

**Università degli studi di Bologna**  
Facoltà di scienze matematiche, fisiche e naturali  
Dottorato di Ricerca in Matematica  
XVIII ciclo

# **Involuzioni di corpi di manici in dimensione 3 ed applicazioni**

ANDREA PANTALEONI  
TESI DI DOTTORATO IN GEOMETRIA (MAT 03)

**Direttore della Ricerca**

CHIAR.MO PROF. RICCARDO PIERGALLINI

**Coordinatore del Dottorato**

CHIAR.MO PROF. ALBERTO PARMEGGIANI



ALLA MEMORIA DI GIOVANNA SASSAROLI



# Introduzione

Oggetto di questa tesi sono le involuzioni dei corpi di manici tridimensionali orientabili e le loro applicazioni ai rivestimenti ramificati doppi fra 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili.

Nel corso degli ultimi anni è aumentato l'interesse per le involuzioni che conservano l'orientazione di una superficie chiusa connessa orientabile  $T_g$  di genere  $g$  a causa del teorema di Donaldson ([8]) per cui ogni 4-varietà simplettica chiusa orientabile possiede una struttura a "pencil" di Lefschetz e del teorema di Gompf ([12]) per cui ogni "pencil" di Lefschetz supporta una struttura simplettica. Siccome ogni fibrazione di Lefschetz è rappresentata da una parola  $w$  che rappresenta l'identità nel mapping class group ed ogni lettera di  $w$  è un twist di Dehn positivo, abbiamo una forte relazione fra le parole rappresentanti l'identità del mapping class group e la topologia simplettica di dimensione 4. Questo fa in modo che si sia riscoperta l'importanza degli elementi di periodo finito nel mapping class group (l'insieme delle classi d'isotopia delle involuzioni che conservano l'orientazione rappresentano tutti gli elementi del mapping class group di periodo due). Siccome ogni involuzione di  $H_g$  si restringe ad una involuzione di  $T_g$  e viceversa ogni involuzione che conserva l'orientazione di  $T_g$  si estende ad una di  $H_g$  (questo fatto è standard per  $g = 0, 1$  e segue da [36] per  $g > 1$ ), vi è un forte legame fra le involuzioni che conservano l'orientazione di  $H_g$  (qui classificate) e quelle di  $T_g$ .

La classificazione delle involuzioni di  $H_g$  che conservano l'orientazione sarà l'argomento del secondo capitolo. In tal modo avremo un rappresentante, a meno di coniugio, per ogni involuzione di  $H_g$ , in quanto in [18] esiste un criterio per classificare le involuzioni che invertono l'orientazione. Siccome ogni rivestimento doppio è regolare, una volta note tutte le involuzioni che conservano l'orientazione di  $H_g$ , risultano completamente determinate tutte le classi d'equivalenza dei rivestimenti doppi (anche ramificati) da un corpo di manici ad un corpo di manici. Sfruttando questo fatto mostreremo come ogni rivestimento doppio fra superfici chiuse, connesse ed orientabili si estende ad un'unico (a meno di equivalenze forti) rivestimento doppio fra i corpi di manici delimitati dalle superfici precedenti. Così la correlazione

fra le involuzioni che conservano l'orientazione di  $H_g$  e quelle di  $T_g$  risulta ulteriormente rafforzata, infatti sarà sufficiente conoscere come agisce l'involuzione di  $T_g$  su degli elementi del gruppo fondamentale per sapere qual'è l'unica, a meno di equivalenze forti, involuzione di  $H_g$  che l'estende.

Come ulteriore applicazione, abbiamo ricavato una rappresentazione dei rivestimenti ramificati doppi fra 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili. Tale rappresentazione sarà l'argomento della sezione iniziale del terzo capitolo, dove troviamo, inizialmente, la definizione di particolari spezzamenti di Heegaard (chiamati 2-simmetrici) e, successivamente, si è dimostrato che ogni rivestimento ramificato doppio fra 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili si può costruire a partire da uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico opportuno. Infine, nelle due sezioni conclusive, si sono analizzate alcune classi d'isotopia degli omeomorfismi di spezzamento che rappresentano gli spezzamenti di Heegaard 2-simmetrici (quindi i rivestimenti ramificati doppi di 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili).

L'argomento dell'ultimo capitolo sono i rivestimenti ramificati doppi iterati su  $S^3$ . Essi sono stati definiti da Birman ed Hilden come una successione finita di rivestimenti ramificati doppi tale che lo spazio base dell'ultima mappa è  $S^3$ . Gli autori hanno osservato che se ogni 3-varietà chiusa, connessa ed orientabile fosse un rivestimento ramificato doppio iterato su  $S^3$ , allora, usando l'argomentazione di Fox in [10], si otterrebbe che l'esistenza di un controesempio alla congettura di Poincaré implica l'esistenza di un rivestimento doppio ciclico  $M$  di  $S^3$  ramificato su un link tale che  $M$  è un controesempio alla congettura di Poincaré. Comunque, in [35] Raymond e Tollefson hanno risolto negativamente la questione mostrando come costruire una classe di 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili che, non ammettendo alcuna azione di un gruppo finito, non possono essere rappresentate mediante rivestimenti ramificati doppi su un'altra 3-varietà chiusa, connessa ed orientabile. Nonostante ciò, i rivestimenti ramificati doppi iterati su  $S^3$  hanno continuato a suscitare un certo interesse. Infatti è possibile trovare in letteratura vari esempi di costruzione di alcuni rivestimenti ramificati doppi iterati su  $S^3$  (nel senso di Birman ed Hilden). Fra essi citiamo i rivestimenti ordinari di grado 2 o 3 di una 3-varietà chiusa connessa orientabile di genere di Heegaard 2 ([24] e [25]), gli spazi di Seifert o le "graph-manifold" chiuse ([27] e [28]). L'interesse nei confronti di tali spazi (e nei confronti dei rivestimenti doppi in genere) risiede nel fatto che, il possedere delle involuzioni li rende più semplici da studiare rispetto alle 3-varietà che non ammettono queste azioni di  $\mathbb{Z}_2$  ([6], [9], [27], [44], [46]).

Alla luce di queste considerazioni, abbiamo introdotto delle definizioni nuove e più deboli di rivestimenti ramificati doppi iterati su  $S^3$  e, successivamente, trovato alcune condizioni sufficienti per essere degli spazi di questo tipo. Infine, si sono classificati i rivestimenti ramificati doppi iterati su  $S^3$

nel senso di Birman-Hilden in termini di omeomorfismi e di restrizioni al bordo di rivestimenti ramificati doppi fra corpi di manici. Rimane ancora aperta la questione se le nostre definizioni dei nuovi tipi di rivestimenti ramificati doppi su  $S^3$  comprendano, o meno, tutte le 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili.

Facciamo presente, infine, che nel primo capitolo si trovano esposti i concetti base della topologia PL.

## Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professor Riccardo Piergallini per i suoi consigli, il suo aiuto e, soprattutto, per la sua pazienza.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Nozioni base di topologia geometrica</b>	<b>9</b>
1.1 Cenni di topologia PL . . . . .	9
1.2 Mapping class group . . . . .	14
1.3 Link in 3-varietà . . . . .	16
1.4 Varietà PL come corpi di manici . . . . .	17
1.4.1 Movimenti di manici . . . . .	20
1.5 Spezzamenti di Heegaard . . . . .	21
1.6 Chirurgia . . . . .	23
1.7 Rivestimenti ramificati . . . . .	25
1.8 Involuzioni e rivestimenti doppi . . . . .	27
<b>2 Involuzioni che conservano l'orientazione di <math>H_g</math></b>	<b>29</b>
2.1 Preliminari . . . . .	29
2.2 Quozienti di involuzioni che conservano l'orientazione . . . . .	34
2.3 Estensioni delle involuzioni . . . . .	37
2.4 Involuzioni libere che conservano l'orientazione . . . . .	41
2.5 Involuzioni che fissano 1-sottovarietà . . . . .	43
2.5.1 Estensione dei rivestimenti doppi $T_g \rightarrow T_n$ all'interno dei corpi di manici . . . . .	51
<b>3 Rivestimenti ramificati doppi fra 3-varietà</b>	<b>57</b>
3.1 Spezzamenti di Heegaard 2-simmetrici . . . . .	57
3.2 Omeomorfismi che commutano con $L_g^{0,m+1}$ . . . . .	63
3.3 Generatori di alcuni sottogruppi di $S_m^{2n}(T_g)$ . . . . .	66
<b>4 Rivestimenti ramificati doppi iterati di <math>S^3</math></b>	<b>75</b>
4.1 Definizioni preliminari . . . . .	75
4.2 Correlazioni fra i rivestimenti ramificati doppi iterati di $S^3$ . . . . .	78
4.3 Iterazioni e chirurgia . . . . .	81
4.4 Caratterizzazione delle $k$ -iterazioni . . . . .	88

**8    INDICE**

---

4.5 Esempi di rivestimenti ramificati doppi iterati di  $S^3$  . . . . . 99  
4.6 Conclusioni . . . . . 103

**Bibliografia** . . . . . **105**

# Capitolo 1

## Nozioni base di topologia geometrica

Introduciamo brevemente alcune nozioni di topologia PL che saranno utilizzate in seguito.

Denoteremo con  $B^n$  la boccia unitaria  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ , con  $S^n$  la sfera unitaria che limita  $B^{n+1}$ , cioè  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  e con  $I^n$  il prodotto cartesiano di  $n$  copie di  $[0, 1]$ . Inoltre, se  $M$  è una varietà con bordo, allora  $\partial M$  è il bordo di  $M$  e la sottovarietà  $M - \partial M$  sarà denotata con  $\text{int } M$ .

### 1.1 Cenni di topologia PL

In questa sezione sarà esposta una breve introduzione alle varietà PL. Si rimanda a [38] per le dimostrazioni e per una esposizione maggiormente dettagliata della topologia PL.

#### Complessi simpliciali

Un simpleso di dimensione  $n$  (o  $n$ -simpleso) generato dai punti affinemente indipendenti  $p_0, \dots, p_n$  di  $\mathbb{R}^m$  (con  $m \geq n$ ) è l'insieme

$$\langle p_0, \dots, p_n \rangle = \left\{ p \in \mathbb{R}^m : p = \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

ed i punti  $p_i$  sono chiamati i vertici di  $\sigma$ . Una faccia  $\tau$  di un simpleso  $\sigma = \langle p_0, \dots, p_n \rangle$  è un simpleso generato da un sottoinsieme di  $\{p_0, \dots, p_n\}$ . Il baricentro di  $\sigma$  è il punto  $\frac{p_0 + \dots + p_n}{n+1}$ .

Per complesso simpliciale  $K$  di dimensione  $n$  (o  $n$ -complesso) intendiamo una collezione localmente finita di semplici in  $\mathbb{R}^m$  soddisfacente:

- (i) se  $\sigma$  è un semplice di  $K$  e  $\tau$  è una faccia di  $\sigma$ , allora  $\tau$  è un semplice di  $K$ ;
- (ii) se  $\sigma, \tau$  sono due semplici di  $K$ , allora  $\sigma \cap \tau$  è una faccia sia di  $\sigma$  che di  $\tau$ ;
- (iii) esiste almeno un  $n$ -simple in  $K$  e  $K$  non contiene  $r$ -simplessi per  $r > n$ .

Un complesso  $L$  è un sottocomplesso di  $K$  se ogni semplice di  $L$  è un semplice di  $K$ . L' $i$ -scheletro  $K_i$  di  $K$  è il sottocomplesso di  $K$  formato da tutti i semplici di  $K$  di dimensione minore od uguale ad  $i$ . Un semplice, considerato insieme a tutte le sue faccie, è un complesso.

Un complesso  $K$  può essere considerato anche come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$  e quindi eredita la topologia indotta. E' ricorrente denotare con  $|K|$  tale spazio topologico associato naturalmente a  $K$ .

Una suddivisione di  $K$  è un complesso simpliciale  $L$  tale che  $|L| = |K|$  (come insiem) ed ogni semplice di  $L$  giace in un semplice di  $K$ . La suddivisione baricentrica di  $K$  è quella particolare suddivisione  $\beta K$  di  $K$  i cui vertici sono i baricentri dei simplessi di  $K$ .

La suddivisione baricentrica del semplice  $\sigma = \langle p_0, \dots, p_n \rangle$ , considerato come  $n$ -complesso, può essere definita induttivamente come segue. Essa è la decomposizione di  $\sigma$  nell'insieme di tutti gli  $n$ -simplessi  $\langle b, q_0, \dots, q_{n-1} \rangle$  dove  $b$  è il baricentro di  $\sigma$  e  $\langle q_0, \dots, q_{n-1} \rangle$  varia fra tutti gli  $(n-1)$ -simplessi della suddivisione baricentrica della faccia  $\sigma_i = \langle p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n \rangle$  per ogni  $i = 0, \dots, n$ . E' facile mostrare che gli  $n$ -simplessi delle suddivisione baricentrica di  $\sigma$ , insieme con tutte le loro faccie, formano un  $n$ -complesso denotato  $\beta\sigma$  tale che  $|\sigma| = |\beta\sigma|$ .

La suddivisione baricentrica di un complesso  $K$  è l'unione dei simplessi di tutte le suddivisioni baricentriche dei simplessi di  $K$ .

Per i complessi simpliciali  $K_1, K_2$ , una mappa continua  $f : |K_1| \rightarrow |K_2|$  è PL se esistono una suddivisione  $L_1$  di  $K_1$  ed una suddivisione  $L_2$  di  $K_2$  rispetto cui  $f$  è simpliciale, cioè per ogni  $v$  vertice di  $L_1$  allora  $f(v)$  è un vertice di  $L_2$  e per ogni semplice  $\sigma$  di  $L_1$  allora  $f(\sigma)$  è un semplice  $\tau$  di  $L_2$  tale che  $f : \sigma \rightarrow \tau$  è lineare, nel senso che se  $x \in \sigma = \langle v_0, \dots, v_m \rangle$  è uguale a  $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$  allora  $f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(v_i)$ . La composizione di due funzioni PL è ancora una funzione PL.

### **Varietà PL**

Una triangolazione di uno spazio topologico  $X$  è una coppia  $(X, h)$  dove  $T$  è un complesso simpliciale ed  $h : |T| \rightarrow X$  è un omeomorfismo. Due triangolazioni  $(T_1, h_1)$  e  $(T_2, h_2)$  di  $X$  sono compatibili se la mappa  $h_2^{-1} \circ h_1 : |T_1| \rightarrow |T_2|$  è PL.

Per un complesso  $K$  ed un semplice  $\sigma$  di  $K$ , la stella di  $\sigma$  rispetto  $K$ ,  $\text{st}(\sigma, K)$ , è il sottocomplesso di  $K$  consistente di tutti i semplici di  $K$  che intersecano  $\sigma$  insieme con tutte le loro faccie, ed il link di  $\sigma$  rispetto  $K$ ,  $\text{lk}(\sigma, K)$ , è il sottocomplesso di  $K$  consistente di tutti i semplici di  $K$  che non intersecano  $\sigma$  ma che sono facce di qualche semplice che interseca  $\sigma$ .

Una triangolazione  $(T, h)$  di una  $n$ -varietà  $M$  è combinatorica se e solo se per ogni vertice  $v$  di  $T$ , esiste un omeomorfismo PL fra  $|\text{lk}(v, T)|$  ed un  $(n-1)$ -simpleso od il bordo di un  $n$ -simpleso a seconda se  $h(v) \in \partial M$  o  $h(v) \in \text{int } M$ . Se  $(K, h)$  è una triangolazione combinatorica di  $M$  ed  $L$  è una suddivisione di  $K$ , allora  $(L, h)$  è una triangolazione combinatorica di  $M$ .  $\mathcal{S}$  è una struttura PL su  $M$  se è una collezione non vuota massimale di triangolazioni combinatoriche compatibili di  $M$  e la coppia  $(M, \mathcal{S})$  è una  $n$ -varietà PL. Una mappa continua  $f : M_1 \rightarrow M_2$  fra varietà PL è una funzione PL se per delle triangolazioni  $(T_i, h_i)$  di  $(M_i, \mathcal{S}_i)$  la mappa  $h_2^{-1} \circ f \circ h_1 : |T_1| \rightarrow |T_2|$  è PL. In questo caso, per ogni triangolazione  $(T_i, h_i)$  di  $(M_i, \mathcal{S}_i)$  la mappa  $h_2^{-1} \circ f \circ h_1 : |T_1| \rightarrow |T_2|$  è PL. Così ora è chiaro che cosa s'intende con il termine omeomorfismo PL. Se  $(M, \mathcal{S})$  è una  $n$ -varietà PL, è usuale omettere le struttura PL  $\mathcal{S}$  e denotare la coppia  $(M, \mathcal{S})$  semplicemente con  $M$ .

Siano  $M$  una  $n$ -varietà PL ed  $X$  una triangolazione combinatorica, si vuole ora definire una decomposizione cellulare  $X^*$  di  $M$  chiamata duale di  $X$ . Le 0-celle di  $X^*$  (cioè lo 0-scheletro  $X_0^*$ ) sono i baricentri degli  $n$ -simplessi di  $X$ , mentre le  $i$ -celle di  $X^*$  sono definiti induttivamente. Supponiamo di aver definito l' $(i-1)$ -scheletro  $X_{i-1}^*$  di  $X^*$  per  $i > 0$  e sia  $L_\sigma$  l'unione delle  $(i-1)$ -celle di  $X^*$  che contengono  $a_\sigma$ . Le  $i$ -celle di  $X^*$  sono  $\text{st}(L_\sigma, a_\sigma)$  al variare dei baricentri  $a_\sigma$  di ogni  $(n-i)$ -simpleso  $\sigma$  di  $X$ . Per induzione si vede che  $\text{st}(L_\sigma, a_\sigma)$  è effettivamente una  $i$ -cella, chiamata duale di  $\sigma$  e denotata con  $\sigma^*$ . Poniamo quindi  $X_i^* = \bigcup_{\sigma \in X_{n-i}} \sigma^*$  e  $X = \bigcup_{i=0}^n X_i^*$ . Ora, a meno di opportune suddivisioni, possiamo fare in modo che  $X^*$  sia una nuova triangolazione di  $M$ , infatti un complesso cellulare può essere sempre trasformato in un complesso simpliciale senza dover introdurre nuovi vertici.

Una sottovarietà  $N$  di una varietà PL  $M$  è una sottovarietà PL se esiste una triangolazione  $(T, h)$  nella struttura PL di  $M$  ed un sottocomplesso  $S$  di  $T$  tale che  $(S, h|_S)$  è una triangolazione combinatorica di  $N$  (e quindi determina una struttura PL di  $N$ ). Sia  $M$  una varietà PL con bordo, allora  $N$  è una sottovarietà PL propria di  $M$  se e solo se  $N$  è una sottovarietà PL,  $N \cap \partial M = \partial N$  ed  $N \cap \text{Int } M = \text{Int } N$ . Ora sarà chiaro il concetto di immersione (omeomorfismo sull'immagine) PL ed immersione PL propria.

D'ora in avanti considereremo i complessi simpliciali a meno di omeomorfismi PL, il che ci permette di usare la stessa notazione per un complesso simpliciale e per lo spazio topologico ad esso associato.

Siano  $M_1$  ed  $M_2$  due varietà PL ed  $h_1, h_2 : M_1 \rightarrow M_2$  due mappe.

- Siano  $h_1$  e  $h_2$  due omeomorfismi PL. Essi si dicono isotopi se e solo se esiste una mappa PL  $k_t(x) = K(x, t) : M_1 \times [0, 1] \longrightarrow M_2$  tale che  $k_t$  è un omeomorfismo PL per ogni  $t$  e  $k_0 = h_1$  e  $k_1 = h_2$ .
- Siano  $h_1$  e  $h_2$  due immersioni PL. Esse si dicono isotope se esiste un'immersione PL  $k_t(x) = K(x, t) : M_1 \times [0, 1] \longrightarrow M_2 \times [0, 1]$  tale che  $K(M_1 \times \{t\}) \subseteq M_2 \times \{t\}$ .

In entrambi i casi la mappa  $K$  è chiamata isotopia PL fra  $h_1$  ed  $h_2$ . In più, un'isotopia d'ambiente fra due sottovarietà PL  $N_1$  ed  $N_2$  di  $M$  è un omeomorfismo PL  $h : M \longrightarrow M$  isotopo all'identità tale che  $h(N_1) = N_2$  o, in altri termini, un'isotopia PL  $K(x, t) : M \times [0, 1] \longrightarrow M \times [0, 1]$  fra gli omeomorfismi PL  $k_0$  e  $k_1$  tali che  $k_0$  è l'identità di  $M$  e  $k_1(N_1) = N_2$ . Chiaramente se  $N_1$  ed  $N_2$  sono isotope d'ambiente allora sono isotope, mentre il viceversa non è vero in generale. Infatti è semplice costruire due varietà isotope  $N_1$  ed  $N_2$  immerse in  $M$  con  $\partial M \neq \emptyset$  tali che  $N_1 \cap \partial M \neq \emptyset$  e  $N_2 \cap \partial M = \emptyset$ . Siffatte  $N_1$  ed  $N_2$  non possono essere isotope d'ambiente in quanto ogni omeomorfismo di  $M$  manda  $\partial M$  in se stesso. Comunque, due sottovarietà PL isotope  $N_1$  e  $N_2$  della varietà PL  $M$  sono isotope d'ambiente se  $M$  è senza bordo, oppure se  $N_1, N_2$  sono sottovarietà proprie di  $M$ .

Un'isotopia od un'isotopia d'ambiente  $K$  fissa un sottoinsieme  $V$  se e solo se  $K|_{V \times [0,1]} = (K_0 \times \text{id})|_{V \times [0,1]}$ . In tal caso l'isotopia (o l'isotopia d'ambiente)  $K$  si dice modulo  $V$  (più brevemente si scrive mod  $V$ ) e l'insieme  $M - V$  si chiama supporto di  $K$ .

### **Orientazione**

Con il termine orientazione di una  $n$ -varietà PL  $M$  s'intende un'orientazione coerente degli  $n$ -simplessi in una triangolazione di  $T$ . Un'orientazione di un  $n$ -simpleso è una classe d'equivalenza, modulo permutazioni pari, dell'ordinamento dei suoi vertici. Usando le parentesi quadrate per le classi d'equivalenza e la convenzione  $-[v_0, v_1, v_2, \dots, v_n]$  per denotare l'orientazione opposta a  $[v_0, v_1, v_2, \dots, v_n]$  (cioè  $[v_1, v_0, v_2, \dots, v_n]$ ) del simpleso  $\sigma = \langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ , l'orientazione sulla  $(n - 1)$ -faccia di  $\sigma$  opposta a  $v_i$  indotta dall'orientazione  $[v_0, v_1, v_2, \dots, v_n]$  di  $\sigma$  è, per definizione, uguale a  $(-1)^i [v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n]$ . Allora un'orientazione di  $M$  è una scelta di un'orientazione per ogni  $n$ -simpleso di  $T$  tale che se un  $(n - 1)$ -simpleso  $\tau$  è una faccia di due  $n$ -simplessi  $\sigma_1, \sigma_2$ , allora le due orientazioni di  $\tau$  indotte da quelle di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono opposte.

Una  $n$ -varietà PL connessa  $M$  è orientabile se e solo se esiste un'orientazione coerente e, in questo caso, ammette solo due orientazioni possibili. Si può dimostrare che una  $n$ -varietà PL connessa  $M$  è orientabile se e solo se  $H_n(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$  e la scelta di una delle due orientazione equivale

alla scelta di uno dei due generatori di  $\mathbb{Z}$ . Una  $n$ -varietà PL orientata è una coppia formata da una  $n$ -varietà PL orientabile insieme con un'orientazione. Una  $n$ -varietà PL connessa  $M$  è non orientabile se e solo se non esiste un'orientazione coerente se e solo se  $H_n(M, \partial M)$  è il gruppo banale.

Esiste un altro modo, equivalente al precedente, per introdurre il concetto di orientazione per varietà PL a partire dalle immersioni di  $I^n$ . Se  $I^n$  è il prodotto cartesiano di  $n$  copie di  $[0, 1]$ , il teorema del disco afferma che esistono, a meno di isotopie, al massimo due immersioni di  $I^n$  nell'interno di una  $n$ -varietà PL connessa. Una  $n$ -varietà  $M$  si dice orientabile se esistono esattamente due classi distinte per tali immersioni e tali classi sono chiamate orientazioni. Se si sceglie un'orientazione la varietà si dice orientata ed un omeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  conserva l'orientazione se e solo se  $f \circ h$  è isotopa ad  $h$  per ogni immersione regolare  $h : I^n \rightarrow \text{int } M$ , altrimenti inverte l'orientazione.

