

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

**DOTTORATO DI RICERCA
MECCANICA APPLICATA**

CICLO XXII

Settore scientifico disciplinare di afferenza: ING-IND/13

TITOLO DELLA TESI

**Modellazione multibody di veicoli ferroviari:
sviluppo ed implementazione di modelli innovativi
per l'analisi del contatto ruota – rotaia**

Presentata da: Ing. Enrico Meli

Coordinatore del Dottorato:

Prof. Ing. Vincenzo Parenti Castelli

Relatore:

Prof. Ing. Paolo Toni

Esame finale anno 2009

Dedicato a tutti i componenti della Sezione
di Meccanica Applicata senza i quali
il raggiungimento di questo traguardo
non sarebbe stato possibile.

Un ringraziamento particolare al Prof. Paolo Toni,
all'Ing. Monica Malvezzi ed all'Ing. Jury Auciello
per la disponibilità e la competenza dimostrate.

Indice

INDICE	3
1 INTRODUZIONE	5
2 I MODELLI GLOBALI DI CONTATTO.....	10
2.1 ARCHITETTURA GENERALE DEI MODELLI	10
2.2 CONSIDERAZIONI PRELIMINARI	12
2.2.1 <i>Sistemi di riferimento e tracciato ferroviario</i>	12
2.2.2 <i>Superfici e profili</i>	15
2.2.3 <i>Irregolarità locali e globali</i>	18
2.3 I MODELLI DI CONTATTO.....	19
2.3.1 <i>Determinazione dei punti di contatto</i>	20
2.3.1.1 Il metodo della DISTANZA	20
2.3.1.2 Il metodo della DIFFERENZA	25
2.3.1.3 Performance dei nuovi algoritmi.....	29
2.3.2 <i>Le azioni di contatto</i>	37
2.4 IL MODELLO MULTIBODY DEL VEICOLO FERROVIARIO.....	41
2.5 L'IMPLEMENTAZIONE DEI MODELLI IN MATLAB/SIMULINK.....	45
2.6 SIMULAZIONI DINAMICHE.....	52
2.6.1 <i>Implementazione del modello di benchmark in Simpack Rail</i>	53
2.6.2 <i>Simulazione dinamica N° 1: curva ad "S"</i>	56
2.6.3 <i>Simulazione dinamica N° 2: curva singola con irregolarità</i>	74
2.6.4 <i>Simulazione dinamica N° 3: curva singola</i>	95
2.6.5 <i>Performance del modello complessivo</i>	117
2.7 SVILUPPI FUTURI	119
3 IL MODELLO LOCALE DI CONTATTO.....	121
3.1 ARCHITETTURA GENERALE DEL MODELLO	121
3.2 CONSIDERAZIONI PRELIMINARI	123

3.2.1	<i>Sistemi di riferimento e tracciato ferroviario</i>	123
3.2.2	<i>Superfici e profili</i>	125
3.2.3	<i>Irregolarità locali e globali</i>	127
3.3	IL MODELLO DI CONTATTO	128
3.3.1	<i>Il modello fisico del sistema</i>	129
3.3.1.1	La cinematica del problema	129
3.3.1.2	Il modello di contatto	133
3.3.2	<i>La discretizzazione del modello</i>	136
3.3.2.1	La formulazione sparsa	136
3.3.2.2	La formulazione ridotta	140
3.3.3	<i>La risoluzione numerica del problema discreto</i>	142
3.3.3.1	La risoluzione numerica della formulazione sparsa	143
3.3.3.2	La risoluzione numerica della formulazione ridotta	145
3.4	IL MODELLO MULTIBODY DEL VEICOLO FERROVIARIO	146
3.5	L'IMPLEMENTAZIONE DEL MODELLO IN MATLAB/SIMULINK	147
3.6	SIMULAZIONI DINAMICHE	154
3.6.1	<i>Performance dei nuovi algoritmi</i>	155
3.6.2	<i>Implementazione del modello di benchmark in Simpack Rail</i>	162
3.6.3	<i>Simulazione dinamica: curva singola</i>	163
3.6.4	<i>Performance del modello complessivo</i>	181
3.7	SVILUPPI FUTURI	186
4	CONCLUSIONI	188
	BIBLIOGRAFIA	191
	ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI	193

1 Introduzione

La modellistica multibody rappresenta attualmente lo standard per quanto riguarda lo studio della dinamica dei veicoli ferroviari. In questo ambito l'analisi del contatto ruota – rotaia costituisce senza dubbio il problema più complicato da trattare. Un buon modello di contatto deve fornire un'accurata descrizione dei fenomeni legati al contatto sia da un punto di vista globale (forze e momenti di contatto, numero e posizione dei punti di contatto) che da un punto di vista locale (sforzi, deformazioni, forma e posizione dell'impronta di contatto). Sono inoltre necessarie un'elevata efficienza numerica ed una buona compatibilità con i software multibody già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail).

Il problema del contatto ruota – rotaia è stato studiato da numerosi autori e molti modelli sono reperibili in letteratura. I principali modelli di contatto possono essere idealmente suddivisi in due classi: i modelli globali ed i modelli locali (o differenziali).

Tra i modelli globali si distinguono due approcci differenti: la formulazione rigida e la formulazione semielastica. L'approccio rigido considera ruota e rotaia come corpi rigidi mentre il contatto è imposto per mezzo di equazioni di vincolo. I punti di contatto vengono determinati durante la simulazione dinamica risolvendo le equazioni algebrico – differenziali non lineari associate al modello multibody vincolato. La penetrazione tra i corpi non è ammessa e le forze normali di contatto vengono calcolate mediante i moltiplicatori di Lagrange. Infine le teorie di Hertz e di Kalker permettono di valutare le forze tangenziali di contatto e le caratteristiche dell'impronta di contatto.

[B1] [B2] [B3] [B4] [B5] [B6]

Anche l'approccio semielastico considera ruota e rotaia come corpi rigidi. Tuttavia in questo caso non ci sono vincoli e la penetrazione tra i corpi è permessa. I punti di contatto vengono determinati attraverso procedure approssimate (basate su

LUT e su ipotesi semplificative riguardanti la geometria del problema). Le forze normali di contatto vengono infine calcolate in funzione della penetrazione mentre, analogamente all'approccio rigido, le teorie di Hertz e di Kalker permettono di valutare le forze tangenziali di contatto e le caratteristiche dell'impronta di contatto. [B4] [B5] [B6] [B7] [B16] [B20]

I modelli globali appena descritti sono computazionalmente molto efficienti e quindi ideali per l'implementazione all'interno dei modelli multibody dei veicoli ferroviari; tuttavia la generalità e l'accuratezza di tali modelli si rivelano spesso insufficienti dal momento che le ipotesi fisiche necessarie per la loro validità sono molto restrittive ed in molti casi non verificate.

Per avere una descrizione accurata dei fenomeni di contatto sono necessari modelli di contatto locali. Tali modelli considerano ruota e rotaia come corpi elastici governati dalle equazioni di Navier ed il contatto viene descritto per mezzo di opportune condizioni analitiche di contatto. Il contatto tra corpi elastici è stato largamente studiato in letteratura sia nel caso generale che nel caso di corpi rotolanti; all'aumentare delle risorse di calcolo disponibili, sono stati sviluppati numerosi modelli basati su disequazioni variazionali, tecniche FEM ed ottimizzazione convessa. [B4] [B8] [B9] [B10] [B11] [B12] [B13] [B14]

Questa classe di modelli assicura un'elevata accuratezza ma richiede ancora una notevole capacità di calcolo ed un consistente consumo di memoria. Per questi motivi, stando al corrente stato dell'arte, l'impiego di modelli locali ha trovato ancora poco spazio nell'ambito della modellazione multibody dei veicoli ferroviari. Il raggiungimento di una buona integrazione tra la modellistica multibody e quella differenziale (alla base dei modelli locali) risulta tuttavia un obiettivo di fondamentale importanza poiché la modellistica differenziale è necessaria per una descrizione accurata dei fenomeni locali di contatto mentre quella multibody rappresenta attualmente lo standard nello studio della dinamica dei veicoli ferroviari.

In questa tesi verranno descritti alcuni modelli di contatto innovativi per l'analisi dell'interazione ruota – rotaia sviluppati durante l'attività di dottorato con l'intento di colmare, almeno in parte, le lacune presenti in letteratura. Per quando riguarda la classe dei modelli globali verranno presentati due nuovi modelli appartenenti al cosiddetto approccio semielastico e che soddisfano le seguenti specifiche: [P1] [P2] [P3] [P4] [P5] [P6] [P7] [P8] [P10] [P11] [P14] [P15]

- i modelli devono essere tridimensionali e considerare tutti i sei gradi di libertà relativi presenti tra ruota e rotaia
- i modelli devono essere in grado di supportare qualunque tracciato ferroviario e qualunque profilo di ruota e rotaia
- i modelli devono garantire un trattamento generale ed accurato del contatto multiplo senza introdurre ipotesi semplificative sulla geometria del problema; in particolare i modelli devono calcolare il numero e la posizione dei punti di contatto e, per ciascun punto, le forze ed i momenti di contatto
- i modelli devono essere implementabili online all'interno dei modelli multibody senza bisogno di LUT
- i modelli devono garantire tempi di calcolo comparabili con quelli dei software commerciali già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail) e compatibili con applicazioni in RT ed HIL
- i modelli devono essere compatibili con i software commerciali già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail).

L'aspetto più innovativo di questi nuovi modelli globali riguarda la ricerca dei punti di contatto. Più nel dettaglio tali modelli mirano alla riduzione della dimensione del problema per mezzo di opportune tecniche analitiche. Ciò consente di ottenere una notevole efficienza numerica che rende possibile l'implementazione online di tali procedure e performance comparabili con quelle dei software commerciali. Allo stesso tempo l'approccio analitico al problema garantisce un elevato grado di accuratezza e di generalità.

Per quanto riguarda invece la classe dei modelli locali (o differenziali) verrà proposto un nuovo modello in grado di soddisfare le seguenti specifiche: [P9] [P12] [P13]

- il modello deve essere tridimensionale e considerare tutti i sei gradi di libertà relativi presenti tra ruota e rotaia
- il modello deve essere in grado di supportare qualunque tracciato ferroviario e qualunque profilo di ruota e rotaia
- il modello deve garantire un trattamento generale ed accurato del contatto multiplo senza introdurre ipotesi semplificative sulla geometria del problema; in particolare il modello deve essere in grado di calcolare sia le

- variabili locali legate al contatto (sforzi, deformazioni, forma e posizione dell'impronta di contatto) che quelle globali (forze e momenti di contatto)
- il modello deve essere implementabile online all'interno dei modelli multibody
 - il modello deve garantire un'elevata efficienza computazionale ed un ridotto consumo di memoria permettendo così il raggiungimento di una buona integrazione tra la modellistica multibody e quella differenziale (alla base dei modelli locali)
 - il modello deve essere compatibile con i software commerciali già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail).

In questo caso gli aspetti maggiormente innovativi del nuovo modello locale riguardano la modellazione del contatto per mezzo di opportune condizioni analitiche e l'implementazione degli algoritmi destinati alla risoluzione del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello. Durante lo sviluppo del modello si è comunque sempre cercato il giusto compromesso tra accuratezza ed efficienza in modo da ottenere una buona integrazione tra modellistica multibody e modellistica differenziale.

I nuovi modelli di contatto sono stati successivamente inseriti all'interno del modello multibody di un veicolo ferroviario di riferimento ottenendo così un modello completo di vagoni. Come veicolo di benchmark è stato scelto il Manchester Wagon le cui caratteristiche fisiche e geometriche possono essere facilmente reperite in letteratura. [B15]

Il modello dell'intera vettura è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink. Più in particolare, per quanto riguarda il modello multibody del veicolo, si è fatto uso di SimMechanics, un toolbox di Matlab appositamente dedicato alla dinamica multibody. Per quanto riguarda invece i modelli di contatto sono state impiegate le CS – function, una particolare architettura Matlab che permette di far interagire in modo efficiente l'ambiente Matlab/Simulink con l'ambiente C/C++. [B21]

Il modello multibody della stessa vettura è stato poi implementato anche in ambiente Simpack Rail, un software dedicato all'analisi della dinamica dei veicoli ferroviari ampiamente testato e validato. In questo caso però il modello multibody è stato equipaggiato con un modello di contatto standard scelto tra quelli presenti

all'interno di Simpack Rail (appartenente alla classe dei modelli globali e basato sull'approccio semielastico). [B22]

Infine è stata effettuata un'ampia campagna di simulazioni con lo scopo di valutare le performance del modello complessivo. La dinamica di marcia del veicolo è stata simulata su molti tracciati ferroviari differenti ottenuti al variare delle caratteristiche geometriche del tracciato stesso. Il confronto tra i risultati ottenuti con il modello implementato in Matlab/Simulink e quelli ottenuti con il modello implementato in Simpack Rail ha permesso un'accurata ed affidabile validazione dei nuovi modelli di contatto.

Per concludere questa breve introduzione al tema trattato nella tesi, si ringraziano Trenitalia e la Regione Toscana per il supporto fornito durante tutta la durata dell'attività di ricerca.



Regione Toscana
Diritti Valori Innovazione Sostenibilità

Un vivo ringraziamento va inoltre alla INTEC GmbH, ovvero alla società sviluppatrice del software Simpack Rail, con la quale stiamo attualmente collaborando per lo sviluppo di nuovi toolbox appositamente dedicati al contatto ruota – rotaia.



2 I modelli globali di contatto

In questo capitolo verranno introdotti due nuovi modelli di contatto globali basati sull'approccio semielastico ed in grado di soddisfare tutte le specifiche descritte nell'introduzione (con particolare riguardo al trattamento del contatto multiplo ed all'implementabilità online all'interno dei modelli multibody). La ricerca dei punti di contatto rappresenta l'aspetto più innovativo di entrambe le procedure. Più nel dettaglio, i due modelli si basano sulla riduzione della dimensione del problema per mezzo di opportune tecniche analitiche e si differenziano tra loro per la diversa modellazione del contatto ruota – rotaia da un punto di vista cinematico. [P1] [P2] [P3] [P4] [P5] [P6] [P7] [P8] [P10] [P11] [P14] [P15]

Nella prima parte del capitolo verrà presentata l'architettura generale del modello completo di vagone e verrà introdotta la necessaria notazione matematica. Successivamente verranno descritti nel dettaglio i due modelli contatto ed il modello multibody del veicolo ferroviario (Manchester Wagon, [B15]). La parte conclusiva del capitolo sarà infine dedicata all'implementazione dei vari modelli, alla descrizione delle simulazioni effettuate ed ai possibili sviluppi futuri.

2.1 Architettura generale dei modelli

L'architettura generale del modello completo di vagone è schematizzata in Fig. 2.1. La struttura del modello consiste in due parti: il modello multibody del veicolo ferroviario ed il modello di contatto. Durante la simulazione della dinamica di marcia le due parti interagiscono tra loro online. Il modello multibody valuta, per ogni sala del veicolo, tutte le variabili cinematiche necessarie per descriverne il moto. A partire da esse il modello di contatto calcola, per ciascuna coppia ruota – rotaia, le relative azioni di contatto (numero e posizione dei punti di contatto, forze e momenti di contatto).

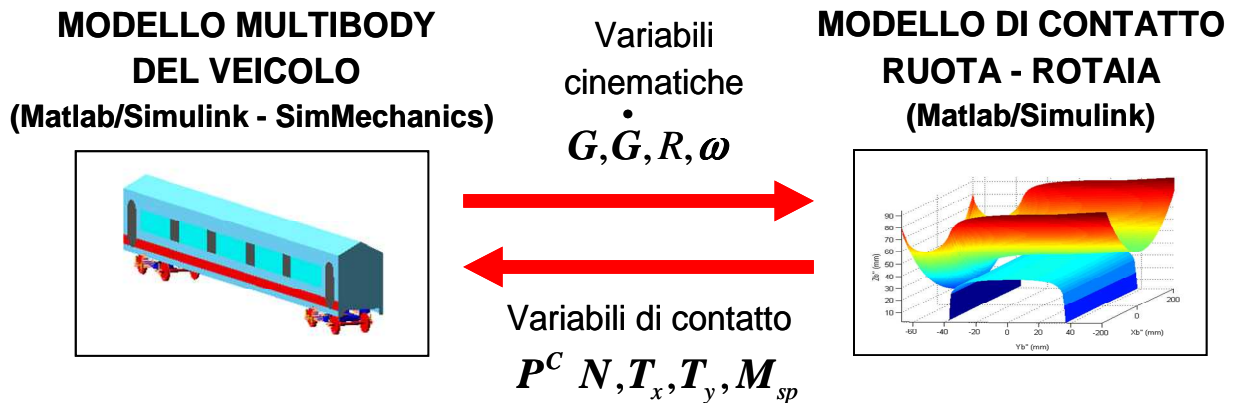


Figura 2.1 Architettura generale del modello

La conoscenza delle azioni di contatto permette infine, al modello multibody, di proseguire nella simulazione della dinamica del veicolo. Il modello completo di vagone necessita dei seguenti input esterni:

- condizioni iniziali (posizioni e velocità)
- azioni esterne (gravità, forze e momenti esterni, etc.)
- parametri fisici (caratteristiche fisiche di corpi e vincoli, costanti fisiche)
- parametri geometrici (caratteristiche geometriche di corpi e vincoli, tracciato ferroviario, profili di ruota e rotaia).

Per quanto riguarda invece gli output prodotti da tale modello, essi comprendono:

- le variabili cinematiche relative a ciascun corpo
- le interazioni tra i vari corpi
- il numero e la posizione dei punti di contatto
- le forze ed i momenti di contatto.

Il modello dell'intera vettura è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink. Più in particolare, il modello multibody del veicolo è stato implementato in SimMechanics, un toolbox di Matlab appositamente dedicato allo studio della dinamica multibody (rivelatosi particolarmente adatto alla modellazione di sistemi complessi grazie alla propria modularità). Per quanto riguarda invece i modelli di contatto, si è fatto uso di CS – function, una particolare architettura Matlab che permette di far interagire in modo efficiente l'ambiente Matlab/Simulink con l'ambiente C/C++. [B21]

2.2 Considerazioni preliminari

In questo paragrafo verrà introdotta la notazione matematica necessaria per formulare i due nuovi modelli di contatto globali. Inizialmente verranno descritti i principali sistemi di riferimento impiegati e verrà presentata la costruzione del tracciato ferroviario. Successivamente verranno descritte nel dettaglio le superfici di ruota e rotaia a partire dai rispettivi profili. Infine verranno modellate le principali irregolarità relative al tracciato (locali e globali). [B16] [B17] [B18]

2.2.1 Sistemi di riferimento e tracciato ferroviario

Il primo sistema di riferimento ad essere introdotto è il sistema fisso $O_f x_f y_f z_f$ avente l'asse x_f tangente alla mezzeria del tracciato nel punto O_f e l'asse z_f normale al piano dei binari (Fig. 2.2).

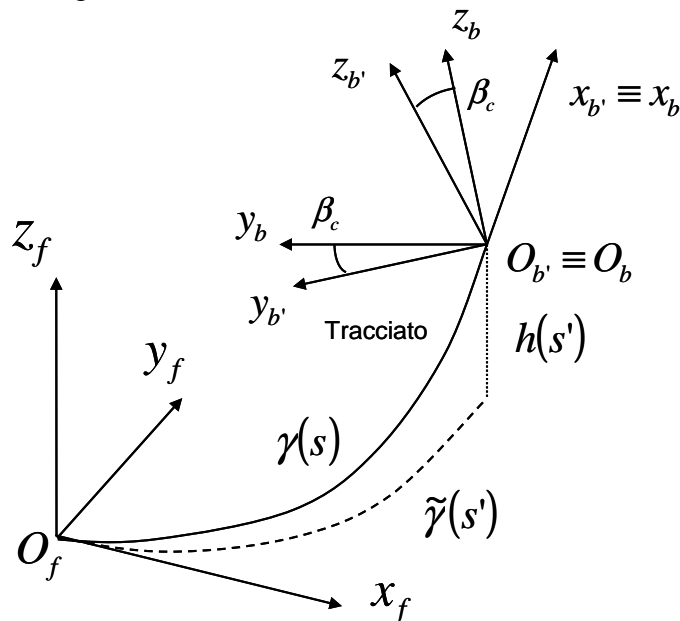


Figura 2.2 Sistemi di riferimento fisso ed ausiliario

Rispetto al sistema fisso il tracciato ferroviario può essere descritto per mezzo di una generica curva nello spazio $\underline{\gamma}(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove s è l'ascissa curvilinea di $\underline{\gamma}$. Per semplicità si definisce poi $\tilde{\underline{\gamma}}(s')$ come la proiezione di $\underline{\gamma}$ sul piano $x_f y_f$ (qui s' è l'ascissa curvilinea di $\tilde{\underline{\gamma}}$). Solitamente, in ambito ferroviario, sono note solamente la curvatura $K(s')$ di $\underline{\gamma}$ e la pendenza $p(s')$ del tracciato. La conoscenza di queste due

grandezze è tuttavia sufficiente per ricostruire il tracciato ferroviario $\underline{\gamma}$. La curva $\tilde{\underline{\gamma}}$ può essere calcolate mediante le equazioni di Frenet

$$\frac{d\underline{T}}{ds'} = K(s')\underline{N} \quad \frac{d\underline{N}}{ds'} = -K(s')\underline{T} \quad (2.1)$$

dove $\underline{T}(s')$ e $\underline{N}(s')$ sono rispettivamente il versore tangenziale ed il versore normale della curva $\tilde{\underline{\gamma}}$. L'integrazione di tale equazione a partire dalle condizioni iniziali $\underline{T}(0) = (1,0)^T$ e $\underline{N}(0) = (0,1)^T$ permette di calcolare $\underline{T}(s')$ e $\underline{N}(s')$ e di conseguenza $\tilde{\underline{\gamma}}(s')$:

$$\tilde{\underline{\gamma}}(s') = \int_0^{s'} \underline{T}(u) du . \quad (2.2)$$

La quota $h(s')$ può essere valutata basandosi sulla definizione della pendenza $p(s')$:

$$h(s') = \int_0^{s'} p(u) du . \quad (2.3)$$

Il tracciato ferroviario, espresso in funzione dell'ascissa s' , assume dunque la forma

$$\bar{\underline{\gamma}}(s') = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\gamma}}(s') \\ h(s') \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Per determinare la corretta espressione di $\underline{\gamma}(s)$ andrà infine stabilita una relazione tra s ed s' . Poiché s è l'ascissa curvilinea di $\underline{\gamma}$ si ha

$$s(s') = \int_0^{s'} \left\| \frac{d\bar{\underline{\gamma}}(t)}{dt} \right\| dt = \int_0^{s'} \left\| \begin{pmatrix} \underline{T}(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{s'} \sqrt{1 + p(t)^2} dt . \quad (2.5)$$

Ovviamente qualora $p(s') \equiv 0$ la (2.5) diventa $s = s'$. La relazione $s(s')$ può essere infine invertita numericamente e, sostituendo nella (2.4), si ottiene

$$\bar{\underline{\gamma}}(s') = \bar{\underline{\gamma}}(s'(s)) = \underline{\gamma}(s) . \quad (2.6)$$

A questo punto si introduce un secondo sistema di riferimento $O_b x_b y_b z_b$ detto ausiliario. Tale sistema riveste un ruolo di fondamentale dal momento che i modelli di contatto andranno a lavorare in tale sistema di riferimento. Il sistema in questione è posizionato sul piano dei binari e segue la sala durante il suo moto (Fig. 2.2 e 2.3). Più in particolare l'asse x_b è tangente alla mezzeria del tracciato nel punto O_b mentre

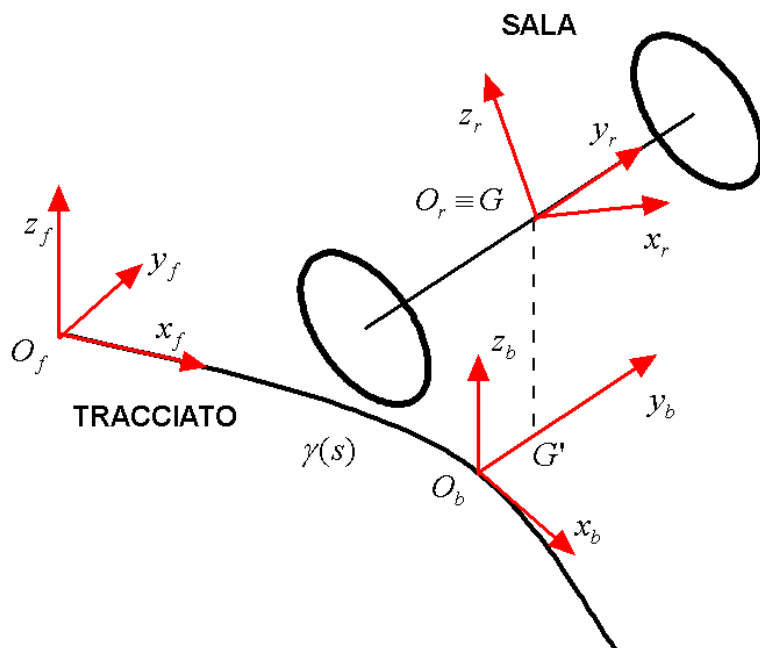


Figura 2.3 Sistemi di riferimento fisso, ausiliario e solidale

l'asse z_b è normale al piano dei binari. La posizione del punto O_b può essere calcolata a partire da quella del centro di massa G della sala imponendo la condizione

$$(\underline{G}^f - \underline{O}_b^f) \bullet \underline{i}_b = (\underline{G}^f - \underline{\gamma}(s)) \bullet \frac{d\underline{\gamma}(s)}{ds} = 0 \quad (2.7)$$

e risolvendo rispetto alla variabile s . La condizione (2.7) equivale all'imporre che il piano $y_b z_b$ contenga il punto G . Per definire in modo univoco il sistema ausiliario è necessario introdurre un ulteriore sistema di riferimento O_b, x_b, y_b, z_b , la cui origine O_b coincide con O_b ed i cui versori possono essere valutati nel modo seguente:

$$\underline{i}_{b'} = \frac{d\underline{\gamma}(s)}{ds} \quad \underline{j}_{b'} = \underline{k}_f \wedge \underline{i}_{b'} \quad \underline{k}_{b'} = \underline{i}_{b'} \wedge \underline{j}_{b'}. \quad (2.8)$$

A questo punto è possibile calcolare i versori del sistema ausiliario tenendo in considerazione la presenza dell'angolo di cant β_c

$$R_1 = \begin{bmatrix} \underline{i}_b & \underline{j}_b & \underline{k}_b \end{bmatrix} = R_{cant} \begin{bmatrix} \underline{i}_{b'} & \underline{j}_{b'} & \underline{k}_{b'} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

dove $R_{cant} = R_x(\beta_c)$ rappresenta la matrice di rotazione dovuta al cant mentre R_1 è la matrice di rotazione che lega il sistema ausiliario a quello fisso.

Si introduce infine un terzo sistema di riferimento O_r, x_r, y_r, z_r , detto solidale avente l'asse y_r coincidente con l'asse di rotazione della sala (Fig. 2.3). L'origine O_r

del sistema coincide con il centro di massa G della sala mentre l'asse x_r è contenuto nel piano $x_b y_b$. Tale sistema di riferimento risulta quindi solidale alla sala a meno della rotazione della stessa attorno al proprio asse.

Se si indicano con \underline{P}^f , \underline{P}^b e \underline{P}^r le coordinate del generico punto espresse rispettivamente nei sistemi fisso, ausiliario e solidale, valgono allora le seguenti relazioni cinematiche:

$$\underline{P}^f = \underline{O}_b^f + R_1 \underline{P}^b \quad \underline{P}^b = \underline{O}_r^b + R_2 \underline{P}^r \quad \underline{P}^f = \underline{O}_r^f + \hat{R} \underline{P}^r \quad (2.8)$$

dove $\hat{R} = R_1 R_2$ è la matrice di rotazione che lega il sistema solidale a quello fisso mentre $R_2 = R_z(\alpha) R_x(\beta)$ è la matrice di rotazione che lega il sistema solidale a quello ausiliario (α e β sono gli angoli di imbardata e di rollio della sala rispetto al sistema ausiliario).

2.2.2 Superfici e profili

Nel sistema di riferimento solidale la sala può essere considerata una superficie di rivoluzione attorno al proprio asse y_r . Il profilo generatore $r(y_r)$, supposto noto, è illustrato schematicamente in Fig. 2.4.

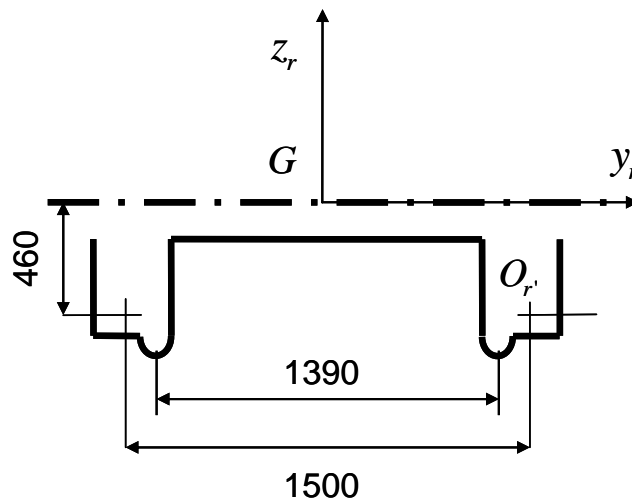


Figura 2.4 Profilo generatore della sala

Il profilo della singola ruota è riportato nel dettaglio in Fig. 2.5. Nel caso in esame si tratta di un profilo ORE S 1002.

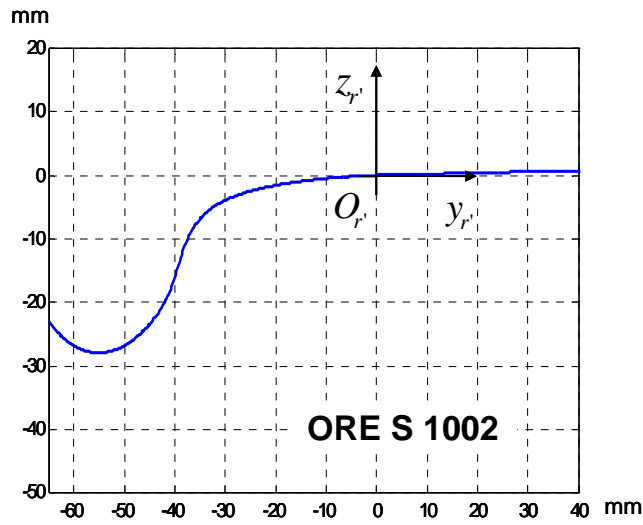


Figura 2.5 Profilo della ruota (ORE S 1002)

La posizione del generico punto della superficie della sala assume dunque, nel sistema di riferimento solidale, la seguente espressione analitica

$$\underline{P}_r(x_r, y_r) = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ -\sqrt{r(y_r)^2 - x_r^2} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

mentre nel sistema ausiliario si ha

$$\underline{P}_r^b(x_r, y_r) = \begin{pmatrix} x_r^b(x_r, y_r) \\ y_r^b(x_r, y_r) \\ z_r^b(x_r, y_r) \end{pmatrix} = \underline{Q}_r^b + R_2 \underline{P}_r(x_r, y_r). \quad (2.10)$$

In virtù della scelta dei sistemi di riferimento i termini \underline{Q}_r^b e R_2 acquistano la forma

$$\underline{Q}_r^b = \begin{pmatrix} 0 \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} \underline{r}_1^T \\ \underline{r}_2^T \\ \underline{r}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Si definisce infine il versore normale alla superficie della sala (avente per convenzione verso uscente) sia nel sistema solidale che in quello ausiliario:

$$\underline{n}_r^r(\underline{P}_r) = -\frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r} / \left\| \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r} \right\| \quad \underline{n}_r^b(\underline{P}_r) = R_2 \underline{n}_r^r(\underline{P}_r). \quad (2.12)$$

Analogamente a quanto fatto per la ruota, il binario può essere descritto localmente come una superficie di estrusione avente come asse x_b . Il profilo generatore $b(y_b)$, supposto noto, è illustrato schematicamente in Fig. 2.6.

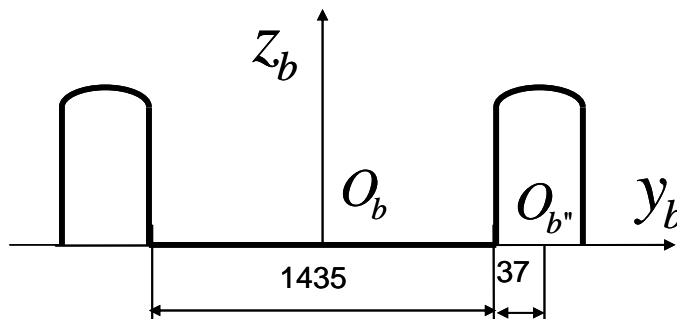


Figura 2.6 Profilo generatore del binario

Il profilo del singolo binario è riportato invece nel dettaglio in Fig. 2.7 già ruotato dell'angolo di posa α_p . Nel caso in esame si tratta di un profilo UIC 60.

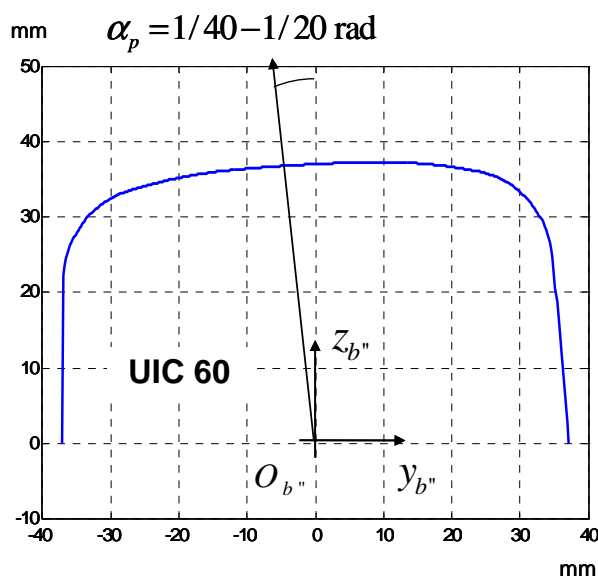


Figura 2.7 Profilo del binario (UIC 60)

La posizione del generico punto della superficie del binario assume, nel sistema di riferimento ausiliario, la seguente espressione analitica

$$\underline{P}_b^b(x_b, y_b) = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ b(y_b) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

mentre, per quanto riguarda il versore normale uscente alla superficie si ha

$$\underline{n}_b^b(\underline{P}_b^b) = \frac{\partial \underline{P}_b^b}{\partial x_b} \wedge \frac{\partial \underline{P}_b^b}{\partial y_b} / \left\| \frac{\partial \underline{P}_b^b}{\partial x_b} \wedge \frac{\partial \underline{P}_b^b}{\partial y_b} \right\|. \quad (2.14)$$

2.2.3 Irregolarità locali e globali

L'approccio analitico descritto in precedenza permette di trattare con una certa facilità anche le irregolarità del tracciato. Nel seguito verranno considerati due tipi di irregolarità: le irregolarità locali e quelle globali (Fig. 2.8).

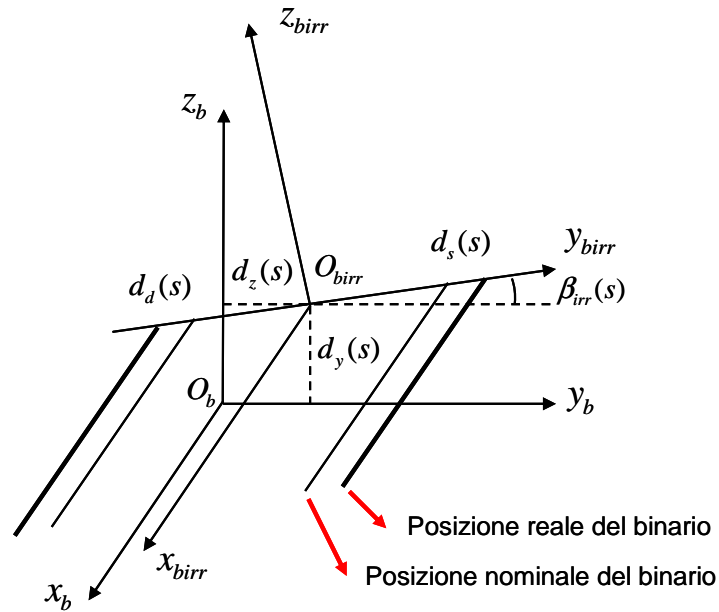


Figura 2.8 Irregolarità locali e globali

Le irregolarità locali riguardano le singole rotaie. Tra di esse verrà preso in esame lo spostamento laterale delle rotaie rispetto alla loro posizione nominale ($d_s(s)$ per la rotaia di sinistra e $d_d(s)$ per quella di destra; entrambi positivi se orientati come y_{birr}). Irregolarità di questo genere possono essere modellate modificando opportunamente il profilo generatore del binario:

$$b_{irr}(y_{birr}) = \begin{cases} b(y_{birr} - d_d(s)) & y_{birr} \leq 0 \\ b(y_{birr} - d_s(s)) & y_{birr} > 0 \end{cases}. \quad (2.15)$$

Un caso particolare di questo tipo di irregolarità è costituito dall'irregolarità di scartamento dove $d_d(s) = -d_s(s)$.

Le irregolarità globali riguardano invece l'intero piano dei binari. All'interno di questa classe verranno considerati lo spostamento laterale $d_y(s)$ del piano del ferro,

l'analogo spostamento verticale $d_z(s)$ e l'irregolarità di cant $\beta_{irr}(s)$. Le irregolarità globali possono essere modellate modificando il sistema ausiliario come segue:

$$\begin{aligned} \underline{O}_{birr}^f &= \underline{O}_b^f + d_y \underline{j}_b + d_z \underline{k}_b \\ R_{irr} &= \begin{bmatrix} \underline{i}_{birr} & \underline{j}_{birr} & \underline{k}_{birr} \end{bmatrix} = R_{irr} \begin{bmatrix} \underline{i}_b & \underline{j}_b & \underline{k}_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove $R_{irr} = R_x(\beta_{irr})$.

2.3 I modelli di contatto

In questo paragrafo verranno descritti nel dettaglio i nuovi modelli di contatto globali. Tali modelli, appartenenti al cosiddetto approccio semielastico, prevedono, da un punto di vista modellistico, due fasi principali:

- inizialmente si calcolano, in funzione della cinematica relativa sala – binario, il numero e la posizione di tutti i punti di contatto (questa fase rappresenta la parte più innovativa dei nuovi modelli soprattutto per quanto riguarda la gestione del contatto multiplo) [P1] [P2] [P3] [P4] [P5] [P6] [P7] [P8] [P10] [P11] [P14] [P15] [B18] [B19]

- successivamente, per ciascun punto, si valutano tutte le azioni di contatto (le forze normali vengono calcolate in funzione della penetrazione mentre le teorie di Hertz e di Kalker permettono di calcolare le forze tangenziali di contatto, il momento di spin e le caratteristiche dell'impronta di contatto). [B4] [B5] [B6] [B7] [B16] [B17] [B18] [B20]

I suddetti modelli risultano computazionalmente molto efficienti e quindi ideali per l'implementazione online all'interno dei modelli multibody dei veicoli ferroviari.

Con riferimento alla Fig. 2.1, i nuovi modelli globali di contatto descritti in questo paragrafo possono essere pensati come delle “black box” aventi i seguenti input ed output:

- INPUT: le variabili cinematiche relative alla coppia sala – binario considerata ovvero posizione \underline{O}_r^b , orientazione R_2 , velocità assoluta $\dot{\underline{O}}_{r,f}^b$ e velocità angolare assoluta $\underline{\omega}_{r,f}^b$ del sistema solidale e velocità assoluta $\dot{\underline{O}}_{b,f}^b$ e velocità angolare assoluta $\underline{\omega}_{b,f}^b$ del sistema ausiliario
- OUTPUT: il numero e la posizione dei punti di contatto \underline{P}_r^{bC} e \underline{P}_b^{bC} (sia sulla superficie della sala che su quella del binario) e le azioni di contatto

\underline{N}^b , \underline{T}_x^b , \underline{T}_y^b e \underline{M}_{sp}^b (forze longitudinali, laterali e verticali e momento di spin).

2.3.1 Determinazione dei punti di contatto

I due nuovi modelli globali di contatto si differenziano tra loro per i diversi algoritmi di ricerca dei punti di contatto che ne costituiscono la parte più innovativa. Più nel dettaglio, i due algoritmi si basano sulla riduzione della dimensione del problema per mezzo di opportune procedure analitiche. In entrambi i casi l'originale problema multidimensionale viene ridotto ad un semplice problema scalare che può essere facilmente risolto numericamente. Ciò comporta numerosi vantaggi in termini di accuratezza, efficienza (rendendo possibile l'implementazione online degli algoritmi senza l'impiego di LUT) e gestione del contatto multiplo.

2.3.1.1 Il metodo della DISTANZA

Il metodo della DISTANZA si basa sulla formulazione classica del problema del contatto in ambito multibody (qui espressa, per comodità, in termini di versori normali):

$$\underline{n}_b^b(\underline{P}_b^b) \wedge \underline{n}_r^b(\underline{P}_r^b) = \underline{n}_b^b(\underline{P}_b^b) \wedge R_2 \underline{n}_r^r(\underline{P}_r^r) = \underline{0} \quad (2.17)$$

$$\underline{n}_b^b(\underline{P}_b^b) \wedge \underline{d}^b = \underline{0} \quad (2.18)$$

dove

$$\underline{d}^b(x_r, y_r, x_b, y_b) = \underline{P}_r^b(x_r, y_r) - \underline{P}_b^b(x_b, y_b) = \underline{Q}_r^b + R_2 \underline{P}_r^r(x_r, y_r) - \underline{P}_b^b(x_b, y_b) \quad (2.19)$$

è il vettore distanza tra due generici punti appartenenti rispettivamente alla sala ed al binario.

La prima condizione equivale ad imporre il parallelismo tra i versori normali mentre la seconda richiede il parallelismo tra il versore normale alla superficie del binario ed il vettore distanza (Fig. 2.9).

Il sistema (2.17) – (2.18) consiste in sei equazioni non lineari nelle incognite (x_r, y_r, x_b, y_b) delle quali solamente quattro sono indipendenti (il problema è dunque 4D). Nel seguito indicheremo con $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ le soluzioni del suddetto sistema e con $\underline{P}_{ri}^{bC} = \underline{P}_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C)$, $\underline{P}_{bi}^{bC} = \underline{P}_b^b(x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ i corrispondenti punti di contatto (dove $i = 1, 2, \dots, n$ ed n indica il numero di punti presenti nella configurazione considerata).

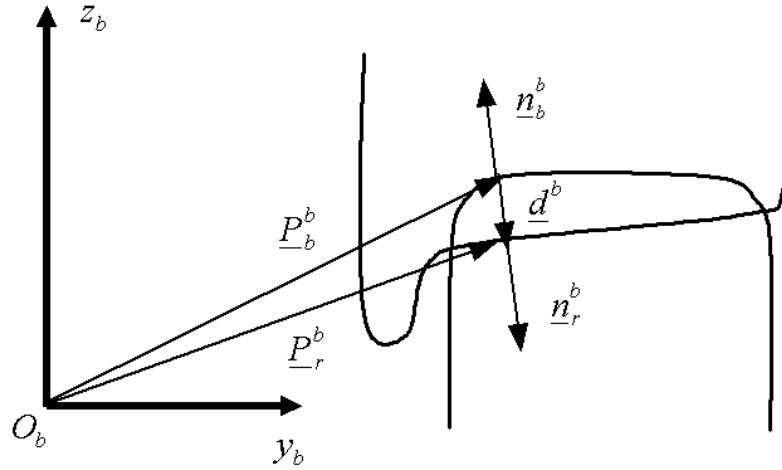


Figura 2.9 Metodo della DISTANZA

Le soluzioni del sistema dipendono dai quattro parametri cinematici $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$ che descrivono la posizione e l'orientazione del sistema di riferimento solidale rispetto a quello ausiliario. In virtù delle simmetrie del problema, se valgono le condizioni $r(y_r) = r(-y_r)$, $b(y_b) = b(-y_b)$ (profili generatori simmetrici rispetto agli assi y_r e y_b), le soluzioni godono delle seguenti simmetrie:

- se $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ è una soluzione associata alle variabili cinematiche $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$, allora $(-x_{ri}^C, y_{ri}^C, -x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ sarà una soluzione associata a $(G_y, G_z, -\alpha, \beta)$
- se $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ è una soluzione associata alle variabili cinematiche $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$, allora $(-x_{ri}^C, -y_{ri}^C, -x_{bi}^C, -y_{bi}^C)$ sarà una soluzione associata a $(-G_y, G_z, \alpha, -\beta)$.

Una generica soluzione del sistema (2.17) – (2.18) può essere accettata solamente se la penetrazione normale p_n tra le due superfici è negativa (secondo le convenzioni stabilite) ovvero se vi è effettiva compenetrazione tra i corpi. In altri termini deve valere la condizione

$$p_{ni} = \underline{d}_i^{bC} \cdot \underline{n}_b^b(\underline{P}_{bi}^{bC}) = -\underline{d}_i^{bC} \cdot \underline{n}_r^b(\underline{P}_{ri}^{bC}) < 0 \quad (2.20)$$

dove $\underline{d}_i^{bC} = \underline{P}_{ri}^{bC} - \underline{P}_{bi}^{bC}$ e $\underline{n}_b^b(\underline{P}_{bi}^{bC}) = -\underline{n}_r^b(\underline{P}_{ri}^{bC})$.

Le soluzioni del sistema (2.17) – (2.18) devono inoltre soddisfare la condizione di convessità affinché il contatto tra i corpi sia fisicamente possibile:

$$\begin{aligned} k_{1,ri}^C + k_{1,bi}^C &> 0 \\ k_{2,ri}^C + k_{2,bi}^C &> 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

nelle quali $k_{1,ri}^C, k_{2,ri}^C$ rappresentano le curvatures normali della superficie della sala in direzione longitudinale e laterale (con riferimento al sistema ausiliario) e valutate nell' i -esimo punto di contatto $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$; $k_{1,bi}^C, k_{2,bi}^C$ sono le analoghe grandezze per la superficie del binario (Fig. 2.10). A causa della geometria del problema la prima delle (2.21) è sempre soddisfatta; di conseguenza solo la seconda relazione deve essere verificata.

Tali curvatures possono essere calcolate in modo esatto a partire dalle curvatures normali principali delle superfici

$$\begin{aligned} K_{1r}(y_r) &= \frac{1}{|r(y_r)|\sqrt{1+r'(y_r)^2}} & K_{1b}(y_b) &= 0 \\ K_{2r}(y_r) &= \frac{r''(y_r)}{(1+r'(y_r)^2)^{3/2}} & K_{2b}(y_b) &= \frac{-b''(y_b)}{(1+b'(y_b)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

mediante la formula di Eulero per le curvatures.

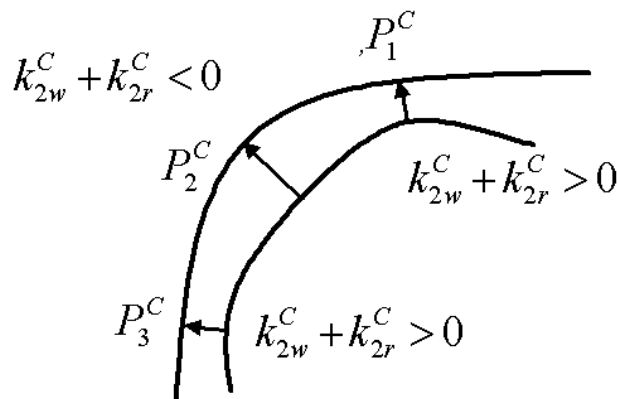


Figura 2.10 Condizione di convessità

Tuttavia, data la particolare geometria del problema e poiché gli angoli α e β che descrivono l'orientazione della sala nel sistema ausiliario sono solitamente piuttosto piccoli, si ha che

$$\begin{aligned} k_{1r}(y_r) &\approx K_{1r}(y_r) & k_{1b}(y_b) &= K_{1b}(y_b) \\ k_{2r}(y_r) &\approx K_{2r}(y_r) & k_{1b}(y_b) &= K_{2b}(y_b) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Per ridurre il problema originale (4D) ad una semplice equazione scalare (1D) è necessario esprimere tre delle quattro variabili indipendenti (in questo caso x_r , x_b e y_b) in funzione della quarta variabile y_r . Dalla seconda componente della (2.17) si ottiene

$$r_{13}\sqrt{r(y_r)^2 - x_r^2} = r_{11}x_r - r_{12}r(y_r)r'(y_r) \quad (2.24)$$

dalla quale, se per brevità si pone $A = r_{13}$, $B = r(y_r)$, $C = r_{11}$ e $D = r_{12}r(y_r)r'(y_r)$, si ha

$$x_{r1,2}(y_r) = \frac{CD \pm \sqrt{C^2D^2 - (A^2 + C^2)(D^2 - A^2B^2)}}{A^2 + C^2}. \quad (2.25)$$

con $A^2 + C^2$ sempre strettamente positivo. Per ogni valore di y_r si hanno dunque due valori validi di x_r (entrambi da considerare). Dalla prima componente della (2.17) si ottiene poi

$$b'(y_b)_{1,2} = \frac{r_{21}x_{r1,2}(y_r) - r_{22}r(y_r)r'(y_r) - r_{23}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2}}{r_{32}r(y_r)r'(y_r) + r_{33}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2}} \quad (2.26)$$

nella quale dovrà essere verificata la condizione

$$r_{32}r(y_r)r'(y_r) + r_{33}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2} \neq 0. \quad (2.27)$$

La relazione scalare (2.26) può essere invertita numericamente ricavando così i valori $y_{b1,2}(y_r)$ corrispondenti a y_r . In base alle caratteristiche della funzione $b'(y_b)$ può esistere una sola coppia di valori $y_{b1,2}(y_r)$ per ogni y_r (come accade nei casi di interesse pratico e come supporremo nel seguito) oppure un numero di coppie più elevato. Questo secondo caso comporta solamente l'aumento del numero delle soluzioni da considerare ma non provoca nessuna modifica sostanziale del metodo.

Dalla seconda componente della (2.18) si ha inoltre

$$x_{b1,2}(y_r) = r_{11}x_{r1,2}(y_r) + r_{12}y_r - r_{13}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2}. \quad (2.28)$$

Sostituendo infine le variabili $x_{r1,2}(y_r)$, $x_{b1,2}(y_r)$ e $y_{b1,2}(y_r)$ all'interno della prima componente della (2.18) si arriva all'espressione

$$\begin{aligned} F_{1,2}(y_r) &= -b'(y_{b1,2}(y_r)) \left[G_z + \underline{r}_3 \bullet \underline{P}_r^r(x_{r1,2}(y_r), y_r) - b(y_{b1,2}(y_r)) \right] + \\ &\quad - \left[G_y + \underline{r}_2 \bullet \underline{P}_r^r(x_{r1,2}(y_r), y_r) - y_{b1,2}(y_r) \right] = \\ &= -b'(y_{b1,2}(y_r)) \left[G_z + r_{32}y_r - r_{33}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2} - b(y_{b1,2}(y_r)) \right] + \\ &\quad - \left[G_y + r_{21}x_{r1,2}(y_r) + r_{22}y_r - r_{23}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2} - y_{b1,2}(y_r) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

La (2.29) è costituita da due equazioni scalari che, a questo punto, possono essere risolte separatamente l'una dall'altra mediante opportuni algoritmi numerici.

Il problema originale (4D) è stato dunque ricondotto ad un semplice problema scalare (1D) con tutti i vantaggi che ciò comporta in termini di accuratezza, efficienza e

gestione delle soluzioni multiple. In dimensione 1D risultano inoltre piuttosto efficienti anche algoritmi di risoluzione numerica particolarmente elementari come il metodo della griglia (tale algoritmi prevede, nella sua versione di base, la valutazione della funzione in questione in una griglia di punti prefissata e la determinazione dei punti notevoli mediante un semplice confronto dei valori ottenuti).

Una volta ricavata la generica soluzione y_{ri}^C della (2.29) è possibile, mediante le relazioni descritte in precedenza, risalire alla corrispondente soluzione $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ del sistema (2.17) - (2.18) e di conseguenza ai punti di contatto $\underline{P}_{ri}^{bC} = \underline{P}_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C)$ e $\underline{P}_{bi}^{bC} = \underline{P}_b^b(x_{bi}^C, y_{bi}^C)$.

Poiché tuttavia le equazioni (2.17) e (2.18) contengono termini irrazionali, la generica soluzione $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ del suddetto sistema, per essere accettata, dovrà soddisfare le seguenti condizioni analitiche:

- la soluzione deve essere reale
- la soluzione non deve generare termini complessi (attraverso i radicali presenti nelle equazioni)
- la soluzione deve essere soluzione effettiva del sistema originale (2.17) - (2.18) (verifica necessaria in seguito all'eliminazione dei radicali mediante elevamento a potenza).

Tra tutte le soluzioni della (2.29) devono infine essere eliminate le soluzioni multiple dal momento che non hanno alcun senso da un punto di vista fisico. A riguardo è utile sottolineare come le soluzioni multiple da scartare vadano cercate considerando contemporaneamente sia l'insieme delle soluzioni di $F_1(y_r)=0$ che quello di $F_2(y_r)=0$. Non sono dunque ammesse né soluzioni multiple all'interno dei singoli insiemi né soluzioni in comune ai due insiemi.

Ricapitolando, il metodo della DISTANZA richiede, da un punto di vista algoritmico, i seguenti step:

- determinazione delle soluzioni $(x_{ri}^C, y_{ri}^C, x_{bi}^C, y_{bi}^C)$ (dove $i = 1, 2, \dots, n$)
- verifica delle condizioni analitiche
- eliminazione delle soluzioni multiple
- verifica della condizione di convessità
- verifica della condizione sulla penetrazione p_n .

2.3.1.2 Il metodo della DIFFERENZA

Il metodo della DIFFERENZA si basa sull'ipotesi che i punti di contatto appartengano all'insieme dei punti di minimo della differenza tra le superfici di sala e binario ovvero della funzione

$$D(x_r, y_r) = (\underline{P}_r^b(x_r, y_r) - \underline{P}_b^b(x_r^b, y_r^b)) \cdot \underline{k}_b \quad (2.30)$$

dove

$$\underline{P}_b^b(x_r^b, y_r^b) = \begin{pmatrix} x_r^b(x_r, y_r) \\ y_r^b(x_r, y_r) \\ b(y_r^b(x_r, y_r)) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Tale procedura (Fig. 2.11) può essere considerata, da un punto di vista analitico, un'approssimazione del metodo della DISTANZA (vedi paragrafo 2.3.1.1).

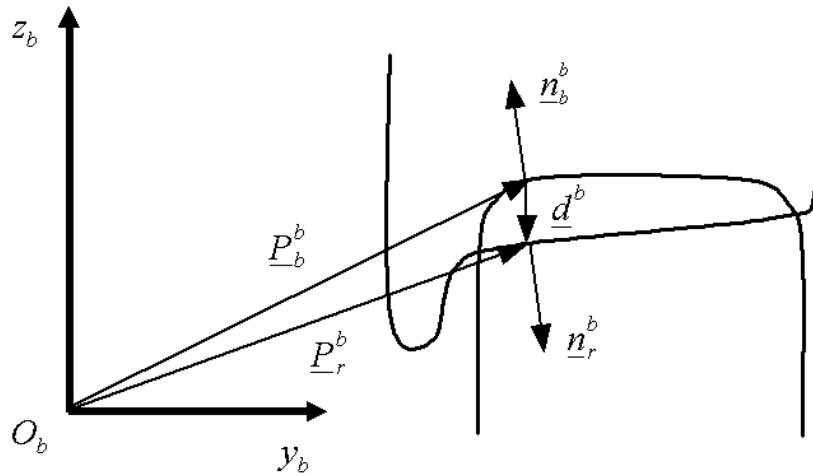


Figura 2.11 Metodo della DIFFERENZA

Per determinare i minimi della funzione $D(x_r, y_r)$ è necessario imporre l'annullamento delle sue derivate parziali:

$$\frac{\partial D(x_r, y_r)}{\partial x_r} = 0 \quad \frac{\partial D(x_r, y_r)}{\partial y_r} = 0. \quad (2.32)$$

Il sistema (2.32) consiste in due equazioni non lineari nelle incognite (x_r, y_r) (il problema è dunque in questo caso 2D). Nel seguito indicheremo come al solito con (x_{ri}^C, y_{ri}^C) le soluzioni del suddetto sistema e con $\underline{P}_{ri}^{bC} = \underline{P}_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C)$, $\underline{P}_{bi}^{bC} = \underline{P}_b^b(x_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C), y_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C))$ i corrispondenti punti di contatto (dove $i = 1, 2, \dots, n$ ed n indica il numero di punti presenti nella configurazione considerata).

Le soluzioni del sistema dipendono dai quattro parametri cinematici $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$ che descrivono la posizione e l'orientazione del sistema di riferimento solidale rispetto a quello ausiliario (anche se il parametro G_z scompare in fase di derivazione). In virtù delle simmetrie del problema, se valgono le condizioni $r(y_r) = r(-y_r)$, $b(y_b) = b(-y_b)$ (profili generatori simmetrici rispetto agli assi y_r e y_b), le soluzioni godono di simmetrie analoghe alle precedenti:

- se (x_{ri}^C, y_{ri}^C) è una soluzione associata alle variabili cinematiche $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$, allora $(-x_{ri}^C, y_{ri}^C)$ sarà una soluzione associata a $(G_y, G_z, -\alpha, \beta)$
- se (x_{ri}^C, y_{ri}^C) è una soluzione associata alle variabili cinematiche $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$, allora $(-x_{ri}^C, -y_{ri}^C)$ sarà una soluzione associata a $(-G_y, G_z, \alpha, -\beta)$.

Come per il metodo della DISTANZA, una generica soluzione del sistema (2.32) può essere accettata solamente se la penetrazione normale p_n tra le due superfici è negativa (secondo le convenzioni adottate) ovvero se vi è effettiva compenetrazione tra i corpi. Poiché in questa circostanza non è disponibile un'espressione esatta per p_n , la condizione (2.20) può essere approssimata come segue:

$$\tilde{P}_{ni} = \underline{d}_i^{bC} \bullet \underline{n}_b^b(\underline{P}_{bi}^{bC}) = -\underline{d}_i^{bC} \bullet \underline{n}_r^b(\underline{P}_{ri}^{bC}) < 0 \quad (2.33)$$

dove $\underline{d}_i^{bC} = \underline{P}_{ri}^{bC} - \underline{P}_{bi}^{bC}$ e $\underline{n}_b^b(\underline{P}_{bi}^{bC}) = -\underline{n}_r^b(\underline{P}_{ri}^{bC})$.

E' inoltre necessario verificare che le soluzioni del sistema (2.32) siano effettivamente punti di minimo per $D(x_r, y_r)$. Ciò equivale ad imporre che l'Hessiano $H_D(x_r, y_r)$ di tale funzione sia definito positivo nell' i -esimo punto di contatto (x_{ri}^C, y_{ri}^C) . Dal momento che il problema è 2D devono dunque valere le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x_r^2}(x_{ri}^C, y_{ri}^C) > 0 \quad \det H_D(x_{ri}^C, y_{ri}^C) > 0. \quad (2.34)$$

Tornando al sistema originale, dalla (2.30) si ottiene

$$\begin{aligned} D(x_r, y_r) &= z_r^b(x_r, y_r) - b(y_r^b(x_r, y_r)) = \\ &= G_z + \underline{r}_3 \bullet \underline{P}_r^r(x_r, y_r) - b(G_y + \underline{r}_2 \bullet \underline{P}_r^r(x_r, y_r)) \end{aligned} \quad (2.35)$$

dalla quale, derivando si ha

$$\frac{\partial D}{\partial x_r}(x_r, y_r) = \underline{r}_3 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r}(x_r, y_r) - b'(G_y + \underline{r}_2 \cdot \underline{P}_r(x_r, y_r)) \underline{r}_2 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r}(x_r, y_r) = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial D}{\partial y_r}(x_r, y_r) = \underline{r}_3 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_r, y_r) - b'(G_y + \underline{r}_2 \cdot \underline{P}_r(x_r, y_r)) \underline{r}_2 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_r, y_r) = 0. \quad (2.37)$$

Per ridurre il problema originale (2D) ad una semplice equazione scalare (1D) è necessario esprimere una delle due variabili indipendenti (in questo caso x_r) in funzione della seconda variabile y_r . Il termine $b'(G_y + \underline{r}_2 \cdot \underline{P}_r(x_r, y_r))$ può essere ricavato dalla (2.37) ed inserito nella (2.36) arrivando così all'espressione

$$\underline{r}_3 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r}(x_r, y_r) \underline{r}_2 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_r, y_r) = \underline{r}_2 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r}(x_r, y_r) \underline{r}_3 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_r, y_r). \quad (2.38)$$

Tale operazione ha senso solamente se vale la condizione

$$\underline{r}_2 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_r, y_r) \neq 0. \quad (2.39)$$

Semplificando quindi la (2.38) si ottiene

$$r_{21}r_{32}\sqrt{r(y_r)^2 - x_r^2} = (r_{22}r_{33} - r_{23}r_{32})x_r - r_{21}r_{33}r(y_r)r'(y_r) \quad (2.40)$$

dalla quale, se per brevità si pone $A = r_{21}r_{32}$, $B = r(y_r)$, $C = r_{22}r_{33} - r_{23}r_{32}$ e $D = r_{21}r_{33}r(y_r)r'(y_r)$, si ha

$$x_{r1,2}(y_r) = \frac{CD \pm \sqrt{C^2D^2 - (A^2 + C^2)(D^2 - A^2B^2)}}{A^2 + C^2}. \quad (2.41)$$

con $A^2 + C^2$ sempre strettamente positivo. Per ogni valore di y_r si hanno dunque, anche in questo caso, due valori validi di x_r (entrambi da considerare).

Sostituendo infine $x_{r1,2}(y_r)$ all'interno della (2.37) si perviene all'espressione

$$\begin{aligned} F_{1,2}(y_r) &= \frac{\partial D}{\partial y_r}(x_{r1,2}(y_r), y_r) = \\ &= \underline{r}_3 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_{r1,2}(y_r), y_r) - b'(G_y + \underline{r}_2 \cdot \underline{P}_r(x_{r1,2}(y_r), y_r)) \underline{r}_2 \cdot \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r}(x_{r1,2}(y_r), y_r) = \\ &= r_{32}y_r - r_{33} \frac{r(y_r)r'(y_r)}{\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2}} + \\ &-b' \left(G_y + r_{21}x_{r1,2}(y_r) + r_{22}y_r - r_{23}\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2} \right) \left(r_{22} - r_{23} \frac{r(y_r)r'(y_r)}{\sqrt{r(y_r)^2 - x_{r1,2}(y_r)^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.42).$$

La (2.42) è costituita nuovamente da due equazioni scalari che possono essere risolte separatamente l'una dall'altra mediante opportuni algoritmi numerici.

Il problema originale (questa volta 2D) è stato dunque ricondotto ad un semplice problema scalare (1D) con tutti i vantaggi che ciò comporta in termini di accuratezza, efficienza e gestione delle soluzioni multiple. In dimensione 1D risultano inoltre piuttosto efficienti anche algoritmi di risoluzione numerica particolarmente elementari come il metodo della griglia (vedi metodo della DISTANZA, paragrafo 2.3.1.1).

Una volta ricavata la generica soluzione y_{ri}^C della (2.42) è possibile, mediante le relazioni descritte in precedenza, risalire alla corrispondente soluzione (x_{ri}^C, y_{ri}^C) del sistema (2.32) e di conseguenza ai punti di contatto $\underline{P}_{ri}^{bC} = \underline{P}_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C)$ e $\underline{P}_{bi}^{bC} = \underline{P}_b^b(x_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C), y_r^b(x_{ri}^C, y_{ri}^C))$.

Tuttavia, anche in questo caso, le equazioni (2.32) contengono termini irrazionali; di conseguenza la generica soluzione (x_{ri}^C, y_{ri}^C) del suddetto sistema, per essere accettata, dovrà soddisfare le seguenti condizioni analitiche:

- la soluzione deve essere reale
- la soluzione non deve generare termini complessi (attraverso i radicali presenti nelle equazioni)
- la soluzione deve essere soluzione effettiva del sistema originale (2.32) (verifica necessaria in seguito all'eliminazione dei radicali mediante elevamento a potenza).

Tra tutte le soluzioni della (2.42) devono infine essere eliminate le soluzioni multiple dal momento che non hanno alcun senso da un punto di vista fisico. Analogamente al caso precedente, le soluzioni multiple da scartare dovranno essere cercate considerando contemporaneamente sia l'insieme delle soluzioni di $F_1(y_r) = 0$ che quello di $F_2(y_r) = 0$. Non sono dunque ammesse né soluzioni multiple all'interno dei singoli insiemi né soluzioni in comune ai due insiemi.

Ricapitolando, il metodo della DIFFERENZA richiede, da un punto di vista algoritmico, i seguenti step:

- determinazione delle soluzioni (x_{ri}^C, y_{ri}^C) (dove $i = 1, 2, \dots, n$)
- verifica delle condizioni analitiche

- eliminazione delle soluzioni multiple
- verifica della condizione di minimo
- verifica della condizione sulla penetrazione \tilde{p}_n .

2.3.1.3 Performance dei nuovi algoritmi

Nel seguito verranno analizzate le performance dei nuovi algoritmi per la determinazione dei punti di contatto. Per semplicità verranno riportati i risultati relativi ad una singola coppia ruota - rotaia in modo da limitare il numero di punti di contatto presenti tra le superfici dei due corpi. La medesima analisi potrebbe essere condotta considerando anche l'intera coppia sala – binario: tale scelta tuttavia renderebbe solo più complicata l'interpretazione dei risultati senza però introdurre sostanziali novità né a livello qualitativo né a livello quantitativo.

Le performance delle nuove procedure verranno confrontate tra loro e paragonate con quelle di altri metodi numerici presenti in letteratura e già applicati in passato a questo specifico problema in entrambe le sue formulazioni (equazioni (2.17) – (2.18) e (2.32)). In particolare verranno considerati metodi iterativi di ricerca diretta come il metodo del Simplexso ed il Compass Search (tali algoritmi si rivelano particolarmente efficienti per problemi di questo genere poiché non richiedono la conoscenza delle derivate della funzione).

Il confronto sarà effettuato sia in termini di accuratezza che di efficienza. Come benchmark di riferimento è stato scelto il metodo della griglia, un algoritmo elementare che prevede, nella sua versione di base, la valutazione della funzione in questione in una griglia di punti prefissata e la determinazione dei punti notevoli mediante un semplice confronto dei valori ottenuti. Tale algoritmo risulta particolarmente inefficiente se applicato direttamente a problemi multidimensionali (come le formulazioni (2.17) – (2.18) e (2.32) del problema del contatto) ma può essere considerato un ottimo riferimento in termini di accuratezza.

L'analisi delle performance degli algoritmi è stata effettuata considerando un ampio numero N di configurazioni relative sala – binario (dell'ordine di $N \sim 10^7$). Tali configurazioni sono state ottenute variando uniformemente i valori dei parametri cinematici $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$ che descrivono posizione e orientazione della sala nel sistema ausiliario all'interno dei range riportati in Tab. 2.1.

G_y	[0 10] mm
α	[0 0.01] rad
β	[-0.01 0.01] rad

Tabella 2.1 Range di variazione dei parametri cinematici

I range riportati in Tab. 1.1 tengono conto delle simmetrie di cui godono le soluzioni del problema (vedi paragrafi 2.3.1.1 e 2.3.1.2). I valori del parametro G_z sono stati scelti, di volta in volta, in modo da garantire valori fisicamente accettabili delle penetrazioni normali p_n e \tilde{p}_n ; più nel dettaglio si è imposto che, per ogni configurazione, la più piccola (in senso algebrico) tra le penetrazioni associate ai vari punti di contatto presenti fosse pari ad un valore limite p_n^{\max} (in questo caso $p_n^{\max} = -0.18$ mm).

Le equazioni scalari $F_{1,2}(y_r) = 0$ derivanti dalle due formulazioni del problema (vedi equazioni (2.29) e (2.42)) sono state risolte numericamente per mezzo del metodo della griglia opportunamente modificato (con risoluzione di 0.1 mm per entrambe le formulazioni). Questa tipologia di algoritmi si rivela particolarmente adatta a problemi 1D (come quelli in questione) garantendo ottime performance in termini di accuratezza, efficienza e gestione delle soluzioni multiple e rendendo possibile l'implementazione online degli algoritmi senza l'impiego di LUT. Le equazioni $F_{1,2}(y_r) = 0$ sono state risolte imponendo, per entrambe le formulazioni (2.29) e (2.42), che le variabili y_r e y_b appartengano ai seguenti domini:

$$\begin{aligned} y_r &\in [-780 \quad -700] \text{ mm} \cup [700 \quad 780] \text{ mm} \\ y_b &\in [-780 \quad -715] \text{ mm} \cup [715 \quad 780] \text{ mm} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Per poter confrontare tra loro le procedure in termini di accuratezza è necessario definire un modo per contare gli errori commessi dai vari metodi. Tale conteggio deve considerare sia gli errori dovuti all'imprecisione delle procedure (introducendo una certa tolleranza *toll*) sia gli errori dovuti alla presenza di punti di contatto in eccesso od in difetto.

Si supponga di dover confrontare la generica procedura A (assunta come metodo di riferimento) con la procedura B e di considerare una data configurazione sala – binario individuata da certi valori dei parametri cinematici $(G_y, G_z, \alpha, \beta)$. Siano

inoltre \underline{P}_i^{CA} con $i=1,2,\dots,M_A$ i punti di contatto individuati dal metodo A e \underline{P}_j^{CB} con $j=1,2,\dots,M_B$ quelli individuati dal metodo B . Il numero di errori E^{BA} commessi dalla procedura B rispetto alla procedura A (in questa particolare configurazione) può essere calcolato come segue:

- $\underline{v}_A = \underline{0}$, $\underline{v}_B = \underline{0}$ con $\underline{v}_A \in R^{M_A}$ e $\underline{v}_B \in R^{M_B}$
- for $i = 1, 2, \dots, M_A$
 - for $j = 1, 2, \dots, M_B$
 - if $\|\underline{P}_i^{CA} - \underline{P}_j^{CB}\| \leq toll$ and $v_B(j) = 0$
 - $v_A(i) = 1$, $v_B(j) = 1$
 - break
 - end
- end
- end
- $m_A = M_A - \|\underline{v}_A\|^2$, $m_B = M_B - \|\underline{v}_B\|^2$
- $E^{BA} = \max(m_A, m_B)$.

Tale quantità può essere pensata come la somma degli errori provocati dall'imprecisione del metodo B $E_1^{BA} = \min(m_A, m_B)$ con gli errori dovuti alla presenza di punti di contatto in eccesso/difetto $E_2^{BA} = \max(m_A, m_B) - \min(m_A, m_B)$ (sempre relativamente al metodo di riferimento A). Nel seguito si assumerà sempre $toll = 0.1$ mm. Più in generale, se E_{hk}^{BA} rappresenta il numero di errori presenti nella k -esima configurazione della classe delle configurazioni aventi h punti di contatto, si ha

$$e_h^{BA} = \frac{\sum_{k=1}^{N_h^A} E_{hk}^{BA}}{hN_h^A} \quad h = 1, 2, \dots, n_p^A. \quad (2.44)$$

dove e_h^{BA} è l'errore percentuale relativo alla classe di configurazioni con h punti di contatto, N_h^A è il numero di configurazioni appartenenti a tale classe e n_p^A è il massimo numero di punti di contatto presenti sulle superfici della singola coppia ruota e rotaia. L'errore percentuale complessivo e^{BA} è infine definito come

$$e^{BA} = \frac{\sum_{h=1}^{n_p^A} \sum_{k=1}^{N_h^A} E_{hk}^{BA}}{P^A}. \quad (2.45)$$

nella quale $P^A = \sum_{h=1}^{n_p^A} hN_h^A$ è il numero totale di punti di contatto determinati mentre $N = \sum_{h=1}^{n_p^A} N_h^A$ rappresenta il numero totale di configurazioni analizzate.

Nelle Tab. 2.2 e Tab. 2.3 è riportata la distribuzione delle N configurazioni considerate in base al numero dei punti di contatto presenti (per entrambi gli angoli di posa $\alpha_p = 1/40$ e $\alpha_p = 1/20$). In Tab. 2.2 si trova la distribuzione ottenuta partendo dalla formulazione (2.17) - (2.18) del problema del contatto mentre in Tab. 2.3 quella ottenuta dalla formulazione (2.32). Le distribuzioni in questione sono state calcolate mediante il metodo della griglia con una risoluzione di 0.1 mm su tutte le dimensioni (per entrambe le formulazioni del problema).

Angolo di posa α_p	Punti singoli N_1^G / N (%)	Punti doppi N_2^G / N (%)	Punti tripli N_3^G / N (%)
1/40	87.1	12.9	-
1/20	80.7	10.7	8.6

Tabella 2.2 Distribuzione delle configurazioni (formulazione (2.17) – (2.18))

Angolo di posa α_p	Punti singoli N_1^G / N (%)	Punti doppi N_2^G / N (%)	Punti tripli N_3^G / N (%)
1/40	86.9	13.1	-
1/20	80.3	10.6	9.1

Tabella 2.3 Distribuzione delle configurazioni (formulazione (2.32))

In particolare è possibile osservare come la maggior parte delle configurazioni prevedano un singolo punto di contatto; entrambi gli angoli di posa ammettono configurazioni con due punti di contatto mentre configurazioni con triplo punto di contatto sono presenti solo con angolo di posa pari a $\alpha_p = 1/20$.

Dapprima sono state confrontate tra loro le performance del metodo della DISTANZA e del metodo della DIFFERENZA. In Tab. 2.4 sono riportati i valori dell'errore percentuale complessivo e degli errori percentuali relativi.

Angolo di posa α_p	e^{Dd} (%)	e_1^{Dd} (%)	e_2^{Dd} (%)	e_3^{Dd} (%)
1/40	1.0	1.0	1.1	-
1/20	0.8	0.3	2.3	0.9

Tabella 2.4 *Confronto tra metodo della DISTANZA e metodo della DIFFERENZA: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi*

Tali risultati dimostrano come i due metodi in questione producano sostanzialmente gli stessi risultati. Di conseguenza, nel range di interesse operativo, il metodo della DIFFERENZA può essere considerato una buona approssimazione analitica del metodo della DISTANZA.

E' stato inoltre studiato il comportamento delle due procedure al variare del valore limite della penetrazione normale p_n^{\max} (ovvero della più piccola tra le penetrazioni associate ai vari punti di contatto presenti) (Tab. 2.5). Tale limite può essere impostato a proprio piacimento scegliendo opportunamente il valore di G_z (valore che dipende chiaramente della singola configurazione considerata).

Penetrazione p_n^{\max} (mm)	e^{Dd} (%), $\alpha_p = 1/40$	e^{Dd} (%), $\alpha_p = 1/20$
- 0.30	1.2	1.8
-0.24	1.1	1.3
-0.18	1.0	0.8
-0.12	0.8	0.5
-0.06	0.4	0.2

Tabella 2.5 *Confronto tra metodo della DISTANZA e metodo della DIFFERENZA: dipendenza dell'errore percentuale complessivo dal valore limite della penetrazione normale*

Le differenze tra i due metodi risultano dunque sempre molto contenute all'interno del range di penetrazioni normali fisicamente significative e tendono ad annullarsi quando p_n^{\max} tendo a zero.

I metodi della DISTANZA e della DIFFERENZA sono stati poi confrontati con le performance del metodo della griglia (considerato come riferimento) in modo da avere delle indicazioni sulla loro accuratezza. Nel primo caso il metodo della griglia è stato ovviamente applicato alla formulazione (2.17) – (2.18) mentre nel secondo alla formulazione (2.32). In Tab. 2.6 si trovano l'errore percentuale complessivo e gli errori percentuali relativi calcolati col metodo della DISTANZA. In Tab. 2.7 si trovano le analoghe grandezze ricavate col metodo della DIFFERENZA.

Angolo di posa α_p	e^{dG} (%)	e_1^{dG} (%)	e_2^{dG} (%)	e_3^{dG} (%)
1/40	0.7	0.6	0.9	-
1/20	1.5	1.3	2.5	1.1

Tabella 2.6 Confronto tra metodo della DISTANZA e metodo della griglia: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi

Angolo di posa α_p	e^{DG} (%)	e_1^{DG} (%)	e_2^{DG} (%)	e_3^{DG} (%)
1/40	1.1	1.0	1.3	-
1/20	2.1	1.9	2.6	2.1

Tabella 2.7 Confronto tra metodo della DIFFERENZA e metodo della griglia: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi

L’analisi dei risultati mostra come il metodo della DISTANZA si riveli più accurato del metodo della DIFFERENZA anche se le differenze non risultano particolarmente ingenti.

Successivamente sono state studiate le performance di altri metodi numerici presenti in letteratura e già applicati in passato a questo specifico problema in entrambe le sue formulazioni (equazioni (2.17) – (2.18) e (2.32)). In particolare verranno considerati due metodi iterativi di ricerca diretta: il metodo del Simplexso ed il Compass Search (tali algoritmi si rivelano particolarmente efficienti per problemi di questo genere poiché non richiedono la conoscenza delle derivate della funzione). Le performance di tali procedure verranno poi confrontate con quelle del metodo della griglia (scelto come riferimento) in modo da poterle poi paragonare a quelle dei nuovi metodi.

In Tab. 2.8 e Tab. 2.9 sono riportati l’errore percentuale complessivo e gli errori percentuali relativi calcolati col metodo del Compass Search; nel primo caso i dati si riferiscono alla formulazione (2.17) – (2.18) mentre nel secondo caso alla formulazione (2.32).

Angolo di posa α_p	e^{CSG} (%)	e_1^{CSG} (%)	e_2^{CSG} (%)	e_3^{CSG} (%)
1/40	3.2	3.0	4.0	-
1/20	5.9	5.5	6.3	6.9

Tabella 2.8 *Confronto tra metodo del Compass Search e metodo della griglia: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi (formulazione (2.17) – (2.18))*

Angolo di posa α_p	e^{CSG} (%)	e_1^{CSG} (%)	e_2^{CSG} (%)	e_3^{CSG} (%)
1/40	3.5	3.3	4.1	-
1/20	6.1	5.7	6.4	7.0

Tabella 2.9 *Confronto tra metodo del Compass Search e metodo della griglia: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi (formulazione (2.32))*

In Tab. 2.10 e Tab. 2.11 si trovano invece le analoghe grandezze valutate per mezzo del metodo del Semplesso.

