Connessioni  $j$  e  $k$ ;
- se  ${}^T D_j$  diminuisce in modo monotono sono "prevalenti" le relazioni logiche di tipo OR tra le Connessioni  $j$  e  $k$ .

Gli andamenti delle misure  ${}^T D_j$  possono determinare inversioni nell'ordinamento delle Connessioni del Sistema a rete, per differenti valori della variazione finita  $\Delta$  considerata.

Se la Connessione non costituisce né un (minimal) Path-set né un (minimal) Cut-set per almeno un nodo Utilizzatore, la misura  ${}^T D_j$  assume un valore nullo nelle condizioni limite  $\Delta \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 1$  ed un valore massimo per una certa variazione finita  $\Delta$ , come risultato del contributo delle relazioni AND /OR con le restanti Connessioni.

## 6.6 Misura Ibrida di Sensitività per l'analisi di Sistemi a rete

### Definizione della Misura Ibrida per l'analisi di Sistemi a rete

E' proposto l'utilizzo di una Misura Ibrida per un ordinamento con significato di "Sensitività" degli elementi di un Sistema a rete, consistente con un approccio di Decomposizione della varianza, nei termini descritti nel §3.3.1 [40]. La Misura Ibrida è una misura OAT definita mediante Metodi analitici approssimati in accordo a quanto riportato nel §3.2.2 e nel §3.2.3.

Al fine di riferire l'Importanza di una Connessione al Sistema a rete nel suo complesso, occorre stimare la Misura Ibrida di

Sensitività a partire dal Rischio complessivo, definito dalla eq. (6.9):  $R = \sum_{i=1}^{Nn} R^i = \sum_{i=1}^{Nn} w_i U^i(\dots, U_j, \dots)$ . Inoltre,

è necessario considerare le correlazioni esistenti tra i Rischi parziali, introdotte dalla Struttura della rete.

Consideriamo lo sviluppo in Serie di Taylor del Rischio complessivo  $R: \mathfrak{R}^{Nc} \rightarrow \mathfrak{R}^{Nn} \rightarrow \mathfrak{R}$  rispetto alla Indisponibilità dei nodi (probabilità che il nodo non sia raggiungibile), troncato al primo ordine. Dalla eq. (3.9), la varianza associata al Rischio complessivo rispetto alla Indisponibilità dei nodi risulta:

$$\begin{aligned} Var[R] &\approx \sum_{i=1}^{Nn} \sum_{l=1}^{Nn} \left( \frac{\partial R}{\partial U^i} \cdot \frac{\partial R}{\partial U^l} \cdot \sigma_{il} \right) = \sum_{i=1}^{Nn} \sum_{k=1}^{Nn} (w_i \cdot w_l \cdot \sigma_{il}) \\ &= \sum_{i=1}^{Nn} \left[ w_i^2 \cdot Var[U^i] + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} (w_i \cdot w_l \cdot Cov[U^i, U^l]) \right] \end{aligned} \quad (6.52)$$

La varianza associata alla Indisponibilità di uno dei nodi Utilizzatori rispetto alla Indisponibilità delle Connessioni risulta:

$$Var[U^i] \approx \sum_{j=1}^{Nc} \sum_{k=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_k} \cdot \sigma_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{Nc} \left[ \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \right)^2 \cdot Var[U_j] \right] \quad (6.53)$$

La covarianza associata alla Indisponibilità di una coppia di nodi Utilizzatori alla Indisponibilità delle Connessioni risulta:

$$Cov[U^i, U^l] \approx \sum_{j=1}^{Nc} \sum_{k=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_k} \cdot \sigma_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \cdot Var[U_j] \right) \quad (6.54)$$

Introducendo le eq. (6.53) e (6.54) nella eq. (6.52) si ottiene la seguente espressione per la varianza associata al Rischio complessivo del Sistema a rete:

$$Var[R] \approx \sum_{i=1}^{Nn} w_i \cdot \sum_{j=1}^{Nc} \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \cdot Var[U_j] \quad (6.55)$$

Dalla eq. (6.55) risulta il contributo alla varianza associata al Rischio complessivo:

- della Connessione j, mediante tutti i nodi Utilizzatori

$${}_j Var[R] \approx \sum_{i=1}^{Nn} w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \cdot Var[U_j] \quad (6.56)$$

- della Connessione j, mediante il nodo Utilizzatore i

$${}_j^i Var[R] \approx w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \cdot Var[U_j] \quad (6.57)$$

- di tutte le Connessioni, mediante il nodo Utilizzatore i

$${}^i Var[R] = w_i \cdot \sum_{j=1}^{Nc} \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \cdot Var[U_j] \quad (6.58)$$

La varianza associata al Rischio complessivo può essere espressa:

- come somma dei contributi di ciascuna Connessione, mediante tutti i nodi Utilizzatori  $Var[R] = \sum_{j=1}^{Nc} {}_j Var[R]$ ;
- come somma dei contributi di ciascuna Connessione, mediante ciascun nodo Utilizzatore  $Var[R] = \sum_{i=1}^{Nn} \sum_{j=1}^{Nc} {}_j^i Var[R]$ ;
- come somma dei contributi di tutte le Connessioni, mediante ciascun nodo Utilizzatore  $Var[R] = \sum_{i=1}^{Nn} {}^i Var[R]$ .

In accordo alla eq. (3.12) che fornisce la definizione generale, la Misura Ibrida per la Connessione j rispetto al Rischio complessivo è definita come:

$$I_j = \frac{{}_j Var[R]}{Var[R]} = \frac{Var[U_j]}{Var[R]} \cdot \sum_{i=1}^{Nn} w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] = \sum_{i=1}^{Nn} I_j^i \quad (6.59)$$

La Misura Ibrida per la Connessione j riferita al nodo Utilizzatore i è definita come:

$$I_j^i = \frac{{}^i\text{Var}[R]}{\text{Var}[R]} = \frac{\text{Var}[U_j]}{\text{Var}[R]} \cdot w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_i \cdot w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \quad (6.60)$$

La Misura Ibrida per il nodo Utilizzatore i è definita come

$$I^i = \frac{{}^i\text{Var}[R]}{\text{Var}[R]} = \frac{1}{\text{Var}[R]} \cdot w_i \cdot \sum_{j=1}^{Nc} \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ w_i \cdot \frac{\partial U^i}{\partial U_j} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{Nn} \left( w_i \cdot w_l \cdot \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \cdot \text{Var}[U_j] = \sum_{j=1}^{Nc} I_j^i \quad (6.61)$$

L'eq. (6.59) esprime la frazione della varianza associata al Rischio complessivo dovuta alla sola Connessione j , mediante tutti i nodi Utilizzatori. L'eq. (6.60) esprime la frazione della varianza associata al Rischio complessivo alla sola Connessione j mediante il solo nodo Utilizzatore i. L'eq. (6.61) esprime la frazione della varianza associata al Rischio complessivo dovuta a tutte le Connessioni mediante il solo nodo Utilizzatore i.

In accordo a quanto riportato nel §3.2.3, sulla base delle eq. (6.59), (6.60) e (6.61) , risulta  $\sum_{i=1}^{Nn} \sum_{j=1}^{Nc} I_j^i = 1$ . La Misura Ibrida, infatti, è definita a partire da una approssimazione del primo ordine del Rischio complessivo.

#### Stima della Misura Ibrida per l'analisi della Struttura di Sistemi a rete

Come riportato nel §6.4, al fine di indagare la Struttura del Sistema a rete a è assegnato un peso unitario ciascun nodo Utilizzatore  $w_i = 1 \quad \forall i$ ; l'eq. (6.55) che esprime la varianza associata al Rischio complessivo assume la forma:

$$\text{Var}[R] \approx \sum_{i=1}^{Nn} \sum_{j=1}^{Nc} \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \sum_{l=1}^{Nn} \left( \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \cdot \text{Var}[U_j] \quad (6.62)$$

E' interessante confrontare l'eq. (6.62) con la seguente espressione che esprime la varianza associata al Rischio complessivo se si ipotizzasse erroneamente che le Indisponibilità dei nodi Utilizzatori (ovvero i Rischi parziali) siano tra loro indipendenti

$$\text{Var}[R] \approx \sum_{i=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Nn} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \right)^2 \cdot \text{Var}[U_j] \quad (6.63)$$

La stima della Misura Ibrida di Sensitività può essere effettuata:

- analiticamente, a partire della conoscenza delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni, utilizzando le eq. (6.59), (6.60) , (6.61) e (6.62) che la definiscono;
- analiticamente, come propagazione OAT delle incertezze associate alle variabili di ingresso del modello, mediante l'eq (3.10) che esprime la "Legge di propagazione degli errori", utilizzando la definizione della Misura come rapporto tra stime della varianza associata al Rischio complessivo;
- mediante Tecniche di campionamento, in particolare mediante  $Nc$  Simulazioni OAT in cui è associata una incertezza (fittizia) alla indisponibilità di ciascuna Connessione, utilizzando la definizione della Misura come rapporto tra stime della varianza associata al Rischio complessivo.

Nei primi due casi è richiesta la conoscenza della Matrice Jacobiana della Funzione di Sistema  $\mathfrak{R}^5 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  ovvero delle derivate parziali del primo ordine dei Rischi parziali rispetto alla indisponibilità dei componenti.

Come riportato nel §6.4, l'analisi della Struttura del Sistema a rete è realizzata assumendo la medesima distribuzione di probabilità per la rappresentazione dell'incertezza associata alle diverse Connessioni  $Var[U_j] = Var[U_k] \quad \forall j, k$ . In tal caso, dall'espressione della varianza associata al Rischio complessivo espressa dalla (6.55), l'eq. (6.62) assume la forma:

$$I_j^i = \frac{{}^i Var[R]}{Var[R]} = \frac{\frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left( \sum_{l=1}^{N_n} \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right)}{\sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_c} \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \sum_{l=1}^{N_n} \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right)} \quad (6.64)$$

E' interessante confrontare l'eq. (6.64) con l'eq. (6.22) che esprime il  ${}^i DIM_j^i$  assumendo  $w_i = 1 \quad \forall i$ .

Per l'analisi della Struttura del Sistema, assumendo  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , le derivate parziali che compaiono nell'eq. (6.64) possono essere stimate mediante le eq. (6.17) operando un "conteggio" degli stati del sistema.

Più in generale, la conoscenza delle derivate parziali necessarie per la stima della Misura Differenziale di importanza del primo ordine, definita nel §6.5.1 per l'analisi di Sistemi a rete, permette la stima della Misura Ibrida  $I_j^i$  che, quindi, non richiede alcuno sforzo computazionale aggiuntivo.

Dalla eq. (6.64) si stima la Misura Ibrida per ciascuna Connessione  $I_j = \sum_{i=1}^{N_n} I_j^i$  e nodo Utilizzatore  $I^i = \sum_{j=1}^{N_c} I_j^i$ , rispetto al Rischio complessivo associato al Sistema a rete.

### Possibili generalizzazioni della Misura Ibrida

E' possibile definire alcune generalizzazioni della Misura Ibrida, che indichiamo con  ${}^* I_j^i$  e  ${}^- I_j^i$ . Tali misure forniscono una stima degli Indici di sensitività  $S_j$  e  $S_{Tj}$  definiti nel §3.3.3, utilizzati per lo sviluppo di una analisi "Globale" di Incertezza. La valutazione delle Misure  ${}^* I_j^i$  e  ${}^- I_j^i$  è effettuata mediante l'utilizzo di Tecniche di campionamento.

Se la stima della Misura Ibrida  $I_j^i$  è realizzata analiticamente, a partire delle derivate parziali del primo ordine dei Rischi parziali rispetto alla indisponibilità dei componenti, già necessarie per la stima della Misura Differenziale di importanza, sono complessivamente richieste  $N_c + 1$  simulazioni. In tal caso, la stima della Misura Ibrida rappresenta una validità opportunità per una indagine preliminare in cui sono identificati gli elementi del Sistema a cui riferire una successiva analisi Globale di Incertezza.

Altrimenti, la stima della Misura Ibrida  $I_j^i$  richiede ulteriori  $N_c$  Simulazioni. Complessivamente, è necessario realizzare  $2 \cdot N_c + 1$  simulazioni per la stima delle Misure  $I_j^i$ ,  ${}^* I_j^i$  e  ${}^- I_j^i$ . Lo stesso numero di simulazioni è richiesto per la procedura di stima degli Indici di sensitività descritta nel §3.3.4. Effettuando una "esplorazione" limitata nel dominio delle variabili, la stima delle Misure  $I_j^i$ ,  ${}^* I_j^i$  e  ${}^- I_j^i$  richiede un numero inferiore di campionamenti per ciascuna simulazione, a scapito del contenuto informativo; anche in tal caso, la Misura Ibrida può essere utilizzata per una indagine preliminare.

Misura ibrida  $^*I_j^i$ 

Mediante l'utilizzo di Tecniche di campionamento in accordo a quanto riportato nel §6.2.3, è realizzata una simulazione in cui può variare contemporaneamente l'Indisponibilità di tutte le Connessioni del Sistema a rete. In tal modo, è realizzata una stima della varianza associata al Rischio complessivo che tiene conto delle interazioni tra le variabili. Utilizzando tale stima al posto della sua approssimazione del primo ordine espressa eq. (6.55), l'eq. (6.60) definisce una diversa Misura Ibrida, indicata con  $^*I_j^i$ . In accordo a quanto riportato nel §3.2.3 e nel §3.3.3, la Misura Ibrida  $^*I_j^i$  coincide con l'Indice di sensitività principale  $S_j$  definito della eq. (3.20).

Essendo  $\sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_c} ^*I_j^i < 1$  la misura Ibrida non è utilizzata per definire un ordinamento dei nodi Utilizzatori.

La differenza  $1 - \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_c} ^*I_j^i$  misura il contributo alla varianza associata al Rischio complessivo del Sistema a rete dovuto alle interazioni tra le variabili (Indisponibilità delle Connessioni), che si manifestano per la loro variazione contemporanea, in qualsiasi combinazione e numero.

Misura ibrida  $\bar{I}_j$ 

L'utilizzo di Tecniche di campionamento in accordo a quanto riportato nel §6.2.3, permette di definire una diversa Misura Ibrida, indicata con  $\bar{I}_j$ , che fornisce una stima approssimata dell'Indice di Sensitività globale  $S_{Tj}$  definito nel §3.3.3, utile ai fini dell'analisi della Struttura di Sistemi a rete.

Dall'eq. (3.21), l'Indice di Sensitività globale rappresenta il complemento a 1 del contributo alla varianza totale associata alla variabile di uscita dovuto alla variazione di tutte le variabili di ingresso del modello, in qualsiasi combinazione e numero, tranne la variabile a cui è riferita la misura.

Al fine di stimare la Misura Ibrida  $\bar{I}_j$  sono realizzate  $N_c$  simulazioni OAT-; in ciascuna simulazione, l'Indisponibilità di una Connessione è mantenuta fissa al suo valore nominale, mentre alle restanti Connessioni è associata una incertezza rappresentata da una (comune) distribuzione di probabilità. Dalla l'eq. (6.60), la Misura Ibrida  $\bar{I}_j$  è valutata come rapporto tra la varianza associata al Rischio complessivo stimata in ciascuna simulazione OAT- e la varianza totale, stimata tenendo conto delle interazioni tra tutte le variabili.

Rispetto alla procedura di stima dell'Indice di Sensitività globale  $S_{Tj}$  descritta nel §3.3.4, la Misura Ibrida  $\bar{I}_j$  è valutata per il solo valore  $U_j = 0,5$  di interesse per l'analisi della Struttura del Sistema a rete;  $\bar{I}_j$  fornisce, in tal senso, una stima approssimata di  $S_{Tj}$ .

Per l'analogia con gli Indici di Sensitività, la quantità  $\bar{I}_j - ^*I_j^i$  fornisce una stima approssimata del contributo alla varianza associata al Rischio complessivo dovuto alle interazioni tra la Connessione j e le restanti Connessioni del Sistema a rete, in qualsiasi combinazione e numero.

## 7 CASO APPLICATIVO

Nel presente capitolo è mostrata l'applicazione dei metodi e delle tecniche proposte nel §6 per l'analisi di Sistemi a rete.

Consideriamo il Sistema a rete rappresentato in Figura 11, costituito da un nodo sorgente (S) e quattro nodi Utilizzatori connessi mediante 5 Connessioni binarie orientate.

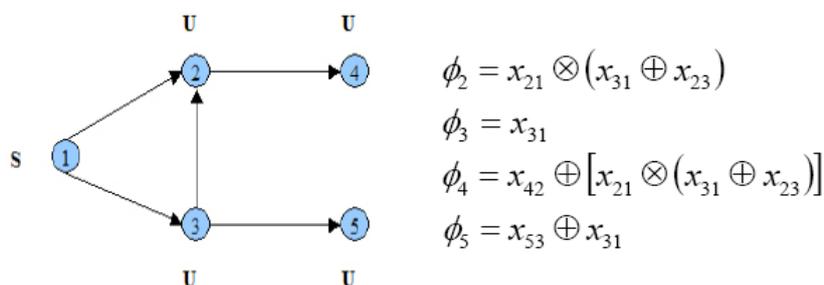


Figura 11: Caso applicativo

Per le Connessioni della rete, soggette a guasto e riparazione, è assunto il modello di Indisponibilità definito nel §2.1.

La rete è caratterizzata da una maglia, realizzata dalle Connessioni 21, 23, 31<sup>10</sup>. La Connessione 23 altera la simmetria della configurazione dei nodi Sorgente e Utilizzatori. Il Sistema è sufficientemente semplice da permettere la valutazione analitica delle Funzioni di Sistema, che esprimono lo stato di ciascun nodo Utilizzatore in termini di raggiungibilità dal nodo Sorgente, mediante relazioni AND  $\otimes$  / OR  $\oplus$  tra lo stato, funzionante o guasto, delle Connessioni.

In accordo a quanto riportato nel §6.4, al fine di indagare la Struttura del Sistema a rete prescindendo dalle caratteristiche specifiche dei suoi elementi, si assume

- un valore unico (comune) di indisponibilità per tutte le Connessioni, inizialmente assunto pari a  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ ;
- un'unica (comune) distribuzione di probabilità, se l'indisponibilità delle Connessioni è affetta da incertezza;
- un peso  $w_i = 1 \quad \forall i$  che rappresenta il danno prodotto dalla non raggiungibilità di un qualsiasi nodo utilizzatore.

Al fine di fornire una visione di insieme, è di seguito riassunto il contenuto dei successivi paragrafi.

### §7.1 - Valutazione dei Rischi parziali e del Rischio complessivo del Sistema

Come caso applicativo è considerato un Sistema a rete sufficientemente semplice da permettere la valutazione analitica delle Funzioni di Sistema e la stima esatta dei Rischi parziali e del Rischio complessivo nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della Struttura di Sistemi a rete.

Come metodologie di analisi che prescindono dalla conoscenza delle Funzioni di Sistema, la stima dei Rischi parziali e del Rischio complessivo associato al Sistema a rete è realizzata mediante Numerazione degli stati del Sistema (nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della Struttura di Sistemi a rete) e mediante simulazioni "tempo-dipendenti" realizzate con metodi MonteCarlo (nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi RAM di Sistemi a rete "reali"), integrati ad un algoritmo ad Automa Cellulare per la "soluzione della rete" ed (eventualmente) a Tecniche di riduzione della varianza.

<sup>10</sup> Notazione: le connessioni (orientate) sono identificate da due numeri, nodo di arrivo - nodo di partenza.

### §7.2 - Caratteristiche della Struttura della rete

La valutazione delle derivate parziali del Rischio complessivo e dei Rischi parziali associati al Sistema a rete, rispetto alla Indisponibilità delle sue Connessioni, permette la stima delle Misure Differenziali di Importanza e della Misura Ibrida di Sensività, successivamente utilizzate per indagarne la struttura.

Assumendo come riferimento la valutazione analitica (esatta) realizzata a partire dalla Funzione di Sistema, è mostrata l'equivalenza di approcci diversi per la stima delle derivate parziali del primo ordine: mediante la Numerazione degli stati del Sistema, mediante la ri-valutazione del modello per una "variazione finita" dei valori assunti dalle variabili di ingresso e mediante l'assegnazione di una incertezza "fittizia" alle variabili e l'utilizzo di tecniche di campionamento e regressione lineare dei dati. La valutazione (esatta) delle derivate parziali del secondo ordine del Rischio complessivo è realizzata mediante la Numerazione degli stati del Sistema.

Lo studio del caso applicativo fornisce l'evidenza che la particolare Struttura della rete determina una dipendenza tra i Rischi parziali del Sistema di cui occorre tener conto in un contesto di analisi di Incertezza e Sensività. La Matrice dei coefficienti di correlazione tra i Rischi parziali, che non dipende dalle variabili di ingresso, fornisce una quantificazione di tali dipendenze e caratterizza la Struttura del Sistema a rete.

### §7.3 - Stima delle misure con significato di "Importanza"

Nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della Struttura del Sistema a rete, si procede alla stima delle Misure Differenziali di Importanza del primo ordine, del secondo ordine e "totale" definite nel §6.6 ed alla discussione dei risultati avuti.

Mediante la Misura Differenziale del primo ordine è realizzato un ordinamento con significato di Importanza delle Connessioni e dei nodi Utilizzatori del Sistema, riferito alla variazione singola delle variabili di ingresso del modello (Indisponibilità delle Connessioni). In tale contesto è fornita l'evidenza della necessità di riferire le Misure di Importanza al Rischio complessivo del Sistema.

L'utilizzo della Misura Differenziale del secondo ordine permette di realizzare un ordinamento con significato di Importanza delle coppie di Connessioni del Sistema.

L'utilizzo della Misura Differenziale totale permette di estendere lo studio alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità delle Connessioni, in qualsiasi combinazione e numero, in modo da tener conto delle interazioni che sussistono tra le variabili. Le valutazioni possono essere riferite a differenti valori dell'Indisponibilità delle Connessioni all'interno dell'intervallo di variazione delle variabili  $[0,1]$  e a differenti valori della variazione finita a cui la misura è riferita. L'ordinamenti degli elementi del Sistema definiti nelle condizioni limite risultano di interesse nei diversi campi di applicazione (RAM e Security Assessment).

### §7.4 - Stima delle misure con significato di "Sensività"

Nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della Struttura del Sistema a rete, si procede alla stima della Misura Ibrida di Sensività definita nel §6.6 ed alla discussione dei risultati avuti. In tale contesto è mostrata l'equivalenza di approcci diversi per la stima della Misura Ibrida: mediante le equazioni che ne forniscono la definizione, mediante la valutazione analitica della propagazione delle incertezze associate alle variabili di ingresso e mediante la realizzazione di Simulazioni OAT (One-At-Time).