### Intorni regolari

Siano  $L_1, L_2$  due sottocomplessi disgiunti del complesso simpliciale  $K$  tali che per ogni simplelso  $\sigma_1$  di  $L_1$  ed ogni simplelso  $\sigma_2$  di  $L_2$  esiste un simplelso  $\sigma$  di  $K$  tale che  $\sigma = \langle \sigma_1 \cup \sigma_2 \rangle$ . In tal caso  $\sigma$  si denota con  $\sigma_1 * \sigma_2$  e si definisce il sottocomplesso  $L_1 * L_2$  di  $K$  tramite  $L_1 * L_2 = \{\sigma_1 * \sigma_2 : \sigma_1 \in L_1, \sigma_2 \in L_2\}$ . Si noti che  $L_1$  ed  $L_2$  sono sottocomplessi di  $L_1 * L_2$ .

Sia  $K$  un complesso simpliciale. Per ogni punto  $x \in K$  denotiamo con  $\sigma_x$  il simplelso di  $K$  con dimensione minore che contiene  $x$  ( $\sigma_x = x$  se  $x$  è un vertice di  $K$ ). Poniamo  $xK$  uguale alla suddivisione di  $K$  ottenuta rimpiazzando  $\text{st}(\sigma_x, K)$  con  $(x * \partial\sigma_x) * \text{lk}(\sigma_x, K)$ . Siano ora  $L$  un sottocomplesso di  $K$  e  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  tutti i simplelso di  $K - L$  numerati di modo che  $\dim \sigma_i \geq \dim \sigma_{i+1}$  per ogni  $i = 1, \dots, r - 1$ . Per ogni  $i = 1, \dots, r$  scegliamo un punto  $x_i \in \sigma_i$  e definiamo le suddivisioni  $K_1, \dots, K_r$  di  $K$  tali che  $K_1 = x_1 K$  e  $K_i = x_i K_{i-1}$ . La suddivisione  $K_r$  si chiama suddivisione derivata di  $K$  modulo  $L$ .

Supponiamo che  $P$  sia un poliedro compatto in una  $n$ -varietà PL  $M$ , cioè  $P$  è un sottocomplesso finito di una triangolazione  $K$  della struttura PL di  $M$ . Denotiamo con  $N(P, K)$  il più piccolo sottocomplesso di  $K$  che è anche un intorno di  $P$  in  $K$  e con  $C(P, K)$  il complemento simpliciale di  $P$  in  $K$ , cioè l'insieme dei simplelso di  $K$  disgiunti da  $P$ . Dalle definizioni segue  $K = N(P, K) \cup C(P, K)$ . Sia  $K'$  una suddivisione derivata di  $K$  modulo  $P \cup C(P, K)$ , allora  $N(P, K')$  è un intorno regolare di  $P$  in  $M$ .

**Teorema 1.1.1.** *Siano  $M$  una varietà PL e  $P$  un poliedro compatto.*

1. *Esiste almeno un intorno regolare di  $P$  in  $M$ .*
2. *Ogni intorno regolare di  $P$  in  $M$  è una varietà compatta con bordo.*

3. Se  $N_1, N_2$  sono due intorni regolari di  $P$  in  $M$ , allora esiste un'isotopia modulo  $P$  fra essi.

Se la varietà PL  $M$  ha bordo compatto, un intorno regolare di  $\partial M$  in  $M$  è chiamato collare di  $\partial M$  in  $M$ .

**Teorema 1.1.2.** *Per ogni una varietà PL  $M$  con bordo compatto esiste un intorno collare di  $\partial M$  in  $M$ . Inoltre, se  $C$  è un collare del bordo, allora esiste un'isotopia d'ambiente fra  $C$  e  $\partial M \times [0, 1]$ .*

### Sottovarietà trasversali

Siano ora  $M$  una  $m$ -varietà PL e  $S, F$  due sottovarietà PL rispettivamente di dimensione  $n$  ed  $k$  con  $n + k \leq m$ .

Assumiamo  $n + k < m$ . Allora  $S$  ed  $F$  sono trasversali (od in posizione generale) in  $M$  se e solo se  $S \cap F = \emptyset$ .

Sia ora  $n + k = m$ . Allora  $S$  ed  $F$  sono trasversali (od in posizione generale) in  $M$  quando  $S \cap F = \emptyset$ , oppure quando  $S \cap F$  è un insieme di punti isolati ed ognuno di essi possiede un intorno  $V$  in  $M$  tale che fra le terne  $(V \cap S, V \cap F, V)$ ,  $(\mathbb{R}^n \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k)$  esiste un omeomorfismo PL.

Siano  $X$  uno spazio topologico ed  $Y$  uno spazio metrico. Un'isotopia  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$  è un  $\epsilon$ -isotopia se e solo se per ogni  $(x, t) \in X \times [0, 1]$ ,  $d(\pi(F(x, t)), \pi(F(x, 0))) < \epsilon$  dove  $\pi$  è la proiezione di  $Y \times [0, 1]$  sul primo fattore.

**Teorema 1.1.3 (Approssimazione trasversale).** *Siano ora  $M$  una  $m$ -varietà PL e  $S, F$  due sottovarietà PL rispettivamente di dimensione  $n$  e  $k$ . Se  $n + k \leq m$ , allora esiste un' $\epsilon$ -isotopia di  $M$  con supporto compatto che rende  $S$  ed  $F$  trasversali.*

In seguito tutte le varietà e tutte le mappe saranno delle varietà PL e delle mappe PL.

## 1.2 Mapping class group

Sia  $T_g$  la superficie chiusa, connessa ed orientabile di genere  $g$ .

Denotiamo con  $H(T_g)$  il gruppo degli omeomorfismi  $T_g \rightarrow T_g$  che conservano l'orientazione e con  $I(T_g)$  il sottoinsieme degli elementi di  $H(T_g)$  che sono isotopi all'identità  $1_g$  di  $T_g$ . Chiaramente  $I(T_g)$  è un sottogruppo normale di  $H(T_g)$ , quindi possiamo definire il gruppo quoziente  $H(T_g)/I(T_g)$  denotato  $M(T_g)$  e chiamato mapping class group di  $T_g$ . In altri termini,  $M(T_g)$  è l'insieme delle classi d'isotopia degli omeomorfismi, da  $T_g$  in se stesso, che conservano l'orientazione.

Una curva semplice chiusa  $c$  in  $T_g$  è l'immagine di un'immersione regolare di  $S^1$  in  $T_g$ , mentre un arco in  $T_g$  è l'immagine di un'immersione regolare di  $[0, 1]$  in  $T_g$ .

Se  $c$  è una curva semplice chiusa in  $T_g$ , il twist  $t(c)$  lungo  $c$  è l'omeomorfismo  $t(c) : T_g \rightarrow T_g$  che conserva l'orientazione definito come segue. Sia  $A$  un intorno di  $c$  in  $T_g$  parametrizzato come  $[-1, 1] \times S^1$ , dove  $S^1 = [0, 2\pi]_{0 \sim 2\pi}$ , così che  $c$  corrisponde a  $\{0\} \times S^1$  e la parametrizzazione conserva le orientazioni di  $[-1, 1] \times S^1$  e  $\{0\} \times S^1$ . Allora  $t(c)$  su  $A$  è definito da  $t(c)(r, \theta) = (r, \theta + r\pi + \pi)$ , mentre fuori da  $A$  è l'identità. L'omeomorfismo  $t(c)$  dipende solo dalla classe d'isotopia di  $c$ , infatti, a mano d'isotopie,  $t(c)$  non dipende dalla scelta di  $A$  e dall'orientazione di  $c$ . Inoltre, se  $c$  e  $c'$  sono isotope, allora  $t(c)$  e  $t(c')$  sono isotope.

Siano ora  $c$  e  $c'$  due curve semplici chiuse non separanti (cioè  $T_g - c$  e  $T_g - c'$  sono connessi):

- se, a meno d'isotopie,  $c \cap c' = \emptyset$ , allora  $t(c) \circ t(c') = t(c') \circ t(c)$ ;
- se, a meno d'isotopie, l'intersezione  $c \cap c'$  è formata da un unico punto, allora  $t(c) \circ t(c') \circ t(c) = t(c') \circ t(c) \circ t(c')$ ;
- se esiste un omeomorfismo  $f : T_g \rightarrow T_g$  tale che  $c' = f(c)$ , allora  $t(c') = f \circ t(c) \circ f^{-1}$ .

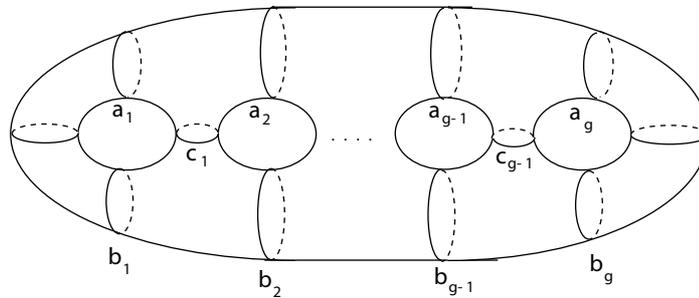


Figura 1.1: Curve dei generatori di  $M(T_g)$

**Teorema 1.2.1 (Lickorish, [22]).** *Il gruppo  $M(T_g)$  è generato da tutti i twist sulle curve  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_{g-1}$  di figura 1.1.*

Un altro omeomorfismo notevole di  $T_g$  in se stesso è il braid twist. Siano  $P, Q \in T_g$  ed  $a$  un arco semplice in  $T_g$  di estremi  $P$  e  $Q$  parametrizzato con  $\gamma : [0, 1] \rightarrow a$  tale che  $\gamma(0) = P$  e  $\gamma(1) = Q$ . Scegliamo un'immersione regolare  $A : B^2 \rightarrow T_g$  tale che  $\gamma(t) = A(t - \frac{1}{2}, 0)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

Consideriamo ora  $B^2$  immerso in  $\mathbb{C}$  e definiamo il braid twist  $t(a)$  come la classe d'isotopia relativa a  $\{P, Q\}$  dell'omeomorfismo che dentro  $A(B^2)$  manda, per ogni  $z \in B^2$ ,  $A(z)$  in  $A(e^{2i\pi|z|}z)$  mentre al di fuori di  $A(B^2)$  è uguale all'identità  $1_g$ . La definizione di  $t(a)$  non dipende dalla scelta di  $A$  e di  $\gamma$ , inoltre, se gli archi semplici  $a$  ed  $a'$  fra  $P$  e  $Q$  sono isotopi relativamente a  $\{P, Q\}$ , allora  $t(a) = t(a')$ .

Siano ora  $a$  e  $a'$  due archi semplici parametrizzati rispettivamente da  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow T_g$ :

- se, a meno d'isotopie relative agli estremi,  $a \cap a' = \emptyset$ , allora  $t(a) \circ t(a') = t(a') \circ t(a)$ ;
- se, a meno d'isotopie relative agli estremi,  $\gamma(1) = \gamma'(0)$  ed  $a \cap a' = \{\gamma(1)\}$ , allora  $t(a) \circ t(a') \circ t(a) = t(a') \circ t(a) \circ t(a')$ ;
- se esiste un omeomorfismo  $f : T_g \rightarrow T_g$  tale che  $a' = f(a)$ , allora  $t(a') = f \circ t(a) \circ f^{-1}$ .

Infine, siano  $c$  è una curva semplice chiusa in  $T_g$  ed  $a$  un arco semplice in  $T_g$ :

- se, a meno d'isotopie relative agli estremi di  $a$ ,  $a \cap c = \emptyset$ , allora  $t(a) \circ t(c) = t(c) \circ t(a)$ ;
- se, a meno d'isotopie relative agli estremi di  $a$ , l'intersezione  $a \cap c$  è formata da un unico punto, allora vale l'uguaglianza  $t(a) \circ t(c) \circ t(a) \circ t(c) = t(c) \circ t(a) \circ t(c) \circ t(a)$ .

Per un'esposizione completa del mapping class group si rimanda a [4] od a [17], mentre per una dettagliata trattazione delle braid twist si può consultare anche [20].

### 1.3 Link in 3-varietà

Sia  $M$  una 3-varietà compatta connessa orientabile (con o senza bordo).

Un nodo  $K$  in  $M$  è una curva semplice chiusa (quindi omeomorfa ad  $S^1$ ) immersa in  $\text{Int } M$ . In altre parole esiste un'immersione regolare  $h : S^1 \rightarrow \text{Int } M$  tale che  $K = h(S^1)$ . Un link  $L$  con  $n$  componenti (o  $n$ -link) in  $M$  è una collezione di  $n$  curve semplici chiuse immerse in  $\text{Int } M$ . In altri termini esiste un'immersione regolare  $h : \bigsqcup_n S^1 \rightarrow \text{Int } M$  tale che  $h(\bigsqcup_n S^1) = L$ . Un nodo è quindi un 1-link.

Un  $n$ -link è banale se e solo se è isotopo al bordo di un'unione disgiunta di  $n$  2-dischi regolarmente immersi in  $M$ .

Siano ora  $M = S^3$  ed  $L$  un  $n$ -link in  $S^3$ .

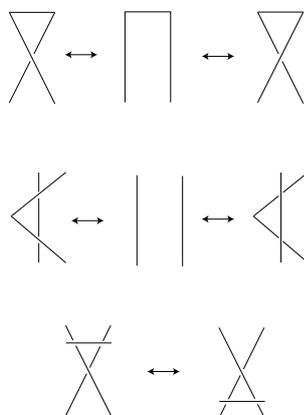


Figura 1.2: Movimenti di Reidemeister

Un diagramma regolare  $D$  di  $L$  è una proiezione  $p$  di  $S^3 - \{z\} \cong \mathbb{R}^3$  (con  $z \notin L$ ) nel piano tale che:

- i vettori tangenti ad  $L$  devono proiettarsi in vettori del piano;
- non più di due punti di  $L$  si proiettano nel medesimo punto del piano;
- tali punti doppi sono finiti e le proiezioni delle loro tangenti non devono coincidere se sono in origine diverse.

Con delle  $\epsilon$ -isotopie si prova facilmente che ogni link ammette un diagramma regolare.

Un'isotopia planare fra due diagrammi regolari  $D_1$  e  $D_2$  è una successione finita di movimenti rigidi del piano e di isotopie del piano che avvengono al di fuori di opportuni intornoi dei punti doppi che trasformano  $D_1$  in  $D_2$ . Altre rappresentazioni nel piano di isotopie di link sono i movimenti di Reidemeister di figura 1.2. Il teorema di Reidemeister afferma che due diagrammi di link corrispondono a link isotopi se e solo se si ottengono l'uno dall'altro mediante una successione finita di isotopie planari e movimenti di Reidemeister. Questo teorema ci permette di identificare i link a meno di isotopie con i diagrammi di link a meno di movimenti di Reidemeister ed isotopie planari.

Per una trattazione completa si veda [4].

## 1.4 Varietà PL come corpi di manici

Il testo a cui si è fatto riferimento per questa sezione è [12], quindi rimandiamo ad esso per maggiori dettagli.

Un  $k$ -manico  $H^k$  di dimensione  $m$  è una  $m$ -varietà omeomorfa a  $B^k \times B^{m-k}$ . Inoltre per  $H^k$  abbiamo che:  $B^k \times \{0\}$  è il nucleo,  $\{0\} \times H^{m-k}$  il conucleo,  $\partial B^k \times \{0\} = S^{k-1} \times \{0\}$  la sfera d'attaccamento,  $\{0\} \times \partial B^{m-k} = \{0\} \times S^{m-k-1}$  la cosfera e  $k$  è l'indice.

Sia  $W$  una  $m$ -varietà con bordo ed  $H^k$  un  $k$ -manico  $m$ -dimensionale, allora la  $m$ -varietà con bordo  $T$  che si ottiene incollando a  $W$  il manico  $H^k$  è

$$T = W \sqcup_g H^k$$

dove  $g$  è un'immersione

$$g : S^{k-1} \times B^{m-k} \longrightarrow \partial W.$$

Osserviamo che la varietà  $T$  non dipende dalla classe d'isotopia dell'immersione  $g$ . Infatti se  $h : S^{k-1} \times M^{m-k} \longrightarrow \partial W$  è isotopa a  $g$ , allora esiste un'omeomorfismo

$$H : (\partial W, g(S^{k-1} \times M^{m-k})) \longrightarrow (\partial W, h(S^{k-1} \times M^{m-k}))$$

che si estende a tutto  $W$  di modo che è uguale all'identità al di fuori dell'intorno collare di  $\partial W$ . Infatti estendiamo l'omeomorfismo isotopo all'identità  $h \circ g^{-1} : g(S^{k-1} \times M^{m-k}) \longrightarrow h(S^{k-1} \times M^{m-k})$  ad un omeomorfismo isotopo all'identità  $k : \partial W \longrightarrow \partial W$ , allora esiste un'isotopia  $k_t : \partial W \times I \longrightarrow \partial W$  tale che  $k_1 = k$  ed  $k_2 = \text{id}$  con cui si costruisce l'omeomorfismo  $K : \partial W \times I \longrightarrow \partial W \times I$  ponendo  $K(x, t) = (k_t(x), t)$  per ogni  $x \in \partial W$  ed ogni  $t \in I$ . Se consideriamo  $\partial W \times I$  come l'intorno collare di  $\partial W$  tale che esso corrisponde a  $\partial W \times \{1\}$ , siccome  $K|_{\partial W \times \{0\}} = \text{id}$ , possiamo estendere  $K$  a tutto  $W$  tramite l'identità. Definiamo ora  $K \sqcup_g \text{id} : W \sqcup_g H^k \longrightarrow W \sqcup_h H^k$ . Siccome  $K|_{g(S^{k-1} \times M^{m-k})} \circ g = h$ ,  $K \sqcup_g \text{id}$  è ben definito e quindi è l'omeomorfismo cercato.

La precedente immersione  $g$  è la mappa d'incollamento ed essa è determinata univocamente (a meno d'isotopie) da un'immersione  $g_0 : S^{k-1} \times \{0\} \longrightarrow \partial W$  e da tutte le possibili rotazioni del secondo fattore  $B^{m-k}$ , allora  $g$  viene descritta totalmente dalla coppia  $(g_0, f)$  dove  $g_0$  è l'immersione precedente ed  $f \in \pi_{k-1}(SO(m-k))$  è chiamato framing. Quindi l'incollamento di un  $k$ -manico  $H^k$  a  $W$  è totalmente determinato dalla sottovarietà di  $\partial W$  che è l'immagine dell'immersione di  $S^{k-1}$  tramite  $g_0$  e dal framing  $f$ . Infatti una volta assegnate le immersioni  $g_0 : S^{k-1} \times \{0\} \longrightarrow \partial W$  e  $g : S^{k-1} \times B^{m-k} \longrightarrow \partial W$  e la mappa  $f : S^{k-1} \longrightarrow SO(m-k)$  che rappresenta un elemento  $[f] \in \pi_{k-1}(SO(m-k))$ , allora l'immersione  $\bar{g} : S^{k-1} \times B^{m-k} \longrightarrow \partial W$  definita da  $g \circ \varphi$ , dove  $\varphi : S^{k-1} \times B^{m-k} \longrightarrow S^{k-1} \times B^{m-k}$  è la mappa  $\varphi(x, y) = (x, f(x)y)$ , è una differente immersione di  $S^{k-1} \times B^{m-k}$  in  $\partial W$  tale che

$$\bar{g}(S^{k-1} \times \{0\}) = g(S^{k-1} \times \{0\}) = g_0(S^{k-1} \times \{0\}).$$

Assumiamo  $k = 1, 2$ , allora  $\pi_0(SO(m-1)) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $\pi_1(SO(m-2)) \cong \mathbb{Z}_2$  ( $m \neq 4$ ) oppure  $\pi_1(SO(m-2)) \cong \mathbb{Z}$  se  $m = 4$ , mentre  $\pi_{m-2}(SO(1))$  e  $\pi_{m-1}(SO(0))$  sono banali. Così, una volta fissata la mappa  $g_0$ , esistono solo due modi per incollare un 1-manico, un unico modo per incollare i manici di indice  $m-1$  ed  $m$ , due modi per incollare un 2-manico in dimensione diversa da quattro. Se  $m = 4$ , ad ogni elemento di  $\mathbb{Z}$  corrisponde un differente modo d'incollare un 2-manico. Osserviamo che gli 1-manici con framing zero sono orientabili e quelli con framing 1 sono non orientabili, quindi, per essi, si preferisce parlare rispettivamente di 1-manici orientabili ed 1-manici non orientabili. Sia  $W$  una  $m$ -varietà orientabile, allora, se vogliamo che  $T = W \sqcup_g H^1$  sia orientabile,  $H^1$  deve essere un 1-manico orientabile.

Un corpo di manici è una  $n$ -varietà  $X$  tale che esiste una successione finita di sottospazi

$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots \subseteq W_n = X$$

tale che  $W_0$  è una unione disgiunta di bocce (gli 0-manici di  $X$ ) e  $W_i$  si ottiene incollando un numero finito di  $i$ -manici a  $W_{i-1}$ . L'incollamento degli  $i$ -manici è fatto in modo tale che essi s'attaccino a dei manici di indice  $j$  con  $j < i$ . Questo è sempre possibile in quanto con delle isotopie possiamo fare in modo che un  $i$ -manico sia incollato a dei manici di indice non maggiore ed inoltre i manici dello stesso indice possono essere attaccati in ogni ordine o simultaneamente. Infatti supponiamo di incollare un  $k$ -manico  $H$  ad una  $m$ -varietà  $Y$  e successivamente d'incollare un  $l$ -manico  $H'$  con  $l \leq k$ . La cosfera di  $H$  ha dimensione  $m-k-1$  e la sfera d'attaccamento di  $H'$  ha dimensione  $l-1$ , la dimensione di  $\partial W$  è  $m-1 > m+l-k-2 = m-k-1+l-1$ , allora è possibile disgiungere le due sfere con delle isotopie, quindi possiamo costruire un'isotopia di  $Y \cup H$  che porta la sfera d'attaccamento di  $H'$  fuori da  $H$ .

Se il corpo di manici  $m$ -dimensionale è formato da manici di indice non maggiore di  $k$ , allora prende il nome di  $k$ -corpo di manici  $m$ -dimensionale. Il bordo di un 1-corpo di manici orientabile di dimensione  $m$  è chiamato anche  $(m-1)$ -sfera con manici. Ricordiamo che è usuale riferirsi agli 1-corpi di manici tridimensionali con il termine corpo di manici di genere  $g$  dove  $g$  è il numero di 1-manici in una decomposizione con un unico 0-manico.

Ogni  $n$ -varietà PL compatta è un corpo di manici, infatti da una triangolazione  $T$  di  $M$  prendiamo la seconda suddivisione baricentrica  $\beta^2 T$  di  $T$ , allora il  $j$ -esimo  $i$ -manico di  $M$  è  $H_j^i = \text{st}(b\sigma_j^i, \beta^2 T)$  dove  $\sigma_j^i$  è il  $j$ -esimo  $i$ -simplexso di  $\beta^2 T$  e  $b\sigma_j^i$  è il suo baricentro.

Ogni decomposizione a manici  $W$  di un corpo di manici  $m$ -dimensionale  $X$  determina una decomposizione duale  $W'$  di  $X$  interpretando ogni  $k$ -manico di  $W$  come un  $(m-k)$ -manico di  $W'$ .

### 1.4.1 Movimenti di manici

Abbiamo già osservato che modificando con delle isotopie le mappe d'incollamento dei manici non si cambia il tipo di omeomorfismo di un corpo di manici. Queste operazioni sui corpi di manici sono denominate isotopie delle mappe d'incollamento.

Dato un corpo di manici  $W$ , è sempre possibile incollare dei nuovi manici senza modificare il tipo di omeomorfismo di  $W$ . Rappresentiamo  $\partial B^k = S^{k-1}$  tramite  $B_+^{k-1} \sqcup_{\partial} B_-^{k-1}$  ed incolliamo al bordo di  $W$  la boccia  $B^k \times B^{m-k}$  tramite un'immersione di  $B_-^{k-1} \times B^{m-k}$  in  $\partial W$ , allora il tipo di omeomorfismo di  $W$  non è cambiato. Sia  $B_0^k$  una boccia immersa in  $B^k$  tale che  $B^k \cong B_0^k \sqcup_{B_+^{k-1}} (B_+^{k-1} \times B^1)$ , allora i due nuovi manici aggiunti a  $W$ , senza modificare il suo tipo di omeomorfismo, sono il  $(k-1)$ -manico  $B_+^{k-1} \times B^1 \times B^{m-k}$  ed il  $k$ -manico  $B_0^k \times B^{m-k}$ . Questo procedimento è reversibile, in quanto un  $(k-1)$ -manico  $H^{k-1}$  ed un  $k$ -manico  $H^k$  possono essere cancellati se la sfera attaccante di  $H^k$  interseca la cosfera di  $H^{k-1}$  trasversalmente in un singolo punto. Infatti, sotto queste ipotesi, se proviamo a disgiungere  $H^k$  da  $H^{k-1}$  otterremo che la sfera attaccante di  $H^k$  interseca  $H^{k-1}$  in  $B^{k-1} \times \{p\} \subset B^{k-1} \times \partial B^{m-k+1}$ . A questo punto si rovescia il procedimento precedente identificando  $B_+^{k-1} \times B^1 \times B^{m-k}$  e  $H^{k-1} \cong B^{k-1} \times B^{m-k+1}$  e  $H^k \cong B^k \times B^{m-k}$  con  $B_0^k \times B^{m-k}$ .