Angolo di posa α_p	e^{SG} (%)	e_1^{SG} (%)	e_2^{SG} (%)	e_3^{SG} (%)
1/40	3.6	3.5	4.0	-
1/20	7.1	6.8	7.2	8.0

Tabella 2.10 *Confronto tra metodo del Semplesso e metodo della griglia: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi (formulazione (2.17) – (2.18))*

Angolo di posa α_p	e^{SG} (%)	e_1^{SG} (%)	e_2^{SG} (%)	e_3^{SG} (%)
1/40	4.0	3.9	4.2	-
1/20	7.2	6.8	7.4	8.2

Tabella 2.11 *Confronto tra metodo del Semplesso e metodo della griglia: errore percentuale complessivo ed errori percentuali relativi (formulazione (2.32))*

Dai risultati è possibile osservare come il metodo del Compass Search sia leggermente più accurato del metodo del Semplesso mentre le due formulazioni producono, in questo caso, risultati comparabili. Entrambi i metodi iterativi di ricerca diretta si rivelano tuttavia molto meno accurati del metodo della DISTANZA e del metodo della DIFFERENZA.

Per confrontare le performance delle varie procedure in termini di efficienza è stato invece considerato il tempo medio di calcolo misurato sulle N configurazioni relative sala – binario. Tutti i tempi in questione sono stati ottenuti con una macchina dotata di un processore Intel Core 2 Duo da 2.2 GHz e 4GB di RAM.

In Tab. 2.12 sono riportati in ordine crescente tutti i tempi medi relativi alle procedure considerate. Per permettere un confronto più immediato tra le varie prestazioni, gli stessi tempi sono stati riportati anche in Fig. 2.12 (in scala logaritmica).

T^D	0.0006 s
T^d	0.0011 s
T^{CS} (2.32)	0.11 s
T^S (2.32)	0.26 s
T^{CS} (2.17) – (2.18)	0.30 s
T^S (2.17) – (2.18)	0.49 s
T^G (2.32)	2.9 s
T^G (2.17) – (2.18)	9.3 s

Tabella 2.12 Tempi medi di calcolo relativi alle varie procedure

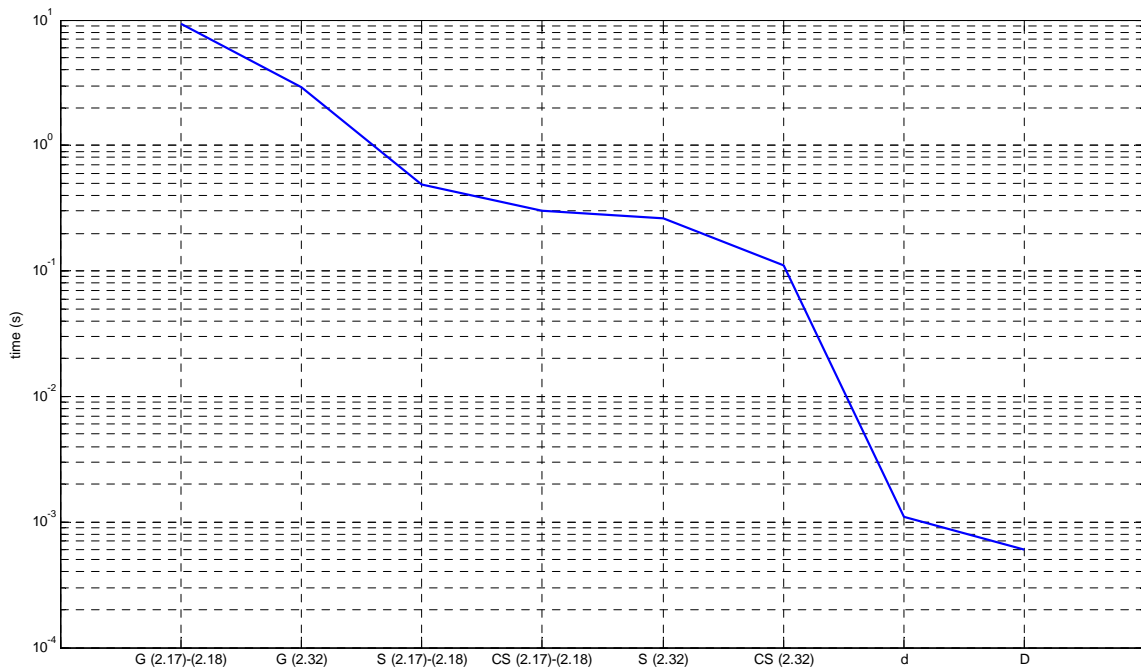


Figura 2.12 Tempi medi di calcolo relativi alle varie procedure

Il metodo della griglia si dimostra nettamente la procedura più lenta a prescindere dalla formulazione del problema. Ciò è tuttavia comprensibile dal momento che questa classe di metodi si rivela piuttosto inefficiente se applicata direttamente a problemi multidimensionali come quelli in questione (equazioni (2.17) – (2.18) e (2.32)). Tale procedura è stata inoltre impiegata con lo scopo di definire un punto di

riferimento per quanto riguarda l'accuratezza e non ha certamente la pretesa di fornire buone performance in termini di efficienza.

Per quanto concerne i metodi iterativi di ricerca diretta il Compass Search si rivela sempre più efficiente del metodo del Simplex mentre la formulazione (2.32) si dimostra mediamente più veloce della (2.17) – (2.18).

Il metodo della DISTANZA ed il metodo della DIFFERENZA si dimostrano infine nettamente più efficienti dei metodi finora analizzati. Il metodo della DIFFERENZA si rivela a sua volta più veloce del metodo della DISTANZA dal momento che, da un punto di vista analitico, ne costituisce un'approssimazione.

I tempi di calcolo estremamente ridotti garantiti dalle nuove procedure rendono possibile l'implementazione online dei nuovi metodi all'interno dei modelli multibody senza l'utilizzo di LUT (al contrario di quanto avviene nei software già esistenti). Tali performance risultano inoltre comparabili con quelle dei software commerciali (come Simpack Rail ed Adams Rail) e compatibili con applicazioni in RT ed HIL.

2.3.2 Le azioni di contatto

Dal momento che i due nuovi modelli di contatto globali descritti in questo capitolo si basano sull'approccio semielastico, le forze normali di contatto verranno determinate a partire dalla penetrazione presente tra le superfici di sala e binario mentre la teoria di Hertz e la teoria lineare di Kalker permetteranno di valutare le forze tangenziali di contatto, il momento di spin e le caratteristiche dell'impronta di contatto.

Più nel dettaglio, le principali grandezze calcolate per ciascun punto di contatto \underline{P}_b^{bC} (nel seguito l'indice i verrà omissso per brevità) saranno (Fig. 2.13):

- la forza normale di contatto agente sulla sala

$$\underline{N}^b(\underline{P}_b^{bC}) = N^b(\underline{P}_b^{bC}) \underline{n}_b^b(\underline{P}_b^{bC}) \quad (2.46)$$

- le forze tangenziali di contatto agenti sulla sala

$$\begin{aligned} \underline{T}_x^b(\underline{P}_b^{bC}) &= T_x^b(\underline{P}_b^{bC}) \underline{i}_b^b(\underline{P}_b^{bC}) \\ \underline{T}_y^b(\underline{P}_b^{bC}) &= T_y^b(\underline{P}_b^{bC}) \underline{j}_b^b(\underline{P}_b^{bC}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

dove $\underline{t}_b^b(\underline{P}_b^{bC}) = \underline{n}_b^b(\underline{P}_b^{bC}) \wedge \underline{i}_b^b(\underline{P}_b^{bC})$

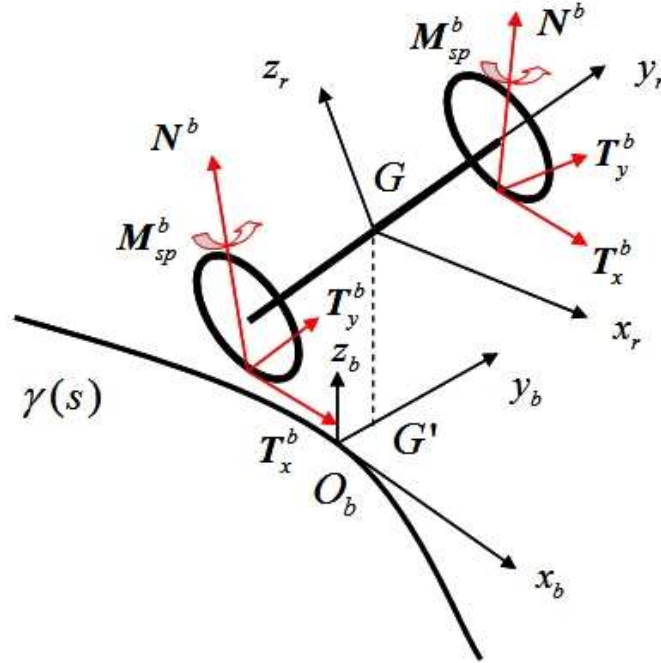


Figura 2.13 Forze e momenti di contatto agenti sulle ruote

- il momento di spin agente sulla sala

$$\underline{M}_{sp}^b(\underline{P}_b^{bC}) = M_{sp}^b(\underline{P}_b^{bC}) \underline{n}_b^b(\underline{P}_b^{bC}). \quad (2.48)$$

Tutte le grandezze in questione sono espresse nel sistema di riferimento ausiliario. In accordo con la teoria di Hertz, la forza normale di contatto può essere valutata, in funzione della penetrazione normale p_n (vedi equazioni (2.20) e (2.33)), mediante la seguente formula euristica:

$$N^b(\underline{P}_b^{bC}) = \left[-k_h |p_n|^\gamma + k_v |v_n| \frac{\text{sign}(v_n) - 1}{2} \right] \frac{\text{sign}(p_n) - 1}{2}. \quad (2.49)$$

dove k_h è la costante hertziana, $\gamma = 3/2$ e $k_v = 10^5 \text{ Ns/m}$. La velocità di penetrazione v_n può essere pensata come la componente normale $v_n = \underline{v} \cdot \underline{n}_b^b(\underline{P}_b^{bC})$ dello slittamento \underline{v} tra le superfici di sala e binario:

$$\underline{v} = \underline{v}_{r,f}^b - \underline{v}_{b,f}^b \quad (2.50)$$

dove $\underline{v}_{r,f}^b$ è la velocità assoluta del punto di contatto \underline{P}_r^{bC} pensato solidale alla sala e $\underline{v}_{b,f}^b$ è la velocità assoluta del punto di contatto \underline{P}_b^{bC} pensato solidale al binario (entrambe le velocità sono espresse nel sistema ausiliario e possono essere calcolate a partire dagli input del modello \underline{O}_r^b , R_2 , $\dot{\underline{O}}_{r,f}^b$, $\underline{\omega}_{r,f}^b$ e $\dot{\underline{O}}_{b,f}^b$, $\underline{\omega}_{b,f}^b$). Il valore di $N^b(\underline{P}_b^{bC})$ è dunque nullo se $p_n \geq 0$ mentre la componente viscosa si azzera quando $v_n \geq 0$.

L'espressione esatta della costante hertziana k_h ha la seguente forma:

$$k_h = \frac{2\pi}{3Q} \frac{1}{\sqrt{D_M + D_m}} \frac{\sqrt{E(g)}}{gK(g)^{3/2}} \quad (2.51)$$

dove $Q = (1-\nu)/G$, $G = 2G_r G_b / (G_r + G_b)$ e $\nu = (\nu_r G_b + \nu_b G_r) / (G_r + G_b)$ (i valori dei moduli di rigidezza trasversale $G_r = G_b = 8 \cdot 10^{10}$ Pa e dei coefficienti di Poisson $\nu_r = \nu_b = 0.3$ sono quelli tipici dell'acciaio).

I coefficienti D_M e D_m dipendono dalle curvature normali longitudinali e laterali delle superfici di sala e binario valutate nel punto di contatto $k_{1,r}^C$, $k_{2,r}^C$, $k_{1,b}^C$ e $k_{2,b}^C$ e sono definiti come segue:

$$D_M = \max(D_1, D_2) \quad D_m = \min(D_1, D_2) \quad (2.52)$$

nella quale

$$D_1 = \frac{1}{2}(k_{1,r}^C + k_{1,b}^C) \quad D_2 = \frac{1}{2}(k_{2,r}^C + k_{2,b}^C). \quad (2.53)$$

Tuttavia, data la particolare geometria del problema e poiché gli angoli α e β che descrivono l'orientazione della sala nel sistema ausiliario sono solitamente piuttosto piccoli, tali curvature coincidono di fatto con le curvature normali principali $K_{1r}(y_r)$, $K_{2r}(y_r)$, $K_{1b}(y_b)$ e $K_{2b}(y_b)$ (vedi equazioni (2.22) e (2.23)).

A questo punto si introduce l'eccentricità g dell'impronta di contatto (supposta avere forma ellittica) definita come

$$g = \min\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right) \leq 1 \quad (2.54)$$

dove a è il semiasse longitudinale dell'ellisse di contatto mentre b è il semiasse laterale. Il valore di tale parametro può essere determinato risolvendo l'equazione

$$\frac{D_M - D_m}{D_M + D_m} = (1 - g^2) \frac{D(g) - C(g)}{E(g)} \quad (2.55)$$

Definendo inoltre

$$a_M = \max(a, b) \quad a_m = \min(a, b) \quad (2.56)$$

si ha che

$$a_m = \sqrt{\frac{p_n}{D_M + D_m} \frac{E(g)}{K(g)}} \quad a_M = a_m / g. \quad (2.57)$$

Il confronto tra i parametri D_1 e D_2 consente poi di calcolare i semiassi dell'ellisse di contatto

$$D_1 \leq D_2 \Rightarrow \begin{cases} a = a_M \\ b = a_m \end{cases} \quad D_1 > D_2 \Rightarrow \begin{cases} a = a_m \\ b = a_M \end{cases}. \quad (2.58)$$

Le funzioni $C(g)$, $D(g)$, $E(g)$ e $K(g)$ infine sono integrali ellittici nella variabile g i cui valori possono essere trovati tabulati in letteratura.

Le forze tangenziali di contatto ed il momento di spin possono essere valutati per mezzo della teoria lineare di Kalker

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x^b(\underline{P}_b^{bC}) &= -f_{11}\varepsilon_x \\ \tilde{T}_y^b(\underline{P}_b^{bC}) &= -f_{22}\varepsilon_y - f_{23}\varepsilon_{sp} \\ M_{sp}^b(\underline{P}_b^{bC}) &= f_{23}\varepsilon_y - f_{33}\varepsilon_{sp} \end{aligned} \quad (2.59)$$

nella quale ε_x , ε_y e ε_{sp} sono rispettivamente gli pseudoslittamenti longitudinali, laterali e di spin:

$$\varepsilon_x = \frac{\underline{v} \cdot \underline{l}_b}{\|\dot{\underline{G}}_{r,f}^b\|} \quad \varepsilon_y = \frac{\underline{v} \cdot \underline{l}_b^b}{\|\dot{\underline{G}}_{r,f}^b\|} \quad \varepsilon_{sp} = \frac{\underline{\omega} \cdot \underline{n}_b}{\|\dot{\underline{G}}_{r,f}^b\|} \quad (2.60)$$

dove $\|\dot{\underline{G}}_{r,f}^b\|$ è la velocità assoluta del centro di massa della sala espressa nel sistema ausiliario. Lo slittamento angolare $\underline{\omega}$ è invece definito come

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_{r,f}^b - \underline{\omega}_{b,f}^b \quad (2.61)$$

dove $\underline{\omega}_{r,f}^b$ è la velocità angolare assoluta del sistema solidale alla sala mentre $\underline{\omega}_{b,f}^b$ è la velocità angolare assoluta del sistema ausiliario (entrambe le velocità angolari sono espresse nel sistema ausiliario).

I coefficienti di proporzionalità f_{ij} dipendono dalle caratteristiche fisiche dei materiali e dalle dimensioni dell'impronta di contatto

$$\begin{aligned} f_{11} &= abGC_{11} & f_{22} &= abGC_{22} \\ f_{23} &= (ab)^{3/2}GC_{23} & f_{33} &= (ab)^2GC_{33} \end{aligned} \quad (2.62)$$

mentre le costanti di Kalker $C_{ij}(\nu, g)$ sono funzioni del coefficiente di Poisson e dell'eccentricità dell'ellisse di contatto e possono essere trovate anch'esse tabulate in letteratura.

Dal momento che la teoria di Kalker in questione è lineare, deve essere introdotta una saturazione sulle forze tangenziali di contatto in modo da considerare il

limite di aderenza. A tal scopo, posto $\tilde{T}^b = \sqrt{\tilde{T}_x^{b2} + \tilde{T}_y^{b2}}$, si definisce un coefficiente di saturazione ε nel seguente modo

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\mu N^b}{\tilde{T}^b} \left[\left(\frac{\tilde{T}^b}{\mu N^b} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{T}^b}{\mu N^b} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{\tilde{T}^b}{\mu \tilde{T}^b N^b} \right)^3 \right] & \tilde{T}^b \leq 3\mu N^b \\ \frac{\mu N^b}{\tilde{T}^b} & \tilde{T}^b > 3\mu N^b \end{cases} \quad (2.63)$$

dove μ è il coefficiente di attrito cinetico. Le componenti saturate della forza tangenziale di contatto possono essere infine calcolate come segue

$$T_x^b = \varepsilon \tilde{T}_x^b \quad T_y^b = \varepsilon \tilde{T}_y^b. \quad (2.64)$$

2.4 Il modello multibody del veicolo ferroviario

In questo paragrafo sarà descritta per sommi capi la struttura del modello multibody del veicolo ferroviario (Fig. 2.14). Come veicolo di riferimento è stato scelto il Manchester Wagon le cui caratteristiche fisiche e geometriche possono essere reperite in letteratura. [B15]

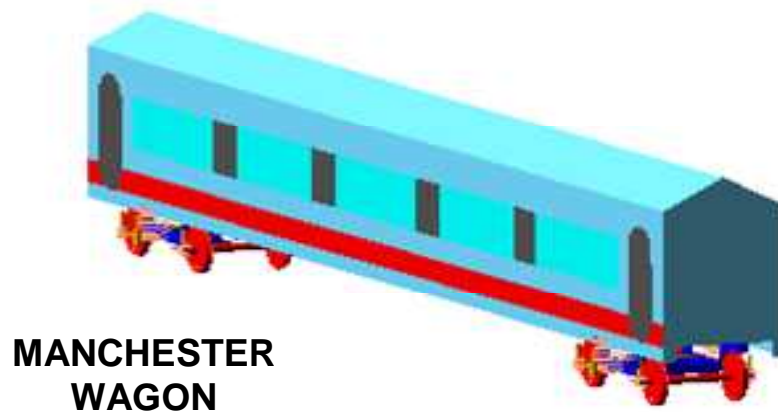


Figura 2.14 Modello multibody del Manchester Wagon

Il modello in questione è composto da sette corpi rigidi:

- una cassa (Fig. 2.14)
- due carrelli (Fig. 2.15)
- quattro sale (Fig. 2.17).

CARRELLO

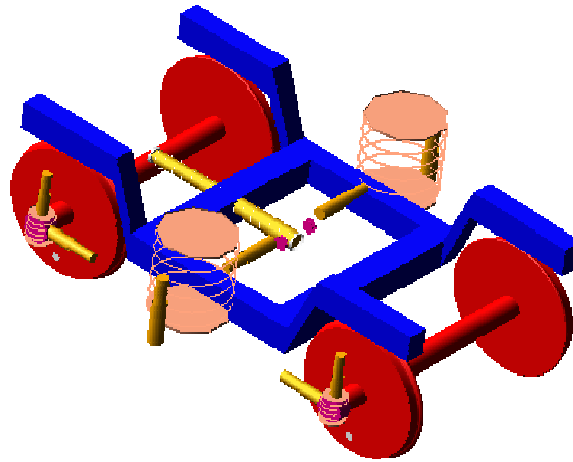


Figura 2.15 Carrello del Manchester Wagon

Le caratteristiche inerziali dei sette corpi (masse ed inerzie) sono riportate in Tab. 2.13.

Corpo	Massa m (kg)	Inerzia I_{xx} (kgm ²)	Inerzia I_{yy} (kgm ²)	Inerzia I_{zz} (kgm ²)
Cassa	32000	56800	1970000	1970000
Carrello	2615	1722	1476	3067
Sala	1813	1120	112	1120

Tabella 2.13 Caratteristiche inerziali dei corpi

Il Manchester Wagon dispone di due stadi sospensivi: le sospensioni secondarie e le sospensioni primarie. Le sospensioni secondarie (Fig. 2.16) collegano tra loro la cassa ed i carrelli e sono costituite dalle seguenti parti:

- due molle elicoidali
- quattro ammortizzatori (laterali e verticali)
- due finecorsa
- antirollio (presente nel modello ma non visibile in figura)
- anti serpeggio

Le principali caratteristiche fisiche delle sospensioni secondarie sono riassunte in Tab. 2.14 e Tab. 2.15. Da un punto di vista modellistico tutti gli elementi della sospensione sono stati descritti per mezzo di elementi di forza visco – elastici tridimensionali (rigidezze e smorzamenti lineari e non).

SOSPENSIONI SECONDARIE

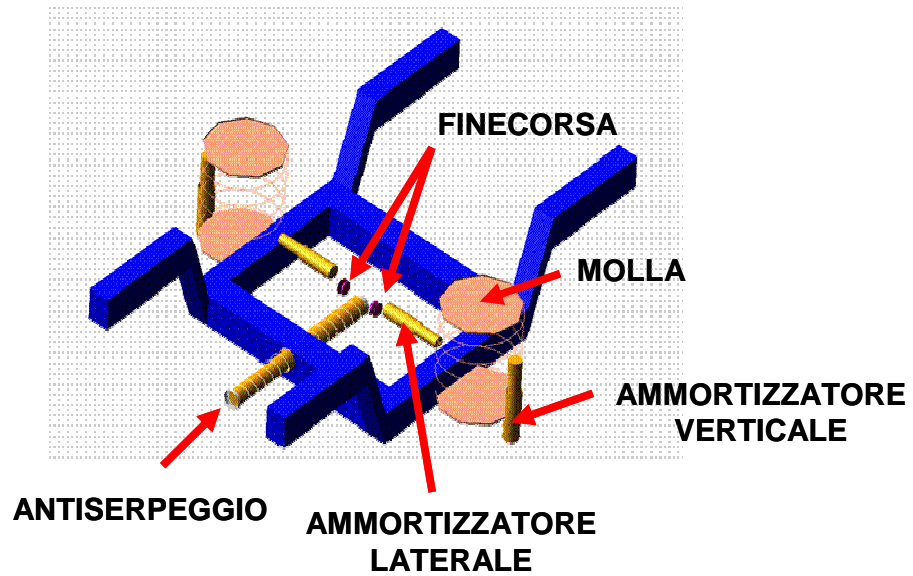


Figura 2.16 Sospensioni secondarie

Elemento	Rigidezza longitudinale k_x (N/m)	Rigidezza laterale k_y (N/m)	Rigidezza verticale k_z (N/m)	Rigidezza al rollio k_β (Nm/rad)	Rigidezza al beccheggio k_γ (Nm/rad)
Molla elicoidale	160000	160000	430000	10500	10500
Antirollio	-	-	-	940000	-
Antiserpeggio	5000000	-	-	-	-

Tabella 2.14 Caratteristiche fisiche delle sospensioni secondarie: rigidzze

Elemento	Smorzamento longitudinale c_x (Ns/m)	Smorzamento laterale c_y (Ns/m)	Smorzamento verticale c_z (Ns/m)
Ammortizzatore laterale	-	32000	-
Ammortizzatore verticale	-	-	20000
Antiserpeggio	25000	-	-

Tabella 2.15 Caratteristiche fisiche delle sospensioni secondarie: smorzamenti

I due finecorsa sono stati modellati mediante una rigidezza laterale non lineare avente la caratteristica riportata in Tab. 2.16 (in questo caso non è presente smorzamento).

Spostamento Δy (mm)	0	25	30	35	40	45	50	55	60	65
Rigidezza laterale k_y (kN/m)	0	0	0.60	1.76	3.73	6.87	11.58	17.17	29.2	230

Tabella 2.16 Caratteristica di rigidezza dei finecorsa

Le sospensioni primarie (Fig. 2.17) collegano invece tra loro le sale ed i carrelli e sono costituite dalle seguenti parti:

- due molle elicoidali
- sei ammortizzatori (longitudinali, laterali e verticali).

Le principali caratteristiche fisiche delle sospensioni primarie sono riassunte in Tab. 2.17 e Tab. 2.18. Anche in questo caso, da un punto di vista modellistico, tutti gli elementi della sospensione sono stati descritti per mezzo di elementi di forza visco – elastici tridimensionali (rigidezze e smorzamenti lineari e non).

SALA E SOSPENSIONI PRIMARIE

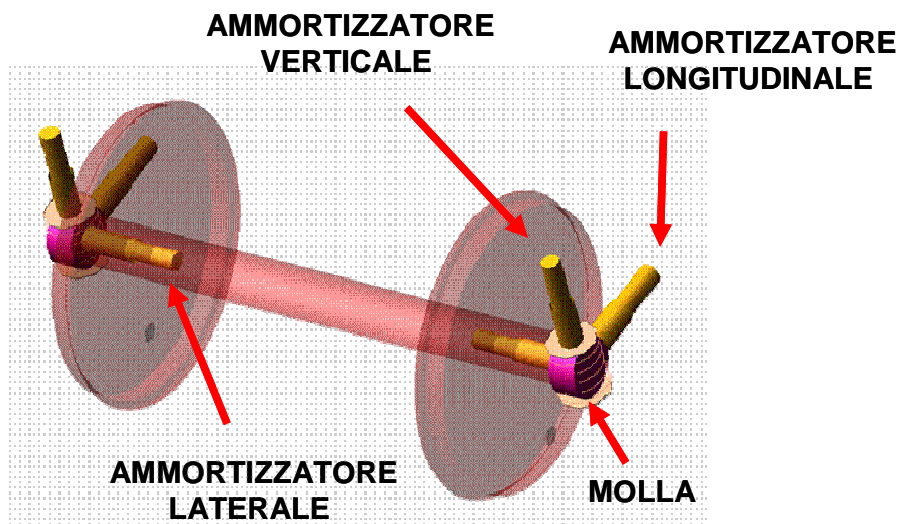


Figura 2.17 Sospensioni primarie

Elemento	Rigidezza longitudinale k_x (N/m)	Rigidezza laterale k_y (N/m)	Rigidezza verticale k_z (N/m)
Molla elicoidale	31391000	3884000	1220000

Tabella 2.17 *Caratteristiche fisiche delle sospensioni primarie: rigidezze*

Elemento	Smorzamento longitudinale c_x (Ns/m)	Smorzamento laterale c_y (Ns/m)	Smorzamento verticale c_z (Ns/m)
Ammortizzatore longitudinale	15000	-	-
Ammortizzatore laterale	-	2000	-
Ammortizzatore verticale	-	-	4000

Tabella 2.18 *Caratteristiche fisiche delle sospensioni primarie: smorzamenti*

Per ulteriori informazioni riguardanti soprattutto le caratteristiche geometriche del veicolo si rimanda alla letteratura. [B15]

2.5 L'implementazione dei modelli in Matlab/Simulink

Come accennato nell'introduzione e nel paragrafo 2.1, il modello dell'intera vettura (si veda Fig. 2.1) è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink. [B21]

Per quanto riguarda il modello multibody del veicolo, si è fatto uso di SimMechanics, un toolbox di Matlab appositamente dedicato alla dinamica multibody. Le principali caratteristiche di tale ambiente di calcolo (che ne hanno giustificato la scelta) possono essere riassunte come segue:

- grande modularità grazie all'applicazione dell'algebra a blocchi (tipica dell'ambiente Matlab\Simulink) alla modellistica multibody
- ottima integrazione con l'ambiente Matlab/Simulink (che rende possibile un'estesa parametrizzazione dei modelli)
- capacità di gestire in modo efficiente sistemi multibody complessi (sia in termini algoritmici che grafici)

- elevata efficienza numerica (all'interno di SimMechanics sono disponibili tutti gli strumenti di calcolo normalmente presenti in Matlab/Simulink).

In accordo con l'algebra a blocchi di SimMechanics, il modello multibody del Manchester Wagon [B15] presenta una struttura modulare articolata in vari livelli. Il primo livello, riportato in Fig. 2.18, è composto dalle seguenti parti:

- corpo della cassa
- condizioni iniziali della cassa
- sottosistema del carrello anteriore
- sottosistema del carrello posteriore.

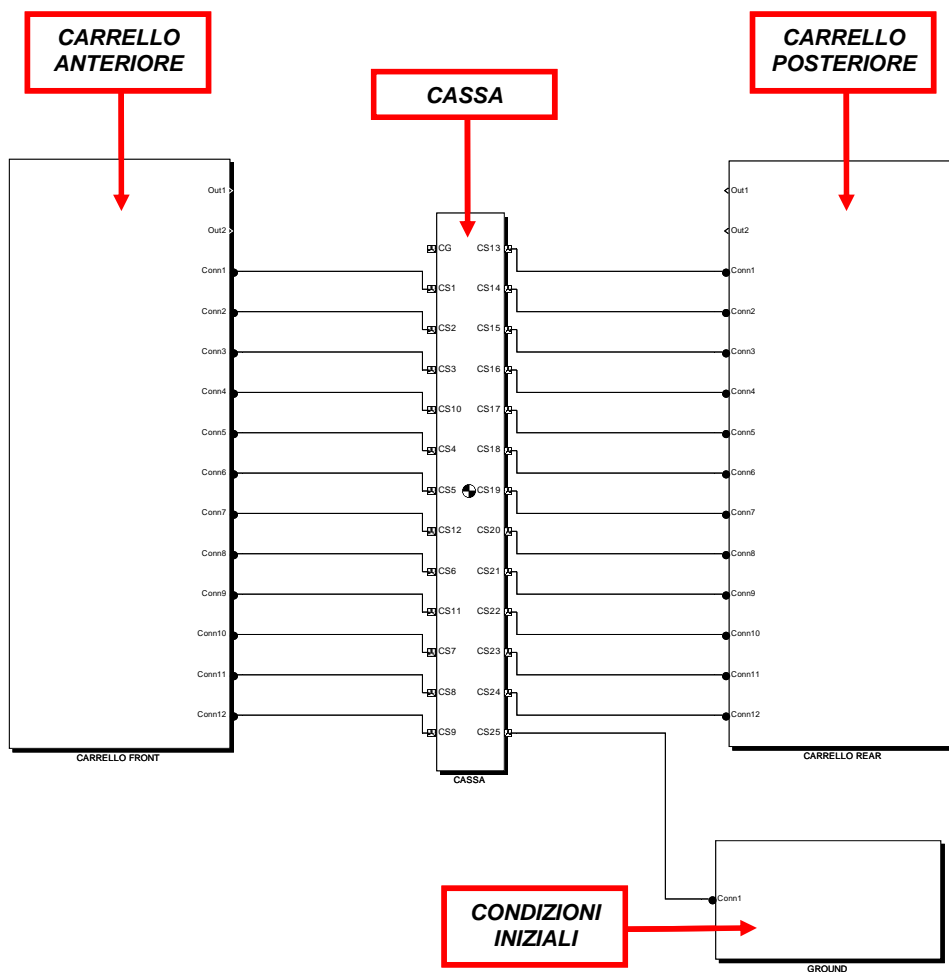


Figura 2.18 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: primo livello

Il secondo livello (Fig. 2.19) è costituito invece dai sottosistemi dedicati ai due carrelli. Tali sottosistemi contengono i blocchi associati alle varie componenti del carrello ovvero:

- corpo del telaio
- corpi delle sale (anteriore e posteriore)
- condizioni iniziali del telaio e delle sale
- sospensioni secondarie
- sospensioni primarie
- modello di contatto (in questo caso uno per ciascuna sala).

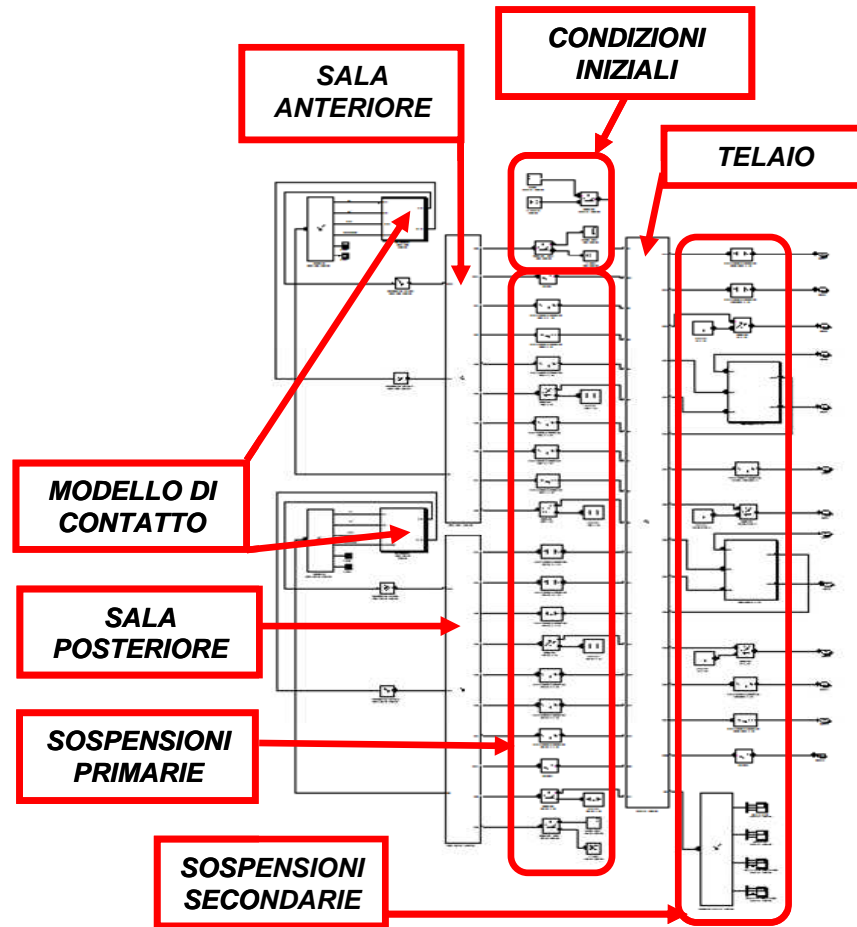


Figura 2.19 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: secondo livello

In Fig. 2.20 è riportato nel dettaglio il blocco che contiene il modello di contatto. Più in particolare sono visibili, in entrata, le variabili cinematiche che descrivono il moto della sala rispetto ai binari ed, in uscita, la forza ed il momento risultanti agenti sulla sala stessa (si veda anche Fig. 2.1).

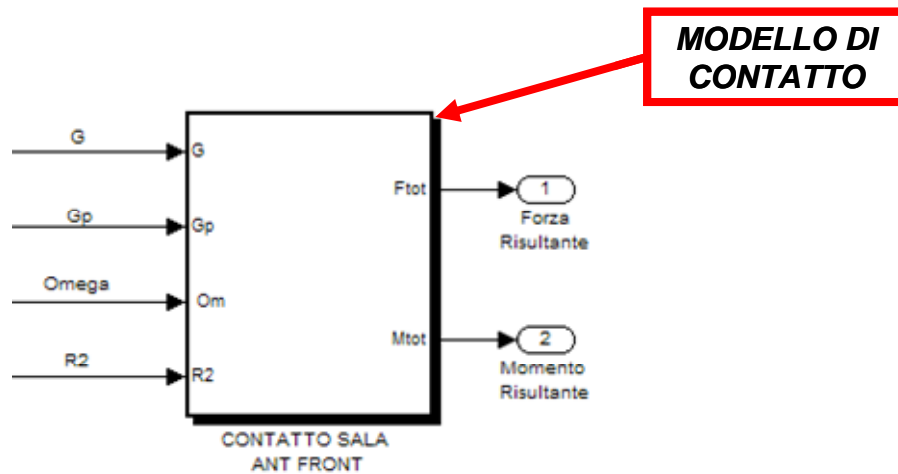


Figura 2.20 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: secondo livello, modello di contatto

Il terzo livello (Fig. 2.21) è contenuto nel blocco dedicato al modello di contatto e comprende le seguenti parti:

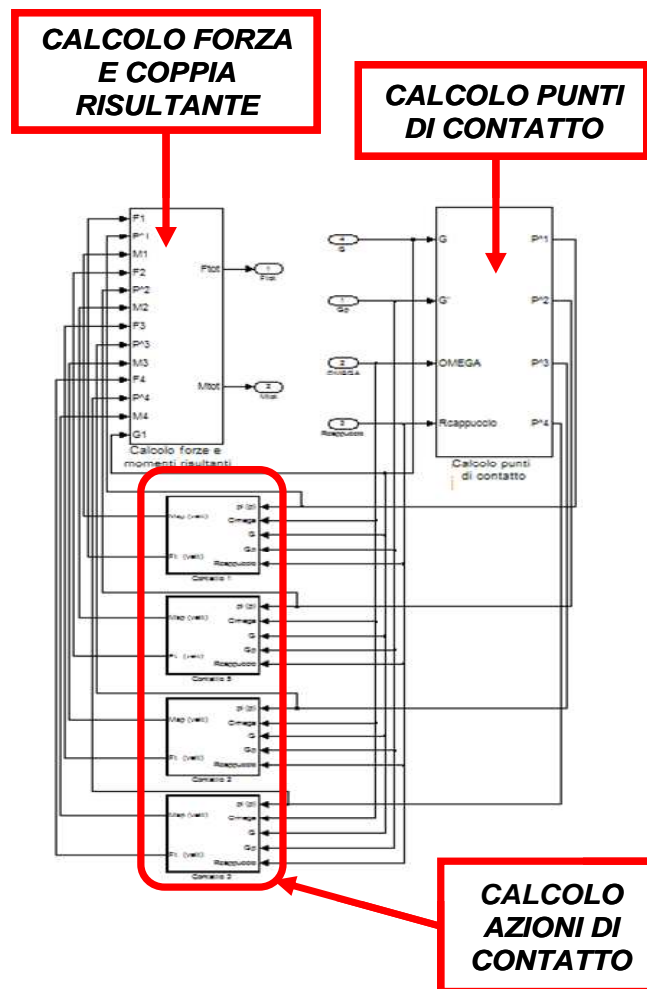


Figura 2.21 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: terzo livello

- algoritmi per la determinazione dei punti di contatto (all'interno di questo blocco sono implementate le CS – function che contengono gli algoritmi descritti nel paragrafo 2.3.1)
- calcolo delle forze e dei momenti associati a ciascun punto di contatto
- valutazione della forza e del momento risultanti agenti sulla sala.

Il quarto livello infine (Fig. 2.22) è contenuto nei blocchi adibiti al calcolo delle forze e dei momenti associati a ciascun punto di contatto e contiene l'implementazione delle teorie fisiche destinate a tale scopo ovvero:

- il calcolo euristico della forza normale di contatto
- la teoria di Hertz
- la teoria di Kalker.

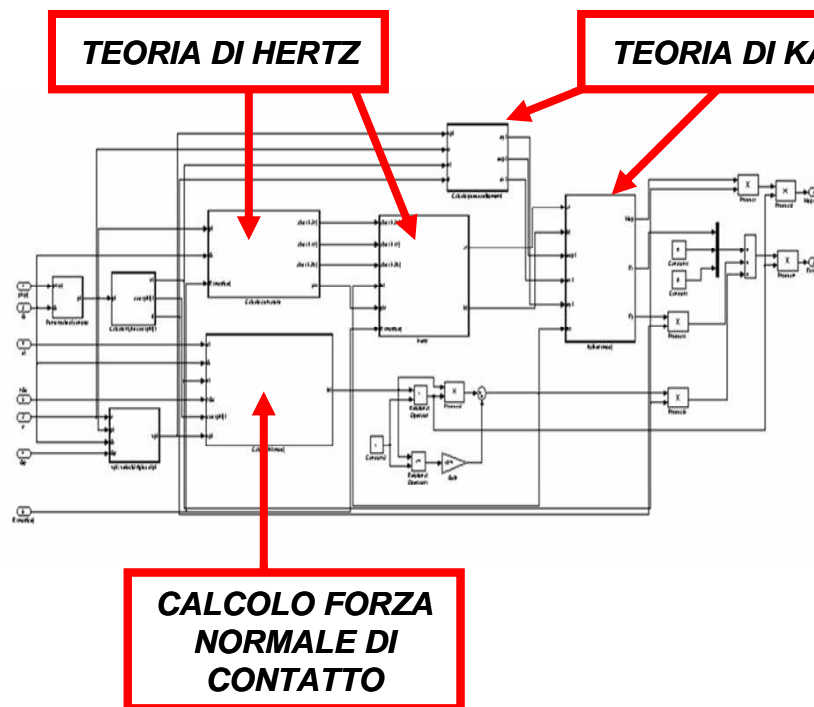


Figura 2.22 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: quarto livello

Per quanto riguarda invece gli algoritmi per la determinazione dei punti di contatto sono state impiegate le CS – function, una particolare architettura Matlab che permette di far interagire in modo efficiente l'ambiente Matlab/Simulink con l'ambiente C/C++. Più in particolare l'uso di CS – function comporta i seguenti vantaggi:

- l'ambiente C/C++ garantisce un'elevata efficienza numerica e permette di esportare facilmente il codice in questione all'interno dei software multibody già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail)
- allo stesso tempo l'interazione diretta con l'ambiente Matlab/Simulink consente di poter sfruttare tutti gli strumenti tipici di tale ambiente.

Ulteriori dettagli sull'implementazione degli algoritmi numerici possono essere reperiti in letteratura. [P1] [P2] [P3] [P4] [P5] [P6] [P7] [P8] [P10] [P11] [P14] [P15] [B21]

In Fig. 2.23 e 2.24 è riportata schematicamente l'architettura di una CS-function generica in ambiente C/C++.

```

#define S_FUNCTION_NAME sfuntmpl_basic
#define S_FUNCTION_LEVEL 2
#include "simstruc.h"

static void mdlInitializeSizes(SimStruct *S)
{
    ssSetNumSFcnParams(S, 0);
    if (ssGetNumSFcnParams(S) != ssGetSFcnParamsCount(S))
    {return;}

    ssSetNumContStates(S, 0);
    ssSetNumDiscStates(S, 0);

    if (!ssSetNumInputPorts(S, 1)) return;
    ssSetInputPortWidth(S, 0, 1);
    ssSetInputPortRequiredContiguous(S, 0, true);

    ssSetInputPortDirectFeedThrough(S, 0, 1);

    if (!ssSetNumOutputPorts(S, 1)) return;
    ssSetOutputPortWidth(S, 0, 1);

    ssSetNumSampleTimes(S, 1);
    ssSetNumRWork(S, 0);
    ssSetNumIWork(S, 0);
    ssSetNumPWork(S, 0);
    ssSetNumModes(S, 0);
    ssSetNumNonsampledZCs(S, 0);

    ssSetOptions(S, 0);
}

static void mdlInitializeSampleTimes(SimStruct *S)
{
    ssSetSampleTime(S, 0, CONTINUOUS_SAMPLE_TIME);
    ssSetOffsetTime(S, 0, 0.0);
}

```

**GESTIONE
DI INPUT
ED OUTPUT**

Figura 2.23 Architettura di una CS – Function (prima parte)

Per chiarezza in Fig. 2.23 è stata evidenziata la parte di funzione che gestisce l'interazione con l'ambiente Matlab/Simulink (sia in termini di input che di output). In Fig. 2.24 sono state invece sottolineate le sottofunzioni all'interno delle quali sono stati implementati gli algoritmi di ricerca dei punti di contatto tra sala e binario.

```

#define MDL_INITIALIZE_CONDITIONS
#if defined(MDL_INITIALIZE_CONDITIONS)

static void mdlInitializeConditions(SimStruct *S)
{
}
#endif

#define MDL_START
#if defined(MDL_START)

static void mdlStart(SimStruct *S)
{
}
#endif

static void mdlOutputs(SimStruct *S, int_T tid)
{
}

#define MDL_UPDATE
#if defined(MDL_UPDATE)

static void mdlUpdate(SimStruct *S, int_T tid)
{
}
#endif

#define MDL_DERIVATIVES
#if defined(MDL_DERIVATIVES)

static void mdlDerivatives(SimStruct *S)
{
}
#endif

static void mdlTerminate(SimStruct *S)
{
}

#ifdef MATLAB_MEX_FILE
#include "simulink.c"
#else
#include "cg_sfun.h"

```

**ALGORITMI
DI RICERCA DEI
PUNTI DI CONTATTO**

Figura 2.24 Architettura di una CS – Function (seconda parte)

2.6 Simulazioni dinamiche

Per poter valutare le performance complessive dell'intero modello (modello multibody e modello di contatto) è stata effettuata un'ampia campagna di simulazioni dinamiche. La dinamica di marcia del veicolo è stata simulata su molti tracciati ferroviari differenti ottenuti variando le principali caratteristiche geometriche del tracciato stesso entro i range riportati in Tab. 2.19: [B5] [B15] [B16]

K	$-0.1 \div 0.1 \text{ m}^{-1}$
β_c	$-0.15 \div 0.15 \text{ rad}$
p	$-0.05 \div 0.05$
α_p	$1/40 \div 1/20 \text{ rad}$
V	$0 \div 300 \text{ km/h}$
μ	$0 \div 0.5$

Tabella 2.19 *Caratteristiche del tracciato: range di variazione*

dove K è la curvatura, β_c l'angolo di cant, p la pendenza, α_p l'angolo di posa, V la velocità di percorrenza e μ il coefficiente di attrito.

Nelle simulazioni in questione sono stati impiegati entrambi gli algoritmi per la determinazione dei punti di contatto descritti nel paragrafo 2.3.1 (ovvero il metodo della DISTANZA ed il metodo della DIFFERENZA) in modo da poter testare il comportamento di entrambe le procedure una volta inserite all'interno del modello multibody del veicolo. Tuttavia, in accordo con quanto riportato nel paragrafo 2.3.1, il metodo della DIFFERENZA si rivela numericamente più efficiente del metodo della DISTANZA mentre, per quanto riguarda l'accuratezza, le performance delle due procedure si equivalgono. Di conseguenza i due metodi non producono differenze apprezzabili sulla dinamica globale del veicolo (variabili cinematiche, azioni di contatto e punti di contatto). Per semplicità dunque le simulazioni riportate a titolo di esempio in questo paragrafo faranno tutte uso del solo metodo della DIFFERENZA.

Come accennato nell'introduzione il modello multibody della stessa vettura è stato poi implementato anche in ambiente Simpack Rail, un software dedicato all'analisi della dinamica dei veicoli ferroviari ampiamente testato e validato. In questo caso però il modello multibody è stato equipaggiato con un modello di contatto standard scelto tra quelli presenti all'interno di Simpack Rail (ed in grado di considerare il contatto multiplo). Tale modello appartiene alla classe dei modelli

globali e si basa sull'approccio semielastico. I punti di contatto vengono determinati attraverso procedure approssimate (basate su LUT e su ipotesi semplificative sulla geometria del problema). Le forze normali di contatto vengono calcolate in funzione della penetrazione mentre le teorie di Hertz e di Kalker permettono di valutare le forze tangenziali di contatto e le caratteristiche dell'impronta di contatto. [B4] [B5] [B6] [B7] [B16] [B20] [B22]

Il paragone tra i risultati ottenuti con il modello implementato in Matlab/Simulink e quelli ottenuti con il modello implementato in Simpack Rail ha permesso un'accurata ed affidabile validazione sia del nuovo modello complessivo del veicolo che dei nuovi modelli di contatto.

Nel seguito, dopo una breve descrizione del modello multibody implementato in ambiente Simpack Rail, le performance del modello Matlab/Simulink e quelle del modello Simpack Rail verranno confrontate tra loro sia in termini di accuratezza che in termini di efficienza. Per quanto riguarda l'accuratezza verranno descritte tre simulazioni effettuate su tre differenti scenari particolarmente significativi:

- una curva ad "S" con elevata curvatura e percorsa a velocità moderata
- una curva singola con ridotta curvatura, presenza di irregolarità e percorsa a velocità sostenuta
- una curva singola con ridotta curvatura e percorsa a velocità sostenuta.

Per quanto riguarda invece l'efficienza numerica verrà riportato il confronto tra le performance dei due modelli in questione impiegati nelle medesime condizioni operative. Sia per il modello Matlab/Simulink che per il modello Simpack Rail è stato infatti utilizzato un integratore esplicito a passo fisso del quinto ordine (ODE5, Dormand – Prince, passo $h = 5 \cdot 10^{-4}$ s). [B23] [B24] [B25] [B26] [B27]

Tutte le simulazioni sono state effettuate su una macchina dotata di un processore Intel Core 2 Duo da 2.2 GHz e 4GB di RAM.

2.6.1 Implementazione del modello di benchmark in Simpack Rail

Il modello completo del Manchester Wagon è stato implementato anche in ambiente Simpack Rail in modo da avere un termine di paragone che permettesse un'accurata ed affidabile validazione del modello implementato in ambiente Matlab/Simulink ed in particolare dei nuovi modelli di contatto. Le caratteristiche

fisiche e geometriche del modello in questione sono esattamente le stesse del modello descritto nel paragrafo 2.4. [B15] [B22]

La scelta del software commerciale Simpack Rail come ambiente di calcolo è stata dettata dalle seguenti motivazioni:

- Simpack Rail è un software multibody dedicato allo studio della dinamica dei veicoli ferroviari già ampiamente testato e validato (la sua notevole diffusione in ambito internazionale lo rende senza dubbio un benchmark accurato ed affidabile per questo genere di analisi)
- la gestione delle equazioni che governano la dinamica dei sistemi multibody risulta estremamente efficiente sia in termini di tempi calcolo che di consumo di memoria
- attualmente è in atto una collaborazione con la INTEC GmbH, ovvero alla società sviluppatrice del software Simpack Rail, per lo sviluppo di nuovi toolbox appositamente dedicati al contatto ruota – rotaia.

Per quanto riguarda il modello multibody del veicolo, in Fig. 2.25 è riportata una tipica raffigurazione del modello del Manchester Wagon nell'ambiente virtuale di Simpack Rail.

MANCHESTER WAGON

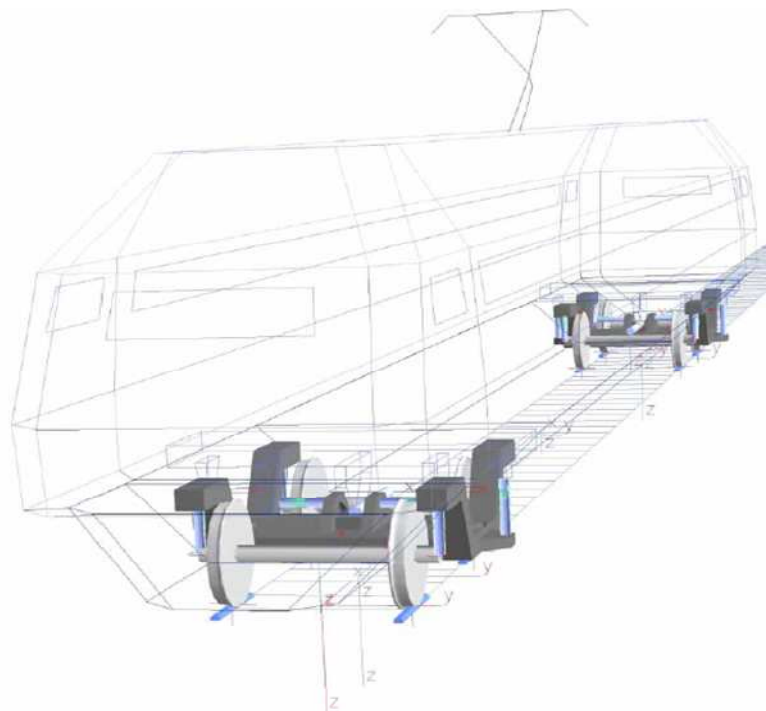


Figura 2.25 Modello multibody del veicolo in Simpack Rail

In figura 2.26 sono descritti invece il carrello e le sospensioni secondarie comprendenti due molle elicoidali, quattro ammortizzatori (laterali e verticali), due finecorsa, l'antirollio (presente nel modello ma non visibile in figura) e l'antiserpeggio.

CARRELLO E SOSPENSIONI SECONDARIE

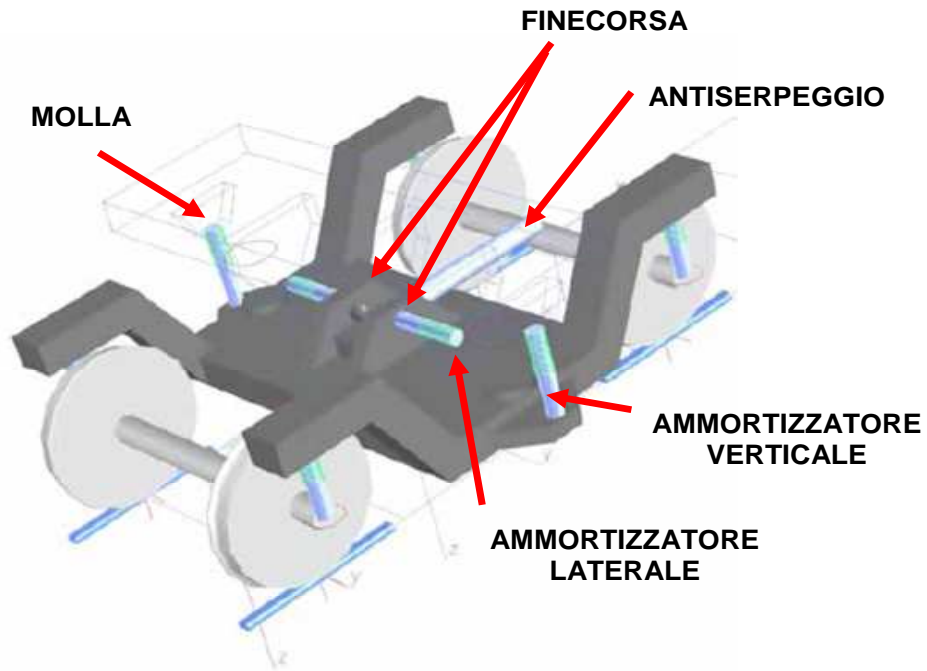


Figura 2.26 Modello multibody del veicolo in Simpack Rail: carrello e sospensioni secondarie

In Fig. 2.27 sono infine raffigurate la sala e le sospensioni primarie costituite da due molle elicoidali e sei ammortizzatori (longitudinali, laterali e verticali).

SALA E SOSPENSIONI PRIMARIE

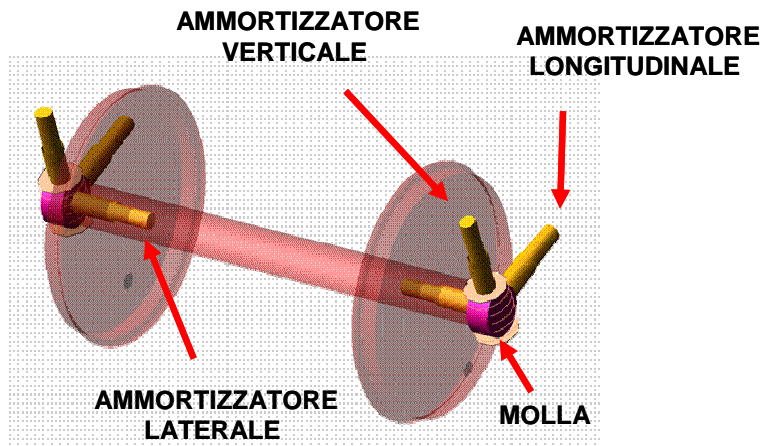


Figura 2.27 Modello multibody del veicolo in Simpack Rail: sala e sospensioni primarie

Per quanto riguarda invece il modello di contatto, esso è stato scelto tra i modelli standard già presenti all'interno di Simpack Rail. Come già detto in precedenza, tale modello è in grado di prevedere il contatto multiplo tra ruota e rotaia, appartiene alla classe dei modelli globali e si basa sull'approccio semielastico. Ulteriori informazioni sui modelli di contatto disponibili in Simpack e sulla loro implementazione sono reperibili in letteratura. [B4] [B5] [B6] [B7] [B16] [B20] [B22]

2.6.2 Simulazione dinamica N° 1: curva ad “S”

La prima simulazione riportata a titolo di esempio è stata effettuata su un tracciato ad “S” caratterizzato da un'elevata curvatura e percorsa a velocità moderata. I dati relativi alla simulazione sono riportati in Tab. 2.20.

K	$\pm 1/190 \text{ m}^{-1}$
β_c	0 rad
p	0
α_p	1/40 rad
V	40 km/h
μ	0.3

Tabella 2.20 *Caratteristiche del tracciato: simulazione N° 1*

In Fig. 2.28 è raffigurato l'andamento della curvatura K in funzione della progressiva del tracciato.

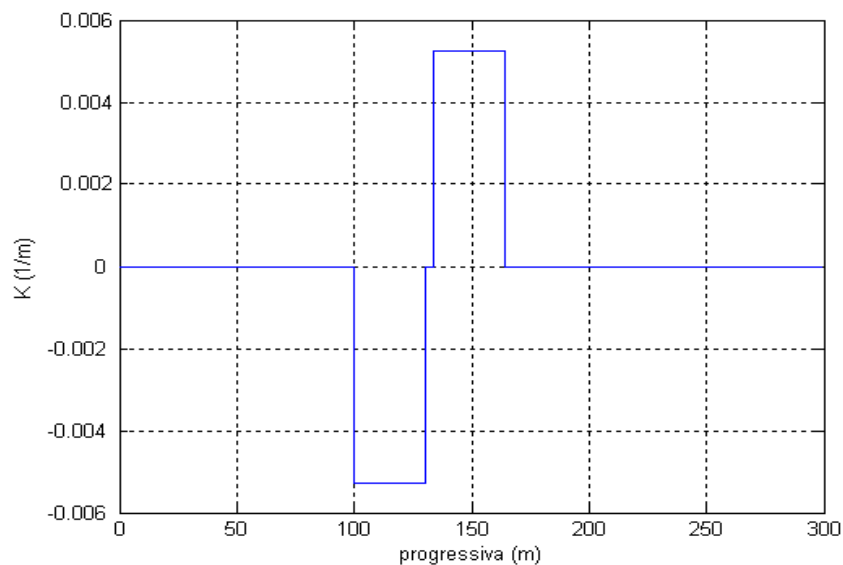


Figura 2.28 *Curvatura K in funzione della progressiva*

In Fig. 2.29 è riportato invece il tracciato ferroviario nel sistema di riferimento fisso $O_f x_f y_f z_f$ (o, più precisamente, nel piano $x_f y_f$).

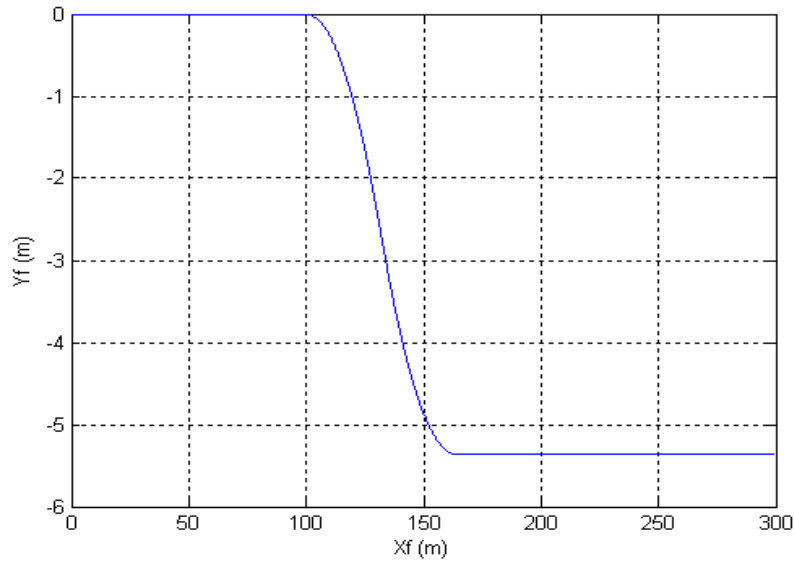


Figura 2.29 Tracciato ferroviario nel piano $x_f y_f$

Il modello del veicolo fornisce come output tutte le grandezze necessarie a descrivere la cinematica e la dinamica del sistema (variabili cinematiche, reazioni vincolari, forze interne, punti di contatto ed azioni di contatto). Per semplicità nel seguito verrà analizzato solamente il moto di alcuni corpi significativi quali la cassa, il carrello anteriore e le due sale di tale carrello (anteriore e posteriore). La dinamica del carrello posteriore è infatti del tutto analoga a quella del carrello anteriore e non aggiunge nulla di significativo alla descrizione del moto del veicolo. Più nel dettaglio verranno riportate le seguenti grandezze:

- lo spostamento laterale del centro di massa y^b , l'angolo di rollio φ^b e l'angolo di imbardata ψ^b di tutti i corpi analizzati ovvero della cassa, del carrello anteriore e delle due sale del carrello (anteriore e posteriore); tutte le grandezze saranno espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$
- le forze di contatto longitudinali F_x^b , laterali F_y^b e verticali F_z^b associate ai vari punti di contatto (espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$)

- gli spostamenti laterali y_b^C e y_r^C dei punti di contatto (espressi rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$ ed in quello solidale $O_r x_r y_r z_r$)
- le posizioni P_b^{bC} e P_r^{rC} dei punti di contatto sulla superficie del binario e su quella della sala (espressi rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$ ed in quello solidale $O_r x_r y_r z_r$).

Nella simulazione in questione è presente, sia nel modello Malab/Simulink che in quello Simpack Rail, un solo punto di contatto per ciascuna ruota (non si ha cioè contatto multiplo).

In Fig. 2.30, 2.31 e 2.32 sono raffigurate le variabili cinematiche relative alla cassa, mentre quelle relative al carrello sono rappresentate in Fig. 2.33, 2.34 e 2.35. Le variabili relative alle due sale (anteriore e posteriore) sono invece riportate in Fig. 2.36, 2.37, 2.38 e Fig. 2.39, 2.40, 2.41. In blu sono state raffigurate le variabili calcolate dal modello Matlab/Simulink mentre in rosso quelle calcolate dal modello Simpack Rail.

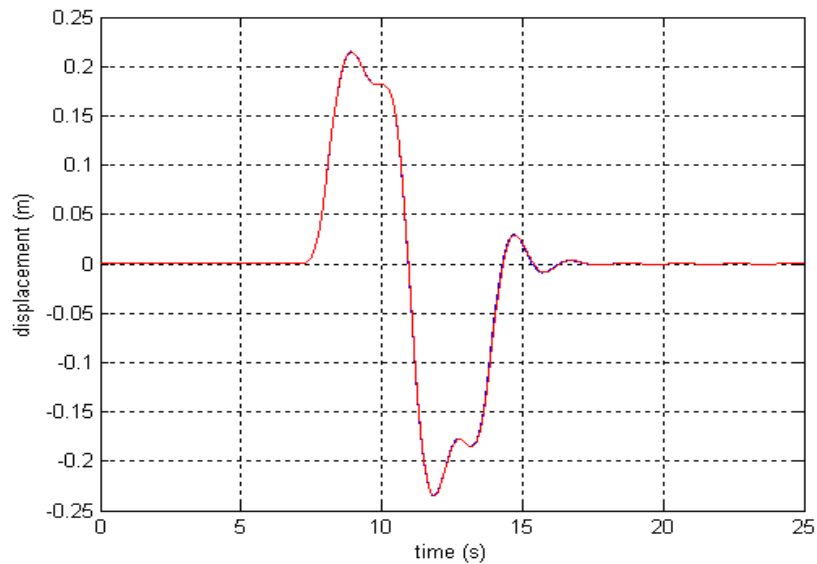


Figura 2.30 Cassa: spostamento laterale del centro di massa y^b

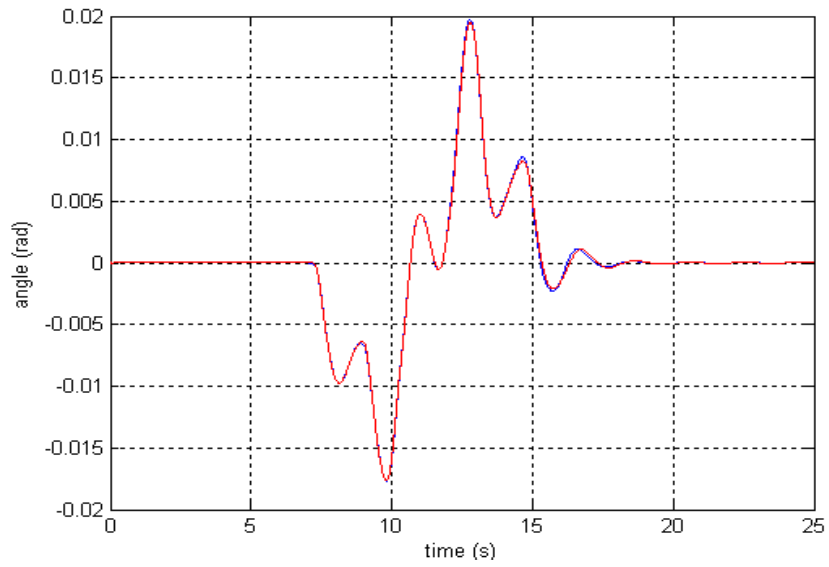


Figura 2.31 *Cassa: angolo di rollio φ^b*

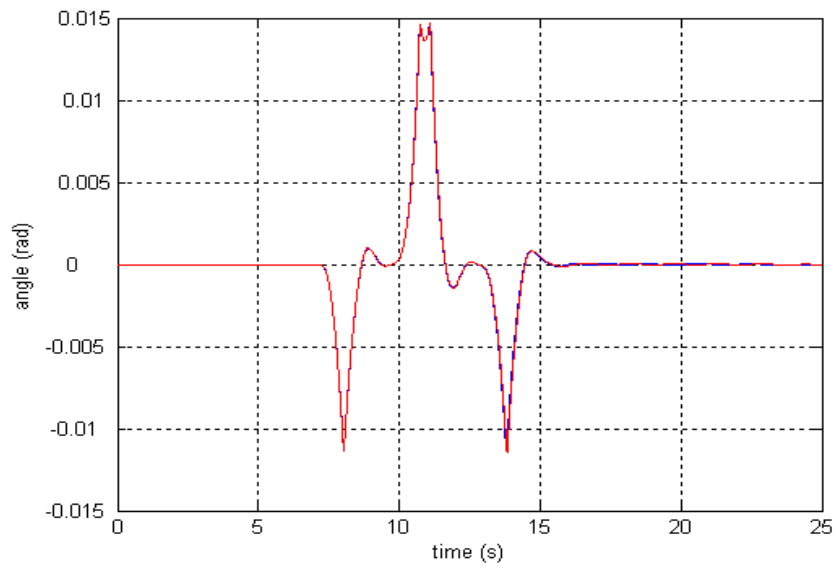


Figura 2.32 *Cassa: angolo di imbardata ψ^b*

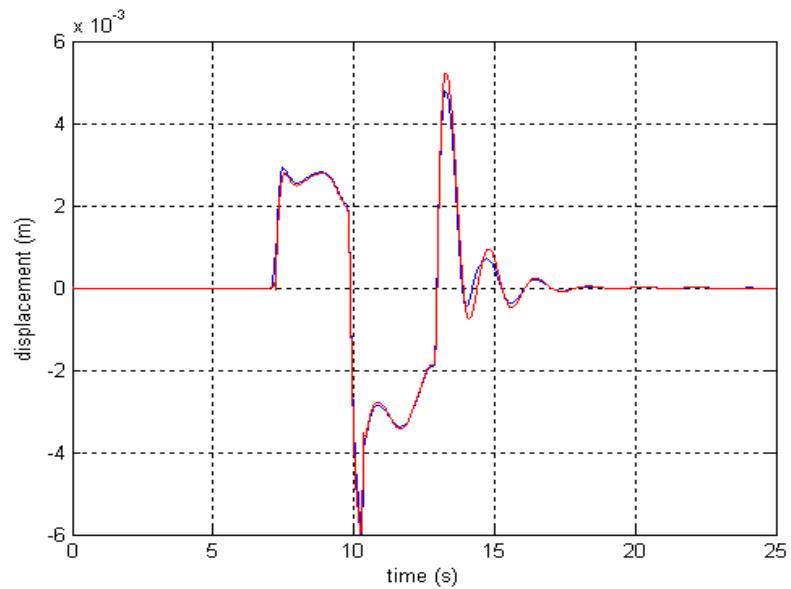


Figura 2.33 *Carrello anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b*

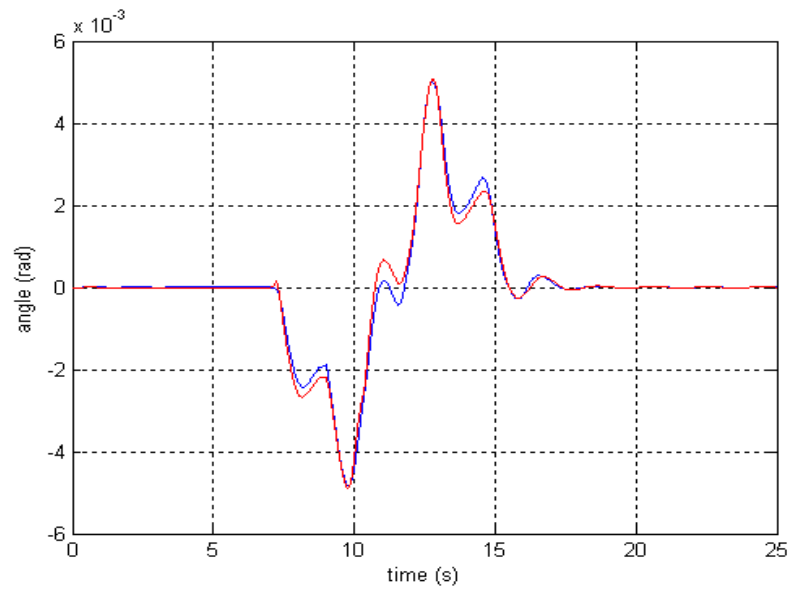


Figura 2.34 Carrello anteriore: angolo di rollio ϕ^b

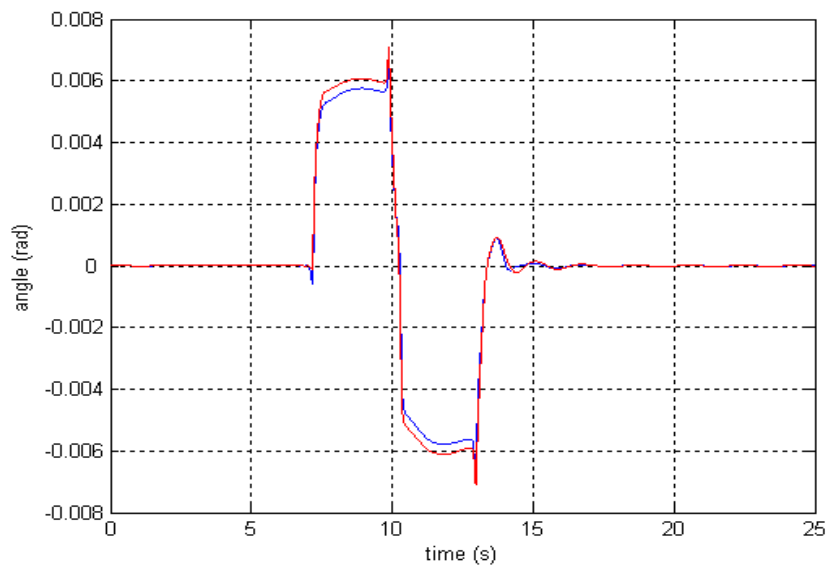


Figura 2.35 Carrello anteriore: angolo di imbardata ψ^b

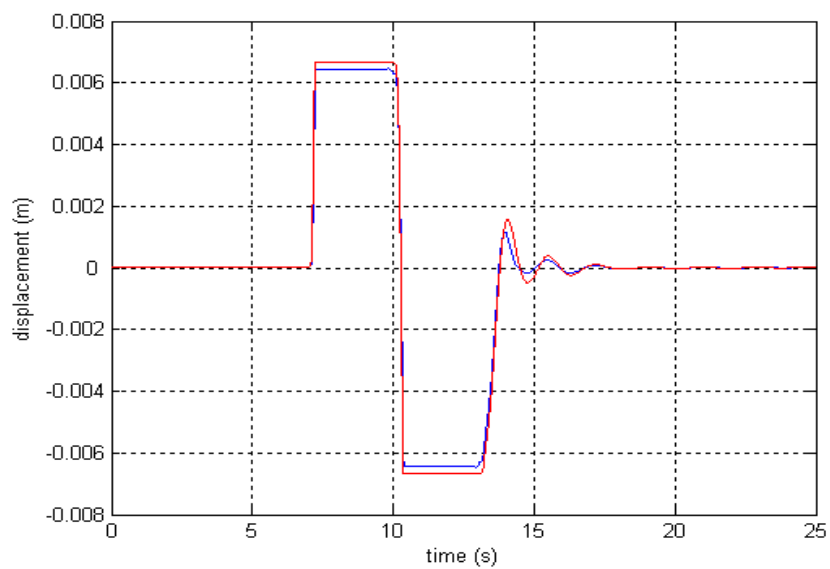


Figura 2.36 Sala anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

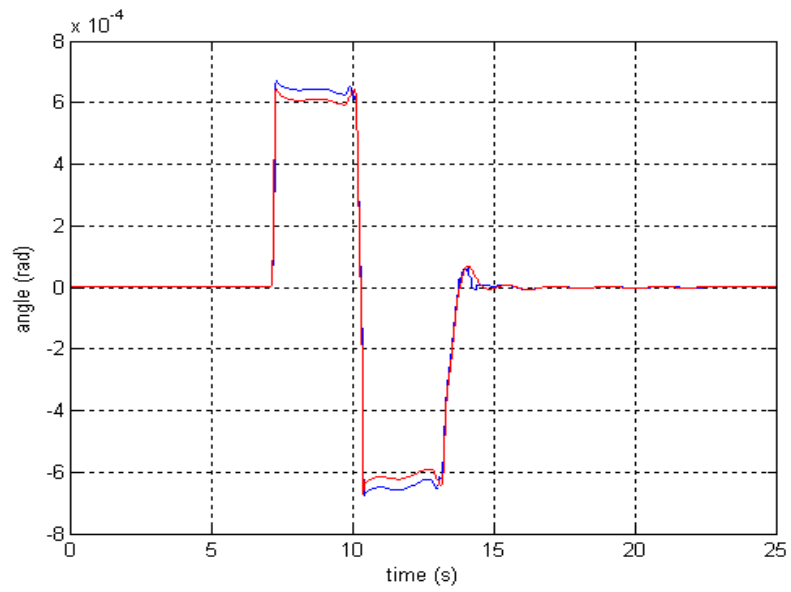


Figura 2.37 Sala anteriore: angolo di rollio φ^b

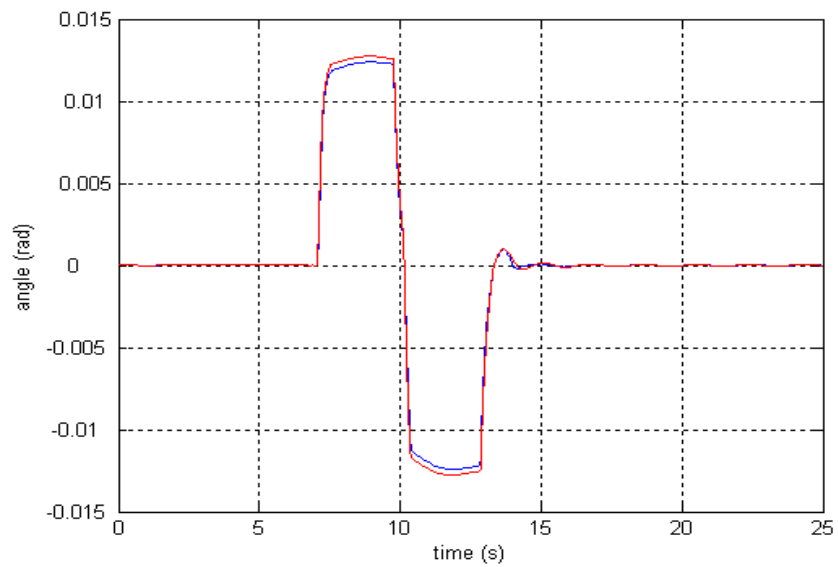


Figura 2.38 Sala anteriore: angolo di imbardata ψ^b

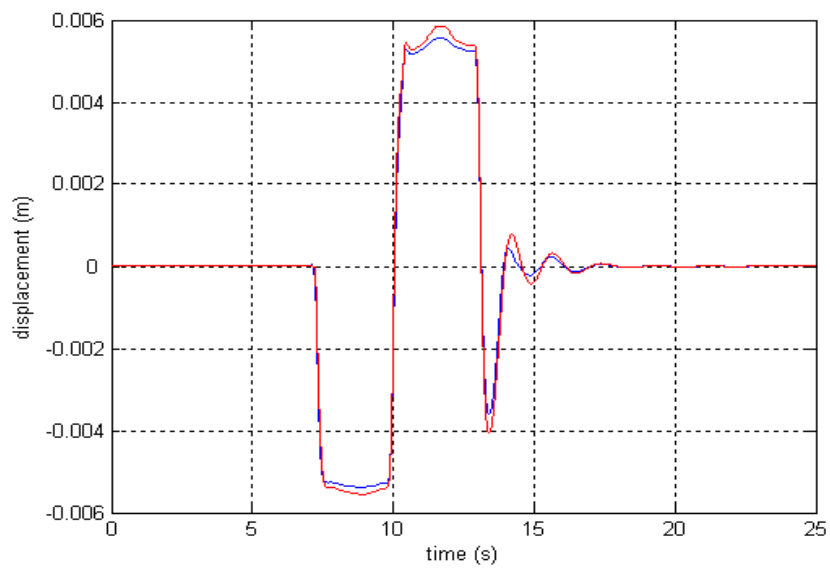


Figura 2.39 Sala posteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

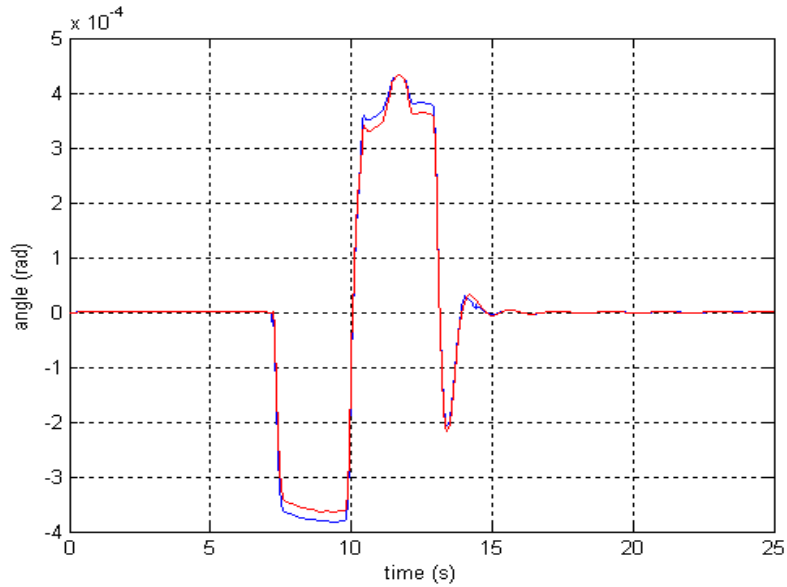


Figura 2.40 Sala posteriore: angolo di rollio φ^b

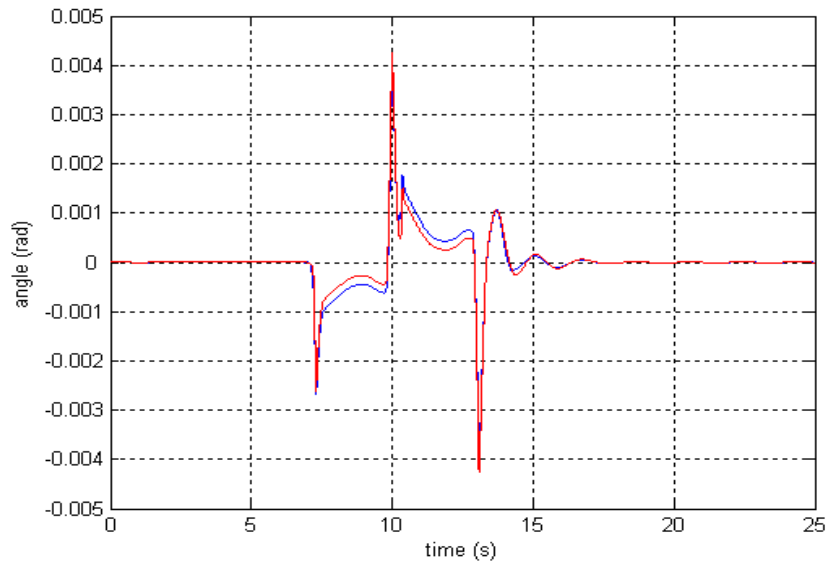


Figura 2.41 Sala posteriore: angolo di imbardata ψ^b

L’analisi dei risultati ottenuti mostra, per quanto riguarda la cinematica del veicolo, un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail sia a livello di cassa e carrello che a livello delle sale.