Il confronto tra l'ordinamento degli elementi del Sistema, Connessioni e nodi Utilizzatori, prodotto dalla Misura Ibrida di Sensività e dalla Misura Differenziale di Importanza (del primo ordine) mostra il diverso contenuto informativo delle due misure e chiarisce gli obiettivi di un ordinamento con significato di Importanza e con significato di Sensività.

Lo studio del Caso applicativo mostra come mediante una opportuna procedura di calcolo, la Misura Ibrida fornisca una stima degli Indici di Sensività principale e globale definiti nel §3.3.3, da utilizzare per l'analisi della Struttura della rete in un contesto di valutazione di primo approccio.

## 7.1 Valutazione dei Rischi parziali e del Rischio complessivo del Sistema

### 7.1.1 Soluzione esatta dalle Funzioni del Sistema

I Rischi parziali definiti dalla eq. (6.4) possono essere stimati dalle Funzioni del Sistema riferite a ciascun nodo Utilizzatore, note analiticamente e riportate in Figura 11:

- $R_2 = U_{21} \cdot (U_{23} + U_{31} - U_{23} \cdot U_{31}) = 0,3750$
- $R_3 = U_{31} = 0,5000$
- $R_4 = U_{42} + U_{21} \cdot (U_{23} + U_{31} - U_{23} \cdot U_{31}) - U_{42} \cdot U_{21} \cdot (U_{23} + U_{31} - U_{23} \cdot U_{31}) = 0,6875$
- $R_5 = U_{53} + U_{31} - U_{53} \cdot U_{31} = 0,7500$ .

Il Rischio complessivo associato al Sistema a rete, definito dalla (6.9), risulta  $R = \sum_{s=1}^{n_n} R_i = 2,3125$ .

### 7.1.2 Soluzione esatta mediante Numerazione degli stati del Sistema

La stima dei Rischi parziali e del Rischio complessivo associato al Sistema a rete in Figura 11 può essere realizzata mediante Numerazione degli stati del Sistema, in accordo a riportato nel §6.2.2 e nel §6.4. E' di seguito riportata la Tabella degli stati per il Sistema a rete in Figura 11, rappresentazione alternativa alla Funzione di Sistema  $\mathfrak{R}^5 = \mathfrak{R}^4$ .

Id Stato	Stato delle Connessioni					Stato dei nodi				$Pr_s$	$w_s = N_s$
	$U_{21}=0,5$	$U_{31}=0,5$	$U_{23}=0,5$	$U_{42}=0,5$	$U_{53}=0,5$	$w_2=1$	$w_3=1$	$w_4=1$	$w_5=1$		
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0,03125	2
2	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0,03125	1
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0,03125	1
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,03125	0
5	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0,03125	2
6	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0,03125	1
7	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,03125	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,03125	0
9	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0,03125	3
10	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0,03125	3
11	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0,03125	2
12	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0,03125	2
13	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0,03125	3
14	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0,03125	3
15	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0,03125	2
16	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0,03125	2
17	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0,03125	3
18	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0,03125	2
19	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0,03125	3
20	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0,03125	2
21	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0,03125	2
22	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0,03125	1
23	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0,03125	1
24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,03125	0
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,03125	4
26	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0,03125	4
27	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0,03125	4
28	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0,03125	4
29	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0,03125	4
30	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0,03125	4
31	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0,03125	4
32	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0,03125	4

Tabella 14: Numerazione degli stati del Sistema

La costruzione della Tabella 14 è supportata da un algoritmo ad Automa Cellulare che, per ciascuno stato del Sistema, permette di valutare la raggiungibilità di ciascun nodo Utilizzatore, come descritto nel §6.2.1. La semplicità del Sistema a rete in Figura 11 permette di verificare la correttezza della compilazione.

Avendo assunto  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , la probabilità che il Sistema sia in uno specifico stato è la medesima per tutti gli stati. Il Sistema a rete in Figura 11 è costituito da 5 elementi soggetti a guasto e riparazione ed è quindi caratterizzato da  $2^5 = 32$  stati (configurazioni della rete). Dalla eq 6.12, risulta  $Pr_s = \frac{1}{2^{N_c}} = \frac{1}{32} = 0,03125$ .

Avendo assunto  $w_i = 1 \quad \forall i$ , il peso  $w_s$  associato a ciascuno stato del Sistema è pari al numero di nodi non raggiungibili in detto stato  $w_s = N n_s \quad \forall s$ .

Essendo  $\sum_{s=1}^{2^{N_c}} N_s = 74$ , dalla eq. (6.14) si ottiene per il Rischio complessivo  $R = \frac{1}{2^{N_c}} \cdot \sum_{s=1}^{2^{N_c}} N_s = \frac{74}{32} = 2,3125$ .

La stessa espressione può essere utilizzata per la stima dei Rischi parziali associati alla rete, assumendo  $N_s = 1$  se il nodo non è raggiungibile,  $N_s = 0$  altrimenti (ovvero  $N_s = x^{is}$ ); in altri termini, si procede al conteggio del numero di stati in cui il nodo Utilizzatore risulta non raggiungibile. I valori ottenuti sono riportati in Tabella 15 e coincidono con la stima realizzata a partire dalla Funzioni di Sistema.

	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5
Numero di stati in cui il nodo non raggiungibili	12	16	22	24
Rischi parziali associati al Sistema	$\frac{12}{32} = 0,3750$	$\frac{16}{32} = 0,5000$	$\frac{22}{32} = 0,6875$	$\frac{24}{32} = 0,7500$

Tabella 15: Rischio complessivo e Rischi parziali associati alla rete

### 7.1.3 Soluzione mediante metodi MonteCarlo

In accordo a quanto riportato nel §6.2, l'analisi di Sistemi a rete può essere realizzata metodi MonteCarlo, per la simulazione "tempo-dipendente" del Sistema.

Il ricorso a metodi di simulazioni risulta necessario per l'analisi di Sistemi costituiti da un elevato numero di elementi o in presenza di particolari distribuzioni di probabilità e/o dipendenze tra le variabili di ingresso. La realizzazione di simulazioni "tempo-dipendenti" permette di valutare i transitori delle grandezze di interesse, oltre che i valori a regime. In accordo a quanto riportato nel §6.2.3, la valutazione delle prestazioni di Sistemi "reali", cioè a partire da valori "realistici" dei Tassi di guasto e riparazione, può richiedere l'applicazione di Tecniche di riduzione della varianza.

Sono di seguito riportati i risultati avuti dalla analisi del Sistema a rete in Figura 11, assumendo per tutte le Connessioni un Tasso di guasto pari  $1E-04 \text{ h}^{-1}$  (Tempo medio tra guasti: 10.000 h) ed un Tasso di riparazione pari a  $0,0417 \text{ h}^{-1}$  (Tempo medio di riparazione: 24 h). Per tutti i nodi Utilizzatori è assunto un peso unitario  $w_i = 1 \quad \forall i$ .

Sono realizzate 10.000 "storie" della vita operativa del Sistema, per un Tempo di missione pari 150 h.

In Figura 12 sono riportati i risultati avuti dalla stima dei Rischi parziali del Sistema, mediante l'applicazione del metodo MonteCarlo. In accordo a quanto riportato nel §6.2.3, è utilizzato un approccio Indiretto ed una procedura "analogica" (senza l'adozione di Tecniche di riduzione della varianza).

In Figura 13 sono riportati i risultati avuti dalla stima dei Rischi parziali del Sistema mediante l'utilizzo delle due tecniche di Campionamento di Importanza descritte nel §6.2.3 - Forzatura del Guasto Certo e Forzatura della Transizione Specifica - a parità di dati del problema.

L'adozione di tecniche di Campionamento permette una migliore stima dei Rischi parziali associati ai nodi Utilizzatori, anche in presenza di bassi valori dei Tassi di guasto delle Connessioni in relazione ai Tassi di riparazione ed al Tempo di missione. Si osserva un generale "miglioramento" della stima, in particolare per l'andamento transitorio che si realizza per tempi inferiori a  $\sim 50$  h, ed un "miglioramento" specifico per la stima del Rischio parziale associato al nodo Utilizzatore 2, che risulta non raggiungibile solo se sono contemporaneamente indisponibili i due percorsi in ridondanza.

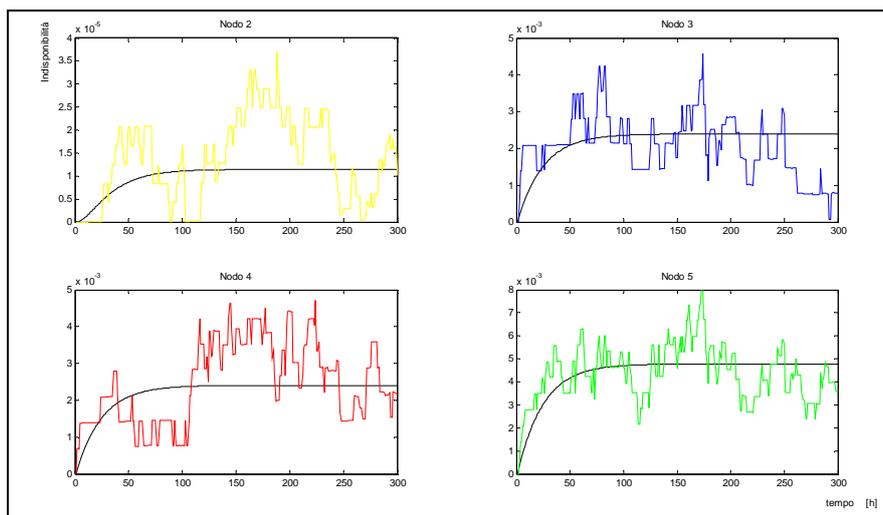


Figura 12: Utilizzo di metodi MonteCarlo

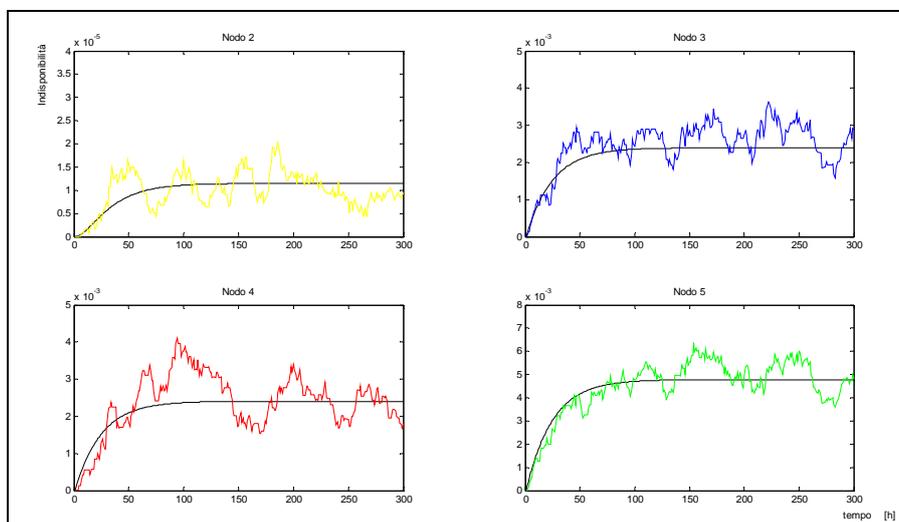


Figura 13: Utilizzo di metodi MonteCarlo e tecniche di Campionamento di Importanza

In Figura 14 sono riportati i risultati avuti dalla stima MonteCarlo, con 100.000 “storie” della vita operativa del Sistema.

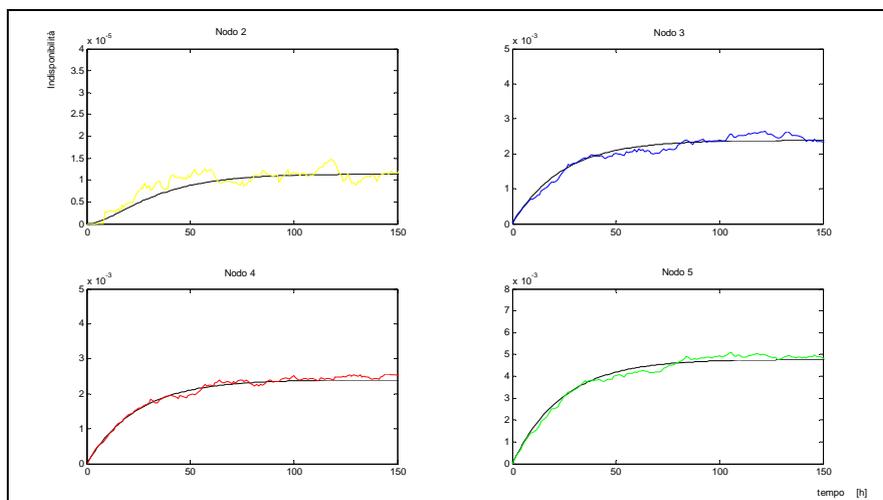


Figura 14: Utilizzo di metodi MonteCarlo e tecniche di Campionamento di Importanza

## 7.2 Caratteristiche della Struttura della rete

### 7.2.1 Valutazione delle derivate parziali

La valutazione delle derivate parziali del Rischio complessivo e dei Rischi parziali associati al Sistema a rete, rispetto alla Indisponibilità delle sue Connessioni, permette la stima delle Misure Differenziali di Importanza e della Misura Ibrida di Sensività, successivamente utilizzate per indagarne la struttura.

#### Valutazione delle derivate parziali del primo ordine

La stima delle derivate parziali del primo ordine è realizzata mediante diversi approcci tra loro equivalenti:

- Valutazione analitica (esatta) a partire dalla Funzione di Sistema;
- Valutazione (esatta) mediante Numerazione degli stati del Sistema;
- Valutazione (approssimata) mediante Variazione finita delle variabili di ingresso;
- Valutazione (approssimata) mediante Simulazione e regressione lineare dei dati.

#### Valutazione analitica delle derivate parziali del primo ordine

Per la rete rappresentata in Figura 11 sono note le Funzioni di Sistema riferite a ciascun nodo Utilizzatore. Da queste, nel §7.1.1 sono valutate le espressioni analitiche per i Rischi parziali associati ai diversi nodi Utilizzatori in funzione dell'Indisponibilità delle Connessioni. In accordo alla eq. (6.9), il Rischio complessivo è pari alla somma dei Rischi parziali.

In Tabella 16 sono riportate le espressioni ottenute per le derivate parziali di primo ordine del Rischio complessivo, rispetto alle Indisponibilità delle Connessioni.

Connessione	Derivate parziali del primo ordine
21	$(U_{23} + U_{31} - U_{23}U_{31}) \cdot (2 - U_{42})$
31	$2 + U_{21}(1 - U_{23}) \cdot (2 - U_{42}) - U_{53}$
23	$U_{21}(1 - U_{23}) \cdot (2 - U_{42})$
42	$1 - U_{21}(U_{23} + U_{31} - U_{23}U_{31})$
53	$1 - U_{31} - U_{21}$

Tabella 16: Espressioni analitiche delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo

Dalle espressioni riportate in Tabella 16 è possibile stimare le derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo, nel caso particolare in cui  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , di interesse per l'analisi della Struttura della rete. In modo analogo, è possibile valutare le derivate parziali del primo ordine dei Rischi parziali rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni.

#### Numerazione degli stati del Sistema per la valutazione delle derivate parziali del primo ordine

Prescindendo dalla conoscenza delle Funzioni di Sistema e quindi delle espressioni analitiche dei Rischi parziali e del Rischio complessivo, è possibile procedere mediante Numerazione degli stati del Sistema, realizzando un opportuno conteggio delle configurazioni della rete nelle situazioni limite in cui ciascuna Connessione è sempre funzionante o sempre guasta.

Con riferimento al Sistema a rete rappresentato in Figura 11, nelle situazioni limite in cui ciascuna Connessione è sempre funzionante o sempre guasta, sono possibili  $2^4 = 16$  configurazioni della rete.

In Tabella 17 è riportato il conteggio degli stati del Sistema realizzato per ciascuna Connessione, rispetto a ciascun Nodo Utilizzatore ed al Sistema complessivo, operando sulla Tabella degli stati definita nel §6.2.2. In particolare, è riportata la somma del numero di nodi Utilizzatori non raggiungibili per gli stati del Sistema in cui la Connessione  $j$  è sempre guasta ( $N_j^+$ ) o sempre funzionante ( $N_j^-$ ).

Connessione	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Sistema
21	0 / 12	8 / 8	8 / 14	12 / 12	28 / 46
31	4 / 8	0 / 16	10 / 12	8 / 16	22 / 52
23	4 / 8	8 / 8	10 / 12	12 / 12	34 / 40
42	6 / 6	8 / 8	6 / 16	12 / 12	32 / 42
53	6 / 6	8 / 7	11 / 11	8 / 16	33 / 41

Tabella 17: Numerazione degli stati del Sistema  $N_j^+ / N_j^-$

In Tabella 18 sono riportati i valori delle derivate parziali del primo ordine dei Rischi parziali e del Rischio complessivo, rispetto all'Indisponibilità di ciascuna Connessione, valutati sulla base del conteggio degli stati riportato in Tabella 17 mediante l'eq (6.17).

Connessione	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Sistema
21	0,750	0,000	0,375	0,000	1,125
31	0,250	1,000	0,125	0,500	1,875
23	0,250	0,000	0,125	0,000	0,375
42	0,000	0,000	0,625	0,000	0,625
53	0,000	0,000	0,000	0,500	0,500

Tabella 18: Derivate parziali del primo ordine dei Rischi parziali e del Rischio complessivo

I valori in Tabella 18 sono verificati con esito positivo mediante il confronto con i risultati ottenuti utilizzando le espressioni analitiche riportate in Tabella 16.

Gli elementi della matrice in Tabella 18 rappresentano i Birnbaum measure delle Connessioni riferiti ai Rischi parziali (a ciascun nodo Utilizzatore) ed al Rischio complessivo associato al Sistema.

La matrice 5 x 4 costituita dalle derivate del primo ordine dei Rischi parziali rispetto alla Indisponibilità di ciascuna Connessione (Tabella 18 esclusa l'ultima colonna) rappresenta la Matrice Jacobiana della Funzione di Sistema ovvero, in modo equivalente, della Tabella degli stati riportata in Tabella 14.

#### Variazione finita delle variabili di ingresso per la valutazione delle derivate parziali del primo ordine

In modo equivalente, la stima delle derivate parziali del primo ordine può essere realizzata operando una "variazione finita" dell'Indisponibilità delle Connessioni e stimando la conseguente variazione del Rischio complessivo. Un approccio analogo può essere riferito ai Rischi parziali associati al Sistema.

Sono realizzate complessivamente  $N_c + 1 = 6$  stime del Rischio complessivo: nella stima #1 è assunto il valore iniziale di Indisponibilità, pari a  $U_j^0 = 0,5$ , per tutte le Connessioni; in ciascuna delle restanti stime (#2 - #5) è assunto un diverso valore di Indisponibilità, pari a  $U_j = 0,6$ , per una delle Connessioni, mentre l'Indisponibilità delle restanti Connessioni è mantenuta al valore iniziale.

Per ciascuna Connessione sono quindi disponibili due stime del Rischio complessivo, che differiscono unicamente per la differente Indisponibilità della Connessione in oggetto. La derivata parziale del Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità della Connessione è stimata mediante l'eq. (6.28).

I valori ottenuti per la derivata parziale del Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni sono riportati in Tabella 19 sono e coincidono con i valori riportati in Tabella 18.

Id Stima	$U_{21}$	$U_{31}$	$U_{23}$	$U_{42}$	$U_{53}$	Rischio complessivo
#1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,3125
#2	0,6	0,5	0,5	0,5	0,5	2,4250
#3	0,5	0,6	0,5	0,5	0,5	2,5000
#4	0,5	0,5	0,6	0,5	0,5	2,3500
#5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,5	2,3750
#6	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	2,3625

Connessione	$\frac{\partial U}{\partial U_j}$
21	1,125
31	1,875
23	0,375
42	0,625
53	0,500

Tabella 19: Stima delle derivate parziali del primo ordine mediante "variazione finita"

#### Simulazione e regressione lineare dei dati per la stima delle derivate parziali del primo ordine

In accordo a quanto riportato nel §3.2.4 nell'ambito delle analisi di Incertezza e Sensività, un ulteriore approccio utilizzabile per la stima approssimata delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo e dei Rischi parziali associati al Sistema rispetto alle Indisponibilità dei componenti consiste nella realizzazione di regressioni lineari su opportuni dati di simulazione. Tale approccio può essere utilizzato anche per sistemi complessi, cioè costituiti da un elevato numero di nodi Utilizzatori e Connessioni. La stima del Coefficiente di determinazione permette di valutare il livello di approssimazione introdotto dalla "linearizzazione" del problema.

In accordo a quanto riportato nel §6.2.3 in merito alla applicazione di Tecniche di campionamento, si procede assegnando una incertezza (fittizia) alla Indisponibilità delle Connessioni, rappresentata da una opportuna distribuzione di probabilità, Mediante tecniche MonteCarlo o Latin Hypercube, ad ogni "storia" è campionato un vettore dei valori assunti dalla Indisponibilità di ciascuna Connessione. Per tali valori è stimato il Rischio complessivo e i Rischi parziali associati al Sistema, procedendo come descritto nel §7.1.

Assumendo il Rischio complessivo (o uno specifico Rischio parziale) come variabile dipendente e le Indisponibilità delle Connessioni come variabili indipendenti, è effettuata una regressione lineare (multivariata) sui dati di simulazione e sono stimati:

- i Coefficienti non standardizzati della regressione, corredati della "Significatività della stima" (Sig. da T-test) e del relativo intervallo di confidenza (5% e 95% percentile);
- il Coefficiente di determinazione, per la valutazione della "bontà" della regressione.

Sono di seguito riportati i risultati avuti con riferimento a tre differenti assunzioni per la distribuzione (comune) che rappresenta l'incertezza fittizia associata all'Indisponibilità di ciascuna Connessione:

Caso 1)  $N[\overline{U_j} = 0,0001; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,00001]$ ;

Caso 2)  $N[\overline{U_j} = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$ ;

Caso 3)  $U[0;1]$ .

Ciascuna simulazione è realizzata facendo variare contemporaneamente tutte le variabili del modello; utilizzando un campionamento Latin Hypercube (vedi §1.3), sono realizzate 1.000 "storie" per ciascuna simulazione.