Questa operazione sarà denominata creazione/cancellazione di una coppia  $(k-1)$ -,  $k$ -manico cancellabile.

Un'applicazione di questa operazione mostra che ogni corpo di manici  $m$ -dimensionale connesso  $X$  possiede una decomposizione a manici con un unico 0-manico. Supponiamo di avere una decomposizione a manici di  $X$  con 2 0-manici  $H_1^0$  e  $H_2^0$ , siccome  $X$  è connesso deve esistere almeno un 1-manico  $H^1$  che s'attacca sia ad  $H_1^0$  che ad  $H_2^0$ . Infatti gli 0-manici sono necessariamente disgiunti e gli unici manici con sfere d'attaccamento disgiunte sono gli 1-manici. Ora possiamo cancellare l'unione  $H_2^0 \cup H^1$  perché la sfera d'attaccamento di  $H^1$  deve necessariamente intersecarsi trasversalmente in un unico punto con la cosfera di  $H_2^0$  (che è  $\partial H_2^0$ ). Assumiamo per induzione l'asserto vero al passo  $r-1$  e supponiamo di avere una decomposizione a manici di  $X$  con  $r$  0-manici. Sia  $H_1^0$  uno 0-manico, siccome  $X$  è connesso deve esistere un altro 0-manico  $H_2^0$  ed un 1-manico  $H^1$  tali che  $H^1$  s'attacca sia ad  $H_1^0$  che ad  $H_2^0$ . Se cancelliamo  $H_2^0 \cup H^1$  ci riconduciamo ad una decomposizione a manici di  $X$  con  $r-1$  0-manici.

Se  $\partial X = \emptyset$ , un'argomentazione analoga sulla decomposizione duale, mostra che esiste una decomposizione a manici di  $X$  con un solo  $m$ -manico (oltre ad un solo 0-manico).

L'ultima operazione sui manici è il cosiddetto scorrimento di un  $k$ -manico

su un altro  $k$ -manico. Siano assegnati due  $k$ -manici  $m$ -dimensionali  $H_1$  e  $H_2$  incollati al bordo di una  $m$ -varietà  $X$ .

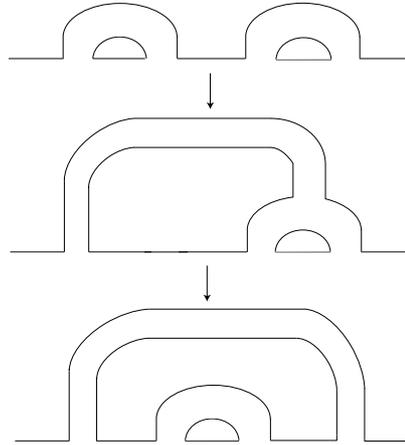


Figura 1.3: Scorrimento di due 1-manici bidimensionali

Uno scorrimento del manico  $H_1$  sopra  $H_2$  è descritto dalla seguente procedura. Con delle isotopie, la sfera attaccante  $A$  di  $H_1$  in  $\partial(X \cup H_2)$  viene spinta attraverso la cosfera  $B$  di  $H_2$  come mostrato in figura 1.3, di modo che in uno stadio intermedio le sfere saranno intersecate in un punto  $p$  e possiamo scegliere una direzione, fra le due possibili, per portare fuori  $A$  da  $B$ : uno ritorna alla configurazione originaria, l'altra determina lo scorrimento di  $H_1$  su  $H_2$ .

Questa operazione può modificare il framing dei manici. Infatti se facciamo scorrere un 1-manico orientabile lungo un 1-manico non orientabile otteniamo un 1-manico non orientabile, se facciamo scorrere un 1-manico non orientabile lungo un 1-manico non orientabile otteniamo un 1-manico orientabile, mentre lo scorrimento lungo 1-manici orientabili non modifica l'orientabilità o meno dell'1-manico che lo scavalca.

## 1.5 Spezzamenti di Heegaard

Ricordiamo brevemente come si costruisce uno spezzamento di Heegaard di una 3-varietà chiusa (compatta e senza bordo), connessa ed orientabile  $M$  a partire da una triangolazione e da una decomposizione a manici. Per maggiori dettagli sull'argomento si rimanda a [41] ed a [12].

Siccome  $M$  è senza bordo ed orientabile, allora possiede una decomposizione a manici

$$H^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_g^1 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_n^2 \cup H^3$$

con un unico 0-manico, un unico 3-manico ed ogni 1-manico è orientabile. Inoltre  $g = n$ , infatti se  $M_1$  è uguale al corpo di manici di genere  $g$

$$H^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_g^1,$$

allora  $M - \text{int } M_1$ , passando alla decomposizione duale, sarà uguale al corpo di manici di genere  $n$

$$H^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_n^1,$$

ed  $M$  si ottiene incollando le superfici chiuse, connesse ed orientabili  $\partial M_1$ ,  $\partial(M - \text{int } M_1)$  tramite un omeomorfismo. Di conseguenza esse devono avere lo stesso genere, per cui  $g = n$ .

Inoltre identificando  $M_1$  con il corpo di manici  $H_g$  ed  $M - \text{int } M_1$  con il corpo di manici  $H'_g$ , entrambi di genere  $g$ , otteniamo  $M = H_g \sqcup_f H'_g$ , dove  $f$  è, a meno delle precedenti identificazioni, l'omeomorfismo che incollava  $\partial M_1$  con  $\partial(M - \text{int } M_1)$ .

La rappresentazione  $H_g \sqcup_f H'_g$  di  $M$  è chiamata spezzamento di Heegaard di genere  $g$  di  $M$  ed  $f$  è l'omeomorfismo di spezzamento.  $M$  si dice avere genere di Heegaard  $g$  se esiste un suo spezzamento di genere  $g$  ma nessuno di genere minore. L'unica 3-varietà di genere 0 è  $S^3$ , mentre solamente  $S^1 \times S^2$  e gli spazi lenticolari hanno genere di Heegaard uguale ad 1.

Se  $T$  è una triangolazione di  $M$ , allora essa sarà formata da un certo numero di punti, (0-simplessi), di lati (1-simplessi), di triangoli (2-simplessi) e di tetraedri (3-simplessi). Rimpiazziamo ogni vertice di  $T$  con una boccia (0-manico), ogni lato con un cilindro (1-manico), ogni triangolo con un "piatto" (2-manici) ed ogni tetraedro con una boccia (3-manici). L'unione delle bocce derivanti dai vertici con i cilindri è un corpo di manici  $H$  e tale è anche l'unione  $H'$  dei "piatti" con le restanti bocce. Proviamo che il genere di  $H$  e quello di  $H'$  sono uguali. Ogni 3-varietà chiusa connessa orientabile ha caratteristica di Poincaré zero, allora il numero di vertici più quello dei triangoli è uguale a quello di lati più quello dei tetraedri. Quindi su  $H$  ed  $H'$  questo si traduce affermando che il numero totale dei manici di  $H$  e quello di  $H'$  è uguale, ma sulla struttura a manici di  $H$  ed  $H'$  possiamo operare delle modifiche (che preservano il tipo di omeomorfismo di  $H$  e  $H'$ ) in modo tale che essi abbiano entrambi un solo 0-manico ed un solo 3-manico, di conseguenza il numero di 1-manici diventa uguale a quello dei 2-manici, quindi  $H$  ed  $H'$  hanno lo stesso genere.

Sia  $H_g \sqcup_f H'_g$  uno spezzamento di Heegaard di  $M$ , è semplice costruire uno spezzamento di Heegaard di genere  $g + 1$  di  $M$ . Possiamo incollare un 1-manico  $B$  ad  $H_g$  per ottenere il corpo di manici  $H_{g+1}$  di modo che esiste un 2-disco  $D$  in  $M$  tale che  $D \cap H_{g+1} = \partial D$  e  $\partial D$  compie un solo giro in  $B$ . Successivamente inspessiamo  $D$  formando  $C = D \times I$  ed osserviamo che

$B \cup C$  è omeomorfo a  $B^3$ , quindi

$$M \cong H_g \cup (B \cup C) \cup H'_g = (H_g \cup B) \cup (H'_g \cup C).$$

Abbiamo già osservato che  $H_g \cup B = H_{g+1}$ , mentre il disco inspessito  $C$  interseca  $H'_g$  in due 2-dischi disgiunti, quindi esso è un 1-manico incollato a  $H'_g$ , cioè  $H'_g \cup C = H'_{g+1}$  ed  $M \cong H_{g+1} \cup H'_{g+1}$ . Lo spezzamento di Heegaard  $H_{g+1} \cup H'_{g+1}$  di  $M$  ha genere  $g+1$  e si chiama stabilizzazione dello spezzamento di Heegaard  $H_g \sqcup_f H'_g$ .

Due spezzamenti di Heegaard  $H_g \sqcup_f H'_g$  e  $H_g \sqcup_h H'_g$  di  $M$  sono equivalenti se e solo se esiste un omeomorfismo di  $M$  del tipo

$$t \sqcup_f t' : H_g \sqcup_f H'_g \longrightarrow H_g \sqcup_h H'_g,$$

dove  $t$  è un omeomorfismo da  $H_g$  in se stesso e  $t'$  un omeomorfismo da  $H'_g$  in se stesso. Se esiste l'omeomorfismo  $t \sqcup_f t'$ , allora  $h \circ t|_{T_g} = t'|_{T'_g} \circ f$ , dove  $T_g$  e  $T'_g$  sono le superfici chiuse, connesse ed orientabili che formano il bordo rispettivamente di  $H_g$  e  $H'_g$ .

Due spezzamenti di Heegaard di  $M$  sono stabilmente equivalenti se e solo se sono equivalenti dopo averli opportunamente stabilizzati ad uno stesso grado.

Si può provare che presi due spezzamenti di Heegaard della stessa varietà allora essi sono stabilmente equivalenti ([41]), mentre tutti gli spezzamenti di Heegaard di  $S^3$  si ottengono stabilizzando lo spezzamento di genere nullo  $B^3 \sqcup_{\partial} B^3$  ([45]).

## 1.6 Chirurgia

Siano  $M$  una 3-varietà chiusa connessa orientata e  $K$  un nodo in  $M$  con intorno regolare  $\nu(K) \cong S^1 \times B^2$ . Una chirurgia di Dehn di  $M$  lungo  $K$  consiste nel rimuovere l'interno di  $\nu(K)$  e nel rimpiazzarlo con  $S^1 \times B^2$  attraverso un omeomorfismo arbitrario

$$\varphi : S^1 \times S^1 = \partial(S^1 \times B^2) \longrightarrow \partial\nu(K) \cong S^1 \times S^1.$$

Gli omeomorfismi di  $S^1 \times S^1$  in se stesso sono descritti, a meno d'isotopie, da  $GL(2; \mathbb{Z})$ . Comunque, siccome  $S^1 \times B^2$  si ottiene attaccando un 2-manico ed un 3-manico a  $S^1 \times S^1$ , per determinare l'incollamento di  $S^1 \times B^2$  è sufficiente conoscere la curva  $\varphi(\{\text{pt.}\} \times \partial B^2)$  di  $\partial\nu(K)$ . Questa è completamente individuata dalla sua classe d'omologia  $\alpha$  in  $H_1(\partial\nu(K); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Per specificare tale classe, orientiamo  $K$  ed introduciamo il meridiano destrorso  $m$  di  $\partial\nu(K)$  (che è omologicamente banale in  $\nu(K)$ ) ed il parallelo  $l$  che sarà una copia parallela di  $K$  in  $\partial\nu(K)$ .

Se  $M = S^3$  allora possiamo prendere  $l$  come la copia di  $K$  che determina il framing 0. In ogni caso, la coppia  $(m, l)$  è una base orientata di  $H_1(\partial\nu(K); \mathbb{Z})$  ed  $\alpha = pm + ql$  per degli unici  $p, q \in \mathbb{Z}$  tali che  $\text{M.C.D.}(p, q) = 1$ . Invertendo l'orientazione di  $K$  o di  $\alpha$  si cambia i segni sia di  $p$  che di  $q$ , mentre l'omeomorfismo di incollamento  $\varphi$  resta invariato. Allora conviene considerare il quoziente  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  che prende il nome di framing della chirurgia di Dehn. Se  $\frac{p}{q} = \infty$  allora  $q$  è nullo e  $p = \pm 1$ , così  $\alpha = m$  da cui si deduce che la chirurgia di Dehn con framing  $\infty$  è banale. Se  $\frac{p}{q}$  è intero si parla di chirurgia intera, altrimenti di chirurgia razionale.

Siano  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  un link in  $S^3$  ed  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$  tale che  $f_i \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . La chirurgia di Dehn di  $S^3$  lungo  $L$  con framing  $\vec{f}$  consiste nell'eseguire le varie chirurgie di Dehn di  $S^3$  lungo  $K_i$  con framing  $f_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Siccome i nodi che formano  $L$  sono due a due disgiunti, possiamo assumere che i loro intorni regolari siano due a due disgiunti, quindi le  $n$  chirurgie possono essere eseguite contemporaneamente oppure in tempi diversi. Analogamente si definisce una chirurgia lungo un link  $K$  in una qualsiasi 3-varietà chiusa, connessa ed orientabile  $M$ , specificando, in questo caso, l'omeomorfismo d'incollamento in modo esplicito senza ricorrere al framing in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

Esiste un differente tipo di chirurgia che deriva dalle decomposizioni a manici.

Supponiamo di incollare un manico  $H^k$   $n$ -dimensionale alla  $n$ -varietà compatta  $W$  tramite l'immersione  $\varphi_0 : S^{k-1} \rightarrow \partial W$  con framing  $f \in \pi_{k-1}(SO(n-k))$  con  $k \geq 1$  ed  $n \geq 2$ . La coppia  $(\varphi_0, f)$  determina, a meno d'isotopie, un'unica immersione  $\varphi : S^{k-1} \times B^{n-k} \rightarrow \partial W$ , così l'attaccamento di  $H^k$  a  $W$ , sul bordo di  $W$ , elimina l'interno di  $\varphi(S^{k-1} \times B^{n-k})$ , che è omeomorfo a  $S^{k-1} \times \text{int } B^{n-k}$ , e lo rimpiazza con  $B^k \times S^{n-k-1}$ . Infatti  $H^k$  è omeomorfo a  $B^k \times B^{n-k}$  ed il suo bordo è omeomorfo a  $(S^{k-1} \times B^{n-k}) \cup (B^k \times S^{n-k-1})$ . Questo motiva la seguente definizione.

Siano  $0 \leq k \leq n$ ,  $\varphi : S^k \rightarrow M$  un'immersione con framing  $f \in \pi_k(SO(n-k))$  ed  $M$  una  $n$ -varietà chiusa connessa orientabile. Denotiamo con  $\hat{\varphi} : S^k \times B^{n-k} \rightarrow M$  l'immersione univocamente determinata dalla coppia  $(\varphi, f)$ . La chirurgia di  $M$  lungo  $(\varphi, f)$  consiste nell'eliminare  $\hat{\varphi}(S^k \times \text{int } B^{n-k})$  da  $M$  e rimpiazzarlo con  $B^{k+1} \times S^{n-k+1}$  incollato tramite  $\hat{\varphi}|_{S^k \times S^{n-k-1}}$ . La  $n$ -varietà così ottenuta è quindi univocamente determinata a meno di omeomorfismi. Inoltre, la restrizione al bordo dell'incollamento di un  $k$ -manico  $H^k$  a  $W$  tramite la coppia  $(\varphi, f)$  consiste nell'eseguire una chirurgia di  $\partial W$  lungo  $(\varphi, f)$

La chirurgia di  $S^3$  su  $(\varphi, f)$ , con  $\varphi : S^1 \rightarrow S^3$  ed  $f$  appartenente a  $\pi_1(SO(2)) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , è quindi la sostituzione di  $\hat{\varphi}(S^1 \times \text{int } B^2)$  (omeomorfo ad  $S^1 \times \text{int } B^2$ ) con  $B^2 \times S^1$  tramite  $\hat{\varphi}|_{S^1 \times S^1}$ . Ora il meridiano

di  $S^1 \times S^1 = \partial B^2 \times S^1$  è  $S^1 \times \{\text{pt}\}$ , quindi la classe di  $H_1(\partial\nu(\varphi(S^1)); \mathbb{Z})$  che rappresenta  $\hat{\varphi}(S^1 \times \{\text{pt}\})$  è la copia parallela al nodo  $K = \varphi(S^1)$  di  $S^3$  determinata dal framing intero  $f$  ( $\alpha$  è una particolare classe con  $q = \pm 1$ ). Abbiamo così che la chirurgia di  $S^3$  determinata da  $(\varphi, f)$  con  $\varphi : S^1 \rightarrow S^3$  e  $f \in \pi_1(SO(2)) \cong \mathbb{Z}$  corrisponde alla chirurgia di Dehn intera di  $S^3$  lungo  $K = \varphi(S^1)$  con framing  $f$ . In altri termini, l'incollamento a  $B^4$  di un 2-manico  $H^2$  lungo il nodo  $K$  con framing  $f$  esegue, sul bordo, la chirurgia di Dehn intera di  $S^3$  lungo  $K$  con framing  $f$ .

Generalizzando il precedente argomento, possiamo pensare ad una 3-varietà chiusa connessa orientabile ottenuta tramite chirurgia di Dehn intera di  $S^3$  lungo il link  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  con framing  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$  (cioè  $f_i \in \mathbb{Z}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ) come al bordo del un corpo di manici quadridimensionale  $H^0 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_n^2$  dove  $H_i^2$  è incollato lungo  $K_i$  con framing  $f_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Con questi argomenti si dimostrano i seguenti fatti ben noti:

- ogni 3-varietà chiusa connessa orientabile si ottiene come chirurgia intera di  $S^3$ ;
- ogni 3-varietà chiusa connessa orientabile è il bordo di un corpo di manici quadridimensionale ottenuto incollando dei 2-manici a  $B^4$ .

D'ora in poi, una chirurgia di Dehn sarà semplicemente chiamata chirurgia, in quanto tutte le chirurgie che prenderemo in esame saranno di questo tipo.

Per maggiori dettagli ed esempi sull'argomento si rimanda a [37] o [41].

## 1.7 Rivestimenti ramificati

Un rivestimento ramificato  $p : M \rightarrow N$  fra varietà compatte della stessa dimensione  $n \geq 2$  è una mappa tale che:

- $p$  è continua o PL o differenziabile a seconda della categoria in cui ci troviamo,
- $p$  è propria e suriettiva,
- esiste un sottocomplesso  $B \subset M$  di codimensione due per cui la restrizione di  $p$  al complementare di questo sottocomplesso,  $p|_{M-B} : M - B \rightarrow N - p(B)$ , è un rivestimento ordinario.

In altri termini, sia  $F$  l'insieme di ramificazione di  $p$ , cioè  $F = p(B)$ , allora  $F$  e  $B$  sono due sottocomplessi di codimensione 2 rispettivamente di  $N$  e di  $M$ . L'insieme singolare  $S$  di  $p$  è formato da tutti i punti di  $M$  per cui non

esiste un intorno  $I$  in  $M$  tale che  $p|_I : I \rightarrow p(I)$  è un omeomorfismo. È ovvio quindi che  $S \subseteq B$  e lo spazio  $\text{Cl}(p^{-1}(p(B)) - S)$ , se non è vuoto, viene comunemente chiamato insieme pseudo-singolare di  $p$ .

Nei punti  $x$  dove  $B$  è localmente piatto esiste un intorno omeomorfo a  $B^{n-2} \times B^2$  per cui  $p$  ammette il modello locale

$$B^{n-2} \times B^2 \longrightarrow B^{n-2} \times B^2$$

$$(w, z) \longmapsto (w, z^{d_x}),$$

con  $d_x \geq 1$  e  $B^2 \subset \mathbb{C}$ . Il grado di  $p$  è la cardinalità dell'insieme  $p^{-1}(y)$  per  $y \in N - F$ , che non dipende dal punto scelto. Se il grado è due, il rivestimento si dice doppio.

Sfruttando questa caratterizzazione si ottiene una nuova ed equivalente definizione dei rivestimenti ramificati. Una mappa  $p : M \rightarrow N$  fra superfici chiuse è un rivestimento ramificato se per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  in  $M$  tale che la restrizione  $p|_U : U \rightarrow p(U)$  è omeomorfo alla mappa complessa  $z \mapsto z^{d_x}$ . Per generalizzare i modelli locali di ogni dimensione si opera in questo modo: assunto un rivestimento ramificato  $\pi : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  diamo un modello locale  $C(p) : B^m \rightarrow B^m$  dove  $B^m$  è identificato con il cono  $C(S^{m-1})$ . In questo modo una mappa PL  $p : M \rightarrow N$  fra  $m$ -varietà PL è un rivestimento ramificato se è non degenere e per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  in  $M$  tale che la restrizione  $p|_U : U \rightarrow p(U)$  è omeomorfa al cono di un rivestimento ramificato di  $S^{m-1}$  in se stesso.

Supponiamo che  $p : M \rightarrow N$  sia un rivestimento ramificato e che  $N$  sia orientabile. Allora un'orientazione di  $N$  determina un'orientazione di  $M$ , infatti è sufficiente considerare una triangolazione di  $M$  ed una di  $N$  di modo che  $p$  è simpliciale ed orientare gli  $m$ -simplessi di  $M$  così che  $p$  conservi l'orientazione in ogni semplice.

Siano  $M$  ed  $N$  due varietà PL della stessa dimensione  $m$  e sia  $p : M \rightarrow N$  un rivestimento di grado  $d$  ramificato su  $B_p$  con monodromia  $\omega_p : \pi_1(N - B_p, *) \rightarrow \Sigma_d$ . Siccome  $p$  è completamente determinato del rivestimento ordinario associato ([11])

$$p| : M - p^{-1}(B_p) \longrightarrow N - B_p,$$

esso può essere descritto conoscendo solo  $N$ ,  $B_p$  e  $\omega_p$  come segue.

Si inizia scegliendo un complesso di spezzamento  $K_p$  di  $B_p$ , che è un  $(m-1)$ -complesso di  $N$  tale che  $B_p \subset K_p$ ,  $*$   $\notin K_p$ ,  $N - K_p$  è connesso per archi e  $\omega_p$ , ristretta a  $N - K_p$ , è banale. Si taglia  $N$  lungo  $K_p$  di modo che ogni  $(m-1)$ -simpleso  $\sigma$  di  $K_p$  forma due  $(m-1)$ -simplessi  $\sigma^+$  e  $\sigma^-$ : quello che si ottiene è un complesso simpliciale chiamato foglio canonico di  $p$ . Si prendono  $d$  copie del foglio canonico di  $p$ , denominate i fogli di  $p$ ,

e denotiamo con  $\sigma_1^\pm, \dots, \sigma_d^\pm$  le corrispondenti copie di  $\sigma^\pm$ . Identifichiamo in coppie i vari  $\sigma_i^\pm$  seguendo la monodromia di un cappio  $\alpha$  che interseca  $K_p$  trasversalmente in un punto di  $\sigma$ , in altre parole identifichiamo  $\sigma_i^-$  con  $\sigma_{\omega_p(\alpha)(i)}^+$ . A meno di omeomorfismi PL, la varietà che otteniamo è proprio  $M$  mentre  $p$  è la mappa indotta dalla proiezione naturale dei fogli su  $N$ .

Assumiamo le varietà PL  $M, M'$  ed  $N, N'$ , i rivestimenti  $p : M \rightarrow N, p' : M' \rightarrow N'$  rispettivamente ramificati su  $B_p$  e  $B_{p'}$ . Diremo che  $p$  e  $p'$  sono equivalenti se e solo se esistono due omeomorfismi  $h : N \rightarrow N'$  e  $k : M \rightarrow M'$  tali che  $p' \circ k = h \circ p$ . In tal caso si dice che  $k$  è un sollevamento di  $h$ . Chiaramente, se  $p$  e  $p'$  sono equivalenti allora devono avere lo stesso grado  $d$ . Facciamo notare che nella definizione standard di rivestimenti ramificati equivalenti si richiede anche che l'omeomorfismo  $h$  sia isotopo all'identità, noi, in questo caso, diremo che i due rivestimenti ramificati sono fortemente equivalenti.