Successivamente sono state riportate le forze di contatto associate ai vari punti di contatto (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail). In Fig. 2.42, 2.43, 2.44 e Fig. 2.45, 2.46, 2.47 sono raffigurate le forze di contatto longitudinali, laterali e verticali agenti rispettivamente sulla ruota sinistra e sulla ruota destra della sala anteriore. In Fig. 2.48, 2.49, 2.50 e Fig. 2.51, 2.52, 2.53 sono rappresentate invece le analoghe grandezze relative alla sala posteriore.

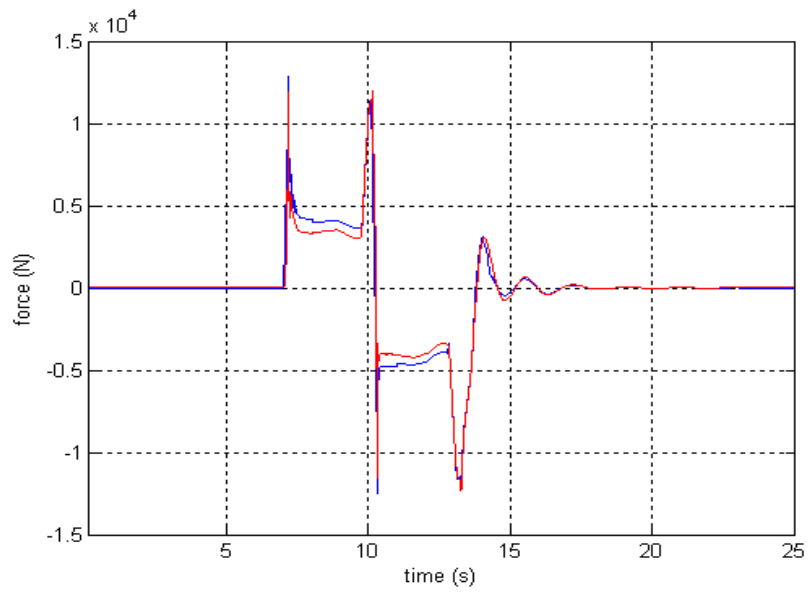


Figura 2.42 Sala anteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b

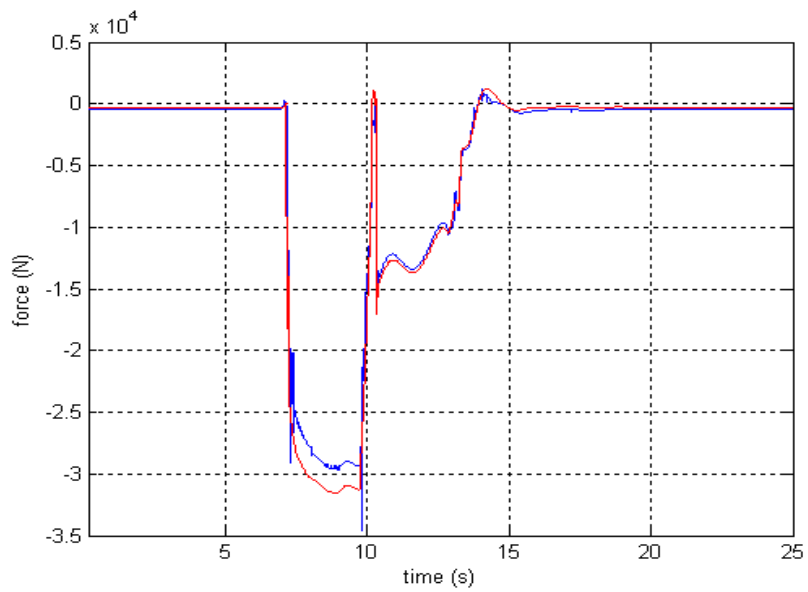


Figura 2.43 Sala anteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b

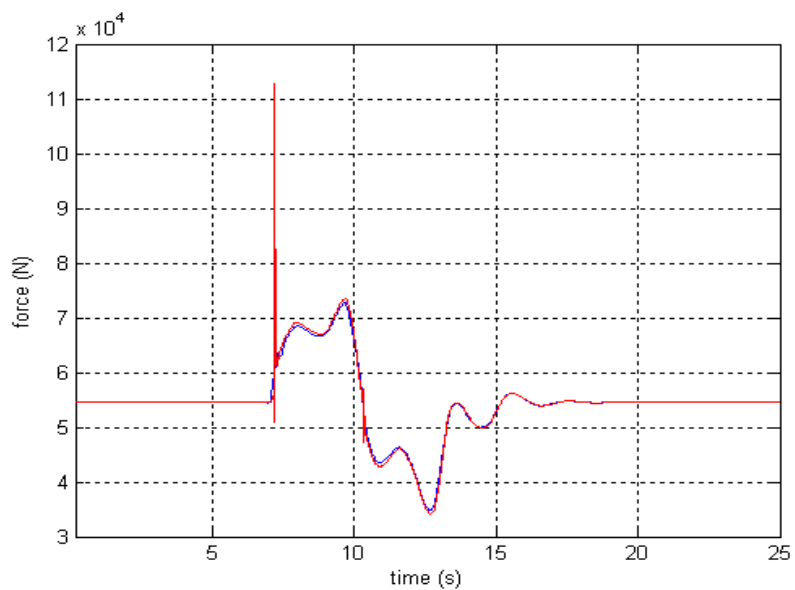


Figura 2.44 Sala anteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b

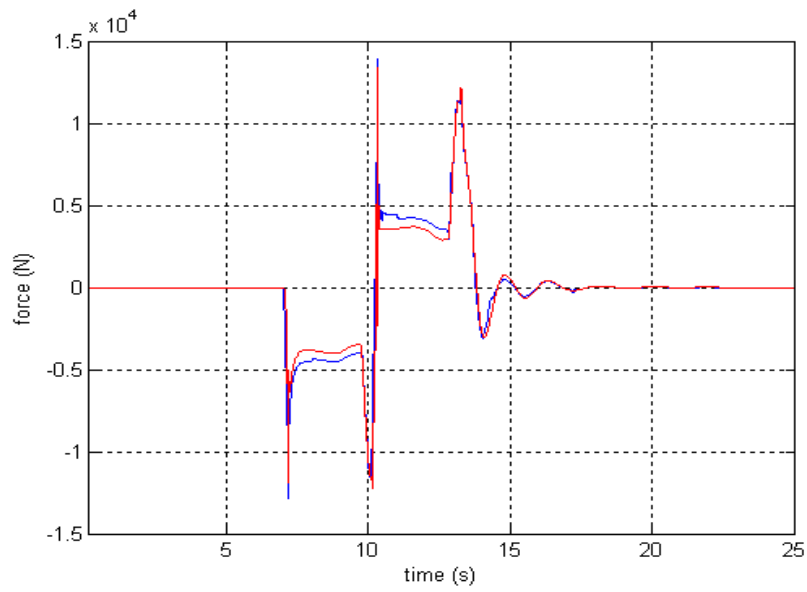


Figura 2.45 Sala anteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^b

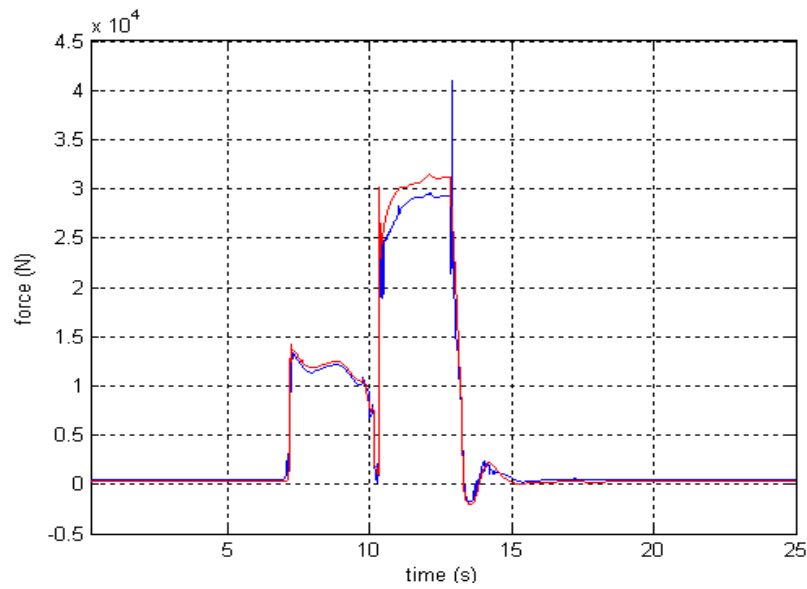


Figura 2.46 Sala anteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^b

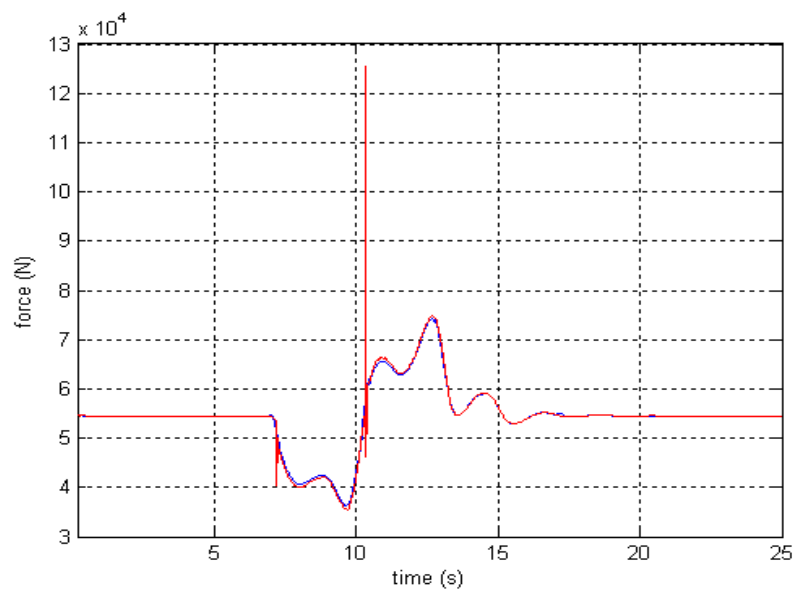


Figura 2.47 Sala anteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^b

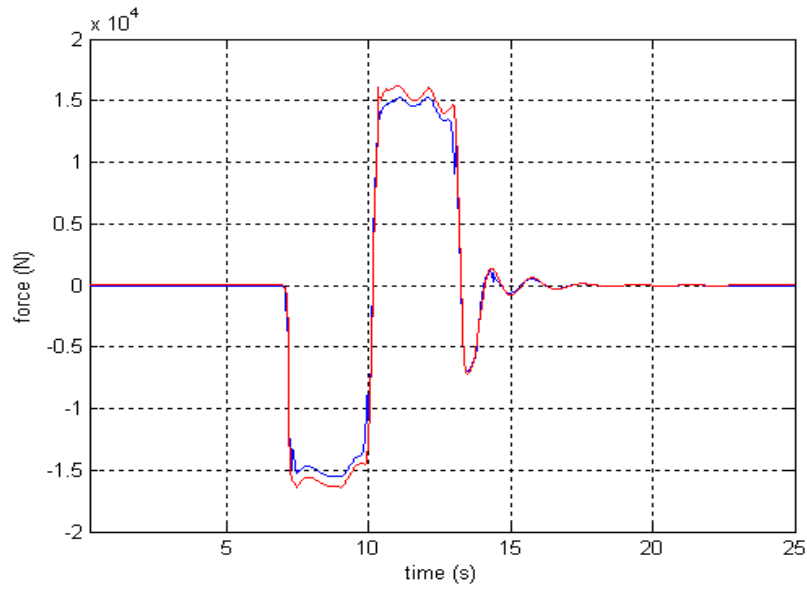


Figura 2.48 Sala posteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b

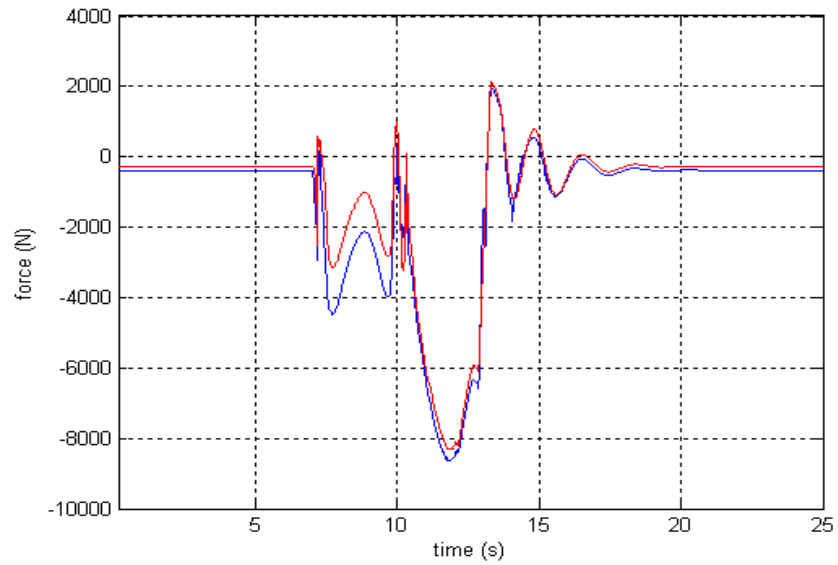


Figura 2.49 Sala posteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b

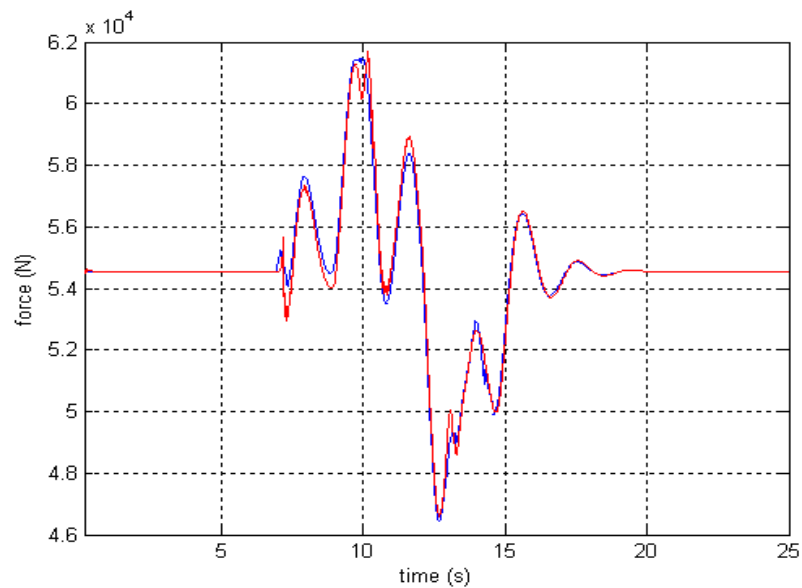


Figura 2.50 Sala posteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b

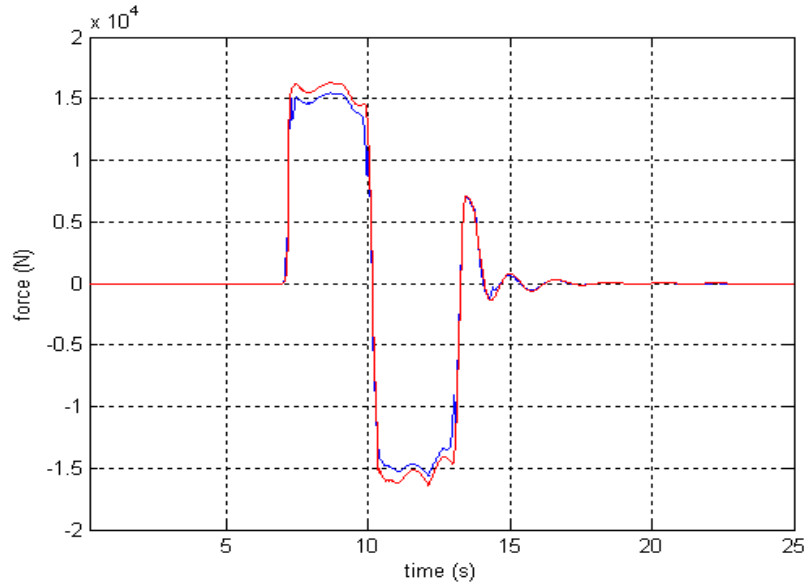


Figura 2.51 Sala posteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^b

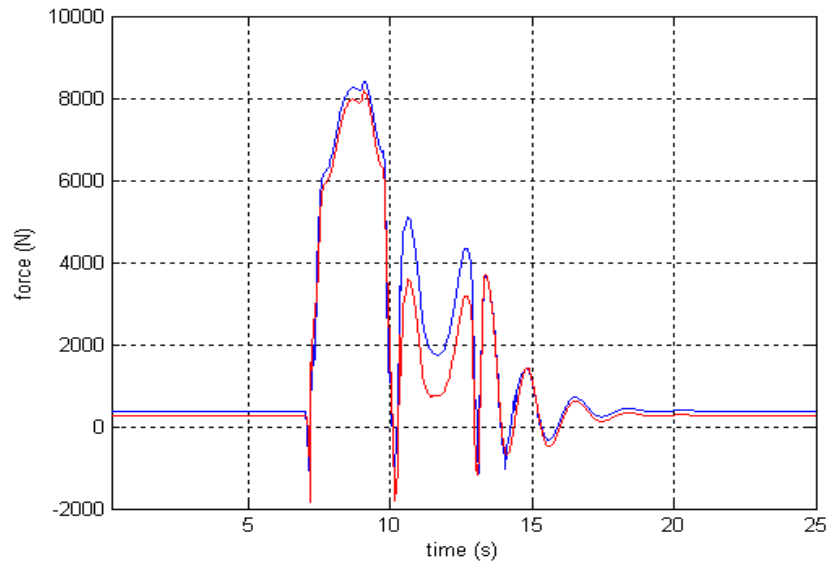


Figura 2.52 Sala posteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^b

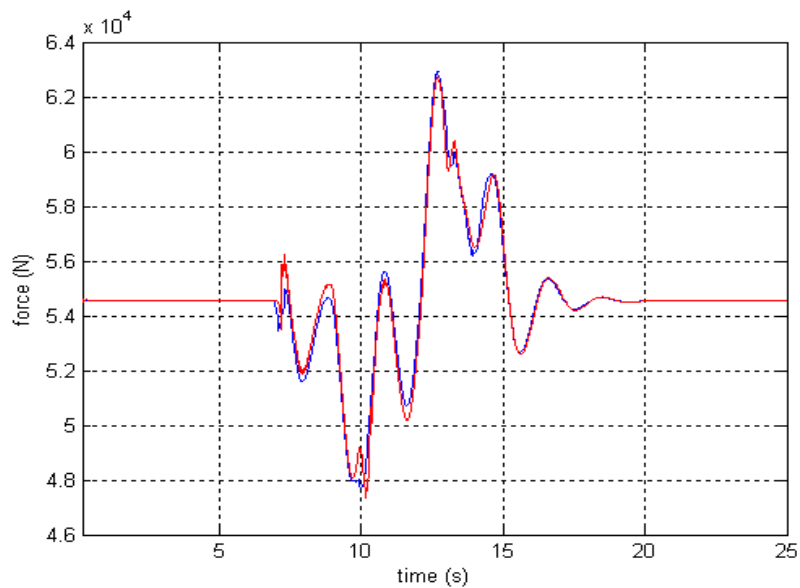


Figura 2.53 Sala posteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^b

Anche in questo caso il confronto tra i risultati ottenuti mostra, per quanto riguarda le forze di contatto, un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail. In particolare il modello Matlab/Simulink evidenzia una maggiore stabilità specialmente in presenza di dinamiche particolarmente critiche come urti e discontinuità varie.

Per quanto riguarda i punti di contatto, sono stati dapprima riportati gli spostamenti laterali di tali punti (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail). In Fig. 2.54 e 2.55 sono stati raffigurati gli spostamenti relativi ai punti di contatto presenti sulla sala anteriore mentre in Fig. 2.56 e 2.57 quelli relativi ai punti presenti sulla sala posteriore (espressi nel sistema ausiliario). In Fig. 2.58, 2.59, 2.60 e 2.61 sono state invece rappresentate le analoghe grandezze espresse nel sistema solidale.

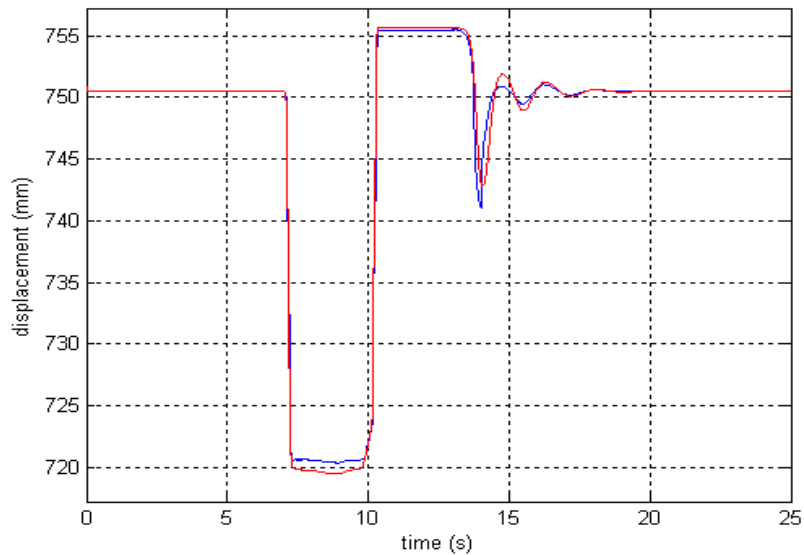


Figura 2.54 Sala anteriore, ruota sinistra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

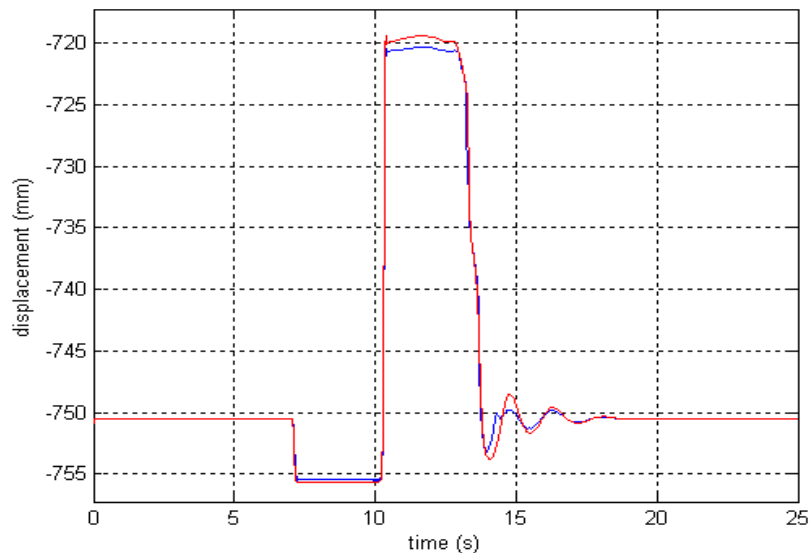


Figura 2.55 Sala anteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

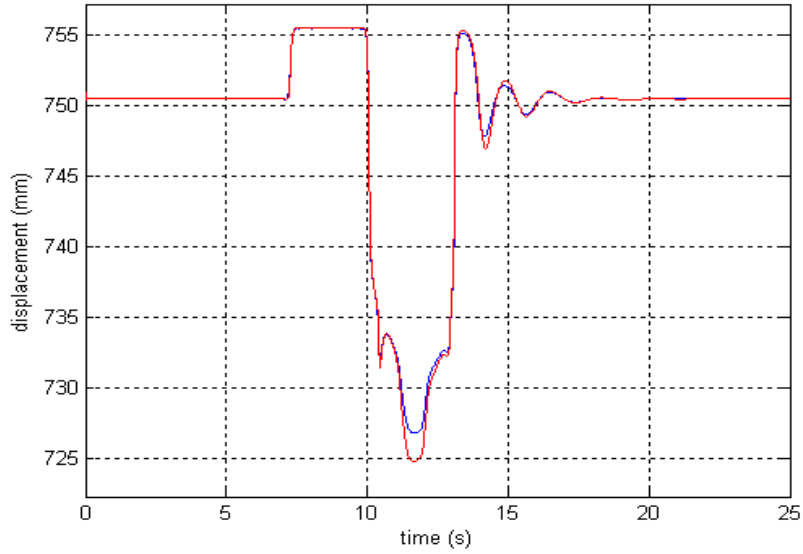


Figura 2.56 Sala posteriore, ruota sinistra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

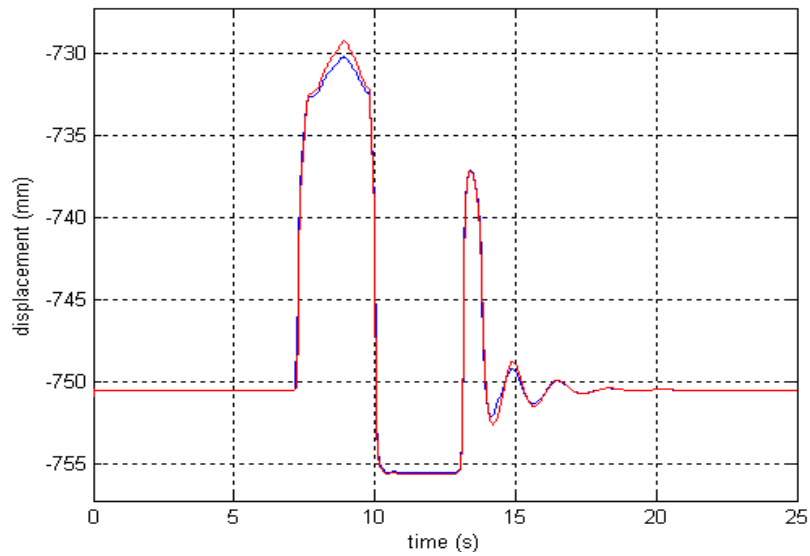


Figura 2.57 Sala posteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

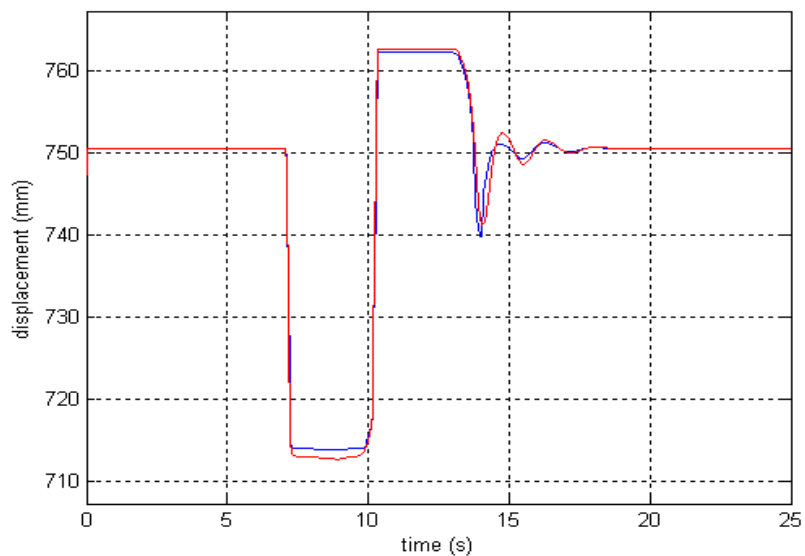


Figura 2.58 Sala anteriore, ruota sinistra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_r^C

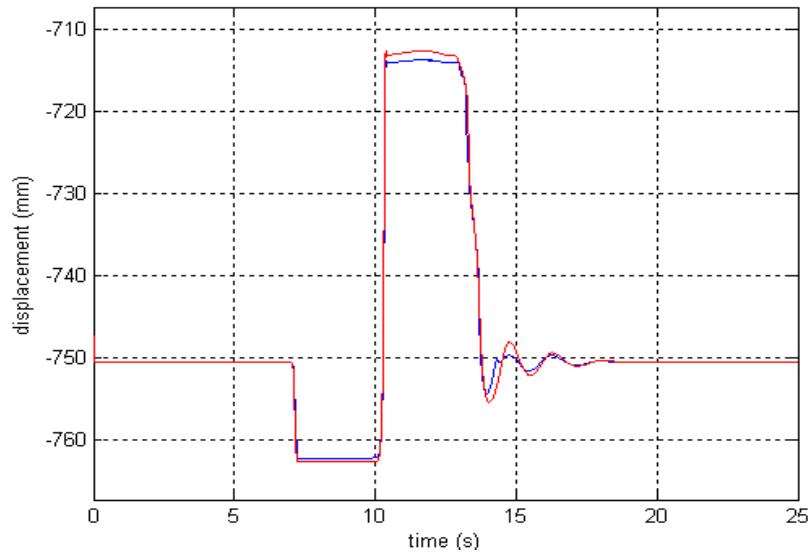


Figura 2.59 Sala anteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_r^C

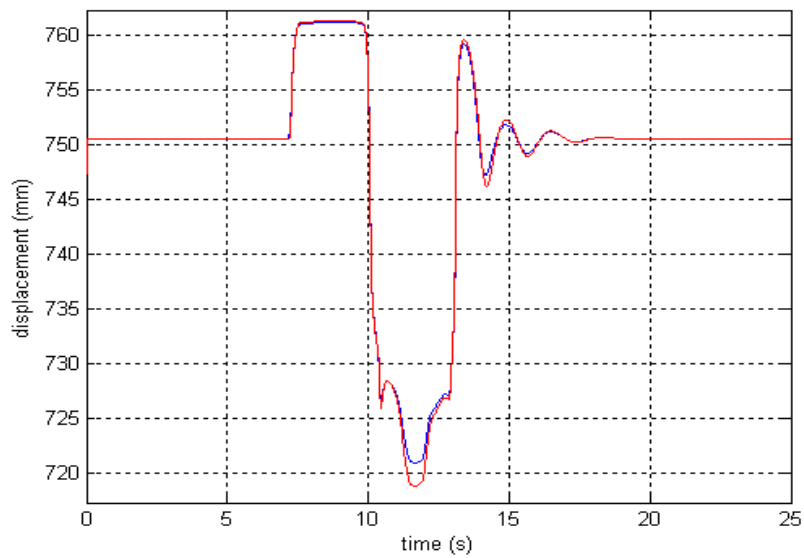


Figura 2.60 Sala posteriore, ruota sinistra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_r^C

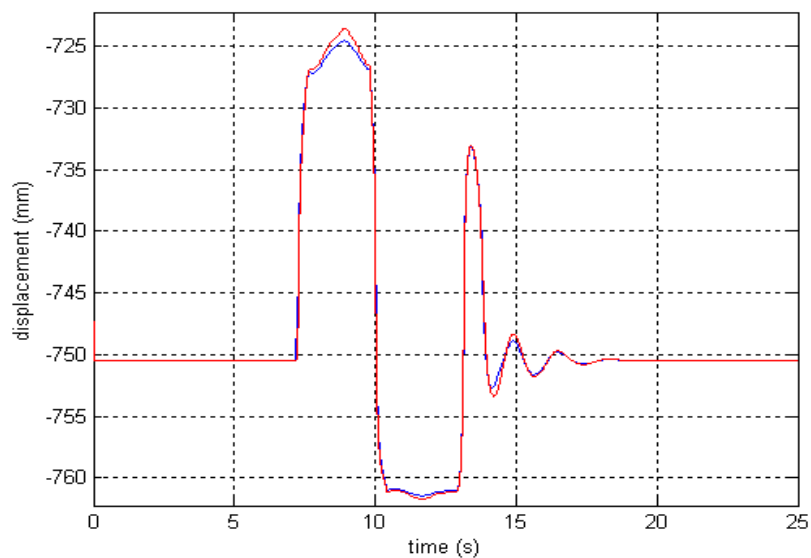


Figura 2.61 Sala posteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_r^C

Successivamente sono state riportate le posizioni dei punti di contatto sulla superficie del binario e su quella della sala (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in nero quelle del modello Simpack Rail). Per maggiore chiarezza le traiettorie dei punti di contatto sono state tracciate su superfici cilindriche ottenute a partire dai profili di sala e binario (profili generatori) e lunghe quanto la distanza percorsa dal veicolo durante la simulazione. In Fig. 2.62 e 2.63 sono stati raffigurati i punti di contatto presenti sulla sala anteriore mentre in Fig. 2.64 e 2.65 quelli presenti sulla sala posteriore (tracciati sulla superficie del binario ed espressi nel sistema ausiliario). In Fig. 2.66, 2.67, 2.68 e 2.69 sono state invece rappresentate le analoghe grandezze tracciate sulla superficie della sala ed espresse nel sistema solidale.

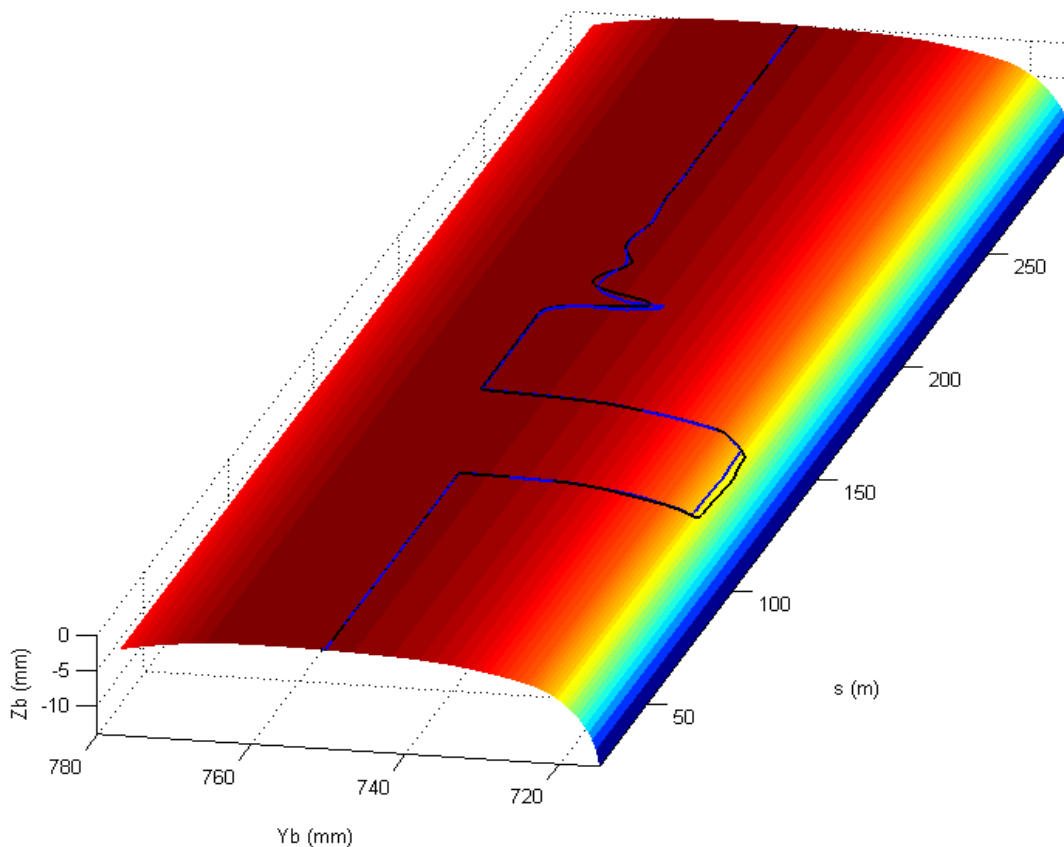


Figura 2.62 Sala anteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di sinistra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

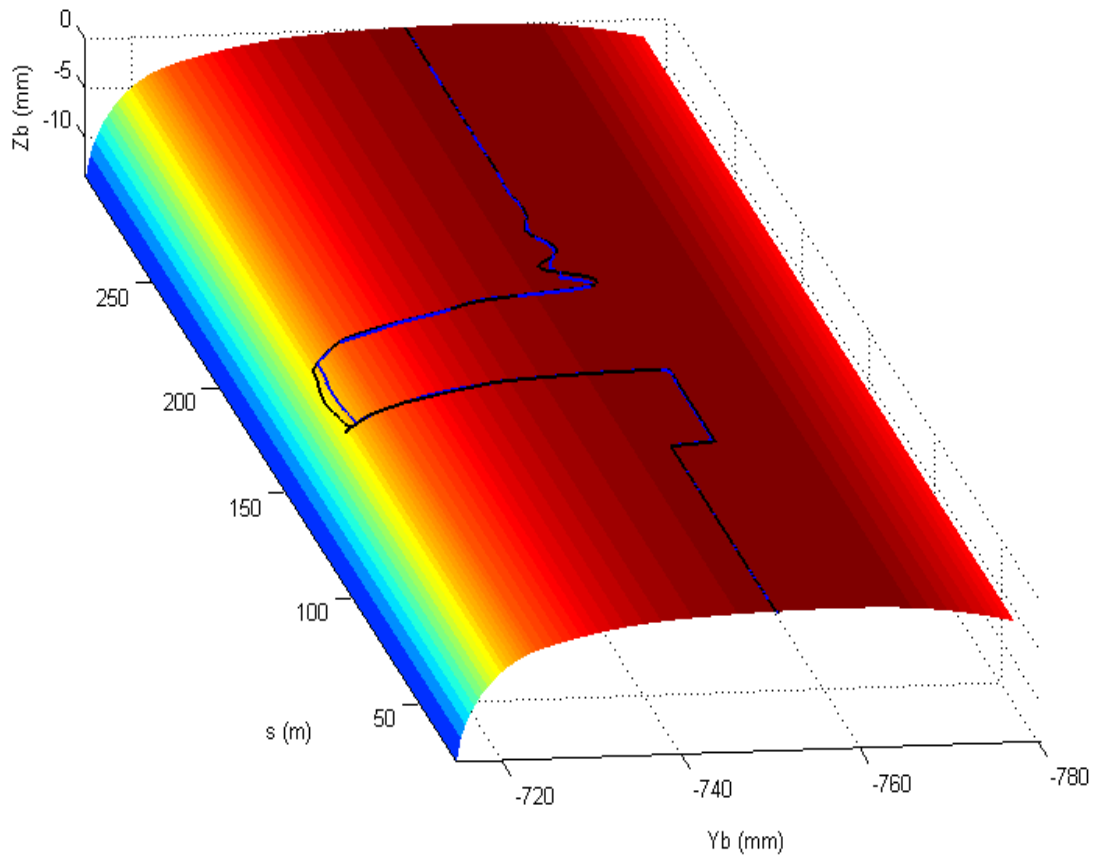


Figura 2.63 Sala anteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di destra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

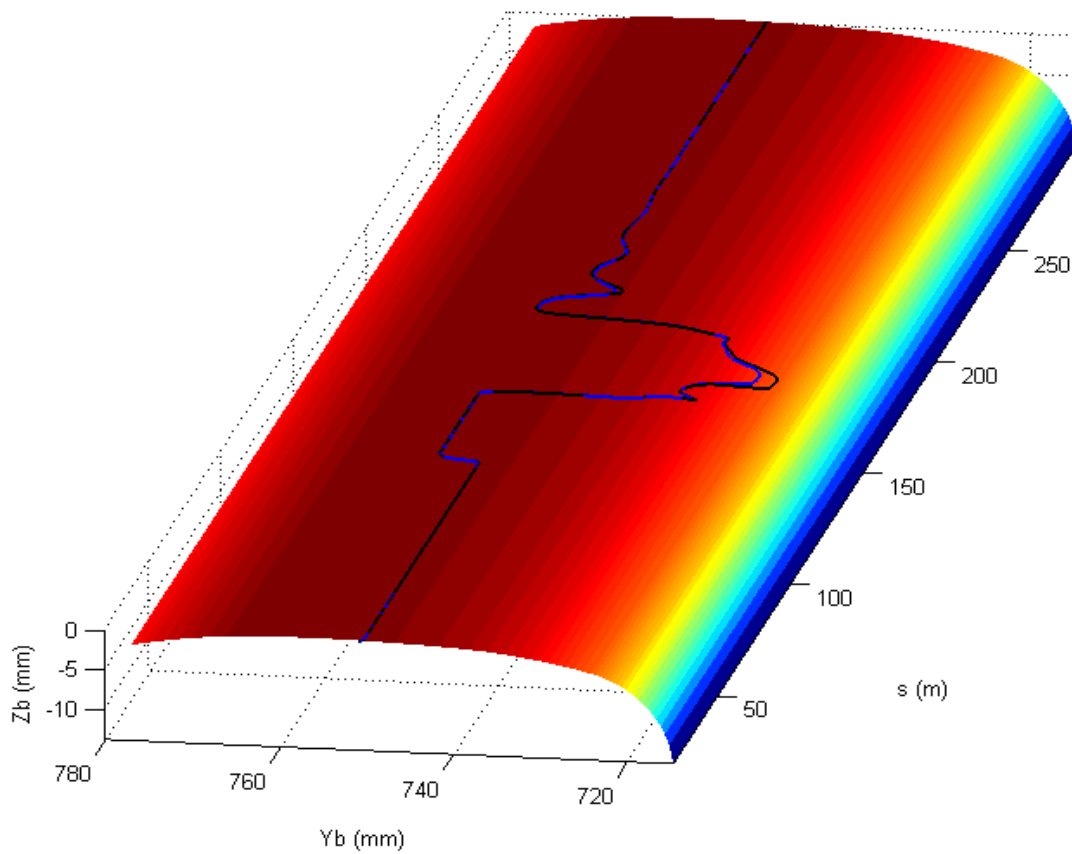


Figura 2.64 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di sinistra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

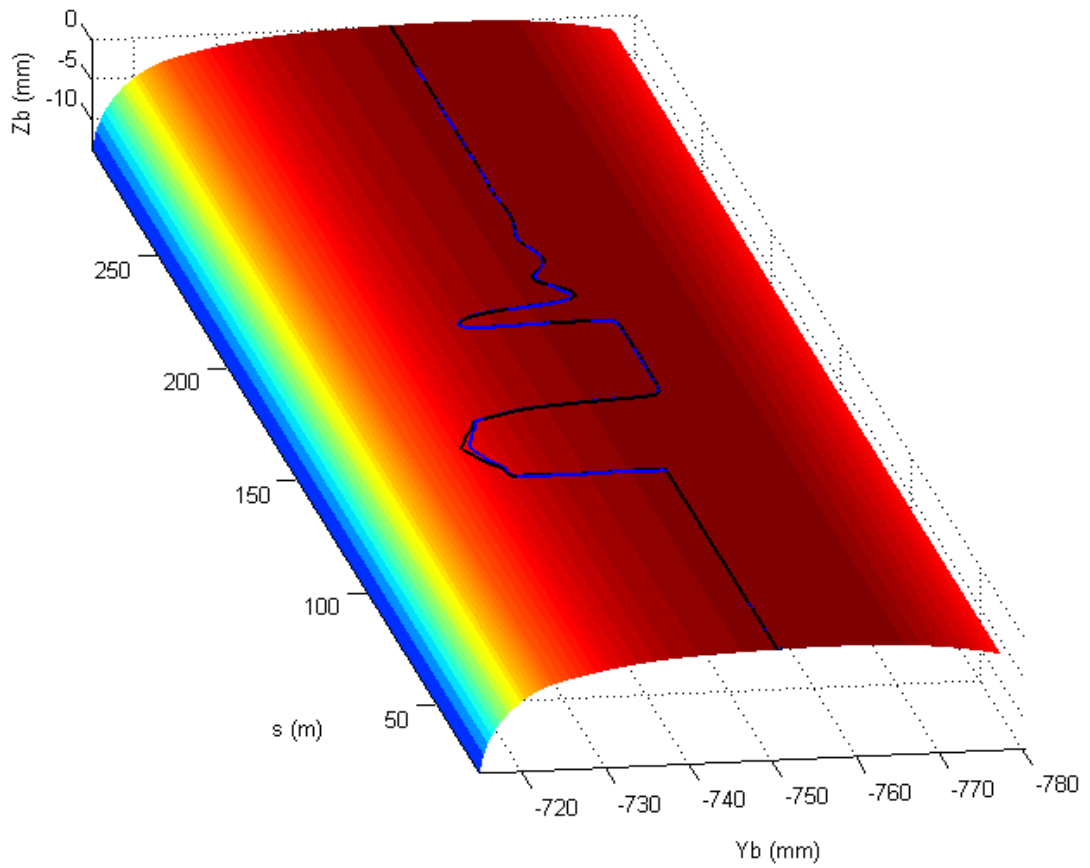


Figura 2.65 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di destra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

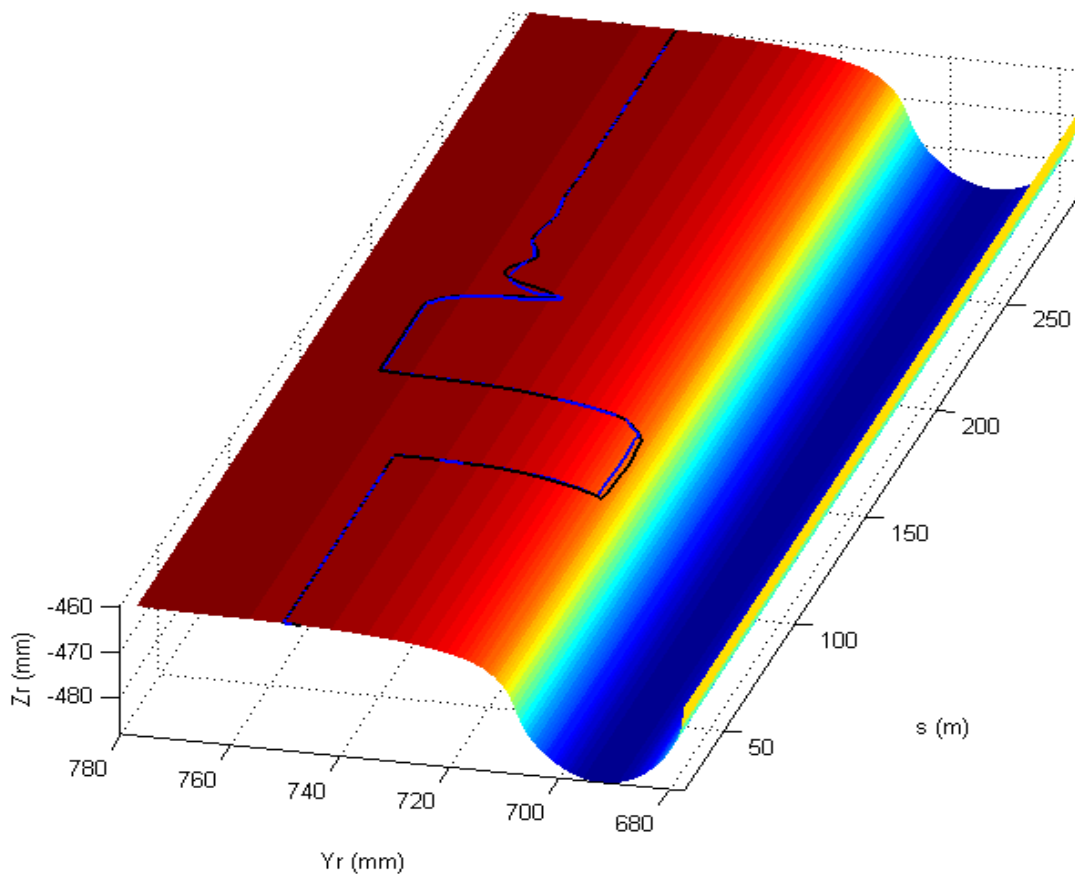


Figura 2.66 Sala anteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota di sinistra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

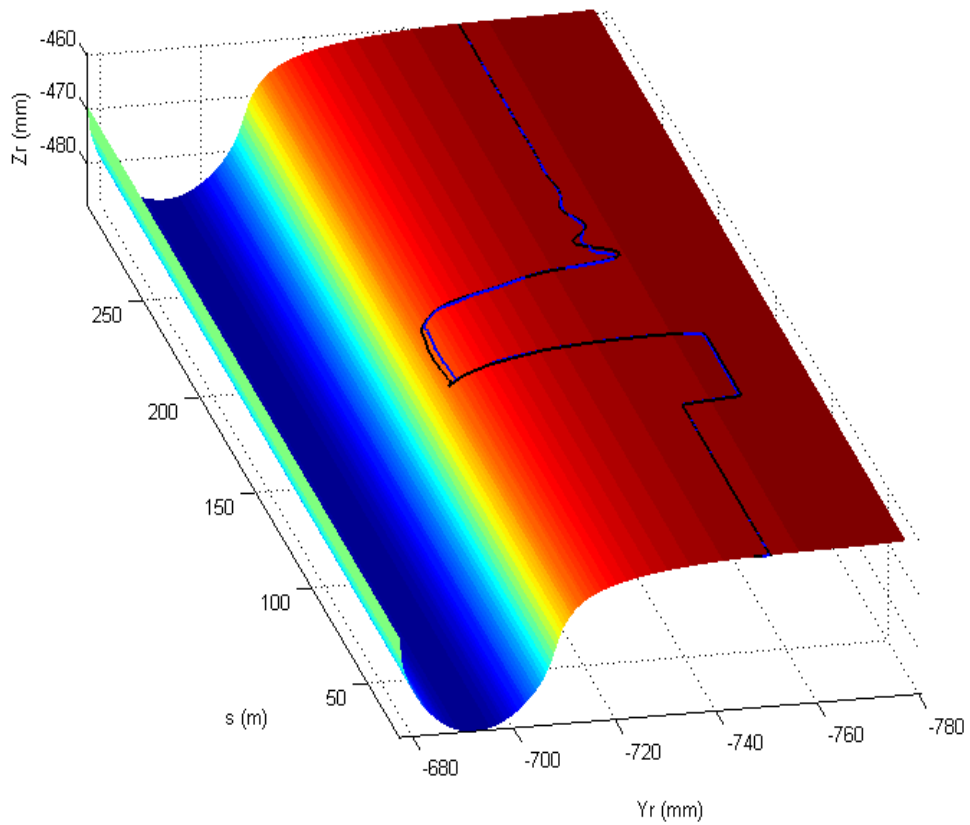


Figura 2.67 Sala anteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota di destra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

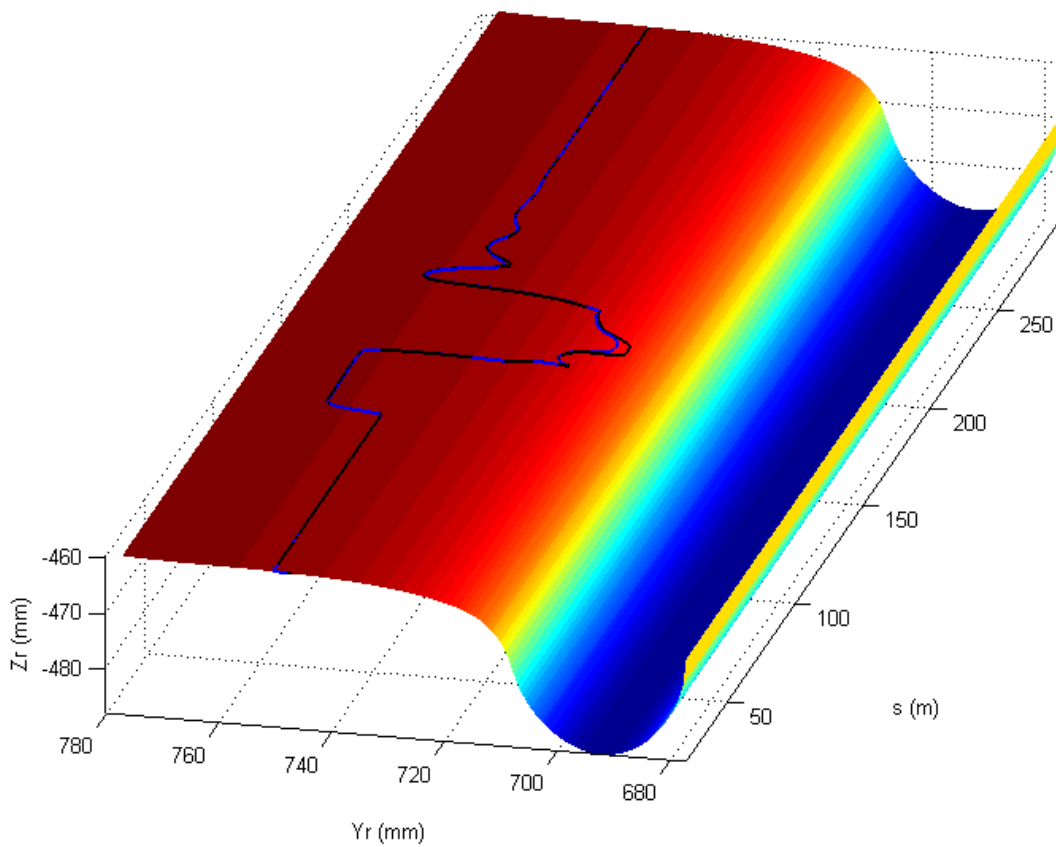


Figura 2.68 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota di sinistra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

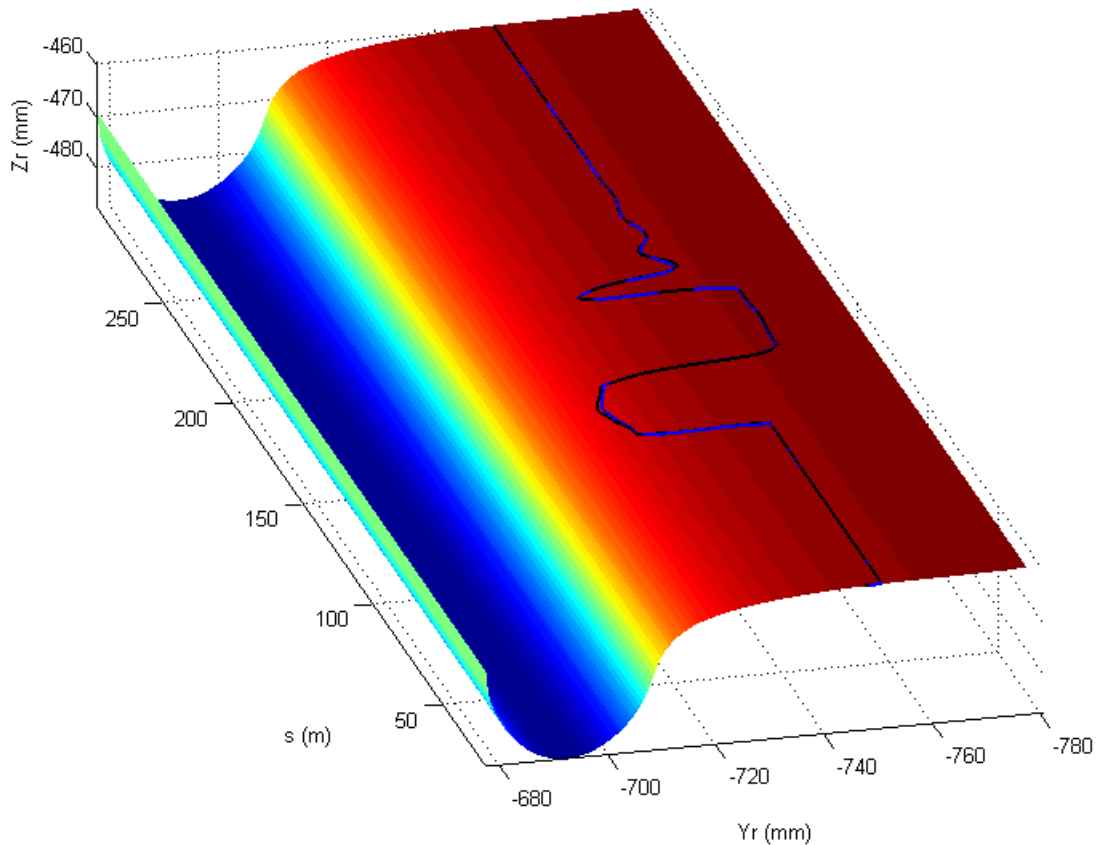


Figura 2.69 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota di destra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

Anche per quanto riguarda la posizione dei punti di contatto è presente un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail. In particolare è utile sottolineare come, nella simulazione in questione, sia il modello Matlab/Simulink che il modello Simpack Rail abbiano rilevato un solo punto di contatto per ciascuna ruota (non si ha cioè contatto multiplo).

In generale si può infine osservare come il basso rumore numerico presente e la stabilità delle nuove procedure evidenzino l'affidabilità e l'accuratezza del modello Matlab/Simulink ed in particolare dei nuovi modelli di contatto.

2.6.3 Simulazione dinamica N° 2: curva singola con irregolarità

La seconda simulazione riportata a titolo di esempio è stata effettuata su un tracciato curvilineo caratterizzato da una ridotta curvatura e dalla presenza di irregolarità e percorso a velocità sostenuta. I dati relativi alla simulazione sono riportati in Tab. 2.21.

K	$-1/1750 \text{ m}^{-1}$
β_c	0.1045 rad
p	0
α_p	$1/40 \text{ rad}$
V	200 km/h
μ	0.3

Tabella 2.21 *Caratteristiche del tracciato: simulazione N° 2*

In Fig. 2.70 e 2.71 sono raffigurati gli andamenti della curvatura K e dell'angolo di cant β_c in funzione della progressiva del tracciato.

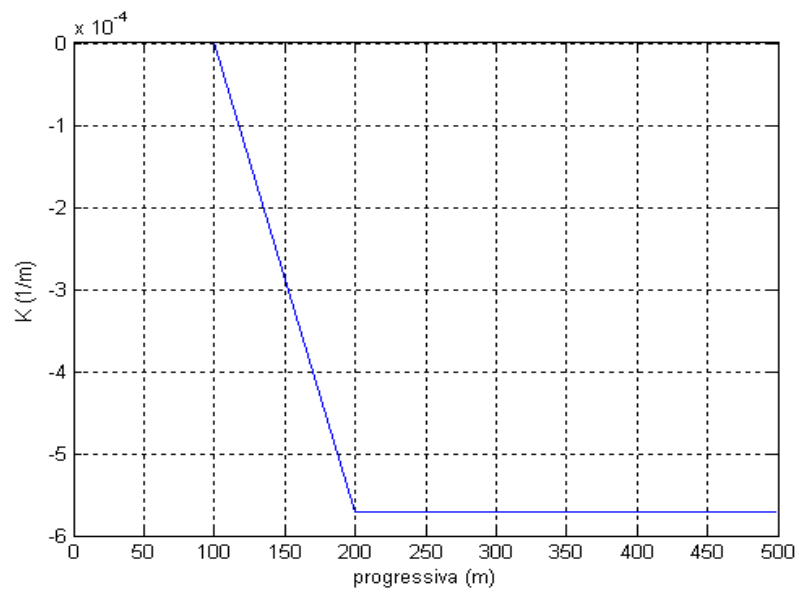


Figura 2.70 *Curvatura K in funzione della progressiva*

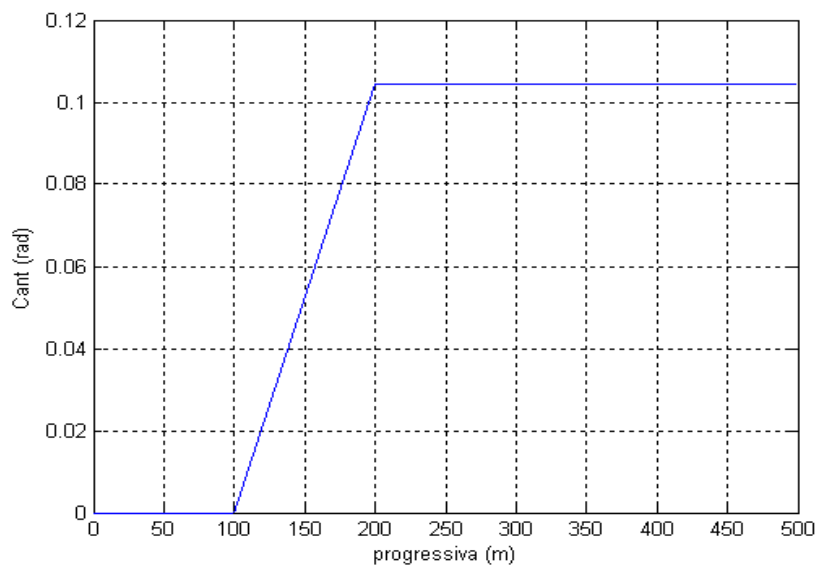


Figura 2.71 *Angolo di cant β_c in funzione della progressiva*

In Fig. 2.72 è riportato invece il tracciato ferroviario nel sistema di riferimento fisso $O_f x_f y_f z_f$ (o, più precisamente, nel piano $x_f y_f$).

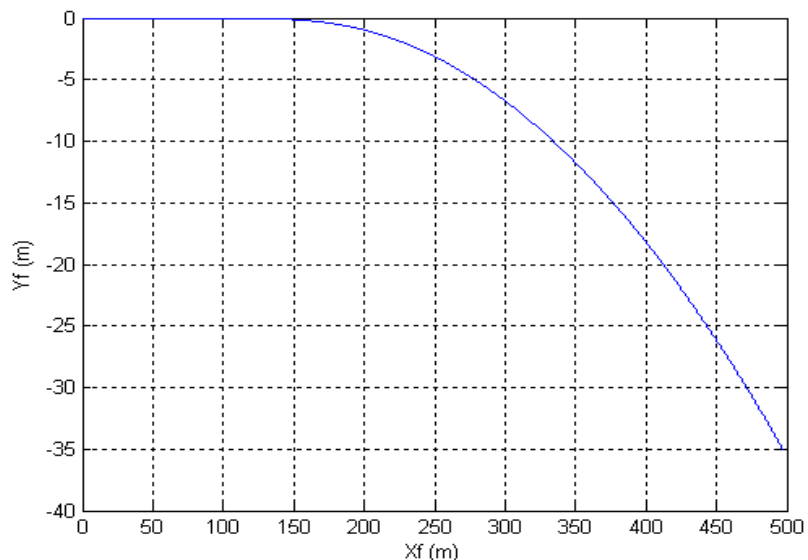


Figura 2.72 Tracciato ferroviario nel piano $x_f y_f$

In Fig. 2.73 e 2.74 sono infine riportate le irregolarità locali del tracciato (spostamento laterale del binario di sinistra d_s e di quello di destra d_d) mentre in Fig. 2.75, 2.76 e 2.77 si trovano le irregolarità globali del tracciato (spostamento laterale d_y e verticale d_z del piano dei binari ed irregolarità di cant β_{irr}).

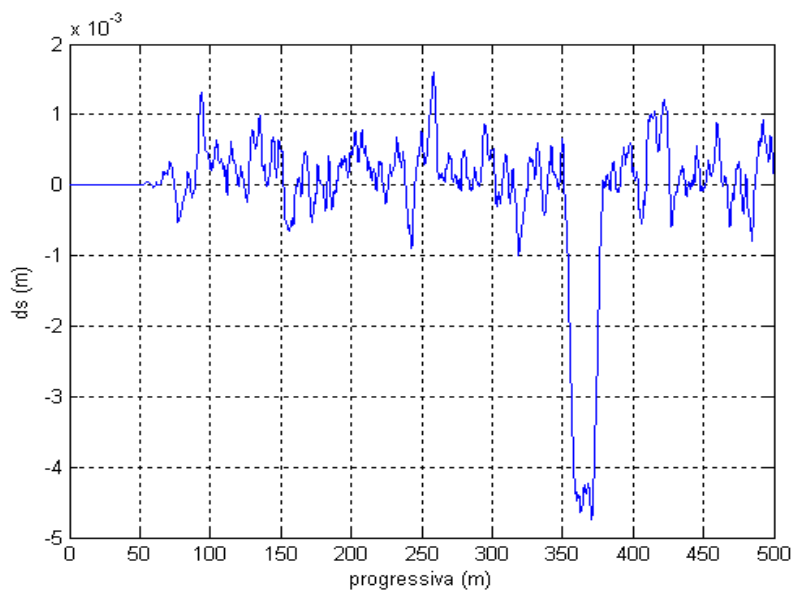


Figura 2.73 Irregolarità locali: spostamento laterale del binario di sinistra d_s

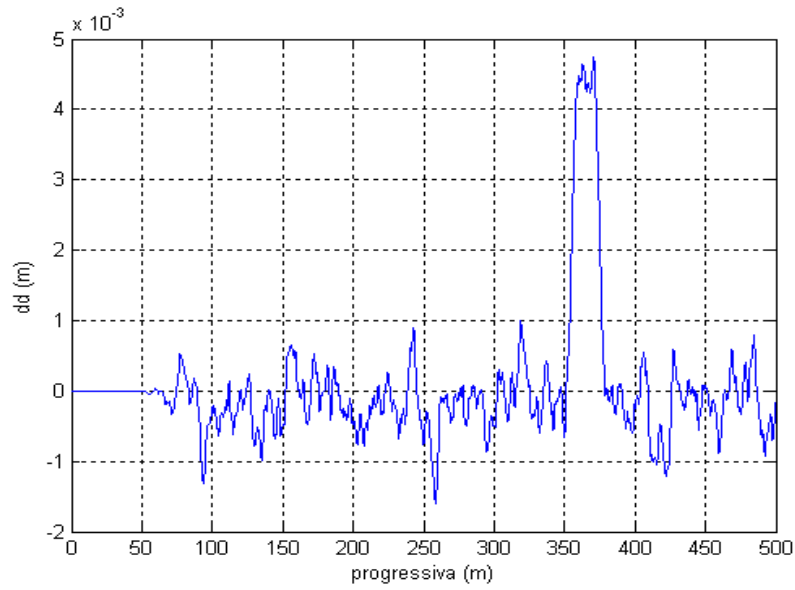


Figura 2.74 Irregolarità locali: spostamento laterale del binario di destra d_d

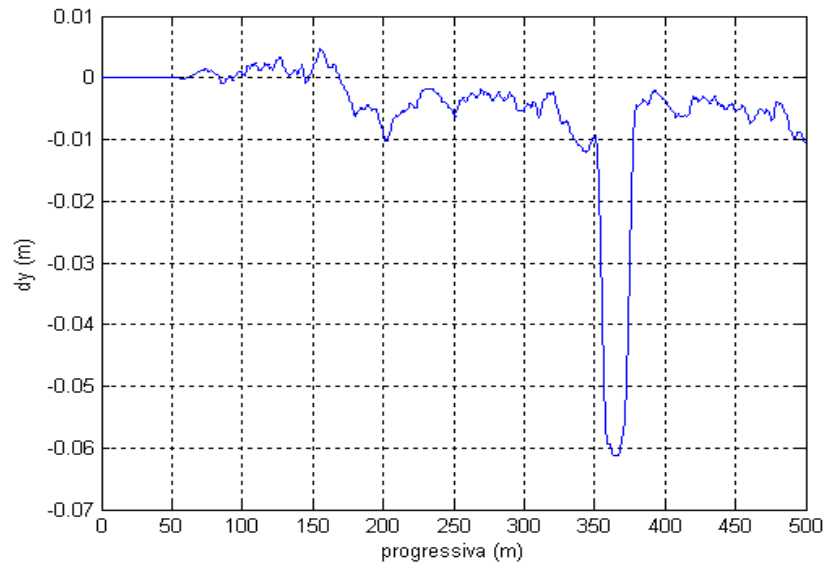


Figura 2.75 Irregolarità globali: spostamento laterale del piano dei binari d_y

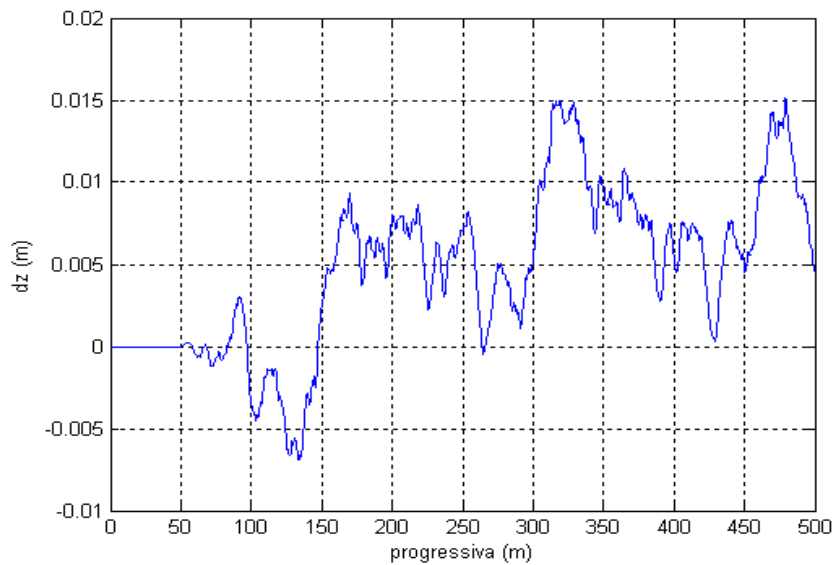


Figura 2.76 Irregolarità globali: spostamento verticale del piano dei binari d_z

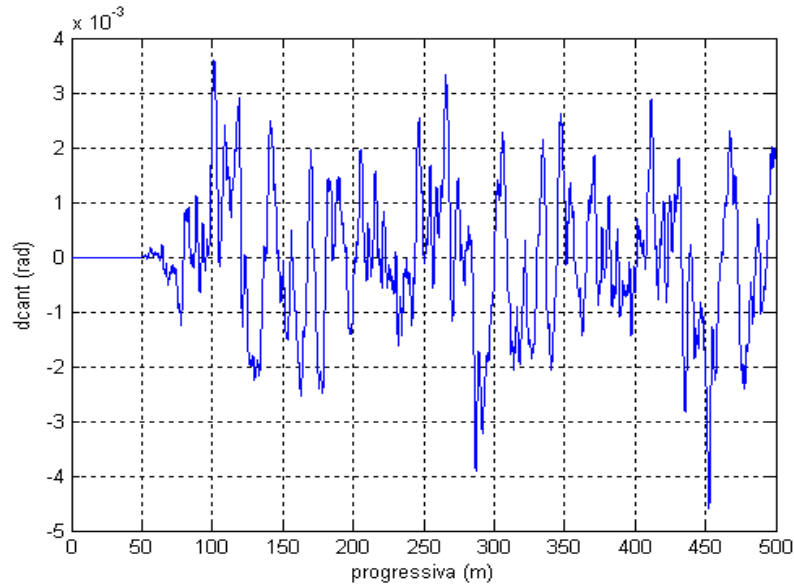


Figura 2.77 Irregolarità globali: irregolarità di cant β_{irr}

Anche in questo caso, per semplicità, verrà analizzato solamente il moto di alcuni corpi significativi quali la cassa, il carrello anteriore e le due sale di tale carrello (anteriore e posteriore). Più nel dettaglio verranno riportate le seguenti grandezze:

- lo spostamento laterale del centro di massa y^b , l'angolo di rollio φ^b e l'angolo di imbardata ψ^b di tutti i corpi analizzati ovvero della cassa, del carrello anteriore e delle due sale del carrello (anteriore e posteriore); tutte le grandezze saranno espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$
- le forze di contatto longitudinali F_x^b , laterali F_y^b e verticali F_z^b associate ai vari punti di contatto (espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$)
- gli spostamenti laterali y_{birr}^C e y_r^C dei punti di contatto espressi rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario modificato $O_{birr} x_{birr} y_{birr} z_{birr}$ (si veda Fig. 2.8) ed in quello solidale $O_r x_r y_r z_r$
- le posizioni \underline{P}_b^{birrC} e \underline{P}_r^C dei punti di contatto sulla superficie del binario e su quella della sala (espresse rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario modificato $O_{birr} x_{birr} y_{birr} z_{birr}$ ed in quello solidale $O_r x_r y_r z_r$).

Nella simulazione in questione, come nella precedente, non si ha contatto multiplo; sia il modello Malab/Simulink che quello Simpack Rail hanno infatti rilevato la presenza di un solo punto di contatto per ciascuna ruota.

In Fig. 2.78, 2.79 e 2.80 sono raffigurate le variabili cinematiche relative alla cassa, mentre quelle relative al carrello sono rappresentate in Fig. 2.81, 2.82 e 2.83. Le variabili relative alle due sale (anteriore e posteriore) sono invece riportate in Fig. 2.84, 2.85, 2.86 e Fig. 2.87, 2.88, 2.89. In blu sono state raffigurate le variabili calcolate dal modello Matlab/Simulink mentre in rosso quelle calcolate dal modello Simpack Rail.