Nel Caso 1) è assunto un valore medio di Indisponibilità sufficientemente piccolo da rendere trascurabili nella Funzione di Sistema i termini in cui compare il prodotto tra l'Indisponibilità di due componenti ovvero nella Tabella degli stati del Sistema, la probabilità associata a configurazioni caratterizzate dalla Indisponibilità contemporanea di più Connessioni. Tale approccio permette di isolare i punti singoli di guasto del Sistema a rete ovvero di trascurare il contributo associato alla contemporanea Indisponibilità di più Connessioni.

In Tabella 20 sono riportati i Coefficienti non standardizzati avuti dalle regressioni lineare realizzate nel Caso 1) per i Rischi parziali riferiti ai diversi nodi Utilizzatori e per il Rischio complessivo associato al Sistema, rispetto alla Indisponibilità dei componenti.

Connessione	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Sistema
21	0	0	0	0	0
31	0	1	0	1	2
23	0	0	0	0	0
42	0	0	1	0	1
53	0	0	0	1	1

Tabella 20: Regressione per  $N[\bar{U}_j = 0,0001; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,00001]$

Rispetto a ciascun nodo Utilizzatore, il Coefficiente di regressione assume valore 1 se la Connessione rappresenta un punto singolo di guasto.

Rispetto al Sistema nel suo complesso, il Coefficiente di regressione esprime il numero di nodi per i quali la Connessione rappresenta un punto singolo di guasto.

Nel Caso 2) è assunto un valore medio di Indisponibilità pari al valore nominale per l'analisi della Struttura della rete ( $U_j = 0,5 \quad \forall j$ ) ed un valore per la deviazione standard sufficientemente piccolo da rendere trascurabili in uno sviluppo in serie di Taylor del Rischio complessivo, come espresso dalla eq. (2.18), i contributi di ordine superiore al primo.

Da tale applicazione si attende una stima delle derivate parziali del primo ordine con una "buona" approssimazione.

In Tabella 21 sono riportati i risultati della regressione effettuata nel Caso 2).

Media	Deviazione standard	Varianza	R	R-quadrato	Errore standard della stima
2,3125	0,02361	0,0005	1,000	1,000	0,0002

Modello	Coefficienti (non standardizzati)		Sig. Limite inferiore	Intervallo di confidenza al 95%	
	Coefficiente	Errore standard		Limite inferiore	Limite superiore
Costante	0,062	0,0	0,0	0,062	0,063
Connessione 21	1,125	0,0	0,0	1,125	1,126
Connessione 31	1,875	0,0	0,0	1,875	1,876
Connessione 23	0,375	0,0	0,0	0,375	0,375
Connessione 42	0,625	0,0	0,0	0,625	0,625
Connessione 53	0,500	0,0	0,0	0,500	0,500

Tabella 21: Regressione per  $N[\bar{U}_j = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$

Il valore del Coefficiente di determinazione, pari a 1, mostra l'attendibilità della regressione lineare nel caso in oggetto.

I valori riportati in Tabella 21 per i Coefficienti non standardizzati coincidono con i valori esatti delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo riportati in Tabella 18.

L'errore introdotto dalla regressione lineare è trascurabile, come conseguenza dall'aver assunto una distribuzione di probabilità che rappresenta l'incertezza (fittizia) associata a ciascuna variabile di ingresso sufficientemente "chiusa" in un intorno del valore nominale (0,5).

Nel Caso 3) è assunta una distribuzione uniforme sull'intero intervallo di variazione di ciascuna variabile. Tale assunzione permette di evidenziare e quantificare le non linearità che caratterizzano il Sistema a rete.

Da tale applicazione si attende una stima delle derivate parziali del primo ordine che evidenzino l'approssimazione introdotta dalla "linearizzazione" del modello.

In Tabella 31 sono riportati i risultati della regressione effettuata nel caso 3).

Media	Deviazione standard	Varianza	R	R-quadrato	Errore standard della stima
2,3159	0,7011	0,4916	0,976	0,952	0,1557

Modello	Coefficienti non standardizzati		Sig.	Intervallo di confidenza al 95%	
	Coefficiente	Errore standard		Limite inferiore	Limite superiore
Costante	0,087	0,020	0,0	0,048	0,126
Connessione 21	1,132	0,017	0,0	1,099	1,166
Connessione 31	1,849	0,017	0,0	1,815	1,883
Connessione 23	0,356	0,017	0,0	0,323	0,390
Connessione 42	0,617	0,017	0,0	0,584	0,651
Connessione 53	0,503	0,017	0,0	0,470	0,537

Tabella 22: Regressione per  $U[0;1]$ 

I valori riportati in Tabella 21 per i Coefficienti non standardizzati forniscono una stima approssimata delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo, i cui valori esatti sono riportati in Tabella 18.

L'approssimazione introdotta dalla regressione lineare non è trascurabile, non essendo trascurabile l'effetto delle interazioni tra le variabili del modello nell'intero intervallo di variazione  $U[0;1]$ . Tale circostanza è confermata dal valore del Coefficiente di determinazione: il 95.2% della varianza associata al Rischio complessivo è "spiegata" dalla regressione lineare; la parte restante è associata a termini di ordine superiore al primo.

Procedendo mediante un approccio OAT, cioè effettuando quattro simulazioni distinte in ciascuna delle quali una sola variabile di ingresso (Indisponibilità di una delle Connessioni) è affetta da incertezza, e operando in modo analogo si ottengono le stime esatte delle derivate parziali. In tal caso, infatti, è nullo il contributo dovuto alle interazioni tra più variabili che si manifesta in seguito alla loro variazione contemporanea.

### Valutazione delle derivate parziali del secondo ordine

La valutazione delle derivate parziali del secondo ordine del Rischio complessivo associato al Sistema a rete è realizzata mediante i seguenti approcci tra loro equivalenti:

- Valutazione analitica (esatta) a partire dalla Funzione di Sistema;
- Valutazione esatta mediante Numerazione degli stati del Sistema.

#### Valutazione analitica delle derivate parziali del secondo ordine

A partire dalle espressioni analitiche riportate in Tabella 16 per le derivate parziali di primo ordine si ricavano le espressioni analitiche delle derivate parziali di secondo ordine del Rischio complessivo riportate in Tabella 23.

Connessione	21	31	23	42	53
21	0	$(1-U_{23}) \cdot (2-U_{42})$	$(1-U_{31}) \cdot (2-U_{42})$	$-(U_{23} + U_{31} - U_{23}U_{31})$	0
31		0	$-U_{21}(2-U_{42})$	$-U_{21}(2-U_{23})$	-1
23			0	$-U_{21}(1-U_{31})$	0
42				0	0
53					0

Tabella 23: Espressioni analitiche delle derivate parziali del secondo ordine del Rischio complessivo

Dalle espressioni riportate in Tabella 23 è possibile stimare le derivate parziali di ordine due del Rischio complessivo, nel caso particolare in cui  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , di interesse per l'analisi della Struttura della rete. In modo analogo, è possibile valutare le derivate parziali del primo ordine dei Rischi parziali rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni.

### Valutazione delle derivate parziali del secondo ordine mediante Numerazione degli stati del Sistema

Prescindendo dalla conoscenza delle Funzioni di Sistema e quindi delle espressioni analitiche dei Rischi parziali e del Rischio complessivo, è possibile procedere mediante Numerazione degli stati del Sistema, realizzando un opportuno conteggio delle configurazioni della rete.

Con riferimento al Sistema a rete rappresentato in Figura 11, se è definito lo stato (guasto / funzionante) di due Connessioni, sono possibili  $2^3 = 8$  configurazioni della rete.

In Tabella 24 è riportato il conteggio degli stati del Sistema, realizzato per ciascuna coppia di Connessioni, rispetto a ciascun Nodo Utilizzatore ed al Sistema complessivo, operando sulla Tabella degli stati definita nel §6.2.2. In particolare, è riportata la somma del numero di nodi Utilizzatori non raggiungibili per gli stati del Sistema in cui le Connessioni  $j$  e  $k$  sono sempre guaste ( $N_{jk}^{++}$ ) o sempre funzionanti ( $N_{jk}^{--}$ ) ovvero la Connessione  $j$  è sempre guasta e la Connessione  $k$  è sempre funzionante ( $N_{jk}^{+-}$ ) o viceversa ( $N_{jk}^{-+}$ ).

Connessione	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Sistema
21		32 / 8 / 14 / 20	26 / 14 / 20 / 14	24 / 10 / 22 / 18	25 / 12 / 21 / 16
31			26 / 8 / 26 / 14	28 / 8 / 24 / 14	26 / 7 / 26 / 15
23				22 / 14 / 18 / 20	22 / 15 / 18 / 19
42					23 / 14 / 19 / 18
53					

Tabella 24: Numerazione degli stati del Sistema  $N_{jk}^{++} / N_{jk}^{--} / N_{jk}^{+-} / N_{jk}^{-+}$

In Tabella 25 sono riportati i valori delle derivate parziali del secondo ordine del Rischio complessivo, rispetto all'Indisponibilità di ciascuna coppia di Connessioni, valutati sulla base del conteggio degli stati riportato in Tabella 24 mediante l'eq (6.18).

Connessione	21	31	23	42	53
21	0,000	0,750	0,750	-0,750	0,000
31	0,750	0,000	-0,750	-0,250	-1,000
23	0,750	-0,750	0,000	-0,250	0,000
42	-0,750	-0,250	-0,250	0,000	0,000
53	0,000	-1,000	0,000	0,000	0,000

Tabella 25: Derivate parziali del secondo ordine del Rischio complessivo

I valori in Tabella 25 sono verificati con esito positivo mediante il confronto con i risultati ottenuti utilizzando le espressioni analitiche riportate in Tabella 23.

La matrice 5 x 4 in Tabella 25 rappresenta la Matrice Hessiana della Funzione di Sistema ovvero, in modo equivalente, della Tabella degli stati del Sistema riportata in Tabella 14.

## 7.2.2 Valutazione delle correlazioni tra i Rischi parziali del Sistema

La conoscenza dei Rischi parziali e del Rischio complessivo può non essere sufficiente a descrivere il Sistema a rete. La particolare Struttura della rete, infatti, determina una dipendenza tra i Rischi parziali del Sistema di cui occorre tener conto in un contesto di analisi di Incertezza e Sensitività.

Tale circostanza può essere evidenziata assegnando una incertezza (fittizia) alla Indisponibilità delle Connessioni, utilizzando metodi di campionamento (MonteCarlo o Latin Hypercube) e valutando graficamente le correlazioni esistenti tra i dati ottenuti dalle simulazioni, mediante Diagrammi a dispersione.

Si procede utilizzando la Tabella degli stati del Sistema, riportata in Tabella 14.

Tutte le variabili di ingresso sono affette da incertezza e variano contemporaneamente. Ad ogni “storia” della simulazione è campionato un vettore dei valori assunti dalla Indisponibilità di ciascuna Connessione; per tali valori sono stimati i Rischi parziali associati al Sistema, procedendo come descritto nel §7.1.

In Figura 15 sono riportati i Diagrammi a dispersione tra i Rischi parziali riferiti ai quattro nodi Utilizzatori del Sistema, costruiti assegnando alle Connessioni una (comune) distribuzione di probabilità; nel caso 1) è assunta una distribuzione Normale  $N[U_j = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$ ; nel caso 2) è assunta una distribuzione Uniforme nell'intervallo di variazione  $U[0;1]$ .

I Diagrammi a dispersione evidenziano l'esistenza di correlazioni tra i Rischi parziali, introdotti dalla specifica Struttura del Sistema a rete rappresentato in Figura 11. In particolare, risultano evidenti le correlazioni esistenti tra i Rischi parziali riferiti ai nodi 2 e 4 e tra i Rischi parziali riferiti ai nodi 3 e 5.

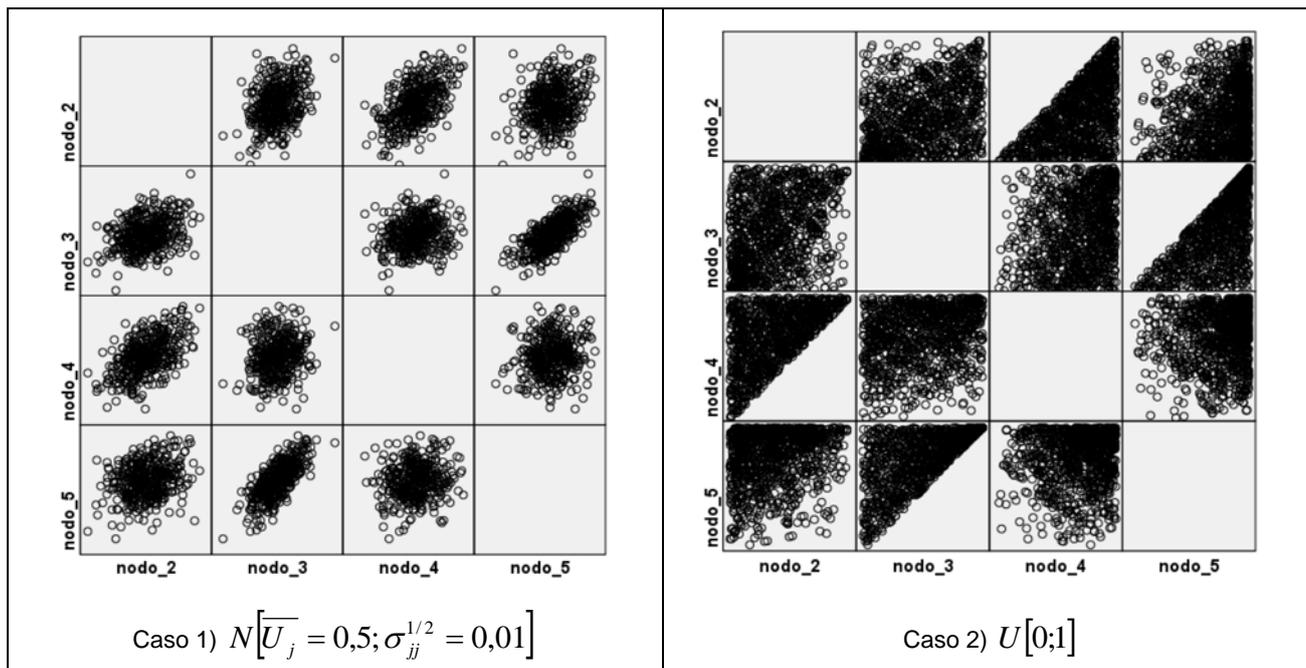


Figura 15: Diagramma a dispersione dei Rischi parziali

Per una quantificazione delle correlazioni introdotte dalla Struttura della rete è possibile operare mediante Metodi analitici approssimati; in accordo a quanto riportato nel §3.2.2 è utilizzata l'eq. (3.10) nota come “Legge di propagazione degli errori”, a partire da una approssimazione del primo ordine dei Rischi parziali.

La stima è realizzata a partire dalla conoscenza:

- della Matrice di covarianza tra le variabili di ingresso (Indisponibilità delle Connessioni), per ipotesi diagonale essendo le Connessioni tra loro indipendenti;
- dalla Matrice (5 x 4) Jacobiana della Funzione di Sistema  $\mathcal{R}^5 \rightarrow \mathcal{R}^4$ , costituita dalle derivate del primo ordine dei Rischi parziali rispetto alla Indisponibilità di ciascuna Connessione, che per il Sistema a rete in Figura 11 è riportata in Tabella 18 (esclusa l'ultima colonna).

La Matrice di covarianza tra i Rischi parziali, stimata mediante l'eq. (3.10), è riportata in Tabella 26 (esclusa l'ultima riga).

Nodo	2	3	4	5
2	6,88E-05	2,50E-05	3,44E-05	1,25E-05
3	2,50E-05	1,00E-04	1,25E-05	5,00E-05
4	3,44E-05	1,25E-05	5,63E-05	6,25E-06
5	1,25E-05	5,00E-05	6,25E-06	5,00E-05
$iVar[R]$	1.41 E-04	1.88 E-04	1.09 E-04	1.19 E-04

Tabella 26: Matrice di covarianza tra i Rischi parziali  $N[\overline{U_j} = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$

Gli elementi in diagonale rappresentano la varianza associata al Rischio parziale riferito allo specifico nodo Utilizzatore; i restanti elementi rappresentano la covarianza tra i Rischi parziali riferiti a due nodi Utilizzatori distinti.

Dalla eq. (6.52) la somma dei valori della Matrice di covarianza tra i Rischi parziali fornisce la varianza associata al Rischio complessivo del Sistema e risulta pari a  $Var[R] = 5,56E - 4$ . L'ultima riga della Tabella 26 riporta l'approssimazione al primo ordine del contributo alla varianza associata al Rischio complessivo, dovuto alla variazione singola dell'Indisponibilità di tutte le Connessioni, che si realizza mediante ciascun nodo Utilizzatore ( ${}^iVar(R)$ ).

Le stime sono effettuate analiticamente mediante l'eq. (3.10) ma risultano affette dalla approssimazione del primo ordine conseguente all'utilizzo della Matrice Jacobiana. I valori ottenuti per la covarianza tra i nodi Utilizzatori dipendono dalla Struttura del Sistema a rete e dalla varianza associata alle variabili di ingresso (Indisponibilità dei componenti).

In Tabella 27 è riportata la Matrice dei coefficienti di correlazione tra i Rischi parziali associati al Sistema ottenuta dalla Matrice di correlazione mediante l'eq. (3.5).

Nodo	2	3	4	5
2	1,0000	<b>0,3015</b>	<b>0,5528</b>	<b>0,2132</b>
3	0,3015	1,0000	<b>0,1667</b>	<b>0,7071</b>
4	0,5528	0,1667	1,0000	<b>0,1179</b>
5	0,2132	0,7071	0,1179	1,0000

Tabella 27: Matrice dei Coefficienti di correlazione

La Matrice dei coefficienti di correlazione tra i Rischi parziali non dipende dalle variabili di ingresso (valore atteso e varianza associata alla Indisponibilità dei componenti) e pertanto caratterizza la Struttura del Sistema a rete.

Al fine di evidenziare la necessità di tener conto nel calcolo del Rischio complessivo associato al Sistema delle correlazioni tra i Rischi parziali introdotte dalla Struttura della rete sono eseguite tre differenti simulazioni:

Caso 1) guasto indipendente delle Connessioni con  $N[\overline{U}_j = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$ ;

Caso 2) guasto indipendente dei nodi Utilizzatori, per un Sistema topologicamente identico alla rete in Figura 11, costituito da Connessioni "infallibili" e nodi Utilizzatori soggetti a guasto; ciascun nodo è caratterizzato da una Indisponibilità (asintotica) pari al Rischio parziale stimato per tale nodo nel caso 1, riportato in Tabella 15;

Caso 3) guasto dei nodi Utilizzatori, per un Sistema topologicamente identico alla rete in Figura 11, costituito da Connessioni "infallibili" e da nodi Utilizzatori soggetti a guasto; ciascun nodo è caratterizzato da una Indisponibilità (asintotica) pari al Rischio parziale stimato per tale nodo e dalle correlazioni tra i Rischi parziali stimate nel 1 e riportate in Tabella 27.

Ciascuna simulazione è realizzata facendo variare contemporaneamente tutte le variabili del modello; utilizzando un campionamento Latin Hypercube (vedi §1.3) sono realizzate 1.000 "storie" per ciascuna simulazione. Nel caso 3, le variabili di ingresso del modello non risultano indipendenti; a fine di realizzare un campionamento dell'Indisponibilità dei nodi Utilizzatori che soddisfi i coefficienti di correlazione definiti in Tabella 27, è adottata la Correlazione per ranghi descritta nel §1.4.

In Figura 16 è graficamente rappresentata la funzione Cumulata di probabilità per il Rischio complessivo associato al Sistema, stimata dalle differenti simulazioni.

La stima "corretta" della funzione Cumulata di probabilità per il Rischio complessivo è ottenuta nel caso 1. Gli stessi risultati si ottengono nel caso 3 ovvero considerando che tra i Rischi parziali associati ai nodi Utilizzatori sussistono le correlazioni introdotte dalla Struttura della rete, stimate nel caso 1.

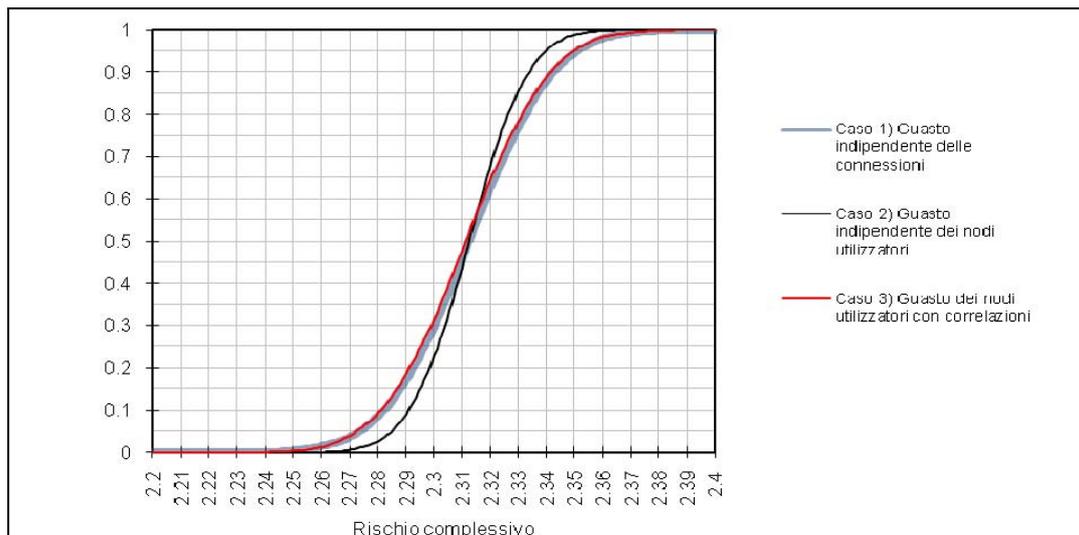


Figura 16: Funzione cumulata di probabilità per il Rischio complessivo

Nel caso 3, trascurando tali correlazioni ed effettuando una simulazione in cui il guasto dei nodi Utilizzatori è indipendente, si ottiene la medesima stima del valore medio per il Rischio complessivo associato al Sistema ma una differente funzione Cumulata.

Il medesimo valore medio si spiega dalla eq. (3.8) tenendo conto che, pur essendo non nulli i termini di Covarianza, risultano nulle le derivate seconde del Rischio complessivo rispetto ai Rischi parziali, avendo assunto una dipendenza lineare espressa dalla eq. (6.9).