Sempre da [11] segue il seguente criterio di sollevabilità. Denotiamo con  $\omega_p : \pi_1(N - B_p, *) \rightarrow \Sigma_d$  e con  $\omega_{p'} : \pi_1(N' - B_{p'}, h(*)) \rightarrow \Sigma_d$  le rispettive monodromie. Un omeomorfismo  $h : N \rightarrow N'$  è sollevabile ad un omeomorfismo  $k : M \rightarrow M'$  tale che  $h \circ p = p' \circ k$  se e solo se  $h(B_p) = B_{p'}$  e  $\omega_p = \omega_{p'} \circ h_*$ , dove  $h_* : \pi_1(N - B_p, *) \rightarrow \pi_1(N' - B_{p'}, h(*))$  è l'omomorfismo indotto da  $h$  sui gruppi fondamentali.

Maggiori dettagli sui rivestimenti ramificati sono reperibili in [6], [7], [11], [26].

## 1.8 Involuzioni e rivestimenti doppi

Sia  $X$  una varietà PL. Un'involuzione  $h$  sulla varietà  $X$  è un omeomorfismo tale che  $h^2 = h \circ h$  è l'identità. L'insieme dei punti

$$F_h = \{x \in X : h(x) = x\}$$

si chiama insieme dei punti fissi di  $h$ .

Assumiamo che  $X$  ed  $Y$  siano due  $n$ -varietà PL. Due involuzioni  $h : X \rightarrow X$  ed  $l : Y \rightarrow Y$  delle varietà  $X$  ed  $Y$  sono coniugate (od anche equivalenti) se e solo se esiste un omeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $f \circ h \circ f^{-1} = l$ .

**Teorema 1.8.1.** *Sia  $M$  una 3-varietà PL compatta, connessa ed orientata. Allora esistono una 3-varietà PL compatta connessa orientabile  $N$  ed un rivestimento doppio  $p : M \rightarrow N$  ramificato sulla 1-sottovarietà propria  $B$  di  $N$  se e solo se  $M$  ammette un'involuzione  $h$  tale che  $F_h$  è una 1-sottovarietà propria di  $M$ ,  $p(F_h) = B$  (quindi  $h$  conserva l'orientazione) e lo spazio delle orbite  $M/h$  è omeomorfo ad  $N$ . In più, siano  $h$  e  $t$  due*

*involuzioni di  $M$  che inducono i rivestimenti ramificati doppi  $p$  e  $q$ , allora  $h$  e  $t$  sono coniugate se e solo se  $p$  e  $q$  sono equivalenti.*

**Dimostrazione.** Se  $p : M \rightarrow N$  è un rivestimento doppio ramificato su  $B \subset N$ , allora  $p|_1 : M - p^{-1}(B) \rightarrow N - B$  è un rivestimento doppio ordinario, per cui corrisponde ad sottogruppo di  $\pi_1(M - p^{-1}(B))$  di ordine 2 (quindi normale in  $\pi_1(M - p^{-1}(B))$ ). Questo implica che  $p|_1$  è un rivestimento regolare, cioè è indotto da un'azione  $h$  di  $\mathbb{Z}_2$ , quindi, a meno di equivalenze, possiamo estendere  $h$  di modo che  $h(x) = x$  per  $x \in p^{-1}(B)$  ([11]). Il viceversa è ovvio, infatti  $p$  è la mappa quoziente di  $h$ .

Per la seconda parte, se  $f$  è l'omeomorfismo che coniuga  $h$  e  $t$ , da  $t = f \circ h \circ f^{-1}$  otteniamo  $t \circ f = f \circ h$  che ci permette di definire l'omeomorfismo  $\hat{f}$  fra gli spazi quoziente tramite  $\hat{f}([x]_h) = [f(x)]_t$ . La mappa  $\hat{f}$  è ben definita in quanto se  $x' \in p^{-1}([x]_h)$  allora  $f(x') = f(h(x)) = t(f(x))$  e  $q(f(x)) = q(t(f(x))) = q(f(x'))$ , cioè  $f(x') \in q^{-1}([f(x)]_t)$ . Di conseguenza dalla costruzione di  $\hat{f}$  abbiamo che  $q \circ f = \hat{f} \circ p$ , quindi  $p$  e  $q$  sono equivalenti. Viceversa, se esistono gli omeomorfismi  $k : M \rightarrow M$  ed  $k' : N \rightarrow N$  tali che  $q \circ k = k' \circ p$ , allora  $q \circ (k \circ h \circ k^{-1}) = q$  e quindi  $k \circ h \circ k^{-1} = t$  (si noti che  $k \circ h \circ k^{-1}$  non può essere uguale all'identità in quanto  $h$  è diversa dall'identità).  $\square$

## Capitolo 2

# Involuzioni che conservano l'orientazione di $H_g$

In questo capitolo saranno inizialmente descritti dei risultati preliminari sulle involuzioni di  $H_g$  (che, ricordiamo, denota un corpo di manici tridimensionale orientabile di genere  $g$ ), poi in seguito verranno classificate le involuzioni che conservano l'orientazione.

Il termine  $n$ -disco (od  $n$ -boccia) sarà riferito ad ogni copia omeomorfa di  $B^n$ , quindi  $D$  è un  $n$ -disco dentro la varietà  $M$  se e solo se  $D$  è l'immagine di un'immersione  $B^n \hookrightarrow M$ . Una collezione  $\{a_1, \dots, a_r\}$  di archi a due a due disgiunti propriamente immersi in  $H_g$  è chiamata banale se e solo se esistono  $r$  2-dischi a due a due disgiunti  $D_1, \dots, D_r \subset H_g$  tali che  $a_i \cap D_i = a_i \cap \partial D_i = a_i$ ,  $a_i \cap D_j = \emptyset$  e  $\partial D_i - a_i \subset \partial H_g$  per ogni  $i \neq j = 1, \dots, r$ .

### 2.1 Preliminari

Le involuzioni di  $B^3 = H_0$  sono già state classificate: questo segue dal teorema di Livesay ([23]) e dall'ipotesi di Smith provata da Waldhausen ([46]). Ogni involuzione  $h : B^3 \rightarrow B^3$  è coniugata ad una simmetria centrale se  $\dim F_h = 0$ , assiale se  $\dim F_h = 1$  e planare se  $\dim F_h = 2$ , mentre non esistono involuzioni libere in quanto il teorema del punto fisso di Brouwer implica che ogni funzione continua  $B^3 \rightarrow B^3$  deve fissare almeno un punto. E' ben noto anche che ogni involuzione  $t$  di  $B^2$  è equivalente ad una simmetria centrale se  $\dim F_t = 0$  oppure ad una simmetria assiale se  $\dim F_t = 1$  (ed anche in questo caso il teorema di Brouwer nega l'esistenza di involuzioni libere).

Nei lavori di Przytycki ([34]) e Bartoszynska ([1]) troviamo la classificazione delle involuzioni di  $H_1$  e  $H_2$ . Le involuzioni non libere di  $H_1$  sono

totalmente classificate a seconda che il loro insieme dei punti fissi sia uno fra i seguenti sottospazi:  $S^1$ ,  $B^1 \sqcup B^1$ ,  $S^1 \times B^1$ ,  $B^2 \sqcup B^2$ ,  $\{p, q\}$ ,  $Mb$ ,  $\{p\} \sqcup B^2$ ; mentre le involuzioni libere possono essere riunite in due classi d'equivalenza, quelle che conservano l'orientazione e quelle che la invertono.

La conoscenza delle classi d'equivalenza delle involuzioni di  $B^3$  ed  $H_1$  sarà il punto di partenza del nostro lavoro, mentre la classificazione delle involuzioni di  $H_2$  seguirà dai nostri risultati, quindi non la riporteremo in dettaglio ora.

Da una semplice applicazione del teorema del punto fisso di Lefschetz si ottiene che un corpo di manici  $H_g$  ammette delle involuzioni libere se e solo se  $g$  è dispari. Per le involuzioni non libere, quelle che invertono l'orientazione possono fissare dei punti isolati o delle superfici propriamente immerse, mentre quelle che conservano l'orientazione fissano una 1-sottovarietà propria di  $H_g$ . Infatti, se  $h$  è una involuzione non libera di  $H_g$  e se  $x \in F_h$ , si considera un intorno regolare  $\nu(x)$  di  $x$  in  $H_g$ . Allora  $\nu(x) \cong B^3$ , quindi se  $\dim F_h \cap V = 1$  allora  $h$  conserva l'orientazione, altrimenti la inverte. Sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione non libera che conserva l'orientazione, siccome  $h$  fissa una 1-sottovarietà propria di  $H_g$ , allora  $F_h$  contiene archi semplici propriamente immersi oppure nodi immersi nell'interno del corpo di manici.

In letteratura esiste anche un teorema che classifica le involuzioni che invertono l'orientazione. Tale risultato e la nostra classificazione di quelle che conservano l'orientazione descrivono tutte le possibili classi d'equivalenza delle involuzioni di  $H_g$ .

**Teorema 2.1.1 ([18]).** *Esiste un'unica classe d'equivalenza per le involuzioni libere che invertono l'orientazione di  $H_g$ .*

*Sia  $h$  una involuzione non libera che inverte l'orientazione di  $H_g$ :*

1. *se  $F_h$  non è composta esclusivamente da componenti bidimensionali orientabili in numero maggiore di  $\frac{\chi(F_h) - \chi(H_g)}{2}$ , allora la classe di coniugio di  $h$  è univocamente determinata dal tipo di omeomorfismo di  $F_h$  (infatti  $H_g - F_h$  è sempre connesso);*
2. *se  $F_h$  è composta esclusivamente da componenti bidimensionali orientabili in numero maggiore di  $\frac{\chi(F_h) - \chi(H_g)}{2}$ , allora la classe di coniugio di  $h$  è univocamente determinata dal tipo di omeomorfismo di  $F_h$  e dalla connessione o meno di  $H_g - F_h$ .*

Terminiamo questa sezione provando il seguente teorema di scomposizione.

**Teorema 2.1.2.** *Sia  $h$  un'involuzione di  $H_g$ , allora  $h$  si scompone in uno dei seguenti modi.*

1. *Esistono un'involuzione  $t : H_{g-2} \longrightarrow H_{g-2}$  e due 1-manici  $H, H'$  tali che  $H_g = H_{g-2} \cup H \cup H'$ ,  $h$  estende  $t$ ,  $F_h = F_t$  ed  $h$  interscambia  $H$  con  $H'$ .*
2. *Esistono due involuzioni  $t : H_n \longrightarrow H_n$ ,  $j : H_s \longrightarrow H_s$  con  $n + s = g - 1$  e due 1-manici  $H, H'$  tali che  $H_g = H_n \cup H \cup H' \cup H_s$ ,  $h$  estende sia  $t$  che  $j$ ,  $F_h = F_t \cup F_j$ ,  $F_t \cap F_j = \emptyset$  ed  $h$  interscambia  $H$  con  $H'$ .*
3. *Esiste un'involuzione  $t : H_n \sqcup H_n \longrightarrow H_n \sqcup H_n$  con  $2n = g - 1$  che interscambia le due copie disgiunte di  $H_n$  ed esistono due 1-manici  $H, H'$  tali che  $H_g = H_n \cup H \cup H' \cup H_n$ ,  $h$  estende  $t$  ed interscambia  $H$  con  $H'$ . In questo caso  $h$  è necessariamente libera.*
4. *Esistono due involuzioni  $t : H_s \longrightarrow H_s$ ,  $j : X_1 \sqcup X_2 \longrightarrow X_1 \sqcup X_2$  dove  $X_1, X_2$  sono due copie disgiunte di  $H_n$  interscambiate da  $j$  con  $g = 2n + s$ ,  $n \geq 1$  e due 1-manici  $H, H'$  tali che  $H_g = X_1 \cup H \cup H_n \cup H' \cup X_2$ ,  $h$  estende sia  $t$  che  $j$ ,  $F_h = F_t$  ed  $h$  interscambia  $H$  con  $H'$ .*
5. *Esistono un'involuzione  $t : H_{g-1} \longrightarrow H_{g-1}$  ed un 1-manico  $H$  tali che  $H_g = H_{g-1} \cup H$ ,  $h$  estende  $t$ ,  $h(H) = H$  e  $F_h$  si ottiene da  $F_t$  unendovi il sottoinsieme non vuoto di  $H$  fissato da  $h$ .*
6. *Esistono due involuzioni  $t : H_n \longrightarrow H_n$ ,  $j : H_s \longrightarrow H_s$  con  $n + s = g$ ,  $n, s \geq 1$  ed un 1-manico  $H$  tali che  $H_g = H_n \cup H \cup H_s$ ,  $h$  estende sia  $t$  che  $j$ ,  $h(H) = H$  ed  $F_h$  si ottiene incollando  $F_t$  con  $F_j$  tramite il sottoinsieme non vuoto di  $H$  fissato da  $h$ .*

Assumeremo ora che il genere  $g$  del corpo di manici  $H_g$  sia almeno 2. Questa ipotesi non sarà restrittiva, in quanto il nostro interesse è ridurre il genere del corpo di manici per classificare le involuzioni a partire dalle classificazioni delle involuzioni di  $B^3$  e del toro pieno descritte precedentemente.

Per poter iniziare abbiamo bisogno del lemma di Kim e Tollefson seguito dall'analisi di come si modifica  $H_g$  una volta eliminati degli intorni cilindrici omeomorfi a  $B^2 \times I$  di un 2-disco. La dimostrazione del caso che ci interessa si trova in [13], mentre in [19] è provato il caso senza bordo.

**Lemma 2.1.3 (Kim, Tollefson).** *Sia  $g$  un'involuzione PL su di una 3-varietà PL compatta  $M$  con insieme dei punti fissi  $F$  (anche vuoto). Se esiste un 2-disco  $D \subset M$  tale che  $\partial D$  giace in una componente di  $\partial M$ , diciamo  $\partial_1 M$  e non limita alcun 2-disco in  $\partial_1 M$ , allora esiste un 2-disco  $S$  propriamente immerso in  $M$  tale che*

1.  $\partial S \subset \partial_1 M$ ,

2.  $\partial S$  non limita un 2-disco in  $\partial_1 M$ ,
3.  $g(S) \cap S = \emptyset$  oppure  $g(S) = S$  ed  $S$  trasversale a  $F$ .

E' facile accorgersi che  $H_g$  soddisfa le ipotesi del lemma 2.1.3 con  $\partial H_g = T_g$  connesso. Quindi se  $h$  è un'involuzione di  $H_g$ , esiste un 2-disco  $S$  propriamente immerso in  $H_g$  che soddisfa le condizioni del lemma 2.1.3. Chiaramente esiste un intorno regolare  $U$  di  $S$  tale che  $h$  agisce su  $H_g - (U \cup h(U))$  ed inoltre

- $h(U) = U$  se  $h(S) = S$ ;
- $h(U) \cap U = \emptyset$  se  $h(S) \cap S = \emptyset$ .

*Osservazione 1.* Sia  $h(S) = S$  con  $\dim F_h = 1$ . Si sceglie una parametrizzazione opportuna di  $U$  come  $B^2 \times [-1, 1]$  di modo che  $S$  corrisponde a  $B^2 \times \{0\}$ , sia  $D_t$  l'immagine di  $B^2 \times \{t\}$ . Allora  $D_t$  è trasversale ai punti fissi, quindi ogni disco  $D_t$  con  $t \in [-1, 1]$  deve necessariamente contenere un unico punto fisso.

Sia  $h(S) = S$  con  $\dim F_h = 2$ , allora, per l'ipotesi di trasversalità,  $S \cap F_h$  è omeomorfo a  $B^1$ .

Sia ancora  $h(S) = S$ , se esiste un intorno  $U$  di  $S$ , sempre parametrizzato con  $B^2 \times [-1, 1]$  di modo che  $S$  corrisponde all'immagine di  $B^2 \times \{0\}$ , tale che, con la precedente notazione,  $h(D_{-1}) = D_1$ , allora  $h|_U : U \rightarrow U$  è coniugata ad una simmetria centrale con il punto fisso appartenente ad  $S$ . Questo caso non si può mai verificare quando  $S$  è trasversale ad  $F_h$ .

Assumiamo un'involuzione  $h : H_g \rightarrow H_g$ .

Siano  $S \subset H_g$  un 2-disco tale che  $\partial S \subset \partial H_g = T_g$  e  $\partial S$  non è il bordo di un 2-disco su  $T_g$  ed  $U \cong S \times [-1, 1]$  un intorno cilindrico di  $S$  in  $H_g$  dove  $S$  è immerso in  $U$  in modo da coincidere con  $S \times \{0\}$ . Analogamente preso il 2-disco  $h(S)$  esiste un intorno cilindrico  $h(U) \cong h(S) \times [-1, 1]$  tale che  $h(S)$  è immerso in  $h(U)$  in modo da coincidere con  $h(S) \times \{0\}$ : così per  $h(S)$  e  $h(U)$  valgono le stesse condizioni assunte per  $S$  ed  $U$ . Denotiamo con  $\tilde{U}$  il sottospazio di  $U$  omeomorfo a  $S \times (-1, 1)$ , quindi  $h(\tilde{U})$  sarà l'immagine tramite  $h$  di  $\tilde{U}$  dentro  $h(U)$ .

**Lemma 2.1.4.** *Se  $H_g - \tilde{U}$  è connesso, allora è omeomorfo a  $H_{g-1}$ , altrimenti è formato da due componenti disgiunte omeomorfe ad  $H_n$  ed  $H_s$  di modo che  $n + s = g$  ed  $n, s > 0$ .*

**Dimostrazione.** Il lemma 2.1 di [31] afferma che una superficie  $F$  con bordo e propriamente immersa in  $H_g$  sconnette  $H_g$  stesso se e solo se  $\partial F$  sconnette  $\partial H_g$ . Il lemma seguente del medesimo articolo asserisce che, per ogni 2-disco regolare  $D$  propriamente immerso in  $H_g$ , le componenti della

chiusura di  $H_g - \nu(D)$ , dove  $\nu(D)$  è un intorno regolare di  $D$  in  $H_g$ , sono corpi di manici orientabili.

Nel nostro caso quindi, se il 2-disco  $S$  sconnette  $H_g$ , allora  $H_g - \tilde{U}$  è composto dalle componenti  $H_n$  ed  $H_s$  con  $n + s = g$  (ed  $n, s > 0$  siccome  $\partial S$  non delimita alcun disco su  $\partial H_g$ ), in quanto  $\partial S$ , essendo una curva semplice chiusa, divide  $\partial H_g$  in due componenti. Invece, se  $S$  non sconnette  $H_g$ , allora  $H_g - \tilde{U}$  è un corpo di manici di genere  $g - 1$ , poiché  $H_g$  si ottiene incollando l'1-manico  $U$  ad  $H_g - \tilde{U}$ .  $\square$

**Proposizione 2.1.5.** *La 3-varietà  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})$  con  $S \cap h(S) = \emptyset$  (di conseguenza  $U \cap h(U) = \emptyset$ ) può essere omeomorfa ad uno dei seguenti tre casi:*

1.  $H_{g-2}$ ;
2.  $H_n \sqcup H_s$  con  $n + s = g - 1$  e  $H_n$  disgiunto da  $H_s$ ;
3.  $H_n \sqcup H_s \sqcup H_n$  con  $2n + s = g$  e i tre corpi di manici sono disgiunti.

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $H_g - \tilde{U}$  sia connesso, allora, per il lemma 2.1.4,  $H_g - \tilde{U} \cong H_{g-1}$ . Se, preso  $h(U) \subset H_g - \tilde{U}$ , la varietà  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})$  è connessa, sempre il lemma 2.1.4 ci garantisce che  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U}) \cong H_{g-2}$ . Se  $h(U) \subset H_g - \tilde{U}$  sconnette  $H_g - \tilde{U} \cong H_{g-1}$ , allora dal lemma 2.1.4 segue che  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})$  sarà composta da due componenti disgiunte  $H_n$  e  $H_s$  tali che  $n + s = g - 1$ .

Supponiamo ora che  $H_g - \tilde{U}$  sia sconnessa, allora è formata da due componenti disgiunte omeomorfe a  $H_n$  e  $H_s$  con  $n + s = g$ . Possiamo supporre senza perdere generalità che  $h(S) \subset H_s$ , quindi se  $H_s - h(\tilde{U})$  è connesso allora esso sarà omeomorfo a  $H_{s-1}$ , allora  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})$  è composta da due componenti  $H_n$  e  $H_{s-1}$  tali che  $n + s - 1 = g - 1$ .

Resta da considerare il caso in cui  $H_s - h(\tilde{U})$  è sconnesso, allora esso è formato da due componenti omeomorfe a  $H_r$  e  $H_l$  con  $r + l = s$  e, di conseguenza,

$$H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U}) \cong H_n \sqcup H_r \sqcup H_l$$

con  $n + r + l = n + s = g$ . Osserviamo che  $H_g$  si ottiene connettendo  $H_n$ ,  $H_r$ ,  $H_l$  attraverso l'aggiunta degli 1-manici  $U$  e  $h(U)$  rispettivamente fra  $H_n$  e  $H_r$  e fra  $H_r$  e  $H_l$ : per semplicità rappresentiamo questa situazione con la scrittura

$$H_g = H_n \sqcup_U H_r \sqcup_{h(U)} H_l.$$

Applicando  $h$  ad  $H_g$  otteniamo

$$H_g = h(H_g) = h(H_n) \sqcup_{h(U)} h(H_r) \sqcup_U h(H_l)$$

quindi  $h(H_n) = H_l$ ,  $h(H_l) = H_n$  ed  $h(H_r) = H_r$ . Dalla prima uguaglianza si deduce  $n = l$ , quindi

$$H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U}) \cong H_n \sqcup H_r \sqcup H_n$$

con  $2n + r = g$ .  $\square$

Da quanto detto si deduce che esistono solo 5 casi possibili per  $H_g$  una volta tagliato lungo  $S$  e  $h(S)$ , con  $S \cong B^2$  tale che  $S$  è propriamente immerso in  $H_g$  in modo da non essere il bordo di un 2-disco in  $T_g$ . Inoltre, siccome  $h$  agisce su  $H_g - (\tilde{U} \cup h(\tilde{U}))$  si hanno le seguenti possibilità.

1. Sia  $h(S) \cap S = \emptyset$ .
  - (1.a) Se  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U}) \cong H_{g-2}$ , allora  $t = h|_{H_{g-2}}$  è un'involuzione tale che  $F_t = F_h$  ed  $h$  interscambia gli 1-manici  $U$  ed  $h(U)$ .
  - (1.b) Se  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U}) \cong H_n \sqcup H_s$  con  $n + s = g - 1$ , allora  $h|_{H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})}$  interscambia  $U$  con  $h(U)$ , inoltre  $h|_{H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})}$  può interscambiare  $H_n$  con  $H_s$  (quindi  $n = s$ ) oppure può indurre le involuzioni  $t = h|_{H_n}$  e  $j = h|_{H_s}$  tali che  $F_h = F_t \cup F_j$  e  $F_t \cap F_j = \emptyset$ .
  - (1.c) Se  $H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U}) \cong H_n \sqcup H_s \sqcup H_n$  con  $2n + s = g$ , allora  $h|_{H_g - \tilde{U} - h(\tilde{U})}$  interscambia  $U$  con  $h(U)$  ed induce le involuzioni  $j = h|_{H_n \sqcup H_n}$  (che interscambia le due componenti) e  $t = h|_{H_s}$  tale che  $F_h = F_t$ .
2. Sia  $h(S) = S$ .
  - (2.a) Se  $H_g - \tilde{U} \cong H_{g-1}$ , allora  $h(U) = U$  e  $t = h|_{H_{g-1}}$  è un'involuzione tale che  $F_h = F_t \cup (F_h \cap U)$ .
  - (2.b) Se  $H_g - \tilde{U} \cong H_n \sqcup H_s$  con  $n + s = g$  ed  $n, s > 0$ , allora  $h(U) = U$  ed esistono le involuzioni  $t = h|_{H_n}$  e  $j = h|_{H_s}$  tali che  $F_h = F_t \cup (F_h \cap U) \cup F_j$ .

Abbiamo quindi provato il teorema 2.1.2.

## 2.2 Quozienti di involuzioni che conservano l'orientazione

Dopo aver dimostrato la condizione di coniugio per involuzioni che invertono l'orientazione, studiamo gli spazi quoziente e l'insieme dei punti fissi delle involuzioni che conservano l'orientazione.