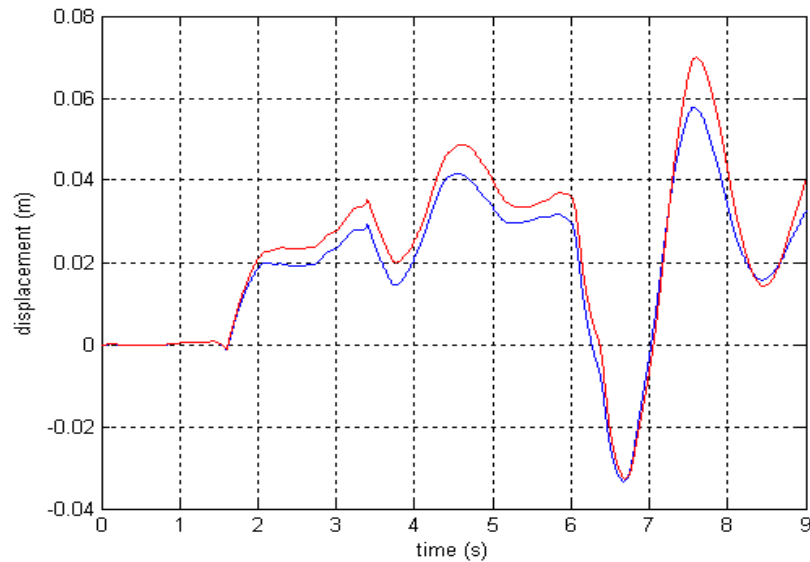


Figura 2.78 *Cassa: spostamento laterale del centro di massa y^b*

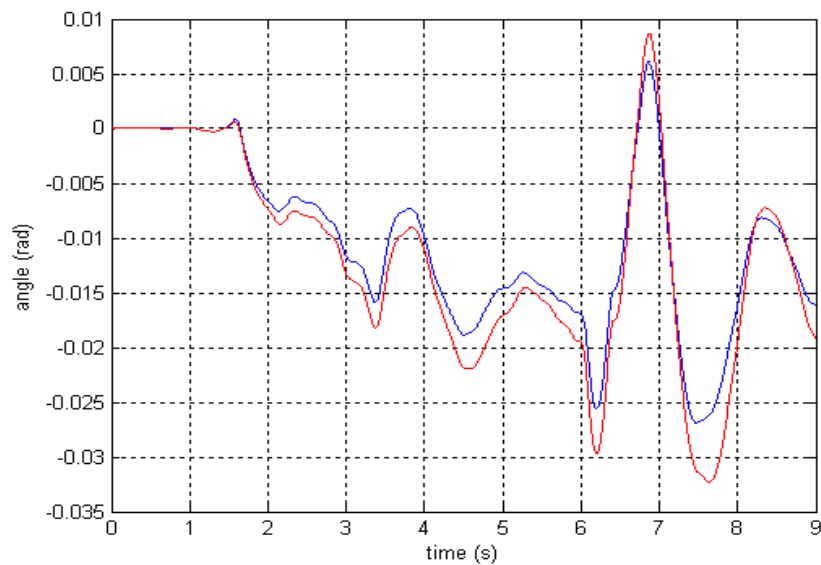


Figura 2.79 *Cassa: angolo di rollio φ^b*

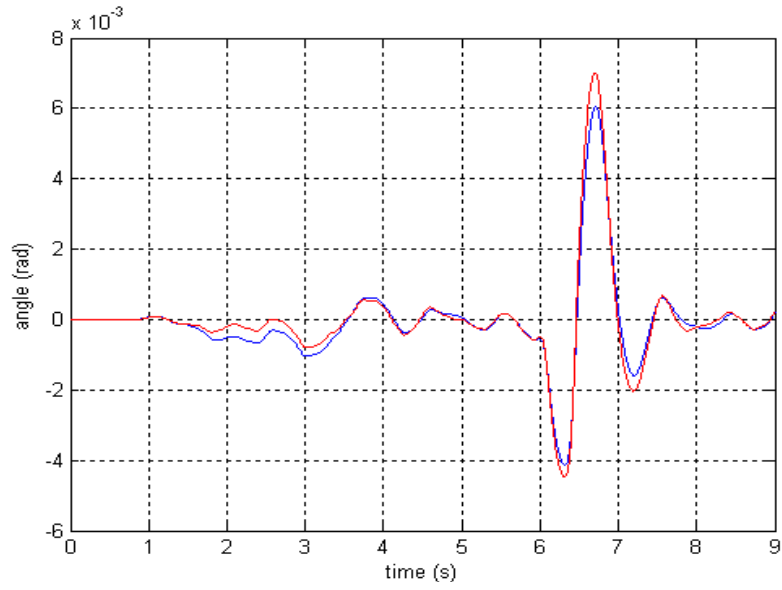


Figura 2.80 Cassa: angolo di imbardata ψ^b

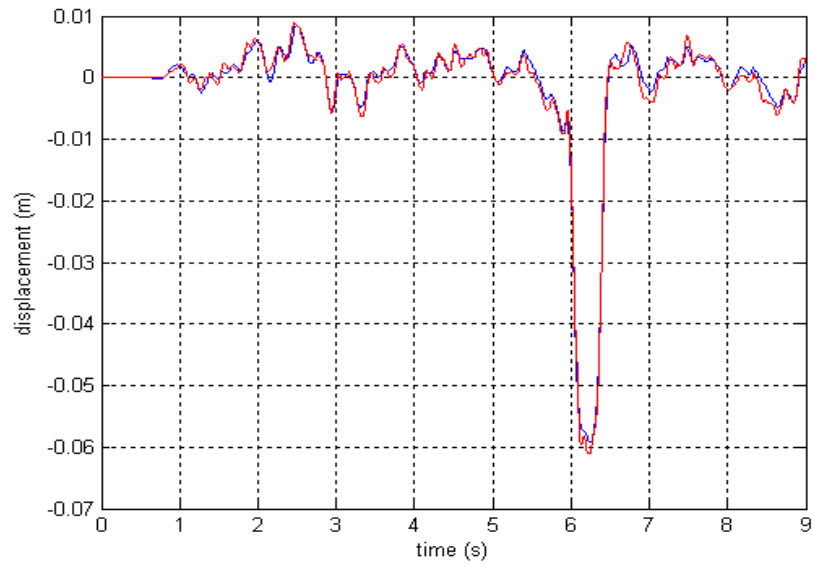


Figura 2.81 Carrello anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

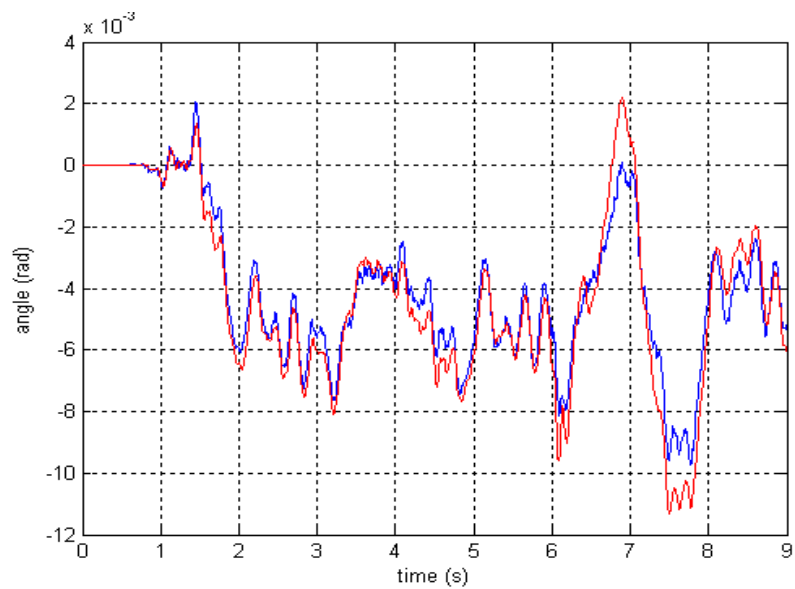


Figura 2.82 Carrello anteriore: angolo di rollio ϕ^b

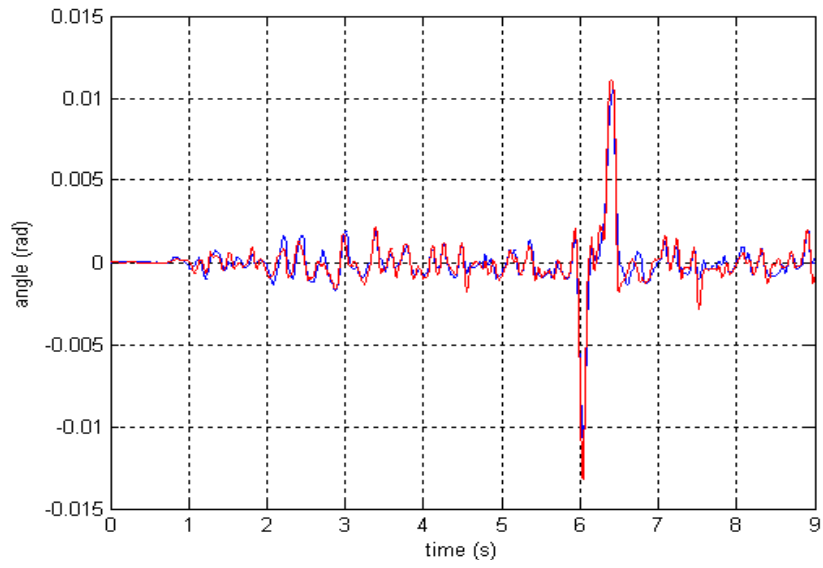


Figura 2.83 Carrello anteriore: angolo di imbardata ψ^b

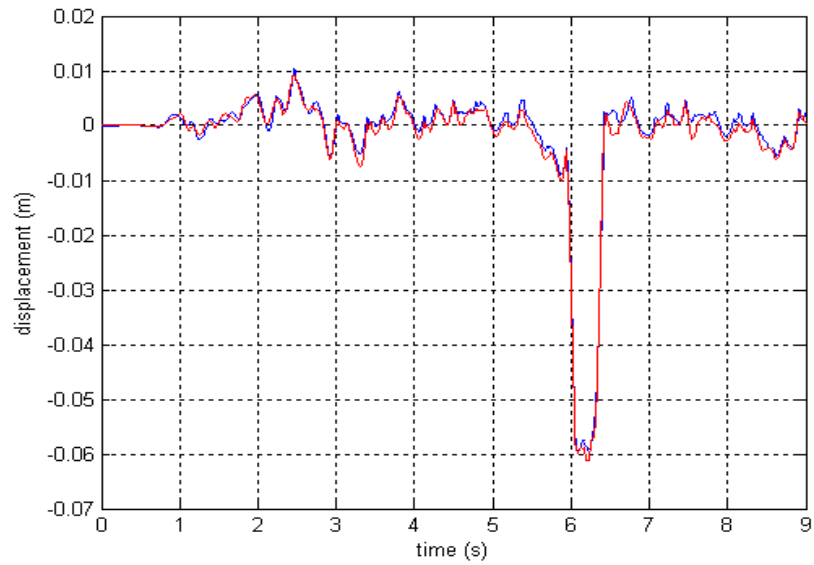


Figura 2.84 Sala anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

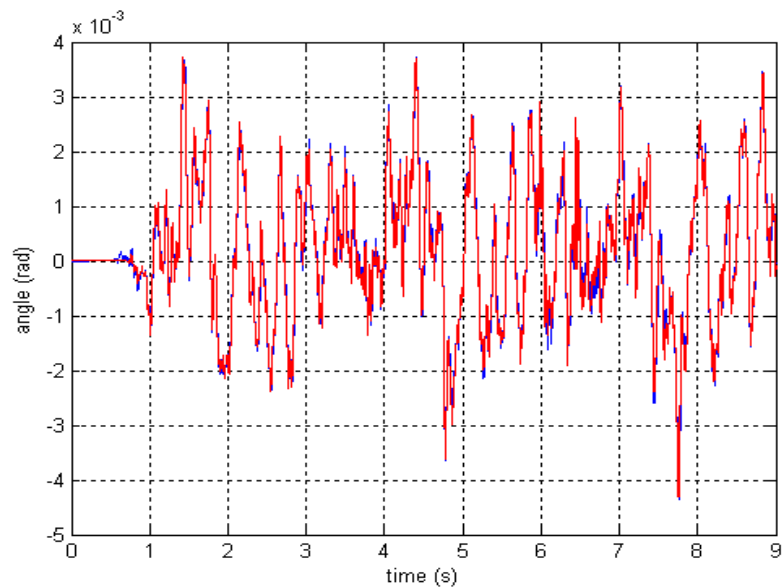


Figura 2.85 Sala anteriore: angolo di rollio ϕ^b

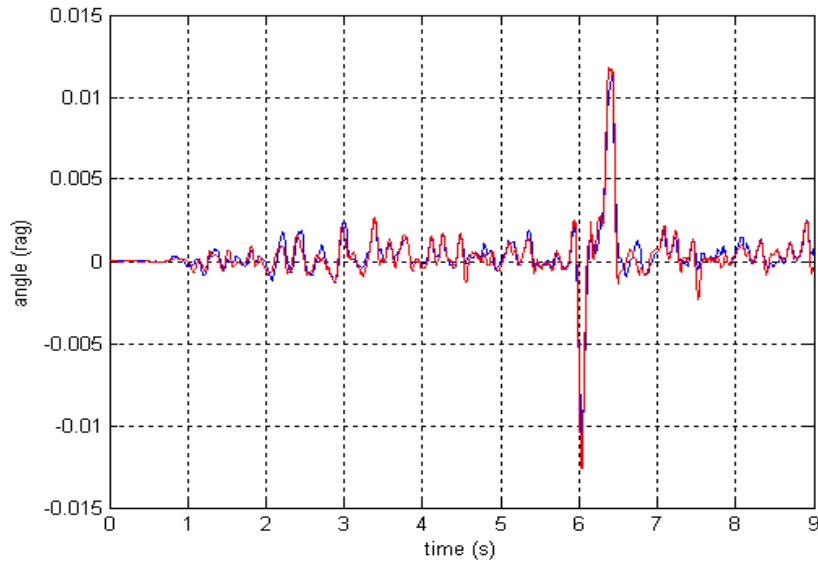


Figura 2.86 Sala anteriore: angolo di imbardata ψ^b

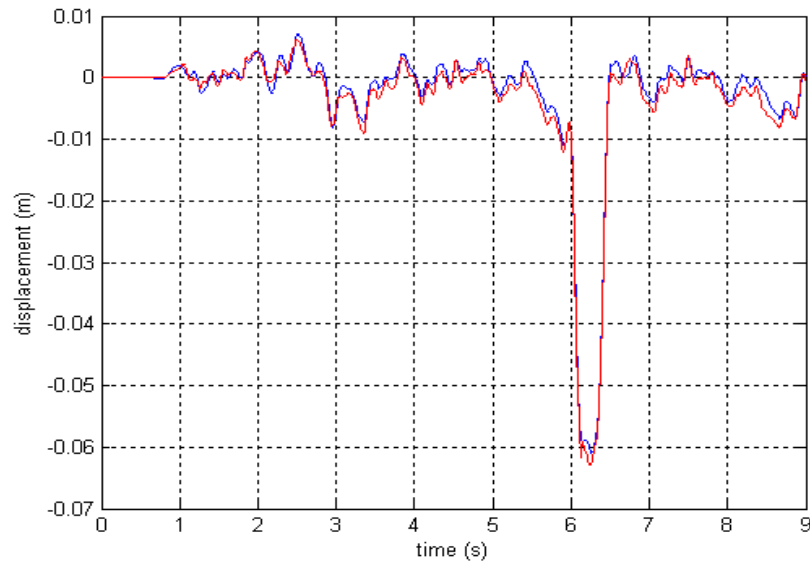


Figura 2.87 Sala posteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

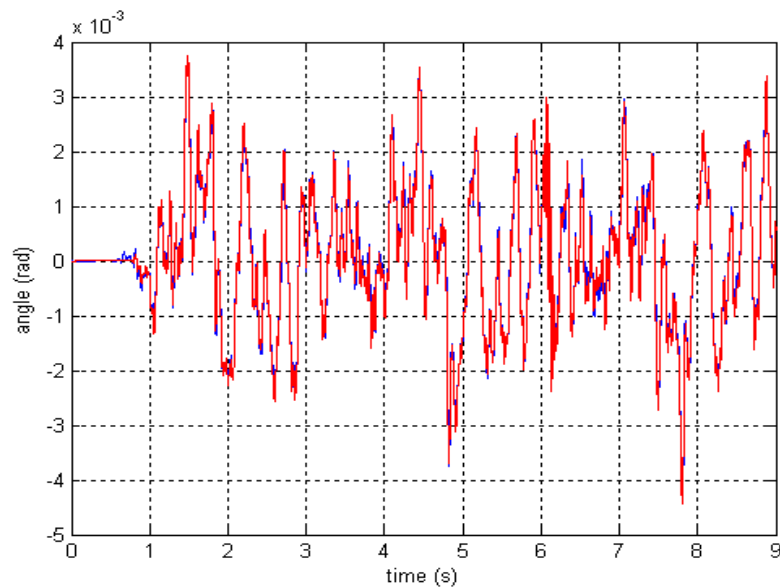


Figura 2.88 Sala posteriore: angolo di rollio ϕ^b

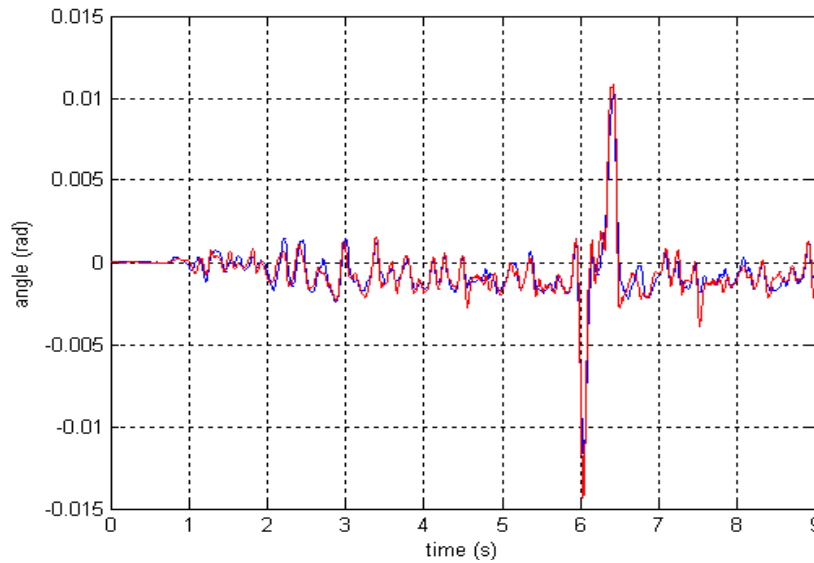


Figura 2.89 Sala posteriore: angolo di imbardata ψ^b

L’analisi dei risultati ottenuti mostra, come nel caso descritto in precedenza, un buon accordo tra le grandezze cinematiche calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail sia a livello di cassa e carrello che a livello delle sale.

Successivamente sono state riportate le forze di contatto associate ai vari punti di contatto (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail. In Fig. 2.90, 2.91, 2.92 e Fig. 2.93, 2.94, 2.95 sono raffigurate le forze di contatto longitudinali, laterali e verticali agenti rispettivamente sulla ruota sinistra e sulla ruota destra della sala anteriore. In Fig. 2.96, 2.97, 2.98 e Fig. 2.99, 2.100, 2.101 sono rappresentate invece le analoghe grandezze relative alla sala posteriore.

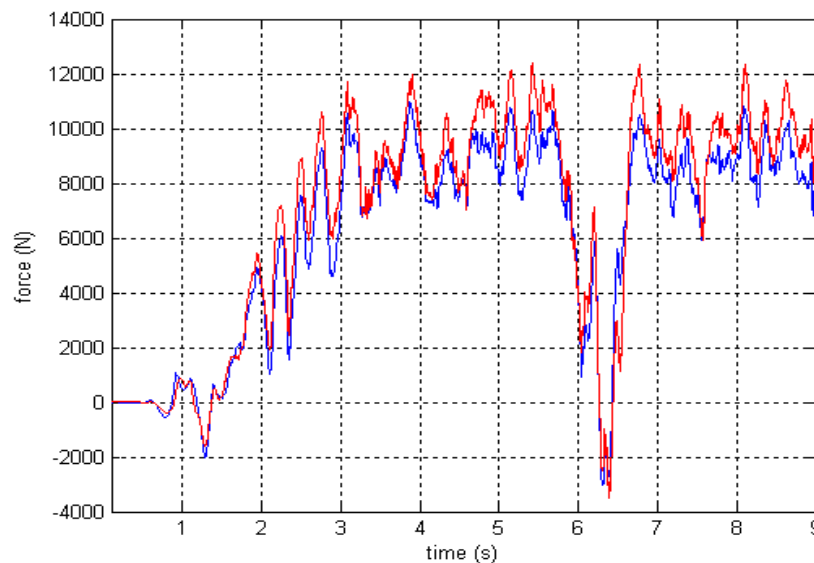


Figura 2.90 Sala anteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b

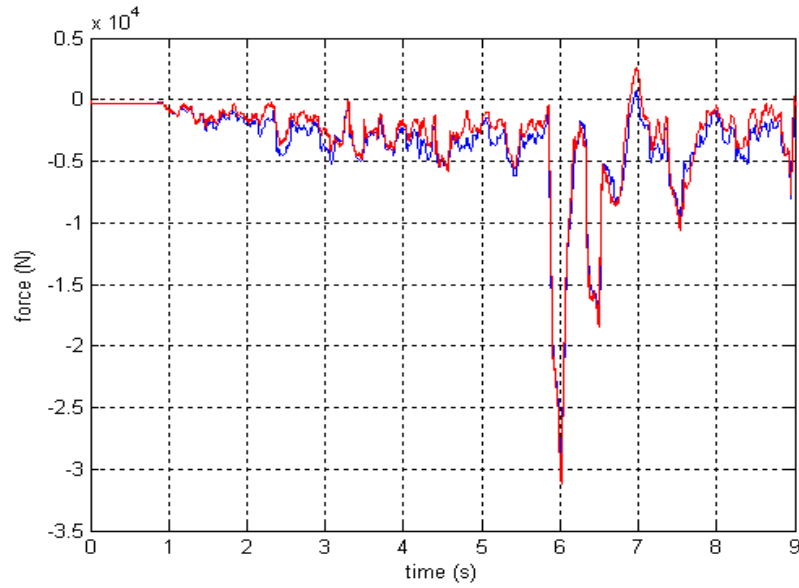


Figura 2.91 Sala anteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b

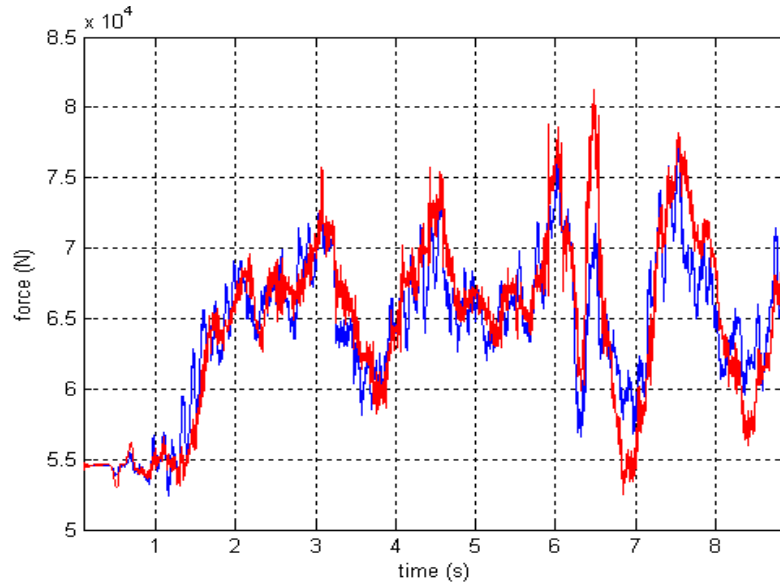


Figura 2.92 Sala anteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b

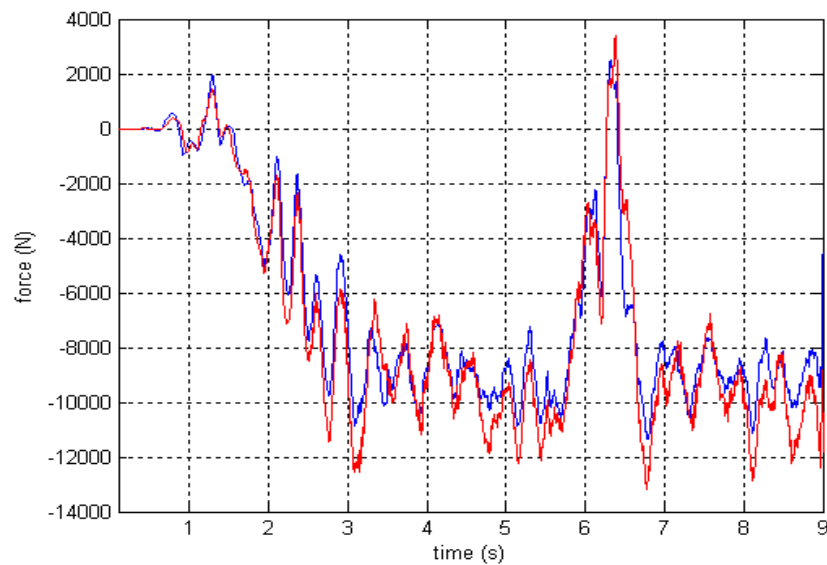


Figura 2.93 Sala anteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^b

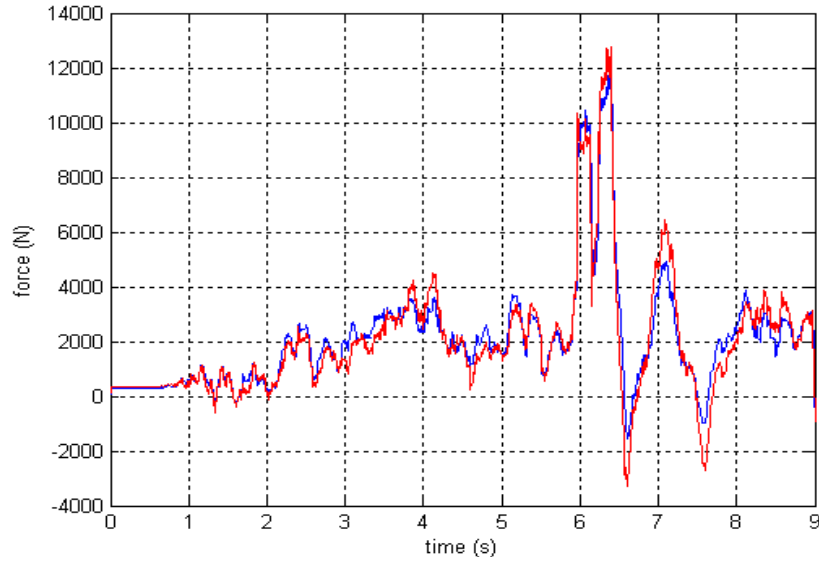


Figura 2.94 Sala anteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^b

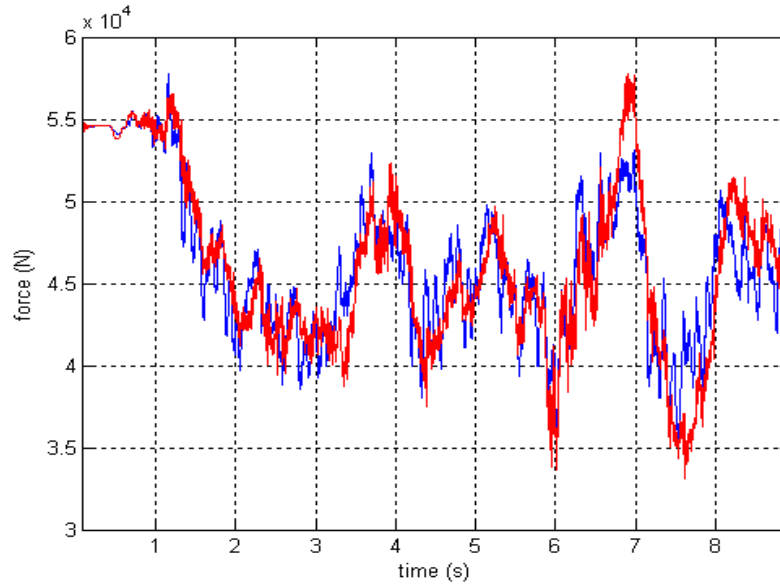


Figura 2.95 Sala anteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^b

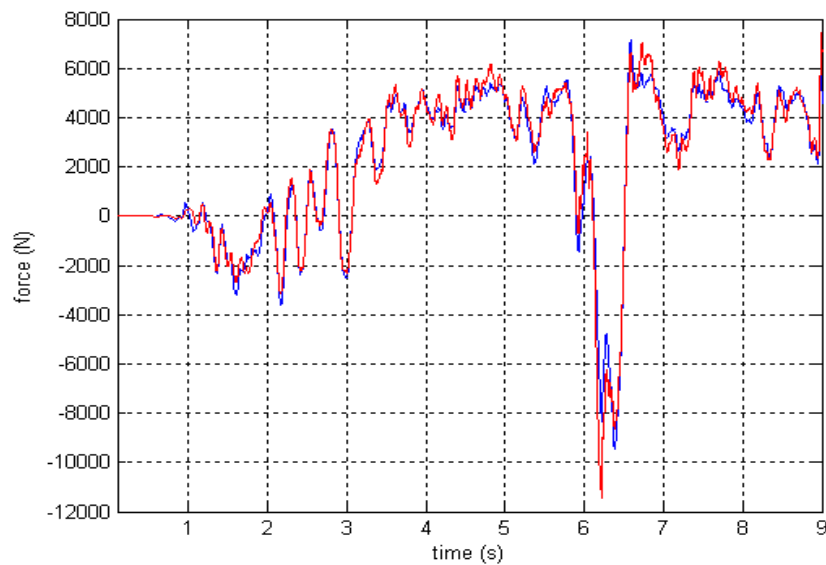


Figura 2.96 Sala posteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b

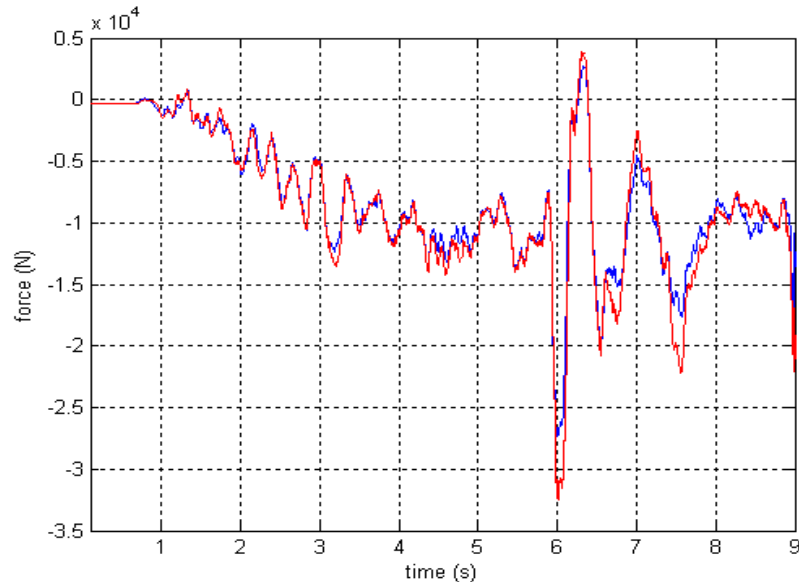


Figura 2.97 Sala posteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b

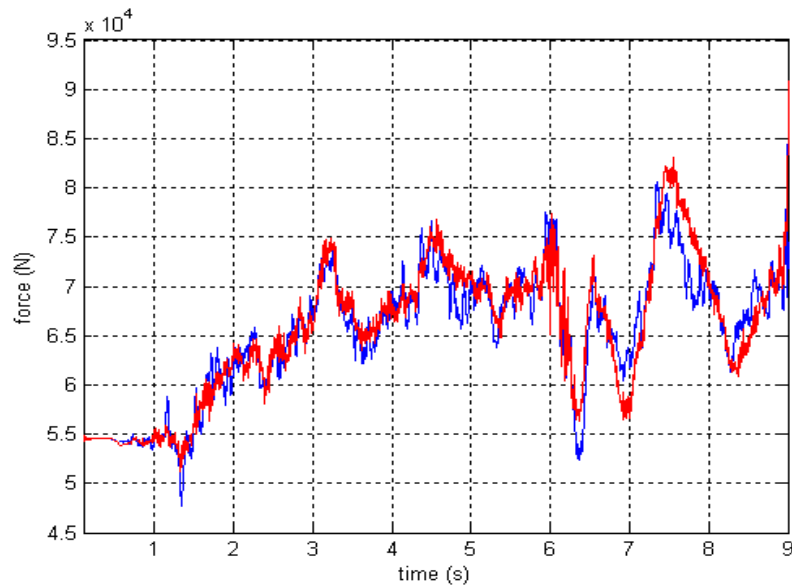


Figura 2.98 Sala posteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b

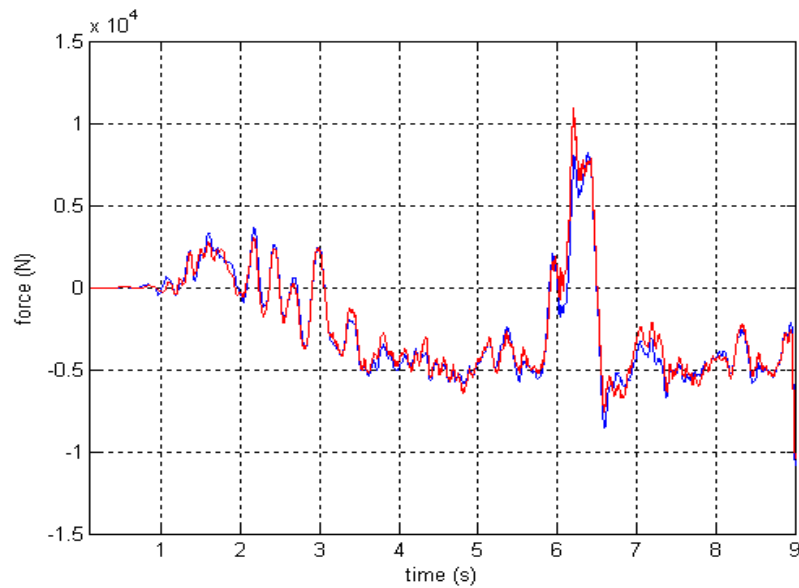


Figura 2.99 Sala posteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^b

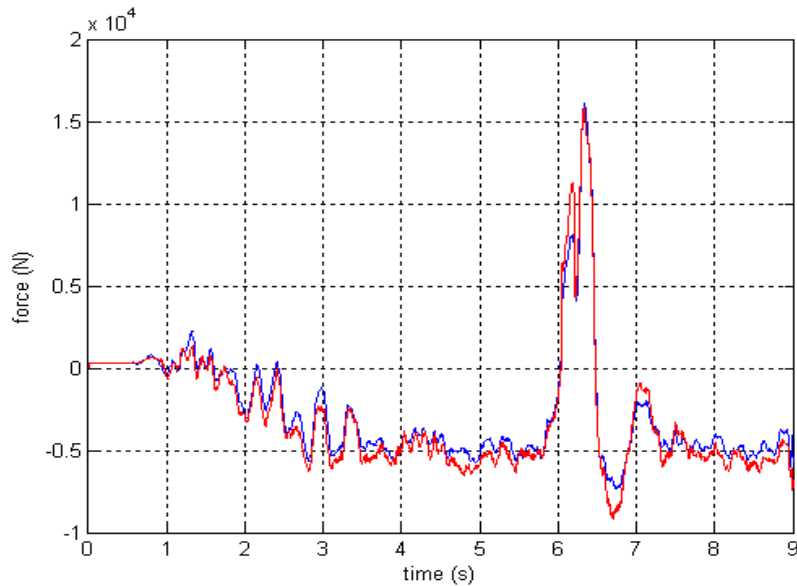


Figura 2.100 Sala posteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^b

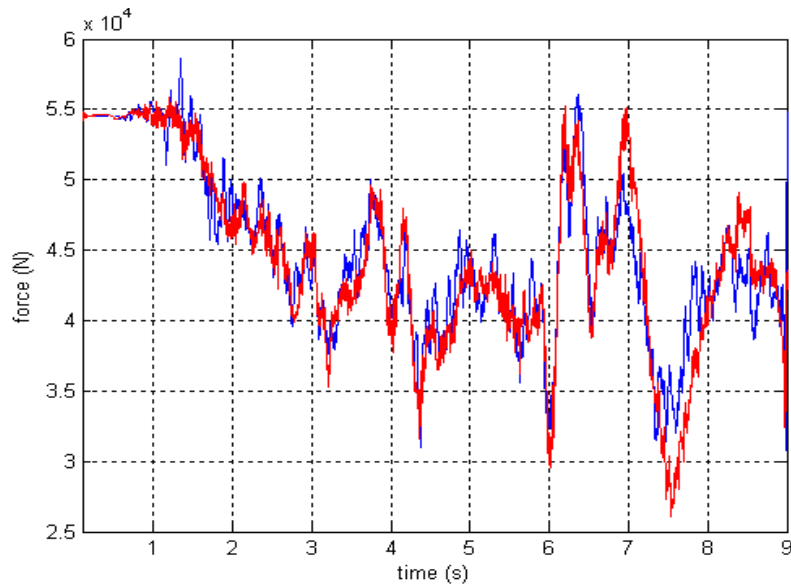


Figura 2.101 Sala posteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^b

Il confronto tra i risultati ottenuti mostra nuovamente, per quanto riguarda le forze di contatto, un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail anche in presenza di irregolarità del tracciato.

Per quanto riguarda i punti di contatto, sono stati dapprima riportati gli spostamenti laterali di tali punti (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail). In Fig. 2.102 e 2.103 sono stati raffigurati gli spostamenti relativi ai punti di contatto presenti sulla sala anteriore mentre in Fig. 2.104 e 2.105 quelli relativi ai punti presenti sulla sala posteriore (espressi per comodità nel

sistema ausiliario modificato $O_{b_{irr}}x_{b_{irr}}y_{b_{irr}}z_{b_{irr}}$). In Fig. 2.106, 2.107, 2.108 e 2.109 sono state invece rappresentate le analoghe grandezze espresse nel sistema solidale.

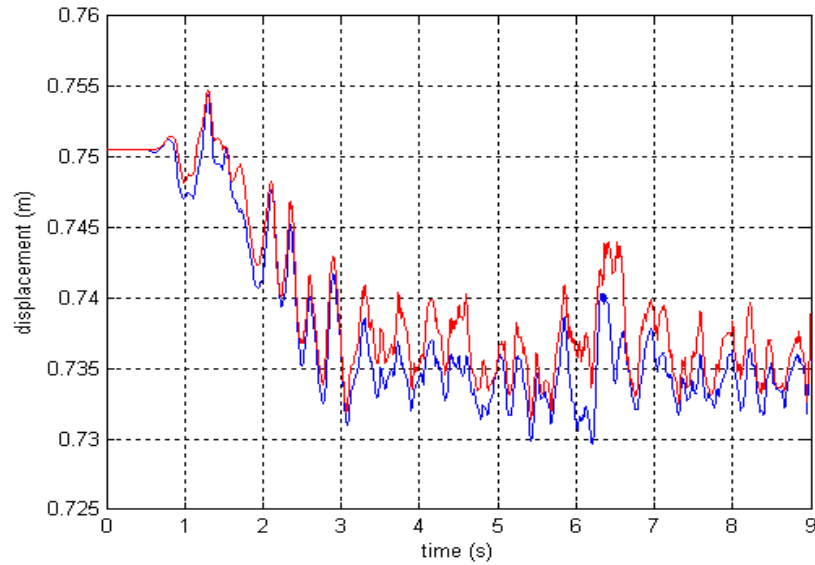


Figura 2.102 Sala anteriore, ruota sinistra: spostamento del PDC nel sistema ausiliario modificato $y_{b_{irr}}^C$

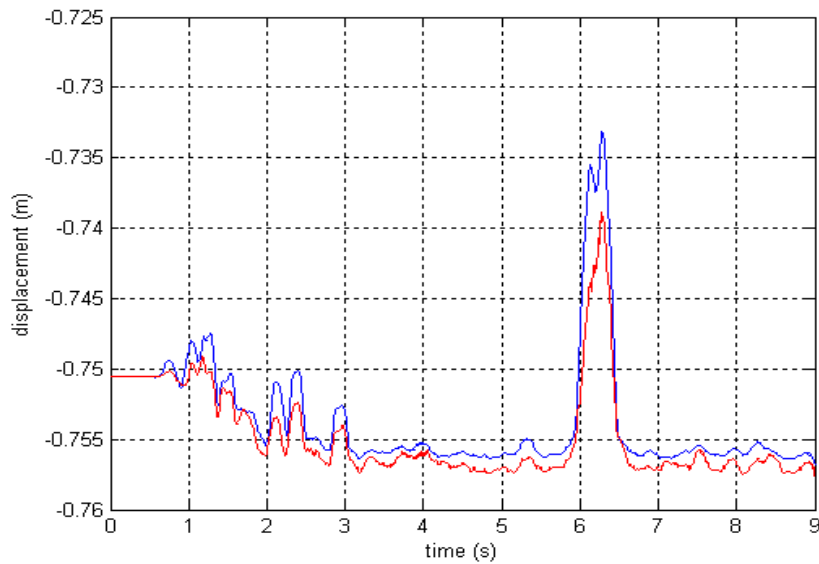


Figura 2.103 Sala anteriore, ruota destra: spostamento del PDC nel sistema ausiliario modificato $y_{b_{irr}}^C$

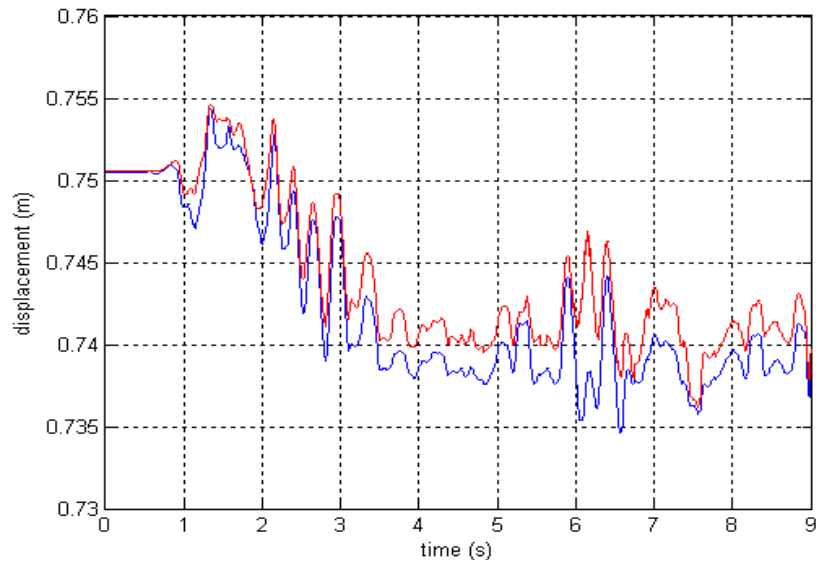


Figura 2.104 Sala posteriore, ruota sinistra: spostamento del PDC nel sistema ausiliario modificato y_{brr}^C

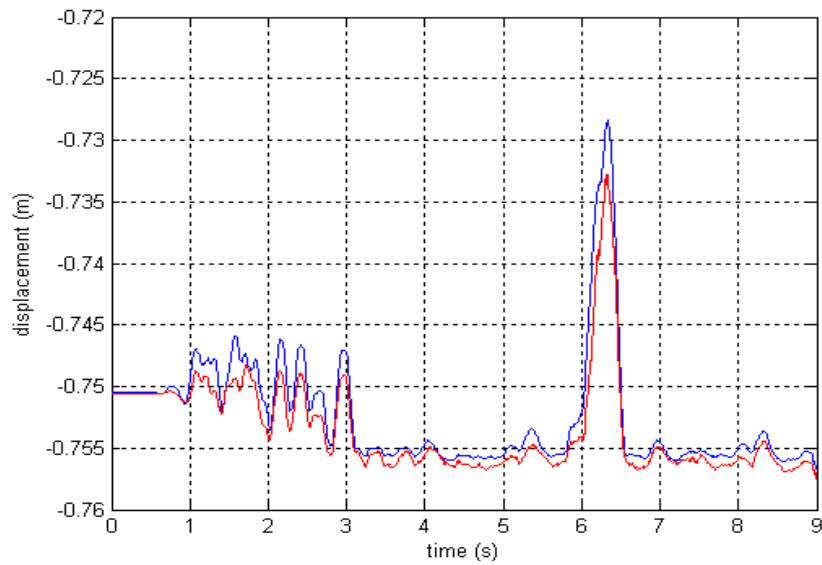


Figura 2.105 Sala posteriore, ruota destra: spostamento del PDC nel sistema ausiliario modificato y_{brr}^C

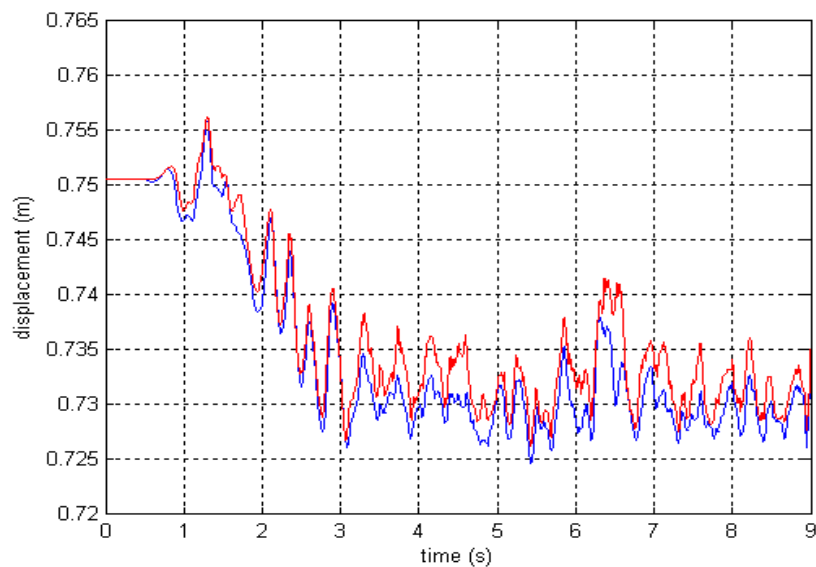


Figura 2.106 Sala anteriore, ruota sinistra: spostamento del PDC nel sistema solidale y_r^C

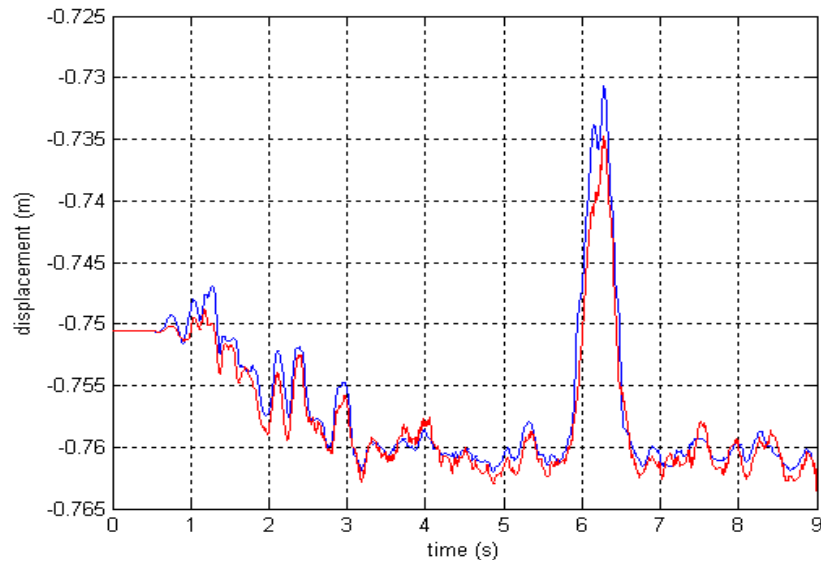


Figura 2.107 Sala anteriore, ruota destra: spostamento del PDC nel sistema solidale y_r^C

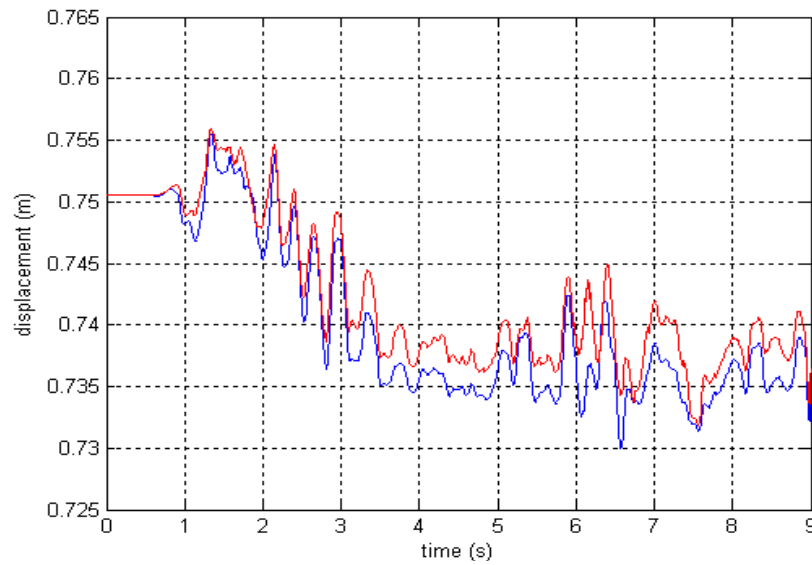


Figura 2.108 Sala posteriore, ruota sinistra: spostamento del PDC nel sistema solidale y_r^C

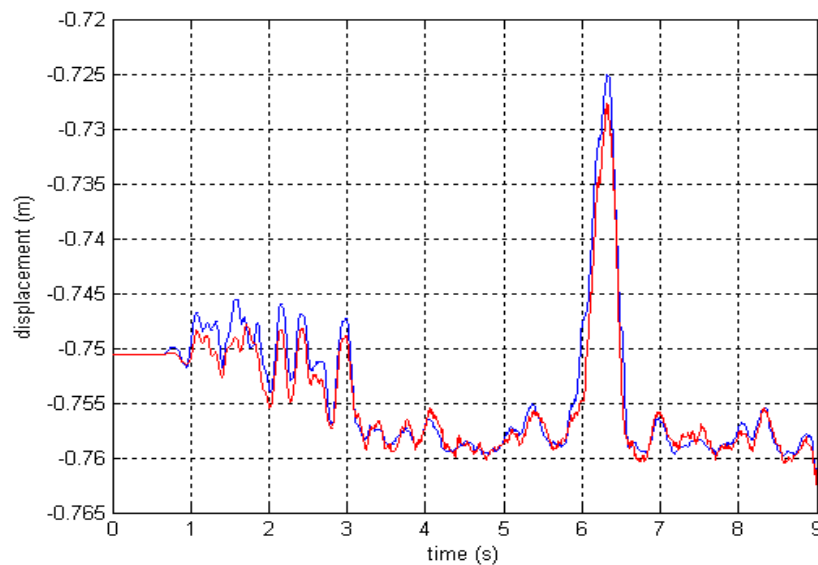


Figura 2.109 Sala posteriore, ruota destra: spostamento del PDC nel sistema solidale y_r^C

Successivamente sono state riportate le posizioni dei punti di contatto sulla superficie del binario e su quella della sala (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in nero quelle del modello Simpack Rail). Per maggiore chiarezza le traiettorie dei punti di contatto sono state tracciate su superfici cilindriche ottenute a partire dai profili di sala e binario (profili generatori) e lunghe quanto la distanza percorsa dal veicolo durante la simulazione. In Fig. 2.110 e 2.111 sono stati raffigurati i punti di contatto presenti sulla sala anteriore mentre in Fig. 2.112 e 2.113 quelli presenti sulla sala posteriore (tracciati sulla superficie del binario ed espressi, per comodità, nel sistema ausiliario modificato $O_{birr}x_{birr}y_{birr}z_{birr}$). In Fig. 2.114, 2.115, 2.116 e 2.117 sono state invece rappresentate le analoghe grandezze tracciate sulla superficie della sala ed espresse nel sistema solidale.

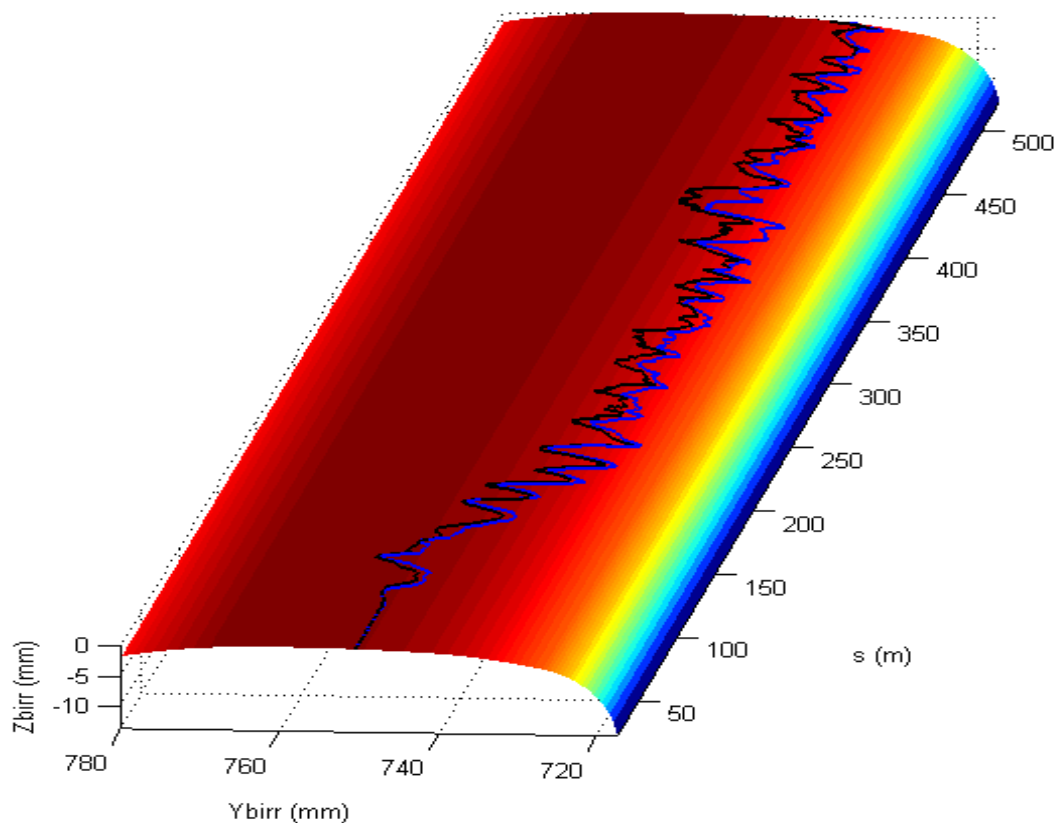


Figura 2.110 Sala anteriore: posizione del PDC sulla rotaia di sinistra \underline{P}_b^{birrC} (sistema ausiliario modificato)

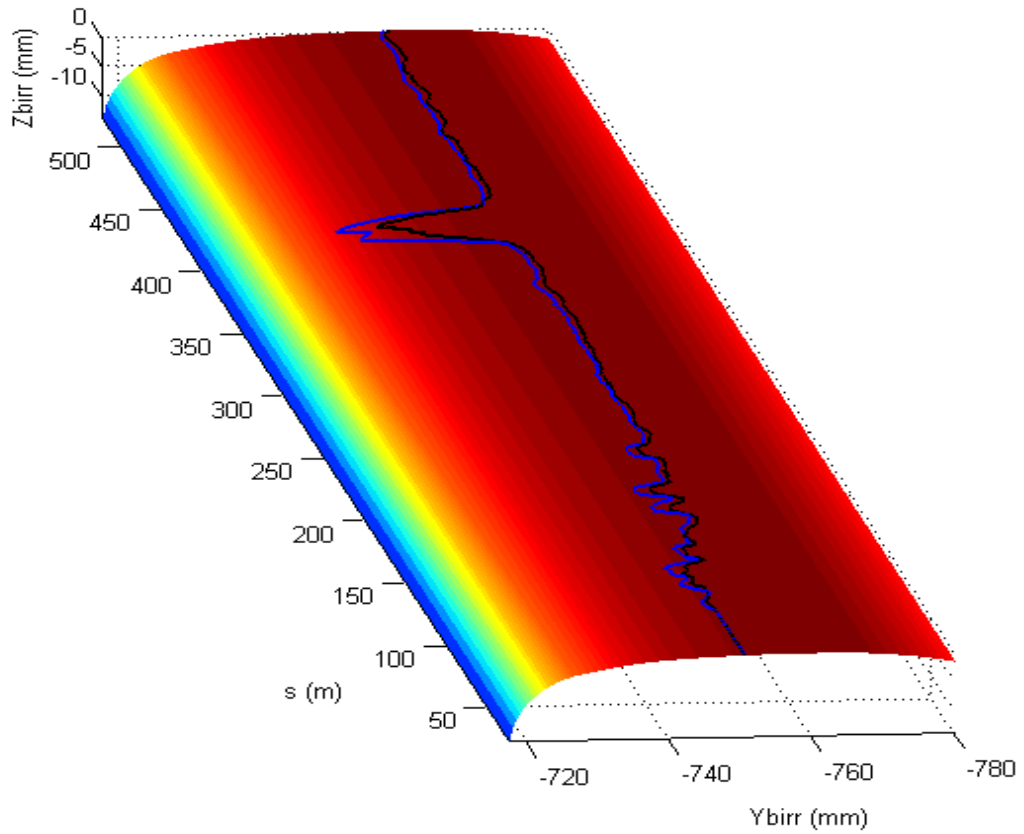


Figura 2.111 Sala anteriore: posizione del PDC sulla rotaia di destra \underline{P}_b^{birrC} (sistema ausiliario modificato)

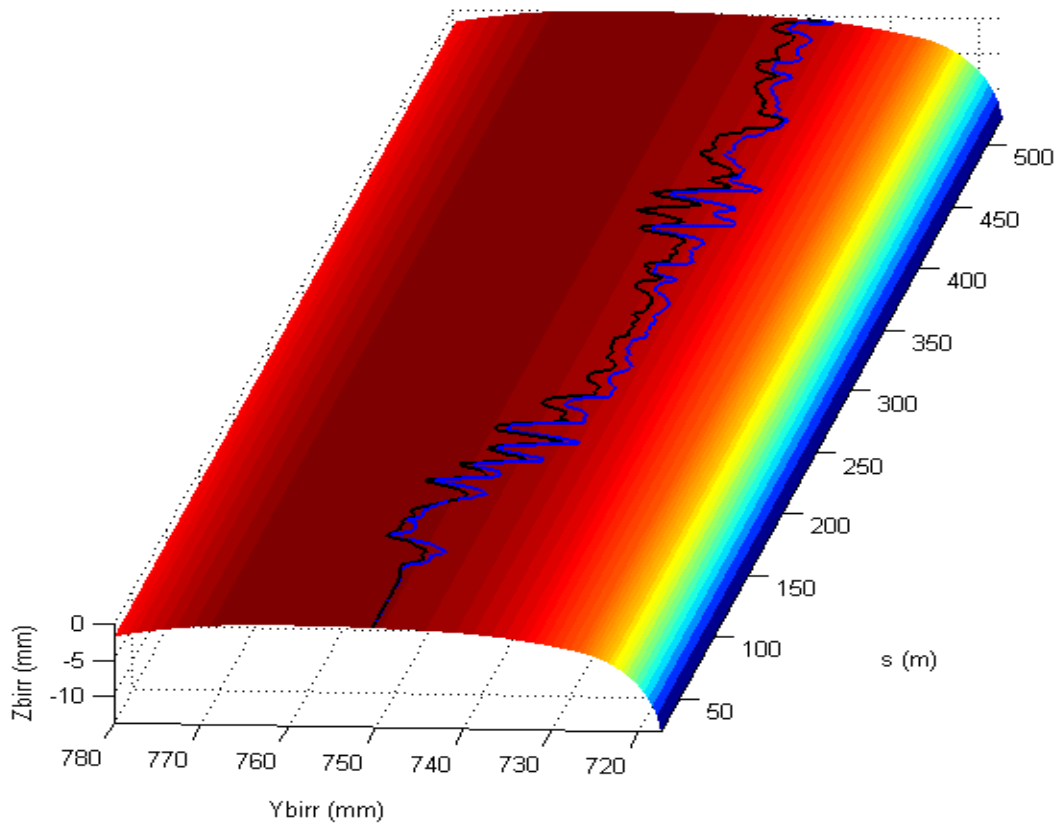


Figura 2.112 Sala posteriore: posizione del PDC sulla rotaia di sinistra \underline{P}_b^{birrC} (sistema ausiliario modificato)

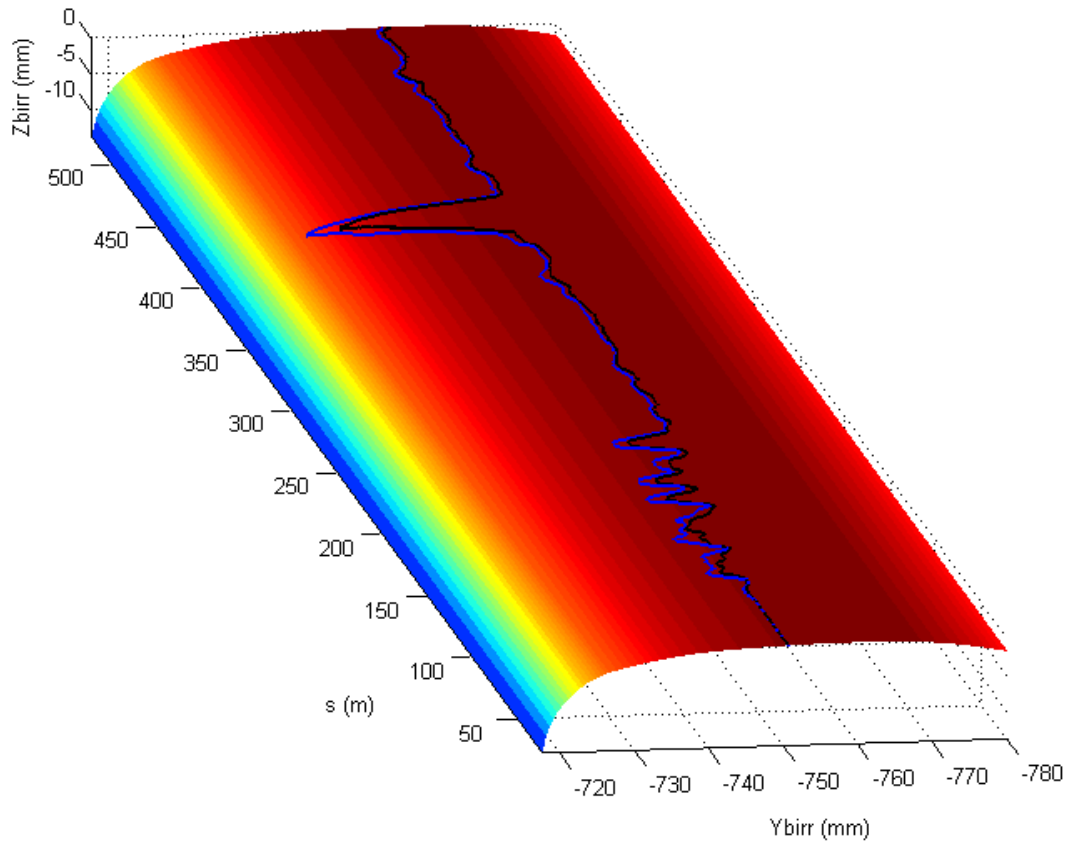


Figura 2.113 Sala posteriore: posizione del PDC sulla rotaia di destra \underline{P}_b^{birrC} (sistema ausiliario modificato)

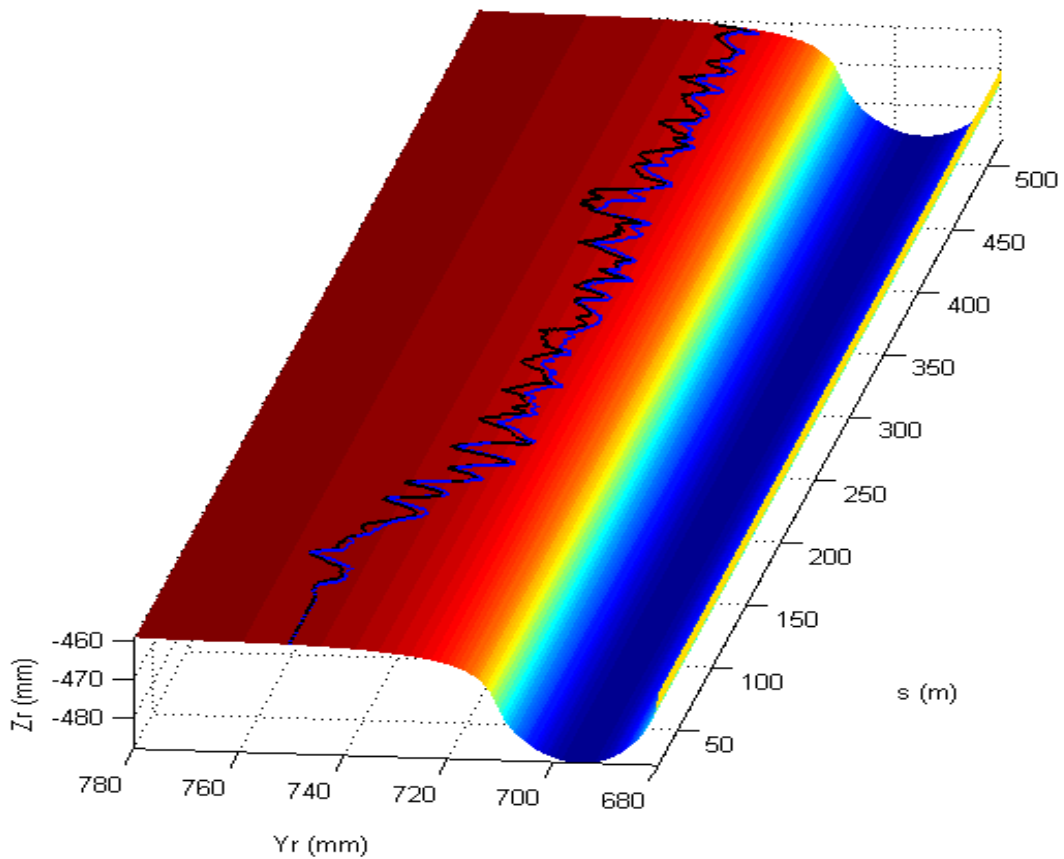


Figura 2.114 Sala anteriore: posizione del PDC sulla ruota di sinistra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

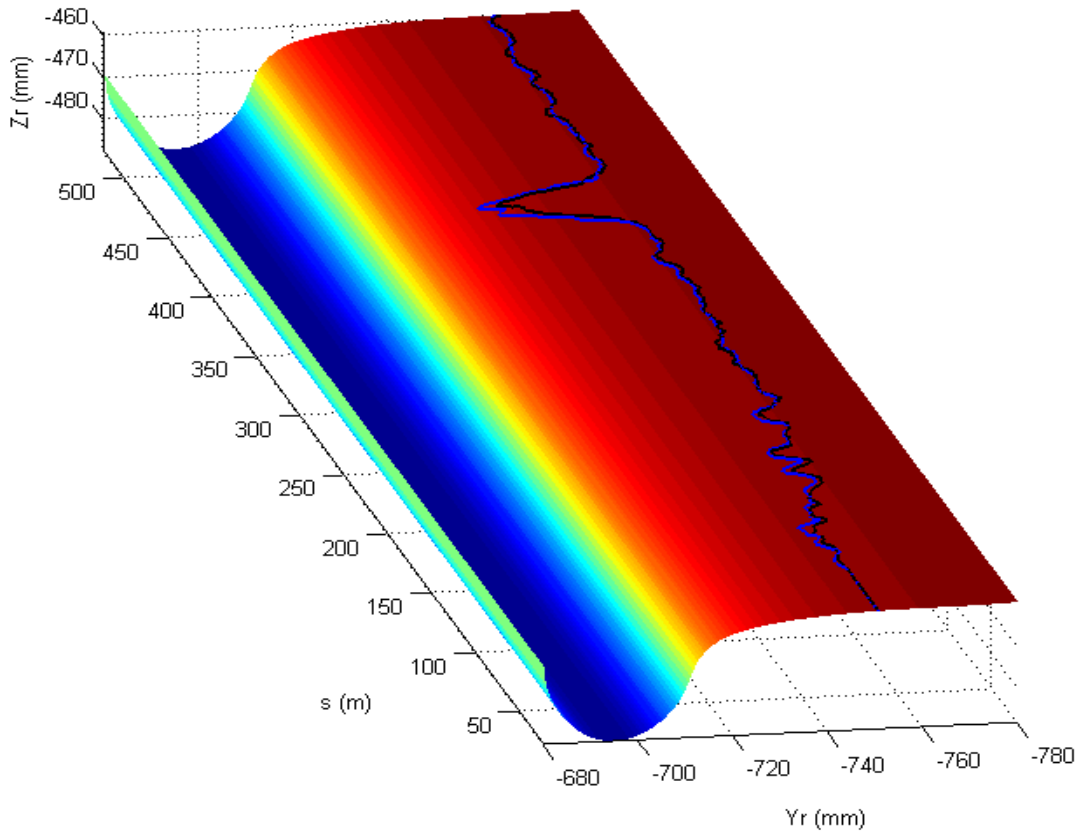


Figura 2.115 Sala anteriore: posizione del PDC sulla ruota di destra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

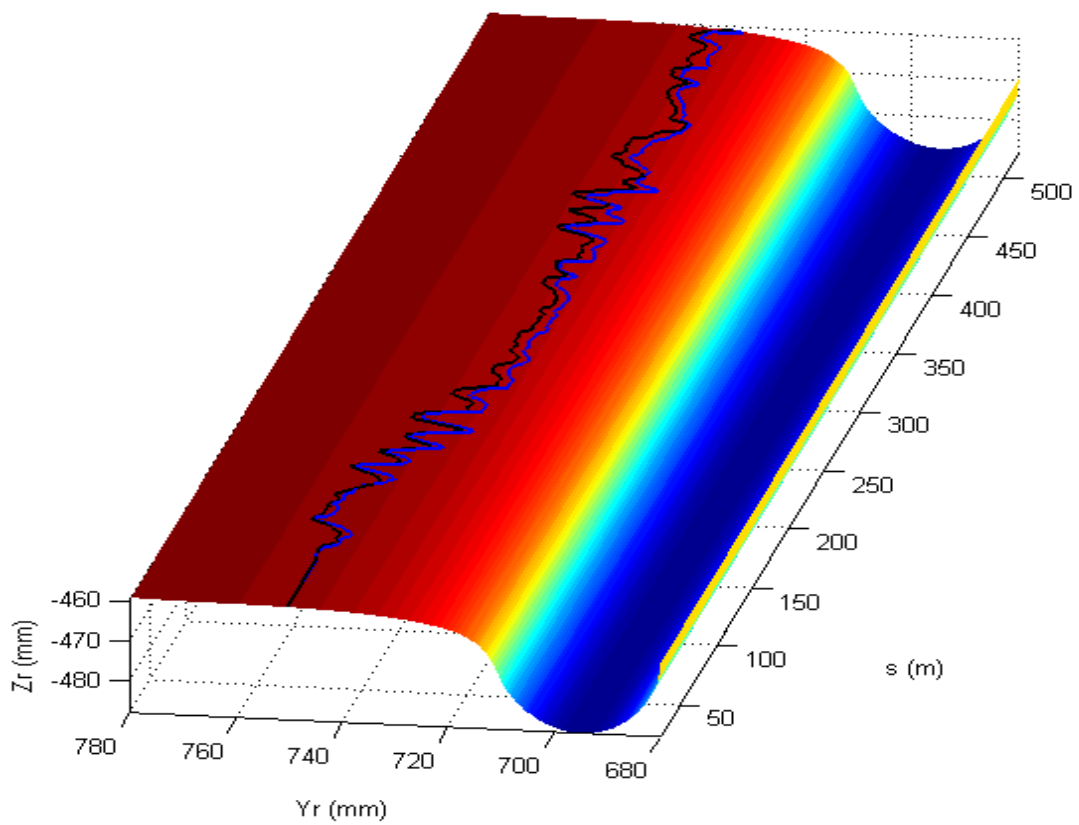


Figura 2.116 Sala posteriore: posizione del PDC sulla ruota di sinistra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

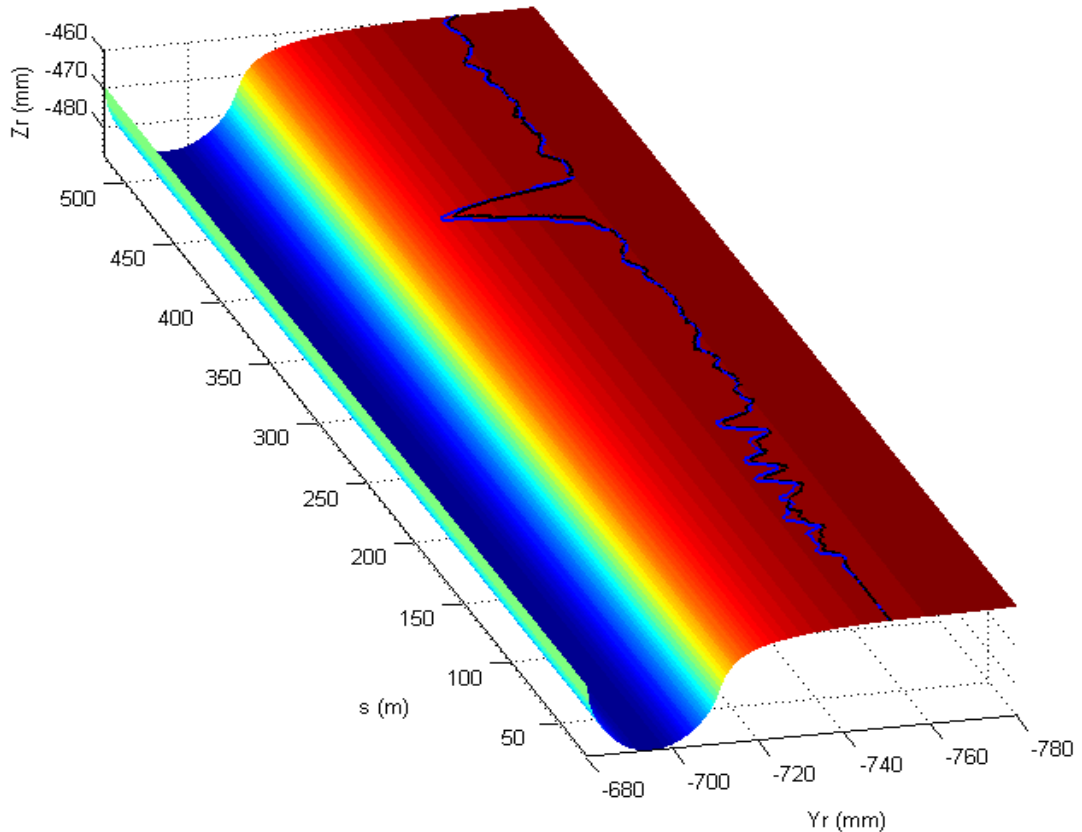


Figura 2.117 Sala posteriore: posizione del PDC sulla ruota di destra P_r^C (sistema solidale)

Anche per quanto riguarda la posizione dei punti di contatto è presente un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail. In particolare è utile sottolineare come, anche in questa seconda simulazione, sia il modello Matlab/Simulink che il modello Simpack Rail abbiano rilevato un solo punto di contatto per ciascuna ruota (non si ha cioè contatto multiplo).

In generale si può infine osservare come il basso rumore numerico e la stabilità delle nuove procedure (nonostante la presenza di irregolarità del tracciato) evidenzino l'affidabilità e l'accuratezza del modello Matlab/Simulink ed in particolare dei nuovi modelli di contatto.

2.6.4 Simulazione dinamica N° 3: curva singola

La terza ed ultima simulazione riportata a titolo di esempio è stata effettuata su un tracciato curvilineo caratterizzato da una ridotta curvatura e percorso a velocità sostenuta. I dati relativi alla simulazione sono riportati in Tab. 2.22.

K	$-1/1400 \text{ m}^{-1}$
β_c	0.0418 rad
p	0
α_p	$1/40 \text{ rad}$
V	162 km/h
μ	0.3

Tabella 2.22 *Caratteristiche del tracciato: simulazione N° 3*

In Fig. 2.118 e 2.119 sono raffigurati gli andamenti della curvatura K e dell'angolo di cant β_c in funzione della progressiva del tracciato.

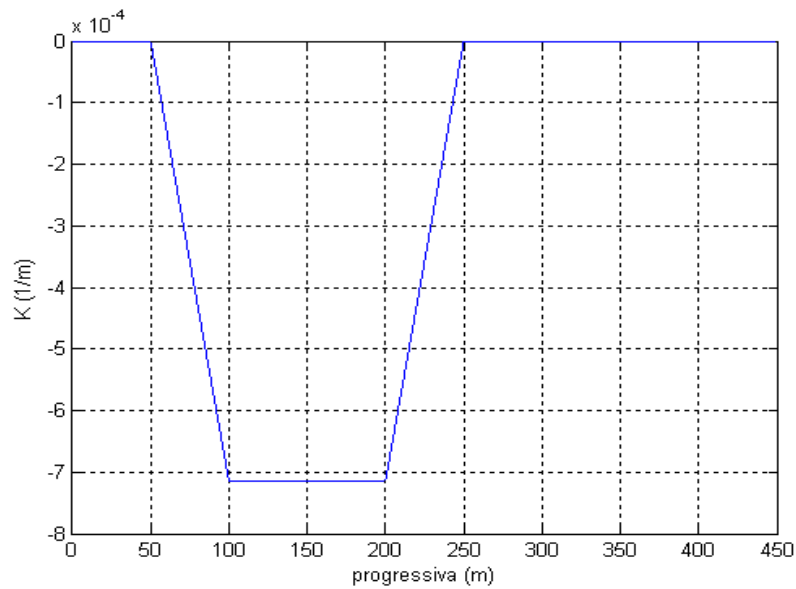


Figura 2.118 *Curvatura K in funzione della progressiva*

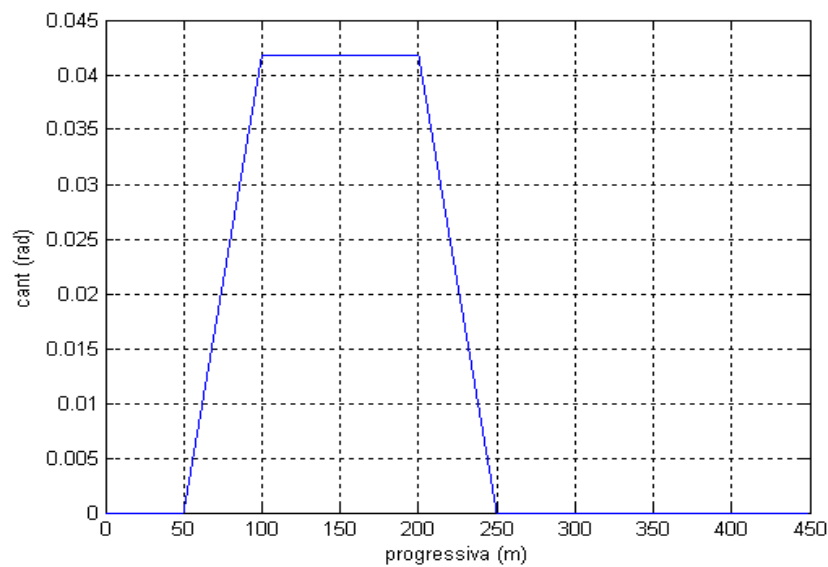


Figura 2.119 *Angolo di cant β_c in funzione della progressiva*

In Fig. 2.120 è riportato invece il tracciato ferroviario nel sistema di riferimento fisso $O_f x_f y_f z_f$ (o, più precisamente, nel piano $x_f y_f$).

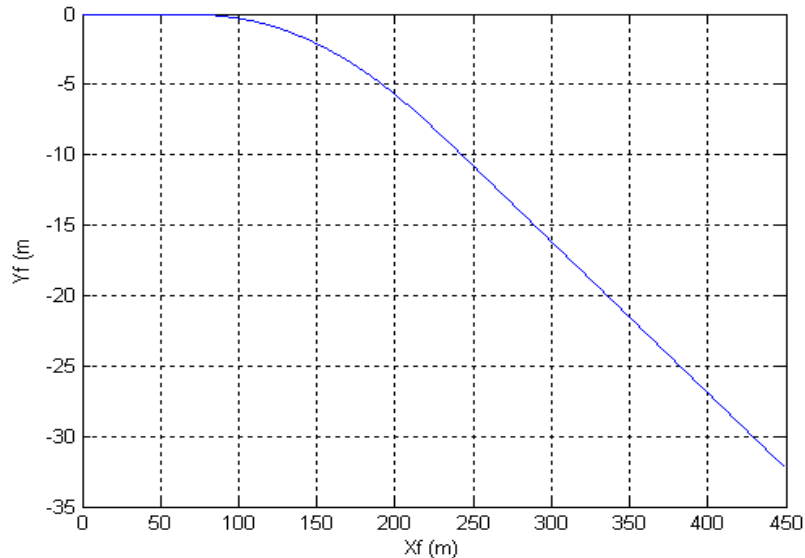


Figura 2.120 Tracciato ferroviario nel piano $x_f y_f$

Come al solito, per semplicità, verrà analizzato solamente il moto di alcuni corpi significativi quali la cassa, il carrello anteriore e le due sale di tale carrello (anteriore e posteriore). Più nel dettaglio verranno riportate le seguenti grandezze:

- lo spostamento laterale del centro di massa y^b , l'angolo di rollio ϕ^b e l'angolo di imbardata ψ^b di tutti i corpi analizzati ovvero della cassa, del carrello anteriore e delle due sale del carrello (anteriore e posteriore); tutte le grandezze saranno espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$
- le forze di contatto longitudinali F_x^b , laterali F_y^b e verticali F_z^b associate ai vari punti di contatto (espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$)
- gli spostamenti laterali y_b^c e y_r^c dei punti di contatto espressi rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$ ed in quello solidale $O_r x_r y_r z_r$
- le posizioni \underline{P}_b^{bC} e \underline{P}_r^{rC} dei punti di contatto sulla superficie del binario e su quella della ruota (espresi rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario $O_b x_b y_b z_b$ ed in quello solidale $O_r x_r y_r z_r$).