La differente funzione Cumulata determina una sottostima della varianza associata al Rischio complessivo. Nel caso specifico, trascurando erroneamente le correlazioni tra i Rischi parziali introdotte dalla Struttura della, la varianza è sottostimata di circa un fattore 2. Infatti:

- nel caso 2 in cui sono nulli i termini di covarianza, si ottiene dalla eq. (6.63)

$$Var[R] \approx \sum_{i=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Nn} \left[ \left( \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \right)^2 \cdot Var[U_j] \right] = 2,750E - 4$$

- nel caso 3 in cui sono tenuti in conto i termini di covarianza tra i Rischi parziali rete, si ottiene dalla eq. (6.62)

$$Var[R] \approx \sum_{i=1}^{Nc} \sum_{j=1}^{Nn} \left[ \frac{\partial U^i}{\partial U_j} \cdot \left[ \sum_{l=1}^{Nc} \left( \frac{\partial U^l}{\partial U_j} \right) \right] \cdot Var[U_j] \right] = 5,563E - 4 \cdot$$

### 7.3 Stima delle misure con significato di “Importanza”

Nel presente paragrafo sono valutate le Misure Differenziali di Importanza introdotte nei §2.2.5 e §2.2.6 e riferite all'analisi di Sistemi a rete nel §6.5.

In particolare, per il Sistema a rete in Figura 11, si procede alla stima delle Misure Differenziali di Importanza del primo ordine (§7.3.1), del secondo ordine (§7.3.2) e totale (§7.3.3) ed alla discussione dei risultati avuti.

### 7.3.1 Stima della Misura Differenziale di Importanza del primo ordine

Nel presente paragrafo è valutata la Misura Differenziale di Importanza del primo ordine introdotta nel §2.2.5 e riferita all'analisi di Sistemi a rete nel §6.5.1.

In particolare, nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della struttura di una rete, interessa valutare la misura di Importanza ed il conseguente ordinamento prodotto per le Connessioni e per i nodi Utilizzatori del Sistema in Figura 11. Inoltre, si vuole verificare la necessità di riferire la misura di Importanza al Rischio complessivo associato al Sistema e procedere ad un confronto con il Risk Achievement Worth definito nel §2.2.4 e già utilizzato in letteratura per l'analisi di Sistemi a rete.

In Tabella 28 sono riportati i valori (esatti) del  ${}^1DIM$  di ciascuna Connessione, riferito ai Rischi parziali ed al Rischio complessivo associato al Sistema, valutati mediante le eq. (6.22) e (6.25), a partire dai valori (esatti) delle derivate parziali del primo ordine rispetto all'Indisponibilità di ciascuna Connessione riportati in Tabella 18. E' inoltre riportato il valore del  ${}^1DIM$  associato a ciascun nodo Utilizzatore, stimato mediante l'eq. (6.26). Infine, è riportato l'ordinamento delle Connessioni e dei nodi Utilizzatori definito da tale misura.

		${}^1DIM_j^i$				${}^1DIM_j$	
		Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Valore	Ordinamento
${}^1DIM_j^i$	Connessione 21	0,167	0,000	0,083	0,000	0,250	2
	Connessione 31	0,056	0,222	0,028	0,111	0,417	1
	Connessione 23	0,056	0,000	0,028	0,000	0,083	5
	Connessione 42	0,000	0,000	0,139	0,000	0,139	3
	Connessione 53	0,000	0,000	0,000	0,111	0,111	4
${}^1DIM^i$	Valore	0.278	0.222	0.278	0.222		
	Ordinamento	1	3	1	4		

Tabella 28:  ${}^1DIM$  per  $U_j = 0,5$  e  $w_i = 1$

Gli stessi risultati si ottengono realizzando la stima delle derivate parziali dei Rischi parziali ed al Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità delle Connessioni mediante valutazione analitica a partire dalla Funzione di Sistema, mediante Numerazione degli stati del Sistema, mediante Variazione finita delle variabili di ingresso e mediante Simulazione e regressione lineare dei dati nel caso  $N[\overline{U_j} = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$ .

In Tabella 29 sono riportati i valori del  ${}^1DIM$  di ciascuna Connessione stimati mediante le eq. (6.22) e (6.25), a partire dai valori ottenuti per le derivate parziali del primo ordine mediante Simulazione e regressione lineare dei dati nel caso  $N[\overline{U_j} = 0,0001; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,00001]$ , ovvero trascurando il contributo associato alla contemporanea Indisponibilità di più Connessioni. E' inoltre riportato il valore del  ${}^1DIM$  associato a ciascun nodo Utilizzatore, stimato mediante l'eq. (6.26). Infine, è riportato l'ordinamento delle Connessioni e dei nodi Utilizzatori definito da tale misura.

		${}^1DIM_j^i$				${}^1DIM_j$	
		Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Valore	Ordinamento
${}^1DIM_j^i$	Connessione 21	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3
	Connessione 31	0,000	0,250	0,000	0,250	0,500	1
	Connessione 23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3
	Connessione 42	0,000	0,000	0,250	0,000	0,250	2
	Connessione 53	0,000	0,000	0,000	0,250	0,250	2
${}^1DIM^i$	Valore	0,000	0,250	0,250	0,500		
	Ordinamento	3	2	2	1		

Tabella 29:  ${}^1DIM$  per  $U_j = 0,5$ ,  $w_i = 1$  e  $N[\overline{U_j} = 0,0001; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,00001]$

I valori del  ${}^1DIM$  delle Connessioni riportati in Tabella 29 e l'ordinamento prodotto sono coerenti con le seguenti valutazioni qualitative riferite al Sistema a rete in Figura 11: l'Indisponibilità della Connessione 31 determina la non raggiungibilità di nodi 3 e 5; l'Indisponibilità della Connessione 42 o della Connessione 53 determina la non raggiungibilità di un nodo (3 o 4); l'Indisponibilità della sola Connessione 21 o della Connessione 23 non determina la non raggiungibilità di alcun nodo.

I valori del  ${}^1DIM$  delle Connessioni rispetto ai singoli Rischi parziali inducono un ordinamento dei nodi Utilizzatori del Sistema a rete. Nel caso specifico, l'ordinamento è tale da valutare l'Importanza di ciascun nodo Utilizzatore in relazione alla presenza di Connessioni che rappresentano punti singoli di guasto per la sua raggiungibilità.

I valori del  ${}^1DIM$  dei nodi Utilizzatori riportati in Tabella 29 e l'ordinamento prodotto sono coerenti con le seguenti valutazioni qualitative riferite al Sistema a rete in Figura 11: Il nodo 5 può risultare non raggiungibile per il guasto singolo di una delle Connessioni 31 e 53; il nodo 3 può risultare non raggiungibile per il guasto singolo della Connessione 31; il nodo 5 può risultare non raggiungibile per il guasto singolo della Connessione 53.

In Tabella 30 sono riportati i valori del  ${}^1DIM$  di ciascuna Connessione stimati mediante le eq. (6.22) e (6.25), a partire dai valori ottenuti per le derivate parziali del primo ordine mediante Simulazione e regressione lineare dei dati nel caso  $U[0;1]$ . E' inoltre riportato l'ordinamento delle Connessioni definito da tale misura.

Connessione	${}^1DIM_j$	Ordinamento
21	0,254	2
31	0,415	1
23	0,080	5
42	0,138	3
53	0,113	4

Tabella 30:  ${}^1DIM_j$  per  $U_j = 0,5$ ,  $w_i = 1$  e  $N[\overline{U_j} = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$

Le differenze riscontrate tra i valori del  ${}^1DIM$  riportati in Tabella 30 ed i valori esatti riportati in Tabella 28, anche se minime, sono dovute alle interazioni tra le variabili del modello, non trascurabili quando è considerato l'intero intervallo di variazione di ciascuna variabile  $U[0;1]$ . E' opportuno evidenziare che la stima di Misure Differenziali di Importanza del primo ordine, anche con l'estensione in tutto l'intervallo di variazione delle singole variabili, non permette di evidenziare le interazioni e non linearità esistenti tra le variabili del modello.

### Confronto tra le misure ${}^1DIM$ e $DIM$

Al fine di evidenziare la necessità di riferire le Misure di Importanza al Rischio complessivo associato al Sistema a rete, sono confrontati i valori del  ${}^1DIM$  ottenuti mediante la definizione fornita dalle eq. (6.22) e (6.25), con i valori che si otterrebbero riferendo la misura a ciascun nodo Utilizzatore, prescindendo dal Rischio complessivo associato al Sistema.

In Tabella 31 sono riportati i valori del  $DIM$  di ciascuna Connessione, riferiti a ciascun nodo Utilizzatore, stimati mediante l'eq. (6.19); la somma di tali valori è assunta come misura di Importanza del componente riferita la Sistema complessivo. E' inoltre riportato l'ordinamento delle Connessioni definito da tale misura.

Connessione	$DIM_j^i$				$DIM_j$	
	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 3	Nodo 5	Valore	Ordinamento
21	0,600	0,000	0,300	0,000	0,900	2
31	0,200	1,000	0,100	0,500	1,800	1
23	0,200	0,000	0,100	0,000	0,300	5
42	0,000	0,000	0,500	0,000	0,500	3
53	0,000	0,000	0,000	0,500	0,500	3

Tabella 31:  $DIM_j^i$  per  $U_j = 0,5$ ,  $w_i = 1$

Dal confronto tra l'ordinamento definito dal *DIM* in Tabella 31 e l'ordinamento definito dal <sup>1</sup>*DIM* in Tabella 28 risulta evidente la necessità di riferire la misura di Importanza degli elementi di un Sistema a rete al Rischio complessivo associato. In particolare: il *DIM* fornisce la medesima classificazione per le Connessioni 42 e 53; il <sup>1</sup>*DIM* riconosce invece la maggiore Importanza della Connessione 42 rispetto alla Connessione 53.

Qualitativamente, l'Importanza delle Connessioni 42 e 53 dipende dalla Indisponibilità dei nodi 2 e 3 rispettivamente. La minore Indisponibilità del nodo 2 rispetto al nodo 3, per via della ridondanza offerta dalla Connessione (orientata) 23, è la causa della maggiore Importanza della Connessione 42, correttamente evidenziata dalla misura <sup>1</sup>*DIM*.

Si evidenzia inoltre come riferire le Misure di Importanza al Rischio complessivo sia comunque necessario per ottenere un ordinamento di Importanza dei nodi Utilizzatori del Sistema rete, in quanto la somma dei valori del *DIM* ottenuti per le diverse Connessioni con riferimento al medesimo nodo sarebbe pari a 1, per sua definizione.

### Relazioni tra differenti Misure di Importanza

In accordo a quanto riportato nel §6.5.1, le relazioni esistenti tra le diverse Misure di Importanza definite nel §2.2 possono essere evidenziate graficamente.

In Figura 4, per ciascuna Connessione del Sistema a rete in Figura 11, avendo assunto  $U_j = 0,5 \quad \forall j$  e  $w_i = 1 \quad \forall i$ ,

$$\text{l'eq. (6.29) } \frac{R}{R^0} = \alpha \cdot \frac{U_j}{U_j^0} + \frac{1}{RRW_j} \text{ con } \alpha = C_j = B_j \cdot \frac{U_j}{U} = \frac{U_j^0}{U} \cdot \left( * DIM_j \cdot \sum_i \sigma_i \right) = U_j^0 \cdot \left( RAW_j - \frac{1}{RRW_j} \right)$$

è graficamente rappresentata nel piano  $\left( \frac{R}{R^0} \right) - \left( \frac{U_j}{U_j^0} \right)$ .

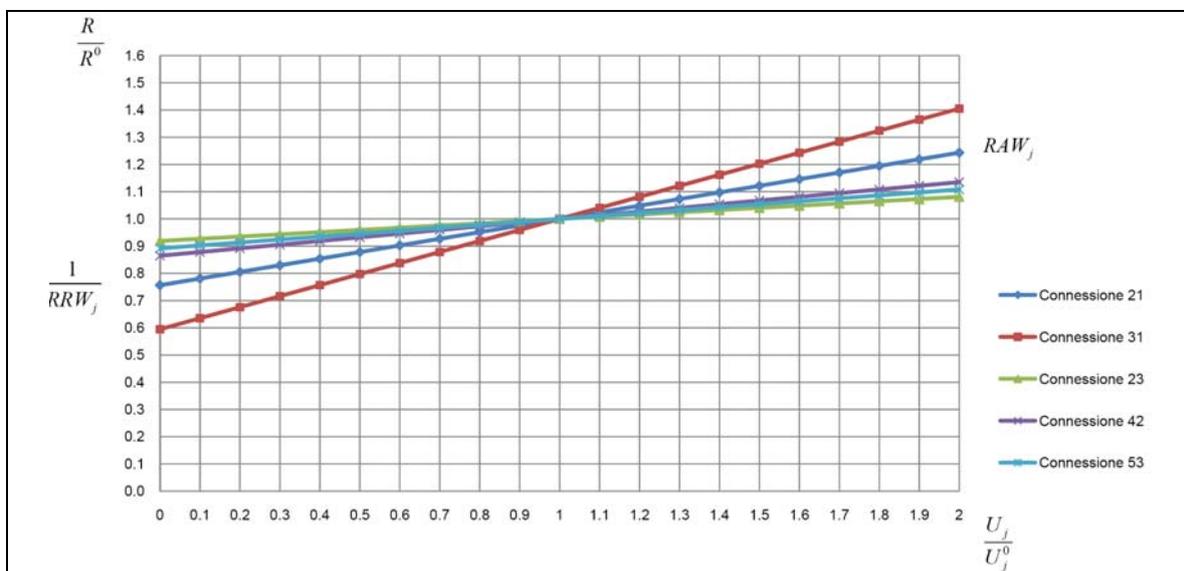


Figura 17: Relazioni tra le differenti Misure di Importanza

L'eq. (6.29) estende l'ipotesi di linearità, valida in un intorno del valore nominale rispetto al quale sono stimate le misure, in tutto l'intervallo di variazione dell'Indisponibilità delle Connessioni  $U_j \in [0;1]$ .

Avendo riferito le misure di Importanza alla Indisponibilità delle Connessioni e non ai parametri caratteristici, queste

forniscono il medesimo ordinamento. Avendo assunto  $U_j^0 = 0,5 \quad \forall j$  risulta  $U_j = 1 \rightarrow \frac{U_j}{U_j^0} = 2 \rightarrow \frac{R}{R_0} = RAW_j$ .

### Confronto tra le misure ${}^I DIM$ e $RAW$

Come riportato nel §6.5.1, il  $RAW$  è utilizzato in letteratura per l'analisi di Sistemi a rete [47], [50].

In tali studi, la misura di Importanza è stimata per ciascuna Connessione con riferimento a ciascun nodo Utilizzatore ( $RAW_j^i$ ); la somma dei valori così ottenuti ( $RAW_j$ ) è assunta come misura di Importanza riferita al Sistema complessivo. In Tabella 32 sono riportati i valori stimati mediante tale procedura con riferimento al Sistema a rete in Figura 11.

Connessione	$RAW_j^i$				$RAW_j$		$*RAW_j$	
	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Valore	Ordinamento	Valore	Ordinamento
21	2,000	1,000	1,273	1,000	5,273	2	1,243	2
31	1,333	2,000	1,091	1,333	5,758	1	1,405	1
23	1,333	1,000	1,091	1,000	4,424	4	1,081	5
42	1,000	1,000	1,455	1,000	4,455	3	1,135	3
53	1,000	1,000	1,000	1,333	4,333	5	1,108	4

Tabella 32: Confronto tra le misure  ${}^I DIM$  e  $RAW$

Avendo riferito le misure alla Indisponibilità delle Connessioni e non ai relativi parametri caratteristici, il  $RAW$  e il  ${}^I DIM$  devono fornire il medesimo ordinamento. Così non risulta dal confronto tra i valori riportati in Tabella 32 e Tabella 28, rispettivamente; in particolare, è evidente il diverso ordinamento delle Connessioni 23, 42 e 53.

Nella stessa tabella sono riportati i valori della misura  $*RAW_j$ , definita dalla eq. (6.30) con riferimento al Rischio complessivo del Sistema a rete; tale misura fornisce un ordinamento delle Connessioni coerente con il  ${}^I DIM_j$ .

### 7.3.2 Stima della Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine

Nel presente paragrafo è valutata la Misura Differenziale di Importanza del secondo ordine  ${}^{II} DIM$  introdotta nel §2.2.6 e riferita all'analisi di Sistemi a rete nel §6.5.2. In particolare, nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della Struttura di una rete, interessa valutare la Misura di Importanza ed il conseguente ordinamento prodotto per ciascuna Connessione e per ciascuna coppia di Connessioni del Sistema in Figura 11.

In Tabella 33 sono riportati i valori del contributo del primo ordine al  ${}^{II} DIM$  ( ${}^{II-1} DIM_j$ ) nell'eq. (6.40), stimati a partire dai valori delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo rispetto all'Indisponibilità di ciascuna Connessione, riportati in Tabella 18. Al fine di valutare le Misure di Importanza quando è massimo il contributo dei termini del secondo ordine, si assume  $\Delta U_j = \Delta = 0,5 \quad \forall j$ .

Connessione	${}^{II-1} DIM_j^i$	Ordinamento
21	0,375	2
31	0,625	1
23	0,125	5
42	0,208	3
53	0,167	4

Tabella 33:  ${}^{II-1} DIM_j$  per  $w_i = 1, U_j = 0,5 \quad \Delta = 0,5$

In Tabella 34 sono riportati i valori del contributo del secondo ordine al  ${}^{II} DIM$  ( ${}^{II-2} DIM_{jk}$ ) nell'eq. (6.40), stimati a partire dai valori delle derivate parziali del secondo ordine del Rischio complessivo, riportati in Tabella 25.

Connessione	21	31	23	42	53
21	0,000	0,125	0,125	-0,125	0,000
31	0,125	0,000	-0,125	-0,042	-0,167
23	0,125	-0,125	0,000	-0,042	0,000
42	-0,125	-0,042	-0,042	0,000	0,000
53	0,000	-0,167	0,000	0,000	0,000

Tabella 34:  ${}^{II-2}DIM_{jk}$  per  $w_i = 1, U_j = 0,5, \Delta = 0,5$ 

In Tabella 35 sono riportati i valori stimati per il  ${}^{II}DIM_{jk}$  in accordo alla eq. (6.36).

Connessione	${}^{II}DIM_{jk}$	Ordinamento	Nodi non raggiungibili
21 & 31	1,125	1	4
31 & 42	0,792	2	3
21 & 23	0,625	3	2
31 & 23	0,625	3	2
31 & 53	0,625	3	2
21 & 53	0,542	4	2
21 & 42	0,458	5	2
42 & 53	0,375	6	2
23 & 42	0,292	7	1
23 & 53	0,292	7	1

Tabella 35:  ${}^{II}DIM_{jk} = {}^{II-1}DIM_j + {}^{II-1}DIM_k + {}^{II-2}DIM_{jk}$  per  $w_i = 1, U_j = 0,5, \Delta = 0,5$ 

Il  ${}^{II}DIM_{jk}$  permette un ordinamento di Importanza delle coppie di Connessioni, tenendo conto del contributo associato alla variazione singola dell'Indisponibilità di ciascuna ed alla loro variazione contemporanea. Come mostrato dall'ultima colonna in Tabella 35, l'ordinamento è coerente con il numero di nodi Utilizzatori che risultano non raggiungibili in seguito alla Indisponibilità contemporanea di entrambe le Connessioni.

Per il Sistema a rete in Figura 11 la coppia di Connessioni 21 & 31 risulta la più "importante"; infatti la loro contemporanea Indisponibilità determina la mancata raggiungibilità di tutti i quattro nodi Utilizzatori. Segue la coppia di Connessioni 31 & 42 la cui contemporanea Indisponibilità determina mancata raggiungibilità di tre nodi Utilizzatori.

Il  ${}^{II}DIM_{jk}$  permette un ordinamento delle coppie di Connessioni 21 & 23, 31 & 23, 31 & 53, 21 & 53, 21 & 42 e 42 & 53, la cui contemporanea Indisponibilità determina la non raggiungibilità di due nodi Utilizzatori. Le coppie di Connessioni 23 & 42 e 23 & 53 risultano le meno "importanti" determinando la non raggiungibilità di un nodo Utilizzatore.

In Tabella 36 sono riportati i valori stimati per il  ${}^{II}DIM_j$  mediante l'eq. (6.40). La misura permette un ordinamento di Importanza delle Connessioni del Sistema, considerando per ciascuna i contributi associati alla variazione della sua Indisponibilità singola e contemporanea con la variazione dell'Indisponibilità di ciascuna delle rimanenti Connessioni. Avendo assunto  $U_j = 0,5$  e  $\Delta = 0,5$  la misura è riferita al massimo contributo dei termini del secondo ordine.

Connessione	${}^{II}DIM_j$	Ordinamento
21	0,599	1
31	0,417	2
23	0,083	3
42	0,000	4
53	0,000	4

Tabella 36:  ${}^{II}DIM_j$  per  $w_i = 1, U_j = 0,5, \Delta = 0,5$ 

Con riferimento ai valori in Tabella 33 e Tabella 36, il  ${}^{II-1}DIM_j$  e il  ${}^{II}DIM_j$  forniscono un diverso ordinamento delle Connessioni; in altri termini, il contributo associato ai termini del secondo ordine  ${}^{II-2}DIM_{jk}$  non è trascurabile, per il valore assunto per l'Indisponibilità delle Connessioni ( $U_j = 0,5$ ) e per l'incremento assunto massimo ( $\Delta = 0,5$ ).

In Figura 18 sono rappresentati i valori del  ${}^{II-1}DIM_j$  di ciascuna Connessione (Tabella 33) ed del  ${}^{II-2}DIM_{jk}$  di ciascuna coppia di Connessioni (Tabella 34); i valori del  ${}^{II}DIM_j$  (Tabella 36); i valori del  ${}^IDIM_j$  (Tabella 28).