**Proposizione 2.2.1.** *Sia  $h : H_{2g+1} \longrightarrow H_{2g+1}$  un'involuzione libera che conserva l'orientazione, allora  $H_{2g+1}/h = H_{g+1}$ .*

**Dimostrazione.** Se  $g = 0$  sappiamo che  $H_1/h = H_1$ , quindi ammettiamo la tesi vera fino a  $g - 1$  e proviamola per  $g$ . In altre parole, assunta l'involuzione libera  $h$  di  $H_{2g+1}$  che conserva l'orientazione, se per ipotesi induttiva ammettiamo la tesi vera fino a  $2g - 1$ , allora dobbiamo provare che  $H_{2g+1}/h = H_{g+1}$ .

Possiamo assumere che esiste un 2-disco  $S$  in  $H_{2g+1}$  tale che  $h(S) \cap S = \emptyset$  e  $\partial S$  non è il bordo di un 2-disco su  $\partial H_{2g+1}$ .

*CASO 1.* Se tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  otteniamo un corpo di manici  $H_{2g-1}$  dotato dell'involuzione libera  $t = h|_{H_{2g-1}}$  che conserva l'involuzione, allora  $H_{2g-1}/t = H_g$  per ipotesi induttiva e  $H_{2g+1}/h = H_{g+1}$  in quanto si ottiene incollando ad  $H_g$  un 1-manico  $H^1$  che è il quoziente di  $U \cup h(U)$  tramite la restrizione della mappa quoziente di  $h$ , dove  $U$  è un intorno cilindrico di  $S$ .

*CASO 2.* Se tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  otteniamo due corpi di manici  $H_k$  e  $H_l$  tali che  $k + l = 2g$  ed esistono le involuzioni libere  $j = h|_{H_k}$  e  $t = h|_{H_l}$ , rispettivamente su  $H_k$  e  $H_l$ , che conservano l'orientazione, allora  $k = 2n + 1$  e  $l = 2s + 1$ . Ora  $H_k/j = H_{n+1}$  e  $H_l/t = H_{s+1}$  per ipotesi induttiva, quindi  $H_{2g+1}/h$  si ottiene connettendo con un 1-manico  $H^1$ , analogo a quello del caso precedente, i corpi di manici  $H_{n+1} = H_k/j$  e  $H_{s+1} = H_l/t$ , da cui  $H_{2g+1}/h = H_{n+s+2} = H_{g+1}$  in quanto  $n + s = g - 1$ .

*CASO 3.* Se tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  otteniamo due corpi di manici  $H_k$  e  $H_l$  tali che  $k + l = 2g$  ed esiste l'involuzione  $t = h|_{H_k \sqcup H_l}$  che interscambia  $H_k$  con  $H_l$ , allora  $k = l = g$ . Lo spazio quoziente di  $t$  è  $H_g$  e  $H_{2g+1}/h$  s'ottiene incollando a  $H_g$  il solito 1-manico  $H^1$  originando  $H_{g+1}$ .

*CASO 4.* Se tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  otteniamo due copie  $X_1$  e  $X_2$  di  $H_n$  e un corpo di manici  $H_k$  tali che  $k + 2n = 2g + 1$  ed esistono le involuzioni  $h|_{X_1 \sqcup X_2} = j$ , che interscambia le due copie, e  $t = h|_{H_k}$  è l'involuzione libera che conserva l'orientazione indotta da  $h$ . Allora  $k = 2s + 1$  e  $H_k/t = H_{s+1}$  per ipotesi induttiva, da cui  $H_{2g+1}/h$  è dato dall'incollamento, attraverso un 1-manico  $H^1$ , di  $H_{s+1}$  con  $H_n$ , cioè  $H_{2g+1}/h = H_{n+s+1} = H_{g+1}$ , infatti  $2s + 1 + 2n = 2g + 1$  che implica  $s + n = g$ .  $\square$

**Proposizione 2.2.2.** *Sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione non libera che conserva l'orientazione, allora  $H_g/h$  è omeomorfo ad  $H_n$  per un  $n \geq 0$  opportuno.*

**Dimostrazione.** Ancora una volta possiamo ricorrere al metodo induttivo, infatti sappiamo che  $B^3/h = B^3$  mentre  $H_1/h$  può essere omeomorfo a  $H_1$  o  $B^3$ . Ricorrendo all'ipotesi induttiva assumiamo che la tesi sia vera per ogni  $0 \leq k \leq g - 1$ .

*CASO 1.* Assumiamo che esiste un 2-disco  $S$  propriamente immerso in  $H_g$  tale che  $\partial S$  non è il bordo di un 2-disco su  $\partial H_g$  tale che  $h(S) \cap S = \emptyset$ .

*Caso 1.1* Se tagliando  $H_g$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  otteniamo un corpo di manici  $H_{g-2}$  dotato dell'involuzione non libera che conserva l'orientazione  $t = h|_{H_{g-2}}$ , allora, per ipotesi induttiva, esiste un naturale  $n$  tale che  $H_{g-2}/t = H_n$ , allora  $H_g/h = H_{n+1}$  in quanto si ottiene incollando ad  $H_n$  un 1-manico  $H^1$  che è il quoziente di  $U \cup h(U)$  tramite la restrizione della mappa quoziente di  $h$ , dove  $U$  è un intorno cilindrico di  $S$ .

*Caso 1.2* Supponiamo che tagliando  $H_g$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  si ottengano due corpi di manici  $H_k$  e  $H_l$  tali che  $k + l = g - 1$  ed esistono le involuzioni non libere  $j = h|_{H_k}$  e  $t = h|_{H_l}$ , rispettivamente su  $H_k$  e  $H_l$ , che conservano l'orientazione. Per ipotesi induttiva esistono due naturali  $n$  ed  $s$  tali che  $H_k/j = H_n$  e  $H_l/t = H_s$ , quindi  $H_g/h$  si ottiene connettendo con un 1-manico  $H^1$ , analogo a quello del caso precedente, i corpi di manici  $H_n$  e  $H_s$ , da cui  $H_g/h = H_{n+s}$ .

*Caso 1.3* Supponiamo che tagliando  $H_g$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  si ottengano due copie  $X_1$  e  $X_2$  di  $H_n$  e un corpo di manici  $H_k$  tali che  $k + 2n = g$  ed esistono l'involuzione  $h|_{X_1 \sqcup X_2} = j$ , che interscambia le due copie, e l'involuzione non libera che conserva l'orientazione  $t = h|_{H_k}$ . Allora per ipotesi induttiva esiste un naturale  $s$  tale che  $H_k/t = H_s$ , così, siccome  $H_g/h$  è l'incollamento, attraverso un 1-manico  $H^1 = (H_1^1 \cup H_2^1)/h$ , di  $H_s$  con  $H_n$ , si ha  $H_g/h = H_{n+s}$ .

*CASO 2.* Assumiamo che esiste un 2-disco  $S$  propriamente immerso in  $H_g$  tale che  $\partial S$  non è il bordo di un 2-disco su  $\partial H_g$  tale che  $h(S) = S$  ed  $S$  è trasversale ad  $F_h$ .

*Caso 2.1.* Supponiamo che tagliando  $H_g$  lungo  $S$  si ottiene  $H_{g-1}$ , allora  $h|_{H_{g-1}} = t$  è una involuzione non libera che conserva l'orientazione. Quindi, per ipotesi induttiva, esiste un naturale  $n$  tale che  $H_{g-1}/t = H_n$ . Ora il quoziente di  $U$ , tramite la restrizione della mappa quoziente di  $h$ , è ancora un 1-manico  $H^1$ . Infatti, siccome  $F_h$  e  $S$  sono trasversali, se  $U$  è parametrizzato come  $B^2 \times [-1, 1]$ , allora  $F_h \cap U$  è l'immagine di  $\{0\} \times [-1, 1]$ , quindi  $U/h$  è omeomorfo a  $B^1 \times B^2$  e s'incolla ad  $H_n$  lungo  $\{-1, 1\} \times B^2$ . Di conseguenza  $H_g/h = H_{n+1}$ .

*Caso 2.2.* Supponiamo che tagliando  $H_g$  lungo  $S$  si ottengano due corpi di manici  $H_k$  e  $H_l$  tali che  $k + l = g$  ed esistono le involuzioni non libere  $j = h|_{H_k}$  e  $t = h|_{H_l}$ , rispettivamente su  $H_k$  e  $H_l$ , che conservano l'orientazione. Per ipotesi induttiva esistono due naturali  $n$  ed  $s$  tali che  $H_k/j = H_n$ ,  $H_l/t = s$ , mentre  $H_g/h$  si ottiene incollando questi due corpi di manici con un 1-manico  $H^1$  analogo a quello del caso precedente. Quindi  $H_g/h = H_{n+s}$ .  $\square$

### 2.3 Estensioni delle involuzioni

Lo scopo di questa sezione sarà quella di mostrare come estendere univocamente le involuzioni su degli 1-manici, così che potremmo in seguito parlare di estensioni sugli 1-manici senza preoccuparci della loro esistenza ed unicità.

**Lemma 2.3.1.** *Siano  $t : H_n \rightarrow H_n$  e  $j : H_s \rightarrow H_s$  due involuzioni che conservano (invertono) l'orientazione, allora esiste un'unica involuzione (a meno di coniugio)  $h : H_{n+s+1} \rightarrow H_{n+s+1}$  tale che  $h$  conserva (inverte) l'orientazione,  $h|_{H_n} = t$ ,  $h|_{H_s} = j$  ed  $H_{n+s+1}$  si ottiene connettendo  $H_n$  ed  $H_s$  attraverso due 1-manici  $H_1^1$  e  $H_2^1$  lungo le basi  $D_1 \subset \partial H_n$  e  $B_1 \subset \partial H_s$  per  $H_1^1$  e  $D_2 = t(D_1) \subset \partial H_n$  e  $B_2 = j(B_1) \subset \partial H_s$  per  $H_2^1$  con  $D_1 \cap B_1 = D_1 \cap D_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$  tali che  $h(H_i^1) = H_r^1$  con  $i \neq r = 1, 2$ .*

**Dimostrazione.** L'esistenza è molto semplice da provare, infatti basta considerare degli omeomorfismi che invertono l'orientazione  $f_i : D_i \rightarrow B_i$  per ogni  $i = 1, 2$  tali che  $j \circ f_1 = f_2 \circ t$ , dove  $h$  e  $t$  sono considerate solamente sulle basi dei due 1-manici da aggiungere. Ora  $h$  si ottiene identificando  $D_i$  con  $B_i$  tramite  $f_i$  per ogni  $i = 1, 2$ .

La dimostrazione dell'unicità è più delicata.

Supponiamo che  $t$  e  $j$  conservano (invertono) l'orientazione, mentre  $h_1$  e  $h_2$  siano due estensioni.

Per provare l'unicità è sufficiente costruire un omeomorfismo  $g : H_1^1 \sqcup H_2^1 \rightarrow H_1^1 \sqcup H_2^1$  che coniuga  $h_1|_{H_1^1 \sqcup H_2^1}$  con  $h_2|_{H_1^1 \sqcup H_2^1}$  e tale che  $g$  ristretto a  $D_1 \cup B_1 \cup D_2 \cup B_2$  sia l'identità. In questo modo definendo l'omeomorfismo  $f : H_{n+s+1} \rightarrow H_{n+s+1}$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in H_{n+s+1} - (H_1^1 \cup H_2^1) \\ g(x) & x \in H_1^1 \cup H_2^1 \end{cases}$$

otteniamo che  $f$  è ben definito e coniuga  $h_1$  con  $h_2$  ( $h_1 = h_2$  su  $H_{n+s+1} - (H_1^1 \cup H_2^1)$  e quindi  $h_1 = h_2$  su  $D_1 \cup B_1 \cup D_2 \cup B_2$ ).

Sia  $g_1 : H_1^1 \rightarrow H_1^1$  un omeomorfismo tale che  $g_1$  ristretto a  $D_1 \cup B_1$  è uguale all'identità, allora poniamo  $g_2 = h_2 \circ g_1 \circ h_1 : H_2^1 \rightarrow H_2^1$ . Se  $x \in D_2$  (oppure  $B_2$ ) allora  $g_2(x) = h_2(g_1(h_1(x)))$  e  $h_1(x) \in D_1$  (oppure  $B_1$ ) in quanto  $h_1|_{D_2} = t|_{D_2}$  (o  $h_1|_{B_2} = j|_{B_2}$ ) da cui  $g_1(h_1(x)) = h_1(x)$ , così  $h_2(g_1(h_1(x))) = h_2(h_1(x)) = t^2(x) = x$  (oppure  $j^2(x) = x$ ) sempre in quanto  $h_1(x) \in D_1$  ( $B_1$ ) quindi  $h_2|_{D_1} = t|_{D_1}$  ( $h_2|_{B_1} = j|_{B_1}$ ). Di conseguenza  $g_2$  ristretto a  $D_2 \cup B_2$  è l'identità.

Poniamo ora  $g = g_1 \sqcup g_2 : H_1^1 \sqcup H_2^1 \rightarrow H_1^1 \sqcup H_2^1$ , allora se  $x \in H_1^1$

$$g(h_1(x)) = g_2(h_1(x)) = h_2(g_1(x)) = h_2(g(x)),$$

dove la prima uguaglianza deriva da  $h_1(H_1^1) = H_2^1$  e  $g|_{H_2^1} = g_2$ , la seconda dalla definizione di  $g_2$  e la terza da  $g|_{H_1^1} = g_1$ . Analogamente se  $x \in H_2^1$

$$g(h_1(x)) = g_1(h_1(x)) = h_2(g_2(x)) = h_2(g(x)).$$

Dall'arbitrarietà di  $X$  segue  $g \circ h_1 = h_2 \circ g$ , quindi  $g$  è l'omeomorfismo voluto da  $H_1^1 \sqcup H_2^1$  in se stesso.  $\square$

**Lemma 2.3.2.** *Se  $t$  è una involuzione di  $H_g$  che conserva (inverte) l'orientazione, allora esiste un'unica involuzione (a meno di coniugio)  $h$  di  $H_{g+2}$  che estende  $t$  in modo che  $H_g$  si ottiene aggiungendo due 1-manici  $H_1^1$  e  $H_2^1$  ad  $H_g$  tali che  $h(H_i^1) = H_j^1$  con  $i \neq j = 1, 2$  dopo aver fissato le basi di ogni singolo manico da incollare.*

**Dimostrazione.** La dimostrazione è analoga al caso di due involuzioni distinte, basta prendere  $t$  anche al posto di  $j$ .  $\square$

**Lemma 2.3.3.** *Siano  $t$  un'involuzione che interscambia le due copie disgiunte  $X_1, X_2$  di  $H_n$  e  $j : H_s \rightarrow H_s$  una involuzione che conserva (inverte) l'orientazione. Allora esiste un'unica involuzione (a meno di coniugio)  $h : H_{2n+s} \rightarrow H_{2n+s}$  tale che  $h$  conserva (inverte) l'orientazione,  $h|_{X_1 \cup X_2} = t$ ,  $h|_{H_s} = j$  ed  $H_{2n+s}$  si ottiene connettendo  $X_1$  ad  $H_s$  attraverso un 1-manico  $H_1^1$  lungo le basi  $D_1 \subset \partial X_1$  e  $B_1 \subset \partial H_s$  e  $X_2$  ad  $H_s$  attraverso un 1-manico  $H_2^1$  lungo le basi  $D_2 = t(D_1) \subset \partial X_2$  e  $B_2 = j(B_1) \subset \partial H_s$ .*

**Dimostrazione.** Simile ai lemmi precedenti.  $\square$

Vogliamo ora mostrare che nei lemmi 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 possiamo omettere di indicare esplicitamente le basi d'incollamento: quindi abbiamo anche l'indipendenza dalla scelta delle basi per le involuzioni che estendono delle involuzioni precedenti.

**Proposizione 2.3.4.** *Siano  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione,  $H_1^1$  e  $H_2^1$  due 1-manici di  $H_g$  tali che  $h(H_1^1) = H_2^1$ ,  $D_i$  e  $B_i$  sono le basi di  $H_i^1$  per  $i = 1, 2$  che soddisfano  $h(D_1) = D_2$  e  $h(B_1) = B_2$ , quindi  $D_i \cap F_h = \emptyset = B_i \cap F_h$  per  $i = 1, 2$ , ed  $h$  è un'estensione di  $t : X \rightarrow X$ , dove  $X$  è lo spazio (non necessariamente connesso) che si ottiene eliminando gli 1-manici  $H_1^1$  e  $H_2^1$  (tranne ovviamente le basi) da  $H_g$ . Allora la classe di equivalenza di  $h$ , intesa come estensione di  $t$ , è univocamente determinata una volta conosciuta la componente di  $X - F_t$  in cui ogni base è immersa.*

**Dimostrazione.** Siano  $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2$  dei 2-dischi disgiunti in  $\partial X$  tali che:

- $D_i$  e  $\bar{D}_i$  appartengono alla medesima componente di  $X - F_t$  per  $i = 1, 2$ ,
- $B_i$  e  $\bar{B}_i$  appartengono alla medesima componente di  $X - F_t$  per  $i = 1, 2$ ,

- $t$  interscambia  $\overline{D}_1$  con  $\overline{D}_2$  e  $\overline{B}_1$  con  $\overline{B}_2$ .

Se  $p : X \rightarrow X/t$  è il rivestimento doppio indotto da  $t$  e denotiamo con  $D$  il quoziente di  $D_1 \cup D_2$  tramite  $t$ , con  $B$  il quoziente di  $B_1 \cup B_2$  tramite  $t$ , con  $\overline{D}$  il quoziente di  $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$  tramite  $t$  e  $\overline{B}$  il quoziente di  $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2$  tramite  $t$ . Sicuramente  $D \cap B = \emptyset = \overline{D} \cap \overline{B}$  e  $D \cup B, \overline{D} \cup \overline{B}$  sono isotopi dentro  $\partial X/h$  (che è formata da una o più superfici chiuse orientabili).

Esiste  $U \subset \partial X/h$  tale che  $U$  è un 2-disco se  $X$  è connesso oppure l'unione disgiunta di 2-dischi quando  $X$  non è connesso,  $D \cup \overline{D} \cup B \cup \overline{B} \subset \text{int } U$  ed  $U$  si solleva a due copie disgiunte tramite  $p$ .

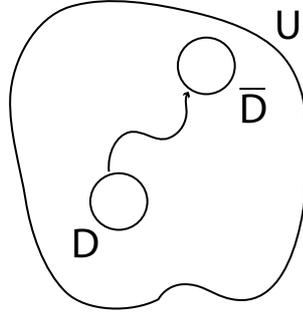


Figura 2.1:  $\hat{f}(D) = \overline{D}$

Siccome  $D, \overline{D}$  sono nella stessa componente di  $\partial X/h$  (in quanto tali sono  $D_i$  e  $\overline{D}_i$  per ogni  $i = 1, 2$ ) ed, analogamente,  $B, \overline{B}$  sono nella stessa componente di  $\partial X/h$ , esiste un omeomorfismo  $\hat{f} : U \rightarrow U$  tale che  $\hat{f}(D) = \overline{D}$ ,  $\hat{f}(B) = \overline{B}$  e  $f|_{\partial U} = \text{id}_{\partial U}$ . In figura 2.1 è mostrato un esempio di questa isotopia.

Estendiamo ora  $\hat{f}$  ad un omeomorfismo  $f$  tramite l'identità su  $X - U$ . Per costruzione  $f$  si solleva ad un omeomorfismo  $F : X \rightarrow X$  tramite  $p$ , tale che  $F \circ t = t \circ F$  e  $F(D_1 \cup D_2) = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ ,  $F(B_1 \cup B_2) = \overline{B}_1 \cup \overline{B}_2$ . Possiamo sempre supporre che  $F(D_i) = \overline{D}_i$  per  $i = 1, 2$  (se non vale si prende l'altro sollevamento  $t \circ F$  al posto di  $F$ ) ed, in generale, possiamo avere i due casi  $F(B_i) = \overline{B}_i$  o  $F(B_i) = \overline{B}_j$  per  $i \neq j = 1, 2$ .

Se  $F(B_i) = \overline{B}_i$  ( $i = 1, 2$ ), incolliamo dei nuovi 1-manici  $\overline{H}_1^1, \overline{H}_2^1$  di modo che le basi di  $\overline{H}_i^1$  siano  $\overline{D}_i, \overline{B}_i$ , se  $F(B_i) = \overline{B}_j$  ( $i \neq j = 1, 2$ ), li incolliamo di modo che le basi di  $\overline{H}_1^1$  siano  $\overline{D}_1, \overline{B}_2$  e quelle di  $\overline{H}_2^1$  siano  $\overline{D}_2, \overline{B}_1$ . Ora possiamo estendere  $t$  ad un'involuzione  $\bar{h}$  su  $X \cup \overline{H}_1^1 \cup \overline{H}_2^1$ .

Le involuzioni  $h$  ed  $\bar{h}$  sono coniugate da un'estensione opportuna di  $F$  da  $X \cup \overline{H}_1^1 \cup \overline{H}_2^1$  a  $X \cup \overline{H}_1^1 \cup \overline{H}_2^1$  ( $F \circ t = t \circ F$  vale già su  $X$  per costruzione di  $F$ ).  $\square$

Quando si trattano le involuzioni che conservano l'orientazione, non si hanno problemi di sconnessione, in quanto gli insiemi dei punti fissi di queste involuzioni, essendo vuoti o 1-dimensionali, non possono sconnettere  $X$ .

*Osservazione 2.* Dall'indipendenza della scelte delle basi segue la possibilità di muovere opportunamente le zone d'incollamento degli 1-manici interscambiati lungo il bordo del corpo di manici restante senza modificare la classe d'equivalenza dell'involuzione. Più precisamente, sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione ed assumiamo anche che il corpo di manici  $H_g$  sia rappresentato mediante una decomposizione a manici. Siano  $H_1^1$  e  $H_2^1$  due 1-manici tali che  $h(H_1^1) = H_2^1$ ,  $D_i$  e  $B_i$  sono le basi di  $H_i^1$  per  $i = 1, 2$  che soddisfano  $h(D_1) = D_2$  e  $h(B_1) = B_2$ , quindi  $D_i \cap F_h = \emptyset = B_i \cap F_h$  per  $i = 1, 2$ . Chiameremo movimento  $h$ -simmetrico di  $H_1^1$  e  $H_2^1$  una successione finita di isotopie di mappe d'attaccamento e scorrimenti di  $H_1^1$  e  $H_2^1$  lungo i restanti 1-manici tale da muovere  $D_1, D_2$  e/o  $B_1, B_2$  lungo  $\partial(H_g - (H_1^1 \cup H_2^1))$  di modo che in ogni istante  $h(D_1) = D_2$  e  $h(B_1) = B_2$  restino soddisfatte. Facciamo osservare che un movimento  $h$ -simmetrico non può far passare  $D_i$  e  $B_i$  attraverso  $F_h \cap \partial(H_g - (H_1^1 \cup H_2^1))$  per ogni  $i = 1, 2$  e, per quanto già detto, un movimento  $h$ -simmetrico non modifica la classe d'equivalenza di  $h$ .

**Corollario 2.3.5.** *Siano  $t : H_n \rightarrow H_n$  e  $j : H_s \rightarrow H_s$  due involuzioni che conservano l'orientazione (risp. invertono l'orientazione), allora esiste un'unica involuzione (a meno di coniugio)  $h : H_{n+s+1} \rightarrow H_{n+s+1}$  tale che  $h$  conserva l'orientazione (risp. inverte l'orientazione),  $h|_{H_n} = t$ ,  $h|_{H_s} = j$  e  $H_{n+s+1}$  si ottiene incollando  $H_n$  con  $H_s$  attraverso due 1-manici  $H_1^1$  e  $H_2^1$  di modo che  $h(H_i^1) = H_j^1$  per ogni  $i \neq j = 1, 2$  e  $H_i^1 \cap F_t = H_i^1 \cap F_j = \emptyset$  per ogni  $i = 1, 2$ .*

**Dimostrazione.** Siano  $D_1 \subset \partial H_n$ ,  $B_1 \subset \partial H_s$  le basi di  $H_1^1$ , allora  $D_2 = t(D_1) \subset \partial H_n$ ,  $B_2 = j(B_1) \subset \partial H_s$  sono le basi di  $H_2^1$ . Dal lemma 2.3.1 otteniamo l'esistenza di un'unica involuzione (a meno di coniugio) su  $H_{n+s+1}$  tale che  $h$  conserva l'orientazione (risp. inverte l'orientazione),  $h|_{H_n} = t$ ,  $h|_{H_s} = j$ ,  $h(H_i^1) = H_j^1$  e  $H_{n+s+1}$  è ottenuto attaccando  $H_n$  con  $H_s$  tramite  $H_1^1$  e  $H_2^1$  lungo  $D_1, B_1, D_2$  e  $B_2$ . Il resto segue dall'indipendenza dalla scelta delle basi se  $t$  e  $j$  conservano l'orientazione e dal teorema 2.1.1 altrimenti ( $H_g - F_h$  è connesso se e solo se  $H_n - F_t$  e  $H_s - F_j$  lo sono).  $\square$

**Definizione 2.1.** Siano  $t : H_n \rightarrow H_n$  e  $j : H_s \rightarrow H_s$  due involuzioni che conservano l'orientazione (risp. invertono l'orientazione). L'involuzione  $t \cup j$  è l'unica estensione di  $t$  e  $j$  su  $H_{n+s+1} = H_n \cup H_1^1 \cup H_2^1 \cup H_s$ .