Nella simulazione descritta in questo paragrafo, al contrario delle precedenti, il modello Matlab/Simulink rileva un doppio punto di contatto sulla ruota sinistra della sala anteriore (ovvero sulla ruota di attacco). Il modello Simpack Rail rileva invece un solo punto di contatto per ciascuna ruota (nonostante tale modello sia in grado di considerare il contatto multiplo). Tale simulazione si rivela particolarmente interessante poiché si colloca, da un punto di vista cinematico, in una zona di transizione tra un regime di moto caratterizzato da un solo punto di contatto sulla ruota di attacco ed un secondo regime caratterizzato da due punti di contatto. La simulazione in questione è stata riproposta col preciso intento di descrivere una situazione limite che fosse capace di evidenziare delle differenze, a livello qualitativo, nel comportamento del modello Matlab/Simulink e del modello Simpack/Rail.

In Fig. 2.121, 2.122 e 2.123 sono raffigurate le variabili cinematiche relative alla cassa, mentre quelle relative al carrello sono rappresentate in Fig. 2.124, 2.125 e 2.126. Le variabili relative alle due sale (anteriore e posteriore) sono invece riportate in Fig. 2.127, 2.128, 2.129 e Fig. 2.130, 2.131, 2.132. In blu sono state raffigurate le variabili calcolate dal modello Matlab/Simulink mentre in rosso quelle calcolate dal modello Simpack Rail.

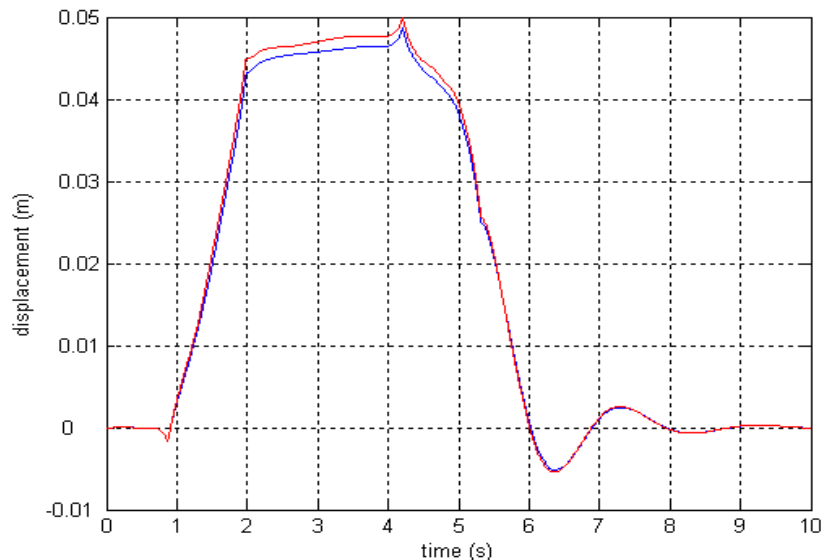


Figura 2.121 *Cassa: spostamento laterale del centro di massa y^b*

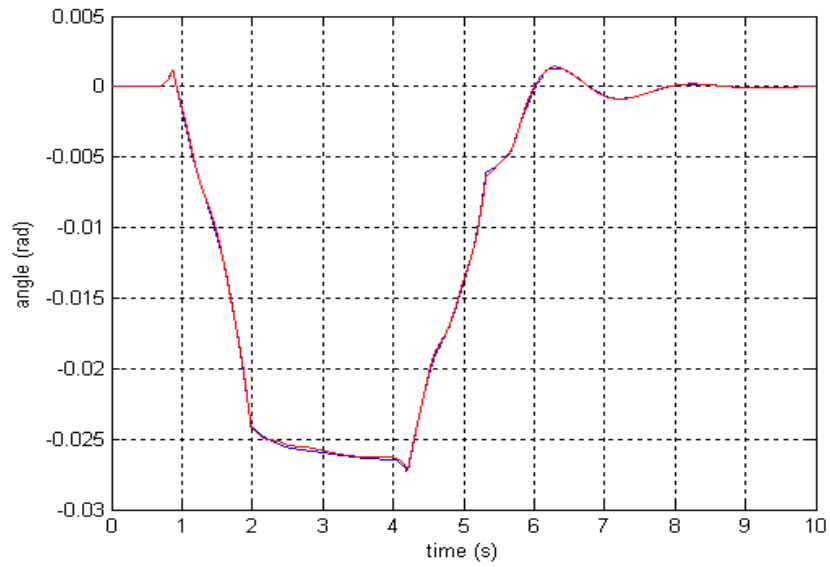


Figura 2.122 Cassa: angolo di rollio φ^b

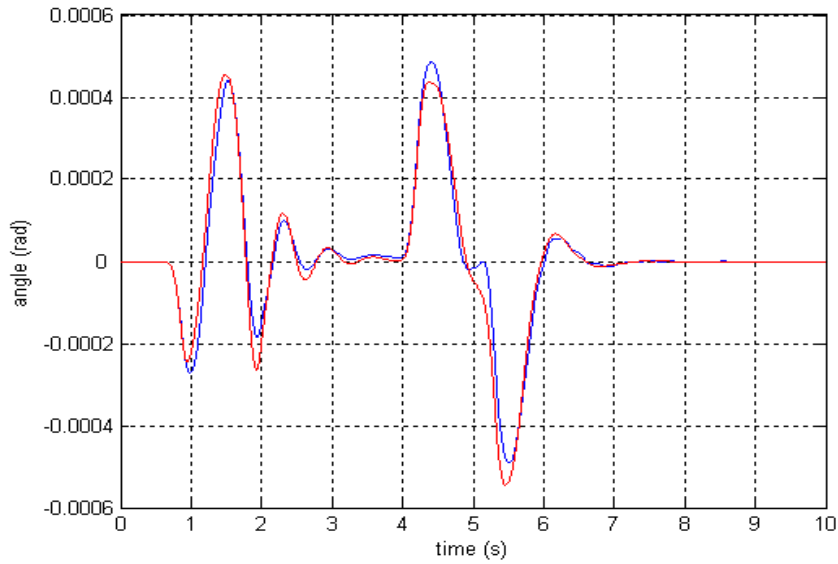


Figura 2.123 Cassa: angolo di imbarcata ψ^b

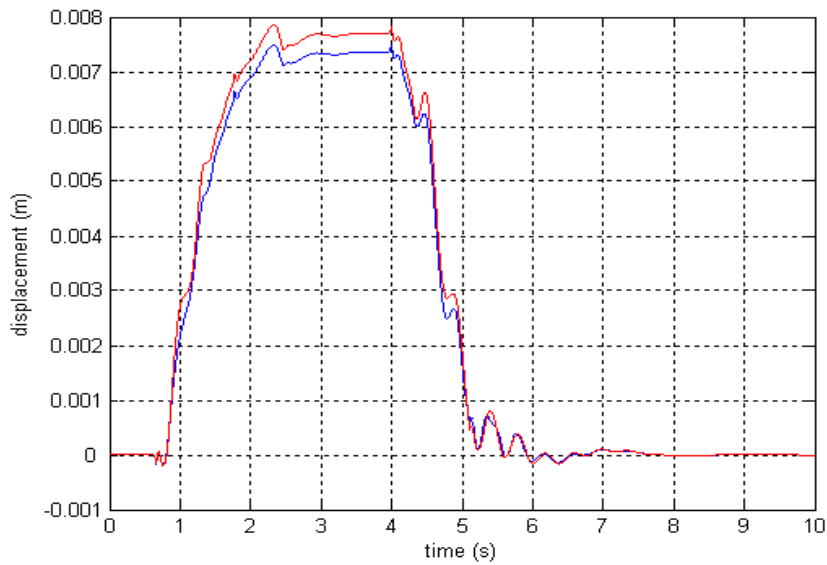


Figura 2.124 Carrello anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

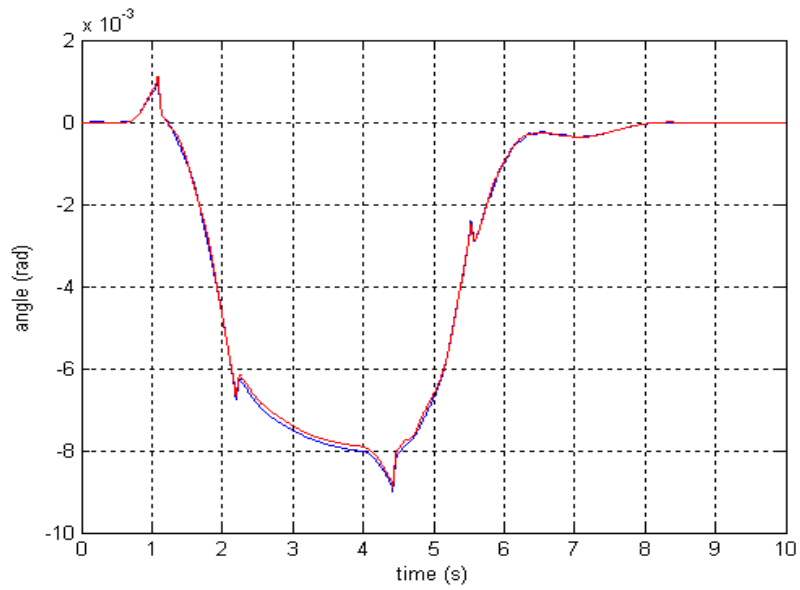


Figura 2.125 Carrello anteriore: angolo di rollio φ^b

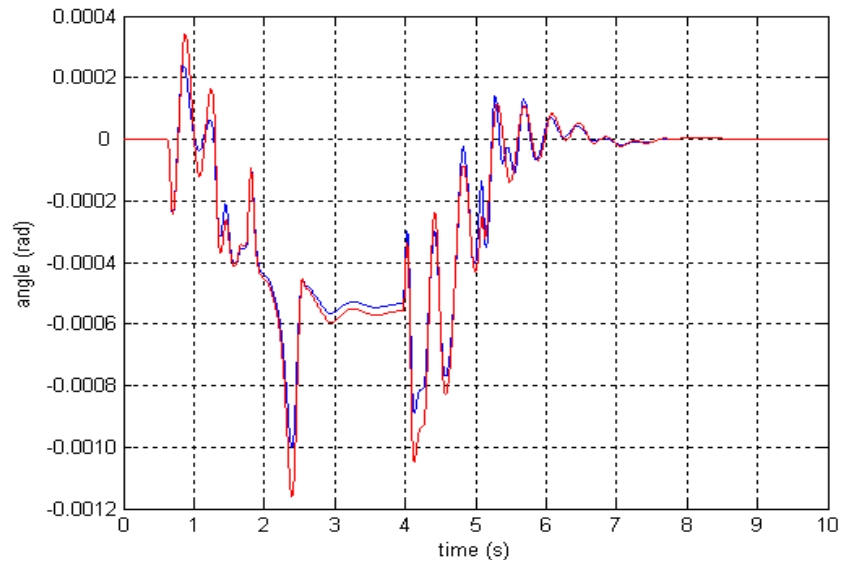


Figura 2.126 Carrello anteriore: angolo di imbardata ψ^b

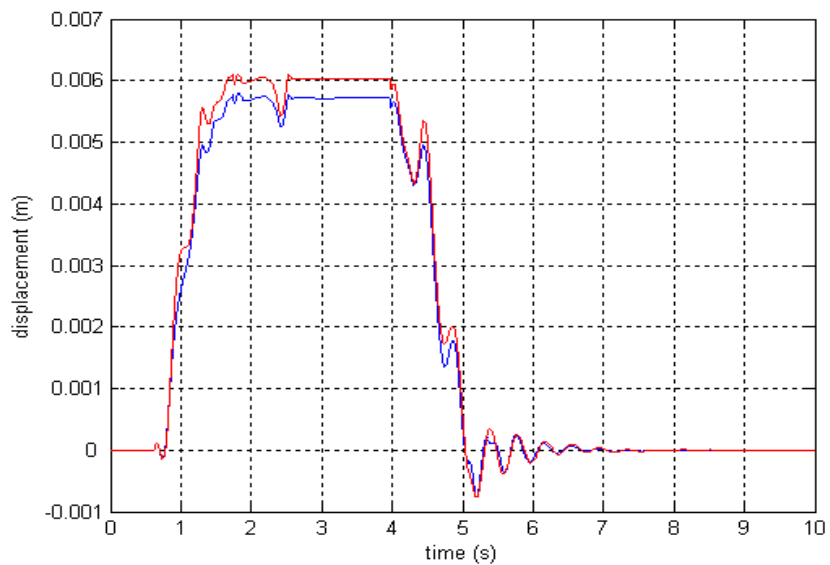


Figura 2.127 Sala anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

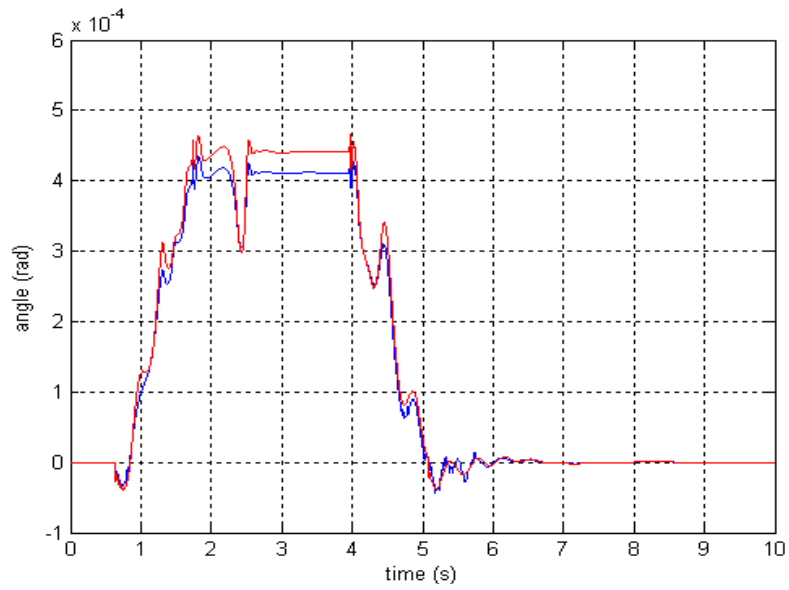


Figura 2.128 Sala anteriore: angolo di rollio φ^b

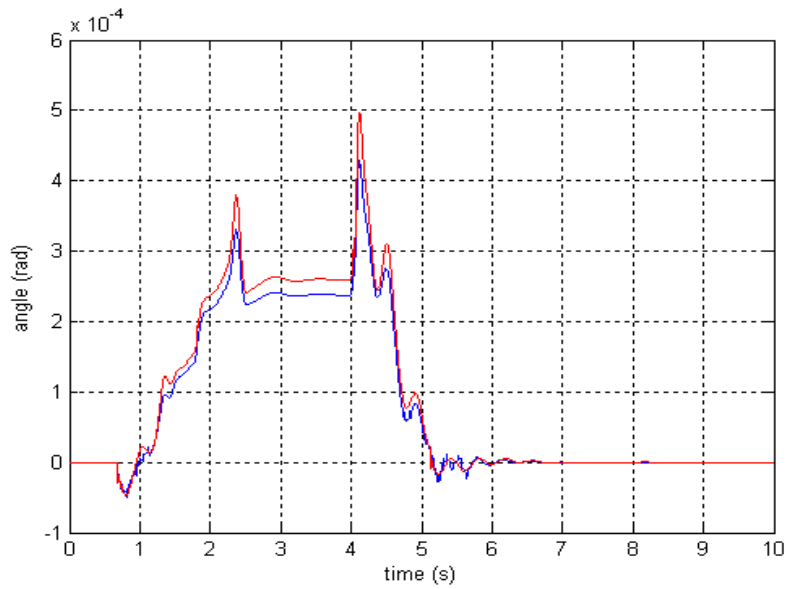


Figura 2.129 Sala anteriore: angolo di imbarcata ψ^b

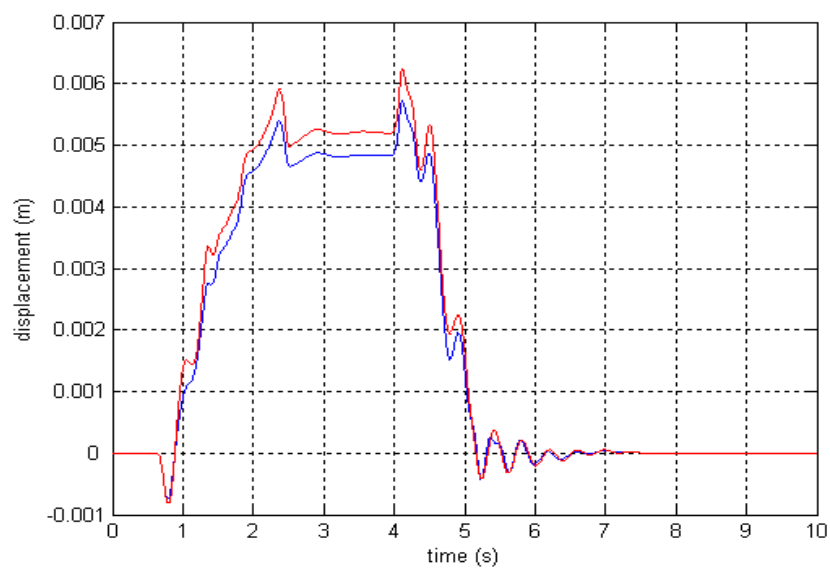


Figura 2.130 Sala posteriore: spostamento laterale del centro di massa y^b

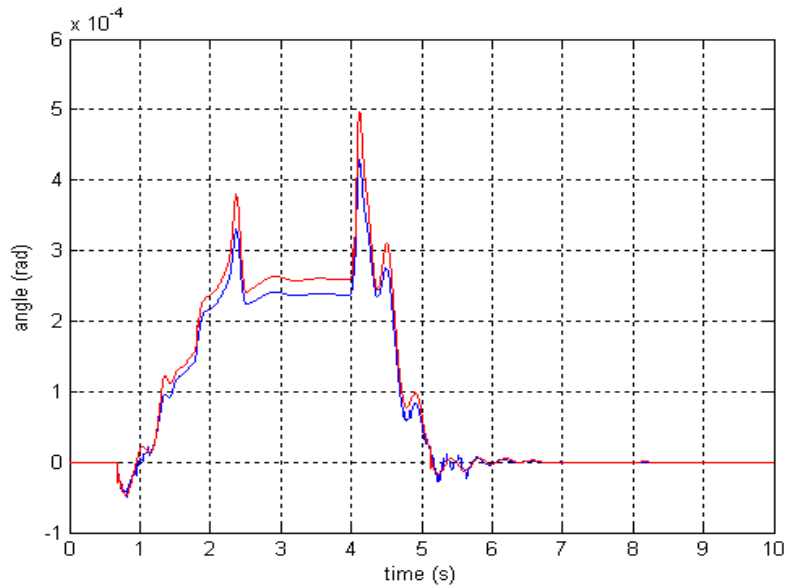


Figura 2.131 Sala posteriore: angolo di rollio φ^b

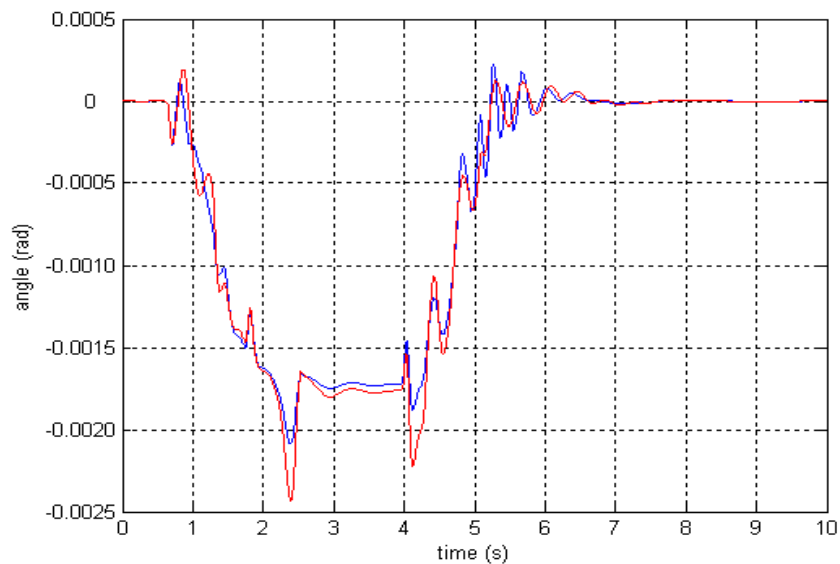


Figura 2.132 Sala posteriore: angolo di imbardata ψ^b

L'analisi dei risultati ottenuti mostra, in accordo con le altre simulazioni, un buon accordo tra le grandezze cinematiche calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail sia a livello di cassa e carrello che a livello delle sale.

Anche in questo caso sono state riportate le forze di contatto associate ai vari punti di contatto (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail. In Fig. 2.133, 2.134, 2.135 e Fig. 2.136, 2.137, 2.138 sono raffigurate le forze di contatto longitudinali, laterali e verticali agenti rispettivamente

sulla ruota sinistra e sulla ruota destra della sala anteriore (per quanto riguarda la ruota sinistra sono state raffigurate le forze risultanti). In Fig. 2.139, 2.140, 2.141 e Fig. 2.142, 2.143, 2.144 sono invece riportate le singole forze agenti sui due punti di contatto presenti sulla ruota sinistra (rilevati, come detto in precedenza, dal solo modello Matlab/Simulink). In Fig. 2.145, 2.146, 2.147 e Fig. 2.148, 2.149, 2.150 sono rappresentate invece le analoghe grandezze relative alla sala posteriore.

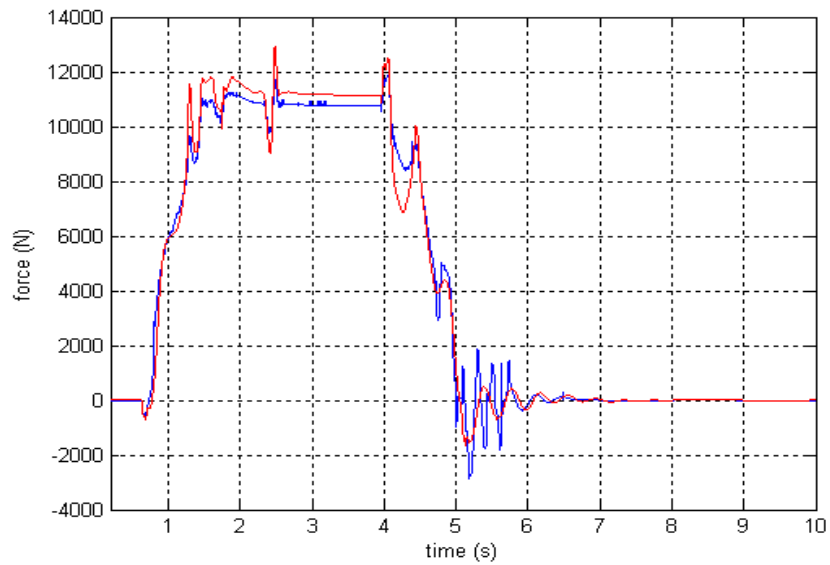


Figura 2.133 Sala anteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b (risultante)

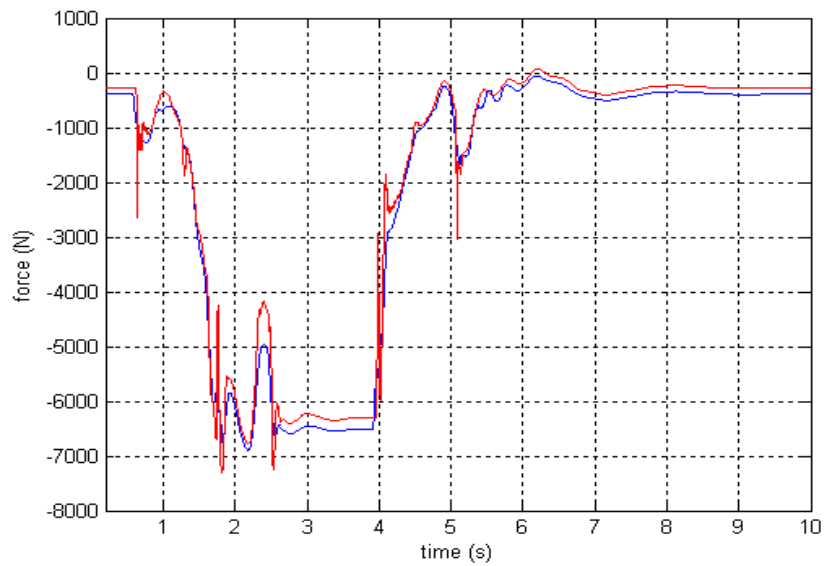


Figura 2.134 Sala anteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b (risultante)

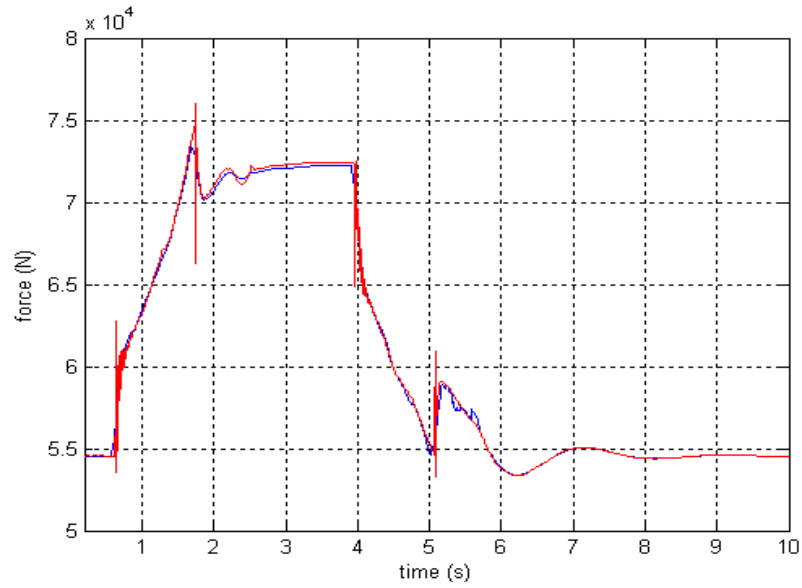


Figura 2.135 Sala anteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b (risultante)

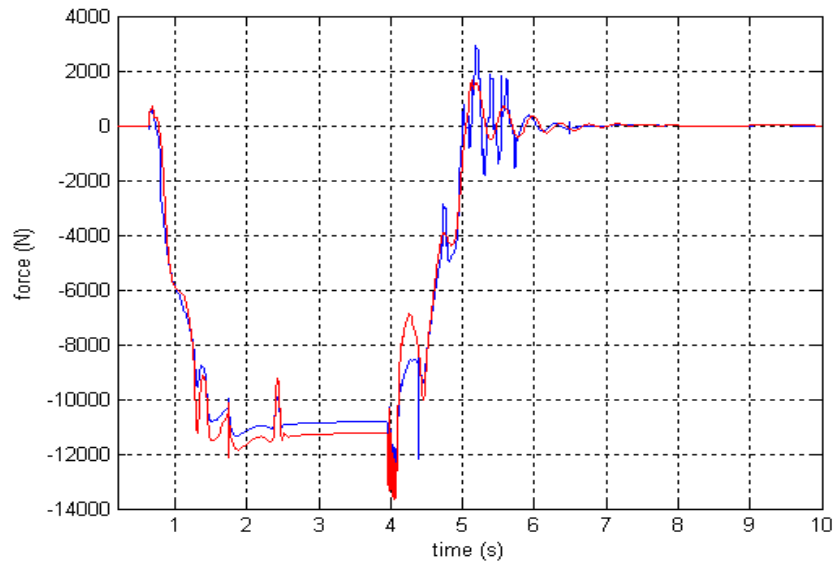


Figura 2.136 Sala anteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^b

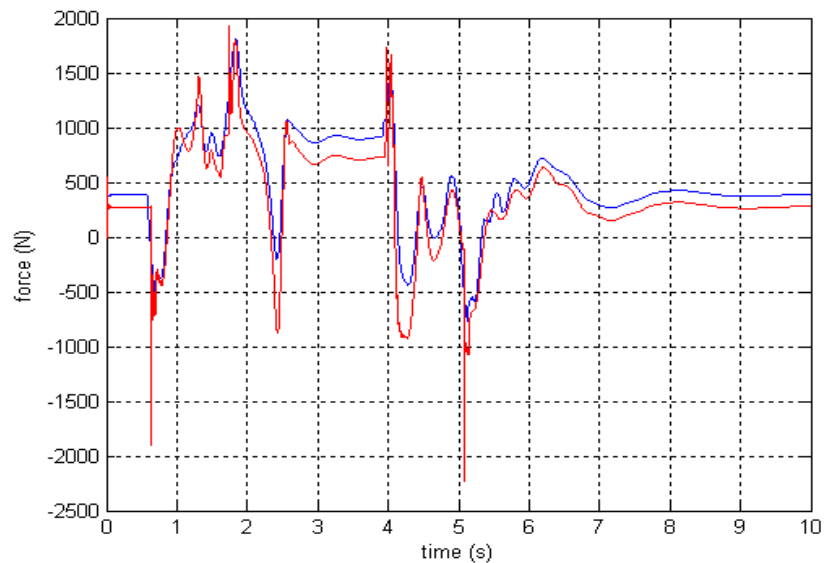


Figura 2.137 Sala anteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^b

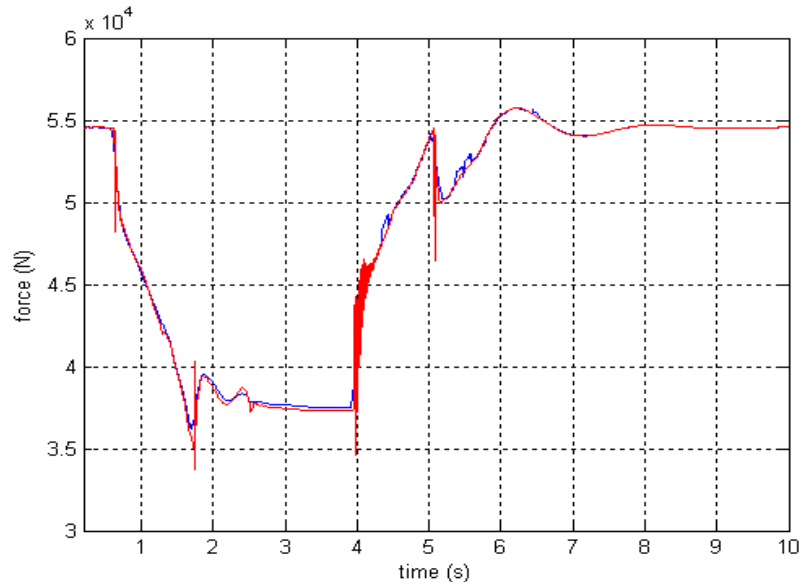


Figura 2.138 Sala anteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^b

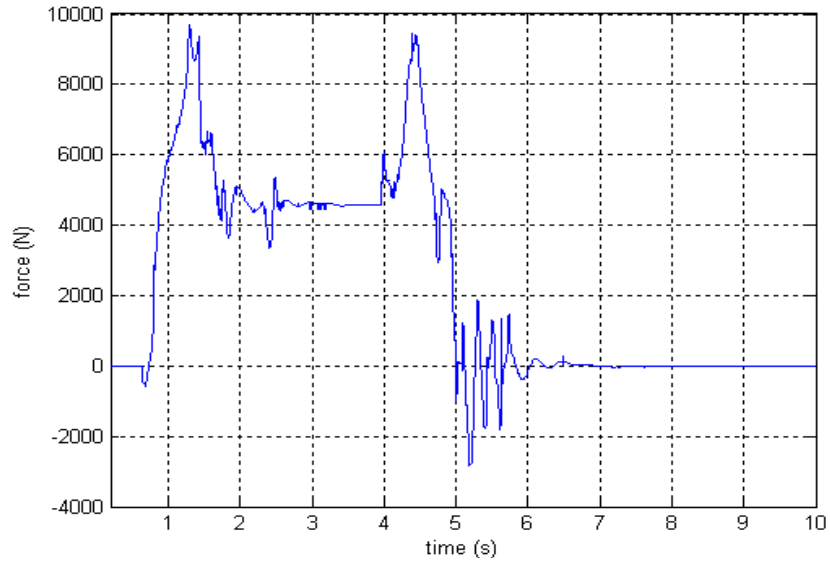


Figura 2.139 Sala anteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b (primo PDC)

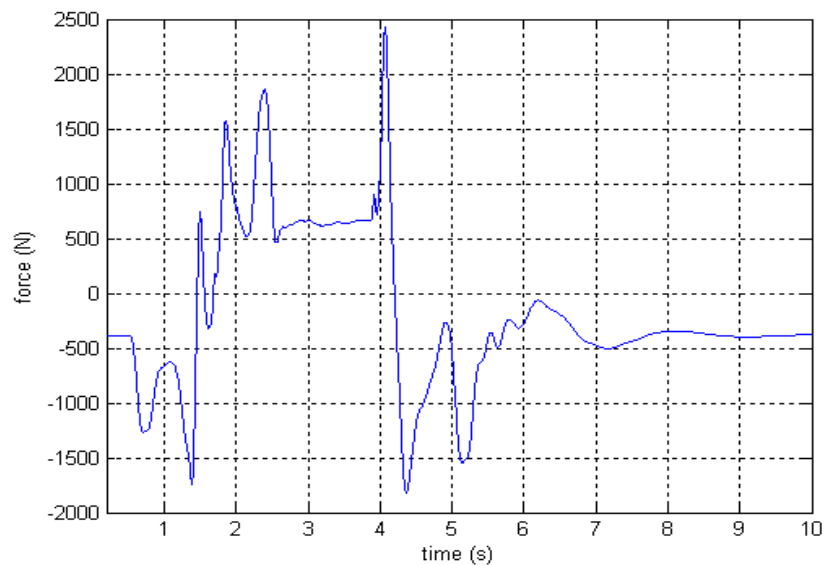


Figura 2.140 Sala anteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b (primo PDC)

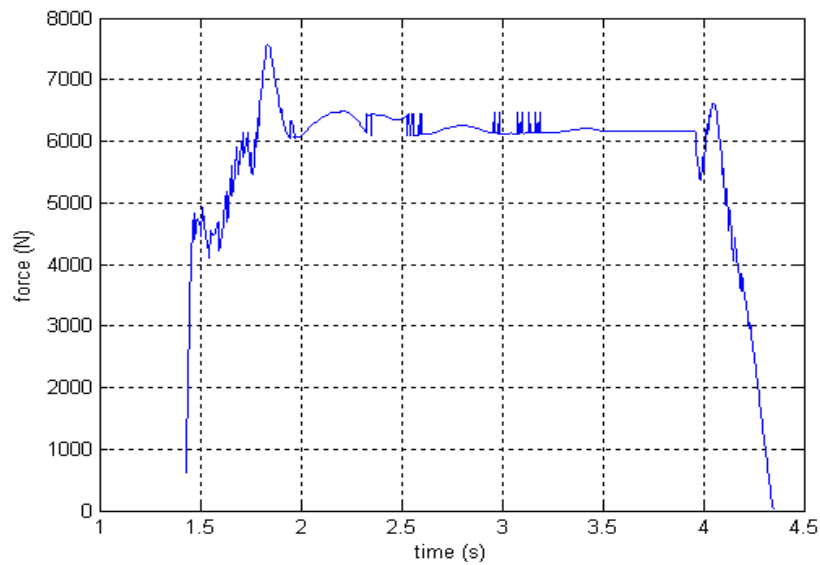
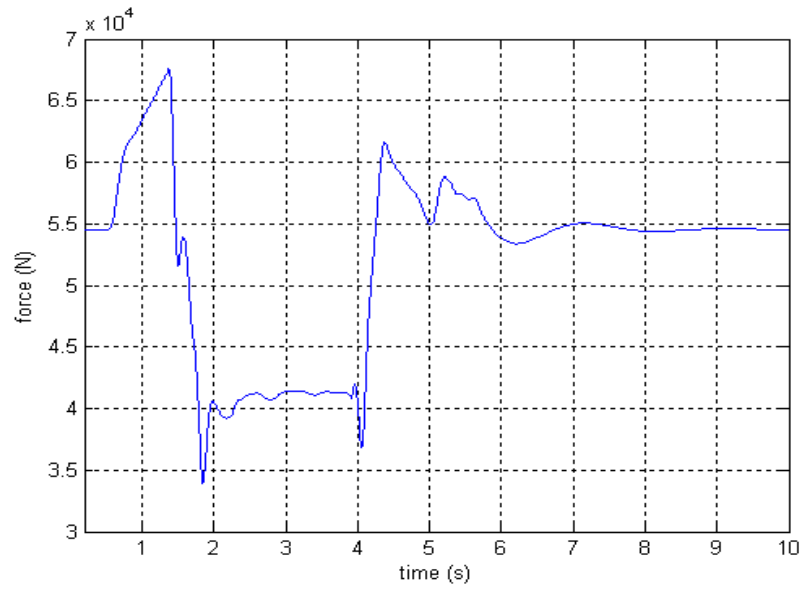


Figura 2.142 Sala anteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b (secondo PDC)

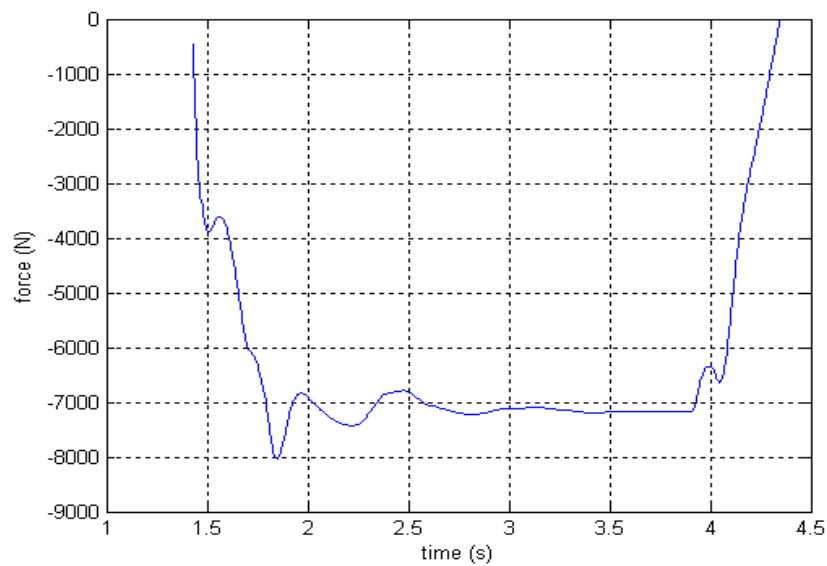


Figura 2.143 Sala anteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b (secondo PDC)

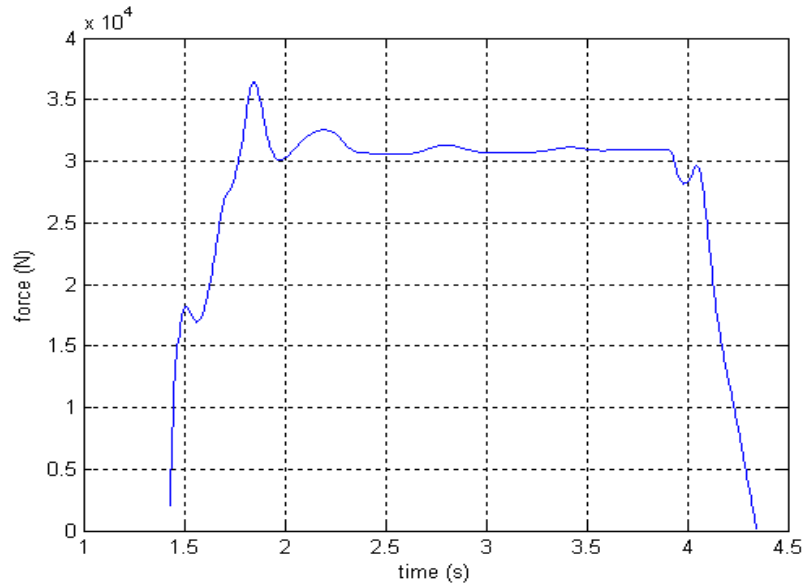


Figura 2.144 Sala anteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b (secondo PDC)

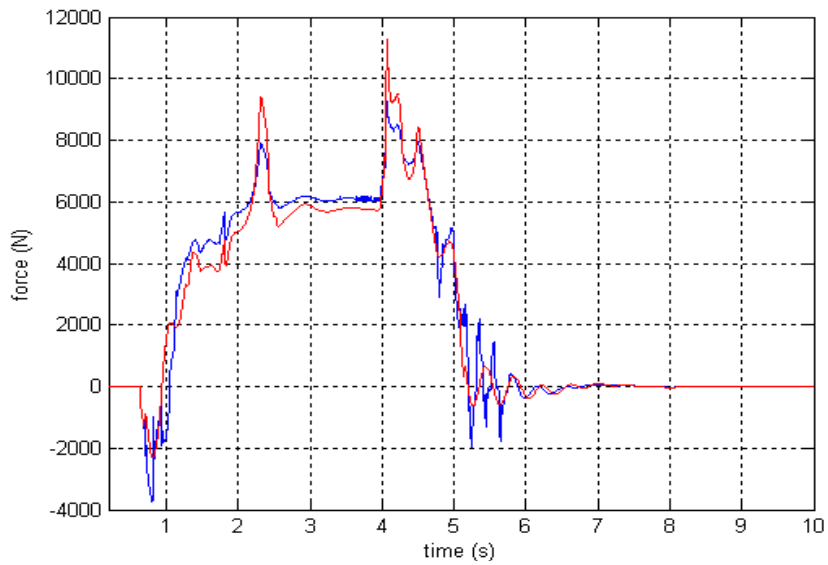


Figura 2.145 Sala posteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^b

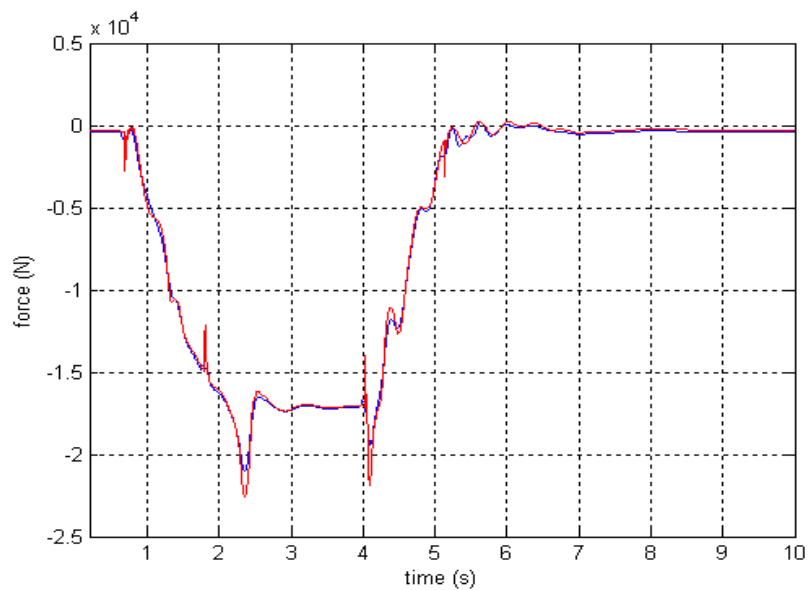


Figura 2.146 Sala posteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^b

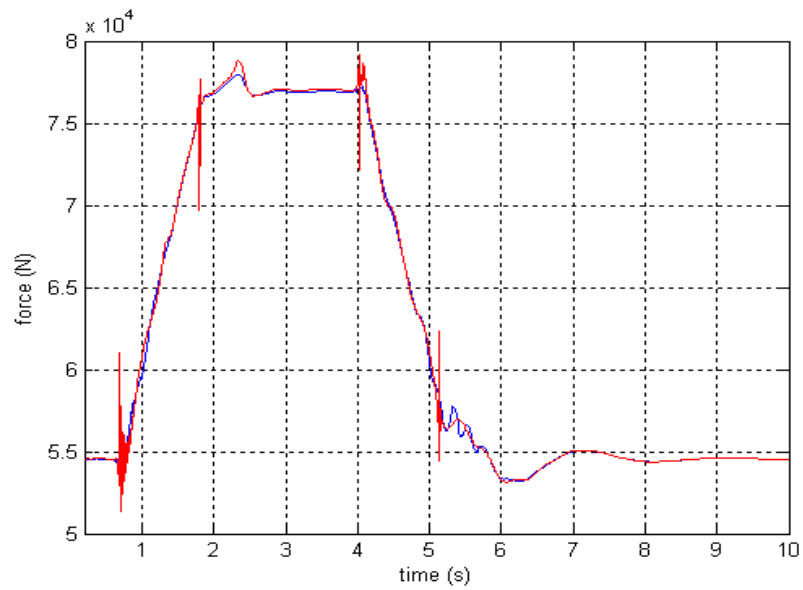


Figura 2.147 Sala posteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^b

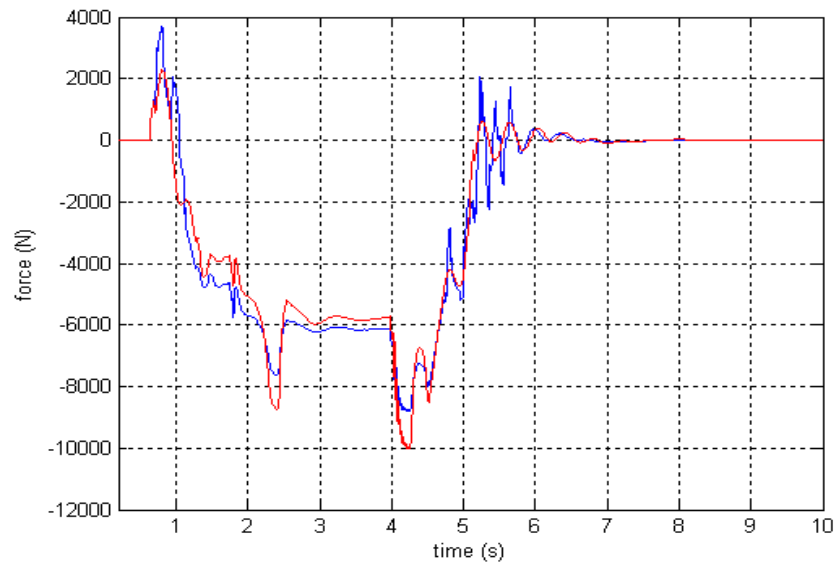


Figura 2.148 Sala posteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^b

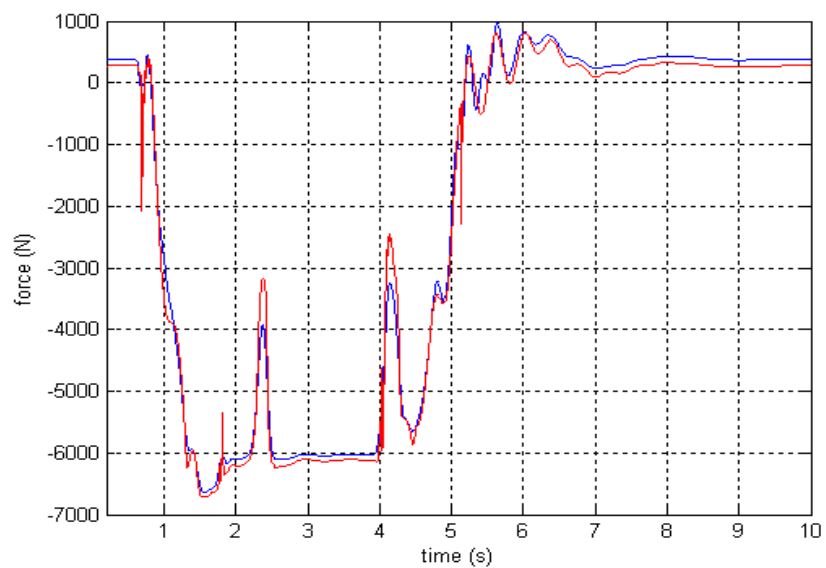


Figura 2.149 Sala posteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^b

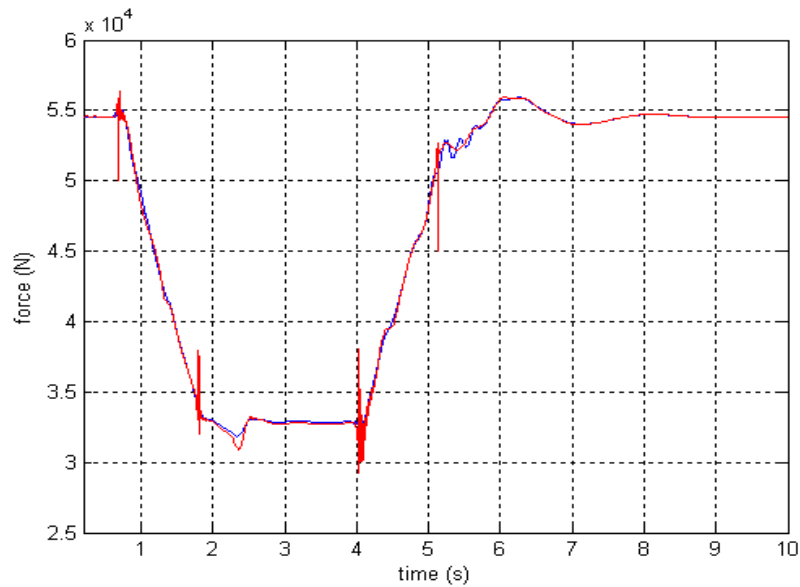


Figura 2.150 Sala posteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^b

Il confronto tra i risultati ottenuti mostra, per quanto riguarda le forze di contatto risultanti, un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail. In particolare il modello Matlab/Simulink evidenzia una maggiore stabilità specialmente in presenza di dinamiche particolarmente critiche come urti e discontinuità varie.

I due modelli differiscono invece nella valutazione dei punti di contatto. Il Matlab/Simulink rileva un doppio punto di contatto sulla ruota sinistra della sala anteriore (ovvero sulla ruota di attacco) mentre il modello Simpack Rail rileva invece un solo punto di contatto per ciascuna ruota (nonostante tale modello sia in grado di considerare il contatto multiplo). Nel caso in esame, la presenza di un doppio punto di contatto non influisce in modo sensibile sulle forze di contatto risultanti agenti sulla ruota, ma modifica radicalmente la distribuzione dei carichi sulla ruota stessa.

Per quanto concerne i punti di contatto, sono stati dapprima riportati gli spostamenti laterali di tali punti (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail). In Fig. 2.151 e 2.152 sono stati raffigurati gli spostamenti relativi ai punti di contatto presenti sulla sala anteriore mentre in Fig. 2.153 e 2.154 quelli relativi ai punti presenti sulla sala posteriore (espressi nel sistema ausiliario). In Fig. 2.155, 2.156, 2.157 e 2.158 sono state invece rappresentate le analoghe grandezze espresse nel sistema solidale.

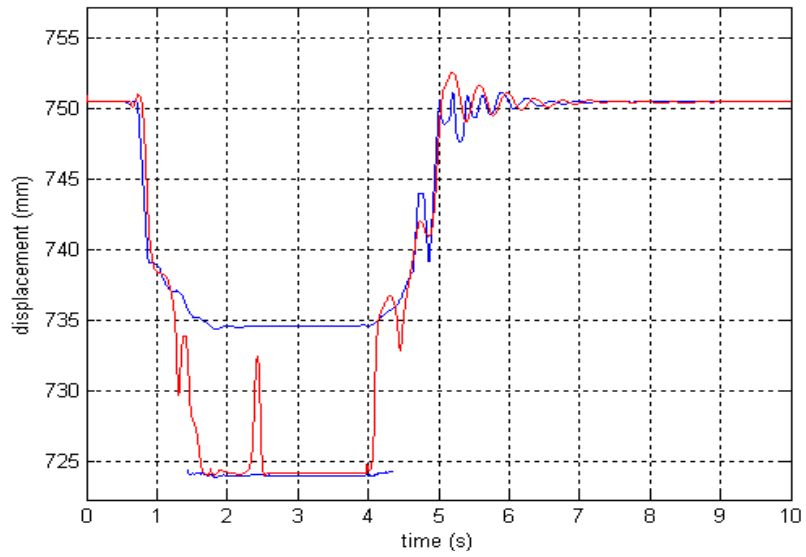


Figura 2.151 Sala anteriore, ruota sinistra: spostamento dei punti di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

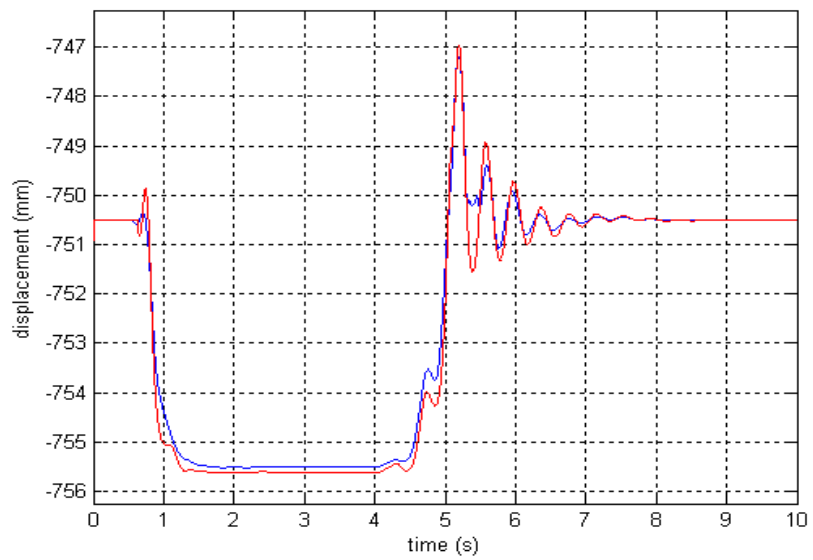


Figura 2.152 Sala anteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

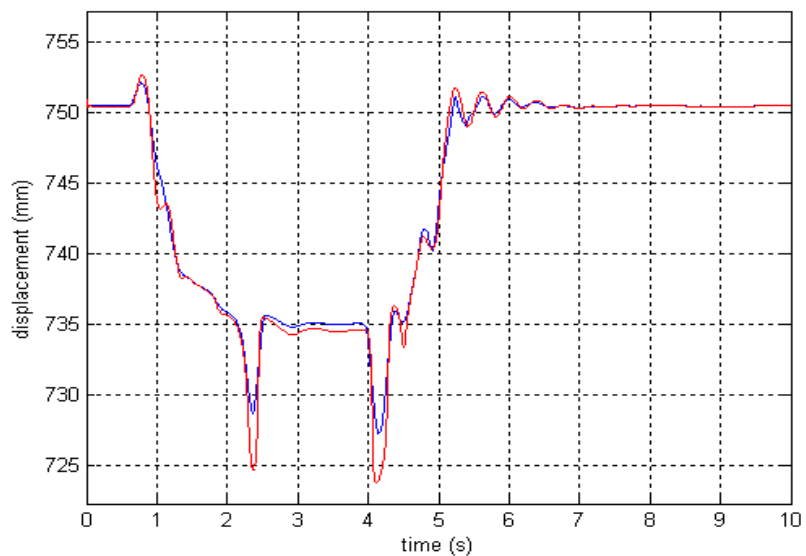


Figura 2.153 Sala posteriore, ruota sinistra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

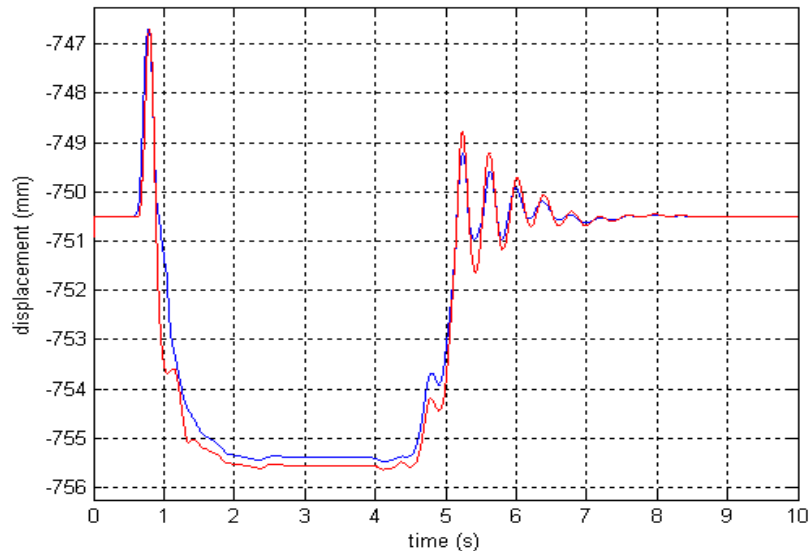


Figura 2.154 Sala posteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema ausiliario y_b^C

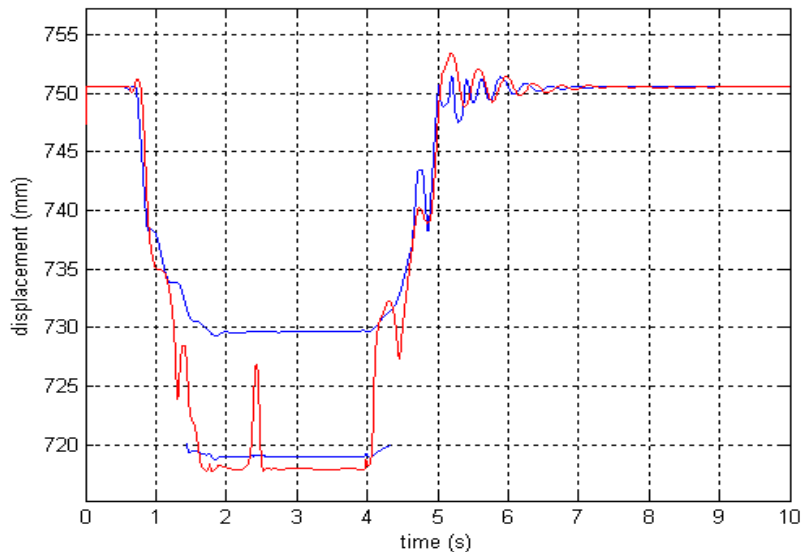


Figura 2.155 Sala anteriore, ruota sinistra: spostamento dei punti di contatto nel sistema solidale y_r^C

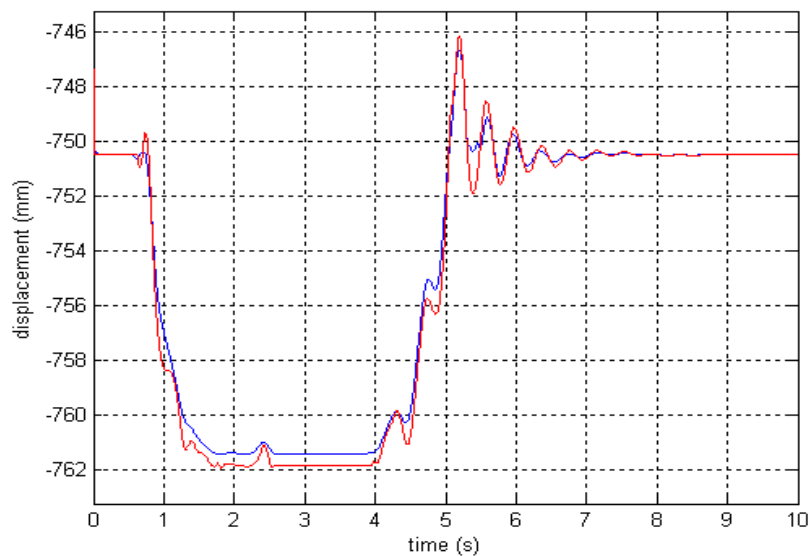


Figura 2.156 Sala anteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_r^C

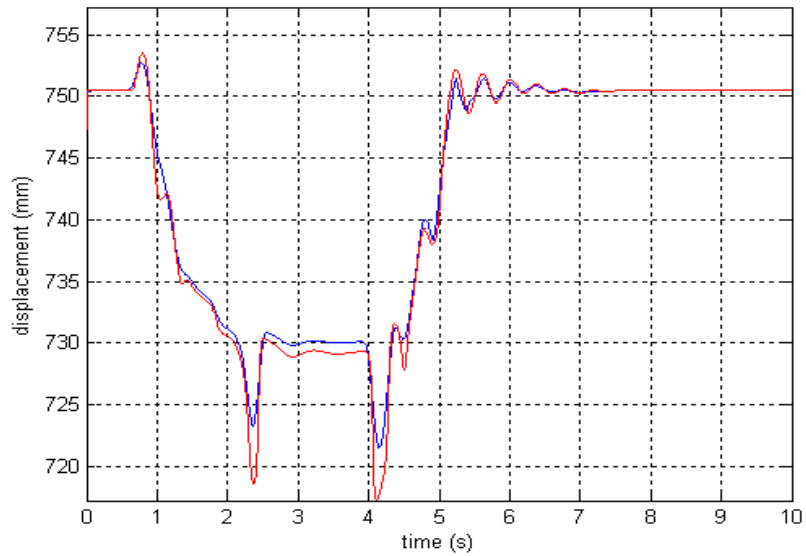


Figura 2.157 Sala posteriore, ruota sinistra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_r^C

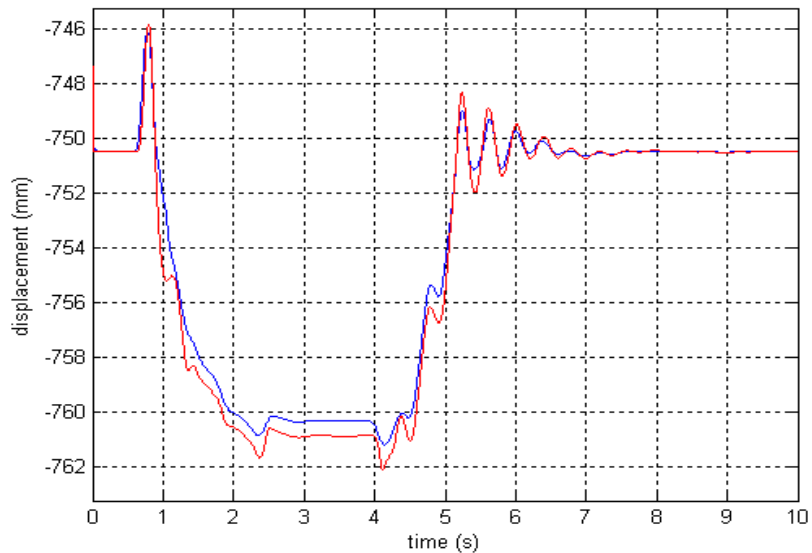


Figura 2.158 Sala posteriore, ruota destra: spostamento del punto di contatto nel sistema solidale y_b^C

Successivamente sono state riportate le posizioni dei punti di contatto sulla superficie del binario e su quella della sala (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in nero quelle del modello Simpack Rail). Per maggiore chiarezza le traiettorie dei punti di contatto sono state tracciate su superfici cilindriche ottenute a partire dai profili di sala e binario (profili generatori) e lunghe quanto la distanza percorsa dal veicolo durante la simulazione. In Fig. 2.159 e 2.160 sono stati raffigurati i punti di contatto presenti sulla sala anteriore mentre in Fig. 2.161 e 2.162 quelli presenti sulla sala posteriore (tracciati sulla superficie del binario ed espressi nel sistema ausiliario). In Fig. 2.163, 2.164, 2.165 e 2.166 sono state invece rappresentate

le analoghe grandezze tracciate sulla superficie della sala ed espresse nel sistema solidale.

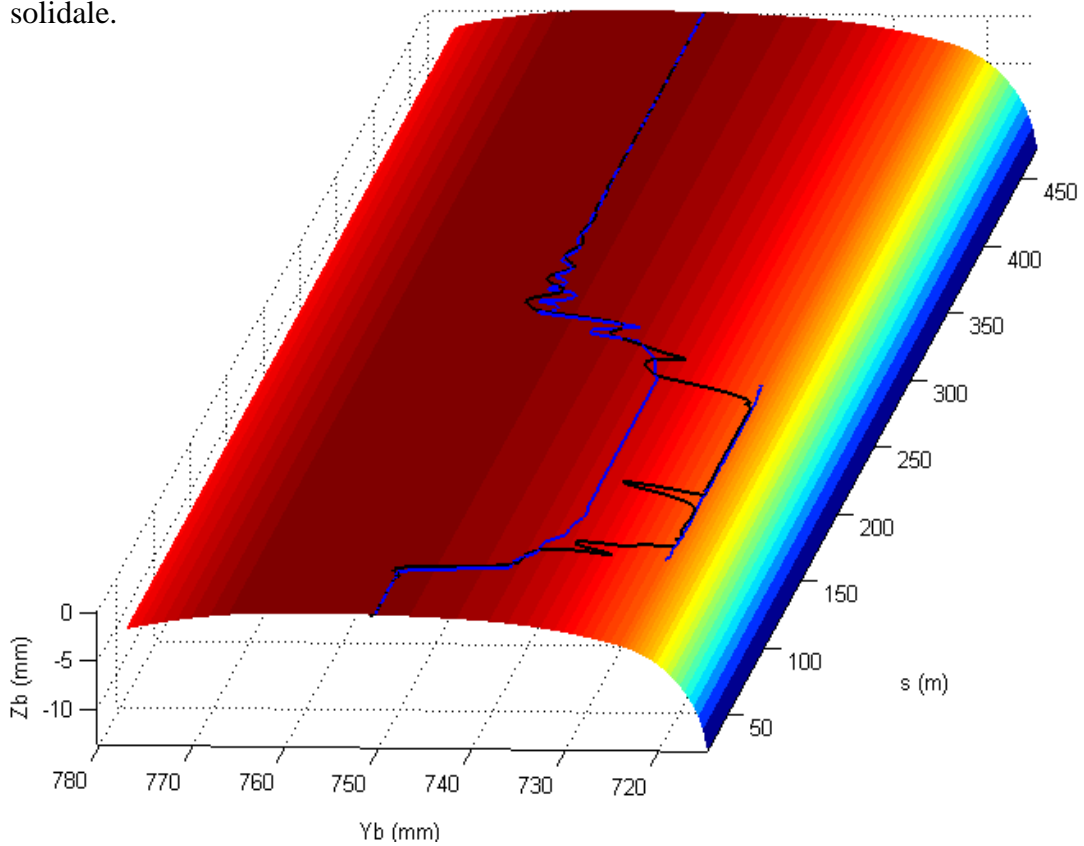


Figura 2.159 Sala anteriore: posizione dei punti di contatto sulla rotaia di sinistra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

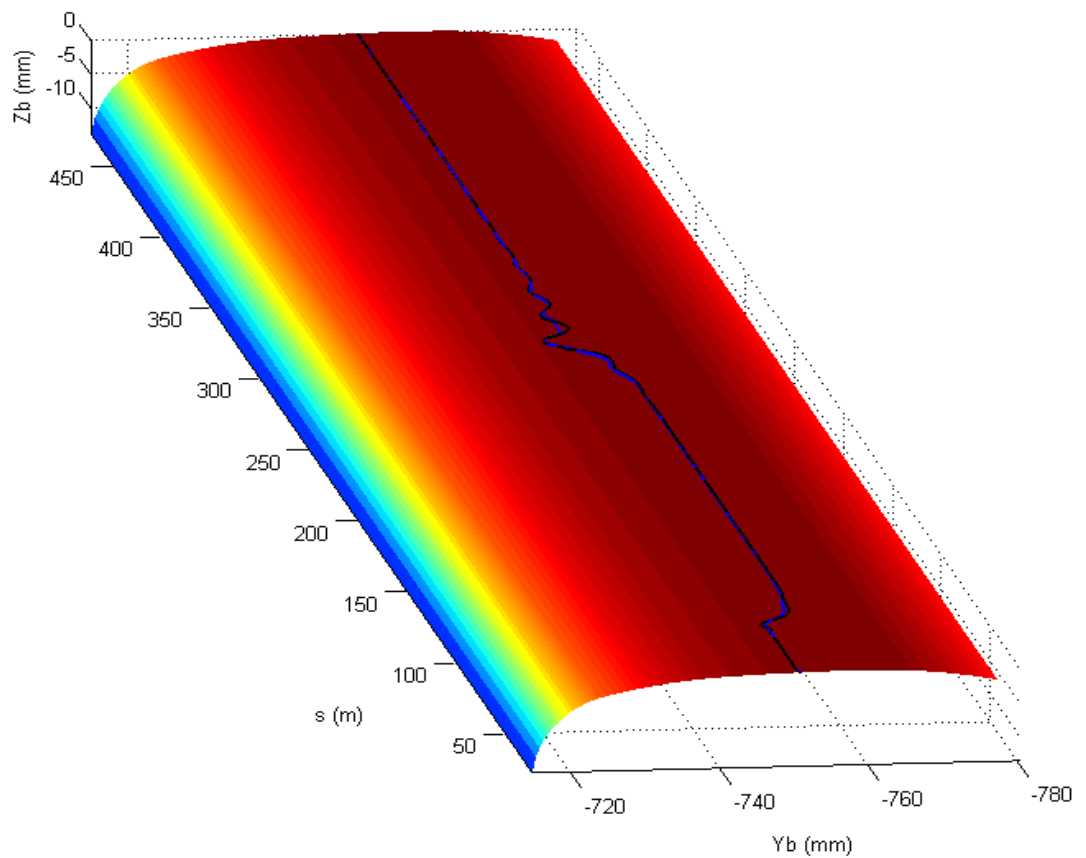


Figura 2.160 Sala anteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di destra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

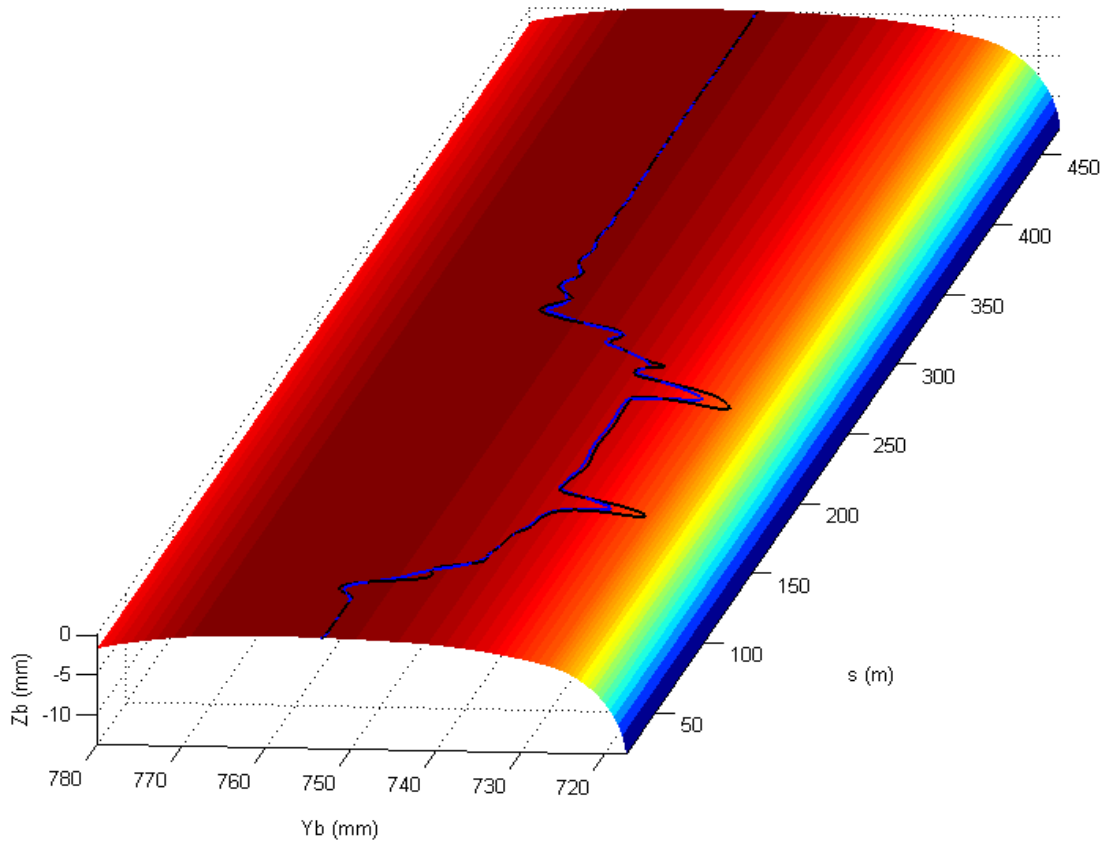


Figura 2.161 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di sinistra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

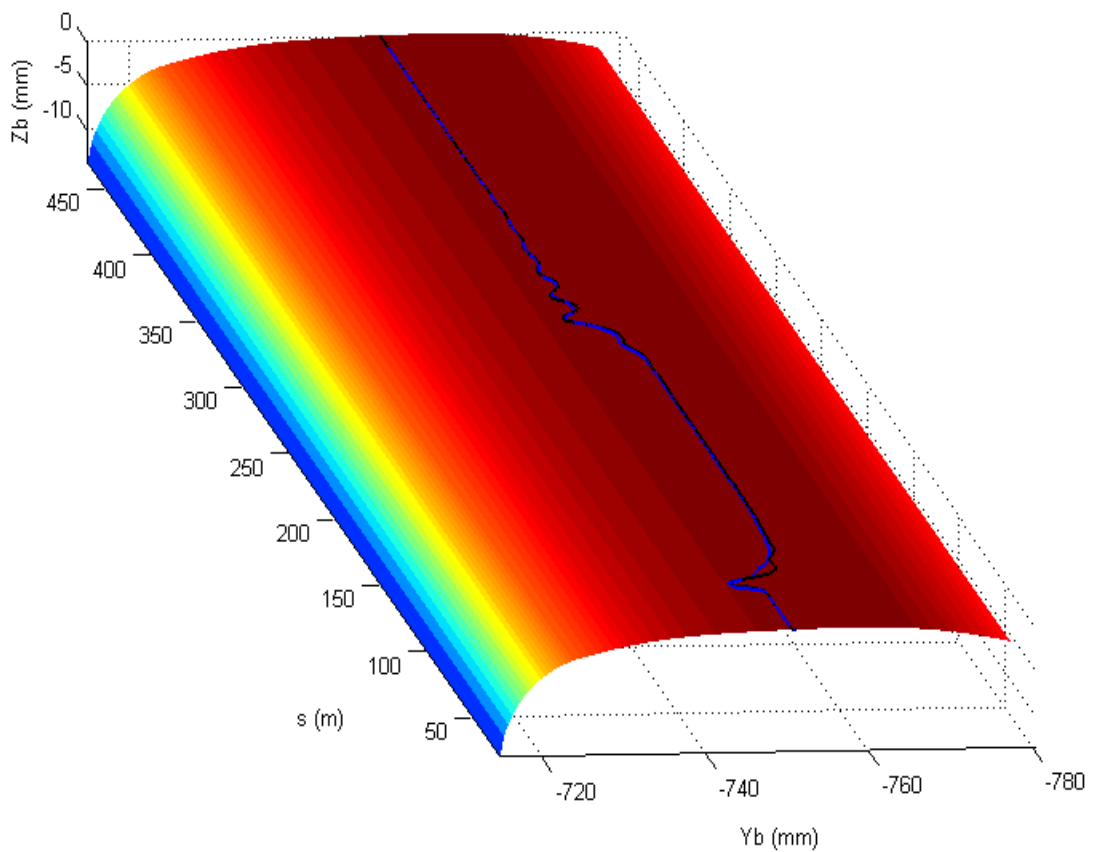


Figura 2.162 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla rotaia di destra \underline{P}_b^{bC} (sistema ausiliario)

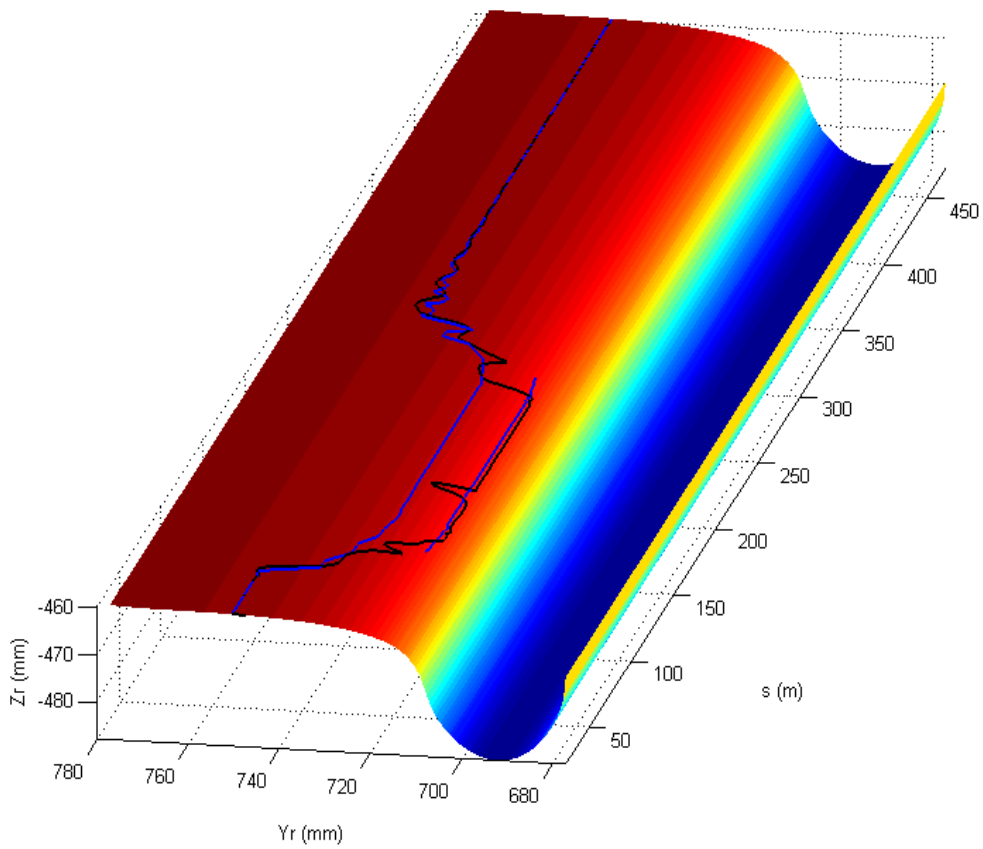


Figura 2.163 Sala anteriore: posizione dei punti di contatto sulla ruota sinistra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

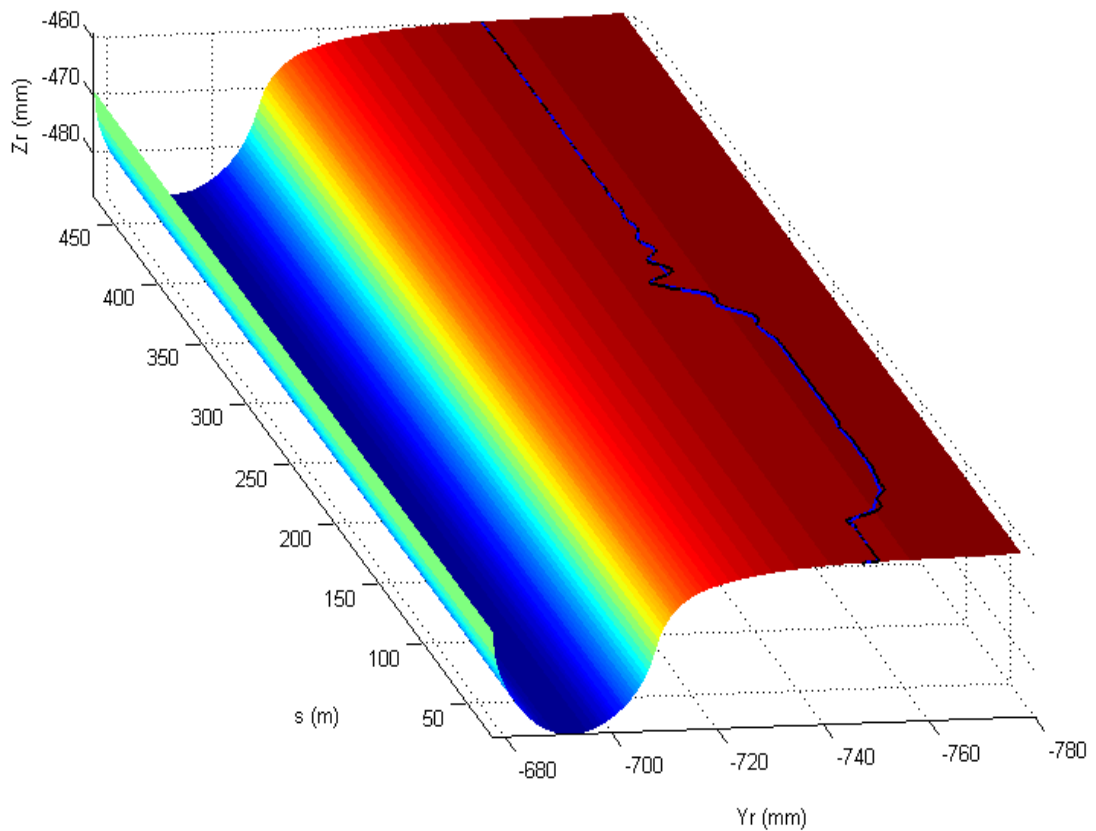


Figura 2.164 Sala anteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota destra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

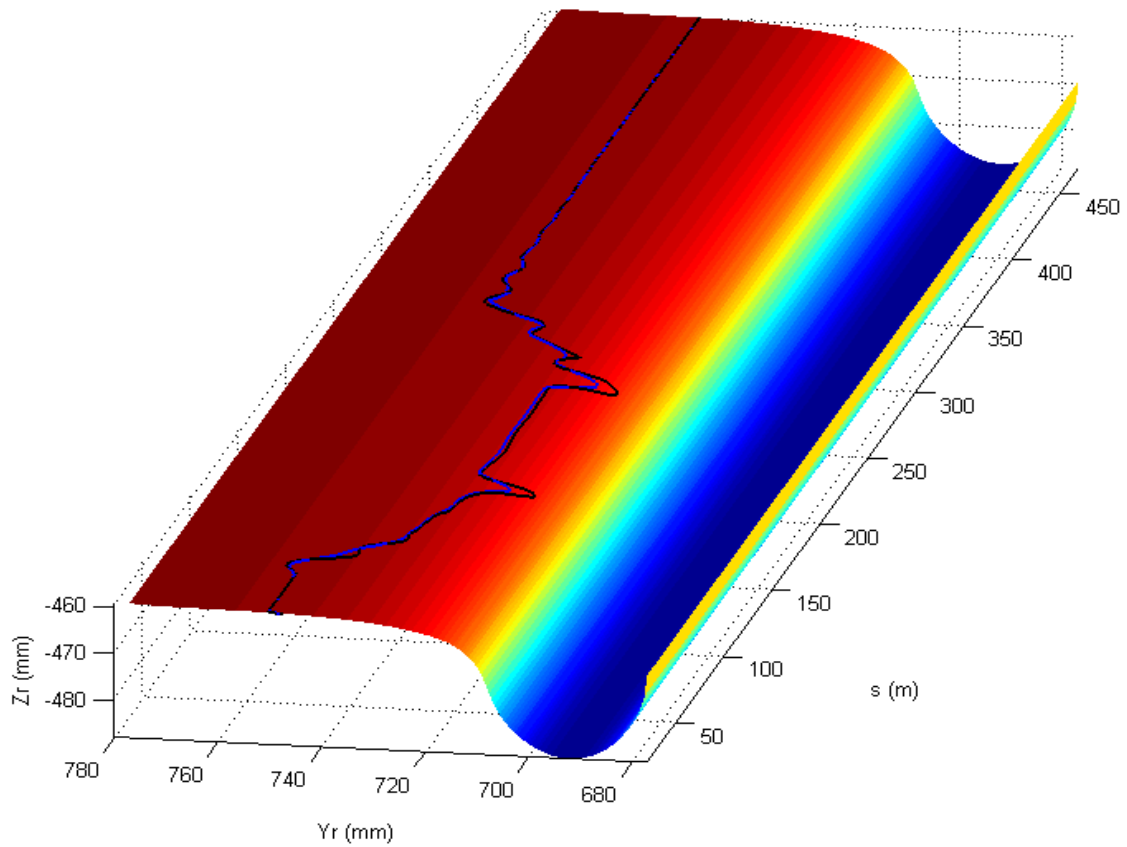


Figura 2.165 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota sinistra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

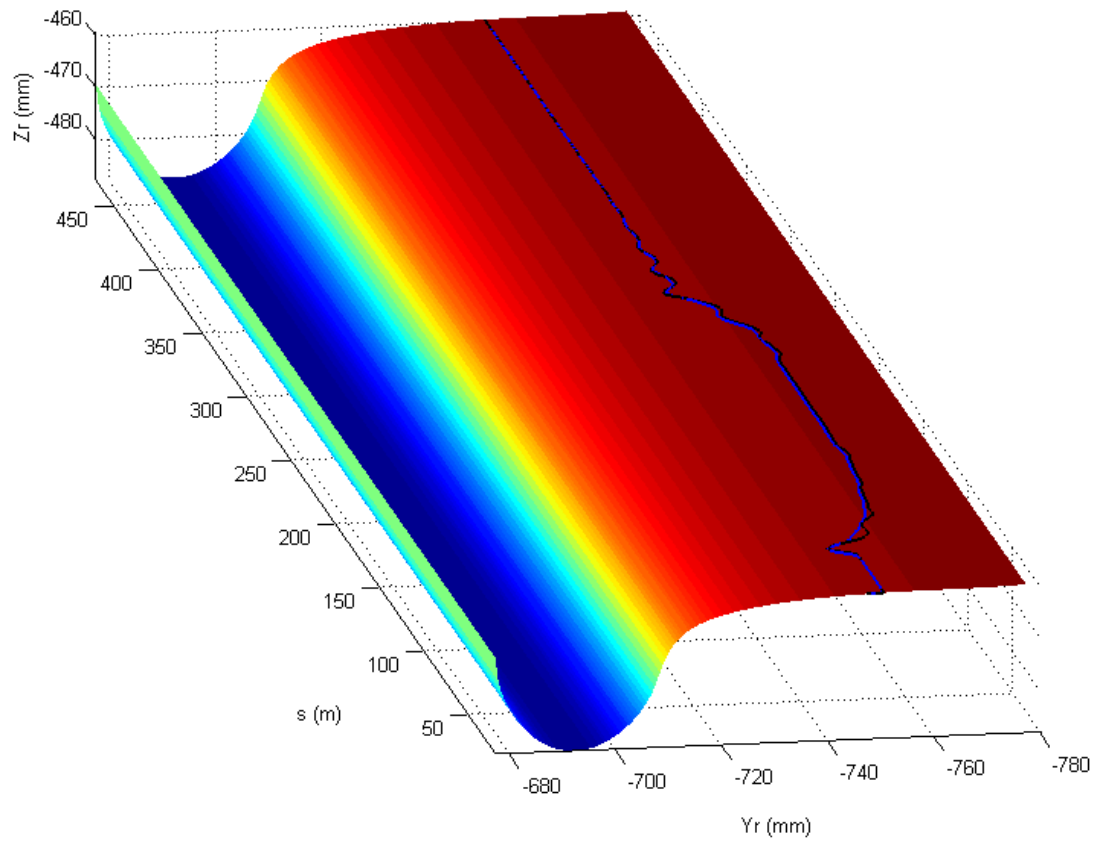


Figura 2.166 Sala posteriore: posizione del punto di contatto sulla ruota destra \underline{P}_r^{rC} (sistema solidale)

Come già detto in precedenza, i due modelli differiscono nella valutazione dei punti di contatto. Il Matlab/Simulink rileva un doppio punto di contatto sulla ruota sinistra della sala anteriore (ovvero sulla ruota di attacco); il modello Simpack Rail rileva invece un solo punto di contatto per ciascuna ruota (nonostante tale modello sia in grado di considerare il contatto multiplo). Più in particolare, mentre il modello Matlab/Simulink individua, la presenza di due punti di contatto ben precisi, il modello Simpack Rail individua un unico punto di contatto che tende ad oscillare tra le posizioni dei punti rilevati dal modello Matlab/Simulink. Tale comportamento si verifica proprio a causa della criticità della simulazione considerata che descrive una situazione limite tra due regimi di moto differenti tra loro. Per quanto riguarda infine la posizione dei punti di contatto sulle altre ruote è presente un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail.