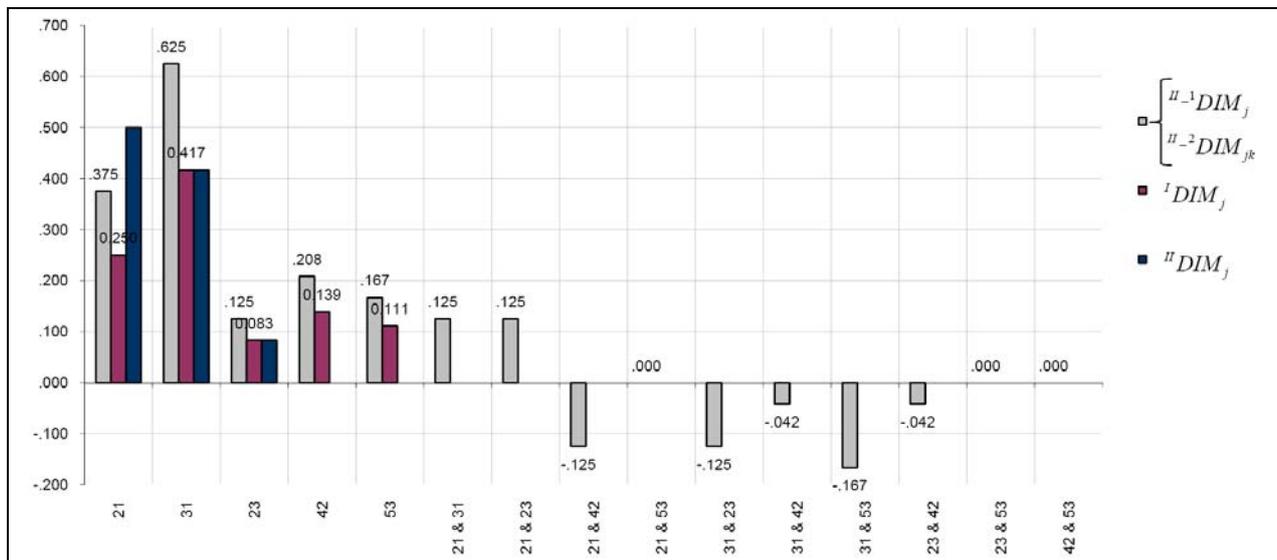


Figura 18:  ${}^{II-1}DIM_j$  e  ${}^{II-2}DIM_{jk}$ ,  ${}^{II}DIM_j$ ,  ${}^IDIM_j$

In accordo a quanto riportato nel §6.5.2, il  ${}^{II-2}DIM_{jk}$  fornisce informazioni sulle interazioni esistenti tra i due componenti. Riferendo la misura ad un Rischio parziale ovvero ad uno specifico nodo Utilizzatore, il segno della misura fornisce informazioni sulle relazioni logiche AND / OR tra le Connessioni j e k.

Riferendo la misura al Rischio complessivo associato al Sistema a rete, come per i valori rappresentati in Figura 18,

il  ${}^{II-2}DIM_{jk} = \sum_{i=1}^n {}^{II-2}DIM_{jk}^i$  misura l'Importanza della variazione contemporanea delle Connessioni come somma dei contributi riferiti ai Rischi parziali.

Nel caso specifico risulta  ${}^{II-2}DIM_{jk} = 0$  per le coppie che coinvolgono la Connessione 53, in quanto coinvolta in un percorso esclusivo (senza percorsi alternativi) verso il nodo 5. Inoltre risulta:

- ${}^{II-2}DIM_{21&23}, {}^{II-2}DIM_{21&31} \geq 0$  in quanto per le coppie 21&31 e 23&23, unicamente coinvolte in percorsi ridondanti verso il nodo 2, sono "prevalenti" le relazioni logiche di tipo AND tra le Connessioni;
- ${}^{II-2}DIM_{31&53}, {}^{II-2}DIM_{31&23}, {}^{II-2}DIM_{21&42}, {}^{II-2}DIM_{23&42}, {}^{II-2}DIM_{31&42} \leq 0$  in quanto per tutte le rimanenti coppie sono "prevalenti" le relazioni logiche di tipo OR tra le Connessioni (la coppia 31&53 rispetto ai nodi 3 e 5, per la coppia 31&23 rispetto al nodo 3 e per le coppie 21&42, 23&42 e 41&42 con rispetto al nodo 4).

I valori del  ${}^{II}DIM_j$  evidenziano in modo efficace le Connessioni coinvolte in percorsi ridondanti verso lo stesso nodo Utilizzatore (come le Connessioni 21, 31 e 23 verso il nodo 2), rispetto alle Connessioni che rappresentano esclusivamente punti di guasto (come le Connessioni 42 e 53 per i nodi 4 e 5 rispettivamente).

Come è lecito attendersi, il  ${}^{II-2}DIM_{31&53}$  compensa il  ${}^{II-1}DIM_{53}$  e analogamente il  ${}^{II-2}DIM_{21&42}$  e il  ${}^{II-2}DIM_{21&23}$  compensano il  ${}^{II-1}DIM_{42}$ ; nel caso specifico risulta  ${}^{II}DIM_{42} = {}^{II}DIM_{53} = 0$ .

In Figura 19 è rappresentato l'andamento del  ${}^{\text{II}}DIM_j$  di ciascuna Connessione, riferito al Rischio complessivo associato al Sistema, avendo assunto  $U_j = 0,5$ , per una variazione finita  $\Delta \in ]0;0,5[$ .

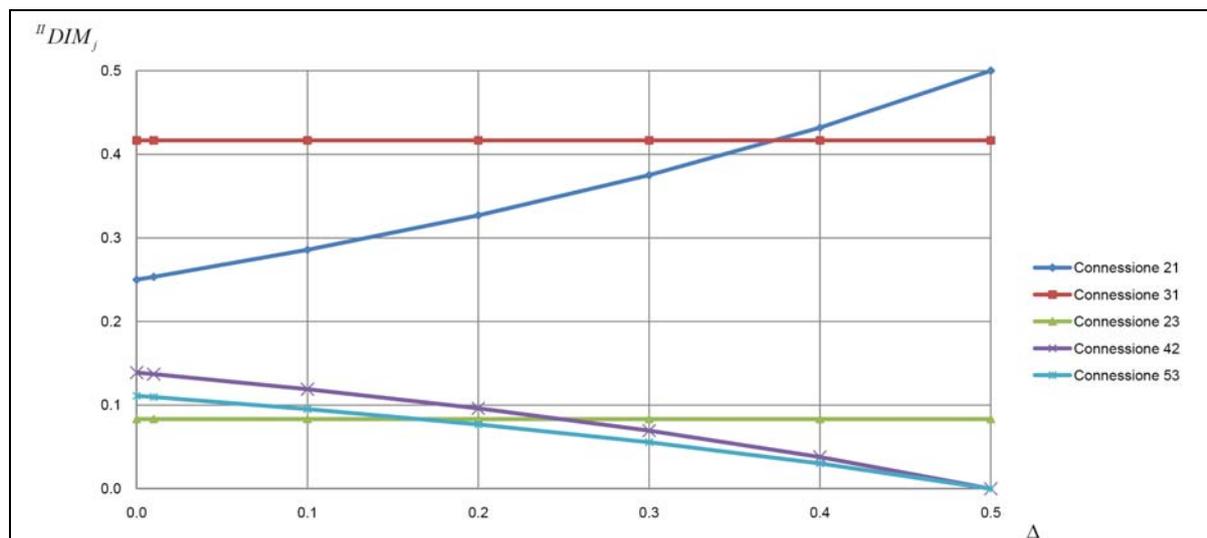


Figura 19:  ${}^{\text{II}}DIM_j$  per  $U_j = 0.5$  e  $\Delta \in ]0;0,5[$

L'andamento ripropone per  $\Delta \rightarrow 0$  i valori del  ${}^{\text{I}}DIM$  e per  $\Delta \rightarrow 0,5$  i valori del  ${}^{\text{II}}DIM_j$  riportati in Tabella 36 e fornisce i valori del  ${}^{\text{II}}DIM_j$  per variazioni intermedie dell'Indisponibilità delle Connessioni.

Al variare della variazione finita  $\Delta$  si modifica l'ordinamento delle Connessioni definito dal  ${}^{\text{II}}DIM_j$ . L'ordinamento si mantiene inalterato al crescere di  $\Delta$  fino a valori prossimi a 0,15. Una prima inversione avviene per  $\Delta$  compreso tra 0,15 e 0,25 e interessa la Connessione 23 (coinvolta in uno dei percorsi ridondanti per il nodo 2) che diventa "più importante" delle Connessioni 42 e 53 per effetto del contributo dei termini del secondo ordine associati alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità della Connessione 23 e di ciascuna delle rimanenti Connessioni. Una seconda inversione avviene per  $\Delta$  prossimo a 0,4 e interessa la Connessione 21 che diventa "più importante" della 31.

### 7.3.3 Stima della Misura Differenziale di Importanza totale

Nel presente paragrafo è valutata la Misura Differenziale di Importanza totale introdotta nel §2.2.6 e riferita all'analisi di Sistemi a rete nel §6.5.3. In particolare, interessa valutare la misura di Importanza ed il conseguente ordinamento prodotto per le Connessioni del Sistema in Figura 11, nelle ipotesi che caratterizzano l'analisi della Struttura della rete.

La Misura Differenziale di Importanza totale è stimata realizzando  $Nc + 2 = 7$  valutazioni del modello, relative ad una variazione finita dell'Indisponibilità delle Connessioni:  $(U_1^0, \dots, U_j^0, \dots, U_n^0) \rightarrow (U_1, \dots, U_j, \dots, U_n)$ . Tale misura è dipendente dai valori iniziale e finale assunti per l'Indisponibilità di ciascuna Connessione. La Struttura della rete è indagata assumendo per tutte le Connessioni il medesimo valore di Indisponibilità. Sono considerati tre casi distinti:

Caso 1) "piccoli" valori dell'Indisponibilità delle Connessioni  $U_j^0 \rightarrow 0$  e piccole variazioni  $\Delta = U_j - U_j^0 \rightarrow 0$ ;

Caso 2)  $U_j^0 = 0,5$  e piccole variazioni dell'Indisponibilità delle Connessioni  $\Delta = U_j - U_j^0 \rightarrow 0$ ;

Caso 3) valori estremi di dell'Indisponibilità delle Connessioni rispetto al relativo intervallo di variazione  $[0, 1]$ .

La Misura Differenziale di Importanza totale della Connessione  $j$  riferita ai Rischi parziali associati al Sistema  ${}^T D_j^i$  è stimata mediante l'eq. (6.50). La Misura Differenziale di Importanza totale della Connessione  $j$  riferita al Rischio complessivo associato al Sistema  ${}^T D_j$  è stimata mediante l'eq. (6.51) ovvero  ${}^T D_j = \sum_{i=1}^{N_h} {}^T D_j^i$ .

L'Importanza di ciascuna Connessione è valutata in relazione alla variazione del Rischio complessivo del Sistema dovuta alla variazione dell'Indisponibilità della Connessione, singola e contemporanea con la variazione dell'Indisponibilità delle restanti Connessioni, in qualsiasi combinazione e numero.

Nel **Caso 1**), avendo assunto  $\Delta = U_j - U_j^0 \rightarrow 0$ , risultano trascurabili i contributi associati alla contemporanea Indisponibilità di più Connessioni. In tali condizioni risulta  ${}^T D_j = {}^{T-1} D_j = {}^I DIM$ .

In Tabella 37 sono riportati i valori dei Rischi parziali e del Rischio complessivo associati al Sistema per ciascuna stima realizzata, assumendo  $U_j^0 = 0,0001$  e  $U_j = 0,0002$ . Le stime #1-#5 sono relative alla variazione dell'Indisponibilità di tutte le Connessioni tranne la Connessione in oggetto (21, 31, 23, 42 e 53 rispettivamente). La stima #6 è relativa al valore iniziale dell'Indisponibilità delle Connessioni mentre la stima #7 è relativa al valore finale.

ID Stima	Disponibilità Connessioni					Rischi parziali e Rischio complessivo				
	$U_{21}$	$U_{31}$	$U_{23}$	$U_{42}$	$U_{53}$	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Sistema
#1	1,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	8,00E-04	4,00E-08	2,00E-04	2,00E-04	4,00E-04
#2	2,00E-04	1,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	6,00E-04	6,00E-08	1,00E-04	2,00E-04	3,00E-04
#3	2,00E-04	2,00E-04	1,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	8,00E-04	6,00E-08	2,00E-04	2,00E-04	4,00E-04
#4	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	1,00E-04	2,00E-04	7,00E-04	8,00E-08	2,00E-04	1,00E-04	4,00E-04
#5	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	1,00E-04	7,00E-04	8,00E-08	2,00E-04	2,00E-04	3,00E-04
#6	1,00E-04	1,00E-04	1,00E-04	1,00E-04	1,00E-04	4,00E-04	2,00E-08	1,00E-04	1,00E-04	2,00E-04
#7	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	2,00E-04	8,00E-04	8,00E-08	2,00E-04	2,00E-04	4,00E-04

Tabella 37: Differenze finite per  $w_i = 1$ ,  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 0$

In Tabella 38 sono riportati i risultati avuti nel Caso 1) per la Misura Differenziale di Importanza totale delle Connessioni, rispetto ai Rischi parziali ed al Rischio complessivo associati al Sistema, stimati mediante le eq. (6.50) e (6.51) a partire dai valori riportati in Tabella 37.

		${}^T D_j^i$				${}^T D_j$	
		Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Valore	Ordinamento
${}^T D_j^i$	Connessione 21	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3
	Connessione 31	0,000	0,250	0,000	0,250	0,500	1
	Connessione 23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	3
	Connessione 42	0,000	0,000	0,250	0,000	0,250	2
	Connessione 53	0,000	0,000	0,000	0,250	0,250	2

Tabella 38:  ${}^T D_j^i$  per  $w_i = 1$ ,  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 0$

Il  ${}^T D_j$  ( $= {}^{T-1} D_j$ ) assume esattamente i valori del  ${}^I DIM$  riportati in Tabella 29, stimati mediante simulazione e successiva regressione lineare dei dati nel caso particolare in cui a ciascuna Connessione è associata una incertezza fittizia  $N[\overline{U_j} = 0,0001; \sigma_{U_j} = 0,00001]$ .

Anche nel **Caso 2**, avendo assunto  $\Delta = U_j - U_j^o \rightarrow 0$ , risultano trascurabili i contributi associati alla contemporanea Indisponibilità di più Connessioni. In tali condizioni risulta  ${}^T D_j = {}^{T-1} D_j = {}^I DIM$ .

Essendo  $U_j^0 = 0,5$ , il  ${}^T D_j$  assume i valori del  ${}^I DIM$  riportati in Tabella 28, stimati per l'analisi della Struttura del Sistema a rete nelle stesse ipotesi.

In Tabella 39 sono riportati i valori del Rischio complessivo associato al Sistema per ciascuna stima realizzata assumendo  $U_j = 0,50001$  ed i valori del  ${}^T D_j$  che risultano per ciascuna Connessione.

ID Stima	Disponibilità Connessioni					Rischio complessivo	Connessione	${}^T D_j$
	$U_{21}$	$U_{31}$	$U_{23}$	$U_{42}$	$U_{53}$			
#1	0,50000	0,50001	0,50001	0,50001	0,50001	2,312837	<b>21</b>	0,250
#2	0,50001	0,50000	0,50001	0,50001	0,50001	2,312762	<b>31</b>	0,417
#3	0,50001	0,50001	0,50000	0,50001	0,50001	2,312912	<b>23</b>	0,083
#4	0,50001	0,50001	0,50001	0,50000	0,50001	2,312887	<b>42</b>	0,139
#5	0,50001	0,50001	0,50001	0,50001	0,50000	2,312900	<b>53</b>	0,111
#6	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	2,312500		
#7	0,50001	0,50001	0,50001	0,50001	0,50001	2,312950		

Tabella 39:  ${}^T D_j$  per  $w_i = 1$ ,  $U_j = 0,5$  e  $\Delta \rightarrow 0$

E' interessante procedere al confronto tra i valori ottenuti per il Sistema a rete in Figura 11, per il  ${}^I DIM$  e il  ${}^T D$  di ciascuna Connessione, al variare dell'incremento considerato per la variazione dell'Indisponibilità delle Connessioni, quindi all'aumentare del contributo associato ai termini di ordine superiore al primo.

A partire dalle espressioni analitiche delle Funzioni di Sistema è possibile identificare il massimo ordine necessario per ottenere un valore esatto dei Rischi parziali mediante un sviluppo in serie di Taylor come espresso dalla eq. (2.18)<sup>11</sup>:

- massimo ordine pari a 4 per il nodo 4  $\left( \frac{\partial^4 U_4}{\partial U_{21} \partial U_{31} \partial U_{23} \partial U_{42}} = -1 \right)$ ;
- massimo ordine pari a 3 per il nodo 2  $\left( \frac{\partial^3 U_2}{\partial U_{21} \partial U_{31} \partial U_{23}} = -1 \right)$ ;
- massimo ordine pari a 1 per il nodo 3 e il nodo 5.

Per i nodi Utilizzatori 2 e 4, quindi per le Connessioni 21, 31, 23 e 42 che risultano coinvolte nei percorsi che rendono tali nodi Utilizzatori raggiungibili dal nodo Sorgente, è possibile che l'ordinamento di Importanza risenta dei contributi di ordine superiore al secondo.

Confrontiamo l'andamento del  ${}^I DIM$  in Figura 19 con l'andamento del  ${}^T D$  in Figura 20, ottenuto assumendo  $U_j^0 = 0,5$ , per diversi valori di  $U_j \in ]0,5;1[$  ovvero per una variazione finita  $\Delta \in ]0;0,5[$ .

In generale, l'ordinamento delle Connessioni definito dalla Misura Differenziale di Importanza totale dipende dalla variazione finita  $\Delta$  considerata per la loro Indisponibilità. Dalla Figura 20 risulta che all'aumentare di  $\Delta$ , ovvero all'aumentare del contributo associato alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità di più Connessioni, non si modifica il loro ordinamento di Importanza.

<sup>11</sup> Nell'ipotesi di eventi rari, non compatibile con l'analisi della struttura della rete, il massimo ordine per il nodo 4 si ridurrebbe a 3 ed il massimo ordine per il nodo 2 si ridurrebbe a 2.

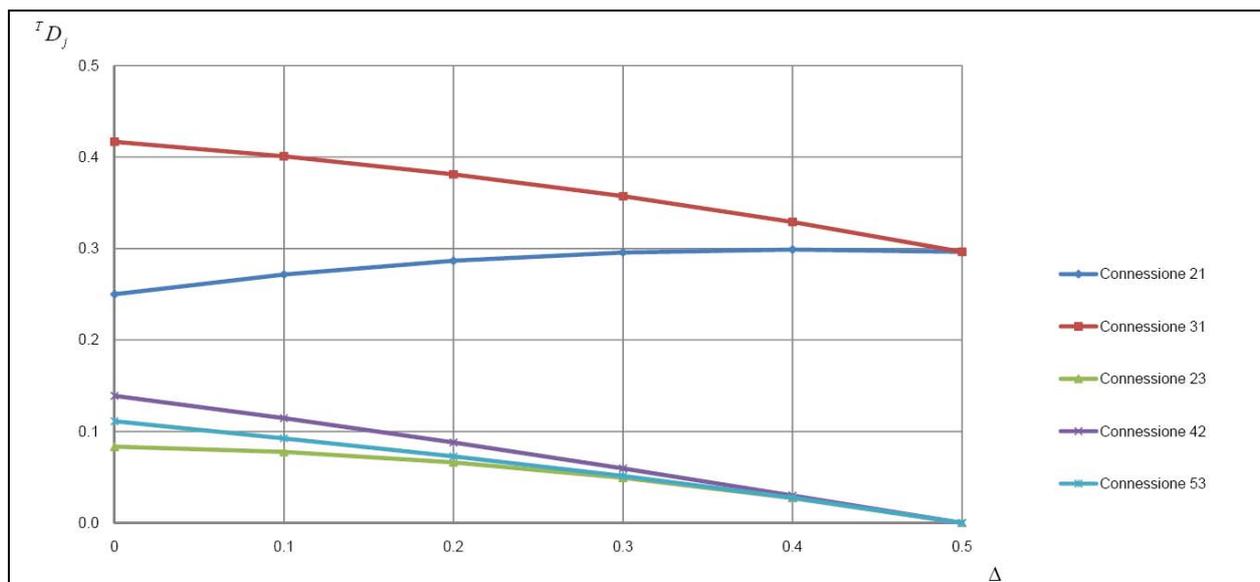


Figura 20: Andamento del  ${}^T D_j$  per  $w_i = 1$ ,  $U_j^0 = 0,5$  e  $\Delta \in ]0;0,5[$

Per  $\Delta \rightarrow 0$  il  ${}^T D$  propone il medesimo ordinamento del  ${}^{II} DIM$  (e del  ${}^I DIM$ ).

All'aumentare di  $\Delta$  cresce il contributo dei termini di ordine superiore associati alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità di più Connessioni e, in particolare, diventa non trascurabile il contributo dei termini di ordine superiore al secondo. Dal confronto tra la Figura 19 e la Figura 20, come prevedibile, sono interessate le Connessioni 21, 31, 23 e 42 coinvolte nei percorsi che garantiscono la raggiungibilità dei nodi 2 e 4. Come effetto ultimo, per  $\Delta \rightarrow 0,5$  il  ${}^T D$  propone un diverso ordinamento rispetto al  ${}^{II} DIM$ .

Le Connessioni 21 e 31 sono caratterizzate dal medesimo valore di  ${}^T D$ ; l'inversione dell'ordinamento che risulta dal  ${}^{II} DIM$  non è pertanto attendibile; la Connessione 31 è sempre caratterizzata dalla massima Importanza, eguagliata dall'Importanza della Connessione 21 quando è massimo il contributo dei termini associati alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità di più Connessioni, in qualsiasi numero e combinazione.

il  ${}^T D$  della Connessione 23 assume un valore nullo per  $\Delta \rightarrow 0,5$  in quanto, anche se coinvolta in un percorso ridondante per il raggiungimento del nodo 2, non è da sola in grado di garantire la raggiungibilità di alcun nodo; l'inversione dell'ordinamento che risulta dal  ${}^{II} DIM$  non è pertanto attendibile; la Connessione 23 rimane la meno importante anche ipotizzando il massimo contributo dei termini associati alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità di più Connessioni, in qualsiasi numero e combinazione.

Nel **Caso 3**, avendo assunto per l'Indisponibilità delle Connessioni i valori estremi dei relativi intervalli di variazione  $[0, 1]$  (ovvero per  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta = U_j - U_j^0 \rightarrow 1$ ), è massimo il contributo alla misura di Importanza dei termini di ordine superiore al primo ( ${}^{T-tot} D$ ), associati alle interazioni tra le variabili del modello, che si manifestano con la loro variazione contemporanea in qualsiasi combinazione e numero.

In Tabella 40 sono riportati i valori dei Rischi parziali e del Rischio complessivo associati al Sistema per ciascuna stima realizzata assumendo  $U_j^0 = 0,0001$  e  $U_j = 0,9999$ .