**Corollario 2.3.6.** *Sia  $t$  un'involuzione che conserva l'orientazione di  $H_g$ , allora esiste un'unica involuzione che conserva l'orientazione  $h$  (a meno*

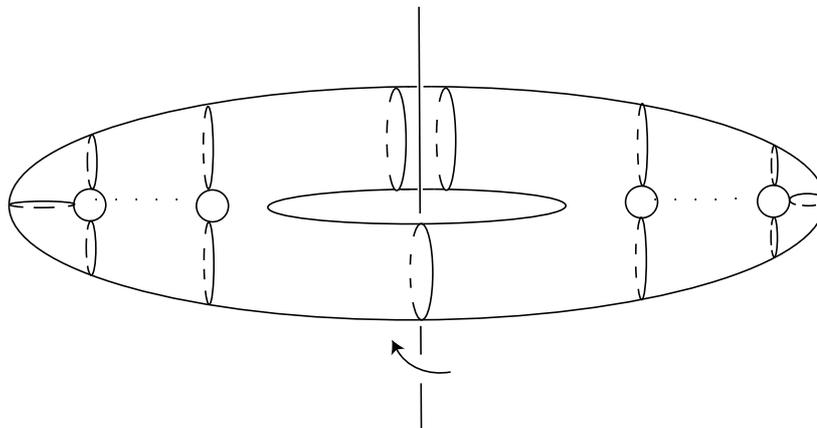


Figura 2.2:  $I_{2g+1}$

di coniugio) di  $H_{g+2}$ , che estende  $t$  così che  $H_{g+2}$  è ottenuto incollando due 1-manici  $H_1^1$  e  $H_2^1$  di modo che  $h(H_i^1) = H_j^1$  per ogni  $i \neq j = 1, 2$  e  $H_i^1 \cap F_t = H_i^1 \cap F_j = \emptyset$  per ogni  $i = 1, 2$ .

**Dimostrazione.** Segue immediatamente dal lemma 2.3.2 e dall'indipendenza dalla scelta delle basi.  $\square$

## 2.4 Involuzioni libere che conservano l'orientazione

Iniziamo costruendo una particolare involuzione libere che conserva l'orientazione.

Assumiamo  $H_{2g+1}$ , allora l'involuzione  $I_{2g+1} : H_{2g+1} \rightarrow H_{2g+1}$  è la rotazione di  $H_{2g+1}$  intorno ad un asse disgiunto dal corpo di manici, ma infilato all'interno del buco centrale (vedere la figura 2.2). L'involuzione costruita è la restrizione ad  $H_{2g+1}$  di una simmetria assiale di  $\mathbb{R}^3$ . Una simmetria assiale conserva l'orientazione scelta di  $\mathbb{R}^3$  e questa induce un'orientazione su  $H_{2g+1}$ . Così  $I_{2g+1}$  conserva l'orientazione di  $H_{2g+1}$ . Il suo spazio delle orbite è il corpo di manici  $H_{g+1}$ .

Denotiamo infine con  $\rho_{2g+1} : H_{2g+1} \rightarrow H_{g+1}$  la mappa quoziente di  $I_{2g+1}$ , allora  $\rho$  è un rivestimento ordinario doppio.

**Teorema 2.4.1.** *Ogni involuzione libera che conserva l'orientazione di  $H_{2g+1}$  è equivalente a  $I_{2g+1}$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $h$  un'involuzione libera che conserva l'orientazione di  $H_{2g+1}$ .

Per il lemma 2.1.3 esiste un 2-disco propriamente immerso  $S$  in  $H_{2g+1}$  tale che  $\partial S$  non delimita nessun 2-disco in  $\partial H_{2g+1}$ . Allora  $h(S) \cap S = \emptyset$  e denotiamo con  $U$ ,  $h(U)$  gli intorni regolari cilindrici di  $S$  e  $h(S)$  tali che  $U \cong h(U) \cong S^1 \times B^2$  e con  $D_1$ ,  $B_1$  e  $D_2$ ,  $B_2$  le rispettive basi di  $U$  ed  $h(U)$ .

Siccome l'enunciato vale per  $g = 0$ , ammettiamo la tesi vera per induzione per ogni  $n < g$ . Seguendo il teorema 2.1.2 otteniamo quattro possibili casi per le involuzioni libere ma, come vedremo, in tutti i casi possiamo ricondurci al primo.

*CASO 1.* Tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S \cup h(S)$  otteniamo il corpo di manici  $H_{2g-1}$  dotato dell'involuzione libera che conserva l'orientazione  $t = h|_{H_{2g-1}}$ . Per ipotesi induttiva, a meno d'equivalenze,  $t$  è  $I_{2g-1}$ . Tutte le estensioni di  $I_{2g-1}$  su  $H_{2g+1} = H_{2g-1} \cup H_1^1 \cup H_2^1$  sono fra loro equivalenti per il corollario 2.3.6. Siccome sia  $h$  che  $I_{2g+1}$  estendono  $I_{2g-1}$  su  $H_{2g+1}$ , allora  $h$  e  $I_{2g+1}$  sono coniugate.

*CASO 2.* Tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S \cup h(S)$  otteniamo due corpi di manici disgiunti  $H_n$  ed  $H_s$  con  $n + s = 2g$  tali che esistono le due involuzioni libere che conservano l'orientazione  $j_1 : H_n \rightarrow H_n$  e  $j_2 : H_s \rightarrow H_s$  (quindi  $n$  e  $s$  sono dispari). Allora  $j_1$  e  $j_2$  sono rispettivamente coniugate a  $I_n$  ed  $I_s$  ed  $n$ ,  $s$  sono dispari. Possiamo assumere  $n \geq s$ , così, se  $n > 1$ , esistono due dischi  $D'$  e  $j_1(D')$  propriamente immersi in  $H_n$  ed i loro bordi non delimitano nessun 2-disco in  $\partial H_n$  tali che, tagliando  $H_n$  lungo  $D' \cup j_1(D')$  otteniamo  $H_{n-2}$ : infatti questo è vero per  $I_n$  ( $n - 2 > 0$  perché  $n > 1$  ed  $n$  è dispari). Di conseguenza, tagliando  $H_{2g+1}$  lungo i dischi  $D' \cup j_1(D')$  si ottiene  $H_{2g-1}$ , per cui  $D'$  ci rimanda al caso 1. La figura 2.3 ci mostra che questo è vero anche per  $n = s = 1$ : osserviamo che ora  $j_1$  e  $j_2$  sono, a meno d'equivalenze, le involuzioni  $I_1$  e quindi  $H_1^1$  e  $H_2^1$ , per potersi interscambiare, devono essere incollati necessariamente come mostrato in figura. Quindi  $D$  e  $j_1(D) = h(D)$  ci riconducono al caso 1.

*CASO 3.* Tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S \cup h(S)$  otteniamo due corpi di manici disgiunti  $H_n$  ed  $H_s$  con  $n + s = 2g$  tali che esiste un'involuzione  $t$  che li interscambia (quindi  $n = s = g$ ). Incolliamo questi due spazi con  $H_1^1$  ed  $H_2^1$  rispettivamente da  $D_1 \subset \partial H$  a  $B_1 \subset \partial \bar{H}$  e da  $D_2 \subset \partial H$  a  $B_2 \subset \partial \bar{H}$ . Prendiamo su  $H$  la decomposizione a manici  $\tilde{H}^0 \cup g\tilde{H}^1$  di modo che  $D_1$  e  $D_2$  sono inclusi in  $\partial \tilde{H}^0 \cap \partial H$ . Questa decomposizione esiste, infatti è sufficiente considerare un 2-disco  $D \subset \partial H$  che contiene al suo interno  $D_1 \cup D_2$  e poi lo si inspessisce fino ad ottenere  $\tilde{H}^0$ . Applicando  $t$  otteniamo una decomposizione a manici  $\bar{H}^0 \cup g\bar{H}^1$  analoga per  $\bar{H}$ . In questo modo  $h$ , considerata come l'estensione di  $t$  su

$$H_{2g+1} = (\tilde{H}^0 \cup g\tilde{H}^1) \cup H_1^1 \cup H_2^1 (\bar{H}^0 \cup g\bar{H}^1),$$

interscambia i due 0-manici, un 1-manico  $\tilde{H}_i^1$  con  $\bar{H}_i^1$  ed  $H_1^1$  con  $H_2^1$ . Prendiamo così un 2-disco  $D$  propriamente immerso in  $\tilde{H}_1^1$ ,  $h(D)$  sarà propri-

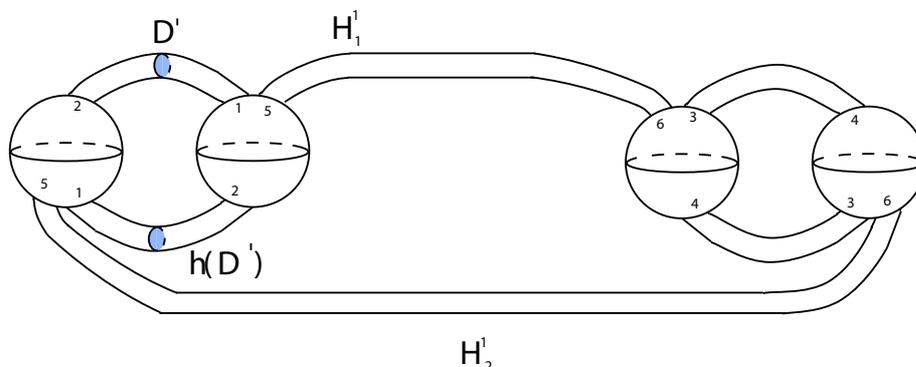


Figura 2.3:  $H_3$

amente immerso in  $\overline{H}_1^1$  di modo che questa coppia di dischi ci rimanda al caso 1 (infatti  $\partial D$  non limita un 2-disco in  $\partial H_{2g+1}$ ).

*CASO 4.* Tagliando  $H_{2g+1}$  lungo  $S$  ed  $h(S)$  otteniamo le involuzioni  $t : X_1 \sqcup X_2 \rightarrow X_1 \sqcup X_2$  e  $j : H_s \rightarrow H_s$  tali che  $t$  interscambia  $X_1$  con  $X_2$ . Sicuramente  $n \geq 1$ , altrimenti  $\partial S$  delimiterebbe un 2-disco sul bordo di  $H_{2g+1}$ , allora  $s < 2g + 1$  per cui  $j$  è coniugata a  $I_s$ .

Dotiamo  $X_1$  della struttura a manici  $\overline{H}^0 \cup n\overline{H}^1$  e trasportiamola, tramite  $t$ , alla struttura a manici  $\tilde{H}^0 \cup n\tilde{H}^1$  di  $X_2$  tali che  $D_1 \subset \partial \tilde{H}^0 \cap \partial X_1$  e  $t(D_1) = D_2 \subset \partial \tilde{H}^0 \cap \partial X_2$ . Connettiamo  $X_1$  ad  $H_s$  tramite  $H_1^1$  incollato da  $D_1$  a  $B_1$  e  $X_2$  ad  $H_s$  tramite  $H_2^1$  incollato da  $D_2$  a  $B_2$ .

Sia  $D$  un 2-disco propriamente immerso in un 1-manico di  $X_1$ , allora  $t(D) = h(D)$  si trova nel corrispettivo 1-manico di  $X_2$  e  $\partial D$  non delimita nessun 2-disco in  $\partial H_{2g+1}$  con

$$H_g = X_1 \cup H_1^1 \cup H_s \cup H_2^1 \cup X_2.$$

Quindi  $D$  e  $t(D)$  ci riconducono al caso 1 perché  $\partial D$  non limita un 2-disco in  $\partial X_1$ , così  $\partial D$  non limita un 2-disco in  $\partial H_{2g+1}$ .  $\square$

**Corollario 2.4.2.** *Se  $p : H_{2g+1} \rightarrow H_{g+1}$  è un rivestimento ordinario doppio allora è equivalente a  $\rho_{2g+1}$ .*

**Dimostrazione.** La tesi segue dal teorema 1.8.1 e dal teorema 2.4.1.  $\square$

## 2.5 Involuzioni che fissano 1-sottovarietà

Per la classificazione di queste involuzioni useremo i movimenti simmetrici di manici e delle particolari decomposizioni a manici di  $H_g$  che dipendono dalla particolare involuzione  $h$  di  $H_g$ .

**Proposizione 2.5.1.** *Sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione con l'insieme dei punti fissi di dimensione 1, allora, a meno di equivalenze, esiste una decomposizione a manici*

$$L = (k_1 + k_2)H^0 \cup (g + k_1 + k_2 - 1)H^1$$

di  $H_g$  (che chiameremo *h-adattata*) tale che:

- $k_1$  sono le componenti omeomorfe ad  $S^1$  (cioè i nodi) di  $F_h$  e  $k_2$  sono le componenti omeomorfe a  $B^1$  (cioè gli archi propriamente immersi) di  $F_h$ ;
- sia  $S$  un nodo di  $F_h$ , allora  $S$  è incluso in modo standard all'interno del sottospazio  $H$  di  $H_g$  omeomorfo al toro pieno formato da uno 0-manico ed un 1-manico di  $L$  (in altre parole è isotopo all'immersione  $S^1 \times \{0\} \hookrightarrow S^1 \times B^2$ ) ed inoltre  $h|_H : H \rightarrow H$  è coniugata all'involuzione standard del toro pieno  $S^1 \times B^2$  che fissa punto per punto  $S^1 \times \{0\}$ ;
- se  $B$  è un arco di  $F_h$ , allora  $B$  è propriamente immerso in modo standard in uno 0-manico di  $L$ , in altre parole  $B$  è isotopo all'immersione  $\{0\} \times B^1 \hookrightarrow B^2 \times B^1 \cong B^3$  e la restrizione di  $h$  a tale 0-manico è un'involuzione coniugata alla simmetria assiale di  $B^3$ ;
- non esistono 0-manici di  $L$  disgiunti da  $F_h$  (quindi se  $H^0$  è uno 0-manico della decomposizione *h-adattata*, allora  $H^0$  contiene un arco propriamente immerso di  $F_h$  che rappresenta una componente di  $F_h$  omeomorfa a  $B^1$  oppure è un sottospazio di un nodo di  $F_h$ );
- i restanti  $g+k_2-1$  1-manici si devono interscambiare due a due tramite  $h$ .

**Dimostrazione.** L'asserto vale per  $g = 0, 1$ . Infatti in  $H_0 = B^3$  abbiamo che  $h$  è coniugata ad una simmetria assiale, mentre per  $H_1$  l'involuzione  $h$  è coniugata alla rotazione di  $[0, 2\pi]_{0 \sim 2\pi} \times B^2$  intorno agli assi  $\{0, \pi\} \times B^1 \subset [0, 2\pi]_{0 \sim 2\pi} \times B^2$  descritta da  $(\theta, (x, y)) = (-\theta, (x, -y))$  oppure all'involuzione di  $S^1 \times B^2$  che fissa, punto per punto,  $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times B^2$  descritta da  $\text{id} \times r$  con  $r$  uguale alla simmetria centrale di  $B^2$ . Quindi proviamo l'enunciato per induzione, ammettendolo valido per ogni  $0 \leq n < g$ .

Dal lemma 2.1.3 sappiamo che esiste un 2-disco regolare  $S$  propriamente immerso in  $H_g$  tale che  $\partial S$  non limita nessun 2-disco in  $\partial H_g$  e  $h(S) \cap S = \emptyset$  oppure  $h(S) = S$  con  $S$  trasversale ad  $F_h$  e ricordiamo che si era denotato con  $U$  un intorno opportuno di  $S$ . Applicando il teorema 2.1.2 otteniamo l'esistenza di cinque casi possibili.

*CASO 1.* L'involuzione  $h$  induce l'involuzione  $t$  di  $H_{g-2}$  tale che  $F_t = F_h$  e, per ipotesi induttiva,  $H_{g-2}$  possiede una decomposizione  $t$ -adattata del tipo

$$(k_1 + k_2)H^0 \cup (g + k_1 + k_2 - 3)H^1.$$

Aggiungendo due 1-manici otteniamo una decomposizione  $h$ -adattata per  $H_g$ .

*CASO 2.* L'involuzione  $h$  induce le involuzioni  $t$  di  $H_n$  e  $j$  di  $H_s$  con  $n + s = g - 1$  tali che, se  $F_t$  e  $F_h$  sono entrambi non vuoti,  $F_t$  possiede  $r_1$  archi ed  $s_1$  componenti sferiche,  $F_j$  possiede  $r_2$  archi ed  $s_2$  componenti sferiche con  $r_1 + r_2 = k_1$  e  $s_1 + s_2 = k_2$ . Allora per ipotesi induttiva  $H_n$  ed  $H_s$  ammettono rispettivamente una decomposizione  $t$ -adattata e  $j$ -adattata del tipo

$$H_n = (r_1 + s_1)H^0 \cup (n + r_1 + s_1 - 1)H^1$$

e

$$H_s = (r_2 + s_2)H^0 \cup (s + r_2 + s_2 - 1)H^1.$$

Allora connettendo i corpi di manici con  $H_n^1$  e  $H_s^1$  per ottenere  $h$ , si costruisce una decomposizione a manici  $h$ -adattata per  $H_g$  del tipo

$$\begin{aligned} (r_1 + s_2 + r_2 + s_2)H^0 \cup (n + r_1 + s_1 + s + r_2 + s_2)H^1 &= \\ &= (k_1 + k_2)H^0 \cup (g + k_1 + k_2 - 1)H^1. \end{aligned}$$

Resta da analizzare il caso in cui  $F_t = \emptyset$ , quindi  $F_j = F_h$  e  $t$  è una involuzione libera, quindi  $n = 2l + 1$  e  $t$  è coniugata ad  $I_{2l+1}$  in quanto  $t$  deve conservare l'orientazione. Così esiste un opportuno 2-disco che ci rimanda al caso 1.

*CASO 3.*  $h$  induce due involuzioni  $t : X_1 \cup X_2 \rightarrow X_1 \cup X_2$  e  $j : H_s \rightarrow H_s$  tali che  $F_j = F_h$ , mentre  $X_1 \cong X_2 \cong H_n$  sono interscambiati da  $t$ ,  $2n + s = g$  e  $n \neq 0$ . Allora, come nell'analogo caso della dimostrazione del teorema 2.4.1, esiste un opportuno 2-disco che ci rimanda al caso 1.

*CASO 4.* L'involuzione  $h$  induce l'involuzione  $t$  di  $H_{g-1}$ , dove  $F_t$  sarà composta da  $k_1$  nodi e  $k_2 + 1$  archi se  $F_h \cap U$  è incluso in un arco, oppure da  $k_1 - 1$  nodi e  $k_2 + 1$  archi se  $F_h \cap U$  è incluso in un nodo (ricordiamo che  $U$  era l'intorno da eliminare per indurre  $t$ ). Per ipotesi induttiva  $H_{g-1}$  ammette una decomposizione a manici  $t$ -adattata con  $F_t$  composto da archi banali e nodi standard come specificato nell'enunciato.

Nel primo caso  $H_{g-1}$  ammetterà la decomposizione a manici

$$H_{g-1} = (k_1 + k_2 + 1)H^0 \cup (g + k_1 + k_2 - 1)H^1.$$

Per riottenere  $h$  incolliamo un 1-manico  $H^1$ , che contiene una componente dell'insieme dei punti fissi  $F \cong B^1$  propriamente immersa in modo standard,

a due 0-manici distinti (non lo stesso altrimenti creeremo un nodo di  $F_h$  e non un arco), così due 0-manici  $H_1^0$  e  $H_2^0$ , rispettivamente contenenti gli archi  $F_1, F_2$  di  $F_t$ , vengono connessi da  $H^1$  e le loro due componenti di  $F_t$  s'incollano formando un arco di  $F_h$ . Infatti, siccome l'iniziale  $U$  conteneva un arco  $\alpha$  incluso in un arco  $\beta$  di  $F_h$ , allora  $\beta - \text{int } \alpha$  sarà due archi  $F_1, F_2$  di  $F_t$  propriamente immersi dentro  $H_{g-1}$  e, siccome la decomposizione a manici su esso considerata è  $t$ -adattata, esistono i due 0-manici  $H_1^0$  e  $H_2^0$  precedenti che contengono rispettivamente  $F_1, F_2$ . Le basi lungo cui s'incolla  $H^1$  devono coincidere con quelle di  $U$ , allora  $F_1 \cup F \cup F_2$  è un arco propriamente immerso che è fissato, punto per punto, da  $h$ .

La coppia  $(H_1^0 \cup H_2^0 \cup H^1, F_1 \cup F \cup F_2)$  la possiamo rappresentare con  $(H^0, F')$ , in quanto  $h(H_1^0 \cup H_2^0 \cup H^1) = H_1^0 \cup H_2^0 \cup H^1$  ed  $h$  fissa punto per punto  $F_1 \cup F \cup F_2$ . Quindi  $H_g$  ammette una decomposizione a manici  $h$ -adattata: aggiungendo  $H^1$  si ottengono  $g+k_1+k_2$  1-manici quindi dopo la sostituzione di  $H_1^0 \cup H_2^0 \cup H^1$  con  $H^0$  abbiamo  $k_1+k_2$  0-manici e  $g+k_1+k_2-1$  1-manici. Osserviamo che  $F'$  è propriamente immerso in modo standard dentro  $H^0$  in quanto gli archi di  $F_h$  sono propriamente immersi in modo standard dentro  $H_1^0, H_2^0$  ed  $H^1$ , infatti su  $H_{g-1}$  vale l'ipotesi induttiva e  $h|_{H^1}$  è coniugata ad una simmetria assiale.

Nel secondo caso l'iniziale  $U$  conteneva un arco  $\alpha$  incluso in un nodo  $K$  di  $F_h$ , quindi  $F' = K - \text{int } \alpha$  è un arco propriamente immerso di  $F_t$ . Per ipotesi induttiva  $H_{g-1}$  ammetterà la decomposizione a manici

$$H_{g-1} = (k_1 + k_2)H^0 \cup (g + k_1 + k_2 - 2)H^1$$

tale che esiste uno 0-manico  $H^0$  dentro cui è propriamente immerso l'arco  $F'$ .

Per riottenere  $h$  incolliamo un 1-manico  $H^1$  allo 0-manico  $H^0$ , di modo che  $H^1$  contiene un arco banale propriamente immerso  $F$  fissato punto per punto dall'involuzione  $h|_{H^1} : H^1 \rightarrow H^1$ , siccome le basi lungo cui s'incolla  $H^1$  devono coincidere con quelle di  $U$ . In questo modo abbiamo che  $F \cup F'$  forma un nodo di  $F_h$  e quindi otteniamo una decomposizione a manici  $h$ -adattata di  $H_g$ : infatti il numero di 0-manici resta invariato, quello degli 1-manici è aumentato di 1. Osserviamo che il nodo ottenuto è standard in quanto i due archi che s'incollano sono propriamente immersi in modo standard nei rispettivi manici, infatti su  $H_{g-1}$  vale l'ipotesi induttiva e  $h|_{H^1}$  è coniugata ad una simmetria assiale.

**CASO 5.** L'involuzione  $h$  induce le involuzioni  $t$  su  $H_n$  e  $j$  su  $H_s$  tali che  $n + s = g$  con  $n, s$  non nulli e  $F_t \cup F_j$  contiene un arco in più di  $F_h$  e gli stessi nodi (non si può avere l'altro sottocaso del CASO 4, in quanto l'eliminazione di un arco da un nodo genera uno spazio connesso e quindi non sarà possibile sconnettere il corpo di manici). Per ipotesi induttiva,

abbiamo le decomposizioni a manici adattate

$$H_n = (r_1 + s_1)H^0 \cup (n + r_1 + s_1 - 1)H^1$$

e

$$H_s = (r_2 + s_2)H^0 \cup (s + r_2 + s_2 - 1)H^1$$

con  $r_1 + r_2 = k_1$  e  $s_1 + s_2 = k_2 + 1$  con  $F_t$  ed  $F_j$  formati da nodi standard ed archi banali come specificato nell'enunciato.