In conclusione si può osservare come il basso rumore numerico e la stabilità delle nuove procedure (anche in presenza di contatto multiplo) evidenzino l'affidabilità e l'accuratezza del modello Matlab/Simulink ed in particolare dei nuovi modelli di contatto.

2.6.5 Performance del modello complessivo

L'efficienza numerica del modello complessivo è stata analizzata confrontando tra loro le performance del modello Matlab/Simulink e del modello Simpack Rail impiegati nelle medesime condizioni operative. Per entrambi i modelli è stato infatti utilizzato un integratore esplicito a passo fisso del quinto ordine (ODE5, Dormand – Prince, passo $h = 5 \cdot 10^{-4}$ s). Tutte le simulazioni sono state effettuate su una macchina dotata di un processore Intel Core 2 Duo da 2.2 GHz e 4GB di RAM. [B23] [B24] [B25] [B26] [B27]

In Tab. 2.23 sono riportate le prestazioni medie del modello Matlab/Simulink (equipaggiato sia col metodo della DISTANZA che col metodo della DIFFERENZA) ottenute considerando tutte le simulazioni effettuate durante la campagna di prove descritta all'inizio del paragrafo 2.6. Più in particolare T_g rappresenta il tempo medio di integrazione mentre T_c è il tempo medio assorbito da tutti gli algoritmi per la determinazione dei punti di contatto (in questo caso quattro, uno per ogni sala).

MODELLO	Tempo medio di integrazione T_g	Tempo medio (modello di contatto) T_c
Matlab/Simulink (metodo della DISTANZA)	8.3 ms	4.5 ms (54 %)
Matlab/Simulink (metodo della DIFFERENZA)	6.2 ms	2.5 ms (40 %)

Tabella 2.23 *Tempi medi per il modello Matlab/Simulink*

L'analisi dei risultati mostra, in accordo con quanto detto nel paragrafo 2.3.1.3, come il metodo della DIFFERENZA si riveli più efficiente del metodo della DISTANZA; il metodo della DIFFERENZA assorbe inoltre un percentuale inferiore del tempo medio di integrazione rispetto al metodo della DISTANZA.

In Tab. 2.24 ed in Fig. 2.167 vengono invece confrontati i tempi medi di integrazione relativi al modello Matlab/Simulink (equipaggiato sia col metodo della DISTANZA che col metodo della DIFFERENZA) ed al modello Simpack Rail.

MODELLO	Tempo medio di integrazione T_g
Simpack Rail	14.2 ms
Matlab/Simulink (metodo della DISTANZA)	8.3 ms
Matlab/Simulink (metodo della DIFFERENZA)	6.2 ms

Tabella 2.24 *Confronto tra i tempi medi di integrazione*

Il modello Matlab/Simulink (a prescindere dall'algoritmo utilizzato per la determinazione dei punti di contatto) si dimostra sensibilmente più efficiente del modello Simpack Rail. Tale miglioramento è dovuto sia all'efficienza delle nuove procedure (metodo della DISTANZA e della DIFFERENZA) che a quella dell'ambiente di calcolo Matlab/Simulink (SimMechanics e CS – function).

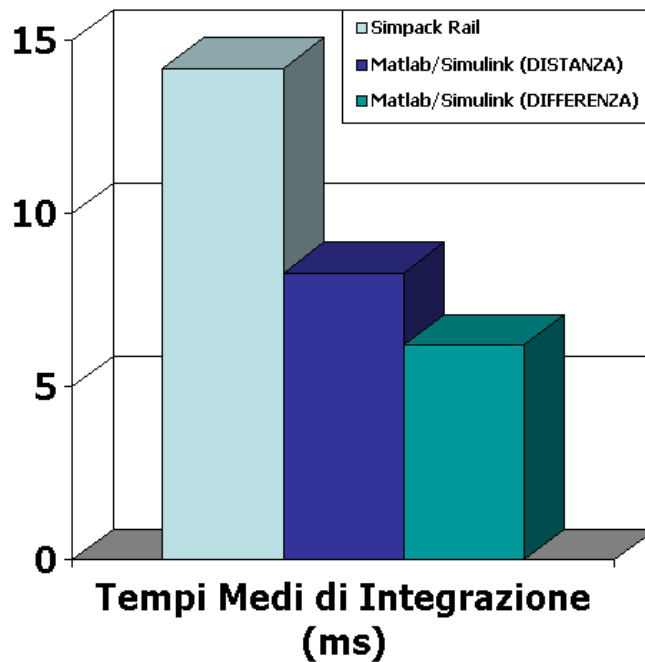


Figura 2.167 Confronto tra i tempi medi di integrazione

I tempi di calcolo estremamente ridotti garantiti da tali algoritmi rendono infine possibile l'implementazione direttamente online dei nuovi metodi (senza l'utilizzo di LUT) all'interno dei modelli multibody (al contrario di quanto avviene nei software già esistenti quali Simpack Rail ed Adams Rail). Tali performance risultano inoltre compatibili con applicazioni in RT ed HIL.

2.7 Sviluppi futuri

I principali sviluppi futuri riguardanti i modelli di contatto descritti in questo capitolo (ed in particolare i nuovi algoritmi per la determinazione dei punti di contatto) si concentreranno prevalentemente sull'interazione di tali procedure con i software multibody già esistenti (in particolar modo Simpack Rail, un software commerciale dedicato all'analisi della dinamica dei veicoli ferroviari ampiamente testato e validato). Più nel dettaglio verranno sviluppate le seguenti tematiche:

- la cosimulazione tra l'ambiente Matlab/Simulink (dove sarà implementato il modello di contatto) e l'ambiente Simpack Rail (dove invece sarà implementato il modello multibody del veicolo); la cosimulazione potrà essere effettuata mediante l'impiego di appositi toolbox di Simpack Rail quali il Code Export

- l'implementazione delle nuove procedure direttamente all'interno di Simpack Rail attraverso l'uso di User Routine scritte in ambiente C/C++.

Entrambe le possibilità appena descritte mirano a sfruttare contemporaneamente l'accuratezza e l'efficienza di Simpack Rail nel gestire sistemi multibody di elevata complessità e le performance dei nuovi modelli di contatto. A tale scopo è attualmente in corso una collaborazione con la INTEC GmbH, ovvero la società sviluppatrice del software Simpack Rail, per lo sviluppo di nuovi toolbox appositamente dedicati al contatto ruota – rotaia.

Altri sviluppi futuri riguarderanno infine lo sviluppo di nuovi modelli di usura basati sui modelli di contatto ruota – rotaia descritti in questo capitolo. Lo scopo di tali modelli sarà la previsione dell'usura dei profili di ruota e rotaia e la conseguente ottimizzazione dei profili stessi al fine di ridurre l'usura in questione.

3 Il modello locale di contatto

In questo capitolo verrà introdotto il nuovo modello locale di contatto; il modello in questione si basa sulle equazioni di Navier e su opportune condizioni analitiche di contatto ed è in grado di soddisfare tutte le specifiche descritte nell'introduzione (con particolare riguardo all'integrazione tra modellistica differenziale e modellistica multibody ed all'implementabilità online all'interno dei modelli multibody dei veicoli ferroviari). Le performance di tale modello tuttavia non possono essere confrontate, in termini di efficienza numerica, con quelle dei modelli globali di contatto (comunemente impiegati nei principali software commerciali quali Simpack Rail ed Adams Rail) a causa dell'approccio completamente differente al problema. [B22]

Gli aspetti maggiormente innovativi del nuovo modello locale riguardano la modellazione del contatto per mezzo di opportune condizioni analitiche e l'implementazione degli algoritmi destinati alla risoluzione del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello. [P9] [P12] [P13]

Nella prima parte del capitolo verrà presentata l'architettura generale del modello completo di vagoni e verrà introdotta la necessaria notazione matematica. Successivamente verranno descritti nel dettaglio il modello di contatto ed il modello multibody del veicolo ferroviario (Manchester Wagon, [B15]). La parte conclusiva del capitolo sarà infine dedicata all'implementazione del modello, alla descrizione delle simulazioni effettuate ed ai possibili sviluppi futuri.

3.1 Architettura generale del modello

L'architettura generale del modello completo di vagoni, analoga a quella del modello descritto nel capitolo 2, è schematizzata in Fig. 3.1. La struttura del modello

consiste in due parti: il modello multibody del veicolo ferroviario ed il modello di contatto.

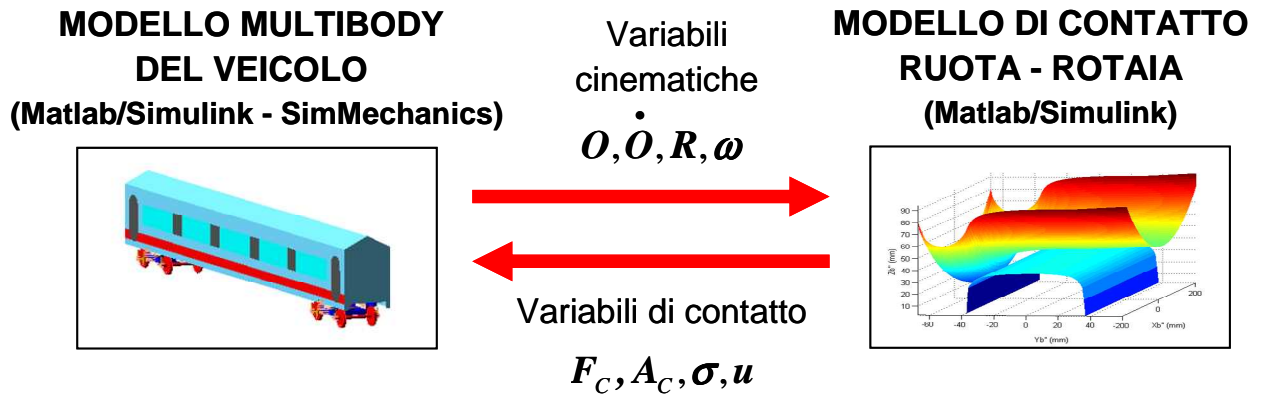


Figura 3.1 Architettura generale del modello

Durante la simulazione della dinamica di marcia le due parti interagiscono online. Ad ogni passo di integrazione, il modello multibody valuta tutte le variabili cinematiche necessarie per descrivere il moto di ogni sala del veicolo e, di conseguenza, di ogni coppia ruota - rotaia. A partire da esse il modello di contatto (basato sulle equazioni di Navier e su opportune condizioni analitiche di contatto) calcola, per ciascuna coppia ruota – rotaia, sia le variabili di contatto globali (forze ed aree di contatto) che quelle locali (stress e spostamenti dovuti al contatto). La conoscenza delle variabili di contatto permette infine, al modello multibody, di proseguire nella simulazione della dinamica del veicolo. Il modello completo di vagone necessita dei seguenti input esterni:

- condizioni iniziali (posizioni e velocità)
- azioni esterne (gravità, forze e momenti esterni, etc.)
- parametri fisici (caratteristiche fisiche di corpi e vincoli, costanti fisiche)
- parametri geometrici (caratteristiche geometriche di corpi e vincoli, tracciato ferroviario, profili di ruota e rotaia).

Per quanto riguarda invece gli output prodotti da tale modello, essi comprendono:

- le variabili cinematiche relative a ciascun corpo
- le interazioni tra i vari corpi
- le forze di contatto e le aree di contatto
- gli stress e gli spostamenti dovuti al contatto.

Come nel caso precedente (vedi capitolo 2), il modello dell'intera vettura è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink. Più in particolare, il modello multibody del veicolo è stato implementato in SimMechanics, un toolbox di Matlab appositamente dedicato allo studio della dinamica multibody (rivelatosi particolarmente adatto alla modellazione di sistemi complessi grazie alla propria modularità). Per quanto riguarda invece i modelli di contatto, si è fatto uso di CS – function, una particolare architettura Matlab che permette di far interagire in modo efficiente l'ambiente Matlab/Simulink con l'ambiente C/C++. [B21] [B22]

3.2 Considerazioni preliminari

In questo paragrafo verrà introdotta la notazione matematica necessaria per formulare il nuovo modello di contatto locale. Inizialmente verranno descritti i principali sistemi di riferimento impiegati e verrà presentata la costruzione del tracciato ferroviario. Successivamente verranno descritte nel dettaglio le superfici di ruota e rotaia a partire dai rispettivi profili. Infine verranno modellate le principali irregolarità relative al tracciato (locali e globali). [B16] [B17] [B18]

3.2.1 Sistemi di riferimento e tracciato ferroviario

Per quanto riguarda la definizione del sistema di riferimento fisso $O_f x_f y_f z_f$ e la costruzione del tracciato $\underline{\gamma}(s)$ si rimanda al paragrafo 2.2.1. Per comodità inoltre, i sistemi di riferimento ausiliario e solidale, per la cui costruzione si rimanda sempre al paragrafo 2.2.1, verranno nel seguito denominati $O_R x_R y_R z_R$ e $O_w x_w y_w z_w$ (Fig. 3.2).

Per descrivere correttamente il nuovo modello di contatto locale è necessario infine introdurre altri due sistemi di riferimento associati a ciascuna coppia ruota – rotaia. Per semplicità, in Fig. 3.3 sono stati raffigurati solamente i sistemi relativi alla coppia di sinistra. Il primo sistema di riferimento $O_w x_w y_w z_w$, associato alla ruota, è parallelo al sistema solidale $O_w x_w y_w z_w$ e la sua origine O_w giace sull'asse di simmetria y_w della ruota (Fig. 3.4). L'origine O_w appartiene inoltre al piano nominale di rotolamento ovvero al piano normale all'asse di rotazione della sala contenente il raggio nominale di rotolamento.

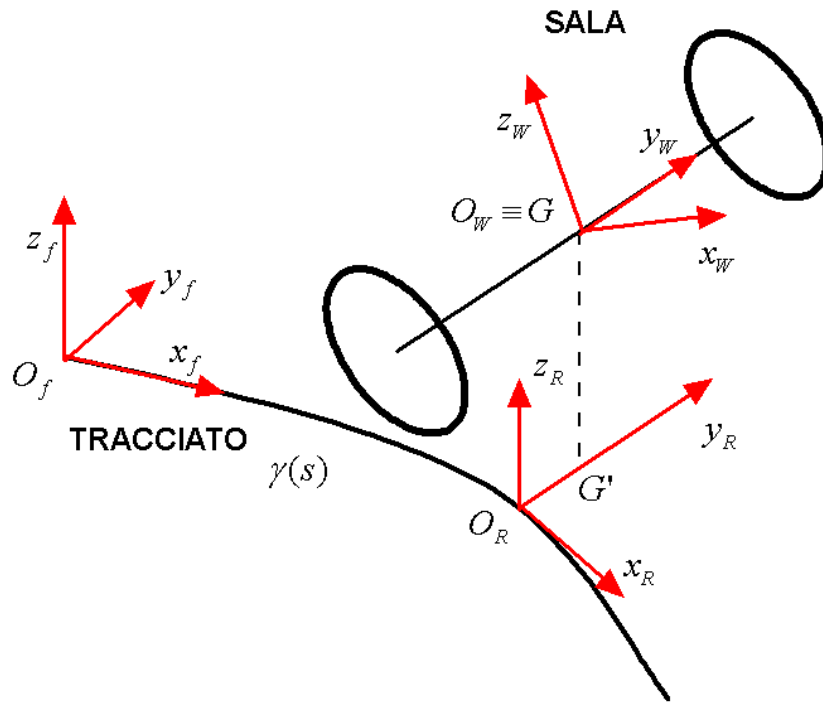


Figura 3.2 Sistemi di riferimento fisso, ausiliario e solidale

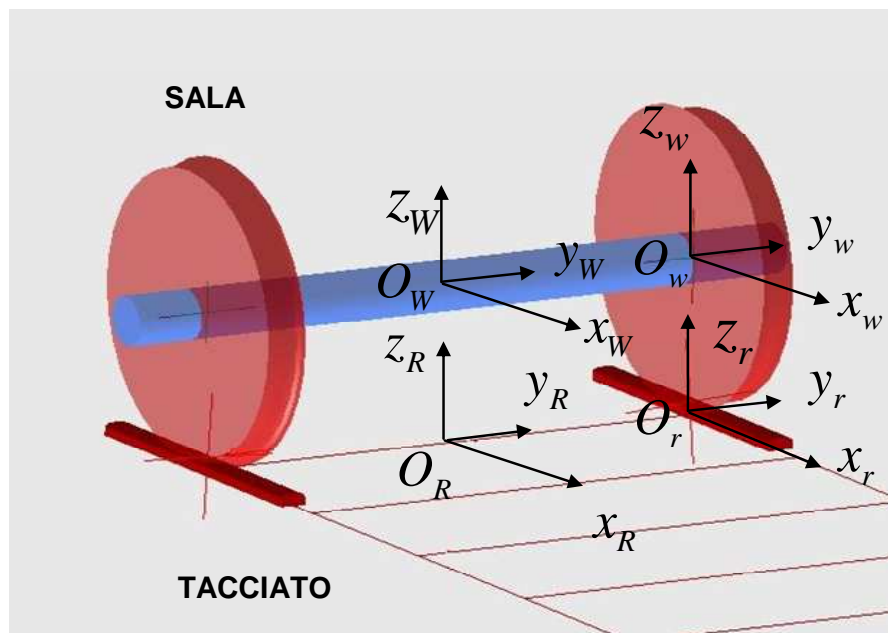


Figura 3.3 Sistemi di riferimento associati alla ruota ed alla rotaia (prima parte)

Il secondo sistema di riferimento $O_r x_r y_r z_r$, associato alla rotaia, è parallelo al sistema $O_R x_R y_R z_R$ (Fig. 3.4). La sua origine O_r appartiene all'asse y_R mentre la distanza tra O_R e O_r è scelta in modo da assicurare il corretto scartamento tra i binari.

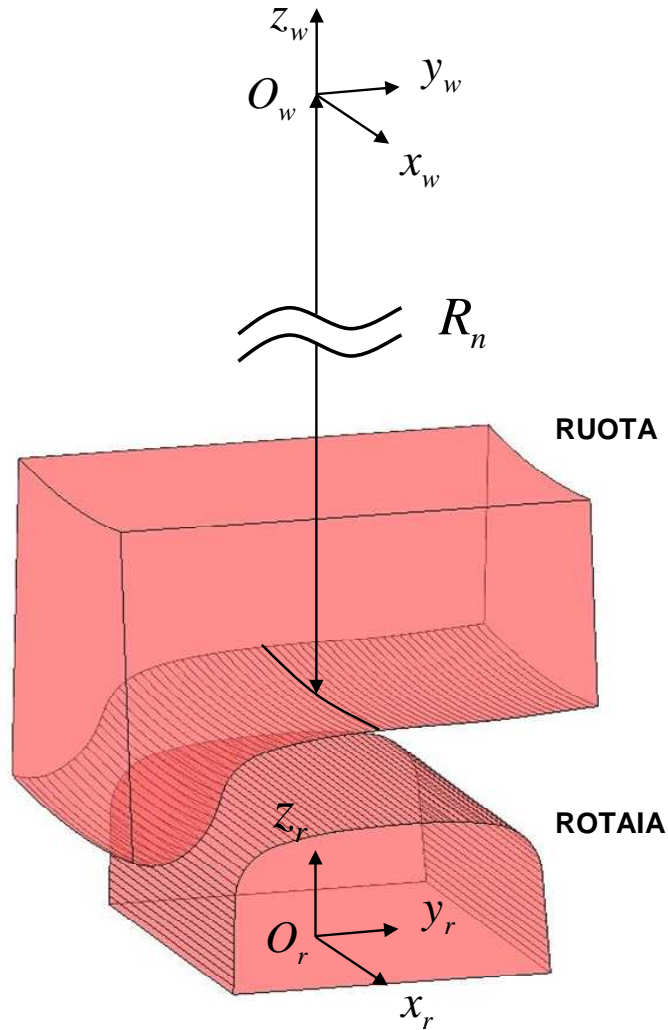


Figura 3.4 Sistemi di riferimento associati alla ruota ed alla rotaia (seconda parte)

Per quanto riguarda la rappresentazione del generico punto \underline{P} nei vari sistemi di riferimento appena introdotti valgono le medesime considerazioni effettuate nel paragrafo 2.2.1.

3.2.2 Superfici e profili

Al contrario di quanto fatto per i modelli globali (paragrafo 2.2.2), le superfici di ruota e rotaia sono state espresse in questo caso direttamente nei sistemi associati alla ruota ed alla rotaia (rispettivamente $O_w x_w y_w z_w$ e $O_r x_r y_r z_r$).

Nel sistema di riferimento $O_w x_w y_w z_w$ la ruota può essere considerata una superficie di rivoluzione attorno al proprio asse y_w (Fig. 3.4). Il profilo generatore $r(y_w)$ è supposto, come sempre, noto.

Il profilo della ruota è riportato nel dettaglio in Fig. 3.5. Nel caso in esame si tratta di un profilo ORE S 1002.

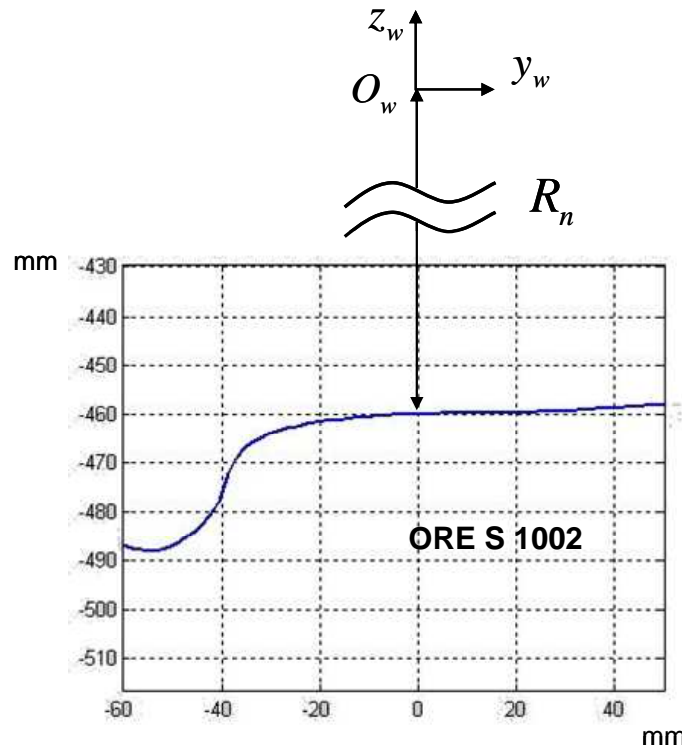


Figura 3.5 Profilo della ruota (ORE S 1002)

La posizione del generico punto della ruota assume dunque, nel sistema di riferimento ad essa associato, la seguente espressione analitica

$$\underline{P}_w^w(x_w, y_w) = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ -\sqrt{r(y_w)^2 - x_w^2} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Si definisce inoltre il versore normale alla superficie della ruota (avente per convenzione verso uscente ed espresso nel sistema associato alla ruota):

$$\underline{n}_w^w(\underline{P}_w^w) = -\frac{\partial \underline{P}_w^w}{\partial x_w} \wedge \frac{\partial \underline{P}_w^w}{\partial y_w} \left/ \left\| \frac{\partial \underline{P}_w^w}{\partial x_w} \wedge \frac{\partial \underline{P}_w^w}{\partial y_w} \right\| \right.. \quad (3.2)$$

Analogamente a quanto fatto per la ruota, la rotaia può essere descritta localmente come una superficie di estrusione avente come asse x_r (Fig. 3.4). Il profilo generatore $b(y_r)$ è supposto noto.

Il profilo della rotaia è riportato invece nel dettaglio in Fig. 3.6 già ruotato dell'angolo di posa α_p . Nel caso in esame si tratta di un profilo UIC 60.

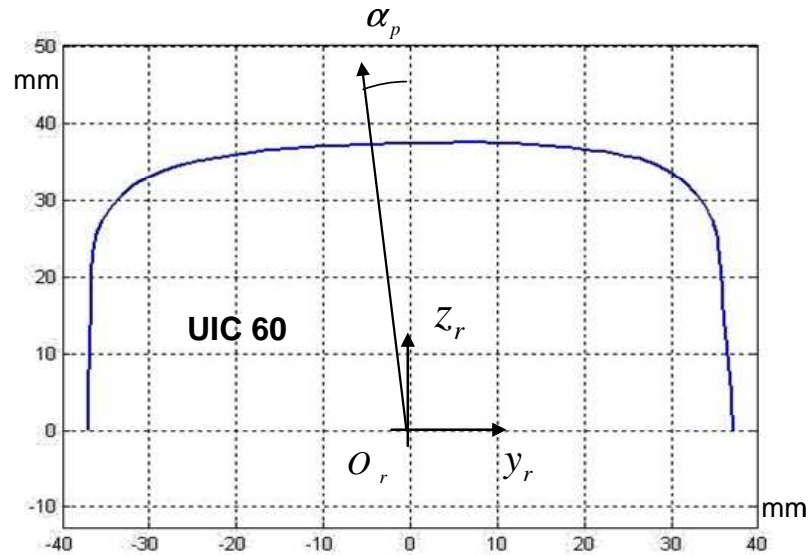


Figura 3.6 Profilo del binario (UIC 60)

La posizione del generico punto della rotaia assume, nel sistema di riferimento ad essa associato, la seguente espressione analitica

$$\underline{P}_r(x_r, y_r) = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ b(y_r) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

mentre, per quanto riguarda il versore normale uscente alla superficie si ha

$$\underline{n}_r(\underline{P}_r) = \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r} / \left\| \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial x_r} \wedge \frac{\partial \underline{P}_r}{\partial y_r} \right\|. \quad (3.4)$$

3.2.3 Irregolarità locali e globali

Il trattamento delle irregolarità del tracciato è del tutto analogo al caso dei modelli globali (paragrafo 2.2.3).

Le irregolarità locali riguardano le singole rotaie. Tra di esse è stato preso in esame lo spostamento laterale delle rotaie rispetto alla loro posizione nominale (ovvero $d_s(s)$ se si considera, a titolo di esempio, la rotaia di sinistra; per convenzione $d_s(s)$ è positivo se orientato come y_r). Irregolarità di questo genere possono essere modellate modificando opportunamente il profilo generatore della rotaia $b(y_r)$:

$$b_{irr}(y_r) = b(y_r - d_s(s)). \quad (3.5)$$

Le irregolarità globali riguardano invece l'intero piano dei binari. All'interno di questa classe sono stati considerati lo spostamento laterale $d_y(s)$ del piano del ferro,

l'analogo spostamento verticale $d_z(s)$ e l'irregolarità di cant $\beta_{irr}(s)$. Le irregolarità globali possono essere modellate modificando il sistema ausiliario come segue:

$$\underline{O}_{Rirr}^f = \underline{O}_R^f + d_y \underline{j}_R + d_z \underline{k}_R \quad (3.6)$$

$$R_{irr} = \begin{bmatrix} \underline{i}_{Rirr} & \underline{j}_{Rirr} & \underline{k}_{Rirr} \end{bmatrix} = R_{irr} \begin{bmatrix} \underline{i}_R & \underline{j}_R & \underline{k}_R \end{bmatrix}$$

dove $R_{irr} = R_x(\beta_{irr})$.

3.3 Il modello di contatto

In questo paragrafo verrà descritti nel dettaglio il nuovo modello di contatto locale. Il modello in questione si base sulle equazioni di Navier e su opportune condizioni analitiche di contatto; da un punto di vista modellistico esso prevede tre fasi principali:

- inizialmente deve essere formulato il modello fisico del sistema comprendente le equazioni di Navier e le condizioni analitiche necessarie per modellare il contatto tra ruota e rotaia [P9] [P12] [P13] [B4] [B10] [B11] [B17]
- successivamente il modello fisico deve essere discretizzato per mezzo di opportune tecniche FEM [B10] [B11] [B12] [B14]
- infine il problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello deve essere risolto mediante appositi algoritmi numerici. [P9] [P12] [P13] [B23] [B24] [B25] [B26] [B27]

In questo caso gli aspetti maggiormente innovativi del nuovo modello locale riguardano soprattutto la prima fase (modellazione del contatto per mezzo di opportune condizioni analitiche) e la terza fase (gestione del problema discreto ed implementazione degli algoritmi necessari per la sua risoluzione). Durante lo sviluppo del modello si è comunque sempre cercato il giusto compromesso tra accuratezza ed efficienza in modo da ottenere una buona integrazione tra modellistica multibody e modellistica differenziale.

Per alleggerire la notazione, nel seguito del capitolo, verrà adottata la seguente convenzione per quanto riguarda la generica variabile Z relativa al contatto:

- Z_w e Z_w' indicheranno la generica variabile relativa alla ruota espressa rispettivamente nei sistemi di riferimento $O_w x_w y_w z_w$ and $O_r x_r y_r z_r$

- Z_r^w e Z_r indicheranno invece la generica variabile relativa alla rotaia espressa rispettivamente nei sistemi di riferimento $O_w x_w y_w z_w$ and $O_r x_r y_r z_r$

Con riferimento alla Fig. 3.1, il nuovo modello locale di contatto descritto in questo paragrafo può essere pensato come una “black box” avente i seguenti input ed output:

- INPUT: le variabili cinematiche relative alla coppia ruota – rotaia considerata ovvero posizione \underline{Q}_w^r , orientazione R_w^r , velocità assoluta $\dot{\underline{Q}}_{w,f}^r$ e velocità angolare assoluta $\underline{\omega}_{w,f}^r$ del sistema associato alla ruota e velocità assoluta $\dot{\underline{Q}}_{r,f}$ e velocità angolare assoluta $\underline{\omega}_{r,f}$ del sistema associato alla rotaia
- OUTPUT: le variabili di contatto globali e locali relative alla ruota ed alla rotaia ovvero le forze di contatto \underline{F}_{wC} e \underline{F}_{rC} , le aree di contatto A_{wC} e A_{rC} , gli stress σ_w e σ_r e gli spostamenti \underline{u}_w e \underline{u}_r .

3.3.1 Il modello fisico del sistema

In questo paragrafo verrà descritta la struttura del modello fisico. Inizialmente verrà illustrata la cinematica del sistema ruota – rotaia necessaria per formulare il modello in questione. La seconda parte del paragrafo sarà invece dedicata al modello di contatto vero e proprio (equazioni di Navier e condizioni analitiche di contatto). [B4] [B10] [B11] B[17]

3.3.1.1 La cinematica del problema

Al contrario di quanto avviene nei modelli di contatto globali, in questo caso sia la ruota che la rotaia sono stati modellati come corpi elastici lineari. Per semplicità si considerano due porzioni Ω_w e Ω_r di tali corpi sufficientemente grandi rispetto alle dimensioni caratteristiche dell'impronta di contatto (Fig. 3.7 e 3.8).

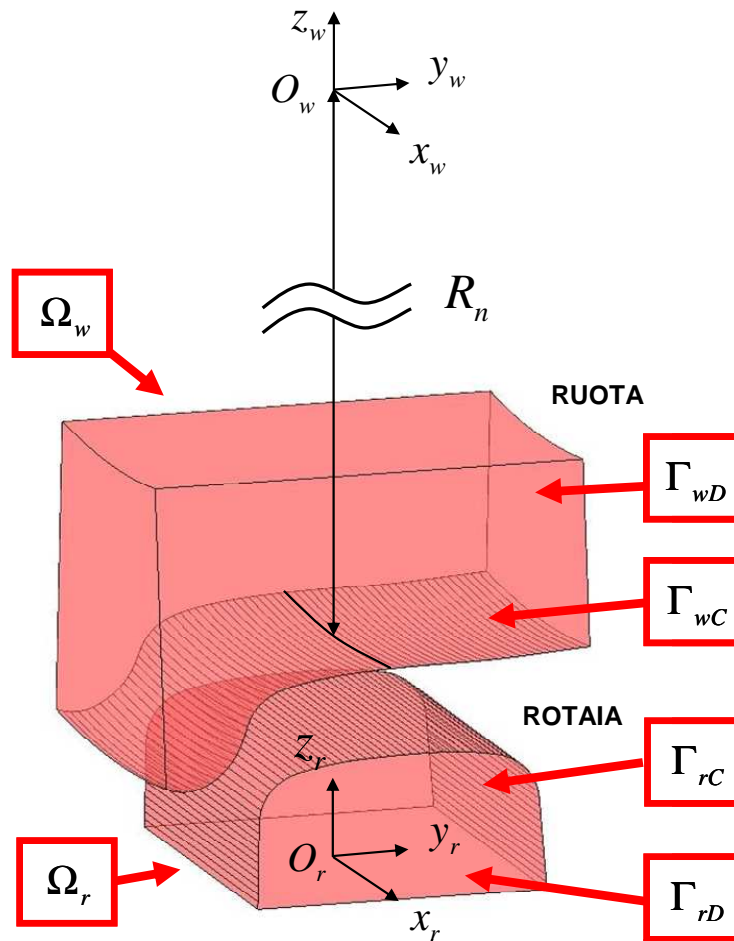


Figura 3.7 Domini e frontiere

Le frontiere $\partial\Omega_w$ e $\partial\Omega_r$ dei domini Ω_w e Ω_r sono state suddivise in due regioni tra loro disgiunte, rispettivamente Γ_{wC} , Γ_{wD} e Γ_{rC} , Γ_{rD} . Le frontiere di contatto Γ_{wC} e Γ_{rC} (tratteggiate in Fig. 3.7) sono le frontiere all'interno delle quali il contatto tra i corpi può verificarsi mentre Γ_{wD} e Γ_{rD} sono le frontiere di Dirichlet sulle quali il valore degli spostamenti è noto (e, nel caso in esame, uguale a zero). La conoscenza della cinematica relativa ruota - rotaia (\underline{O}_w^r , R_w^r , $\dot{\underline{O}}_{w,f}^r$, $\underline{\omega}_{w,f}^r$ e $\dot{\underline{O}}_{r,f}^r$, $\underline{\omega}_{r,f}^r$) e, di conseguenza, della posizione delle frontiere di Dirichlet è stata impiegata durante la simulazione per determinare l'esatto posizionamento delle configurazioni indeformate dei corpi.

In presenza di contatto l'intersezione geometrica tra le superfici Γ_{wC} e Γ_{rC} (e quindi tra le configurazioni indeformate) permette di definire le aree di reciproca compenetrazione $\tilde{A}_{wC} \subset \Gamma_{wC}$ e $\tilde{A}_{rC} \subset \Gamma_{rC}$ (con $\tilde{A}_{wC} \approx \tilde{A}_{rC}$); tali aree possono essere

pensate come una prima rude approssimazione delle vere aree di contatto A_{wC} e A_{rC} . La situazione è illustrata schematicamente in Fig. 3.8 e 3.9.

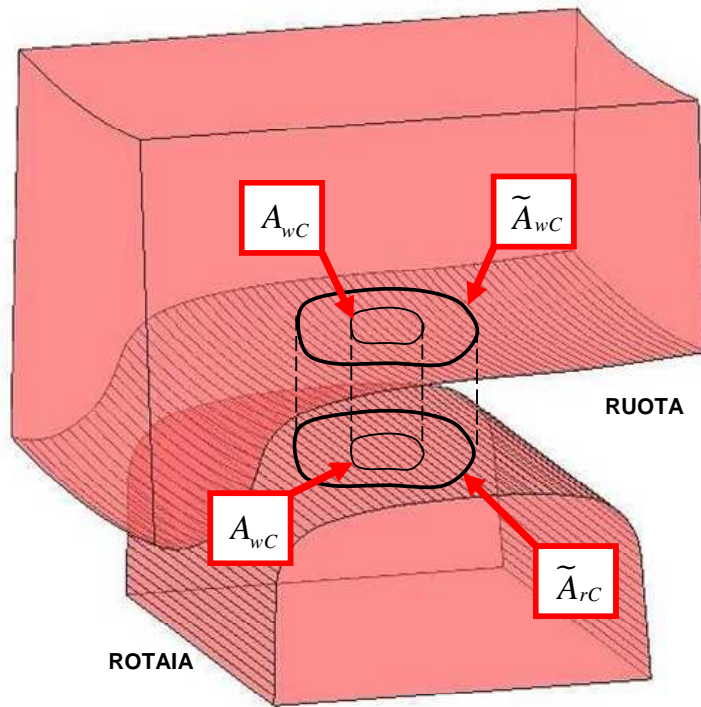


Figura 3.8 Aree di contatto

Le vere aree di contatto $A_{wC} \subset \tilde{A}_{wC}$ e $A_{rC} \subset \tilde{A}_{rC}$ (con $A_{wC} \approx A_{rC}$) sono a priori incognite e devono essere calcolate dal modello di contatto. A tal scopo deve essere definita una mappa di contatto $\underline{\Phi}: \tilde{A}_{wC} \rightarrow \tilde{A}_{rC}$. Per convenzione, nella modellazione del contatto, la ruota è stata considerata come corpo master e la rotaia come corpo slave; di conseguenza il dominio della mappa $\underline{\Phi}$ appartiene alla superficie Γ_{wC} mentre il codominio alla superficie Γ_{rC} . La mappa di contatto $\underline{\Phi}: \tilde{A}_{wC} \rightarrow \tilde{A}_{rC}$ associa il generico punto $\underline{x}_w^r \in \tilde{A}_{wC}$ della superficie indeformata della ruota al punto $\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r) \in \tilde{A}_{rC}$ della superficie indeformata della rotaia che entrerà con esso in contatto nella configurazione deformata. Nel caso in esame la mappa $\underline{\Phi}$ è definita come la proiezione normale $\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)$ del punto $\underline{x}_w^r \in \tilde{A}_{wC}$ sulla superficie \tilde{A}_{rC} (Fig. 3.8 e 3.9).

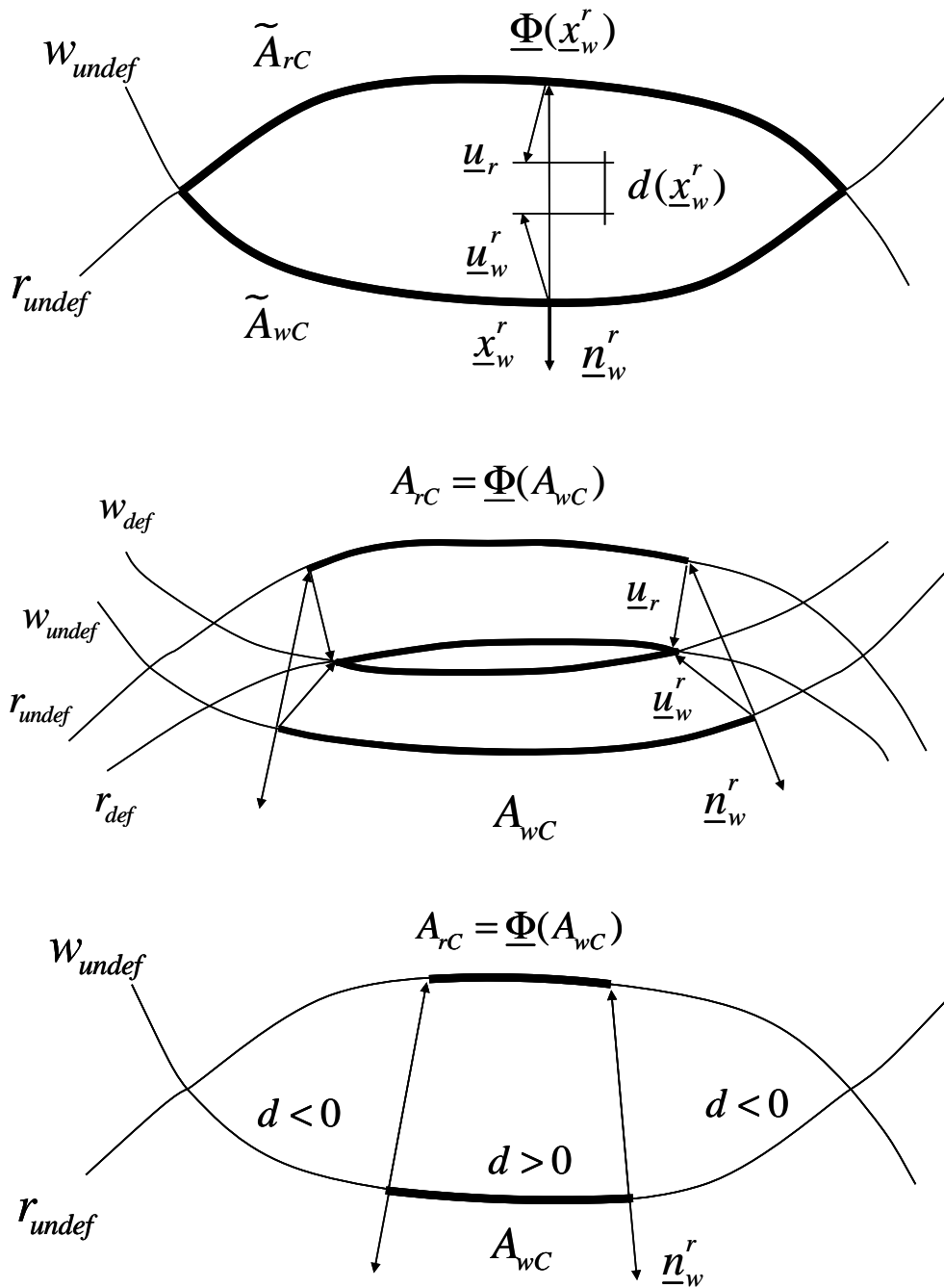


Figura 3.9 Mappa di contatto e funzione distanza

Partendo dalla mappa di contatto è possibile determinare la funzione distanza $d: \tilde{A}_{wC} \rightarrow \mathbb{R}$ tra le configurazioni deformate di ruota e rotaia:

$$d(\underline{x}_w^r) = (\underline{u}_w^r - \underline{u}_r) \cdot \underline{n}_w^r - (\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r) - \underline{x}_w^r) \cdot \underline{n}_w^r \quad (3.7)$$

dove \underline{n}_w^r è il versore normale uscente alla superficie Γ_{wC} . La funzione d è positiva se c'è penetrazione tra le configurazioni deformate e negativa altrimenti (Fig. 3.9).

Formalmente l'area di contatto A_{wC} è definita come la regione di \tilde{A}_{wC} dove la funzione d è positiva mentre l'area di contatto $A_{rC} = \Phi(A_{wC})$ è la proiezione normale di A_{wC} su \tilde{A}_{rC} . In altre parole, da un punto di vista cinematico, la penetrazione tra le configurazioni deformate dei corpi è permessa e dovrà essere penalizzata dal modello di contatto (si veda il capitolo 3.3.1.2) (Fig. 3.9).

In questo modo le aree di reciproca compenetrazione \tilde{A}_{wC} e \tilde{A}_{rC} dipendono solamente dalla cinematica relativa ruota – rotaia ($\underline{Q}_w^r, R_w^r, \dot{\underline{Q}}_{w,f}^r, \underline{\omega}_{w,f}^r$ e $\dot{\underline{Q}}_{r,f}^r, \underline{\omega}_{r,f}^r$) mentre le vere aree di contatto A_{wC} e A_{rC} dipendono anche dagli spostamenti \underline{u}_w e \underline{u}_r .

Infine è utile ricordare come nessuna ipotesi sia stata fatta sulla forma dell'impronta di contatto; in particolare l'area di contatto può essere formata da una o più parti disgiunte (in tal caso si ha contatto multiplo).

3.3.1.2 Il modello di contatto

In accordo con la teoria lineare dell'elasticità sia la ruota che la rotaia sono governate dalle equazioni di Navier:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma_w(\underline{u}_w) &= \underline{0} && \text{su } \Omega_w \\
 \operatorname{div} \sigma_r(\underline{u}_r) &= \underline{0} && \text{su } \Omega_r \\
 \underline{u}_w &= \underline{0} && \text{su } \Gamma_{wD} \\
 \underline{u}_r &= \underline{0} && \text{su } \Gamma_{rD} \\
 \sigma_w(\underline{u}_w)\underline{n}_w &= \underline{p}_w && \text{su } \tilde{A}_{wC} \\
 \sigma_w(\underline{u}_w)\underline{n}_w &= \underline{0} && \text{su } \Gamma_{wC} \setminus \tilde{A}_{wC} \\
 \sigma_r(\underline{u}_r)\underline{n}_r &= \underline{p}_r && \text{su } \tilde{A}_{rC} \\
 \sigma_r(\underline{u}_r)\underline{n}_r &= \underline{0} && \text{su } \Gamma_{rC} \setminus \tilde{A}_{rC}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove \underline{n}_w e \underline{n}_r sono i versori normali uscenti alle superfici Γ_{wC} e Γ_{rC} mentre \underline{p}_w e \underline{p}_r sono le pressioni di contatto a priori incognite. Le pressioni \underline{p}_w e \underline{p}_r sono definite su \tilde{A}_{wC} e \tilde{A}_{rC} ma dovranno necessariamente essere nulle su $\tilde{A}_{wC} \setminus A_{wC}$ e $\tilde{A}_{rC} \setminus A_{rC}$. Per quanto riguarda le caratteristiche meccaniche dei corpi (modulo di Young e coefficiente di Poisson), sia per la ruota che per la rotaia sono stati considerati i valori tipici dell'acciaio ($E_w = E_r = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ e $\nu_w = \nu_r = 0.3$).

Nel caso in esame le forze di volume (come la gravità) ed i termini inerziali sono stati trascurati (vedi equazioni 3.8) poiché la loro influenza sui fenomeni di

contatto è piuttosto limitata; sia le forze di volume che i termini inerziali inoltre sono già stati considerati da modello multibody. Si è infine supposto che, all'interno dello step temporale di integrazione, il problema del contatto ruota – rotaia possa essere considerato stazionario (si veda anche Fig. 3.1).

Il problema 3.8 può essere facilmente riscritto in termini di forma debole come segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_w} \sigma_w(\underline{u}_w) : \varepsilon_w(\underline{v}_w) dV &= \int_{\tilde{A}_{wC}} \underline{p}_w \cdot \underline{v}_w dA \quad \forall \underline{v}_w \in V_w \\ \int_{\Omega_r} \sigma_r(\underline{u}_r) : \varepsilon_r(\underline{v}_r) dV &= \int_{\tilde{A}_{rC}} \underline{p}_r \cdot \underline{v}_r dA \quad \forall \underline{v}_r \in V_r \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove ε_w e ε_r sono le deformazioni mentre V_w e V_r rappresentano opportuni spazi di Sobolev.

Per completare la formulazione del modello, le pressioni di contatto \underline{p}_w e \underline{p}_r devono essere espresse in funzione degli spostamenti \underline{u}_w e \underline{u}_r . Per semplicità si introducono le pressioni di contatto normali e tangenziali agenti sulla ruota:

$$\underline{p}_{wN}^r = \underline{p}_w^r \cdot \underline{n}_w^r \quad \underline{p}_{wT}^r = \underline{p}_w^r - p_{wN}^r \underline{n}_w^r. \quad (3.10)$$

La pressione normale di contatto p_{wN}^r è stata calcolata per mezzo della funzione distanza d in modo da penalizzare la penetrazione tra le configurazioni deformate di ruota e rotaia (vedi paragrafo 3.3.1.1):

$$p_{wN}^r(\underline{x}_w^r) = -K \max(d(\underline{x}_w^r), 0) \quad \text{su } \tilde{A}_{wC} \quad (3.11)$$

nella quale K rappresenta una costante di rigidità fittizia. Il valore di K deve essere scelto grande a sufficienza da assicurare l'accuratezza richiesta da questo genere di modelli; naturalmente all'aumentare di K cresce anche la stiffness del problema e, di conseguenza, il suo malcondizionamento. La condizione di contatto ideale (totale assenza di penetrazione tra le configurazioni deformate) si raggiunge per $K \rightarrow +\infty$ (solitamente $K \geq 10^{15} \text{ N/m}^3$).

Per valutare le pressioni tangenziali di contatto \underline{p}_{wT}^r deve essere definito lo slip \underline{s}_w^r tra le configurazioni deformate di ruota e rotaia. Dal momento che il problema è considerato stazionario all'interno dello step temporale di integrazione (vedi Fig. 3.1), lo slip \underline{s}_w^r assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \underline{s}_w^r(\underline{x}_w^r) &= \underline{w}_w^r(\underline{x}_w^r) + \dot{\underline{u}}_w^r(\underline{x}_w^r) - \underline{w}_r(\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)) - \dot{\underline{u}}_r(\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)) = \\ &= \underline{w}_w^r(\underline{x}_w^r) + J_w^r(\underline{x}_w^r) \underline{w}_w^r(\underline{x}_w^r) - \underline{w}_r(\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)) - J_r(\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)) \underline{w}_r(\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove \underline{w}_w^r e \underline{w}_r sono le velocità assolute dei punti \underline{x}_w^r and $\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)$ pensati rigidamente collegati alla ruota ed alla rotaia (e calcolabili a partire dalla conoscenza delle variabili cinematiche \underline{O}_w^r , R_w^r , $\dot{\underline{O}}_{w,f}^r$, $\underline{\omega}_{w,f}^r$ e $\dot{\underline{O}}_{r,f}^r$, $\underline{\omega}_{r,f}^r$) mentre J_w^r e J_r sono gli Jacobiani degli spostamenti \underline{u}_w^r e \underline{u}_r rispetto alle variabili \underline{x}_w^r e \underline{x}_r . Come al solito le componenti normali e tangenziali dello slip possono essere calcolate come segue:

$$s_{wN}^r = \underline{s}_w^r \bullet \underline{n}_w^r \quad s_{wT}^r = \underline{s}_w^r - s_{wN}^r \underline{n}_w^r. \quad (3.13)$$

In accordo con i classici modelli di attrito pseudo – colombiani, le pressioni tangenziali di contatto \underline{p}_{wT}^r assumono dunque l'espressione

$$\underline{p}_{wT}^r(\underline{x}_w^r) = \begin{cases} \underline{0} & \text{se } s_{wT}^r(\underline{x}_w^r) = 0 \\ -\mu(s_{wT}^r(\underline{x}_w^r), V) \left| \underline{p}_{wN}^r(\underline{x}_w^r) \right| \frac{s_{wT}^r(\underline{x}_w^r)}{s_{wT}^r(\underline{x}_w^r)} & \text{se } s_{wT}^r(\underline{x}_w^r) > 0 \end{cases} \quad \text{su } \tilde{A}_{wC} \quad (3.14)$$

nella quale s_{wT}^r rappresenta la norma di \underline{s}_{wT}^r e V è la velocità longitudinale del veicolo. Ulteriori dettagli sulla funzione di attrito $\mu(s_{wT}^r, V)$ possono essere reperiti in letteratura.

Il principio di azione e reazione (terza legge di Newton) consente infine di calcolare la pressione di contatto \underline{p}_r sulla superficie della rotaia \tilde{A}_{rC} :

$$\underline{p}_r(\underline{\Phi}(\underline{x}_w^r)) = -\underline{p}_w^r(\underline{x}_w^r) \quad \text{su } \tilde{A}_{wC}. \quad (3.15)$$

In conclusione è utile sottolineare come, in base alla definizione appena fornita, le pressioni di contatto \underline{p}_w e \underline{p}_r siano nulle rispettivamente su $\tilde{A}_{wC} \setminus A_{wC}$ e $\tilde{A}_{rC} \setminus A_{rC}$ (in accordo con quanto era stato inizialmente richiesto).

Il valore degli spostamenti \underline{u}_w e \underline{u}_r verrà determinato in seguito attraverso la risoluzione numerica dell'equazione 3.9. La conoscenza di tali quantità incognite permetterà quindi di calcolare gli altri output del modello quali le aree di contatto A_{wC} e A_{rC} (sulle quali nessuna ipotesi specifica è stata fatta e che, di conseguenza, possono essere formate anche da più parti disgiunte come nel caso di contatto multiplo) e gli stress σ_w e σ_r . Le forze di contatto \underline{F}_{wC} e \underline{F}_{rC} verranno invece valutate per integrazione:

$$\underline{F}_{wC} = \int_{\bar{A}_{wC}} \underline{p}_w dA \quad \underline{F}_{rC} = \int_{\bar{A}_{rC}} \underline{p}_r dA. \quad (3.16)$$

3.3.2 La discretizzazione del modello

In questa sezione verrà descritta la discretizzazione del modello fisico introdotto nel paragrafo 3.3.1. Più in particolare verranno analizzate due diverse formulazioni del problema discreto derivante da tale discretizzazione: la formulazione sparsa e la formulazione ridotta. [B10] [B11] [B12] [B14]

3.3.2.1 La formulazione sparsa

Entrambi i corpi elastici sono stati discretizzati per mezzo di elementi finiti tetraedrici equipaggiati con funzioni di forma lineari. Le mesh sono state costruite in accordo con gli algoritmi standard di Delaunay (Fig. 3.10).

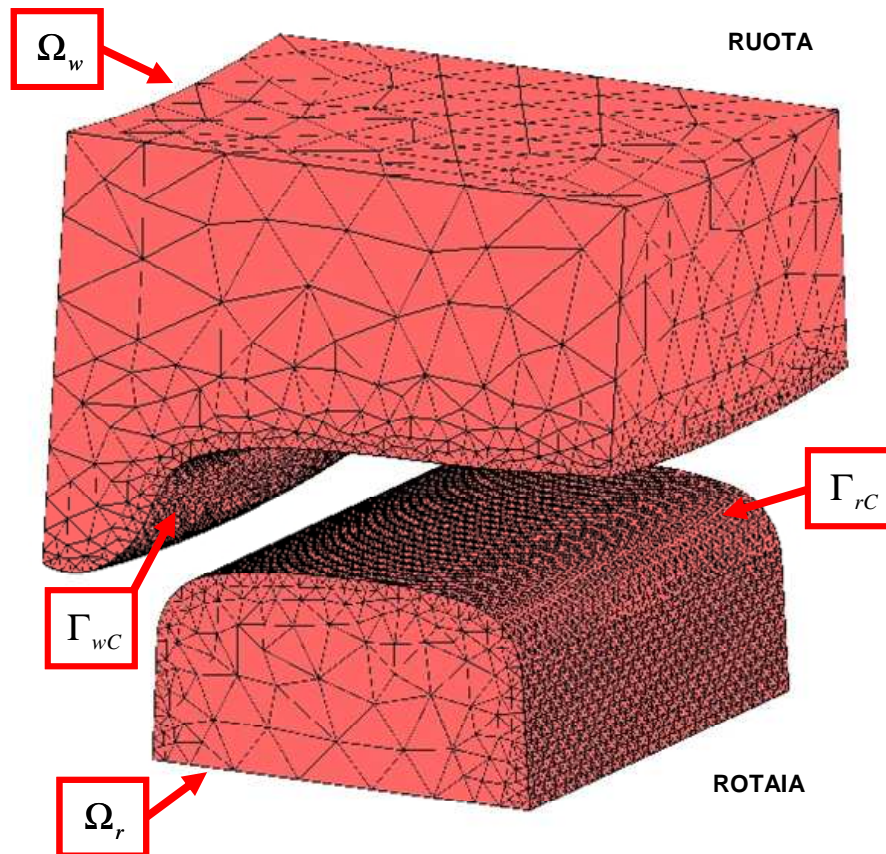


Figura 3.10 Discretizzazione della ruota e della rotaia

La risoluzione delle mesh sulle superfici Γ_{wC} e Γ_{rC} è ovunque costante poiché la posizione e le dimensioni dell'area di contatto sono a priori incognite. La risoluzione superficiale (solitamente nel range $0.1\text{mm} \div 1\text{mm}$) deve inoltre assicurare un'accuratezza sufficiente per descrivere correttamente i fenomeni di contatto. È importante infine notare come le mesh in questione siano state create direttamente nei sistemi di riferimento $O_w x_w y_w z_w$ e $O_r x_r y_r z_r$; di conseguenza esse non cambiano durante la simulazione dinamica (vedi Fig. 3.1) e possono quindi essere facilmente costruite offline senza andare ad appesantire il carico computazionale.

Nel seguito del paragrafo, per quanto riguarda la discretizzazione del modello, verrà adottata la seguente notazione:

- gli insiemi di tutti gli elementi di ruota e rotaia verranno chiamati T_w e T_r mentre i vettori $\underline{u}_{wh}, \underline{u}_{rl} \in R^{12}$ conterranno gli spostamenti dei quattro nodi appartenenti agli elementi $h \in T_w$ e $l \in T_r$. Infine i vettori \underline{U}_w e \underline{U}_r comprenderanno gli spostamenti relativi a tutti i nodi della ruota e della rotaia. Dal momento che gli spostamenti su Γ_{wD} e Γ_{rD} sono noti (ed in questo caso nulli), le dimensioni di \underline{U}_w e \underline{U}_r sono $3(N_w - N_{wD})$ e $3(N_r - N_{rD})$, dove N_w e N_r rappresentano il numero complessivo di nodi della ruota e della rotaia mentre N_{wD} e N_{rD} sono il numero di nodi presenti su Γ_{wD} e Γ_{rD} .
- analogamente $C_w \subset T_w$ and $C_r \subset T_r$ saranno gli insiemi degli elementi attivi su ruota e rotaia ovvero gli insiemi di elementi aventi rispettivamente una faccia \tilde{A}_{wC}^i e \tilde{A}_{rC}^j che giace su \tilde{A}_{wC} e \tilde{A}_{rC} . I vettori $\underline{u}_{wi}, \underline{u}_{rj} \in R^{12}$ conterranno invece gli spostamenti dei quattro nodi appartenenti agli elementi $i \in C_w$ and $j \in C_r$ mentre i vettori \underline{U}_{wC} e \underline{U}_{rC} comprenderanno gli spostamenti relativi ai nodi di tutti gli elementi attivi. Le dimensioni di \underline{U}_{wC} e \underline{U}_{rC} sono $3N_{wC}$ e $3N_{rC}$ dove N_{wC} e N_{rC} rappresentano il numero di nodi appartenenti agli elementi attivi (Fig. 3.11).

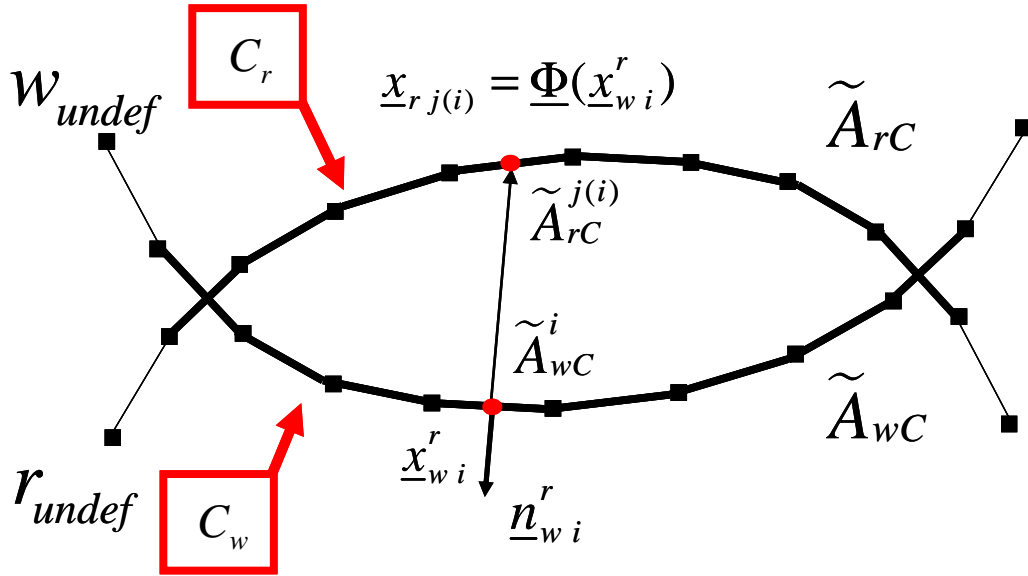


Figura 3.11 Discretizzazione della mappa di contatto

La conoscenza della cinematica relativa ruota – rotaia (\underline{O}_w^r , R_w^r , $\dot{\underline{O}}_{w,f}^r$, $\underline{\omega}_{w,f}^r$ e $\dot{\underline{O}}_{r,f}$, $\underline{\omega}_{r,f}$) e, di conseguenza, delle aree di reciproca compenetrazione \tilde{A}_{wC} e \tilde{A}_{rC} , permette di determinare gli insiemi $C_w \subset T_w$ e $C_r \subset T_r$ degli elementi attivi di contatto sulla ruota e sulla rotaia.

Per ogni elemento attivo di contatto sulla ruota è stato poi considerato il centro \underline{x}_{wi}^r della faccia \tilde{A}_{wC}^i . La proiezione normale $\underline{x}_{rj} = \underline{\Phi}(\underline{x}_{wi}^r)$ di \underline{x}_{wi}^r su \tilde{A}_{rC} apparterrà alla faccia esterna \tilde{A}_{rC}^j del j -esimo elemento attivo di contatto sulla rotaia; in particolare l'indice $j(i)$ sarà una funzione (non necessariamente iniettiva) dell'indice i . In tal modo l'insieme delle coppie di punti (\underline{x}_{wi}^r , $\underline{x}_{rj(i)}$) con $i \in C_w$ può essere considerato come una discretizzazione della mappa di contatto $\underline{\Phi}$. La situazione è schematicamente illustrata in Fig. 3.11.

Il valore degli spostamenti \underline{u}_w^r e \underline{u}_r e dei loro Jacobiani J_w^r e J_r nei punti \underline{x}_{wi}^r e \underline{x}_{rj} sono stati calcolati per mezzo delle funzioni di forma N_{wi} e N_{rj} :

$$\begin{aligned} \underline{u}_w^r(\underline{x}_{wi}^r) &= N_{wi}(\underline{x}_{wi}^r) \underline{u}_{wi}^r & J_w^r(\underline{x}_{wi}^r) &= \sum_{k=1}^{12} J_{wi}^k(\underline{x}_{wi}^r) \underline{u}_{wik}^r \\ \underline{u}_r(\underline{x}_{rj}) &= N_{rj}(\underline{x}_{rj}) \underline{u}_{rj} & J_r(\underline{x}_{rj}) &= \sum_{k=1}^{12} J_{rj}^k(\underline{x}_{rj}) \underline{u}_{rjk} \end{aligned} \quad (3.17)$$

dove $J_{w i}^k, J_{r j}^k$ rappresentano gli Jacobiani della k -esima colonna di $N_{w i}$ e $N_{r j}$ mentre $u_{w i k}^r$ e $u_{r j k}$ sono le k -esime componenti di $\underline{u}_{w i}^r$ e $\underline{u}_{r j}$.

A questo punto la funzione distanza $d_i = d(\underline{x}_{w i}^r)$ e la pressione di contatto $\underline{p}_{w i}^r = \underline{p}_{w i}^r(\underline{x}_{w i}^r)$ sulla faccia $\tilde{A}_{w C}^i$ dell'elemento attivo della ruota possono essere valutate, nel punto $\underline{x}_{w i}^r$, attraverso le relazioni 3.7 e 3.10 – 3.14 descritte nel paragrafo 3.3.1. Infine è necessario introdurre una versione discreta del principio di azione e reazione (terza legge di Newton) per poter determinare la pressione di contatto $\underline{p}_{r j(i)} = \underline{p}_r(\underline{x}_{r j(i)})$ sulla faccia $\tilde{A}_{r C}^{j(i)}$ dell'elemento attivo del binario:

$$|\tilde{A}_{r C}^{j(i)}| \underline{p}_{r j(i)} = -|\tilde{A}_{w C}^i| \underline{p}_{w i}^r \quad (3.18)$$

dove $|\tilde{A}_{w C}^i|$ e $|\tilde{A}_{r C}^{j(i)}|$ sono le aree delle facce $\tilde{A}_{w C}^i$ e $\tilde{A}_{r C}^{j(i)}$. Entrambe le pressioni di contatto $\underline{p}_{w i}^r$ e $\underline{p}_{r j(i)}$ sono state considerate costanti all'interno delle facce $\tilde{A}_{w C}^i$ e $\tilde{A}_{r C}^{j(i)}$ (coerentemente con la scelta degli elementi finiti e delle funzioni di forma).

La forma debole del problema del contatto (vedi equazione 3.9) è stata discretizzata mediante tecniche FEM standard basate sugli elementi finiti e sulle funzioni di forma introdotte pocanzi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_w} \sigma_w(\underline{u}_w) : \varepsilon_w(\underline{v}_w) dV &= \sum_{h \in T_w} \underline{u}_{w h}^T K_{w h} \underline{v}_{w h} = \underline{U}_w^T K_w \underline{V}_w \\ \int_{\tilde{A}_{w C}^i} \underline{p}_{w i} \cdot \underline{v}_w dA &= \sum_{i \in C_w} \underline{p}_{w i}^T M_{w i} \underline{v}_{w i} = \underline{F}_w(\underline{U}_{w C}, \underline{U}_{r C})^T \underline{V}_w \\ \int_{\Omega_r} \sigma_r(\underline{u}_r) : \varepsilon_r(\underline{v}_r) dV &= \sum_{l \in T_r} \underline{u}_{r l}^T K_{r l} \underline{v}_{r l} = \underline{U}_r^T K_r \underline{V}_r \\ \int_{\tilde{A}_{r C}^{j(i)}} \underline{p}_r \cdot \underline{v}_r dA &= \sum_{i \in C_w} \underline{p}_{r j(i)}^T M_{r j(i)} \underline{v}_{r j(i)} = \underline{F}_r(\underline{U}_{w C}, \underline{U}_{r C})^T \underline{V}_r \end{aligned} \quad (3.19)$$

nelle quali $K_{w h}$ e $K_{r l}$ sono le matrici di rigidezza relative agli elementi $h \in T_w, l \in T_r$ e

$$M_{w i} = \int_{\tilde{A}_{w C}^i} N_{w i} dA \quad M_{r j(i)} = \int_{\tilde{A}_{r C}^{j(i)}} N_{r j(i)} dA. \quad (3.20)$$

Le matrici di rigidezza globali K_w e K_r sono simmetriche, definite positive e sparse mentre i vettori \underline{F}_w e \underline{F}_r , che contengono i termini derivanti dalle pressioni di contatto, sono anch'essi sparsi. Anche le matrici di rigidezza globali inoltre sono state calcolate direttamente nei sistemi di riferimento $O_w x_w y_w z_w$ e $O_r x_r y_r z_r$; di conseguenza esse non variano durante la simulazione dinamica (vedi Fig. 3.1) e possono quindi

essere facilmente costruite offline senza andare ad appesantire il carico computazionale.

Combinando insieme le equazioni 3.9 e 3.19 si ottiene

$$\begin{aligned}\underline{U}_w^T K_w \underline{V}_w &= \underline{F}_w(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC})^T \underline{V}_w & \forall \underline{V}_w \in \mathbb{R}^{3(N_w - N_{wD})} \\ \underline{U}_r^T K_r \underline{V}_r &= \underline{F}_r(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC})^T \underline{V}_r & \forall \underline{V}_r \in \mathbb{R}^{3(N_r - N_{rD})}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Infine, dal momento che le matrici K_w e K_r sono simmetriche ed i vettori \underline{V}_w e \underline{V}_r sono arbitrari, si perviene al seguente sistema non lineare di equazioni algebriche:

$$\begin{aligned}K_w \underline{U}_w &= \underline{F}_w(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC}) \\ K_r \underline{U}_r &= \underline{F}_r(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC})\end{aligned}\quad (3.22)$$

dove, come detto in precedenza, gli spostamenti legati al contatto \underline{U}_{wC} , \underline{U}_{rC} sono un sottoinsieme degli spostamenti complessivi \underline{U}_w , \underline{U}_r .

Riassumendo, l'equazione 3.22 costituisce la cosiddetta formulazione sparsa del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello di contatto. Il sistema non lineare in questione è caratterizzato da matrici (K_w e K_r) sparse di grandi dimensioni (dipendenti dalla risoluzione delle mesh e tipicamente comprese nel range $10^4 \div 10^5$) che tuttavia possono essere calcolate direttamente offline.

La conoscenza degli spostamenti \underline{U}_w , \underline{U}_r (valutati risolvendo l'equazione 3.22) permette di calcolare gli altri output del modello quali le aree di contatto A_{wC} e A_{rC} (sulle quali nessuna ipotesi specifica è stata fatta e che, di conseguenza, possono essere formate anche da più parti disgiunte come nel caso di contatto multiplo) e gli stress σ_w e σ_r . Le forze di contatto \underline{F}_{wC} e \underline{F}_{rC} sono state invece calcolate per integrazione numerica:

$$\underline{F}_{wC} = \sum_{i \in C_w} |\tilde{A}_{wC}^i| \underline{p}_{wi} \quad \underline{F}_{rC} = \sum_{i \in C_w} |\tilde{A}_{rC}^{j(i)}| \underline{p}_{rj(i)} \quad (3.23)$$

3.3.2.2 La formulazione ridotta

La formulazione ridotta consiste in una rielaborazione del problema discreto introdotto nel paragrafo 3.3.2.1 (equazione 3.22). Tale rielaborazione risulterà estremamente vantaggiosa sia in termini di accuratezza che di efficienza numerica (performance degli algoritmi destinati alla risoluzione del problema discreto e consumo di memoria).