ID Stima	Disponibilità Connessioni					Rischi parziali e Rischio complessivo				
	$U_{21}$	$U_{31}$	$U_{23}$	$U_{42}$	$U_{53}$	2	3	4	5	Sistema
#1	0,0001	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,0000	1,0000	1,0000	1,0000	3,0000
#2	0,9999	0,0001	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000	3,0000
#3	0,9999	0,9999	0,0001	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4,0000
#4	0,9999	0,9999	0,9999	0,0001	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4,0000
#5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,0001	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4,0000
#6	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
#7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	4,0000

Tabella 40: Differenze finite per  $w_i = 1$ ,  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 1$

In Tabella 41 sono riportati i risultati avuti nel Caso 3) per la Misura Differenziale totale delle Connessioni, rispetto ai Rischi parziali ed al Rischio complessivo, stimati mediante le eq. (6.50) e (6.51) a partire dai valori in Tabella 40 .

		${}^T D_j^i$				${}^T D_j$	
		Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Valore	Ordinamento
${}^T D_j^i$	Connessione 21	0,250	0,000	0,000	0,000	0,25	1
	Connessione 31	0,000	0,250	0,000	0,000	0,25	1
	Connessione 23	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	2
	Connessione 42	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	2
	Connessione 53	0,000	0,000	0,000	0,000	0,00	2

Tabella 41:  ${}^T D$  per  $w_i = 1$ ,  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \rightarrow 1$

Per avere un valore non nullo del  ${}^T D_j$  delle Connessioni nel caso  $U_j \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 1$  occorre che la Connessione garantisca la raggiungibilità di almeno un nodo Utilizzatore anche se è l'unica Connessione che risulta disponibile. Con riferimento al Sistema rete in Figura 11, tale circostanza si verifica unicamente per le Connessioni 21 e 31.

In Figura 21 è rappresentato l'andamento del  ${}^T D_j$  di ciascuna Connessione, riferito al Rischio complessivo, avendo assunto  $U_j^0 = 0.0001$ , per diversi valori di  $U_j$  nel relativo intervallo di variazione ovvero per  $\Delta = U_j - U_j^0 \in ]0;1[$ .

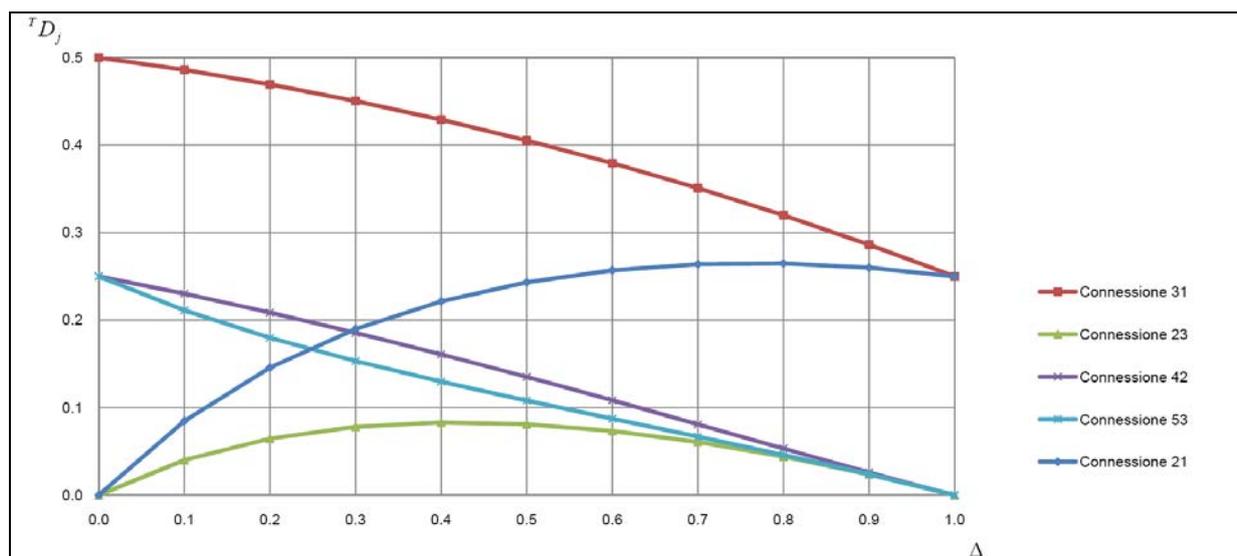


Figura 21: Andamento del  ${}^T D_j$  per  $w_i = 1$ ,  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $\Delta \in ]0;1[$

L'andamento del  ${}^T D_j$  ripropone i valori ottenuti per i casi limite (Caso 1 e Caso 3) precedentemente considerati e fornisce i valori di  ${}^T D_j$  per variazioni intermedie dell'Indisponibilità delle Connessioni.

Per  $\Delta > 0,5$  l'andamento del  ${}^T D_j$  mostrato in Figura 21 ripropone l'andamento in Figura 20 valutato nel Caso 2) per  $U_j^0 = 0,5$  e  $\Delta \in ]0;0,5[$ . In tale intervallo di variazione non si osservano modifiche nell'ordinamento delle Connessioni. Occorre osservare che per  $\Delta = 0,5$  non si ottiene esattamente i valori del  ${}^T DIM$  ma una loro approssimazione, a causa del contributo associato ai termini di ordine superiore al primo nell'intervallo  $]0;0,5[$ . Per  $\Delta < 0,5$  l'andamento del  ${}^T D_j$  mostrato in Figura 21 evidenzia delle modifiche nell'ordinamento delle Connessioni che, in particolare, riguardano la Connessione 21.

Per tutti i valori della variazione finita  $\Delta$ , la Connessione 31 è sempre la più importante mentre la Connessione 23 è sempre la meno importante; la posizione delle restanti Connessioni dipende dal valore assunto da  $\Delta$ .

Il  ${}^T D_j$  della Connessione 31 assume un valore non nullo nella condizione limite  $\Delta \rightarrow 0$  in quanto tale Connessione è un punto singolo di guasto per i nodi 3 e 5 ed un valore non nullo nella condizione limite  $\Delta \rightarrow 1$  in quanto la Connessione 31 garantisce la raggiungibilità del nodo 3 anche se è l'unica Connessione disponibile.

Il  ${}^T D_j$  diminuisce all'aumentare della variazione dell'Indisponibilità della Connessione, fornendo l'informazione che il contributo apportato dalla Connessione 31 è essenzialmente legato al termine del primo ordine e che, pur essendo coinvolta in un percorso ridondante per il raggiungimento del nodo 2, sono prevalenti le relazioni logiche di tipo OR con le restanti Connessioni.

Il  ${}^T D_j$  della Connessione 21 assume un valore nullo nella condizione limite  $\Delta \rightarrow 0$  in quanto l'Indisponibilità esclusiva di tale Connessione non inficia la raggiungibilità di alcun nodo ed assume un valore non nullo per  $\Delta \rightarrow 1$  in quanto garantisce la raggiungibilità del nodo 2 anche se è l'unica Connessione disponibile.

Il  ${}^T D_j$  aumenta all'aumentare della variazione dell'Indisponibilità delle Connessioni, fornendo l'informazione che il contributo apportato dalla Connessione 21, esclusivamente coinvolta in un percorso ridondante verso il nodo 2, è legato ai termini di ordine superiore e sono quindi prevalenti le relazioni logiche di tipo AND con le restanti Connessioni.

Le Connessioni 21 e 31 hanno la stessa Importanza (stessa misura  ${}^T D_j$ ) nella condizione limite  $\Delta \rightarrow 1$ , cioè quando è dominante il contributo del primo ordine associato alla variazione singola dell'Indisponibilità di ciascuna Connessione.

La posizione della Connessione 21 nell'ordinamento varia per valori di  $\Delta$  compresi tra 0,2 e 0,3: per  $\Delta < 0,2$  la Connessione 21 ha una Importanza inferiore alla Importanza delle Connessioni 42 e 53 che rappresentano punti singoli di guasto per i nodi 4 e 5 rispettivamente; per  $\Delta > 0,3$  i contributi di ordine superiore sono tali da rendere la Connessione 21 più importante delle Connessioni 42 e 53 che non risultano coinvolte in alcun percorso ridondante.

Il  ${}^T D_j$  della Connessione 23 assume un valore nullo in entrambe le condizioni limite in quanto tale Connessione non rappresenta un punto singolo di guasto e non è da sola in grado di garantire la raggiungibilità di alcun nodo Utilizzatore. Pertanto, il  ${}^T D_j$  assume un valore massimo che, nel caso specifico, si realizza per  $\Delta$  prossimo a 0,4.

Il  ${}^T D_j$  della Connessione 42 (analogamente per la Connessione 53) assume un valore non nullo nella condizione limite  $\Delta \rightarrow 0$  in quanto l'Indisponibilità esclusiva di tale Connessione determina la non raggiungibilità del nodo 4 (del nodo 5) ed un valore nullo per  $\Delta \rightarrow 1$  in quanto la Connessione non è da sola in grado di garantire la raggiungibilità di un nodo.

Il  ${}^T D_j$  diminuisce all'aumentare della variazione dell'Indisponibilità delle Connessioni, fornendo l'informazione che il contributo apportato dalla Connessione 31 è essenzialmente legato al termine del primo ordine e che sono prevalenti le relazioni logiche di tipo OR con le restanti Connessioni. Il  ${}^T D_j$  della Connessione 42 risulta maggiore o uguale al  ${}^T D_j$  della Connessione 53 per tutti i valori di  $\Delta$ ; tale circostanza, già riscontrata per il  ${}^I DIM$ , è dovuta al minor Rischio parziale associato al nodo 2 rispetto al nodo 3, per la presenza di percorsi ridondanti con il nodo Sorgente (ovvero per l'orientamento della Connessione 23).

#### Andamento del ${}^I DIM$ nell'intervallo di variazione

Per  $\Delta \rightarrow 0$  risulta  ${}^T D_j = {}^{T-1} D_j = {}^I DIM$ .

Utilizzando la procedura di stima della Misura Differenziale totale, ovvero operando mediante la "variazione finita" delle variabili di ingresso, è possibile valutare l'andamento del  ${}^T D_j = {}^{T-1} D_j = {}^I DIM$  al variare di  $U_j^0$

In Figura 22 è riportato l'andamento del  ${}^T D_j = {}^{T-1} D_j = {}^I DIM$  delle Connessioni del Sistema a rete in Figura 11, per  $\Delta \rightarrow 0$  e  $U_j^0 \in ]0;1]$ . Per  $U_j^0 = 0,5$  i valori rappresentati coincidono con i valori del  ${}^I DIM$  in Tabella 18.

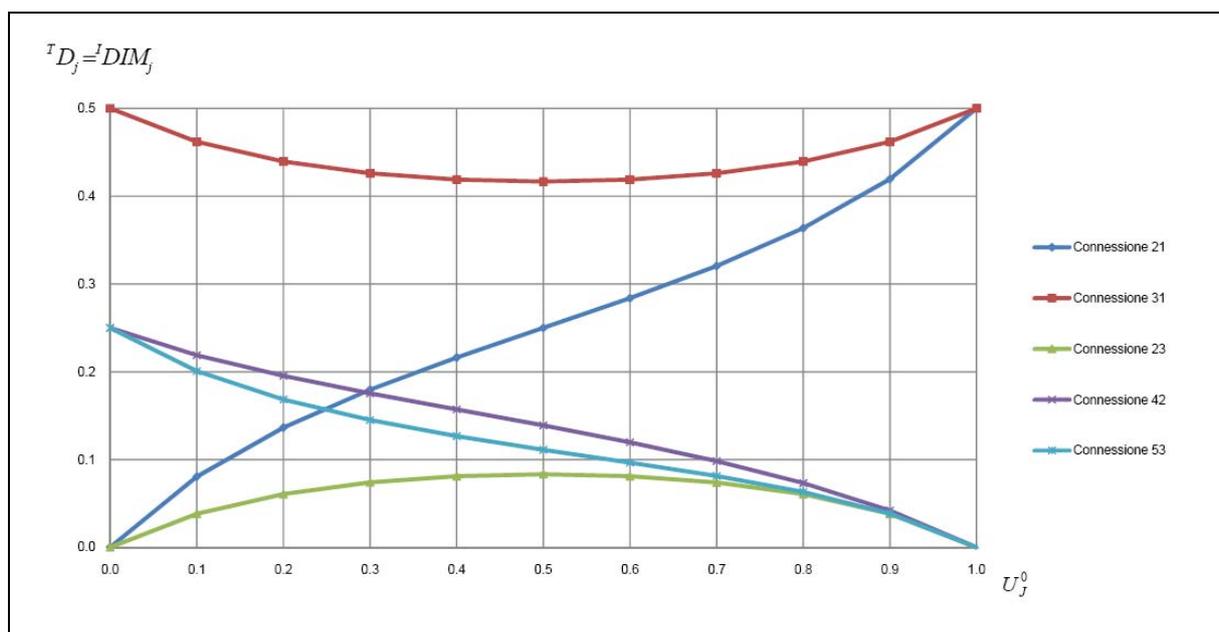


Figura 22: Andamento della Misura Differenziale di Importanza del primo ordine per le Connessioni

In accordo a quanto riportato nel §6.5.3:

- per  $U_j^0 \rightarrow 0$  sono identificate ed ordinate in relazione al contributo al Rischio complessivo le Connessioni che costituiscono un (minimal) Cut-set di ordine uno per almeno un nodo Utilizzatore; la misura è diversa da 0 se la Connessione è tale da determinare la non raggiungibilità di almeno un nodo Utilizzatore, nel caso in cui sia l'unica indisponibile; è questo il caso delle Connessioni 31, 42 e 53 che in caso di guasto determinano la non raggiungibilità dei nodi 3, 4 e 5, rispettivamente;
- per  $U_j^0 \rightarrow 1$  sono identificate ed ordinate in relazione al contributo al Rischio complessivo le Connessioni che costituiscono un (minimal) Path-set di ordine uno per almeno un nodo Utilizzatore; la misura è diversa da 0 se la Connessione è tale da garantire la raggiungibilità di almeno un nodo Utilizzatore nel caso in cui sia l'unica indisponibile; è questo il caso delle Connessioni 21 e 31 che garantiscono la raggiungibilità dei nodi 2 e 3.

Per l'additività della misura, i valori del  ${}^T D_j = {}^T -1 D_j = {}^I DIM$  delle Connessioni rispetto ai singoli Rischi parziali inducono un ordinamento dei nodi Utilizzatori. In Figura 23 è riportato l'andamento della Misura di importanza riferita ai nodi Utilizzatori del Sistema a rete in Figura 11, per  $\Delta \rightarrow 0$  e  $U_j^0 \in ]0;1]$ .

L'ordinamento indotto sui nodi Utilizzatori del Sistema nei casi limite  $U_j^0 \rightarrow 0$  e  $U_j^0 \rightarrow 1$  segue i medesimi criteri: per  $U_j^0 \rightarrow 0$  si ha una Misura di importanza non nulla per il nodo 5, caratterizzato da due Connessioni (31 e 53) che rappresentano punti singoli di guasto e per i nodi 3 e 4 caratterizzati da una Connessione (31 e 42 rispettivamente) che rappresentano un punto singoli di guasto; per  $U_j^0 \rightarrow 1$  ha una Misura di importanza non nulla per i soli nodi 2 e 3, unici ad essere raggiungibili nel caso in cui risulta disponibile una sola Connessione (21 e 31 rispettivamente).

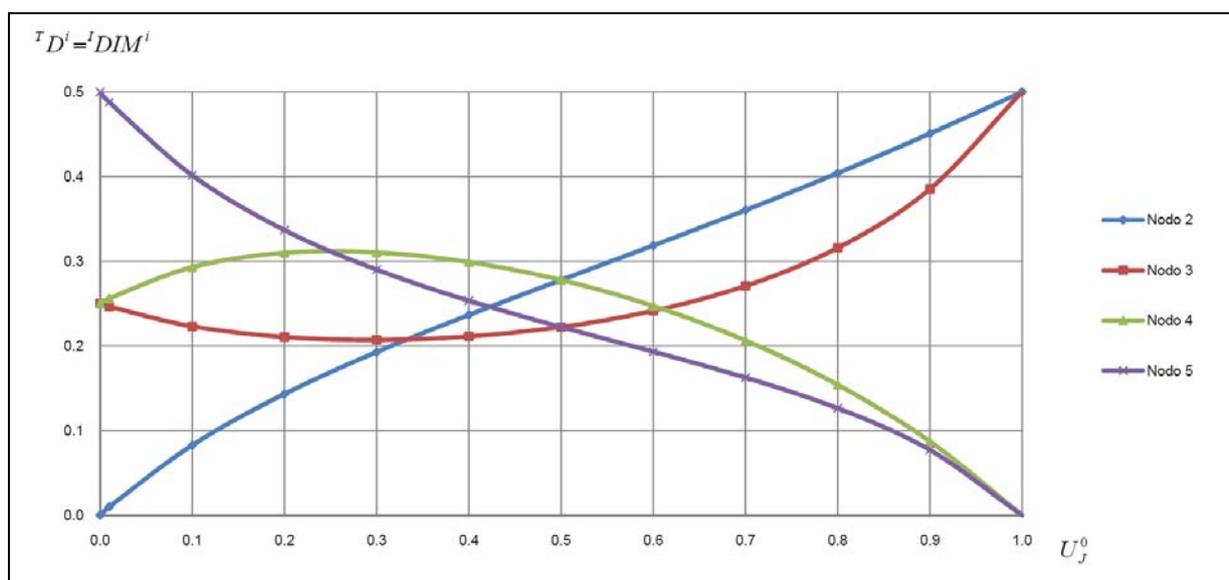


Figura 23: Andamento della Misura Differenziale di Importanza del primo ordine per i nodi Utilizzatori

#### 7.4 Stima delle misure con significato di “Sensitività”

Nel presente paragrafo, mediante la Misura Ibrida definita nel §6.6, è realizzato un ordinamento con significato di Sensitività degli elementi del Sistema rete rappresentato in Figura 11, al fine di indagarne la Struttura. Tale misura è definita a partire da uno sviluppo in serie di Taylor del Rischio complessivo rispetto alla Indisponibilità delle Connessioni, troncato al primo ordine; pertanto, la Misura Ibrida fornisce una valutazione “Locale” di Sensitività. La Misura Ibrida dipende esplicitamente dalla incertezza associata alle variabili di ingresso ed è definita in modo consistente con un approccio di Decomposizione della varianza associata alla variabile di uscita del modello.

In accordo a quanto riportato nel §676.6, la stima della Misura Ibrida può essere realizzata:

- mediante metodi analitici approssimati, utilizzando le equazioni che definiscono la misura a partire dalla conoscenza delle derivate parziali del primo ordine del Rischio complessivo, ovvero come propagazione OAT delle incertezze associate alle variabili di ingresso del modello, mediante la “Legge di propagazione degli errori”;
- mediante Tecniche di campionamento.

### 7.4.1 Stima della Misura Ibrida mediante Metodi analitici approssimati

#### Stima analitica della Misura Ibrida di Sensitività

La stima della Misura Ibrida di Sensitività può essere realizzata utilizzando le definizioni fornite nel §6.6.

Nel caso particolare di interesse per l'analisi della Struttura del Sistema a rete, la stima della Misura Ibrida  $I_j^i$  per la Connessione  $j$ , riferita al nodo Utilizzatore  $i$ , può essere effettuata mediante l'eq. (6.64).

Assumiamo che l'incertezza associata alla Indisponibilità delle Connessioni sia rappresentata da una distribuzione normale  $N[\bar{U}_j = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$ . I valori delle derivate parziali del primo ordine che compaiono nell'eq. (6.64), stimate in  $U_j = 0,5$ , sono riportati in Tabella 18. Rispetto al Rischio complessivo, la Misura Ibrida per la Connessione  $j$

risulta  $I_j = \sum_{i=1}^{Nn} I_j^i$ ; la Misura Ibrida per il nodo Utilizzatore risulta  $I^i = \sum_{j=1}^{Nc} I_j^i$ .

In Tabella 42 sono riportati i valori ottenuti per la Misura Ibrida, da utilizzare per un ordinamento con significato di Sensitività degli elementi del Sistema a rete rappresentato in Figura 11.

		$I_j^i$				$I_j$	
		Nodo 2	Nodo 3	Nodo 3	Nodo 5	Valore	Ordinamento
$I_j^i$	Connessione 21	0,152	0,000	0,076	0,000	0,228	2
	Connessione 31	0,084	0,337	0,042	0,169	0,632	1
	Connessione 23	0,017	0,000	0,008	0,000	0,025	5
	Connessione 42	0,000	0,000	0,070	0,000	0,070	3
	Connessione 53	0,000	0,000	0,000	0,045	0,045	4
$I^i$	Valore	0,253	0,337	0,197	0,213		
	Ordinamento	2	3	4	3		

Tabella 42: Misura Ibrida di Sensitività

Come prevedibile, la somma delle misure è pari a 1. Infatti, la Misura Ibrida è consistente con un approccio di decomposizione della varianza delle variabili di uscita del modello nei contributi associati alle variabili in ingresso. In generale, la somma dei valori di una misura così definita è pari a 1 solo per modelli additivi (quindi almeno lineari). Nel caso specifico, la Misura Ibrida è definita a partire da uno sviluppo in serie di Taylor del Rischio complessivo troncato al primo ordine, ovvero a seguito di una "linearizzazione" del modello del Sistema rete.

#### Stima analitica della Misura Ibrida mediante propagazione OAT delle incertezze

La stima analitica della Misura Ibrida di Sensitività può essere realizzata in modo equivalerne con riferimento propagazione delle incertezze associate alle variabili di ingresso del modello mediante l'eq (3.10) che esprime la "Legge di propagazione degli errori". Tale approccio evidenzia la caratteristica OAT della misura ovvero il riferimento esclusivo alla variazione singola di ciascuna variabile di ingresso.

La stima è realizzata a partire dalla conoscenza:

- della Matrice Jacobiana della Funzione di Sistema  $\mathfrak{R}^5 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  che per il Sistema a rete in Figura 11, assumendo  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , è riportata in Tabella 18 (esclusa l'ultima colonna).
- della Matrice di covarianza tra le variabili di ingresso (Indisponibilità delle Connessioni) che per ipotesi è diagonale essendo le Connessioni tra loro indipendenti; assumiamo una deviazione standard sufficientemente piccola, pari a  $\sigma_{jj}^{1/2} = 0,01 \quad \forall j$ .

Le suddette assunzioni sono coerenti con l'utilizzo di una distribuzione Normale  $N[\bar{U}_j = 0,5; \sigma_{jj}^{1/2} = 0,01]$ , utilizzata nel §7.2.2 per la stima delle Misure Differenziali di Importanza mediante metodi di regressione lineare. Mediante un approccio OAT, la varianza associata a ciascuna variabile (Indisponibilità di una Connessione) è "propagata" singolarmente al fine di valutarne gli effetti in termini di varianza e covarianza associate ai Rischi parziali.