Per riottenere  $h$  incolliamo un 1-manico  $H^1$  che connette  $H_n$  ed  $H_s$  e tale che l'involuzione  $h|_{H^1} : H^1 \rightarrow H^1$  fissa punto per punto un arco  $F$ .

Come nell'analogia situazione del caso 4,  $H^1$  deve necessariamente incollarsi a due distinti 0-manici,  $H^0$ ,  $\overline{H}^0$ , con la differenza che  $H^0$  è incluso in  $H_n$  e  $\overline{H}^0$  è incluso in  $H_s$ . Per ipotesi induttiva dentro  $H^0$  e  $\overline{H}^0$  vi sono propriamente immersi rispettivamente l'arco  $F_1 \subset F_t$  e l'arco  $F_2 \subset F_j$ . Come in precedenza, dopo aver attaccato  $H^1$  otteniamo che la coppia  $(H^0 \cup \overline{H}^0 \cup H^1, F_1 \cup F \cup F_2)$  la possiamo rappresentare con  $(H^0, F)$  dove  $F \cong B^1$  è immerso propriamente in modo standard dentro  $H^0$ . Abbiamo quindi dimostrato che  $H_g$  ammette una decomposizione a manici  $h$ -adattata, in quanto

$$n + r_1 + s_1 - 1 + s + r_2 + s_2 - 1 = g + k_1 + k_2 - 1$$

ed il numero di 1-manici non è variato mentre quello di 0-manici è diminuito di una unità, ma

$$r_1 + r_2 + s_1 + s_2 = k_1 + k_2 + 1. \quad \square$$

**Corollario 2.5.2.** *Sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione con l'insieme dei punti fissi formati da  $k_1$  componenti sferiche e  $k_2$  archi, allora  $g + k_2 - 1$  deve essere pari.*

**Dimostrazione.** La quantità in esame è il numero degli 1-manici che si scambiano due a due di una decomposizione adattata.  $\square$

*Osservazione 3.* Sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  un'involuzione con  $F_h$  formato da  $k$  componenti sferiche, allora, a partire da una decomposizione  $h$ -adattata di  $H_g$ , otteniamo che gli 1-manici sono  $g + k - 1$  e fra di loro ne esistono  $k$  che vengono fissati da  $h$ , mentre gli altri  $g - 1$  devono essere interscambiati due a due da  $h$ , allora  $g$  deve necessariamente essere dispari. Questo fatto può essere provato anche usando la formula di Riemann-Hurwitz, in quanto  $h|_{\partial H_g}$  induce un rivestimento ordinario doppio.

Sia  $R_g^k$  l'involuzione di  $H_g$  di figura 2.4: questa mappa è la rotazione di  $\pi$  radianti intorno all'asse  $a$ . Come si intuisce dalla figura 2.4, l'insieme

dei punti fissi di  $R_g^k$  è composto da archi propriamente immersi e  $k$  specifica quanti sono tali archi. Quindi possiamo dotare  $H_g$  di una struttura a manici  $H^0 \cup nH^1$  tale che i  $k$  archi fissati sono contenuti nello 0-manico ed in  $k - 1$  1-manici, mentre i restanti  $2n = g - k + 1$  1-manici si interscambiano due a due. Così lo spazio delle orbite di  $R_g^k$  è  $H_n$ . Osserviamo, inoltre, che  $R_g^{g+1}$  è l'involuzione iperellittica di  $H_g$ .

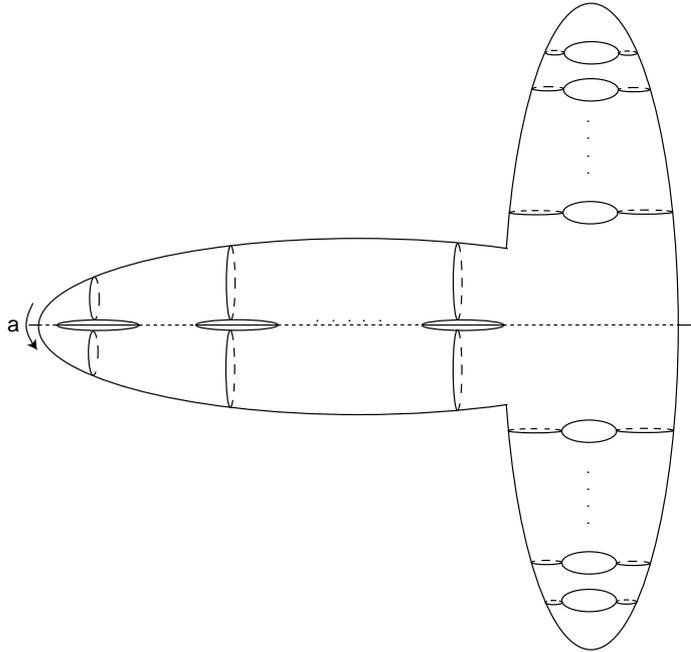


Figura 2.4: Involuzione  $R_g^k$

Costruiamo ora un'involuzione di  $H_g$  che fissa  $k$  nodi e nessun arco (quindi  $g$  è dispari). Essa verrà denotata con  $I_g^k$ .

1. Consideriamo  $k$  copie disgiunte  $S_1, \dots, S_k$  del toro pieno  $S$ , tale che  $I_g^k$  ristretta ad  $S_i$  è l'involuzione standard del toro con punti fissi  $\{0\} \times S^1$  se  $S = B^2 \times S^1$ , descritta dall'espressione in coordinate  $(t, y) \mapsto (t, -y)$  con  $t \in S^1$  ed  $y \in B^2 \subset \mathbb{C}$ ;
2. connettiamo i tori pieni con  $2k - 2$  1-manici di modo che  $H_{2i-1}^1$  e  $H_{2i}^1$  incollano l' $i$ -esimo toro pieno al  $(i + 1)$ -esimo toro pieno e  $I_g^k$  interscambia tali manici, l'unicità della mappa definita scaturisce dal corollario 2.3.5;
3. aggiungiamo i restanti 1-manici come mostrato in figura 2.5, supponendo che essi siano incollati allo 0-manico di  $S_k$  e poi estendiamo  $I_g^k$

su essi, di modo che essi vengano interscambiati a coppie; l'unicità di  $I_g^k$  segue dal corollario 2.3.6.

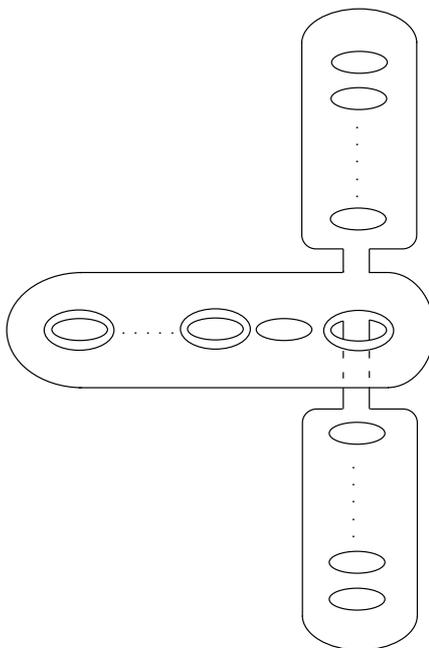


Figura 2.5: Involutione  $I_g^k$

Rappresentiamo ogni toro pieno  $S_i$  come l'unione di uno 0-manico con un 1-manico. Dalla costruzione di  $I_g^k$  segue che gli 1-manici di  $H_g$  che sono interscambiati due a due da  $I_g^k$  sono  $g + 2$ . Infatti ne esistono  $2k - 2$  che connettono i vari  $S_i$  formando il corpo di manici  $H_{2k-1}$  (infatti abbiamo  $k$  0-manici e  $3k - 2$  1-manici), e  $g - 2k + 1$  tutti incollati allo 0-manico di  $S_k$ . Lo spazio quoziente è l'unione di  $H_{2k-1}/I_g^k \cong H_k$  con  $\frac{g-2k+1}{2}$  1-manici, cioè  $H_{\frac{g+1}{2}}$ .

Seguendo la definizione 2.1, consideriamo l'involutione

$$L_g^{k_1, k_2} = I_{g_1}^{k_1} \cup R_{g_2}^{k_2}$$

dove  $g_1 + g_2 = g - 1$ ,  $g_1$  è dispari,  $g_2 - k_2 + 1$  è pari e  $k_1, k_2 > 0$ . Osserviamo che l'involutione costruita non dipende, a meno di equivalenze, dagli  $g_2 - k_2 + 1$  1-manici di  $H_{g_2}$  che sono interscambiati due a due da  $R_{g_2}^{k_2}$  e dagli  $g_1 - 2k_1 + 1$  1-manici che sono interscambiati due a due da  $I_{g_1}^{k_1}$  e sono incollati allo 0-manico del toro pieno  $S_{k_1}$  di  $H_{g_1}$ , infatti è possibile muoverli attraverso scorrimenti  $L_g^{k_1, k_2}$ -simmetrici. Possiamo così supporre che questi 1-manici

appartengono tutti a  $H_{g_2}$  e siano interscambiati due a due da  $R_{g_2}^{k_2}$ , quindi

$$L_g^{k_1, k_2} = I_{2k_1-1}^{k_1} \cup R_{g-2k_1}^{k_2},$$

in quanto abbiamo tolto  $g_1 - 2k_1 + 1$  1-manici dal primo corpo di manici e li abbiamo incollati al secondo e si era inizialmente supposto  $g_1 + g_2 = g - 1$ . Lo spazio delle orbite di  $L_g^{k_1, k_2}$  è  $H_l$  con  $l = \frac{g-2k_1-k_2+1}{2} + k_1 = \frac{g-k_2+1}{2}$ .

Possiamo fare in modo che  $L_g^{k_1, k_2}$  includa anche le involuzioni precedentemente definite, basta imporre  $L_g^{0, k_2} = R_g^{k_2}$  e  $L_g^{k_1, 0} = I_g^{k_1}$ . In questo modo  $L_g^{0, g+1}$  denota l'involuzione iperellittica.

Denotiamo infine con  $\pi_g^{k_1, k_2} : H_g \longrightarrow H_l$  ( $l = \frac{g-k_2+1}{2}$ ) la mappa quoziente di  $L_g^{k_1, k_2}$ , allora  $\pi_g^{k_1, k_2}$  è un rivestimento doppio ramificato su  $k_1$  nodi, ognuno immerso in modo standard dentro un sottospazio di  $H_l$  omeomorfo a  $S^1 \times B^2$ , e su  $k_2$  archi banali propriamente immersi.

**Teorema 2.5.3.** *Sia  $h : H_g \longrightarrow H_g$  un'involuzione non libera che conserva l'orientazione. Se  $n \geq 0$  è il numero di nodi ed  $m \geq 0$  è il numero di archi di  $F_h$ , allora  $h$  è coniugata a  $L_g^{n, m}$ .*

**Dimostrazione.** L'involuzione  $h$  possiede, a meno di coniugio, una decomposizione a manici  $h$ -adattata con  $n(\geq 0)$  copie  $S_1, \dots, S_n$  di  $H^0 \cup H^1$  ognuna contenete al suo interno un nodo immerso in modo standard di  $F_h$  e  $m(\geq 0)$  0-manici  $H_1^0, \dots, H_m^0$  ognuno contenente uno degli archi banali di  $F_h$  propriamente immerso. Per semplificare la notazione, denotiamo  $L_g^{n, m}$  con  $L$ .

Con i movimenti  $h$ -simmetrici possiamo riordinare  $(H_g, F_h)$  così che  $F_h$  è immerso nel corpo di manici in modo che tutte le sue componenti sferiche vengano prima dei suoi archi, e gli eventuali sottospazi  $S_i = H^0 \cup H^1$  (contenenti i nodi di  $F_h$  se  $n \neq 0$ ) e  $H_j^0$  (contenenti gli archi di  $F_h$  se  $m \neq 0$ ) siano due a due connessi esattamente da  $2(n + m) - 2$  1-manici, mentre gli 1-manici rimanenti sono incollati all'ultimo 0-manico  $H_j^0$  (che contiene l'ultimo arco di  $F_h$ ) oppure a  $S_n$  quando  $m = 0$ . In altre parole, abbiamo un'altra decomposizione a manici  $h$ -adattata di  $H_g$  che corrisponde alla decomposizione a manici su cui si può definire  $L$ . Ora  $L$  ristretta a  $S_i$  è l'involuzione  $(t, y) \longmapsto (t, -y)$ , mentre  $L$  ristretta agli 0-manici contenenti gli archi di  $F_h$  è una simmetria assiale. Siccome la decomposizione a manici di  $H_g$  è  $h$ -adattata,  $L|_{S_i}$  è coniugata a  $h|_{S_i}$ , mentre  $L$  ed  $h$ , ristrette ad ogni 0-manico contenente un arco di  $F_h$ , sono coniugate.

Sia  $X$  il corpo di manici formato dai  $S_i$ , dai  $H_j^0$  e dagli 1-manici che li connettono. A meno d'equivalenze,  $L|_X$  ed  $h|_X$  sono delle estensioni delle medesime involuzioni sui vari  $S_i$  ed  $H_j^0$ , quindi, applicando ripetutamente il corollario 2.3.5,  $L$  ed  $h$  sono equivalenti su  $X$ . Così le involuzioni  $h$  ed  $L$

di  $H_g$  sono estensioni della medesima involuzione su  $X$  quindi, applicando ripetutamente il corollario 2.3.6,  $L$  ed  $h$  sono equivalenti su  $H_g$ .  $\square$

**Corollario 2.5.4.** *Sia  $p : H_g \rightarrow H_l$  un rivestimento doppio ramificato su  $n \geq 0$  nodi ed  $m \geq 0$  archi con  $n + m > 0$ . Allora  $p$  è equivalente a  $\pi_g^{n,m}$  ed  $l = \frac{g-m+1}{2}$ .*

**Dimostrazione.** La tesi segue dal teorema 1.8.1 e dal teorema 2.5.3.  $\square$

Per completare la classificazione mostriamo quante sono le classi di equivalenza delle involuzioni non libere che conservano l'orientazione di  $H_g$ . Per il teorema 2.5.3 queste classi sono completamente rappresentate dalle involuzioni  $L_g^{n,m}$  al variare di  $n, m \geq 0$ .

Assumendo  $n = 0$ , otteniamo  $L_g^{0,m} = R_g^m$  con  $m$  che appartiene all'insieme  $\{1, \dots, g+1\}$  e che soddisfa  $g+m-1$  pari. Infatti se  $m = 0$  avremo un'involuzione libera, mentre se  $m = g+2$  il corpo di manici deve avere genere  $g+1$ , in quanto possiamo assumere che i  $g+2$  archi di punti fissi siano immersi in  $g+2$  0-manici connessi in coppie da  $2g+2$  1-manici interscambiati due a due.

Assumendo  $m = 0$ , otteniamo  $L_g^{n,0} = I_g^n$  ed  $n$  appartiene all'insieme  $\left\{1, \dots, \frac{g+1}{2}\right\}$  (ricordiamo che se  $m = 0$  allora  $g$  deve essere dispari). Infatti, il sottospazio di genere minimo di  $H_g$  che contiene tutti i nodi è  $H_{2n-1}$ , quindi il massimo per  $n$  soddisfa l'equazione  $2n-1 = g$ .

Assumiamo ora  $n, m > 0$ . Se  $g$  è pari, il minimo valore non nullo possibile di  $m$  è  $m = 1$ , così si ottiene  $L_g^{n,1} = I_{2n-1}^n \cup R_{g-2n}^1$ , quindi il massimo valore per  $n$  deve soddisfare  $g-2n = 0$ . Se  $g$  è dispari, il minimo valore non nullo possibile di  $m$  è  $m = 2$ , così si ottiene  $L_g^{n,2} = I_{2n-1}^n \cup R_{g-2n}^2$  quindi il massimo valore per  $n$  deve soddisfare  $g-2n = 1$ . In entrambi i casi quindi  $n$  appartiene all'insieme  $\left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor\right\}$ , dove le parentesi quadrate denotano la parte intera. Fissiamo ora  $n$ , allora  $L_g^{n,m} = I_{2n-1}^n \cup R_{g-2n}^m$  ed il massimo possibile per  $m$  è  $g-2n+1$ . Assumendo quindi  $n, m > 0$ , otteniamo le involuzioni  $L_g^{n,m}$  tali che  $n \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{g}{2} \right\rfloor\right\}$  ed  $m \in \{1, \dots, g-2n+1\}$  per cui  $g+m-1$  è pari.

### 2.5.1 Estensione dei rivestimenti doppi $T_g \rightarrow T_n$ all'interno dei corpi di manici

Sia  $\pi : T_g \rightarrow T_n$  un rivestimento doppio ramificato sull'insieme discreto  $B = \{y_1, \dots, y_d\}$ . Dalla formula di Hurwitz segue che  $d$  deve essere uguale a  $-\chi(T_g) + 2\chi(T_n) = 2g - 4n + 2$ . La mappa  $\pi$  è indotta da un'involuzione  $\varphi : T_g \rightarrow T_g$  che conserva l'orientazione tale che  $F_\varphi$  è un insieme discreto di  $d$  punti e  $T_g/\varphi = T_n$ . In [36] troviamo una caratterizzazione delle azioni di  $T_g$  che si estendono a delle azioni di  $H_g$  per  $g \geq 1$ . Qui è dimostrato che ogni involuzione di  $T_g$  che conserva l'orientazione si estende ad una involuzione di

un opportuno corpo di manici  $H_g$  delimitato da  $T_g$ , quindi sia  $h : H_g \rightarrow H_g$  l'estensione di  $\varphi$  e sia  $p$  il rivestimento ramificato doppio indotto da  $h$ . Allora  $p|_{\partial H_g} = \pi$ , di conseguenza l'insieme di ramificazione di  $p$  deve contenere  $\frac{d}{2} = g - 2n + 1$  archi di ramificazione. Quando  $g = 0$  è ben noto che ogni omeomorfismo  $f : S^2 \rightarrow S^2$  si estende ad un omeomorfismo  $F : B^3 \rightarrow B^3$  e, se  $f$  è un'involuzione che conserva l'orientazione, allora  $F$  è un'involuzione che conserva l'orientazione (si pone  $F(x, t) = (f(x), t)$  nella rappresentazione di  $B^3$  come il cono su  $S^2$ ). Quando  $g = 1$ , si ha  $\pi : T_1 \rightarrow S^2$  e questa mappa è fortemente equivalente al rivestimento doppio standard  $T_1 \rightarrow S^2$  ramificato su 4 punti isolati ([2]). E' comunque possibile provare che ogni involuzione (libera e non) che conserva l'orientazione di  $T_1$  si estende a tutto  $H_1$  anche nel seguente modo. Il mapping class group  $M(T_1)$  di  $T_1$  è isomorfo al gruppo  $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$  delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti interi ([3]), mentre il sottogruppo di  $M(T_1)$  costituito da tutti gli elementi che si estendono ad  $H_1$  è isomorfo al sottogruppo di  $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$  costituito dalle matrici  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  con  $c = 0$  ([42]). Allora è semplice provare che ogni involuzione si rappresenta con una matrice di quest'ultimo tipo.

Vediamo che i possibili modelli che possono estendere  $\pi$  sono:

$$\pi_g^{s, \frac{d}{2}} \quad \forall s = 0, 1, \dots, n.$$

I rivestimenti  $\pi_g^{s, \frac{d}{2}}$  sono le mappe indotte al quoziente dalle involuzioni  $L_g^{s, \frac{d}{2}}$ . Se  $s > n$  allora il genere dello spazio delle orbite di  $L_g^{s, \frac{d}{2}}$  è maggiore di  $n$ , in quanto il suo genere deve essere almeno  $s$ . Quindi  $h$  può essere, a meno d'equivalenze, una delle seguenti involuzioni:

$$L_g^{0, \frac{d}{2}}, L_g^{1, \frac{d}{2}}, \dots, L_g^{n, \frac{d}{2}}.$$

Si deduce immediatamente il noto fatto che per  $n = 0$  esiste un'unica estensione di  $\pi$ : questo era evidente in quanto l'unica involuzione di  $H_g$  con spazio delle orbite omeomorfo a  $B^3$  è l'involuzione iperellittica  $R_g^0$ .

Concentriamo la nostra attenzione sulle involuzioni  $R = L_{g|T_g}^{0, \frac{d}{2}}$ ,  $L = L_{g|T_g}^{1, \frac{d}{2}}$  e denotiamo rispettivamente con  $r$  ed  $l$  i rivestimenti ramificati doppi indotti. E' possibile assumere che  $r$  ed  $l$  abbiano gli stessi insiemi singolari e di ramificazione, in quanto se  $\{P_1, \dots, P_{2g-4n+2}\}$  e  $\{Q_1, \dots, Q_{2g-4n+2}\}$  sono i luoghi singolari e di ramificazione di  $l$  e  $\{x_1, \dots, x_{2g-4n+2}\}, \{y_1, \dots, y_{2g-4n+2}\}$  sono quelli di  $r$ , allora si costruiscono due omeomorfismi, isotopi all'identità,  $K : T_g \rightarrow T_g$ ,  $k : T_n \rightarrow T_n$  tali che  $K(x_i) = P_i$ ,  $k(Q_i) = y_i$  per ogni  $i = 1, \dots, 2g - 4n + 2$  (il fatto che  $K$ ,  $k$  siano isotopi all'identità è necessario, infatti vedremo che l'unicità sarà a meno di equivalenza forte). Basta

considerare dei 2-dischi  $B_i$  tali che  $x_i, P_i \in B_i$  per ogni  $i = 1, \dots, 2g - 4n + 2$  e  $B_i \cap B_j = \emptyset$  per ogni  $i \neq j$ , ora si eseguono dei twist  $t_i$  dentro  $B_i$  di modo che  $t_i(x_i) = P_i$  e  $t_i|_{\partial B_i} = \text{id}$  e successivamente si estendono con l'identità su tutto  $T_g$ . Ogni  $t_i$  è isotopo all'identità dentro  $B_i$  e tale isotopia  $h_t$  fissa, punto per punto, il bordo  $\partial B_i$  per ogni  $t$ , quindi  $h_t$  è estendibile ad una isotopia  $H_t$  fra  $K$  e l'identità. La costruzione di  $k$  è analoga. Il rivestimento doppio  $h \circ q \circ k : T_g \rightarrow T_n$  è fortemente equivalente a  $q$  ed i suoi insiemi singolari e di ramificazione coincidono con quelli di  $r$ .

Il gruppo  $\pi_1(T_g - \{x_1, \dots, x_{2g-4n+2}\}, *)$  ammette la presentazione finita

$$\langle m_i \ (\forall i = 1, \dots, 2g - 4n + 2), \ a_j, \ b_j \ (\forall j = 1, \dots, g) \mid \\ m_1 \dots m_{2g-4n+2} [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$$

dove  $m_i$  sono dei cappi meridiani intorno a  $x_i$  e  $a_j, b_j$  sono i generatori standard di  $\pi_1(T_g)$ .

E' noto che i rivestimento ramificati sono univocamente determinati dai loro rivestimenti ordinari associati ([11]) e che due rivestimenti ordinari  $p_1, p_2 : M \rightarrow N$  fra varietà sono fortemente equivalenti se e solo se  $p_{1*}(\pi_1(M, *)) = p_{2*}(\pi_1(M, *))$  (proposizione 1.37 di [15]).

Dalle rappresentazioni di  $r$  ed  $l$  di figura 2.6 segue che le immagine di tutte le curve  $m_1, \dots, m_{2g-4n+2}, a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  tramite  $r_*$  e  $l_*$  sono omotope (relativamente a  $*$ ), mentre  $r_*([b_1]) = [\tilde{b}_1], l_*([b_1]) = [\tilde{b}_1]^2$ , dove  $\tilde{b}_1$  è una curva di  $T_n$  analoga a  $b_1$  e  $[\tilde{b}_1] \neq [b_1]^2$  in quanto  $\tilde{b}_1$  e  $\tilde{b}_1^2$  non sono omotope, relativamente a  $*$ , dentro  $T_n$ . Così  $r$  ed  $l$  non sono fortemente equivalenti.

In modo analogo si prova che i rivestimenti doppi indotti da  $L_{g|T_g}^{s_1, \frac{d}{2}}, L_{g|T_g}^{s_2, \frac{d}{2}}$  non sono fortemente equivalenti per  $s_1 \neq s_2$ .

Così i rivestimenti ramificati doppi  $H_g \rightarrow H_n$  sono univocamente determinati dalla classe d'equivalenza forte delle loro restrizioni ai bordi, il che ci permette di enunciare la seguente proposizione.