Da un punto di vista modellistico la formulazione ridotta del problema discreto (derivante dalla discretizzazione del modello di contatto) mira a separare la parte di problema riguardante la sola impronta di contatto dal resto del problema. Tale separazione produrrà una consistente riduzione delle dimensioni caratteristiche del problema stesso a tutto vantaggio dell'accuratezza e dell'efficienza numerica.

L'equazione 3.22 può essere riscritta nella seguente forma

$$\begin{aligned}\underline{U}_w &= H_w \underline{F}_w(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC}) \\ \underline{U}_r &= H_r \underline{F}_r(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC})\end{aligned}\quad (3.24)$$

nelle quali le matrici $H_w = K_w^{-1}$ e $H_r = K_r^{-1}$ sono simmetriche, definite positive e piene. Come K_w e K_r , anche H_w e H_r non cambiano durante la simulazione e possono essere calcolate direttamente offline; tuttavia, essendo matrici piene, la loro memorizzazione può richiedere un elevato consumo di memoria.

Suddividendo formalmente gli spostamenti \underline{U}_w , \underline{U}_r in spostamenti relativi al contatto \underline{U}_{wC} , \underline{U}_{rC} (vedi paragrafo 3.3.2.1) e spostamenti relativi al resto del problema \underline{U}_{wNC} , \underline{U}_{rNC} , l'equazione (3.24) diventa

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \underline{U}_{wNC} \\ \underline{U}_{wC} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} H_w^{11} & H_w^{12} \\ H_w^{21} & H_w^{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{f}_w(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \underline{U}_{rNC} \\ \underline{U}_{rC} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} H_r^{11} & H_r^{12} \\ H_r^{21} & H_r^{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{f}_r(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC}) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

In questo modo la seconda e la quarta componente della 3.25 sono sufficienti per determinare gli spostamenti relativi al contatto \underline{U}_{wC} , \underline{U}_{rC} :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{wC} &= H_w^{22} \underline{f}_w(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC}) \\ \underline{U}_{rC} &= H_r^{22} \underline{f}_r(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC})\end{aligned}\quad (3.26)$$

Le matrici H_w^{22} e H_r^{22} hanno le stesse proprietà di H_w e H_r ma, in questo caso, le loro dimensioni caratteristiche sono molto inferiori. Al contrario di quanto accade nella formulazione sparsa, le matrici H_w^{22} e H_r^{22} cambiano durante la simulazione e di conseguenza devono essere costruite direttamente online; la loro costruzione tuttavia risulta particolarmente veloce e consiste nella semplice estrazione delle sottomatrici H_w^{22} e H_r^{22} dalle matrici originali H_w e H_r . I vettori \underline{f}_w e \underline{f}_r infine sono pieni.

I rimanenti spostamenti \underline{U}_{wNC} , \underline{U}_{rNC} relativi alla parte restante del problema possono essere valutati mediante la prima e la terza componente della 3.25:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{wNC} &= H_w^{12} \underline{f}_w(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC}) \\ \underline{U}_{rNC} &= H_r^{12} \underline{f}_r(\underline{U}_{wC}, \underline{U}_{rC})\end{aligned}\quad (3.27)$$

Riassumendo, l'equazione 3.26 costituisce la cosiddetta formulazione ridotta del problema discreto. Il sistema non lineare in questione è questa volta caratterizzato da matrici (H_w^{22} e H_r^{22}) piene e di dimensioni estremamente inferiori rispetto a quelle della formulazione sparsa (dipendenti in questo caso dal numero degli elementi attivi e tipicamente comprese nel range $10^2 \div 10^3$); tali matrici inoltre devono essere costruite direttamente online a partire dalle matrici originali H_w e H_r mediante una semplice estrazione (la memorizzazione delle matrici originali può richiedere un elevato consumo di memoria).

La formulazione ridotta (equazione 3.26) si basa, da un punto di vista modellistico, sulla separazione della parte di problema riguardante la sola impronta di contatto dal resto del problema. Tale operazione produce una consistente riduzione delle dimensioni caratteristiche del problema stesso a tutto vantaggio dell'accuratezza e dell'efficienza numerica.

La conoscenza degli spostamenti \underline{U}_w , \underline{U}_r (valutati risolvendo le equazioni 3.26 e 3.27) permette nuovamente di calcolare gli altri output del modello quali le aree di contatto A_{wC} e A_{rC} (sulle quali nessuna ipotesi specifica è stata fatta e che, di conseguenza, possono essere formate anche da più parti disgiunte come nel caso di contatto multiplo) e gli stress σ_w e σ_r . Le forze di contatto \underline{F}_{wC} e \underline{F}_{rC} sono state invece calcolate per integrazione numerica:

$$\underline{F}_{wC} = \sum_{i \in C_w} |\tilde{A}_{wC}^i| \underline{p}_{wi} \quad \underline{F}_{rC} = \sum_{i \in C_w} |\tilde{A}_{rC}^{j(i)}| \underline{p}_{rj(i)} \quad (3.28)$$

3.3.3 La risoluzione numerica del problema discreto

In questo paragrafo verranno introdotti gli algoritmi numerici impiegati nella risoluzione del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello di contatto. Per completezza verranno considerate entrambe le formulazioni del problema. [B23] [B24] [B25] [B26] [B27]

3.3.3.1 La risoluzione numerica della formulazione sparsa

Come accennato in precedenza, la formulazione sparsa (equazione 3.22) del problema discreto consiste in un sistema non lineare di equazioni algebriche caratterizzato da matrici (K_w e K_r) sparse di grandi dimensioni (dipendenti dalla risoluzione delle mesh e tipicamente comprese nel range $10^4 \div 10^5$) che tuttavia possono essere calcolate direttamente offline.

Particolarmente efficienti nella soluzione di problemi di questo genere si sono rivelati i solutori non lineari basati sui metodi di Newton – Krylov. Tali procedure sono particolari metodi di tipo Newton per problemi della forma $\underline{F}(x)=0$ dove \underline{F} è una generica funzione non lineare. Più in particolare, i metodi di Krylov vengono impiegati per risolvere in maniera approssimata i sistemi lineari generati dal metodo di Newton:

$$F'(\underline{x}_k)\underline{s}_k = -\underline{F}(\underline{x}_k) \quad (3.29)$$

dove F' è lo Jacobiano di \underline{F} , \underline{x}_k è la k -esima iterata prodotta dal metodo di Newton ed \underline{s}_k è il k -esimo passo di Newton. I metodi di Krylov calcolano cioè, ad ogni iterazione, il cosiddetto passo approssimato di Newton \tilde{s}_k che soddisfa la seguente condizione:

$$\|\underline{F}'(\underline{x}_k)\tilde{s}_k + \underline{F}(\underline{x}_k)\| \leq \eta_k \|\underline{F}(\underline{x}_k)\| \quad \eta_k \in [0,1] \quad (3.30)$$

nella quale i termini forzanti η_k vengono usati per controllare il livello di accuratezza. Per tale motivo i metodi di Newton – Krylov appartengono alla classe dei metodi di Newton inesatti. Nel caso in esame sono stati scelti dei termini forzanti costanti $\eta_k = \eta \leq 0.5 \forall k$ mentre l'intero algoritmo termina se è soddisfatto il seguente criterio di arresto:

$$\|\underline{F}(\underline{x}_k)\| < Tol. \quad (3.31)$$

Per quanto riguarda il problema studiato, numerosi esperimenti numerici hanno mostrato come, tra tutti i metodi di Krylov, il migliore sia risultato il BiCGStab, un solutore lineare iterativo basato sul metodo del gradiente biconiugato.

Il particolare solutore non lineare appena introdotto, impiegato nella soluzione del problema 3.22, è noto in letteratura come metodo Newton – BiCGStab.

I solutori lineari iterativi come il BiCGStab necessitano spesso di un buon preconditionatore avente lo scopo di migliorare le caratteristiche di convergenza del

metodo. In molti casi è il problema stesso a suggerire la struttura ottimale del preconditionatore; se si considera il problema 3.22, il preconditionatore è stato costruito come segue:

$$P = \begin{pmatrix} K_w & 0 \\ 0 & K_r \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Dal momento che l'equazione 3.22 è solo debolmente non lineare, il preconditionatore P si rivela una buona approssimazione dello Jacobiano di \underline{F} (equazione 3.29). Tale preconditionatore inoltre è costante poiché non dipende né dalla generica iterazione del solutore non lineare (metodo Newton – BiCGStab) né dalla particolare configurazione relativa ruota – rotaia; di conseguenza anche questa grandezza può essere determinata direttamente offline senza andare ad appesantire il carico computazionale.

In generale il solutore lineare iterativo BiCGStab non richiede la conoscenza dell'intera matrice P ma solamente una sua fattorizzazione. Nel caso in esame è stata impiegata la fattorizzazione di Cholesky incompleta dal momento che la matrice P è non solo simmetrica e definita positiva ma anche sparsa. La fattorizzazione effettua inoltre un riordinamento del preconditionatore P in modo tale da trarre vantaggio dalla sua sparsità sia in termini di efficienza numerica che di consumo di memoria.

Un interessante aspetto del solutore non lineare Newton – BiCGStab è che esso richiede, in fase di implementazione, solamente l'azione dello Jacobiano F' su generici vettori \underline{v} e non il calcolo e la memorizzazione dell'intera matrice F' . In questo caso infatti il prodotto $F'(\underline{x})\underline{v}$ può essere approssimato direttamente per mezzo di differenze finite:

$$F'(\underline{x})\underline{v} \approx \frac{\underline{F}(\underline{x} + \varepsilon \underline{v}) - \underline{F}(\underline{x})}{\varepsilon} \quad (3.33)$$

dove $\varepsilon > 0$ è uno scalare piccolo a sufficienza (il valore di ε deve garantire il giusto compromesso tra accuratezza, stabilità ed efficienza numerica). Il metodo in questione è di conseguenza matrix free.

Infine è importante sottolineare come, se la garanzia di convergenza del solutore non lineare (Newton - BiCGStab) è soltanto locale, l'algoritmo possa fallire nel determinare la soluzione del problema anche qualora una soluzione effettiva esista davvero. Per garantire la convergenza globale del metodo, l'intera procedura (Newton - BiCGStab) è stata quindi inserita all'interno di una strategia di globalizzazione. Per

quanto concerne il problema studiato è stata impiegata una line search monotona (equipaggiata con la regola di Armijo) con un massimo di 10 backtrack per ogni iterazione non lineare.

Per quanto riguarda invece l'integrazione temporale del modello complessivo (modello multibody e modello di contatto, vedi Fig. 3.1), sono stati testati numerosi solutori di equazioni differenziali ordinarie (ODE): più nel dettaglio sono stati considerati vari solutori espliciti a passo variabile aventi ordine differente. Durante la simulazione della dinamica del veicolo inoltre le condizioni iniziali del solutore non lineare (Newton - BiCGStab) sono state continuamente aggiornate in modo tale da velocizzare la convergenza del metodo e, di conseguenza, ridurre i tempi di calcolo. In altre parole la soluzione del problema 3.22 all'istante temporale corrente è stata utilizzata come condizione iniziale del solutore non lineare all'istante temporale successivo.

3.3.3.2 La risoluzione numerica della formulazione ridotta

La formulazione ridotta (equazione 3.26) consiste invece in un sistema non lineare caratterizzato da matrici (H_w^{22} e H_r^{22}) piene e di dimensioni estremamente inferiori rispetto a quelle della formulazione sparsa (dipendenti in questo caso dal numero degli elementi attivi e tipicamente comprese nel range $10^2 \div 10^3$); tali matrici inoltre devono essere costruite direttamente online a partire dalle matrici originali H_w e H_r mediante una semplice estrazione (la memorizzazione delle matrici originali può richiedere un elevato consumo di memoria).

Lo stesso solutore non lineare descritto nel paragrafo 3.3.3.1 (Newton – BiCGStab) è stato impiegato anche per risolvere la formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26). I metodi di Newton – Krylov (ai quali il solutore in questione appartiene) si rivelano particolarmente adatti per sistemi di equazioni sparsi e di grandi dimensioni come l'equazione 3.22 (formulazione sparsa); tuttavia, data l'accuratezza e l'estrema efficienza di tali procedure, si è ritenuto opportuno applicarle pure al caso della formulazione ridotta in modo tale da studiarne il comportamento anche al di fuori del loro contesto naturale. Per quanto riguarda invece il solutore lineare iterativo (BiCGStab), vista la struttura del nuovo problema (equazione 3.26), non è stato impiegato alcun preconditionatore.

A causa delle ridotte dimensioni della formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26), i sistemi lineari 3.29 generati dal metodo di Newton possono anche essere risolti mediante solutori lineari diretti (basati ad esempio sulla fattorizzazione LU della matrice F'). Di conseguenza un secondo solutore non lineare caratterizzato da questo tipo di approccio (noto in letteratura come metodo Newton – LU) è stato impiegato nella soluzione del problema discreto 3.26. Al contrario di quanto avviene per il solutore non lineare Newton – BiCGStab, il metodo Newton – LU necessita del calcolo e della memorizzazione dello Jacobiano F' della funzione ad ogni iterazione del solutore.

Per garantire la convergenza globale del metodo, l'intera procedura (Newton - LU) è stata inserita all'interno della stessa strategia di globalizzazione descritta nel paragrafo 3.3.3.1 ovvero una line search monotona (equipaggiata con la regola di Armijo) con un massimo di 10 backtrack per ogni iterazione non lineare.

Nel seguito del capitolo 3 le performance di entrambi i solutori non lineari utilizzati nella soluzione del problema discreto 3.26 (ovvero i metodi Newton – BiCGStab e Newton – LU) verranno confrontate tra loro sia in termini di accuratezza che di efficienza.

Come nel caso della formulazione sparsa, per quanto concerne l'integrazione temporale del modello complessivo (modello multibody e modello di contatto, vedi Fig. 3.1), sono stati testati numerosi solutori di equazioni differenziali ordinarie (ODE): più nel dettaglio sono stati considerati vari solutori espliciti a passo variabile aventi ordine differente. Durante la simulazione della dinamica del veicolo inoltre le condizioni iniziali del solutore non lineare (Newton - LU) sono state continuamente aggiornate in modo tale da velocizzare la convergenza del metodo e, di conseguenza, ridurre i tempi di calcolo. In altre parole la soluzione del problema 3.26 all'istante temporale corrente è stata utilizzata come condizione iniziale del solutore non lineare all'istante temporale successivo.

3.4 Il modello multibody del veicolo ferroviario

Analogamente al caso dei modelli di contatto globali (capitolo 2), come veicolo di riferimento è stato scelto il Manchester Wagon le cui caratteristiche fisiche e geometriche possono essere reperite in letteratura. [B15]

Di conseguenza il modello multibody del veicolo ferroviario (Fig. 3.12) è del tutto analogo a quello descritto nel paragrafo 2.4 al quale si rimanda per una descrizione più accurata della vettura (si vedano in particolare le Fig. 2.14 – 2.17 e le Tab. 2.13 – 2.18).



Figura 3.12 Modello multibody del Manchester Wagon

3.5 L'implementazione del modello in Matlab/Simulink

Anche in questo caso, come accennato nell'introduzione e nel paragrafo 3.1, il modello dell'intera vettura (vedi Fig. 3.1) è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink. [B21]

Per quanto riguarda il modello multibody del veicolo, si è fatto sempre uso di SimMechanics, un toolbox di Matlab appositamente dedicato alla dinamica multibody (vedi paragrafo 2.5).

In accordo con l'algebra a blocchi di SimMechanics, il modello multibody del Manchester Wagon [B15] presenta una struttura modulare articolata in vari livelli. Il primo livello, riportato in Fig. 3.13, è composto dalle seguenti parti:

- corpo della cassa
- condizioni iniziali della cassa
- sottosistema del carrello anteriore
- sottosistema del carrello posteriore.

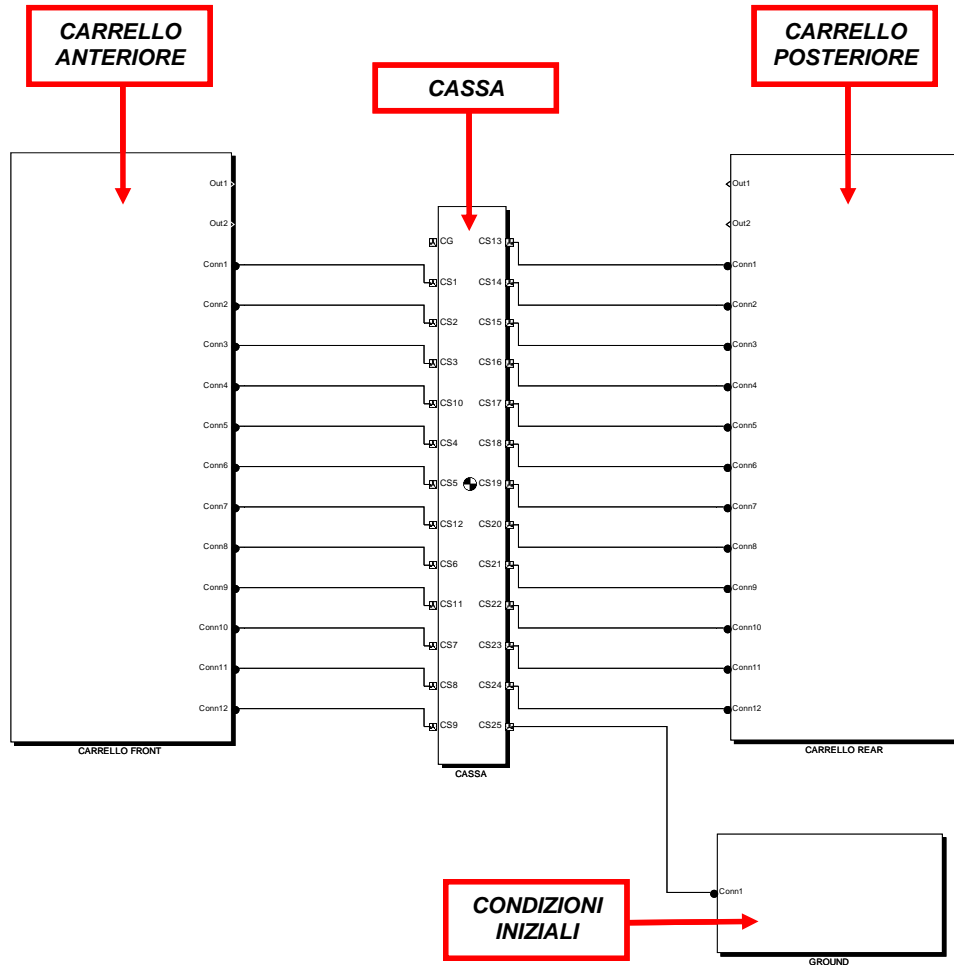


Figura 3.13 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: primo livello

Il secondo livello (Fig. 3.14) è costituito invece dai sottosistemi dedicati ai due carrelli. Tali sottosistemi contengono i blocchi associati alle varie componenti del carrello ovvero:

- corpo del telaio
- corpi delle sale (anteriore e posteriore)
- condizioni iniziali del telaio e delle sale
- sospensioni secondarie
- sospensioni primarie
- modello di contatto (un blocco per ciascuna sala; nel caso in esame tale blocco contiene i due modelli di contatto relativi ad entrambe le coppie ruota – rotaia della sala in questione (vedi Fig. 3.16)).

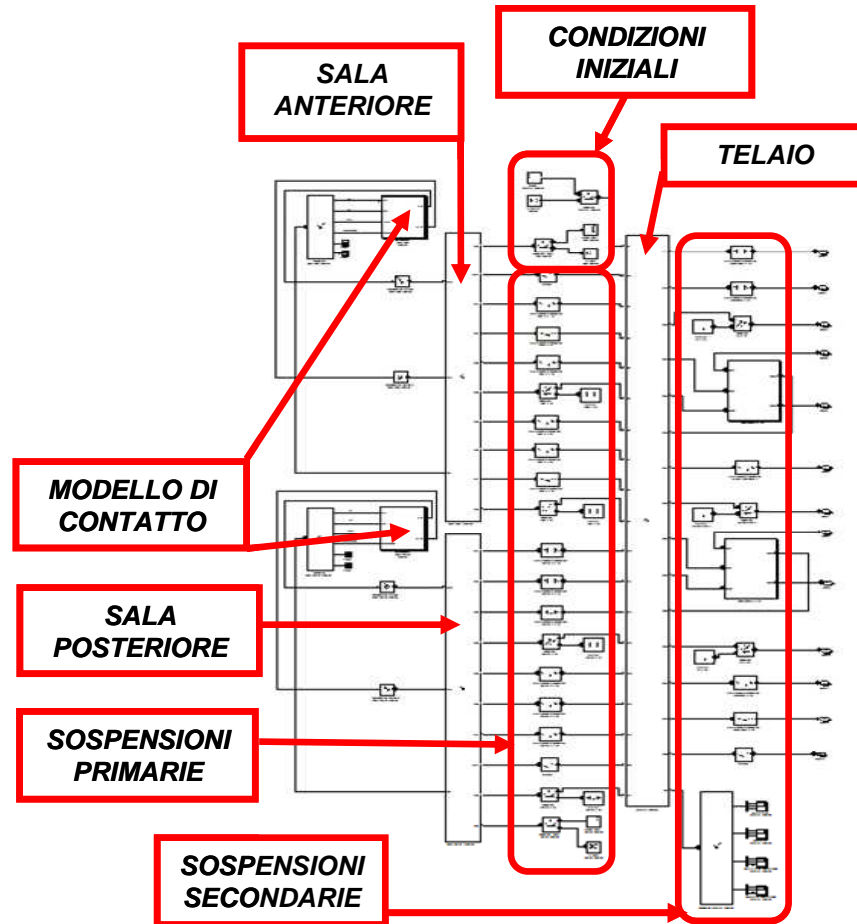


Figura 3.14 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: secondo livello

In Fig. 3.15 è riportato nel dettaglio il blocco che contiene i due modelli di contatto relativi ad entrambe le coppie ruota – rotaia della sala (Fig. 3.16). Più in particolare sono visibili, in entrata, le variabili cinematiche che descrivono il moto della sala rispetto ai binari ed, in uscita, la forza ed il momento risultanti agenti sulla sala stessa (Fig. 3.1).

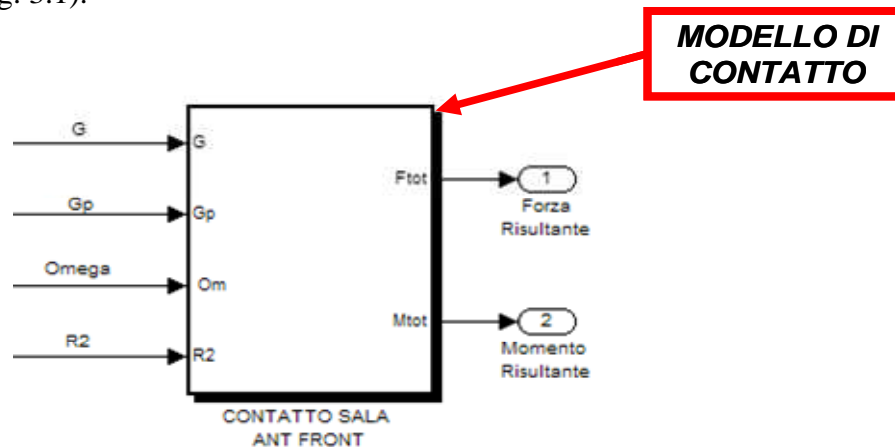


Figura 3.15 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: secondo livello, modello di contatto

Il terzo livello (Fig. 3.16) è contenuto nel blocco dedicato ai due modelli di contatto e comprende le seguenti parti:

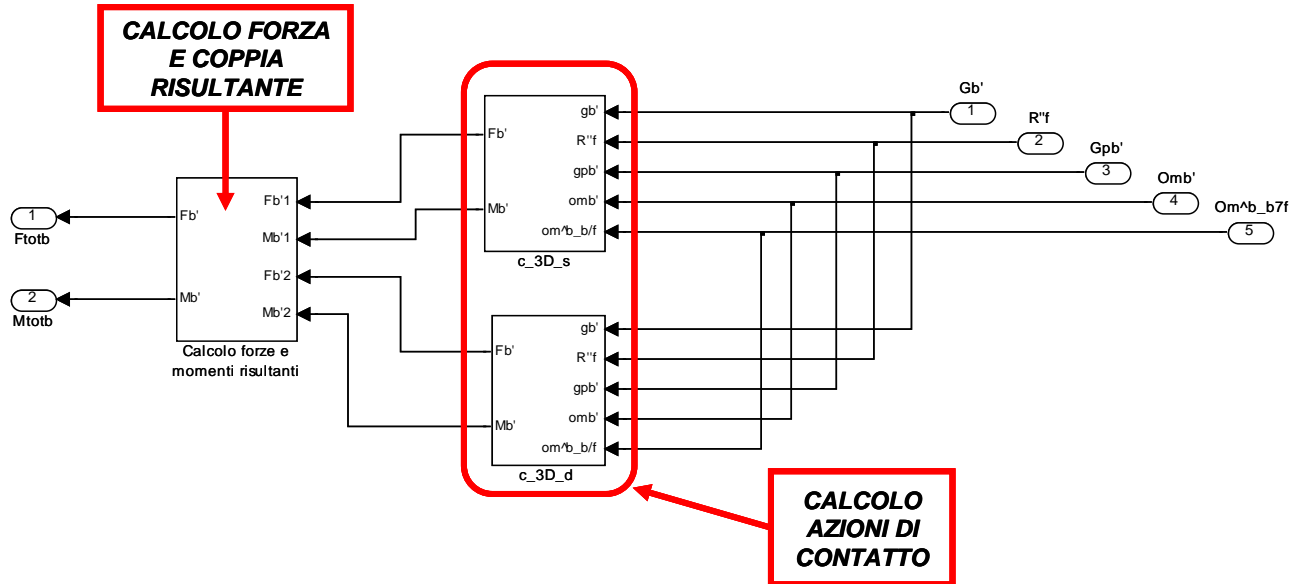


Figura 3.16 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: terzo livello

- calcolo delle azioni di contatto agenti su ciascuna ruota (i due modelli di contatto valutano la cinematica relativa alla singola coppia ruota – rotaia a partire da quella della sala e successivamente calcolano le azioni di contatto)
- valutazione della forza e del momento risultanti agenti sull'intera sala a partire dalle azioni di contatto agenti sulle singole ruote.

Il quarto livello infine (Fig. 3.17) è situato all'interno nei blocchi relativi ai singoli modelli di contatti e contiene gli algoritmi numerici destinati alla soluzione del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello locale di contatto (equazioni di Navier e condizioni analitiche di contatto). Si vedano in proposito il paragrafo 3.3.1 per il modello locale di contatto ed i paragrafi 3.3.2 e 3.3.3 per gli algoritmi numerici.

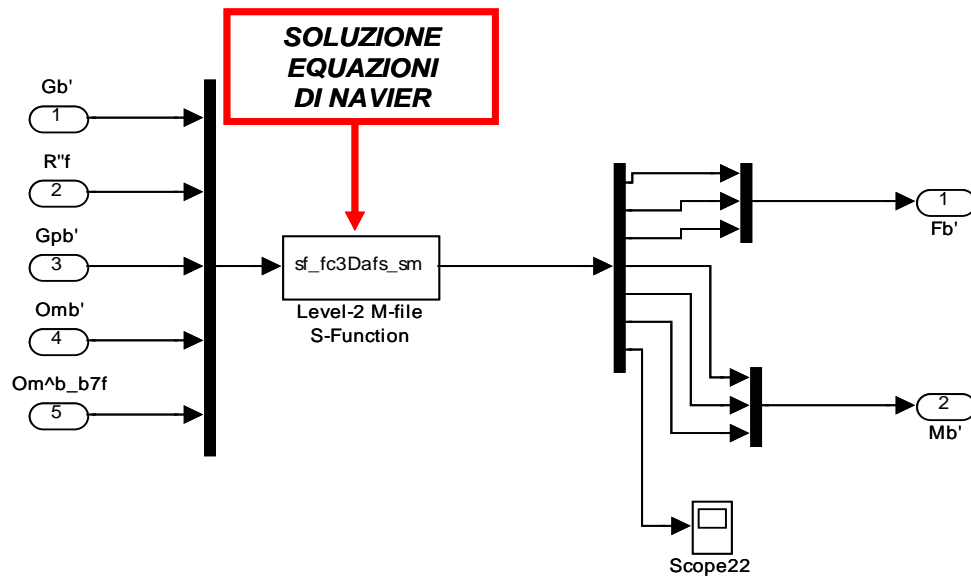


Figura 3.17 Modello multibody del veicolo in SimMechanics: quarto livello

Anche in questo caso gli algoritmi numerici destinati alla soluzione del problema discreto sono stati implementati all'interno di apposite CS – function, una particolare architettura Matlab che permette di far interagire in modo efficiente l'ambiente Matlab/Simulink con l'ambiente C/C++.

Ulteriori dettagli sull'implementazione di tali algoritmi possono essere reperiti in letteratura. [P9] [P12] [P13] [B21]

In Fig. 3.18 e 3.19 è riportata schematicamente l'architettura di una CS-function generica in ambiente C/C++. Per chiarezza in Fig. 3.18 è stata evidenziata la parte di funzione che gestisce l'interazione con l'ambiente Matlab/Simulink (sia in termini di input che di output). In Fig. 3.19 sono state invece sottolineate le sottofunzioni all'interno delle quali sono stati implementati gli algoritmi numerici destinati alla soluzione del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello locale di contatto (equazioni di Navier e condizioni analitiche di contatto). Si vedano i paragrafi 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3.

```

#define S_FUNCTION_NAME sfuntmpl_basic
#define S_FUNCTION_LEVEL 2
#include "simstruc.h"

static void mdlInitializeSizes(SimStruct *S)
{
    ssSetNumSFcnParams(S, 0);
    if (ssGetNumSFcnParams(S) != ssGetSFcnParamsCount(S))
        {return;}

    ssSetNumContStates(S, 0);
    ssSetNumDiscStates(S, 0);

    if (!ssSetNumInputPorts(S, 1)) return;
    ssSetInputPortWidth(S, 0, 1);
    ssSetInputPortRequiredContiguous(S, 0, true);

    ssSetInputPortDirectFeedThrough(S, 0, 1);

    if (!ssSetNumOutputPorts(S, 1)) return;
    ssSetOutputPortWidth(S, 0, 1);

    ssSetNumSampleTimes(S, 1);
    ssSetNumRWork(S, 0);
    ssSetNumIWork(S, 0);
    ssSetNumPWork(S, 0);
    ssSetNumModes(S, 0);
    ssSetNumNonsampledZCs(S, 0);

    ssSetOptions(S, 0);
}

static void mdlInitializeSampleTimes(SimStruct *S)
{
    ssSetSampleTime(S, 0, CONTINUOUS_SAMPLE_TIME);
    ssSetOffsetTime(S, 0, 0.0);
}

```

**GESTIONE
DI INPUT
ED OUTPUT**

Figura 3.18 Architettura di una CS – Function (prima parte)


```

#define MDL_INITIALIZE_CONDITIONS
#if defined(MDL_INITIALIZE_CONDITIONS)

static void mdlInitializeConditions(SimStruct *S)
{
}
#endif

#define MDL_START
#if defined(MDL_START)

static void mdlStart(SimStruct *S)
{
}
#endif

static void mdlOutputs(SimStruct *S, int_T tid)
{
}

#define MDL_UPDATE
#if defined(MDL_UPDATE)

static void mdlUpdate(SimStruct *S, int_T tid)
{
}
#endif

#define MDL_DERIVATIVES
#if defined(MDL_DERIVATIVES)

static void mdlDerivatives(SimStruct *S)
{
}
#endif

static void mdlTerminate(SimStruct *S)
{
}

#ifdef MATLAB_MEX_FILE
#include "simulink.c"
#else
#include "cg_sfun.h"

```

**SOLUZIONE
EQUAZIONI
DI NAVIER**

Figura 3.19 Architettura di una CS – Function (seconda parte)

3.6 Simulazioni dinamiche

Come nel caso dei modelli di contatto globali (capitolo 2), per poter valutare le performance complessive dell'intero modello (modello multibody e modello di contatto) è stata effettuata un'ampia campagna di simulazioni dinamiche. La dinamica di marcia del veicolo è stata simulata su molti tracciati ferroviari differenti ottenuti variando le principali caratteristiche geometriche del tracciato stesso entro i range riportati in Tab. 3.1: [B5] [B15] [B16]

K	$-0.1 \div 0.1 \text{ m}^{-1}$
β_c	$-0.15 \div 0.15 \text{ rad}$
p	$-0.05 \div 0.05$
α_p	$1/40 \div 1/20 \text{ rad}$
V	$0 \div 300 \text{ km/h}$
μ	$0 \div 0.5$

Tabella 3.1 *Caratteristiche del tracciato: range di variazione*

dove K è la curvatura, β_c l'angolo di cant, p la pendenza, α_p l'angolo di posa, V la velocità di percorrenza e μ il coefficiente di attrito.

Nelle simulazioni in questione sono stati impiegate entrambe le formulazioni del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello locale di contatto ovvero la formulazione sparsa e quella ridotta (si vedano in proposito i paragrafi 3.3.2 e 3.3.3). In tal modo è stato testato il comportamento di entrambe le procedure una volta inserite all'interno del modello multibody del veicolo.

Come accennato in precedenza il modello multibody della stessa vettura (Manchester Wagon [B15]) è stato poi implementato anche in ambiente Simpack Rail, un software dedicato all'analisi della dinamica dei veicoli ferroviari ampiamente testato e validato. In questo caso però il modello multibody è stato equipaggiato con un modello di contatto standard scelto tra quelli presenti all'interno di Simpack Rail (ed in grado di considerare il contatto multiplo). Tale modello appartiene alla classe dei modelli globali e si basa sull'approccio semielastico. I punti di contatto vengono determinati attraverso procedure approssimate (basate su LUT e su ipotesi semplificative sulla geometria del problema). Le forze normali di contatto vengono calcolate in funzione della penetrazione mentre le teorie di Hertz e di Kalker

permettono di valutare le forze tangenziali di contatto e le caratteristiche dell'impronta di contatto. [B4] [B5] [B6] [B7] [B16] [B20] [B22]

Il paragone tra i risultati ottenuti con il modello implementato in Matlab/Simulink e quelli ottenuti con il modello implementato in Simpack Rail ha permesso un'accurata ed affidabile validazione sia del nuovo modello complessivo del veicolo che del nuovo modello locale di contatto.

Nella prima parte del paragrafo le performance relative alle due formulazioni del problema discreto verranno confrontate tra loro sia in termini di accuratezza che di efficienza. [B21] [B23] [B24] [B25] [B26] [B27]

Successivamente, dopo una breve descrizione del modello multibody implementato in ambiente Simpack Rail (per la quale si rimanda anche al paragrafo 2.6.1), verranno analizzate le performance dei modelli complessivi del veicolo, implementati rispettivamente in ambiente Matlab/Simulink ed in ambiente Simpack Rail. Per quanto riguarda l'accuratezza di tali modelli verrà descritta una simulazione della dinamica di marcia del Manchester Wagon [B15] effettuata su un tracciato ferroviario curvilineo particolarmente impegnativo (caratterizzato da una ridotta curvatura e percorso a velocità sostenuta). Per quanto riguarda invece l'efficienza numerica verranno riportati solamente i tempi di calcolo relativi al modello complessivo di veicolo implementato in ambiente Matlab/Simulink. Le performance di tale modello infatti non possono essere direttamente confrontate, in termini di efficienza, con quelle del modello Simpack Rail dal momento che quest'ultimo (come d'altronde tutti i principali software multibody commerciali) si basa su modelli di contatto globali e di conseguenza non comparabili con il modello di contatto locale descritto in questo capitolo.

Tutte le simulazioni sono state effettuate su una macchina dotata di un processore Intel Xeon da 2.66 GHz e 8GB di RAM.

3.6.1 Performance dei nuovi algoritmi

In questo paragrafo le performance relative alle due formulazioni del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello locale di contatto (sparsa e ridotta) verranno confrontate tra loro sia in termini di accuratezza che di efficienza.

Tra tutte le varie prove realizzate (vedi inizio del paragrafo 3.6) verrà considerata, a titolo di esempio, una simulazione della dinamica di marcia del

Manchester Wagon [B15] effettuata su un tracciato ferroviario curvilineo particolarmente impegnativo. I dati concernenti il tracciato in questione sono riportati in Tab. 3.2.

K	$-1/1200 \text{ m}^{-1}$
β_c	0.0418 rad
p	0
α_p	1/40 rad
V	162 km/h
μ	0.3

Tabella 3.2 *Caratteristiche del tracciato: simulazione dinamica*

Per studiare il comportamento della formulazione sparsa (equazione 3.22) e della formulazione ridotta (equazione 3.26) del problema discreto, sono stati dapprima condotti molti esperimenti con diversi solutori di equazioni differenziali ordinarie (ODE): più nel dettaglio sono stati impiegati vari solutori espliciti a passo variabile aventi ordine differente come l'ODE23 (Bogacki - Shimpine) e l'ODE45 (Dormand - Prince). I valori dei principali parametri numerici relativi alle simulazioni in questione sono riportati in Tab. 3.3 per entrambe le formulazioni:

Formulazione	Sparsa (equazione 3.22)	Ridotta (equazione 3.26)
$RelTol / AbsTol$	$10^{-8} / 10^{-6}$	$10^{-8} / 10^{-6}$
Solutori Non Lineare	Newton - BiCGStab	Newton - BiCGStab
$Tol / MaxItNonLin$	$10^{-7} / 20$	$10^{-7} / 20$
$\eta / MaxItLin$	0.01 / 20	0.01 / 20

Tabella 3.3 *Parametri numerici*

nella quale

- $RelTol$ e $AbsTol$ rappresentano rispettivamente la tolleranza relativa ed assoluta del solutore di equazioni differenziali ordinarie (ODE)
- Tol è la tolleranza del solutore non lineare (vedi paragrafo 3.3.3) mentre $MaxItNonLin$ è il limite massimo di iterazioni non lineari concesse a tale solutore

- η è il termine forzante (costante) associato al solutore lineare iterativo (vedi paragrafo 3.3.3) mentre *MaxItLin* rappresenta il limite massimo di iterazioni concesse a tale solutore.

In particolare i valori dei parametri *RelTol*, *AbsTol*, *Tol* ed η sono stati scelti in modo tale da assicurare una buona accuratezza (in termini di spostamenti e pressioni di contatto) ed, allo stesso tempo, minimizzare il carico computazionale.

In Tab. 3.4 e 3.5 sono stati riassunti i risultati ottenuti usando l'integratore ODE23 e relativi rispettivamente alla formulazione sparsa (equazione 3.22) ed alla formulazione ridotta (equazione 3.26). Per ogni coppia di contatto ruota – rotaia (otto in tutto, due per ciascuna sala) sono state considerate le seguenti grandezze:

- il numero *CPS* di problemi di contatto risolti durante la simulazione dinamica della marcia del veicolo ferroviario (ovviamente uguale per tutte le otto coppie di contatto dal momento che, per ogni valutazione di funzione, il solutore di equazioni differenziali ordinarie richiede la contemporanea soluzione di tutti gli otto problemi di contatto)
- il tempo medio di calcolo *CT* relativo a ciascuno degli otto modelli di contatto (ovvero il tempo necessario per risolvere un singolo problema di contatto) ed il tempo di calcolo totale richiesto da tutti gli otto modelli di contatto (non comprendente cioè il tempo richiesto dal solutore di equazioni differenziali ordinarie)
- il numero totale di iterazioni *IterNonLin* del solutore non lineare e gli errori *ErrorNonLin* dovuti alla mancata convergenza di tale solutore
- il numero totale di iterazioni *IterLin* del solutore lineare e gli errori *ErrorLin* dovuti alla mancata convergenza di tale solutore.

L'asimmetria nei dati riportati in Tab. 3.4 e 3.5 è dovuta all'asimmetria del tracciato ferroviario sul quale la prova è stata effettuata (in questo caso una curva a destra (vedi Tab. 3.2)).

Modello Locale di Contatto: Formulazione Sparsa (equazione 3.22)						
Coppia Ruota - Rotaia	<i>CPS</i>	<i>CT: 14^h 21^m</i>	<i>IterNonLin</i>	<i>ErrorNonLin</i>	<i>IterLin</i>	<i>ErrorLin</i>
1L	139645	48.9 (ms)	182266	15	1123071	2272
1R	139645	43.5 (ms)	169278	5	969991	1252
2L	139645	49.0 (ms)	182673	3	1204867	2640
2R	139645	43.4 (ms)	168796	10	1023716	1122
3L	139645	49.5 (ms)	185937	5	1201980	2244
3R	139645	42.9 (ms)	167353	7	1001942	1477
4L	139645	50.3 (ms)	184237	5	1261439	2177
4R	139645	42.2 (ms)	164729	8	996849	1060

Tabella 3.4 Performance della formulazione sparsa (equazione 3.22) usando il solutore ODE23

Modello Locale di Contatto: Formulazione Ridotta (equazione 3.26)						
Coppia Ruota - Rotaia	<i>CPS</i>	<i>CT: 3^h 46^m</i>	<i>IterNonLin</i>	<i>ErrorNonLin</i>	<i>IterLin</i>	<i>ErrorLin</i>
1L	150156	12.0 (ms)	162111	13	705742	1428
1R	150156	10.7 (ms)	148925	4	609546	787
2L	150156	12.0 (ms)	160709	3	757143	1659
2R	150156	10.6 (ms)	148501	9	643307	705
3L	150156	12.1 (ms)	163581	4	755329	1410
3R	150156	10.5 (ms)	147231	5	629624	928
4L	150156	12.3 (ms)	162085	4	792693	1368
4R	150156	10.3 (ms)	144923	7	626424	666

Tabella 3.5 Performance della formulazione ridotta (equazione 3.26) usando il solutore ODE23

Similmente in Tab. 3.6 e 3.7 sono state riportate le analoghe grandezze ottenute usando l'integratore ODE45 (riferite, anche in questo caso, sia alla formulazione sparsa (equazione 3.22) che a quella ridotta (equazione 3.26)).

Modello Locale di Contatto: Formulazione Sparsa (equazione 3.22)						
Coppia Ruota - Rotaia	<i>CPS</i>	<i>CT: 22^h 16^m</i>	<i>IterNonLin</i>	<i>ErrorNonLin</i>	<i>IterLin</i>	<i>ErrorLin</i>
1L	181689	58.4 (ms)	283334	23	1973568	3993
1R	181689	52.0 (ms)	260288	7	1704562	2201
2L	181689	58.5 (ms)	280884	5	2117308	4639
2R	181689	51.8 (ms)	259547	16	1798972	1971
3L	181689	59.1 (ms)	285903	7	2112236	3943
3R	181689	51.2 (ms)	257327	9	1760709	2595
4L	181689	60.0 (ms)	283289	7	2216722	3826
4R	181689	50.3 (ms)	253293	12	1751760	1862

Tabella 3.6 Performance della formulazione sparsa (equazione 3.22) usando il solutore ODE45

Modello Locale di Contatto: Formulazione Ridotta (equazione 3.26)						
Coppia Ruota - Rotaia	<i>CPS</i>	<i>CT: 5^h 40^m</i>	<i>IterNonLin</i>	<i>ErrorNonLin</i>	<i>IterLin</i>	<i>ErrorLin</i>
1L	216225	12.5 (ms)	259378	21	1129187	2285
1R	216225	11.1 (ms)	238280	6	975274	1259
2L	216225	12.5 (ms)	257134	5	1211429	2654
2R	216225	11.1 (ms)	237602	14	1029291	1128
3L	216225	12.6 (ms)	261730	6	1208526	2256
3R	216225	10.9 (ms)	235570	8	1007398	1485
4L	216225	12.8 (ms)	259336	6	1268309	2189
4R	216225	10.8 (ms)	231877	11	1002278	1066

Tabella 3.7 Performance della formulazione ridotta (equazione 3.26) usando il solutore ODE45

I risultati mostrano come la formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26) si riveli più efficiente della formulazione sparsa (equazione 3.22) anche se la formulazione ridotta può richiedere un maggior consumo di memoria (vedi paragrafi 3.3.2.2 e 3.3.3.2). In entrambi i casi i solutori di equazioni differenziali ordinarie di ordine basso (come l'ODE23) si sono dimostrati più veloci degli analoghi solutori di ordine più elevato (come l'ODE45).

Inoltre, grazie al continuo aggiornamento delle condizioni iniziali dei solutori non lineari (paragrafi 3.3.3), sia il numero di iterazioni non lineari *IterNonLin* che quello di iterazioni lineari *IterLin* sono piuttosto piccoli rispetto al numero di problemi di contatto risolti *CPS* mentre il numero di errori dovuti alla mancata convergenza dei solutori (*ErrorNonLin* e *ErrorLin*) è sempre assai contenuto ($\leq 1.65\%$).

In accordo con quanto è stato detto nel paragrafo 3.3.3.2, la soluzione della formulazione ridotta (equazione 3.26) del problema discreto, grazie alle contenute dimensioni di quest'ultima, può essere anche ricavata per mezzo di solutori non lineari come il metodo Newton – LU; in questo caso i sistemi lineari generati dal metodo di Newton vengono risolti mediante solutori lineari diretti basati sulla fattorizzazione LU dello Jacobiano F' della funzione. Le Tab. 3.9 e 3.10 contengono rispettivamente i risultati ottenuti usando i solutori non lineari Newton – BiCGStab e Newton – LU. In entrambi i casi è stato impiegato il solutore di equazioni differenziali ordinarie ODE23 mentre i valori dei principali parametri numerici relativi alla simulazione sono riportati in Tab. 3.8.

Formulazione	Ridotta (equazione 3.26)	Ridotta (equazione 3.26)
<i>RelTol / AbsTol</i>	$10^{-8} / 10^{-6}$	$10^{-8} / 10^{-6}$
Solutori Non Lineare	Newton - BiCGStab	Newton - LU
<i>Tol / MaxItNonLin</i>	$10^{-7} / 20$	$10^{-7} / 20$
η / <i>MaxItLin</i>	0.01 / 20	----

Tabella 3.8 Parametri numerici

Solutore Non Lineare: Newton - BiCGStab						
Coppia Ruota - Rotaia	CPS	CT: 3 ^h 46 ^m	IterNonLin	ErrorNonLin	IterLin	ErrorLin
1L	150156	12.0 (ms)	162111	13	705742	1428
1R	150156	10.7 (ms)	148925	4	609546	787
2L	150156	12.0 (ms)	160709	3	757143	1659
2R	150156	10.6 (ms)	148501	9	643307	705
3L	150156	12.1 (ms)	163581	4	755329	1410
3R	150156	10.5 (ms)	147231	5	629624	928
4L	150156	12.3 (ms)	162085	4	792693	1368
4R	150156	10.3 (ms)	144923	7	626424	666

Tabella 3.9 Performance del solutore non lineare Newton - BiCGStab

Solutore Non Lineare: Newton - LU				
Coppia Ruota - Rotaia	CPS	CT: 4 ^h 35 ^m	IterNonLin	ErrorNonLin
1L	141147	15.3 (ms)	137146	11
1R	141147	13.6 (ms)	125991	3
2L	141147	15.3 (ms)	135960	3
2R	141147	13.6 (ms)	125632	8
3L	141147	15.5 (ms)	138390	3
3R	141147	13.4 (ms)	124557	4
4L	141147	15.7 (ms)	137124	3
4R	141147	13.2 (ms)	122605	6

Tabella 3.10 Performance del solutore non lineare Newton - LU

Il paragone tra i risultati (Tab. 3.9 e 3.10) evidenzia come il metodo Newton – BiCGStab sia più efficiente del metodo Newton – LU nonostante le ridotte dimensioni della formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26). In particolare il calcolo e la memorizzazione dell'intero Jacobiano F' della funzione (vedi paragrafo 3.3.3.2) si rivelano essere piuttosto dispendiosi sia in termini di tempi di calcolo che in termini di consumo di memoria. Per quanto riguarda il numero di iterazioni dei solutori (*IterNonLin* e *IterLin*) ed il numero di errori dovuti alla mancata convergenza dei

metodi (*ErrorNonLin* e *ErrorLin*) valgono sempre le stesse considerazioni del caso precedente.

Infine, sempre per quanto concerne la formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26), sono stati condotti vari esperimenti con lo scopo di giustificare la scelta ottimale del termine forzante $\eta = 10^{-2}$ all'interno del solutore non lineare Newton – BiCGStab. Il solutore di equazioni differenziali ordinarie impiegato nella simulazione in questione è sempre l'ODE23 mentre i valori dei principali parametri numerici relativi alla simulazione sono riportati in Tab. 3.11.

Formulazione	Ridotta (equazione 3.26)
<i>RelTol</i> / <i>AbsTol</i>	$10^{-8} / 10^{-6}$
Solutore Non Lineare	Newton - BiCGStab
<i>Tol</i> / <i>MaxItNonLin</i>	$10^{-7} / 20$
η / <i>MaxItLin</i>	0.01 / 20

Tabella 3.11 Parametri numerici

I risultati, in termini di tempi di calcolo, sono stati riassunti in Fig. 3.20 per i seguenti valori del parametro η : $\eta = 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

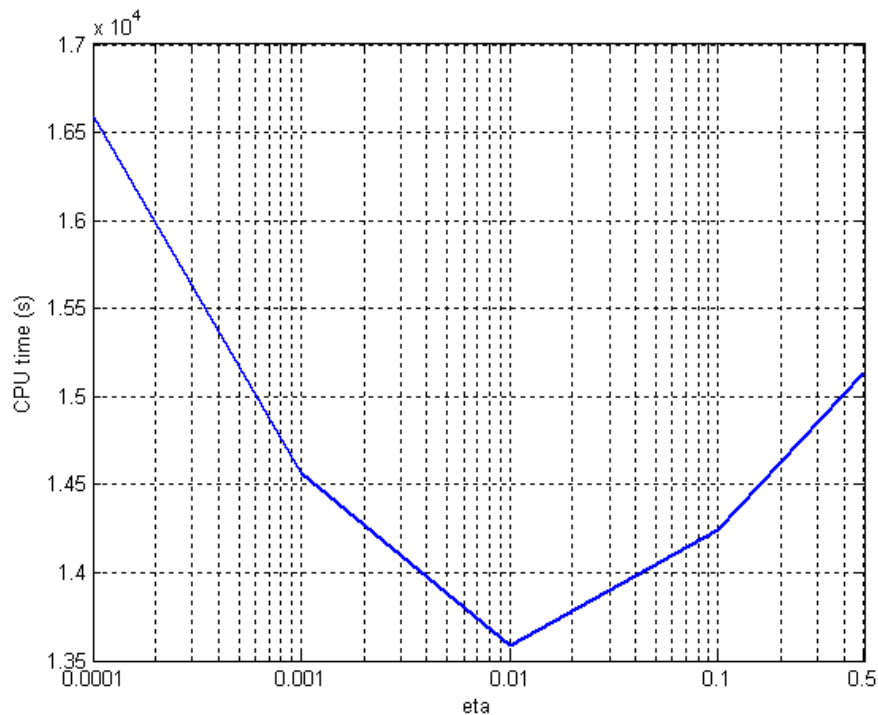


Figura 3.20 Tempi di calcolo in funzione del termine forzante costante η

Come è immediatamente visibile in Fig. 3.20, il valore $\eta = 10^{-2}$ permette dunque di minimizzare il carico computazionale totale relativo agli otto modelli di contatto presenti all'interno del modello complessivo di veicolo.

In conclusione si può osservare come i tempi di calcolo estremamente ridotti garantiti dalle nuove procedure rendano possibile l'implementazione direttamente online dei nuovi algoritmi all'interno dei modelli multibody. Tali performance inoltre garantiscono un buon livello di integrazione tra la modellistica multibody e quella differenziale (alla base dei modelli locali di contatto). Il raggiungimento di una simile integrazione risulta di fondamentale importanza (soprattutto in ambito ferroviario) poiché la modellistica differenziale è necessaria per una descrizione accurata dei fenomeni locali legati al contatto mentre quella multibody rappresenta attualmente lo standard nello studio della dinamica dei veicoli.

3.6.2 Implementazione del modello di benchmark in Simpack Rail

Analogamente a quanto fatto nel caso dei modelli globali di contatto (vedi paragrafo 2.6.1), il modello completo del Manchester Wagon è stato implementato anche in ambiente Simpack Rail in modo da avere un termine di paragone che permettesse un'accurata ed affidabile validazione sia del modello complessivo implementato in ambiente Matlab/Simulink che del nuovo modello di contatto locale. Le caratteristiche fisiche e geometriche del modello in questione sono esattamente le stesse del modello descritto nei paragrafi 2.4 e 3.4.

Per quanto riguarda il modello multibody del veicolo, in Fig. 3.21 è riportata una tipica raffigurazione del modello del Manchester Wagon nell'ambiente virtuale di Simpack Rail.

Per quanto riguarda invece il modello di contatto, esso è stato scelto tra i modelli standard già presenti all'interno di Simpack Rail. Come già detto in precedenza, tale modello è in grado di prevedere il contatto multiplo tra ruota e rotaia, appartiene alla classe dei modelli globali e si basa sull'approccio semielastico. Ulteriori informazioni sui modelli di contatto disponibili in Simpack e sulla loro implementazione sono reperibili in letteratura.

E' importante quindi sottolineare come il modello Matlab/Simulink ed il modello Simpack Rail si basino su due modelli di contatto differenti tra loro (locale il

primo e globale il secondo). Di tale differenza si dovrà chiaramente tener conto nell'analisi dei risultati descritti nel paragrafo 3.6.3.

MANCHESTER WAGON

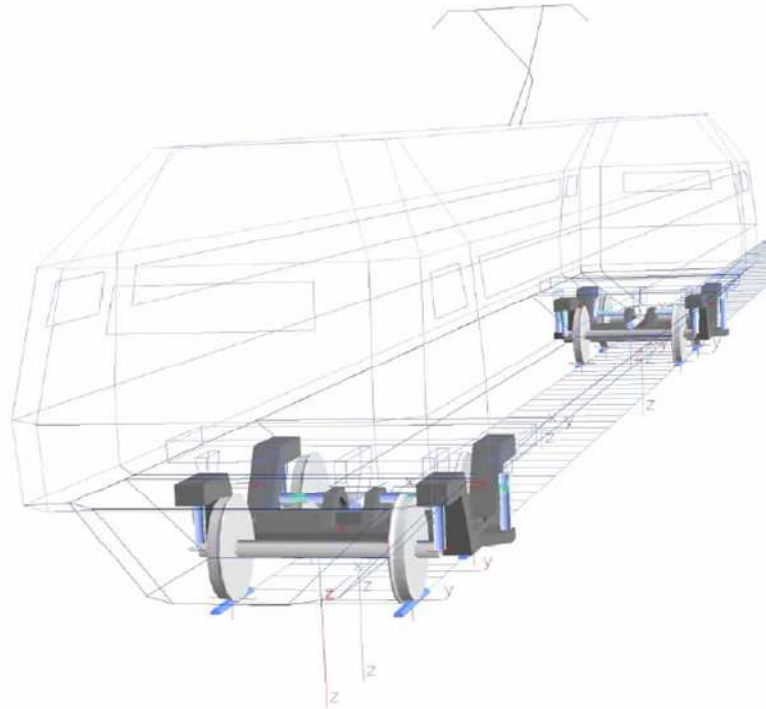


Figura 3.21 Modello multibody del veicolo in Simpack Rail

3.6.3 Simulazione dinamica: curva singola

Per confrontare tra loro in termini di accuratezza le performance del modello Matlab/Simulink e del modello Simpack Rail, verrà considerata, a titolo di esempio, la stessa simulazione della dinamica di marcia del Manchester Wagon [B15] descritta nel paragrafo 3.6.1. La simulazione in questione è stata effettuata su un tracciato ferroviario curvilineo particolarmente impegnativo caratterizzato da una ridotta curvatura e percorso a velocità sostenuta. I dati riguardanti il tracciato sono riportati in Tab. 3.11.

K	$-1/1200 \text{ m}^{-1}$
β_c	0.0418 rad
p	0
α_p	$1/40 \text{ rad}$
V	162 km/h
μ	0.3

Tabella 3.11 Caratteristiche del tracciato: simulazione dinamica

In Fig. 3.22 e 3.23 sono raffigurati gli andamenti della curvatura K e dell'angolo di cant β_c in funzione della progressiva del tracciato.

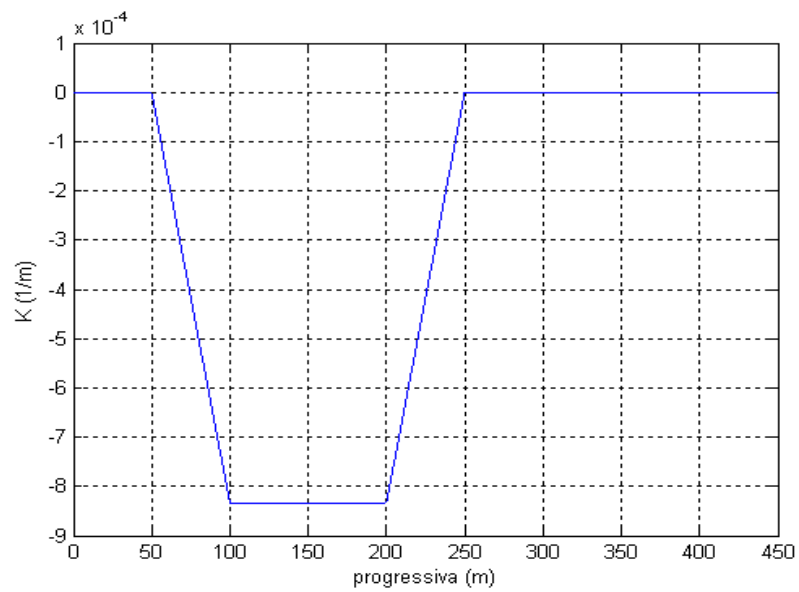


Figura 3.22 Curvatura K in funzione della progressiva

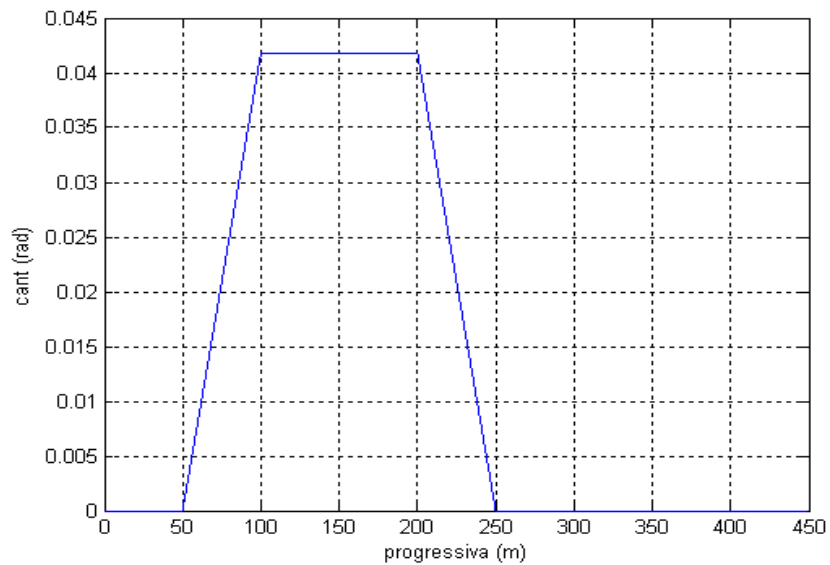


Figura 3.23 Angolo di cant β_c in funzione della progressiva

In Fig. 3.24 è riportato invece il tracciato ferroviario nel sistema di riferimento fisso $O_f x_f y_f z_f$ (o, più precisamente, nel piano $x_f y_f$).

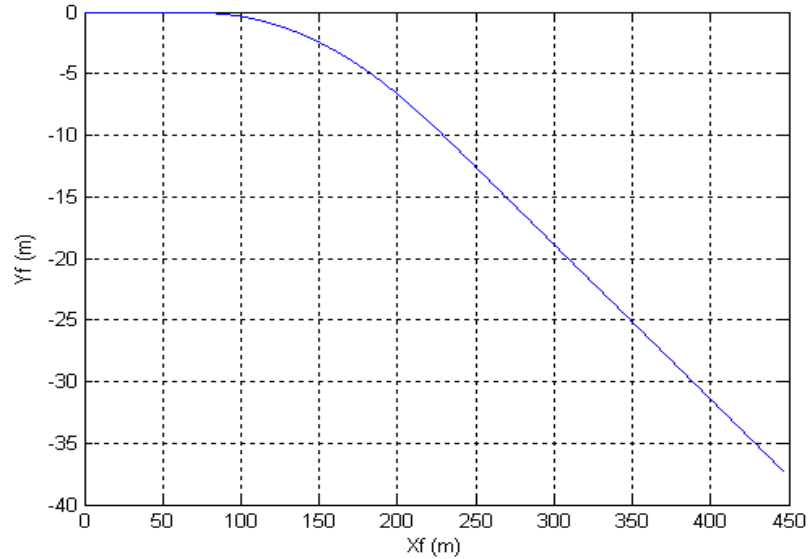


Figura 3.24 *Tracciato ferroviario nel piano $x_f y_f$*

I valori dei principali parametri numerici relativi al modello Matlab/Simulink sono stati scelti partendo dai risultati ottenuti nel paragrafo 3.6.1 (Tab. 3.12). In particolare il suddetto modello è stato equipaggiato con il modello di contatto locale basato sulla formulazione ridotta (equazione 3.26) del problema discreto. Tale formulazione si rivela infatti più efficiente della formulazione sparsa (equazione 3.22) mentre, a livello qualitativo, le performance delle due formulazioni si equivalgono.

Analogamente i valori dei principali parametri numerici relativi al modello Simpack Rail sono riassunti schematicamente in Tab. 3.13.

Modello di Contatto (Locale)	Formulazione Ridotta (equazione 3.26)
Solutore ODE	<i>ODE23</i>
<i>RelTol / AbsTol</i>	$10^{-8} / 10^{-6}$
Solutore Non Lineare	Newton - BiCGStab
<i>Tol / MaxItNonLin</i>	$10^{-7} / 20$
η / <i>MaxItLin</i>	0.01 / 20

Tabella 3.12 *Parametri numerici: modello Matlab/Simulink*

Modello di Contatto (Globale)	Approccio Semielastico
Solutore ODE	<i>ODE5</i>
<i>FixedStep</i>	$5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

Tabella 3.13 Parametri numerici: modello Simpack Rail

Il modello del veicolo fornisce come output tutte le grandezze necessarie a descrivere la cinematica e la dinamica del sistema (variabili cinematiche, reazioni vincolari, forze interne, forze di contatto ed aree di contatto). Per semplicità nel seguito verrà analizzato solamente il moto di alcuni corpi significativi quali la cassa, il carrello anteriore e le due sale di tale carrello (anteriore e posteriore). La dinamica del carrello posteriore è infatti del tutto analoga a quella del carrello anteriore e non aggiunge nulla di significativo alla descrizione del moto del veicolo. Più nel dettaglio verranno riportate le seguenti grandezze:

- lo spostamento laterale del centro di massa y^R , l'angolo di rollio φ^R e l'angolo di imbardata ψ^R di tutti i corpi analizzati ovvero della cassa, del carrello anteriore e delle due sale del carrello (anteriore e posteriore); tutte le grandezze saranno espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_R x_R y_R z_R$
- le componenti longitudinali F_x^R , laterali F_y^R e verticali F_z^b delle forze di contatto risultanti agenti su entrambe le ruote di ciascuna sala (espresse nel sistema di riferimento ausiliario $O_R x_R y_R z_R$)
- le aree di contatto A_{wC} ed A_{rC} rappresentate sulla superficie della ruota e su quella del binario (espresse rispettivamente nel sistema di riferimento ausiliario $O_W x_W y_W z_W$ ed in quello solidale $O_R x_R y_R z_R$).

Nella simulazione descritta in questo paragrafo sia il modello Matlab/Simulink che il modello Simpack Rail rilevano la presenza di un doppio contatto sulla ruota sinistra della sala anteriore (ovvero sulla ruota di attacco). Tuttavia, dal momento che i modelli in questione si basano su due modelli di contatto differenti tra loro (locale il primo e globale il secondo), anche gli output prodotti saranno necessariamente diversi. Più nel dettaglio il modello Matlab/Simulink individuerà delle aree di contatto A_{wC} ed

A_{rC} composte da due componenti disgiunte mentre il modello Simpack Rail fornirà due punti di contatto distinti.

In Fig. 3.25, 3.26 e 3.27 sono raffigurate le variabili cinematiche relative alla cassa, mentre quelle relative al carrello sono rappresentate in Fig. 3.28, 3.29 e 3.30. Le variabili relative alle due sale (anteriore e posteriore) sono invece riportate in Fig. 3.31, 3.32 e 3.33 e Fig. 3.34, 3.35 e 3.36. In blu sono state raffigurate le variabili calcolate dal modello Matlab/Simulink mentre in rosso quelle calcolate dal modello Simpack Rail.

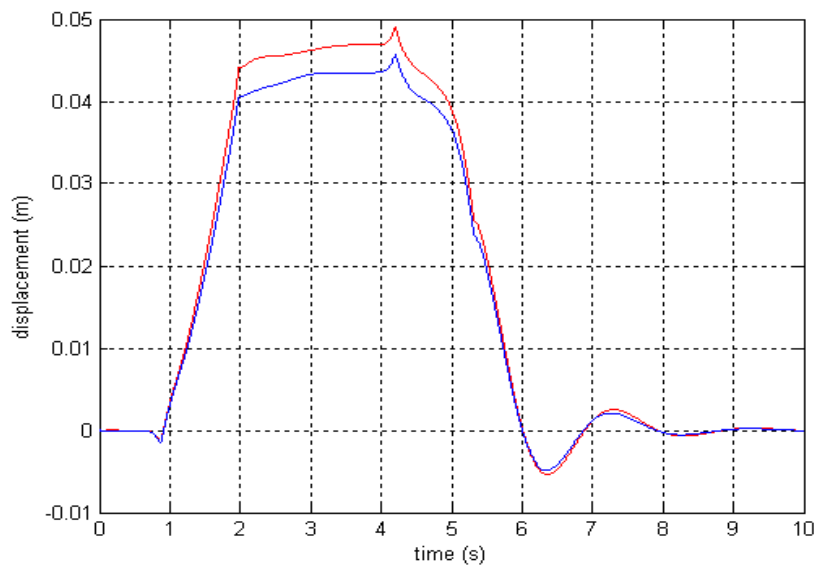


Figura 3.25 *Cassa: spostamento laterale del centro di massa y^R*

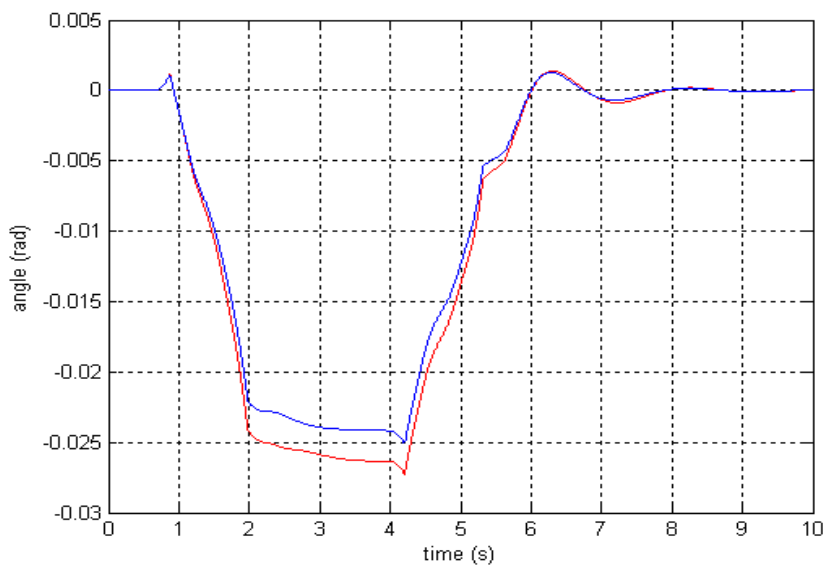


Figura 3.26 *Cassa: angolo di rollio φ^R*

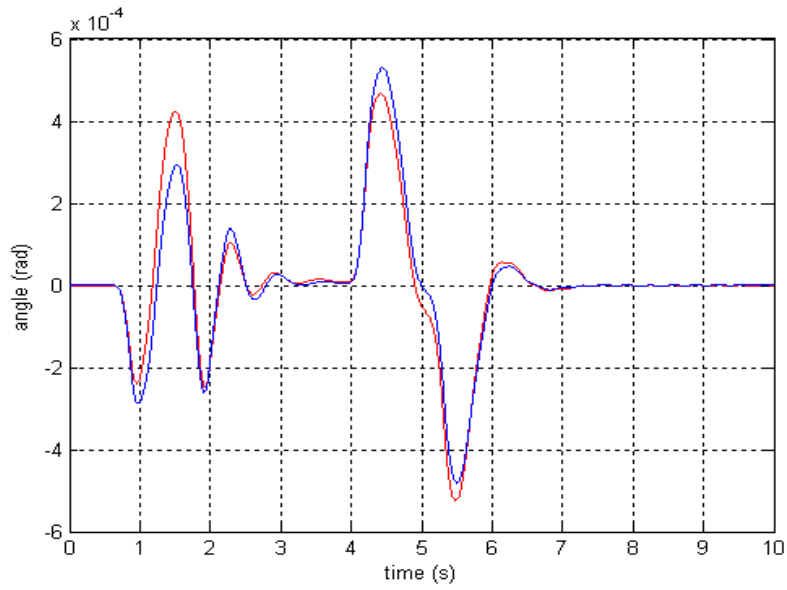


Figura 3.27 Cassa: angolo di imbardata ψ^R

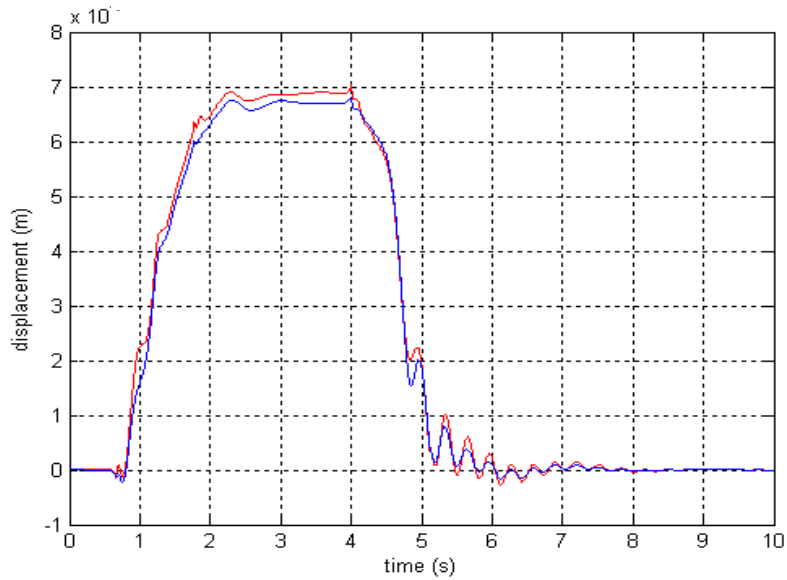


Figura 3.28 Carrello anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^R

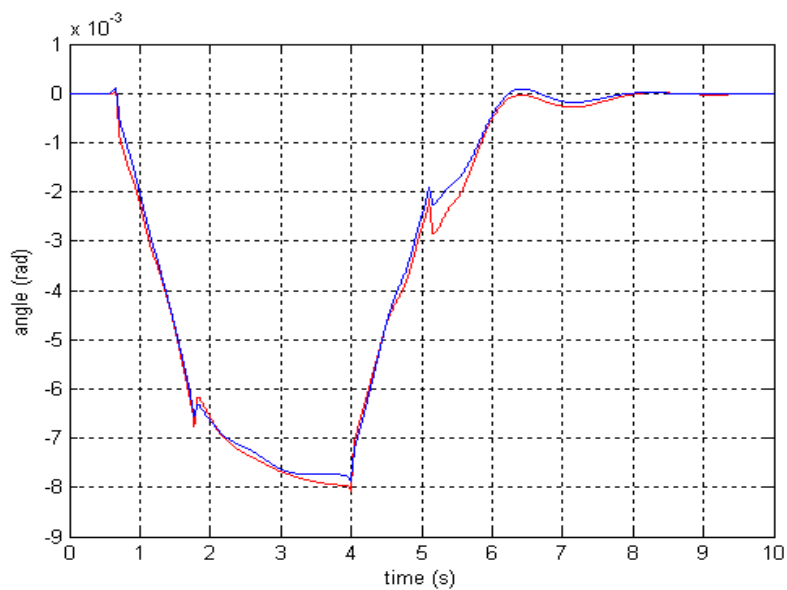


Figura 3.29 Carrello anteriore: angolo di rollio φ^R

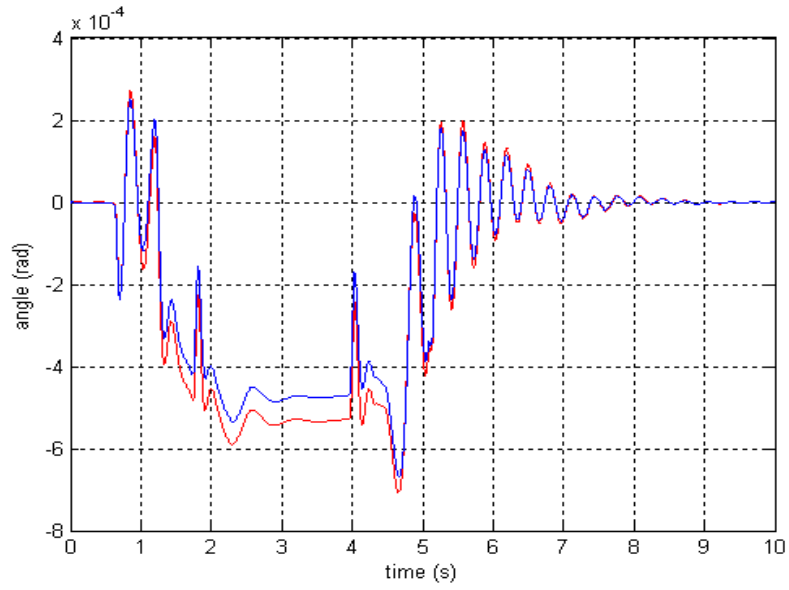


Figura 3.30 Carrello anteriore: angolo di imbardata ψ^R

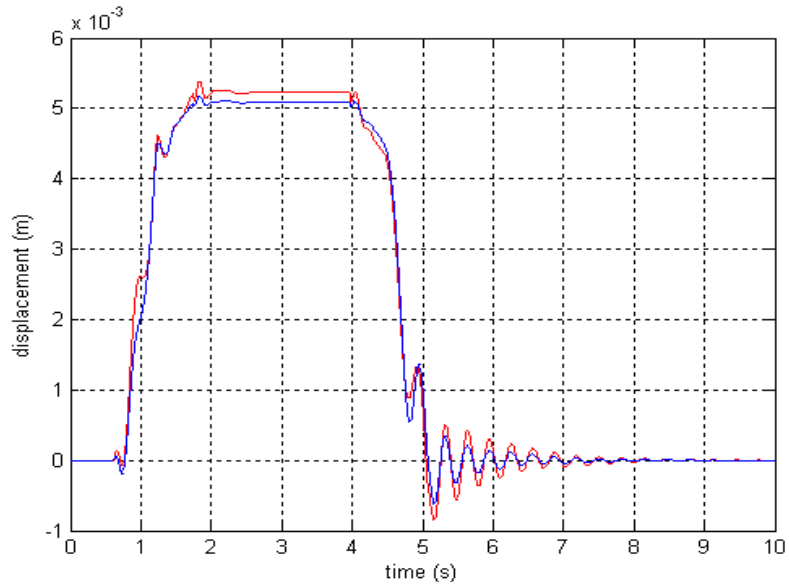


Figura 3.31 Sala anteriore: spostamento laterale del centro di massa y^R

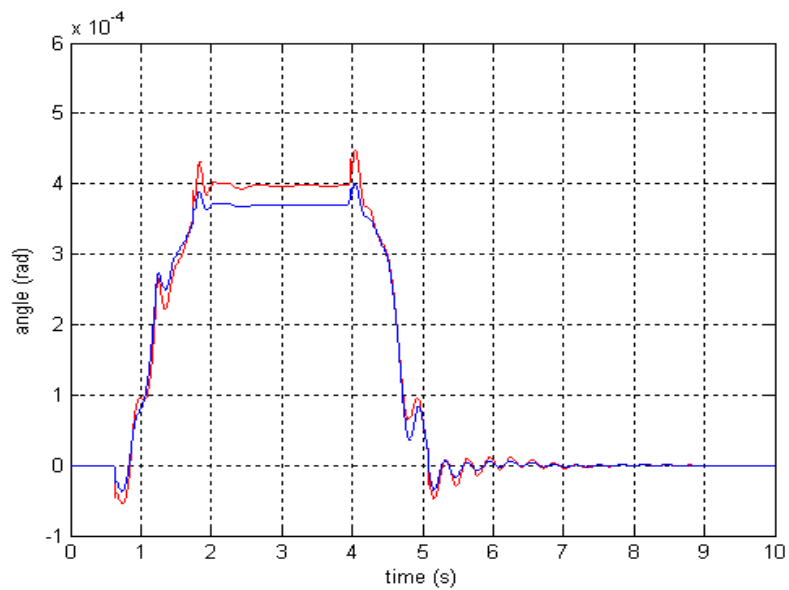


Figura 3.32 Sala anteriore: angolo di rollio φ^R

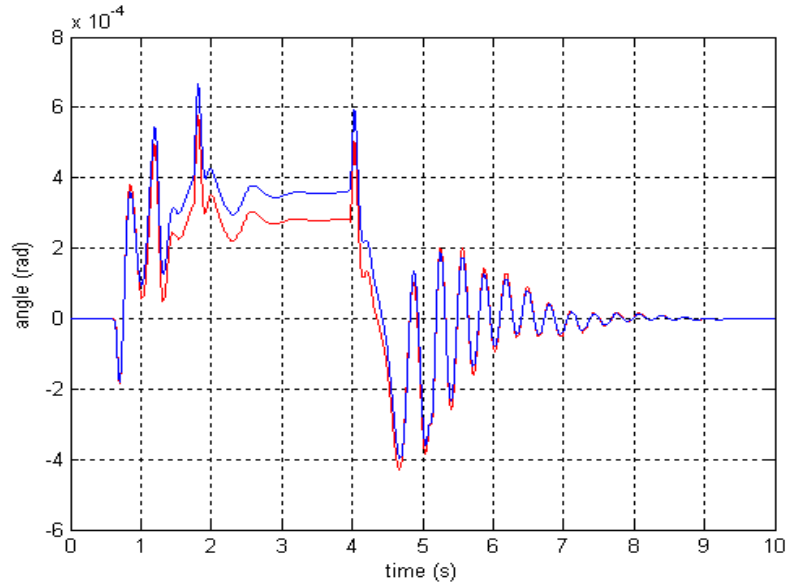


Figura 3.33 Sala anteriore: angolo di imbardata ψ^R

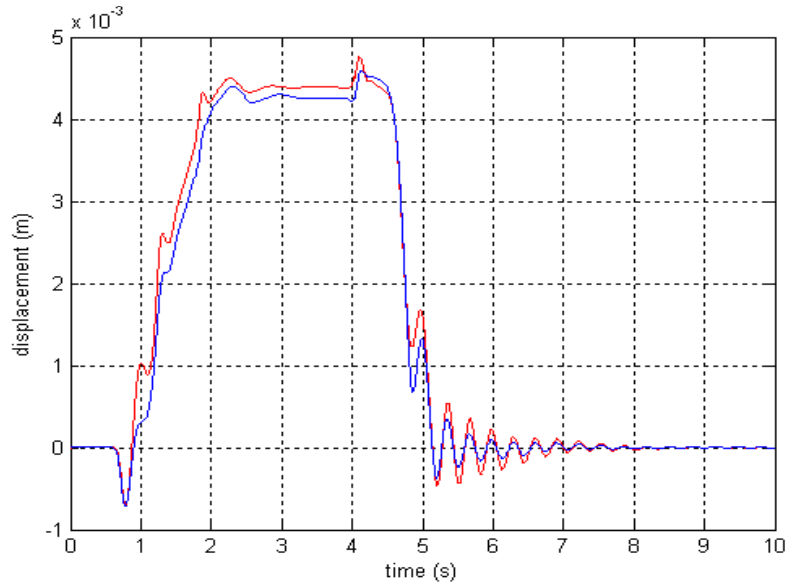


Figura 3.34 Sala posteriore: spostamento laterale del centro di massa y^R

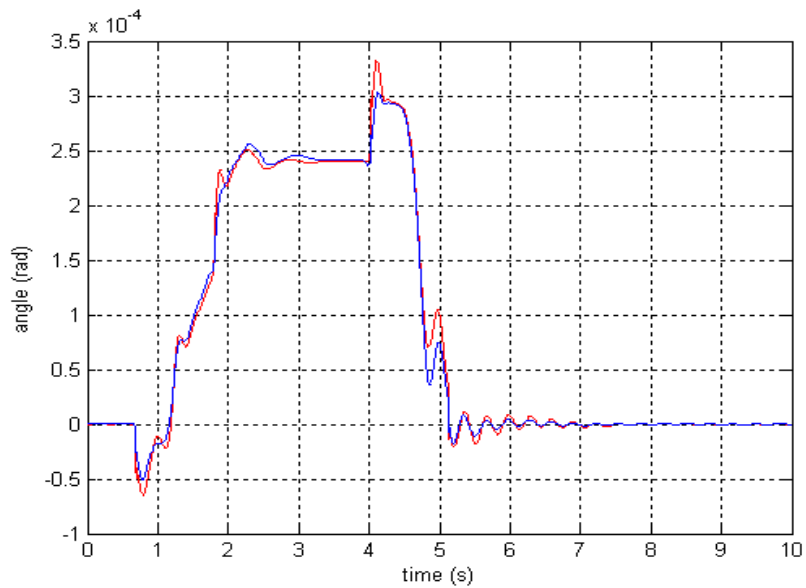


Figura 3.35 Sala posteriore: angolo di rollio ϕ^R

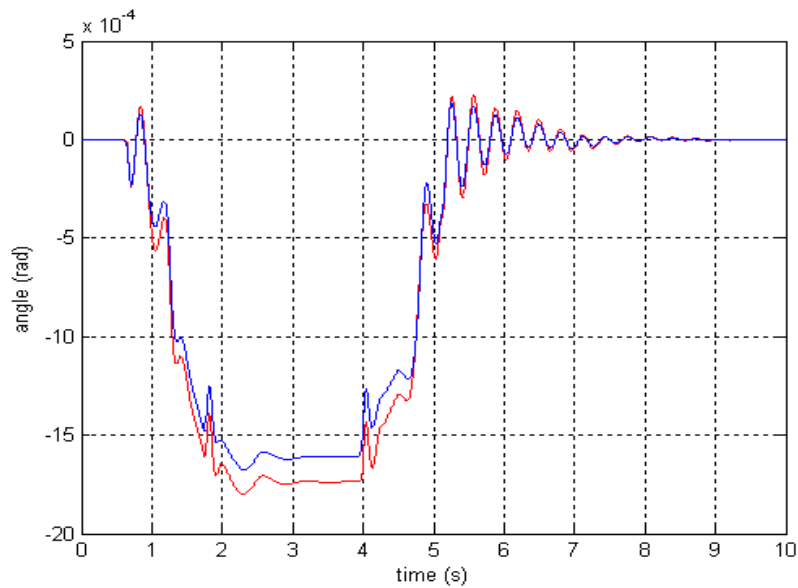


Figura 3.36 Sala posteriore: angolo di imbardata ψ^R

L'analisi dei risultati ottenuti mostra, per quanto riguarda la cinematica del veicolo, un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail sia a livello di cassa e carrello che a livello delle sale.