E' di seguito mostrato il calcolo per la Connessione 21. La Matrice di covarianza tra le Connessioni, riportata in Tabella 43, ha come unico elemento non nullo la varianza associata alla Connessione in oggetto.

Connessione	21	31	23	42	53
21	1,00E-04	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0

Tabella 43: Matrice di covarianza tra le Connessioni (stima OAT - Connessione 21)

In Tabella 44 sono riportati i risultati avuti dalla applicazione dell'eq (3.10), nota come "Legge di propagazione degli errori". La matrice simmetrica 4 x 4 (Tabella 44 esclusa l'ultima riga) rappresenta la Matrice di covarianza tra i Rischi parziali della rete, dovuta alla variazione singola dell'Indisponibilità della Connessione 21. Questa può essere confrontata con la Tabella 26 che rappresenta la Matrice di covarianza tra i Rischi parziali per la variazione contemporanea dell'Indisponibilità di tutte le Connessioni.

Nodo	2	3	4	5
2	5.63E-05	0.00	2.81E-05	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.00
4	2.81E-05	0.00	1.41E-05	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00
Sistema	8.44E-05	0.00E+00	4.22E-05	0.00E+00

Tabella 44: Matrice di covarianza tra i Rischi parziali (stima OAT - Connessione 21)

Dalla eq. (3.9), la somma dei valori ottenuti per ciascun nodo (per riga o per colonna indifferentemente) fornisce il contributo alla varianza associata al Rischio complessivo dovuta alla Connessione 21 che si realizza mediante ciascun nodo Utilizzatore, in termini di varianza associata o covarianza con i restanti nodi Utilizzatori.

Procedendo in modo analogo per tutte le Connessioni, si costruisce la matrice riportata in Tabella 45.

	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	Nodo 5	Sistema
OAT - Connessione 21	8,44E-05	0,00	4,22E-05	0,00	1,27E-04
OAT - Connessione 31	4,69E-05	1,88E-04	2,34E-05	9,38E-05	3,52E-04
OAT - Connessione 23	9,38E-06	0,00	4,69E-06	0,00	1,41E-05
OAT - Connessione 42	0,00	0,00	3,91E-05	0,00	3,91E-05
OAT - Connessione 53	0,00	0,00	0,00	2,50E-05	2,50E-05
Sistema	1,41E-04	1,88E-04	1,09E-04	1,19E-04	5,56E-04

Tabella 45: Matrice delle varianze e covarianze prodotte da variazioni OAT

Ciascuna riga è associata alla variazione OAT dell'Indisponibilità di una Connessione e fornisce l'approssimazione al primo ordine della varianza associata ai Rischi parziali della rete.

I valori nell'ultima riga (Sistema), calcolati come somma dei valori nelle righe precedenti, rappresentano l'approssimazione al primo ordine del contributo alla varianza associata al Rischio complessivo, dovuto alla variazione singola dell'Indisponibilità di tutte le Connessioni, che si realizza mediante ciascun nodo Utilizzatore ( ${}^iVar(R)$ ). I valori nell'ultima colonna (Sistema), calcolati come somma dei valori nelle colonne precedenti, rappresentano l'approssimazione al primo ordine del contributo alla varianza associata al Rischio complessivo, dovuto alla variazione singola dell'Indisponibilità di ciascuna Connessione, che si realizza mediante tutti i nodi Utilizzatori ( ${}_jVar(R)$ ).

Il valore riportato nell'ultima riga e nell'ultima colonna della Tabella 45, rappresenta l'approssimazione al primo ordine della varianza associata al Sistema  $Var(R)$ . Dai valori riportati in Tabella 45 si procede alla stima della Misura Ibrida per

la Connessione  $j$   $\left( I_j = \frac{jVar(R)}{Var(R)} \right)$  e per il nodo Utilizzatore  $i$   $\left( I^i = \frac{iVar(R)}{Var(R)} \right)$  rispetto al Rischio complessivo.

I valori così stimati per la Misura Ibrida di ciascuna Connessione e nodo Utilizzatore coincidono con i valori riportati in Tabella 42, calcolati mediante le relative definizioni.

E' opportuno osservare che la varianza associata al Rischio complessivo ed il contributo relativo a ciascun nodo Utilizzatore (ultima riga in Tabella 45) sono i medesimi riportati in Tabella 26 relativi alla variazione contemporanea dell'Indisponibilità di tutte le Connessioni. Tale "sovrapposizione degli effetti" è resa possibile dalla approssimazione del primo ordine implicita nell'utilizzo della Matrice Jacobiana per la rappresentazione del Sistema.

Un ulteriore effetto di tale "linearizzazione" è la possibilità di ottenere gli stessi valori per la Misura Ibrida di ciascuna Connessione rispetto al rischio complessivo associato al Sistema, procedendo con un approccio analogo ma considerando la variazione contemporanea di tutte le Connessioni tranne la Connessione in oggetto (simulazione OAT-). La Matrice di covarianza tra le Connessioni ha come unico elemento nullo sulla diagonale la varianza associata alla Connessione in oggetto. Tale circostanza rappresenta più correttamente un limite dell'approccio adottato, per l'impossibilità di valutare il contributo alla varianza associata al Rischio complessivo del Sistema dovuto alle interazioni tra le variabili, che si manifestano con la loro variazione contemporanea.

#### 7.4.2 Stima della Misura Ibrida mediante Tecniche di campionamento

La stima della Misura di Importanza ibrida può essere effettuata mediante Tecniche di campionamento, in accordo a quanto riportato nel §6.2.3. In particolare, interessa valutare la propagazione delle incertezze associate alle variabili di ingresso del modello mediante la realizzazione di Simulazioni OAT (One-At-Time) .

In ciascuna simulazione OAT, è considerata l'incertezza associata alla Indisponibilità di una singola Connessione. Ad ogni "storia" è "estratto" un valore di Indisponibilità della Connessione in oggetto dalla relativa distribuzione di probabilità ed è valutata la varianza associata al Rischio complessivo del Sistema a rete (analogamente per i Rischi parziali). La somma dei valori ottenuti nelle simulazioni OAT fornisce l'approssimazione al primo ordine della varianza associata al Rischio complessivo.

In ciascuna simulazione, mediante un campionamento Latin Hypercube (vedi §1.3), sono realizzate 1.000 "storie". Al fine di indagare la Struttura del Sistema a rete, e non dovendo utilizzare le espressioni analitiche che definiscono la Misura Ibrida di Sensitività, assumiamo per l'Indisponibilità di ciascuna Connessione una distribuzione uniforme sull'intero intervallo di variazione ovvero  $U_j = U[0;1]$ . In Tabella 46 sono riportati i risultati avuti dalle  $Nc = 5$  simulazioni OAT. Per ciascuna Connessione, la Misura Ibrida di Sensitività è calcolata dal rapporto tra la varianza associata al Rischio complessivo stimata nella relativa simulazione OAT e la varianza complessiva stimata come somma dei valori ottenuti dalle  $Nc = 5$  simulazioni.

	Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53
<b>Simulazione</b>	1#	2#	3#	4#	5#
<b>Valore medio per Rischio complessivo</b>	2,3125	2,3125	2,3125	2,3125	2,3125
<b>Varianza per Rischio complessivo</b>	0,105	0,293	0,012	0,033	0,021
<b>Misura Ibrida</b>	0,228	0,632	0,025	0,070	0,045
<b>Ordinamento</b>	2	1	5	3	4

Tabella 46: Misura Ibrida mediante simulazioni OAT

I valori stimati per la Misura Ibrida di ciascuna Connessione mediante Simulazioni OAT (riportati in Tabella 46) coincidono con i valori stimati analiticamente (riportati in Tabella 42), anche se i valori ottenuti per la varianza associata al Rischio complessivo nel caso  $U[0;1]$  non sono confrontabili con valori ottenuti dal calcolo analitico riferito al valore nominale  $U_j = 0,5 \quad \forall j$ , per una deviazione standard sufficientemente piccola.

### Stima della Misura Ibrida $I_j^*$ mediante normalizzazione alternativa

Come suggerito nel §6.6, effettuiamo una ulteriore simulazione (6#) nella quale è contemporaneamente variabile l'Indisponibilità di tutte le Connessioni. Assumiamo una distribuzione uniforme  $U_j = U[0;1]$  per rappresentare l'incertezza associata alla Indisponibilità delle Connessioni. In Figura 24 sono riportate le funzioni Cumulate di probabilità per il Rischio complessivo associato al Sistema, stimate mediante le simulazioni OAT 1# - 5# e la simulazione 6#. Minore è la pendenza della curva riferita ad una specifica Connessione e maggiore è il contributo apportato alla varianza associata al Rischio complessivo.

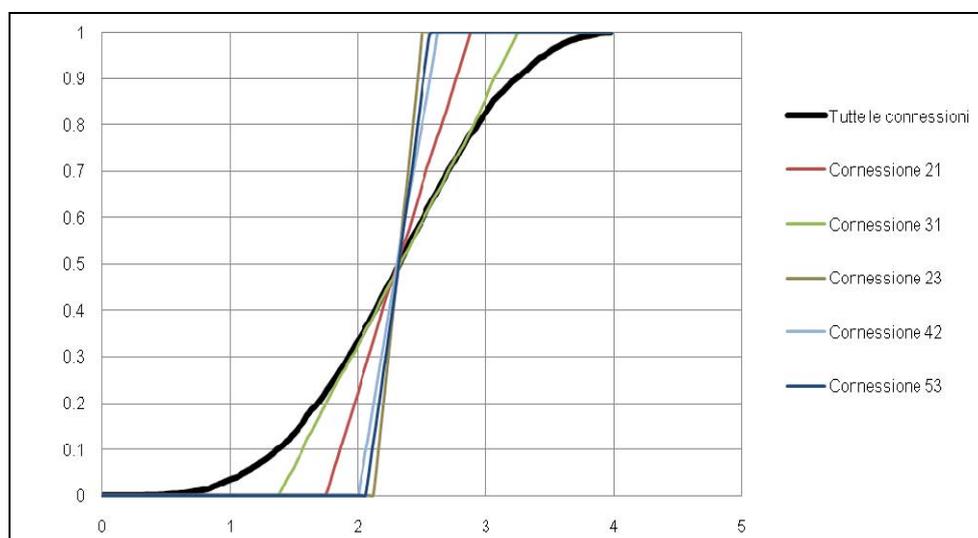


Figura 24: Funzione cumulata di probabilità da simulazioni OAT

Dalla simulazione 6#, la varianza associata al Rischio complessivo risulta pari a 0,4916.

Tale valore risulta diverso (maggiore) dal valore stimato come somma dei contributi dovuti alla variazione OAT delle variabili riportati in Tabella 46, pari a 0,464.

La differenza tra i due valori (pari a 0,028) fornisce una stima del contributo alla varianza totale associata al Rischio complessivo, dovuto alle interazioni tra le Connessioni. Tali interazioni non sono tenute in conto nella Misura Ibrida  $I_j$  definita nel §6.6, riferita ad uno sviluppo in serie di Taylor del Rischio complessivo troncato al primo ordine

La disponibilità di una stima non approssimata della varianza associata al Rischio complessivo, a seguito della realizzazione della simulazione #6 in cui le Indisponibilità di tutte le Connessioni variano contemporaneamente, permette una "normalizzazione alternativa" della Misura Ibrida di Sensitività.

In particolare, utilizziamo la medesima definizione della Misura Ibrida fornita dalla eq. (6.64) nel caso particolare in cui  $w_i = 1 \quad \forall i$  ma introduciamo la stima non approssimata della varianza associata al Rischio complessivo  $Var[R]$ .

In Tabella 47 sono riportati i valori così ottenuti per la Misura Ibrida di ciascuna Connessione, rispetto al Rischio complessivo  $^*I_j$ , ed il conseguente ordinamento di Sensività. La differenza  $1 - \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_c} I_j^i$  misura il contributo alla varianza dovuto alle interazioni tra le variabili di ingresso, in qualsiasi numero e combinazione.

	Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53	$1 - \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=1}^{N_c} ^*I_j^i$
Misura Ibrida $^*I_j$	0.215	0.596	0.024	0.066	0.042	0.057
Ordinamento	2	1	6	3	5	4

Tabella 47: Misura Ibrida di Sensività  $^*I_j$ , Normalizzazione alternativa

I medesimi valori ottenuti per Misura Ibrida di Sensività sono graficamente rappresentati in Figura 18.

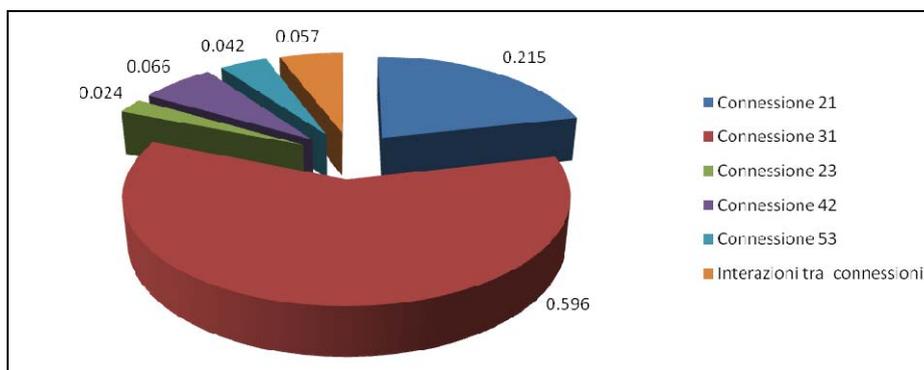


Figura 25: Misura Ibrida di Sensività, Normalizzazione alternativa

La Misura Ibrida di Sensività delle Connessioni  $^*I_j$ , calcolata con riferimento alla stima non approssimata della varianza associata al Rischio complessivo, coincide con l'Indice di Sensività principale" definito nel §3.3.3.

La misura  $^*I_j$  permette di realizzare un unico ordinamento che include le Connessioni considerate singolarmente e le interazioni che tra queste intercorrono, valutate "nel complesso" ovvero rispetto a qualsiasi combinazione e numero di variabili.

**Stima della Misura Ibrida  $^-I_j$  mediante simulazioni OAT-**

Come suggerito nel §6.6, effettuiamo ulteriori  $N_c = 5$  simulazioni OAT-, in ciascuna delle quali l'Indisponibilità associata ad una Connessione è mantenuta fissa al suo valore nominale  $U_j = 0,5$  mentre alle restanti Connessioni è associata una incertezza, rappresentata da una distribuzione uniforme  $U_j = U[0;1]$ .

Per ciascuna Connessione procediamo alla stima di una Misura Ibrida di Sensività  $^-I_j$  che, per analogia con gli Indici di Sensività Globali definiti nel §3.3.3, è data dal complemento a 1 del rapporto tra la varianza associata al Rischio complessivo stimata nella relativa simulazione OAT- (7#-10#) e la varianza stimata nella simulazione (6#).

La Misura Ibrida di Sensività  $^-I_j$  così calcolata fornisce una stima dell'"Indice di Sensività globale" definito nel §3.3.3, approssimata perché valutata rispetto al solo valore  $U_j = 0,5$ , di interesse per l'analisi della Struttura della rete, e non ripetuta per diversi valori nel relativo intervallo di variazione.

In Tabella 48 sono riportati i valori ottenuti per la Misura Ibrida di Sensività  $\bar{I}_j$  di ciascuna Connessione rispetto al Rischio complessivo, ed il conseguente ordinamento di Sensività.

	Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53
<b>Simulazione</b>	7#	8#	9#	10#	11#
<b>Valore medio per Rischio complessivo</b>	2.3116	2.3130	2.3132	2.3120	2.3135
<b>Varianza per Rischio complessivo</b>	0.3706	0.1790	0.4662	0.4470	0.4587
<b>Misura Ibrida <math>\bar{I}_j</math></b>	0.246	0.636	0.052	0.091	0.067
<b>Ordinamento</b>	2	1	5	3	4

Tabella 48: Misura Ibrida  $\bar{I}_j$  mediante simulazioni OAT-

In Tabella 49 sono riportati i valori ottenuti per la quantità  $\bar{I}_j - I_j^*$ , che fornisce una stima del contributo alla varianza associata al Rischio complessivo dovuto alle interazioni tra la Connessione j e le restanti Connessioni, ed il conseguente ordinamento.

	Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53
<b>Misura Ibrida <math>\bar{I}_j - I_j^*</math></b>	0.031	0.040	0.028	0.025	0.025
<b>Ordinamento</b>	2	1	5	4	4

Tabella 49: Contributo  $\bar{I}_j - I_j^*$  associato alle interazioni

### 7.4.3 Confronto tra la Misura Ibrida e la Misura Differenziale del primo ordine

Procediamo al confronto tra l'ordinamento degli elementi del Sistema rete rappresentato in Figura 11, Connessioni e nodi Utilizzatori, prodotto dalla Misura Ibrida di Sensività e dalla Misura Differenziale di Importanza. Entrambe le misure forniscono una valutazione "locale", valida in un intorno del valore  $U_j = 0,5$ , e sono basate su una approssimazione del primo ordine del Rischio complessivo associato al Sistema a rete. I risultati ottenuti mostrano il diverso contenuto informativo delle due misure, chiarendo gli obiettivi di un ordinamento con significato di Importanza e di Sensività.

In Figura 26 sono riportati i valori stimati per Misura Ibrida di Sensività ( $\bar{I}_j$  riportati in Tabella 42) e per la Misura Differenziale di Importanza del primo ordine ( ${}^1DIM_j$  riportati in Tabella 28) di ciascuna Connessione, rispetto al Rischio complessivo associato al Sistema a rete in Figura 11. Tali valori coincidono con la somma estesa a tutti i nodi Utilizzatori, dei valori stimati per ciascuna Connessione rispetto a ciascun nodo ( $I_j^i$  e  ${}^1DIM_j^i$ ).

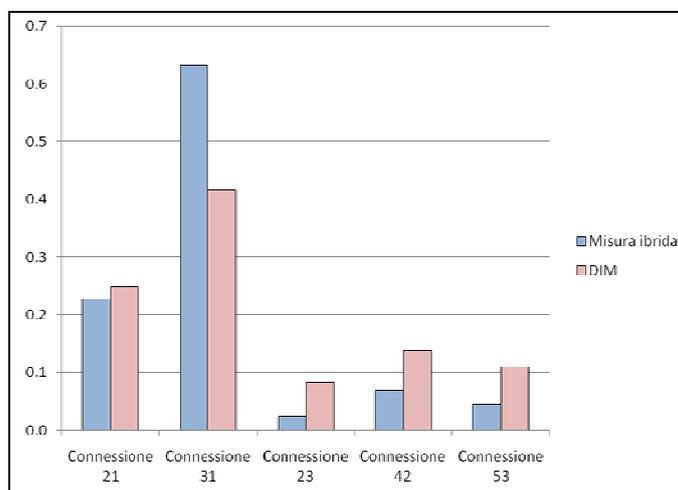


Figura 26: Misura Ibrida di Sensività e Misura Differenziale di Importanza per le Connessioni

Le misure producono lo stesso ordinamento delle Connessioni, con significato di Importanza ( ${}^1DIM_j$ ) e Sensitività ( $I_j$ ).

In termini relativi, la Misura Ibrida enfatizza la “criticità” della Connessione 31, coerentemente la topologia della rete; infatti, l’incertezza associata alla Indisponibilità della Connessione 31, che rappresenta un punto singolo di guasto per due nodi Utilizzatori (3 e 5), contribuisce in modo prevalente alla incertezza associata al Rischio complessivo.

In Figura 27 sono riportati i valori della Misura Ibrida di Sensitività ( $I^i$  riportati in Tabella 42) e della Misura Differenziale di Importanza del primo ordine ( ${}^1DIM^i$  riportati in Tabella 28) stimati per ciascun Nodo Utilizzatore, rispetto al Rischio complessivo associato al Sistema a rete in Figura 11. Tali valori coincidono con la somma estesa a tutte le Connessioni, dei valori stimati per ciascuna Connessione, rispetto a ciascun nodo Utilizzatore ( $I_j^i$  e  ${}^1DIM_j^i$ ).

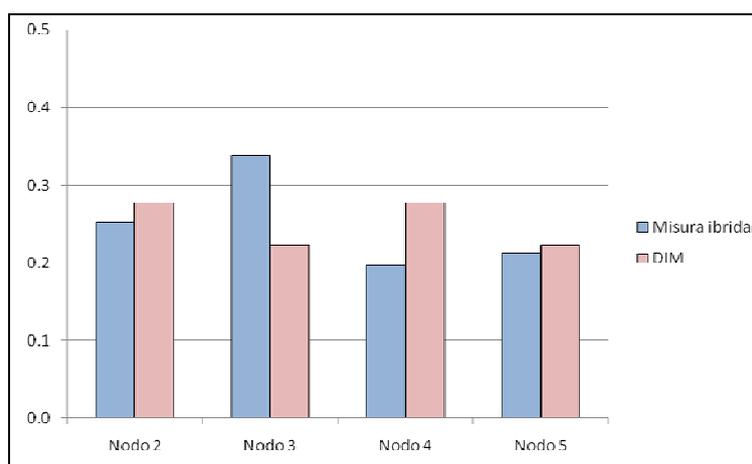


Figura 27: Misura Ibrida e Misura differenziale per i nodi Utilizzatori

E’ evidente il diverso ordinamento realizzato dalla Misura Ibrida di Sensitività e dalla Misura Differenziale di Importanza per i nodi Utilizzatori: i nodi 2 e 4 hanno uguale  ${}^1DIM^i$ , maggiore del valore comune per i nodi 3 e 5; il nodo 3 è caratterizzato dal massimo valore della  $I^i$ , seguito nell’ordine dai nodi 2, 5 e 4.

In generale, un ordinamento con significato di “Importanza” è definito dal contributo sulla variabile di uscita dovuto a ciascuna variabile di ingresso; un ordinamento con significato di “Sensitività” è definito dal contributo sulla incertezza associata alla variabile di uscita dovuta alla incertezza associata a ciascuna variabile di ingresso. Nel caso specifico, i risultati sono coerenti con il diverso significato delle misure e con la topologia del Sistema rete in Figura 11:

- l’ordinamento prodotto dal  ${}^1DIM^i$  indica che il contributo dell’Indisponibilità delle Connessioni al Rischio complessivo si manifesta maggiormente per la non raggiungibilità dei nodi 2 e 4 (che coinvolge tre Connessioni), rispetto ai nodi 3 e 5 (che coinvolge due Connessioni); per tale motivo, i nodi 2 e 4 sono indicati come maggiormente critici, in termini di “Importanza”, rispetto ai restanti nodi;
- l’ordinamento prodotto dalla  $I^i$  indica che il contributo dell’incertezza associata all’Indisponibilità delle Connessioni all’incertezza associata al Rischio complessivo si manifesta maggiormente per la non raggiungibilità del nodo 3 esclusivamente dovuta alla Indisponibilità della Connessione 31.