Successivamente sono state riportate le forze di contatto risultanti su entrambe le ruote di ciascuna sala (in blu le variabili del modello Matlab/Simulink ed in rosso quelle del modello Simpack Rail). In Fig. 3.37, 3.38, 3.39 e Fig. 3.40, 3.41, 3.42 sono raffigurate le componenti longitudinali, laterali e verticali delle forze agenti rispettivamente sulla ruota sinistra e sulla ruota destra della sala anteriore. In Fig. 3.43, 3.44, 3.45 e Fig. 3.46, 3.47, 3.48 sono rappresentate invece le analoghe grandezze relative alla sala posteriore.

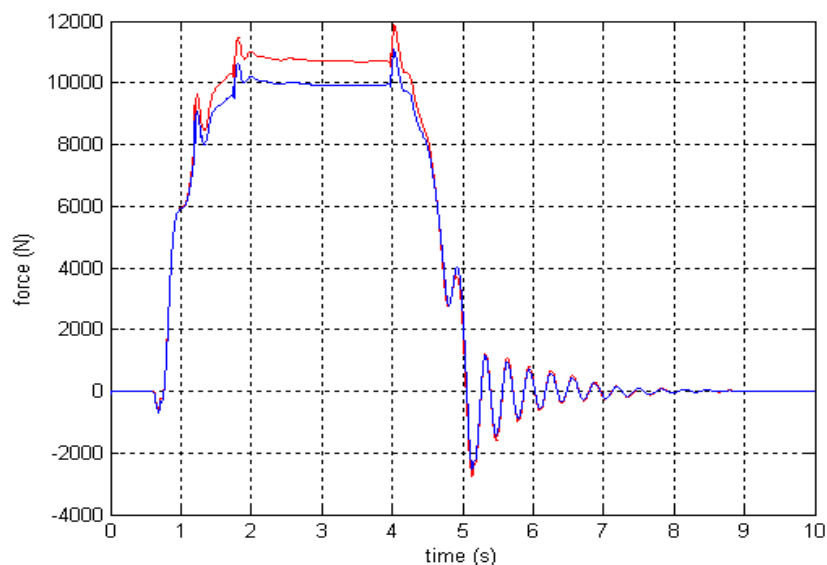


Figura 3.37 Sala anteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^R

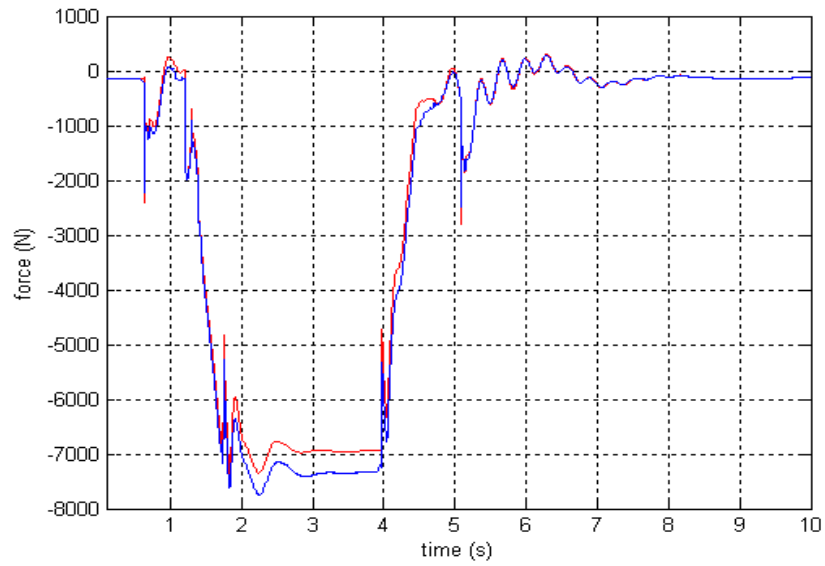


Figura 3.38 Sala anteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^R

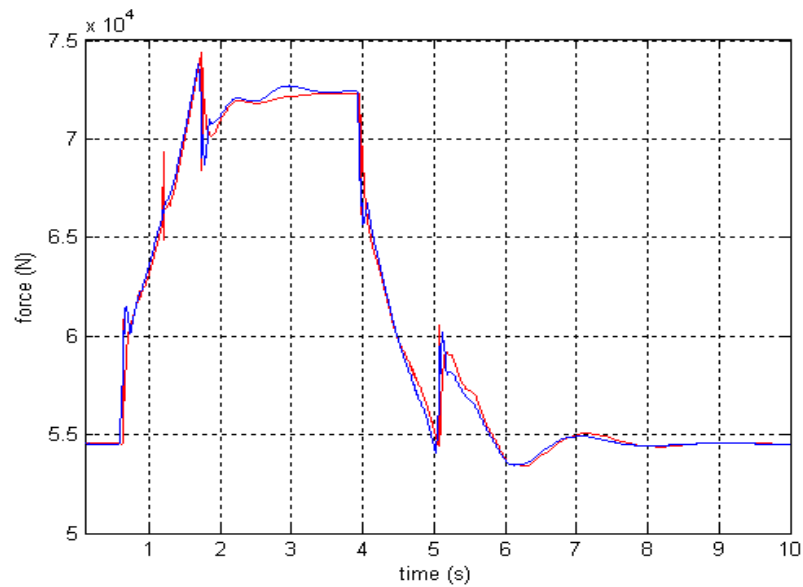


Figura 3.39 Sala anteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^R

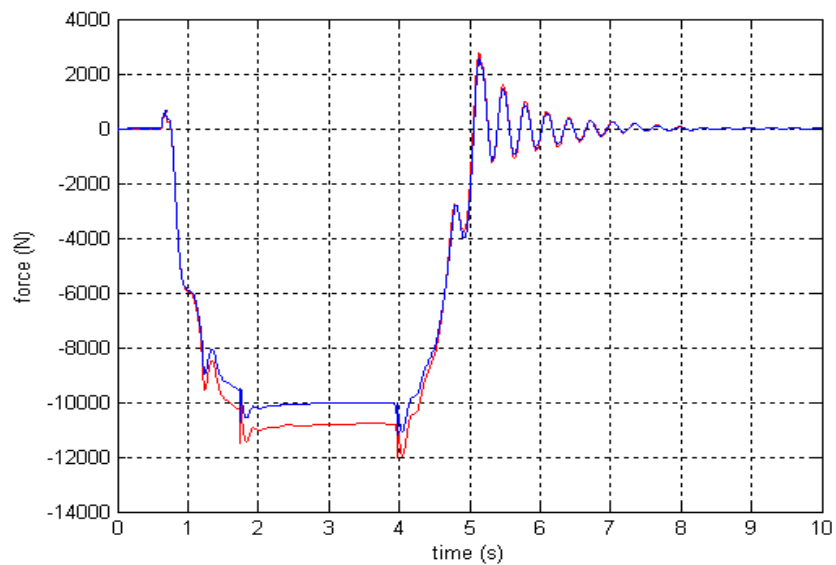


Figura 3.40 Sala anteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^R

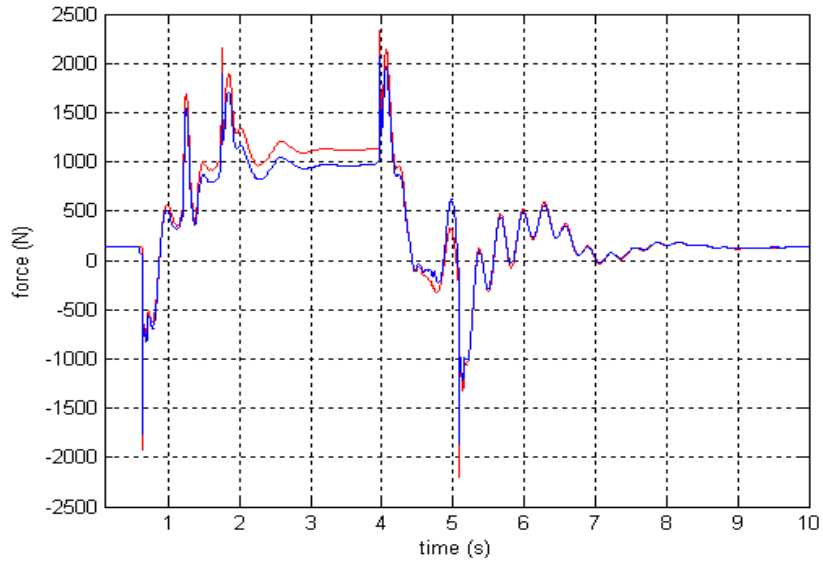


Figura 3.41 Sala anteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^R

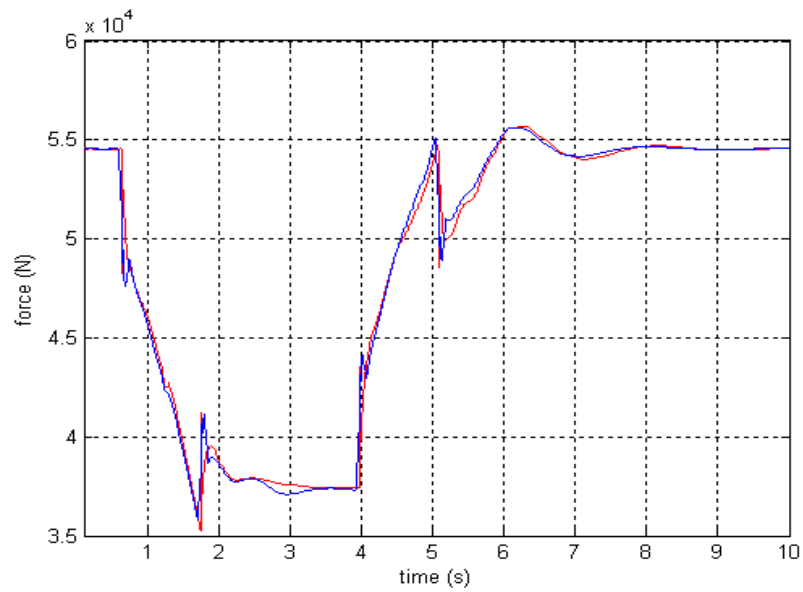


Figura 3.42 Sala anteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^R

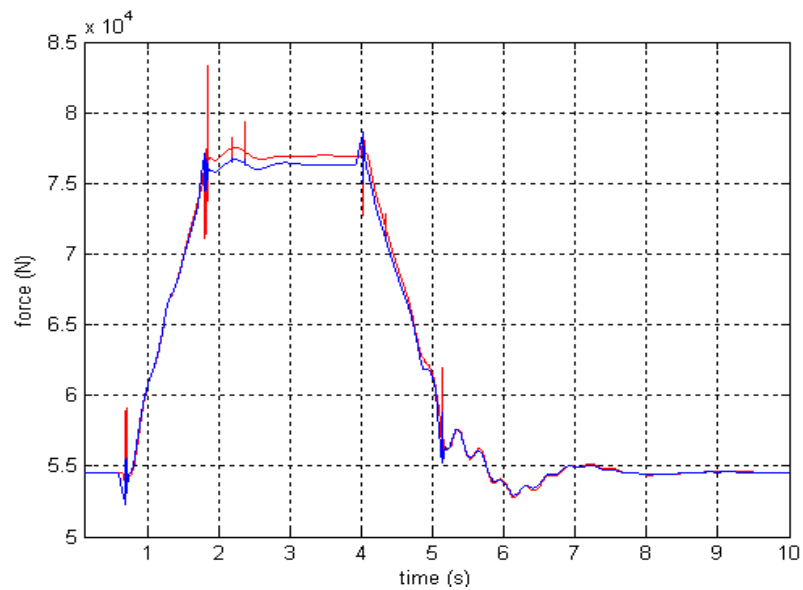


Figura 3.43 Sala posteriore, ruota sinistra: forza longitudinale di contatto F_x^R

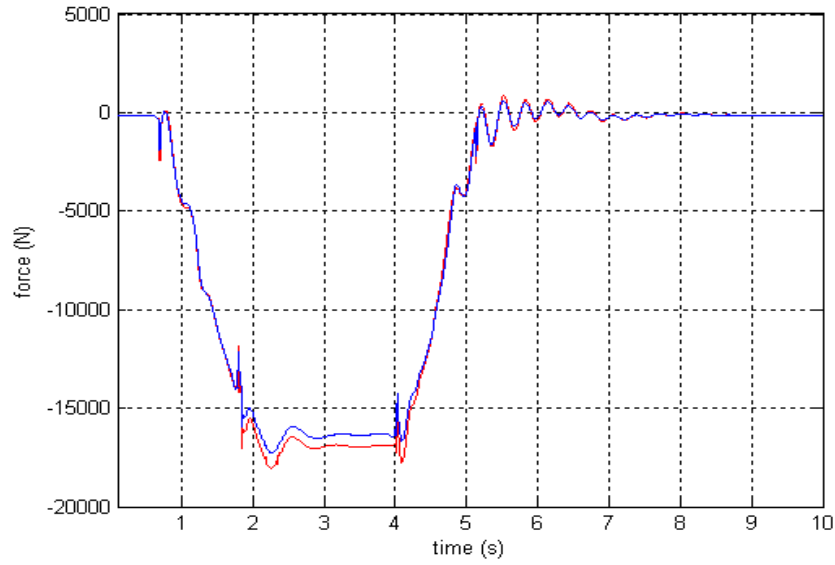


Figura 3.44 Sala posteriore, ruota sinistra: forza laterale di contatto F_y^R

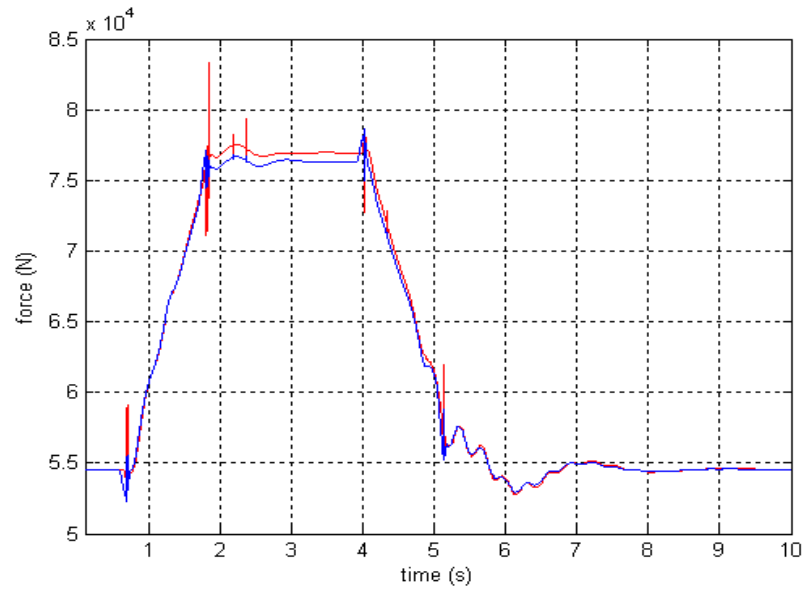


Figura 3.45 Sala posteriore, ruota sinistra: forza verticale di contatto F_z^R

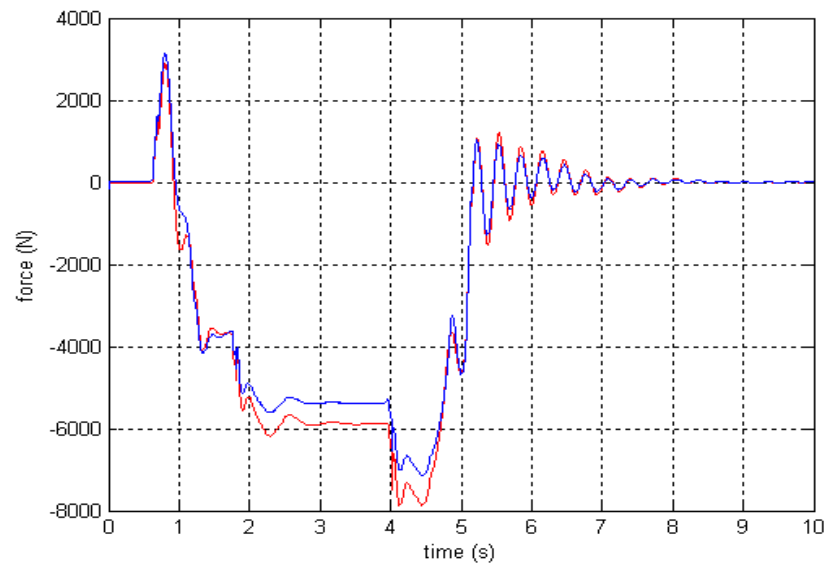


Figura 3.46 Sala posteriore, ruota destra: forza longitudinale di contatto F_x^R

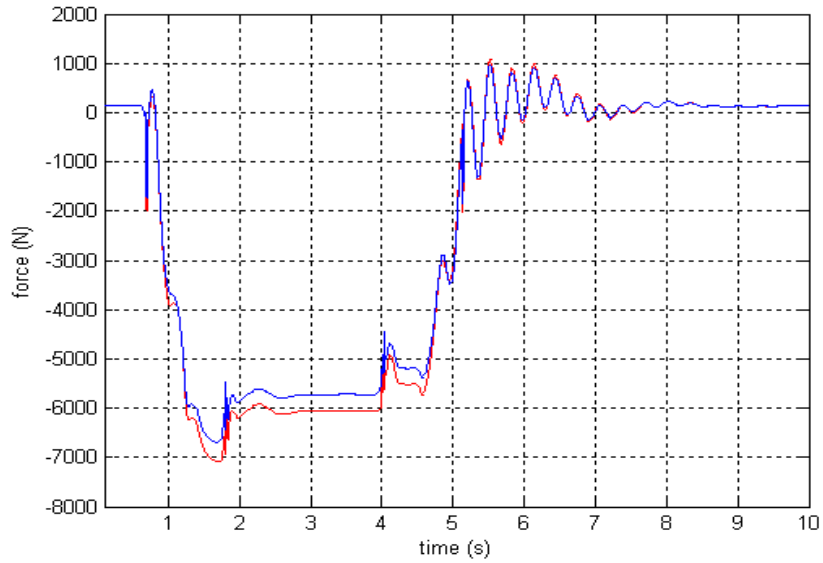


Figura 3.47 Sala posteriore, ruota destra: forza laterale di contatto F_y^R

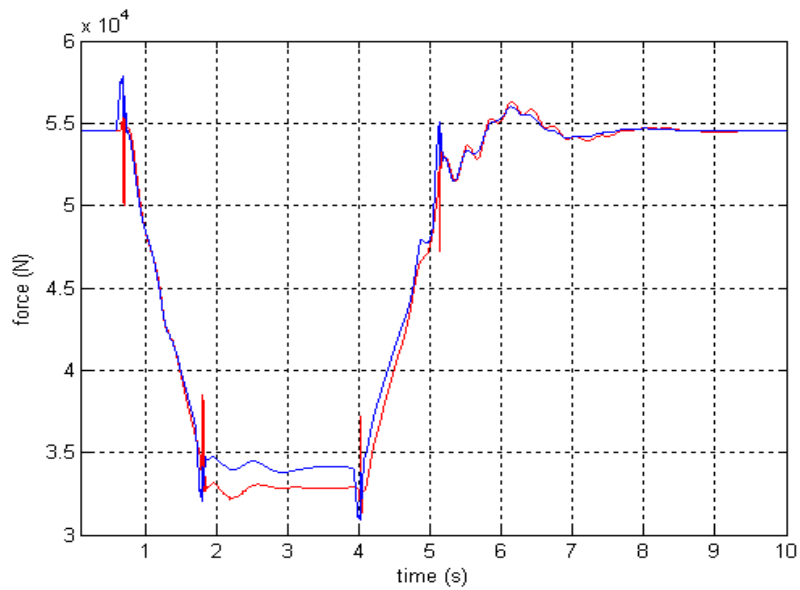


Figura 3.48 Sala posteriore, ruota destra: forza verticale di contatto F_z^R

Anche in questo caso il confronto tra i risultati ottenuti mostra, per quanto riguarda le forze di contatto risultanti, un buon accordo tra le grandezze calcolate con il modello Matlab/Simulink e quelle calcolate con il modello Simpack Rail. In particolare il modello Matlab/Simulink evidenzia una maggiore stabilità specialmente in presenza di dinamiche particolarmente critiche come urti e discontinuità varie.

L'ultima parte del paragrafo è dedicata all'analisi del contatto ruota – rotaia da un punto di vista cinematico. Come già accennato in precedenza, il modello Matlab/Simulink ed il modello Simpack Rail si basano su due modelli di contatto differenti tra loro (locale il primo e globale il secondo); di conseguenza anche gli output prodotti da tali modelli saranno necessariamente diversi. L'analisi dei risultati ottenuti nella simulazione dinamica non può pertanto prescindere dalle differenze presenti nei modelli in questione. Nonostante ciò il confronto diretto tra i risultati ha permesso un'accurata ed affidabile validazione del nuovo modello locale di contatto.

Per quanto riguarda il modello Matlab/Simulink sarà riportata la posizione delle aree di contatto sia sulla superficie della ruota che su quella della rotaia. Per ottenere una descrizione chiara ed efficace del moto delle aree di contatto, verranno considerate delle sezioni trasversali di tali aree (effettuate cioè sui piani $y_W z_W$ e $y_R z_R$). Il moto di tali sezioni verrà poi rappresentato su due apposite superfici cilindriche ottenute a partire dai profili di ruota e rotaia (profili generatori) e lunghe quanto la distanza percorsa dal veicolo durante la simulazione

Per quanto riguarda invece il modello Simpack Rail sarà riportata, come al solito, la posizione dei punti di contatto. Anche in questo caso, per maggior chiarezza, le traiettorie dei punti di contatto sono state tracciate sulle stesse superfici introdotte poc'anzi.

In Fig. 3.49 e 3.50 sono state raffigurate le variabili di contatto relative alla sala anteriore mentre in Fig. 3.51 e 3.52 quelle relative alla sala posteriore (riportate sulla superficie della ruota ed espresse nel sistema solidale). In Fig. 3.53, 3.54, 3.55 e 3.56 sono state invece rappresentate le analoghe grandezze tracciate sulla superficie della rotaia ed espresse nel sistema ausiliario.

Le quantità calcolate dal modello Matlab/Simulink (sezioni delle aree di contatto) sono state riportate in blu mentre quelle calcolate del modello Simpack Rail (traiettorie dei punti di contatto) in nero.

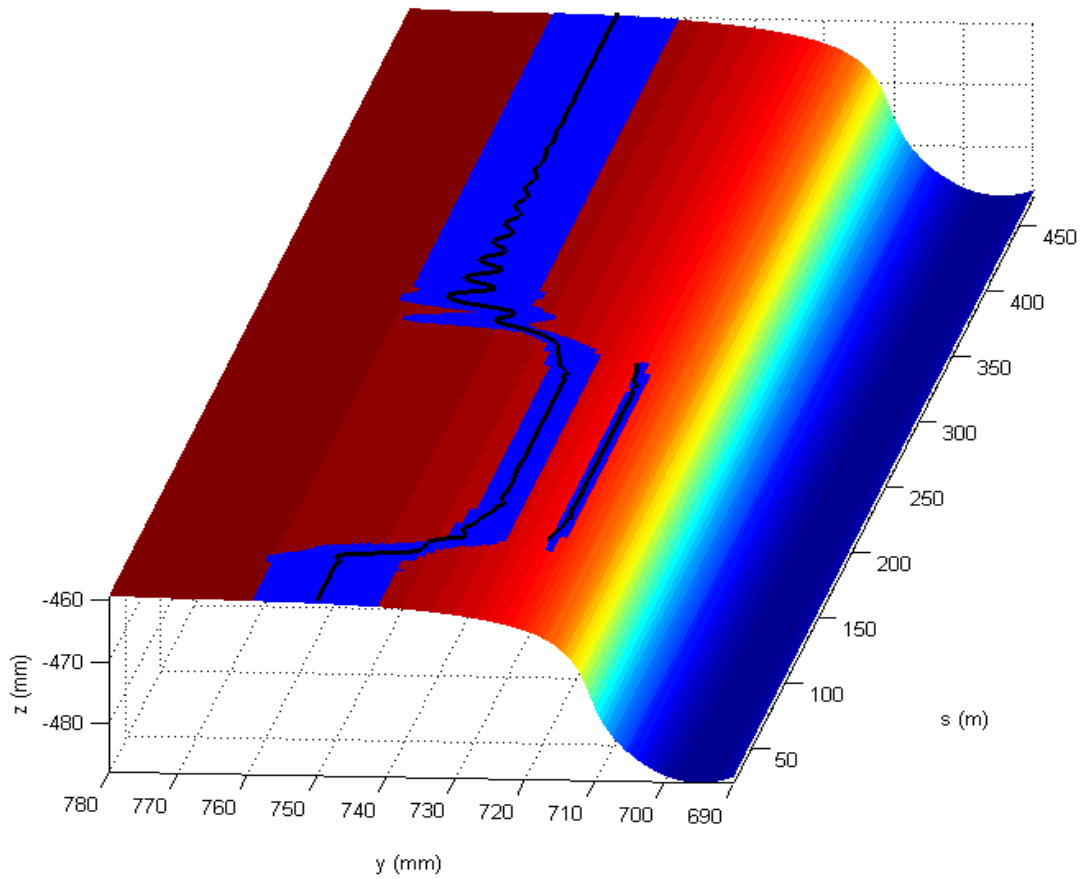


Figura 3.49 Sala anteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{wC} sulla ruota di sinistra (sistema solidale)

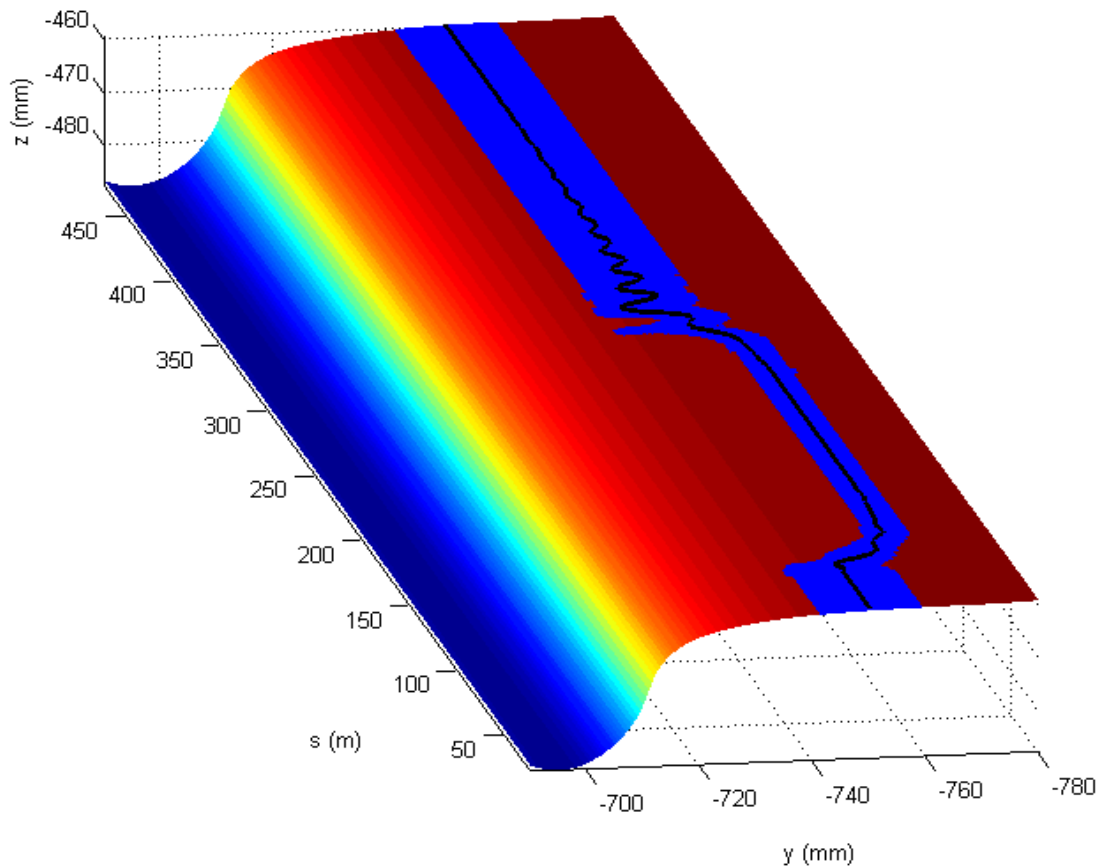


Figura 3.50 Sala anteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{wC} sulla ruota di destra (sistema solidale)

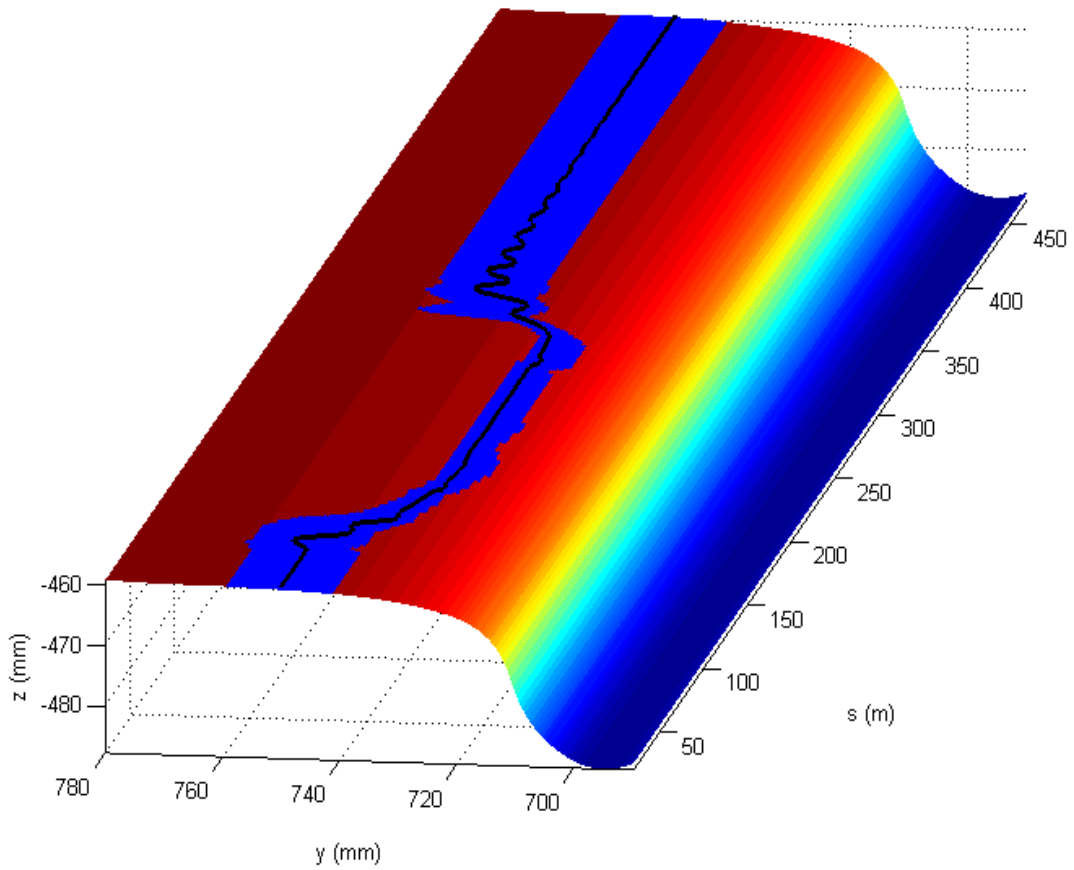


Figura 3.51 Sala posteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{wC} sulla ruota di sinistra (sistema solidale)

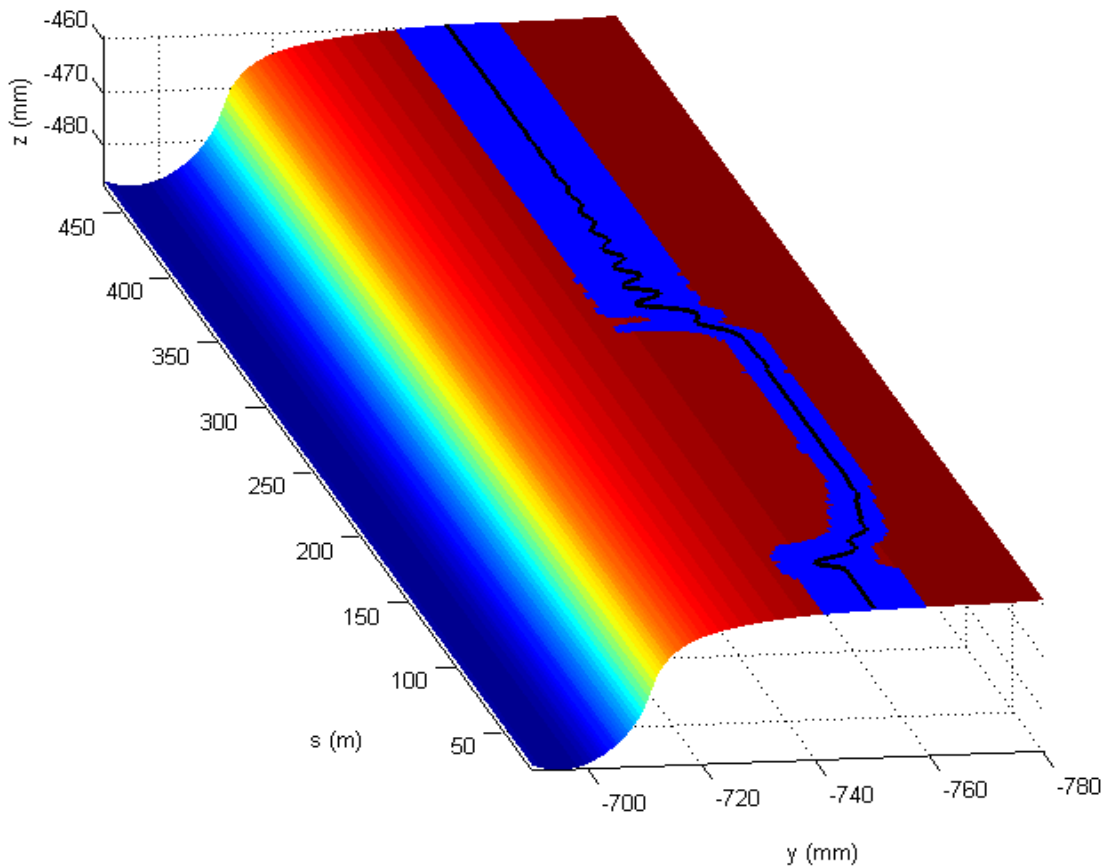


Figura 3.52 Sala posteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{wC} sulla ruota di destra (sistema solidale)

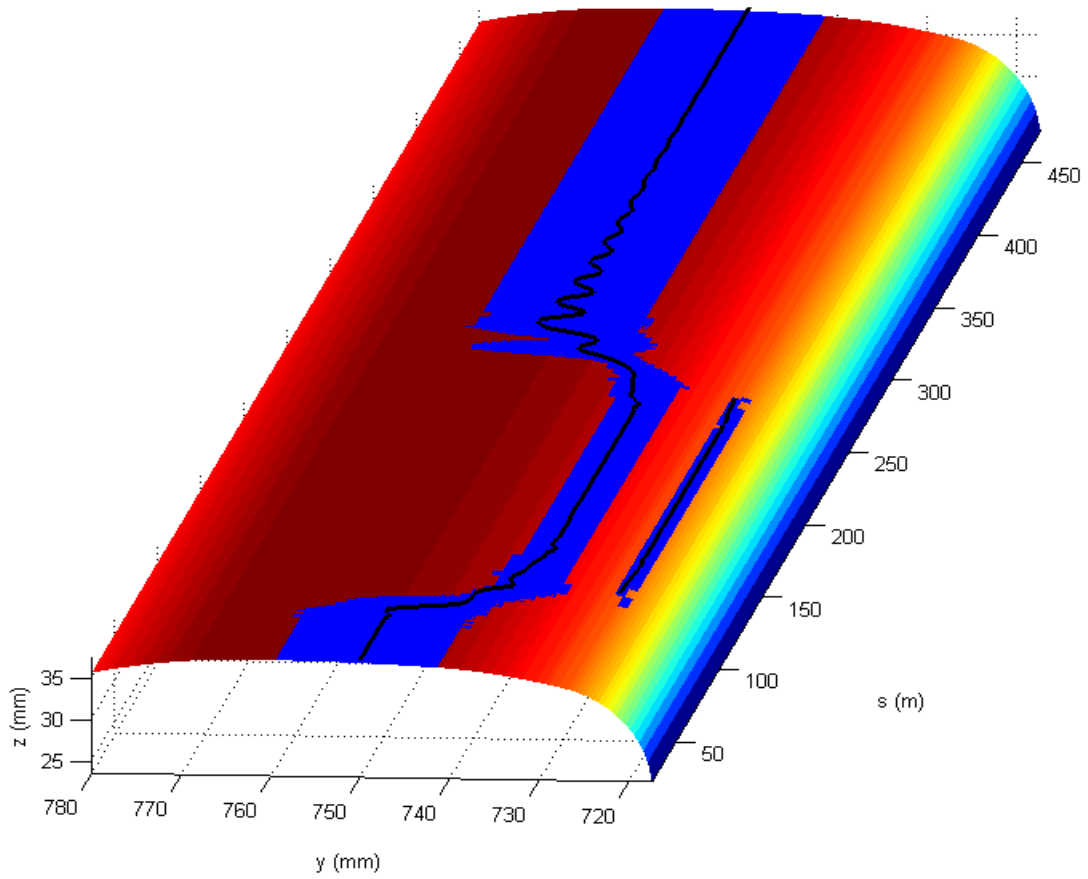


Figura 3.53 Sala anteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{rC} sulla rotaia di sinistra (sistema solidale)

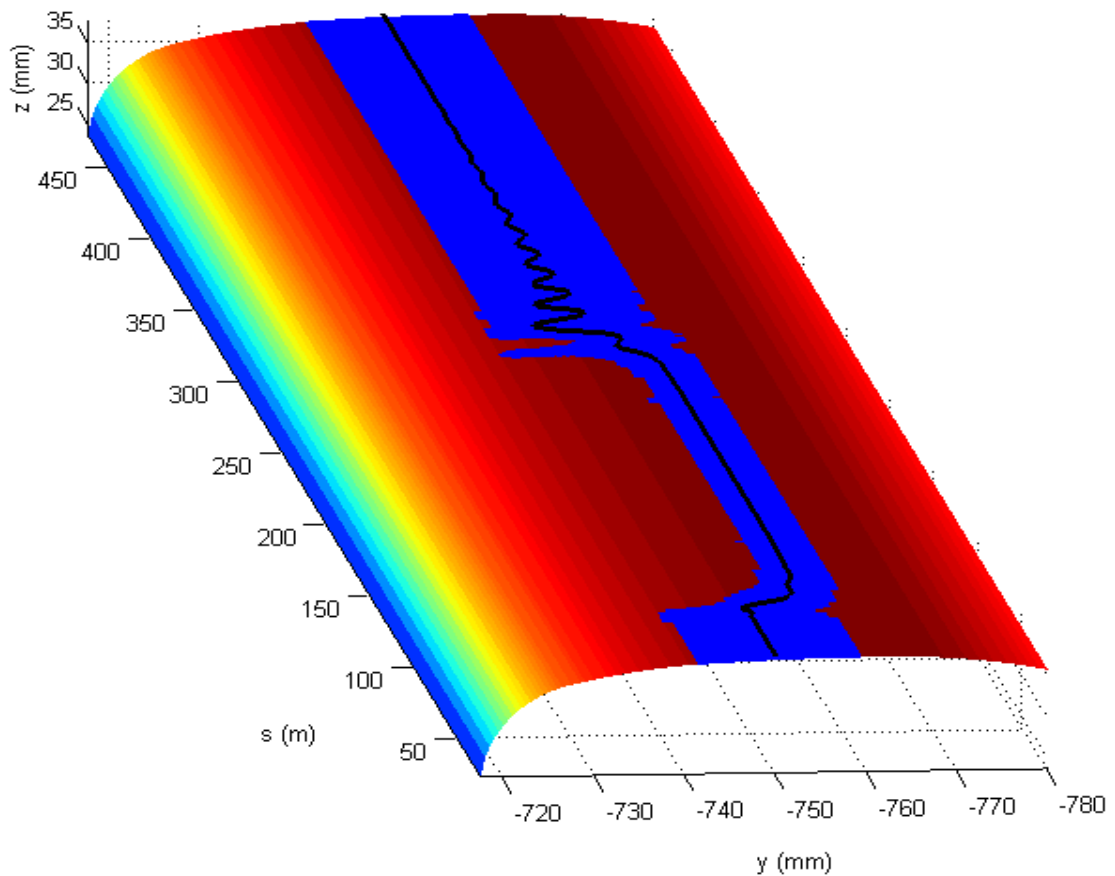


Figura 3.54 Sala anteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{rC} sulla rotaia di destra (sistema solidale)

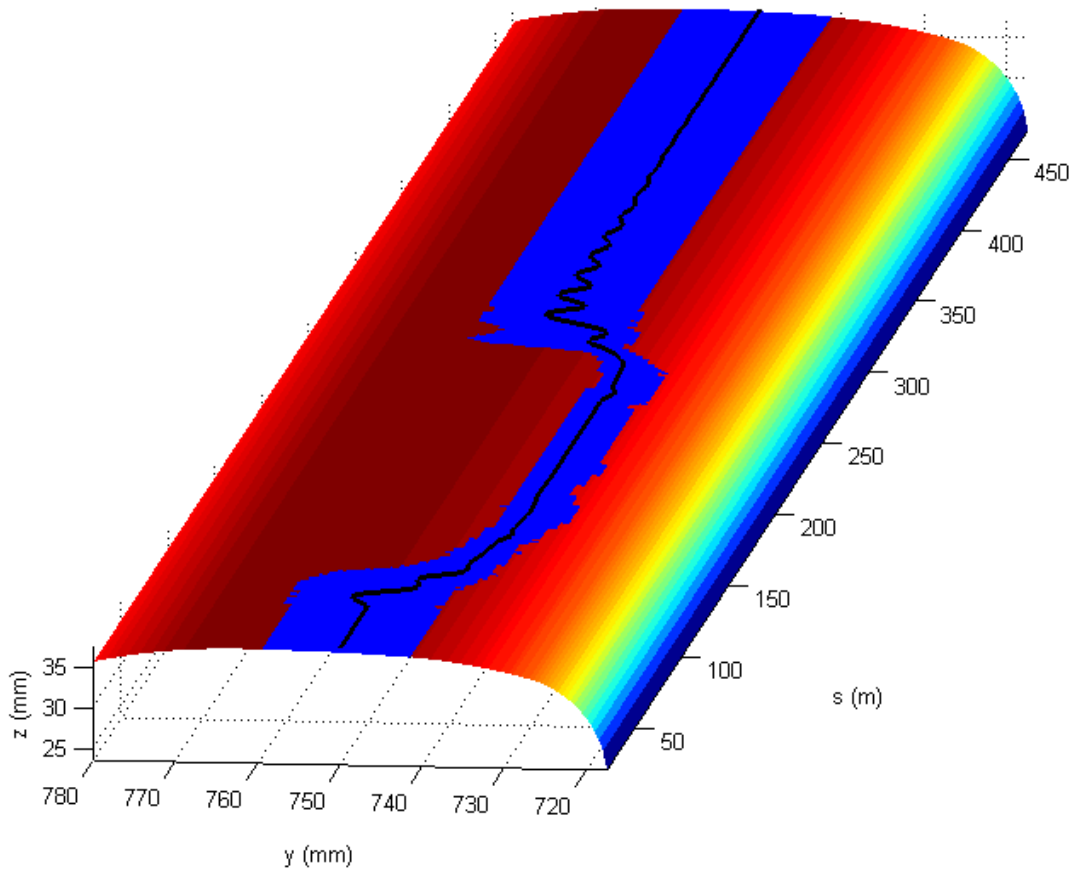


Figura 3.55 Sala posteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{rC} sulla rotaia di sinistra (sistema solidale)

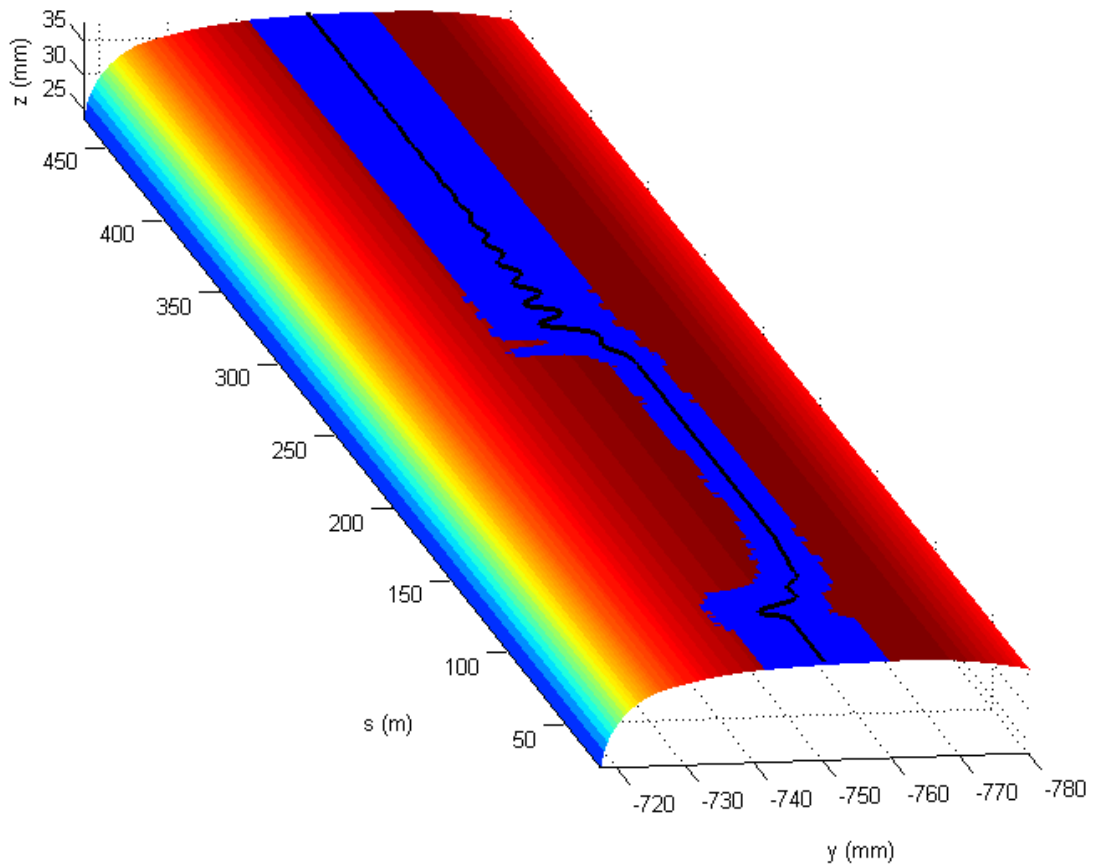


Figura 3.56 Sala posteriore: sezione laterale dell'area di contatto A_{rC} sulla rotaia di destra (sistema solidale)

Come già detto in precedenza, sia il modello Matlab/Simulink che il modello Simpack Rail rilevano la presenza di un doppio contatto sulla ruota sinistra della sala anteriore (ovvero sulla ruota di attacco). Più in particolare, le aree di contatto calcolate dal modello Matlab/Simulink risultano composte, durante la curva, da due componenti disgiunte; dal canto suo, il modello Simpack Rail rileva invece, sempre in fase di curva, la presenza di due punti di contatto distinti.

E' importante inoltre notare come i punti di contatti calcolati da Simpack Rail siano sempre contenuti all'interno delle corrispondenti parti disgiunte delle aree di contatto rilevate dal modello Matlab/Simulink. Da questo punto di vista, anche alla luce delle differenze presenti a livello di modelli di contatto (locale in un caso e globale nell'altro), vi è dunque un buon accordo tra il modello Matlab/Simulink ed il modello Simpack Rail.

In conclusione si può infine osservare come il basso rumore numerico e la stabilità delle nuove procedure (anche in presenza di contatto multiplo) evidenzino l'affidabilità e l'accuratezza del modello Matlab/Simulink ed in particolare dei nuovi modelli di contatto.

3.6.4 Performance del modello complessivo

Come già accennato all'inizio del paragrafo 3.6, per quanto riguarda l'efficienza numerica dei modelli complessivi di veicolo, verranno riportati solamente i risultati relativi al modello implementato in ambiente Matlab/Simulink. Le performance di tale modello infatti non possono essere direttamente confrontate, in termini di efficienza, con quelle del modello Simpack Rail dal momento che quest'ultimo (come d'altronde tutti i principali software multibody commerciali) si basa su modelli di contatto globali e di conseguenza non comparabili con il modello di contatto locale descritto in questo capitolo.

Per valutare le prestazioni del modello Matlab/Simulink, verrà considerata, anche in questo caso, la stessa simulazione della dinamica di marcia del Manchester Wagon [B15] già descritta nei paragrafi 3.6.1 e 3.6.3. La suddetta simulazione è stata effettuata su un tracciato ferroviario curvilineo particolarmente impegnativo caratterizzato da una ridotta curvatura e percorso a velocità sostenuta. I dati riguardanti il tracciato sono elencati in Tab. 3.14.

K	$-1/1200 \text{ m}^{-1}$
β_c	0.0418 rad
p	0
α_p	1/40 rad
V	162 km/h
μ	0.3

Tabella 3.14 *Caratteristiche del tracciato: simulazione dinamica*

Nel seguito sono state dapprima analizzate le performance del modello Matlab/Simulink al variare del solutore di equazioni differenziali ordinarie (ODE) impiegato: più nel dettaglio sono stati utilizzati vari solutori espliciti a passo variabile aventi ordine differente come l'ODE23 (Bogacki - Shimpine) e l'ODE45 (Dormand - Prince). Le prove in questione sono state ripetute con entrambe le formulazioni del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello locale di contatto (ovvero la formulazione sparsa (equazione 3.22) e quella ridotta (equazione 3.26)).

I valori dei principali parametri numerici relativi alla simulazione considerata sono riassunti, per le due formulazioni, in Tab. 3.15.

Formulazione	Sparsa (equazione 3.22)	Ridotta (equazione 3.26)
<i>RelTol / AbsTol</i>	$10^{-8} / 10^{-6}$	$10^{-8} / 10^{-6}$
Solutori Non Lineare	Newton – BiCGStab	Newton - BiCGStab
<i>Tol / MaxItNonLin</i>	$10^{-7} / 20$	$10^{-7} / 20$
η / <i>MaxItLin</i>	0.01 / 20	0.01 / 20

Tabella 3.15 *Parametri numerici*

In Tab. 3.16 e Fig. 3.57 sono stati riportati il tempo di calcolo totale T_g richiesto dal modello complessivo (modello multibody e gli otto modelli di contatto) ed il tempo di calcolo parziale T_c richiesto dai soli otto modelli di contatto, entrambi riferiti al modello basato sulla formulazione sparsa (si veda in proposito anche il paragrafo 3.6.1).

Solutore ODE	T_g	T_c
ODE23	15 ^h 03 ^m	14 ^h 21 ^m (95.3 %)
ODE45	23 ^h 11 ^m	22 ^h 16 ^m (96.0 %)

Tabella 3.16 *Tempi di calcolo: formulazione sparsa*

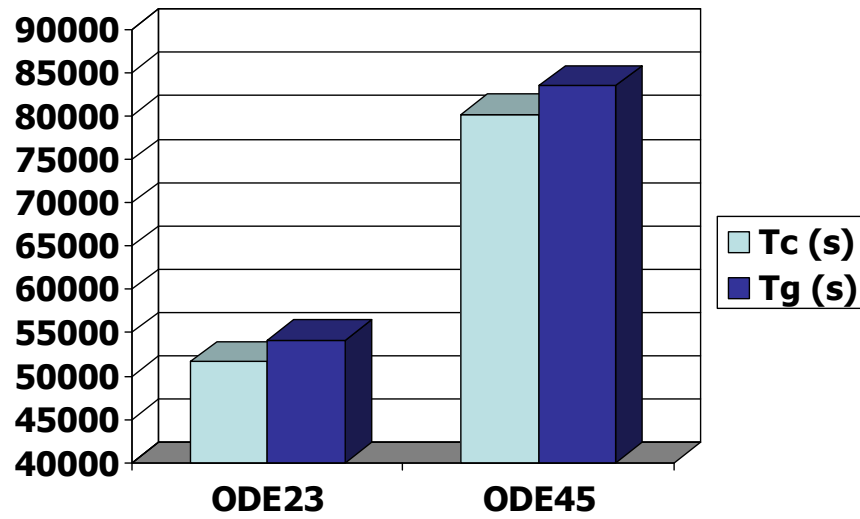


Figura 3.57 Tempi di calcolo: formulazione sparsa

In Tab. 3.17 e Fig. 3.58 sono riportate invece le analoghe grandezze riferite al modello basato sulla formulazione ridotta (vedi il paragrafo 3.6.1).

Solutore ODE	T_g	T_c
ODE23	3 ^h 46 ^m	4 ^h 32 ^m (83.1 %)
ODE45	5 ^h 40 ^m	6 ^h 45 ^m (84.0 %)

Tabella 3.17 Tempi di calcolo: formulazione ridotta

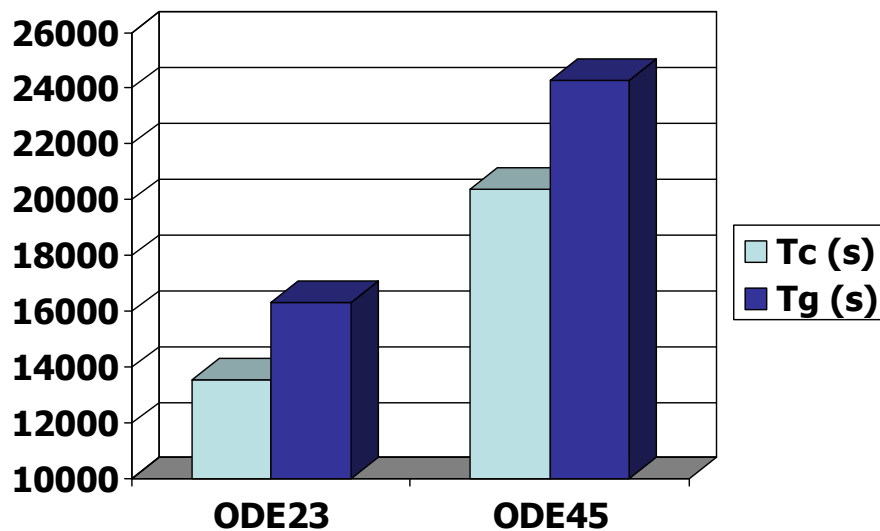


Figura 3.58 Tempi di calcolo: formulazione ridotta

I risultati ottenuti mostrano, in accordo con quanto detto nel paragrafo 3.6.1, come la formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26) si riveli più efficiente della formulazione sparsa (equazione 3.22) anche se la formulazione ridotta può richiedere un maggior consumo di memoria (vedi paragrafi 3.3.2.2 e 3.3.3.2). Nel caso della formulazione sparsa inoltre gli otto modelli di contatto assorbono una percentuale maggiore del tempo di calcolo totale richiesto dal modello complessivo. In entrambi i casi i solutori di equazioni differenziali ordinarie di ordine basso (come l'ODE23) si sono dimostrati più veloci degli analoghi solutori di ordine più elevato (come l'ODE45).

Successivamente, per quanto concerne la formulazione ridotta del problema discreto, sono state confrontate tra loro le performance del modello Matlab/Simulink ottenute impiegando entrambi i solutori non lineari descritti nel paragrafo 3.3.3.2 (ovvero il metodo Newton –BiCGStab ed il metodo Newton - LU); i risultati in questione sono contenuti in Tab. 3.19 e la Fig. 3.59.

In tutti e due i casi è stato utilizzato il solutore di equazioni differenziali ordinarie ODE23 mentre i valori dei principali parametri numerici relativi alla simulazione sono riassunti in Tab. 3.18.

Formulazione	Ridotta (equazione 3.26)	Ridotta (equazione 3.26)
<i>RelTol / AbsTol</i>	$10^{-8} / 10^{-6}$	$10^{-8} / 10^{-6}$
Solutori Non Lineare	Newton – BiCGStab	Newton - LU
<i>Tol / MaxItNonLin</i>	$10^{-7} / 20$	$10^{-7} / 20$
η / <i>MaxItLin</i>	0.01 / 20	----

Tabella 3.18 Parametri numerici

Solutore Non Lineare	T_g	T_c
Newton - BiCGStab	3 ^h 46 ^m	4 ^h 32 ^m (83.1 %)
Newton - LU	4 ^h 35 ^m	5 ^h 18 ^m (86.5 %)

Tabella 3.19 Tempi di calcolo: solutori non lineari

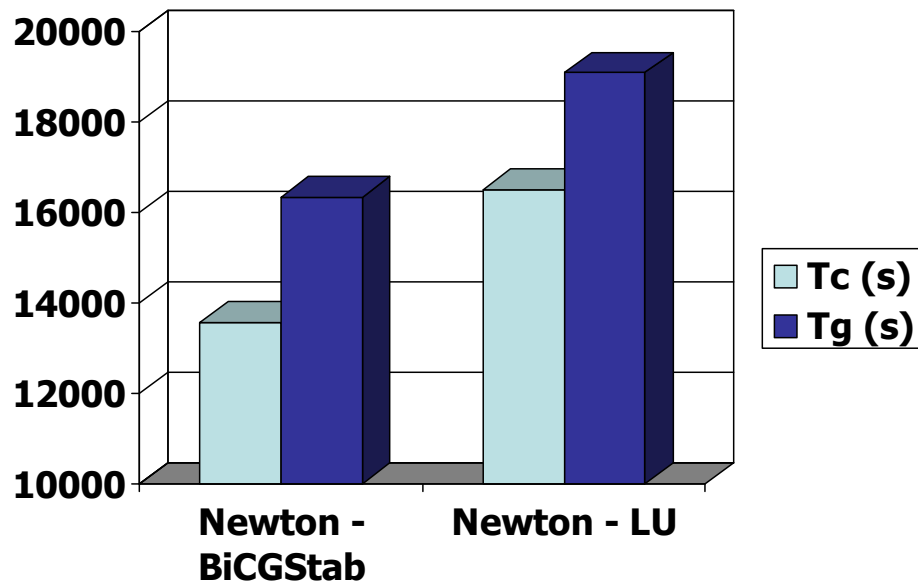


Figura 3.59 Tempi di calcolo: solutori non lineari

Il paragone tra i risultati evidenzia come il metodo Newton – BiCGStab sia più efficiente del metodo Newton – LU nonostante le ridotte dimensioni della formulazione ridotta del problema discreto (equazione 3.26). In particolare il calcolo e la memorizzazione dell'intero Jacobiano F' della funzione (vedi paragrafo 3.3.3.2) si rivelano essere piuttosto dispendiosi sia in termini di tempi di calcolo che in termini di consumo di memoria.

In conclusione è utile osservare come, al raggiungimento delle ottime prestazioni numeriche del modello Matlab/Simulink, abbiano contribuito soprattutto i seguenti fattori (paragrafi 3.3.2 e 3.3.3):

- l'efficienza, sia da un punto di vista modellistico che computazionale, delle nuove procedure sviluppate in questo capitolo (ovvero della formulazione sparsa (equazione 3.22) e della formulazione ridotta (equazione 3.26) del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello locale di contatto)
- l'efficienza dei solutori di equazioni differenziali ordinarie (ODE) e dei solutori non lineari (insieme al continuo aggiornamento delle condizioni iniziali di questi ultimi allo scopo di velocizzarne la convergenza)

- l'efficienza dell'ambiente di calcolo Matlab/Simulink per quanto riguarda sia il modello multibody del veicolo (SimMechanics) che il modello di contatto locale (CS - function).

I tempi di calcolo estremamente ridotti garantiti dalle due formulazioni del problema discreto rendono infine possibile l'implementazione direttamente online delle nuove procedure (cioè senza l'utilizzo di LUT) all'interno dei modelli multibody dei veicoli ferroviari. Tali performance hanno dunque permesso il raggiungimento di una buona integrazione tra la modellistica multibody e quella differenziale (alla base dei modelli locali); una simile integrazione costituisce infatti un obiettivo di fondamentale importanza poiché la modellistica differenziale è necessaria per una descrizione accurata dei fenomeni locali di contatto mentre quella multibody rappresenta attualmente lo standard nello studio della dinamica dei veicoli ferroviari.

3.7 Sviluppi futuri

I principali sviluppi futuri riguardanti il modello di contatto locale descritto in questo capitolo (ed in particolare le due formulazioni del problema discreto derivante dalla discretizzazione di tale modello) si concentreranno prevalentemente sugli aspetti numerici della questione. Più nel dettaglio verranno sviluppate le seguenti tematiche:

- per quanto riguarda la discretizzazione del modello di contatto verranno esaminate procedure FEM più accurate di quelle attualmente impiegate; più in particolare saranno considerati nuovi algoritmi per la costruzione delle mesh (anche in vista dell'impiego di mesh adattative) e nuovi tipi di elementi finiti dotati di funzioni di forma non lineari di vario grado
- per quanto riguarda invece l'implementazione del modello di contatto verrà studiata la possibilità di parallelizzare le varie procedure di calcolo e, a tal scopo, saranno impiegati alcuni innovativi toolbox di Matlab/Simulink appositamente dedicati al calcolo distribuito.

Verrà inoltre analizzata la possibile interazione di tali procedure con i software multibody già esistenti (in particolar modo Simpack Rail, un software commerciale dedicato all'analisi della dinamica dei veicoli ferroviari ampiamente testato e validato). In questo ambito, due risultano essere gli approcci più promettenti al problema:

- la cosimulazione tra l'ambiente Matlab/Simulink (dove sarà implementato il modello di contatto) e l'ambiente Simpack Rail (dove invece sarà

implementato il modello multibody del veicolo); la cosimulazione potrà essere effettuata mediante l'impiego di appositi toolbox di Simpack Rail quali il Code Export

- l'implementazione delle nuove procedure direttamente all'interno di Simpack Rail attraverso l'uso di User Routine scritte in ambiente C/C++.

Entrambe le possibilità appena descritte mirano a sfruttare contemporaneamente l'accuratezza e l'efficienza di Simpack Rail nel gestire sistemi multibody di elevata complessità e le performance dei nuovi modelli di contatto. A tale scopo è attualmente in corso una collaborazione con la INTEC GmbH, ovvero la società sviluppatrice del software Simpack Rail, per lo sviluppo di nuovi toolbox appositamente dedicati al contatto ruota – rotaia.

Altri sviluppi futuri riguarderanno infine lo sviluppo di nuovi modelli di usura basati sul modello di contatto ruota – rotaia descritto in questo capitolo. Lo scopo di tali modelli sarà la previsione dell'usura dei profili di ruota e rotaia e la conseguente ottimizzazione dei profili stessi al fine di ridurre l'usura in questione.

4 Conclusioni

In questa tesi sono stati descritti alcuni modelli di contatto innovativi per l'analisi dell'interazione ruota – rotaia sviluppati durante l'attività di dottorato con l'intento di colmare, almeno in parte, le lacune presenti in letteratura.

Per quando riguarda la classe dei modelli globali (vedi introduzione) sono stati proposti due nuovi modelli appartenenti al cosiddetto approccio semielastico ed in grado di soddisfare le seguenti specifiche: [P1] [P2] [P3] [P4] [P5] [P6] [P7] [P8] [P10] [P11] [P14] [P15]

- i modelli devono essere tridimensionali e considerare tutti i sei gradi di libertà relativi presenti tra ruota e rotaia
- i modelli devono essere in grado di supportare qualunque tracciato ferroviario e qualunque profilo di ruota e rotaia
- i modelli devono garantire un trattamento generale ed accurato del contatto multiplo senza introdurre ipotesi semplificative sulla geometria del problema; in particolare i modelli devono calcolare il numero e la posizione dei punti di contatto e, per ciascun punto, le forze ed i momenti di contatto
- i modelli devono essere implementabili online all'interno dei modelli multibody senza bisogno di LUT
- i modelli devono garantire tempi di calcolo comparabili con quelle dei software commerciali già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail) e compatibili con applicazioni in RT ed HIL
- i modelli devono essere compatibili con i software commerciali già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail).

La ricerca dei punti di contatto rappresenta l'aspetto più innovativo di entrambe le procedure. Più nel dettaglio, i due modelli si basano sulla riduzione della dimensione

del problema per mezzo di opportune tecniche analitiche e si differenziano tra loro per la diversa modellazione del contatto ruota – rotaia da un punto di vista cinematico.

Per quanto riguarda invece la classe dei modelli locali (vedi introduzione) è stato presentato un nuovo modello in grado di soddisfare le seguenti specifiche: [P9] [P12] [P13]

- il modello deve essere tridimensionale e considerare tutti i sei gradi di libertà relativi presenti tra ruota e rotaia
- il modello deve essere in grado di supportare qualunque tracciato ferroviario e qualunque profilo di ruota e rotaia
- il modello deve garantire un trattamento generale ed accurato del contatto multiplo senza introdurre ipotesi semplificative sulla geometria del problema; in particolare il modello deve essere in grado di calcolare sia le variabili locali legate al contatto (sforzi, deformazioni, forma e posizione dell'impronta di contatto) che quelle globali (forze e momenti di contatto)
- il modello deve essere implementabile online all'interno dei modelli multibody
- il modello deve garantire un'elevata efficienza computazionale ed un ridotto consumo di memoria permettendo così il raggiungimento di una buona integrazione tra la modellistica multibody e quella differenziale (alla base dei modelli locali)
- il modello deve essere compatibile con i software commerciali già esistenti (Simpack Rail, Adams Rail).

Gli aspetti maggiormente innovativi del nuovo modello locale riguardano la modellazione del contatto per mezzo di opportune condizioni analitiche e l'implementazione degli algoritmi destinati alla risoluzione del problema discreto derivante dalla discretizzazione del modello.

I nuovi modelli di contatto sono stati successivamente inseriti all'interno del modello multibody di un veicolo ferroviario di riferimento ottenendo così un modello completo di vagoni. Come veicolo di benchmark è stato scelto il Manchester Wagon le cui caratteristiche fisiche e geometriche possono essere facilmente reperite in letteratura. Il modello dell'intera vettura è stato implementato in ambiente Matlab/Simulink.

Il modello multibody della stessa vettura è stato poi implementato anche in ambiente Simpack Rail, un software dedicato all'analisi della dinamica dei veicoli ferroviari ampiamente testato e validato. In questo caso però il modello multibody è stato equipaggiato con un modello di contatto standard scelto tra quelli presenti all'interno di Simpack Rail (appartenente alla classe dei modelli globali e basato sull'approccio semielastico).

Infine è stata effettuata un'ampia campagna di simulazioni con lo scopo di valutare le performance del modello complessivo. La dinamica di marcia del veicolo è stata simulata su molti tracciati ferroviari differenti ottenuti al variare delle caratteristiche geometriche del tracciato stesso. Il confronto tra i risultati ottenuti con il modello implementato in Matlab/Simulink e quelli ottenuti con il modello implementato in Simpack Rail ha permesso un'accurata ed affidabile validazione dei nuovi modelli di contatto.

In conclusione, giunti al termine di questo percorso di studi, si ritiene doveroso ringraziare Trenitalia e la Regione Toscana per il supporto fornito durante tutta la durata dell'attività di ricerca.



Regione Toscana
Diritti Valori Innovazione Sostenibilità

Un vivo ringraziamento va inoltre alla INTEC GmbH, ovvero alla società sviluppatrice del software Simpack Rail, con la quale stiamo attualmente collaborando per lo sviluppo di nuovi toolbox appositamente dedicati al contatto ruota – rotaia.



Bibliografia

- [B1] A. A. Shabana, J. R. Sany. An augmented formulation for mechanical systems with non-generalized coordinates: application to rigid body contact problems. *Nonlinear Dynamics*, **24**, 183 – 204, 2001.
- [B2] S. Iwinicki. Simulation of wheel – rail contact forces. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, **26**, 887 – 900, 2003.
- [B3] J. Pombo, J. Ambrosio. Dynamic analysis of a railway vehicle in real operation conditions using a new wheel – rail contact detection model. *International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing*, **1**, 79 – 105, 2005.
- [B4] J. J. Kalker. *Three – dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1990.
- [B5] R. V. Dukkipati, J. R. Amyot. *Computer Aided Simulation in Railway Dynamics*. Dekker, New York, 1988.
- [B6] O. Polach. Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit. *Wear*, **258**, 992 – 1000, 2005.
- [B7] A. A. Shabana, K. E. Zaazaa, J. L. Escalona, J. L. Sany. Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, **269**, 295 – 325, 2004.
- [B8] G. Duvaut, J. L. Lions. *Les Inequations en Mecanique et en Physique*. Dunod, Paris, France, 1972.
- [B9] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985
- [B10] N. Kikuchi, J. T. Oden. *Contact Problems in Elasticity*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1988.
- [B11] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2002.
- [B12] O. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw – Hill, New York, 1988.
- [B13] A. Klarbring. A mathematical programming approach to 3D contact problems with frictions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **58**, 175 – 200, 1986.

- [B14] G. Dhatt, G. Touzot. *The Finite Element Method Displayed*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 1984.
- [B15] S. Iwinicki. *The Manchester Benchmarks for Rail Vehicle Simulators*. Swets & Zeitlinger, Lisse, Netherlands, 1999.
- [B16] C. Esvelde. *Modern Railway Track*. Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 2001.
- [B17] G. Vicuna. *Organizzazione e Tecnica Ferroviaria*. Ed. CIFI, Roma, Italy, 1986.
- [B18] M. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1976.
- [B19] J. A. Nelder, R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7, 308 – 313, 1965.
- [B20] F. Cheli, E. Pennestrì, *Cinematica e Dinamica dei Sistemi Multibody*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, Italia, 2006.
- [B21] www.mathworks.com. Official site of The MathWorks, Natick, Massachusetts.
- [B22] www.simpack.com. Official site of the INTEC GmbH, Gilching, Germany.
- [B23] R. S. Dembo, S. C. Eisenstat, T. Steihaug. Inexact Newton methods. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **19**, 400 – 408, 1982.
- [B24] C. T. Kelley. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1995.
- [B25] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 2003.
- [B26] J. Nocedal, S.J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operation Research, Berlin, Germany, 1999.
- [B27] L. F. Shampine, M. W. Reichelt. The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **18**, 1 – 22, 1997.

Elenco delle pubblicazioni

- [P1] M. Malvezzi, E. Meli, S. Papini, L. Pugi. Parametric models of railway systems for real – time applications. Multibody dynamics 2007 ECCOMAS, Milano, Italia, 2007.
- [P2] J. Auciello, M. Malvezzi, E. Meli, S. Papini, L. Pugi, A. Rindi. Multibody models of railway vehicles for real – time systems. XVIII Congresso AIMETA, Brescia, Italia, 2007.
- [P3] J. Auciello, M. Malvezzi, E. Meli, A. Rindi. Comparison between two multibody codes for the simulation of the railway vehicle dynamics. WCCM8 - ECCOMAS 2008, Venezia, Italia, 2008.
- [P4] S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, M. Rinchi. An innovative algorithm for the evaluation of wheel - rail contact points based on neural networks. WCCM8 - ECCOMAS 2008, Venezia, Italia, 2008.
- [P5] J. Auciello, S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, P. Toni. Determination of wheel – rail contact points in the simulation of the railway vehicle dynamics. COMPRAIL 2008, Toledo, Spagna, 2008.
- [P6] S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, A. Rindi. Determination of wheel – rail contact points with semianalytic methods. Multibody System Dynamics, 20, 4, 327 – 358, 2008.
- [P7] M. Malvezzi, E. Meli, S. Papini, L. Pugi, M. Rinchi, A. Rindi. A railway vehicle multibody model for real – time applications. Vehicle System Dynamics, 46, 12, 1083 – 1105, 2008.
- [P8] S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, M. Rinchi. Multibody modelling of railway vehicles: innovative algorithms for the detection of wheel - rail contact points. Multibody Dynamics 2009 ECCOMAS, Varsavia, Polonia, 2009.
- [P9] S. Magheri, M. Malvezzi, E. Meli, A. Rindi. Multibody modelling of railway vehicles: an innovative elastic wheel - rail contact model. Multibody Dynamics 2009 ECCOMAS, Varsavia, Polonia, 2009.
- [P10] J. Auciello, S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli. Dynamic simulation of railway vehicles: wheel – rail contact analysis. Vehicle System Dynamics, 47, 7, 867 – 899, 2009.

- [P11] J. Auciello, S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, P. Toni. Determination of wheel – rail contact points in the simulation of the railway vehicle dynamics. WIT Transactions on Engineering Sciences, 62, 261 – 270, 2009.
- [P12] S. Magheri, E. Meli, S. Papini, M. Rinchi. An innovative elastic wheel – rail contact model. XIX Congresso AIMETA, Ancona, Italia, 2009.
- [P13] S. Magheri, M. Malvezzi, E. Meli, A. Rindi. An innovative wheel – rail contact model for multibody applications. CM 2009, Firenze, Italia, 2009.
- [P14] S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, M. Rinchi. Innovative algorithms for the detection of wheel - rail contact points. CM 2009, Firenze, Italia, 2009.
- [P15] S. Falomi, M. Malvezzi, E. Meli, A. Rindi. Determination of wheel – rail contact points: comparison between classical and neural network based procedures. Meccanica, 44, 6, 661 – 686, 2009.