In Figura 28 è mostrato l’andamento della Misura Ibrida  $I^i$  al variare del valore (comune) di Indisponibilità  $U_j$  assunto per le Connessioni. Tale andamento può essere confrontato con l’andamento del  ${}^1DIM^i$  riportato in Figura 23.

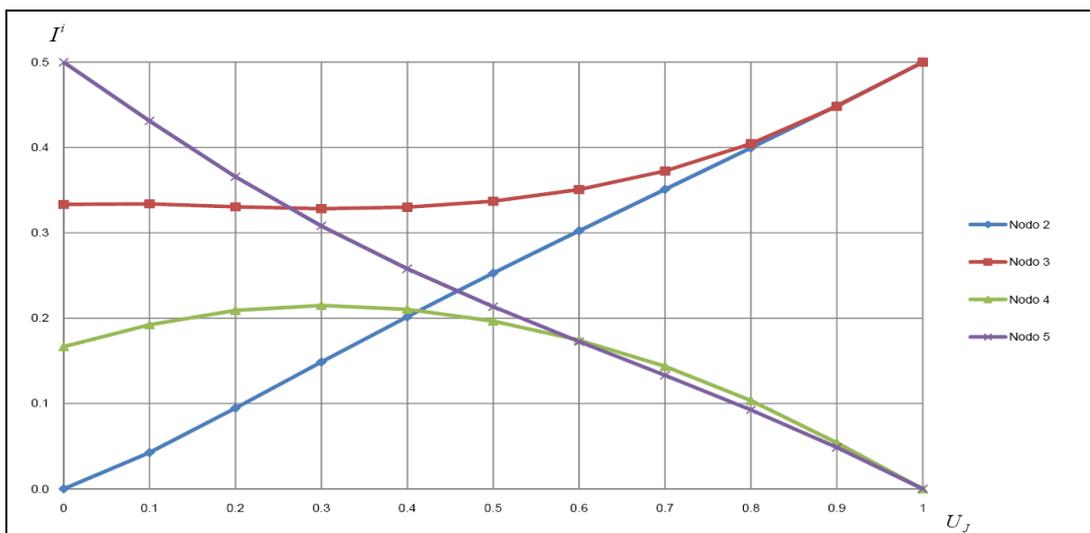


Figura 28: Misura Ibrida e Misura differenziale per i nodi Utilizzatori

E' evidente che l'andamento qualitativo delle curve che rappresentano le misure  $I^i$  e  ${}^i DIM^i$  al variare di  $U_j$  risulta molto simile. Il valore delle misure ed il conseguente ordinamento risulta diverso, in particolare per i nodi 3 e 4.

In particolare, per  $U_j \rightarrow 0$ , il  ${}^i DIM^i$  dei nodi Utilizzatori 3 e 4 coincidono in quanto entrambi sono caratterizzati dalla presenza di una Connessione come punto singolo di guasto; le misure  $I^i$  sono differenti ed evidenziano come l'incertezza associata alla Connessione 31, che per la topologia della rete è riferita unicamente al nodo 3, sia maggiore del contributo dovuto alle Connessioni 21, 23, 31 e 42 secondo la logica che interessa la raggiungibilità del nodo 4.

Il nodo Utilizzatore 3 risulta maggiormente critico nell'ordinamento con significato di Sensività definito dal  $I^i$ , per valori di  $U_j$  compresi tra 0,3 e 0,8. Tale circostanza non si verifica per l'ordinamento di Importanza definito dal  ${}^i DIM^i$ .

Il nodo Utilizzatore 4 risulta il meno critico nell'ordinamento con significato di Importanza definito dal  ${}^i DIM^i$  per tutti valori di  $U_j$ . Tale circostanza non si verifica per l'ordinamento di Sensività definito dal  $I^i$ .

#### 7.4.4 Confronto tra la Misura Ibrida e gli Indici di Sensività

Per lo sviluppo di una analisi Globale di Incertezza occorre procedere al calcolo degli Indici di Sensività definiti nel §3.3.3, procedendo come descritto nel §3.3.4. Tale stima è realizzata per il Sistema a rete in Figura 11, al fine di avere un riferimento rispetto al quale confrontare i valori ottenuti per la Misura Ibrida.

L'incertezza associata a ciascuna variabile di ingresso (Indisponibilità delle Connessioni) è rappresentata mediante una (comune) distribuzione uniforme  $U_j = U[0;1]$ .

Il calcolo degli Indici di Sensività delle  $N_c$  Connessioni del Sistema a rete è realizzato mediante il campionamento di  $2 \cdot N \cdot N_c$  valori delle variabili di ingresso (Indisponibilità delle Connessioni) dalle relative distribuzioni di probabilità. La stima è realizzata attraverso  $N = 100.000$ <sup>12</sup> campionamenti MonteCarlo.

<sup>12</sup> Tale numero si è reso necessario per una adeguata "stabilità" della stima (convergenza dell'algoritmo riferita alla seconda cifra significativa).

La stima dell'Indice di Sensività principale e dell'Indice di Sensività Globale è realizzata mediante le eq. (3.24). I valori ottenuti sono riportati in Tabella 50.

		Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53	Sistema
Indice di Sensività principale $S_j$	Valore	0,215	0,599	0,023	0,065	0,042	0,94
	Ordinamento	2	1	5	3	4	-
Indice di Sensività globale $S_{Tj}$	Valore	0,244	0,635	0,046	0,079	0,058	1,06
	Ordinamento	2	1	5	3	4	-
Indice di Sensività interazioni $S_{Tj} - S_j$	Valore	0,028	0,036	0,023	0,014	0,017	0,12
	Ordinamento	2	1	3	5	4	-

Tabella 50: Indice di Sensività principale e Indice di Sensività Globale

E' interessante realizzare alcuni confronti tra i valori ottenuti per la Misura Ibrida  $I_j$  e le sue generalizzazioni  $^*I_j$  e  $^-I_j$  e per gli Indici di Sensività.

In Tabella 51 è effettuato il confronto tra i valori riportati in Tabella 42 per la Misura Ibrida  $I_j$ , i valori riportati in Tabella 47 per la Misura Ibrida  $^*I_j$  ed i valori ottenuti per gli Indici di Sensività principali  $S_j$  riportati in Tabella 50.

		Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53
$I_j$	Valore	0,228	0,632	0,025	0,070	0,045
	Ordinamento	2	1	5	3	4
$^*I_j$	Valore	0,215	0,596	0,024	0,066	0,042
	Ordinamento	2	1	5	3	4
$S_j$	Valore	0,215	0,599	0,023	0,065	0,042
	Ordinamento	2	1	5	3	4

Tabella 51: Confronto tra Misura Ibrida  $I_j$  e Indici di Sensività principali  $S_j$

L'ordinamento delle Connessioni definito dalle misure di Sensività  $I_j$ ,  $^*I_j$  e  $S_j$  è il medesimo.

I valori stimati per  $I_j$  differiscono dai valori stimati per  $S_j$ , in particolare per le Connessioni 21 e 23. Tale differenza è dovuta alla stima approssimata (al primo ordine) della varianza totale associata al Rischio complessivo di Sistemi a rete.

I valori stimati per  $^*I_j$ , riferiti alla varianza associata al Rischio complessivo considerando la variazione contemporanea dell'Indisponibilità di più Connessioni, forniscono una stima degli Indici di Sensività principali  $S_j$  definiti nel §3.3.3.

In Tabella 52 è effettuato il confronto tra i valori riportati in Tabella 48 per la Misura Ibrida  $^-I_j$  ed i valori ottenuti per gli Indici di Sensività globali  $S_{Tj}$  riportati in Tabella 50.

		Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53
$^-I_j$	Valore	0,246	0,636	0,052	0,091	0,067
	Ordinamento	2	1	5	3	4
$S_{Tj}$	Valore	0,244	0,635	0,046	0,079	0,058
	Ordinamento	2	1	5	3	4

Tabella 52: Confronto tra Misura Ibrida  $^-I_j$  e Indici di Sensività Globali  $S_{Tj}$

Come atteso, la Misura Ibrida  $^-I_j$  fornisce una stima approssimata degli Indici di Sensività Globali  $S_{Tj}$ .

L'ordinamento definito dalle misure  $\bar{I}_j$  e  $S_{Tj}$  coincide con l'ordinamento definito da  $I^i$  e  $S_j$  ovvero il contributo delle interazioni tra le variabili non è tale da modificare l'ordinamento delle Connessioni con significato di Sensività.

In Tabella 53 è effettuato il confronto tra i valori ottenuti per le quantità  $\bar{I}_j - I_j^*$  e  $S_{Tj} - S_j$ , riferite alle interazioni tra la Connessione  $j$  e le restanti Connessioni del Sistema a rete.

		Connessione 21	Connessione 31	Connessione 23	Connessione 42	Connessione 53
$\bar{I}_j - I_j^*$	Valore	0,032	0,040	0,028	0,024	0,025
	Ordinamento	2	1	3	4	4
$S_{Tj} - S_j$	Valore	0,028	0,036	0,023	0,014	0,017
	Ordinamento	2	1	3	5	4

Tabella 53: Confronto tra Misura Ibrida  $\bar{I}_j - I_j^*$  e Indici di Sensività  $S_{Tj} - S_j$

L'ordinamento delle Connessioni definito dalla quantità  $\bar{I}_j - I_j^*$  e  $S_{Tj} - S_j$  è il medesimo.

Le Connessioni coinvolte nei percorsi ridondanti verso il nodo Utilizzatore 2 sono le prime tre nell'ordinamento; con riferimento alle interazioni tra le restanti variabili, la Connessione 23 fornisce un contributo alla varianza associata al Rischio complessivo del Sistema maggiore del contributo dovuto alle Connessioni 42 e 53, a differenza di quanto osservato per la loro variazione singola.

Le differenze tra i valori numerici delle quantità  $\bar{I}_j - I_j^*$  e  $S_{Tj} - S_j$  calcolate ciascuna Connessione sono dello stesso ordine di grandezza delle quantità stesse. Per Sistemi a rete complessi non si può escludere che tali differenze producano un diverso ordinamento. Più in generale, le differenze tra i valori della quantità  $S_{Tj} - S_j$  per componenti diversi, sulla base dei quali è definito l'ordinamento delle Connessioni con riferimento alle interazioni che lo coinvolgono, sono dello stesso ordine di grandezza delle quantità stesse; pertanto, se il numero di campionamenti non è adeguato, anche l'approssimazione numerica della stima degli Indici di sensitività realizzata mediante la procedura definita nel §3.3.4 può influire sull'ordinamento.

Se la stima della Misura Ibrida  $I_j^i$  è realizzata analiticamente, la stima delle Misure  $I_j^i$  e  $\bar{I}_j$  mediante  $N_C + 1$  simulazioni rappresenta una validità opportunità per una indagine preliminare in cui identificare gli elementi del Sistema a cui riferire una successiva analisi Globale di Incertezza. Altrimenti, la stima delle Misure  $I_j^i$ ,  $I_j^*$  e  $\bar{I}_j$  richiede  $2 \cdot N_C + 1$  simulazioni, come per la stima degli Indici di sensitività secondo la procedura descritta nel §3.3.4. Anche in tal caso, la stima delle Misure  $I_j^i$ ,  $I_j^*$  e  $\bar{I}_j$  può essere utilizzata per una indagine preliminare, in quanto richiede un numero inferiore di campionamenti per ciascuna simulazione, a scapito del contenuto informativo.

---

## BIBLIOGRAFIA

### **Analisi di Sistema mediante metodi di simulazione**

- [1] Rubinstein RY, Simulation and the MonteCarlo Method, John Wiley & Sons, New York (1981)
- [2] RL Iman, WJ Conover, A distribution-free approach to induce rank correlation among input variables. Commun Stat Simul Comput (1982), 11(3):311-34.
- [3] Breeding RJ, Helton JC, Gorham ED, Harper FT, Summary description of the methods used in the probabilistic risk assessment for NUREG-1150, Nucl Eng Des (1992),135(1) 1-27.
- [4] R. Billinton, W. Li, "Reliability assessment of Electrical Power System Using Montecarlo Methods", Plenum Press, (1994) New York.
- [5] Dubi A., MonteCarlo application in system engineering. John Wiley and Sons (2000).
- [6] Marseguerra M, Zio E, Basic of the MonteCarlo method with application to system reliability. LiLoLe-Verlag GmbH, Hagen (2002).
- [7] P.E. Labeau, E. Zio; Procedures of MonteCarlo transport simulation for applications in system engineering, Reliab Eng Syst Safety 77 (2002) 217-228.
- [8] J.C. Helton, Davis FJ. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analysis of complex systems. Reliab Eng Syst Safety 81(2003) 23-69.
- [9] J.C. Helton., Johnson JF, Oberkampf WL., An exploration of alternative approaches to the representation of uncertainty in model prediction, Reliab Eng Syst Safety 85 (2004) 39-71.
- [10] L. Campioni, P. Vestrucci, "Monte carlo importance sampling optimisation for system reliability applications", Annals of Nuclear Energy, 21:1005-1025, 2004. L. Campioni, R.Scardovelli, P. Vestrucci, "Biased monte carlo optimization: the basic approach", Reliab Eng Syst Safety 87 (2005) 387-394.
- [11] P. Vestrucci, L. Campioni; A comparison of different MonteCarlo approaches to RAMS analysis, Atti del convegno "Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM8", (2006) New Orleans.
- [12] M.Marseguerra, E.Zio, "Optimizing maintenance and repair policies via a combination of genetic algorithms and MonteCarlo simulation", Reliab Eng Syst Safety 68 (2000) 69-83.

### **Analisi di Importanza e Sensitività**

- [13] L.W. Birnbaum, "On the importance of different elements in a multi-elements system", Multivariate analysis 2, New York, Academic Press, 1969.
- [14] Griffith W.S., Multistate reliability models, Journal of Applied Probability, 17 (1980) 735-744.
- [15] M. D. Morris, "Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments", (1991) Technometrics 33(2),161-174.

- 
- [16] I.M. Sobol ,”Sensitivity Analysis for non linear Mathematical Models”, *Mathematical Modeling & Computational Experiment* , 1 (1993) 407-414.
- [17] JS. Hong, CH. Lie, “Joint reliability-importance of two edges in an undirected network”, *IEEE Trans Reliab* (1993), 42(1):17–23.
- [18] MJ. Armstrong, “Joint reliability-importance of components”, *IEEE Trans Reliab* (1995), 44(3):408–12.
- [19] T. Homma, A. Saltelli, “Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models”, *Reliab Eng Syst Safety*, 52 (1996) 1-17.
- [20] M.C. Cheok, G.W . Parry, R.R. Sherry, “Use of importance measures in risk informed regulatory applications”, *Reliab Eng Syst Safety*, 60 (1998) 213-226.
- [21] D. Vasseru, M. Llory; “International survey on PSA figures of merit, *Reliability Engineering & System Safety*, 1999.
- [22] I.M. Sobol, “Global Sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their MonteCarlo estimates”, *Mathematics and Computers In Simulation* 55 (2001) 271-280.
- [23] M.Van der Borst, H. Shoonakker, “An overview of PSA importance measures”, *Reliab Eng Syst Safety*, 72 (2001) 241-245.
- [24] E. Borgonovo , G.E. Apostolakis, “A new importance measure for risk-informed decision making”, *Reliab Eng Syst Safety*, 72 (2001) 193-212.
- [25] A. Saltelli, “Making Best use of model valuation to compute sensitivity indices”, *Computer Physic Communication*, 145 (2002) 280-297.
- [26] E. Borgonovo, G.E. Apostolakis, S. Tarantola, A. Saltelli, “Comparison of global sensitivity analysis techniques and importance measure in PSA”, *Reliability Engineering and System Safety* (2003) 175-185.
- [27] M.Marseguerra, E.Zio, “MonteCarlo estimation of the differential importance measure: application to the protection system of a nuclear reactor, *Reliab Eng Syst Safety*, 86 (2003) 11-24.
- [28] E. Zio, L. Podofillini, “Importance measures of multi-state components in multistate systems”, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, Vol 10, No 3 (2003) 289-310.
- [29] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, M. Ratto, “Sensitivity Analysis in Practice. A Guide to Assessing Scientific Models”, John Wiley & Sons, New York, (2004) ISBN 0-470-87093-1.232.
- [30] J.C. Helton, J.D Johnson, C.J Sallaberry, C.B. Storlie, “Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis”, *Reliab Eng Syst Safety* 91 (2006) 1175-1209.
- [31] E. Zio , L. Padofillini, “A Second order Differential Importance Measure for Reliability and Risk Applications”, *Reliab Eng Syst Safety* 91 (2006) 1163-1174.
- [32] X.Gao, L. Cui. J Li, “Analysis for Joint importance of components in a coherent system”, *Reliab Eng Syst Safety*, 182 (2007) 282-299.
- [33] E. Borgonovo , “Differential, criticality and Birnbaum importance measures: an application to basic vent, groups and SCCs in event trees and binary decision diagrams”, *Reliab Eng Syst Safety*, 92 (2007) 1458-1467.
- [34] E. Borgonovo, 2007, “A new uncertainty importance measure”, *Reliab Eng Syst Safety* 92 (2007) 771-784.
- [35] **S. La Rovere**, P. Vestrucci, M. Sperandii: Reliability assessment basing on importance measures, *Atti del convegno “Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM8”*, (2006) New Orleans.
-

- [36] **S. La Rovere**, P. Vestrucci, M. Sperandii: Risk significance importance measures for a networked system, Atti del convegno "Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM9", (2009) Hong Kong..
- [37] A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, S. Tarantola, "Global Sensitivity Analysis", (2008) The Primer, John Wiley & Sons.
- [38] E. Borgonovo, 2010, "Sensitivity analysis with finite changes: An application to modified EOQ models", European Journal of Operational Research 200 (2010) 127–138.
- [39] E. Borgonovo, 2010, "The reliability importance of components and prime implicant in coherent and non-coherent system including total-order interactions", European Journal of Operational Research 204 (2010) 485–495.
- [40] **S. La Rovere**, P. Vestrucci, "On influence of the structure of a networked system on its performances", in corso di presentazione al convegno "Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM10"

### Analisi di Sistemi a rete

- [41] L.C. Freeman, "Centrality in Social Networks: Conceptual Clarification". Social Networks, 1 (1979) 215--239.
- [42] W.T. Tutte, "Graph theory", (1984) Encyclopedia of mathematics and its application v.21, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, ISBN 0-201-13520-5
- [43] S. Succi; Automa Cellulare: una nuova frontiera del calcolo scientifico, Franco Angeli, (1991) Milano.
- [44] C.M. Rocco, J.A. Moreno, "Network reliability assessment using a cellular automata approach", Reliab Engng Syst Safety, 78 (2002) 289-295.
- [45] A. Carpignano, M. Piccini, M. Gargiulo, A. Ponta, "Reliability and Availability for Highly Meshed Network Systems: Status of the Art and New Perspectives", RAMS 2002, Washington, (2002) USA.
- [46] S. Bologna, R. Setola, S. Tucci, "Le infrastrutture critiche informatizzate", (2005) Mondo digitale n°4
- [47] G. Apostolakis, S.A. Patterson, "Identification of Critical Locations across Multiple Infrastructures for Terrorist Action", Workshop on Safeguarding National Infrastructure: Integrated Approaches to Failure in Complex Networks, (2005) University of Glasgow.
- [48] **S. La Rovere**, P. Vestrucci, M. Sperandii: "Affidabilità e disponibilità di Sistemi a rete mediante applicazioni di tecniche MonteCarlo e automi cellulari", Atti del convegno "Valutazione e Gestione del Rischio negli Insediamenti Civili ed Industriali VGR06", (2006) Pisa.
- [49] E. Zio E., L. Padovillini, V. Zille, "A combination of MonteCarlo simulation and cellular automata for computing the availability of complex network", Reliab Engng Syst Safety, 91 (2006) 181-190.
- [50] M. Cepin, "Development of a New Method for Assessing Reliability of a Network", Atti del convegno "Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM8", (2006) New Orleans.
- [51] R.d. Pride, C. Di Mauro, C. Logtmeijer, S. Bouchon, J.P. Nordvik, A. Pucet, "Modelling Distributed Vulnerabilities in a complex Network", Atti del convegno "Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM9", (2009) Hong Kong.
- [52] F. Cadini, E. Zio, C. A. Petrescu, "Using centrality measures to rank the importance of the components of a complex network infrastructure", Computer Science, Critical information Infrastructure Security, 5508(2009), 155-167.

**Altri riferimenti**

- [53] N.R. Mann, R.E. Schafer, N.D. Singpurwalla, Method of Statistical Analysis of Reliability and life data, John Wiley and sons (1974).
- [54] CEI 56-50 "Terminologia sulla fidatezza e sulla qualità del servizio" (1991)
- [55] S. Epstein, A. Rauzy "Can we trust PRA?", Reliab Eng Syst Safety 88 (2005) 195-205.
- [56] **S. La Rovere**, M. Maria Bardazza, P. Adinolfi, P. Vestrucci, G. Zappellini, M. Buldrini: "Application of a Systematic Methodology to Terrorism Risk Management", Atti del convegno "Safety and Security Engineering SAFE2005", (2005) Roma.
- [57] **S. La Rovere**, P. Vestrucci, G. Zappellini, M. Buldrini, C. Vercilli, "A systematic methodology to terrorism risk analysis", Atti del convegno "Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM8", (2006) New Orleans.
- [58] **S. La Rovere**, P. Vestrucci, M. Buldrini C. Vercilli, G. Zappellini: "Strumenti per la valutazione di vulnerabilità di uno stabilimento industriale rispetto ad un attacco terroristico", Atti del convegno "Valutazione e Gestione del Rischio negli Insediamenti Civili ed Industriali VGR06", (2006) Pisa.
- [59] D. Vose, "Risk Analysis, A quantitative Guide", John Wiley & Sons, Ltd (2008).

---

*Ringrazio Rita, mia moglie, per la sua capacità e pazienza di ascoltarmi.*

*Ringrazio il Prof. P. Vestrucci per il supporto e lo stimolo che mi ha fornito.*

*Ringrazio il Prof. R. Scardovelli per la possibilità che mi ha offerto.*