**Proposizione 2.5.5.** *Se  $\pi : T_g = \partial H_g \rightarrow T_n = \partial H_n$  è un rivestimento doppio ramificato su  $d$  punti ( $d > 0$ ). Allora, a meno di equivalenze forti, esiste un unico rivestimento ramificato doppio  $p : H_g \rightarrow H_n$  tale che  $p|_{\partial H_g} = \pi$ . In più, sia  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , se esiste un sottoinsieme  $\{b_{i_j} : j = 1, \dots, k\}$  dei generatori standard di  $\pi_1(T_g, *)$  tale che  $\pi_*([b_{i_j}]) = [\tilde{b}_{i_j}]^2$  ( $\iff \omega_\pi([\tilde{b}_{i_j}]) = (1 \ 2)$ ) per ogni  $j = 1, \dots, k$ , allora  $p$  è il rivestimento doppio indotto da  $L_g^{k, \frac{d}{2}}$ .*

**Dimostrazione.** La prima parte è stata già provata, per quanto riguarda la seconda basta osservare per il rivestimento ramificato doppio  $p$  associato a  $L_g^{k, \frac{d}{2}}$  esistono  $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$  tali che  $p_*([b_{i_j}]) = [\tilde{b}_{i_j}]^2$  per ogni  $j \leq k$  ed ogni  $0 \leq k \leq n$ .  $\square$

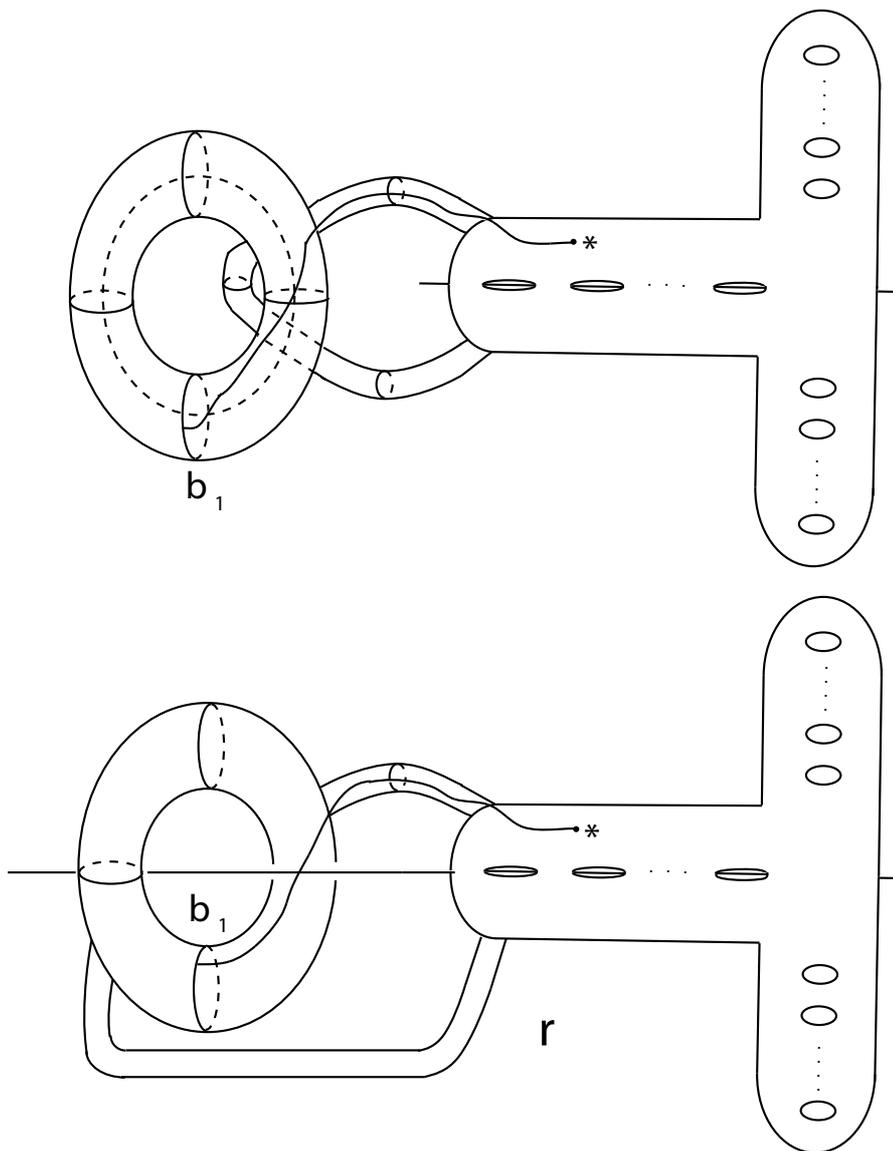


Figura 2.6:  $r_*([b_1])$ ,  $l_*([b_1])$

Sia ora  $\pi : T_g \longrightarrow T_n$  un rivestimento ordinario doppio, allora dalla formula di Hurwitz segue  $\chi(T_g) = 2\chi(T_n)$ , quindi  $g = 2n - 1$ . Così  $g$  è dispari, quindi possiamo prendere lo spazio totale di  $\pi$  uguale a  $T_{2m+1}$  e lo spazio base uguale a  $T_{m+1}$ , cioè  $\pi : T_{2m+1} \longrightarrow T_{m+1}$  con  $m \geq 0$ . Anche in questo caso da [36] segue che  $\pi$  si estende al quoziente di un'azione di  $\mathbb{Z}_2$ , che conserva l'orientazione, su un opportuno corpo di manici  $H_{2m+1}$  il cui bordo è  $T_{2m+1}$ . Quindi esiste un'involuzione  $h : H_{2m+1} \longrightarrow H_{2m+1}$  che conserva l'orientazione tale che  $h|_{\partial H_{2m+1}} = \varphi$  e, di conseguenza, si avrà  $F_h \cap \partial H_{2m+1} = \emptyset$ . Dai teoremi 2.4.1 e 2.5.3 abbiamo che  $h$  può essere, a meno d'equivalenze, l'involuzione libera  $I_{2m+1}$ , che ora ci conviene denotare con  $I_{2m+1}^0$ , oppure l'involuzione  $L_{2m+1}^{k,0}$  che ora torneremo a denotare con  $I_{2m+1}^k$  dove  $k = 1, \dots, m+1$ . Anche in questo caso le restrizioni ai bordi delle loro mappe quozienti sono tutte non fortemente equivalenti fra loro e la motivazione è analoga alla precedente.

Così i rivestimenti doppi  $H_g \longrightarrow H_n$ , le cui restrizioni al bordo sono dei rivestimenti doppi ordinari, sono univocamente determinati dalla classe d'equivalenza forte delle loro restrizioni ai bordi. In altre parole, vale il seguente fatto.

**Proposizione 2.5.6.** *Se  $\pi : T_{2m+1} \longrightarrow T_{m+1}$  è un rivestimento ordinario doppio, allora, a meno di equivalenze forti, esiste un unico rivestimento doppio  $p : H_{2m+1} \longrightarrow H_{m+1}$  tale che  $p|_{\partial H_g} = \pi$ . In più, sia  $k \in \{0, 1, \dots, m+1\}$ , se esiste un sottoinsieme  $\{b_{i_j} : j = 1, \dots, k\}$  dei generatori standard di  $\pi_1(T_g, *)$  tale che  $\pi_*([b_{i_j}]) = [\tilde{b}_{i_j}]^2$  per ogni  $j = 1, \dots, k$ , allora  $p$  è il rivestimento doppio indotto da  $I_{2m+1}^k$ .*



## Capitolo 3

# Rivestimenti ramificati doppi fra 3-varietà

Da questo momento in poi con la dicitura "3-varietà CCO" denoteremo le 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili

### 3.1 Spezzamenti di Heegaard 2-simmetrici

Birman ed Hilden in [6] hanno chiamato 2-simmetrici gli spezzamenti di Heegaard  $H_g \sqcup_{\tau \circ f} H'_g$  tali che:

- (0)  $f : T_g = \partial H_g \longrightarrow T_g = \partial H'_g$  è un omeomorfismo,  $H_g$  e  $H'_g$  sono immersi in  $\mathbb{R}^3$  in modo tale che esiste una traslazione  $\tau$  di  $\mathbb{R}^3$  per cui  $\tau(H_g) = H'_g$ ,
- (1) esiste un'involuzione  $R$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $R \circ f = f \circ R$  con  $R(H_g) = H_g$ ;
- (2)  $H_g/R \cong B^3$ ;
- (3)  $F_R$  è un sistema di archi in posizione standard dentro  $H_g$  (questi archi sono sia banali che propriamente immersi dentro i corpi di manici).

L'involuzione  $R' = \tau \circ R \circ \tau^{-1}$  di  $\mathbb{R}^3$  è l'analoga di  $R$  per  $H'_g$ : osserviamo che  $R$  e  $R'$  sono coniugate da  $\tau$  come mappe di  $\mathbb{R}^3$ , mentre  $R|_{H_g}$  e  $R'|_{H'_g}$  sono coniugate da  $\tau|_{H_g}$  e da  $\tau|_{H'_g}^{-1}$ . Inoltre dalla classificazione delle involuzioni otteniamo che le restrizioni di  $R$  e di  $R'$  ai corpi di manici sono coniugate all'involuzione iperellittica  $R_g^0$ .

La seguente definizione generalizza gli spezzamenti di Heegaard 2-simmetrici nel senso precedente (ed anche gli spezzamenti di Heegaard debolmente 2-simmetrici introdotti da Mulazzani in [30]).

**Definizione 3.1.** Lo spezzamento di Heegaard  $H_g \sqcup_f H_g$  si dice *2-simmetrico* se e solo se le due copie di  $H_g$  sono dotate dell'involuzione  $L_g^{0,m}$  e l'omeomorfismo di spezzamento soddisfa  $f \circ L_{g|T_g}^{0,m} = L_{g|T_g}^{0,m} \circ f$ . L'involuzione su  $H_g \sqcup_f H_g$  indotta da  $L_g^{0,m}$  tramite  $f$  è  $L_g^{0,m} \sqcup_f L_g^{0,m}$ .

Quando si ha uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico con l'involuzione  $L_g^{0,g+1}$ , allora  $H_g \sqcup_f H_g$  è un rivestimento doppio di  $S^3$  ramificato su un link, negli altri casi  $H_g \sqcup_f H_g$  è un rivestimento doppio della 3-varietà CCO  $H_g/L_g^{0,m} \sqcup_{\hat{f}} H_g/L_g^{0,m}$  ramificato su un link, dove  $\hat{f}$  è l'omeomorfismo indotto al quoziente da  $f$ .

*Osservazione 4.* Assumiamo lo spezzamento di Heegaard  $H'_g \sqcup_h H''_g$  tale che

- (1) esistono due involuzioni  $R', R''$  rispettivamente di  $H'_g, H''_g$  tali che  $R'' \circ h = h \circ R'$ ;
- (2)  $F_{R'}$  e  $F_{R''}$  sono due sistemi di archi banali propriamente immersi rispettivamente in  $H'_g$  e  $H''_g$ .

Mostriamo che uno spezzamento del genere è, a meno d'equivalenze, 2-simmetrico. Siccome  $R'$  ed  $R''$  fissano lo stesso numero di archi e non fissano nodi, dal teorema 2.5.3 segue che le involuzioni  $R'$  e  $R''$  sono equivalenti all'involuzione  $L_g^{0,m}$ , dove  $m$  è il numero degli archi fissati da  $R'$  ed  $R''$ . Così esistono gli omeomorfismi  $\varphi : H'_g \rightarrow H_g$  e  $\psi : H''_g \rightarrow H_g$  tali che  $R' = \varphi \circ L_g^{0,m} \circ \varphi^{-1}$  e  $R'' = \psi \circ L_g^{0,m} \circ \psi^{-1}$ . Se ora poniamo  $f = \psi|_{\partial}^{-1} \circ h \circ \varphi|_{\partial}$ , allora  $L_g^{0,m} \circ f = f \circ L_g^{0,m}$ , quindi si costruisce lo spezzamento 2-simmetrico  $H_g \sqcup_f H_g$ . Siccome  $h \circ \varphi|_{\partial} = \psi|_{\partial} \circ h$ , esiste l'omeomorfismo  $\varphi \sqcup_f \psi : H'_g \sqcup_f H''_g \rightarrow H_g \sqcup_f H_g$  che rende i due spezzamenti equivalenti. Inoltre l'involuzione  $R \sqcup_h R'$  di  $H'_g \sqcup_h H''_g$  è equivalente all'involuzione indotta su  $H_g \sqcup_f H_g$  da  $L_g^{0,m}$  tramite  $f$ , infatti

$$(\varphi \sqcup_f \psi) \circ (R \sqcup_h R') \circ (\varphi \sqcup_f \psi)^{-1} = L_g^{0,m} \sqcup_f L_g^{0,m},$$

in quanto  $(\varphi \sqcup_f \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \sqcup_h \psi^{-1}$ .

Il prossimo risultato ci mostra che, a partire dalla classificazione delle involuzioni di un corpo di manici, ogni involuzione che fissa un link di una 3-varietà CCO è equivalente ad una costruita tramite uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico.

**Proposizione 3.1.1.** *Siano  $M$  una 3-varietà CCO ed  $h$  una involuzione di  $M$  il cui insieme dei punti fissi  $F_h$  è un link in  $M$  con  $m$  componenti ( $m > 0$ ). Allora esiste uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico  $H_g \sqcup_f H_g$  di  $M$  tale che  $h$  è coniugata a  $L_g^{0,m} \sqcup_f L_g^{0,m}$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $t$  una triangolazione di  $M$ , siccome  $h$  è PL esiste una suddivisione  $t'$  di  $t$  tale che  $h : t' \rightarrow t$  è lineare (rispetto alle coordinate baricentriche). Questo implica che  $h(t')$  è un'altra suddivisione di  $t$  e  $\sigma$  è un semplice di  $t'$  se e solo se  $h(\sigma)$  è un semplice di  $h(t')$ . Denotiamo con  $t' \cap h(t')$  la decomposizione cellulare di  $M$  che si ottiene sovrapponendo le triangolazioni  $t'$  ed  $h(t')$ , in altre parole  $c$  è una cella di  $t' \cap h(t')$  se e solo se esistono i semplici  $\sigma$  di  $t'$  e  $\tau$  di  $h(t')$  tali che  $c = \sigma \cap \tau$ . Con questa decomposizione cellulare  $h$  è una mappa cellulare. Infatti, sia  $c$  una cella di  $t' \cap h(t')$  per cui esistono i semplici  $\sigma$  di  $t'$  e  $\tau$  di  $h(t')$  tali che  $c = \sigma \cap \tau$ , allora  $h(c) = h(\sigma) \cap h(\tau)$ . Ora  $h(\sigma)$  è un semplice  $\tau'$  di  $h(t')$ , mentre esiste un semplice  $\sigma'$  di  $t'$  tale che  $\tau = h(\sigma')$ , così  $h(\tau) = h^2(\sigma') = \sigma'$ . Quindi  $h(c) = \sigma' \cap \tau'$  è ancora una cella di  $t' \cap h(t')$ . Sia  $T = \beta(t' \cap h(t'))$  la triangolazione che si ottiene prendendo la suddivisione baricentrica di  $t' \cap h(t')$ , allora  $h : T \rightarrow T$  è simpliciale.

Denotando ora con  $M_1$  l'1-scheletro di  $T$ , si ha  $h(M_1) = M_1$  in quanto  $h$  è un omeomorfismo. Allora possiamo scegliere un intorno regolare  $\nu(M_1)$  di  $M_1$  in  $M$  tale che  $h(\nu(M_1)) = \nu(M_1)$ , quindi  $h_1 = h|_{\nu(M_1)}$  è una involuzione di  $\nu(M_1)$ , che è omeomorfo al corpo di manici  $H_k$  per un opportuno  $k \geq 0$ . Inoltre  $F_h$ , essendo l'insieme singolare del rivestimento ramificato indotto da  $h$ , è un 1-sottocomplesso di  $M$  quindi  $F_h \subseteq M_1$  e  $F_h = F_{h_1}$ . La restrizione  $h_2$  di  $h$  a  $M - \text{int } \nu(M_1)$  è un'involuzione libera che conserva l'orientazione di  $M - \text{int } \nu(M_1)$  e  $\nu(M_1) \sqcup_F (M - \text{int } \nu(M_1))$  è uno spezzamento di Heegaard di genere  $k$  per  $M$  con l'omeomorfismo d'attaccamento  $F : \partial\nu(M_1) \rightarrow \partial(M - \text{int } \nu(M_1))$ .

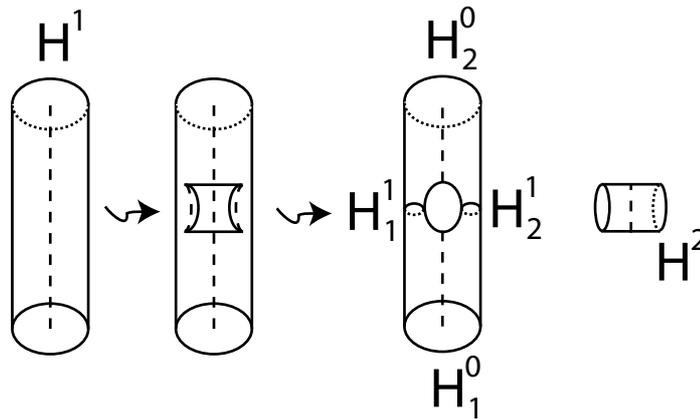


Figura 3.1: Da  $H^1$  a  $H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup H_2^1 \cup H^2$

Fissiamo una componente di  $F_h$ . Sia  $\alpha$  un sottoarco di  $K$  che è incluso in un 1-manico  $H^1$  di  $\nu(M_1)$ . Creiamo un 2-manico all'interno di  $H^1$ , tale

che  $H^1$  diviene  $H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup H_2^1 \cup H^2$  come mostrato in figura 3.1 (qui la linea tratteggiata interna è  $\alpha$ ) di modo che  $H^2$  sia  $h$ -invariante. Operando in questo modo per ogni componente di  $F_h$ , a partire da  $\nu(M_1) \sqcup_F (M - \text{int } \nu(M_1))$  (gli 0-/1-manici di  $\nu(M_1)$  sono rispettivamente gli 0-/1-manici di  $M$  e gli 0-/1-manici di  $M - \text{int } \nu(M_1)$  sono rispettivamente gli 2-/3-manici di  $M$ ) si ottiene una nuova decomposizione a manici di  $M$ . Da questa, a ritroso, si costruisce un nuovo spezzamento di Heegaard  $H'_g \sqcup_l H''_g$  di  $M$  tale che  $h$  induce le involuzioni  $R'$  ed  $R''$  che fissano  $m$  archi su ogni corpo di manici tali che  $R'' \circ l = l \circ R'$ . Dall'osservazione 4 si ottiene la tesi.  $\square$

Siccome avevamo denotato con  $\pi_g^{n,m}$  la mappa quoziente di  $L_g^{0,m}$  e con  $\hat{f}$  la mappa indotta al quoziente da un'omeomorfismo  $f : T_g \rightarrow T_g$  che commuta con  $L_g^{n,m}$ , dalla proposizione 3.1.1 e dalla teorema 1.8.1 segue il seguente corollario.

**Corollario 3.1.2.** *Siano  $M, N$  due 3-varietà CCO e  $p : M \rightarrow N$  un rivestimento doppio ramificato su un link con  $m$  componenti ( $m > 0$ ). Allora esiste uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico  $H_g \sqcup_f H_g$  di  $M$  tale che  $p$  è equivalente a  $\pi_g^{0,m} \sqcup_f \pi_g^{0,m} : H_g \sqcup_f H_g \rightarrow H_g/L_g^{0,m} \sqcup_{\hat{f}} H_g/L_g^{0,m}$ .*

Dal corollario 3.1.2 segue la seguente caratterizzazione: se  $M$  è una 3-varietà CCO, allora  $M$  è un rivestimento doppio di una 3-varietà CCO  $N$  se e solo se  $M$  possiede uno spezzamento di Heegaard  $H_g \sqcup_f H_g$  dove  $f \circ L_g^{0,m} = L_g^{0,m} \circ f$ .

La proposizione 3.1.1 oppure il corollario 3.1.2 ci permettono di enunciare la seguente definizione.

**Definizione 3.2.** Sia  $O$  una 3-varietà CCO che è un rivestimento doppio di un'altra 3-varietà CCO  $O'$  ramificato su un link. Definiamo genere di Heegaard 2-simmetrico di  $O$  il più piccolo naturale  $g = g_s(O)$  per cui  $O$  possiede uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico di genere  $g$ .

E' ovvio che  $g_s(O)$  non è necessariamente realizzato dal rivestimento  $O \rightarrow O'$ , il suo scopo è garantire che  $O$  ammetta almeno uno spezzamento 2-simmetrico.

*Osservazione 5.* Nella dimostrazione della proposizione 3.1.1 abbiamo trovato che esistono due involuzioni  $h_1$  ed  $h_2$  di  $H_g$  tali che  $F_{h_1}$  è composto esclusivamente da nodi,  $F_{h_2} = \emptyset$  e le loro restrizioni ai bordi sono rese equivalenti dall'omeomorfismo di spezzamento  $F$ . Quindi le proposizioni 2.5.5 e 2.5.6 non valgono se si sostituiscono le equivalenze forti con quelle ordinarie.

Un'applicazione del corollario 3.1.2 fornisce una presentazione speciale per il gruppo fondamentale dei rivestimenti doppi di una 3-varietà CCO

ramificati su un link. Prima ricordiamo come si caratterizza il gruppo fondamentale di una 3-varietà quando è noto un suo spezzamento di Heegaard  $H_g \sqcup_f H_g$ .

Siano  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  i cappi che generano  $\pi_1(T_g)$ . Il gruppo fondamentale  $\pi_1(T_g, *)$  possiede la presentazione

$$\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{j=1}^g (a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}) \rangle,$$

inoltre esiste l'inclusione  $i : T_g \hookrightarrow H_g$  il cui omomorfismo indotto sui gruppi fondamentali è  $i_* : \pi_1(T_g, *) \longrightarrow \pi_1(H_g, *)$  tale che  $i_*(a_j) = a_j$ ,  $i_*(b_j) = 1$ , mentre l'omeomorfismo di spezzamento  $f : T_g \longrightarrow T_g$  induce un automorfismo di  $\pi_1(T_g, *)$  con cui definiamo

$$V_j(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g) = f_*^{-1}(a_j), \quad U_j(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g) = f_*^{-1}(b_j)$$

per ogni  $j = 1, \dots, g$ . Siccome  $H_g \sqcup_f H_g \cong M$  dal teorema di Seifert-Van Kampen si deduce

$$\pi_1(M, *) = \langle a_1, \dots, a_g \mid U_j(a_1, \dots, a_g, 1, \dots, 1) \quad j = 1, \dots, g \rangle.$$

Infatti, se  $a'_j, b'_j, i'$  sono le analoghe curve per il secondo corpo di manici, si ottiene che

$$\pi_1(H_g, *) = \langle a_1, \dots, a_g \rangle = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid b_1, \dots, b_g \rangle,$$

$$\pi_1(H'_g, *) = \langle a'_1, \dots, a'_g \rangle = \langle a'_1, \dots, a'_g, b'_1, \dots, b'_g \mid b'_1, \dots, b'_g \rangle.$$

Inoltre,  $H_g \cap H'_g$  è la superficie chiusa orientabile di genere  $g$   $(T_g \sqcup T_g)/f$ , quindi si hanno anche le relazioni  $f_*^{-1}(a_j)(a'_j)^{-1}$ ,  $f_*^{-1}(b_j)(b'_j)^{-1}$ . Ora per  $\pi_1(M, *)$  si ha

$$\begin{aligned} & \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, a'_1, \dots, a'_g, b'_1, \dots, b'_g \\ & \mid b_j, b'_j, f_*^{-1}(a_j)(a'_j)^{-1}, f_*^{-1}(b_j)(b'_j)^{-1} \quad j = 1, \dots, g \rangle = \\ & = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid b_j, f_*^{-1}(b_j) \quad j = 1, \dots, g \rangle = \\ & = \langle a_1, \dots, a_g \mid U_j(a_1, \dots, a_g, 1, \dots, 1) \quad j = 1, \dots, g \rangle. \end{aligned}$$

**Proposizione 3.1.3.** *Siano  $M, N$  due 3-varietà CCO e  $p : M \longrightarrow N$  un rivestimento doppio ramificato su un link  $L$ . Allora:*

- (1)  $\pi_1(M)$  ammette una presentazione con  $m + 2n$  generatori ed  $m + 2n$  relazioni  $\langle a_1, \dots, a_{m+2n} \mid U_1, \dots, U_{m+2n} \rangle$  tale che  $m + 1$  è il numero delle componenti di  $L$  e se in ogni relazione  $U_k$  si sostituisce  $a_j^{\pm 1}$  con  $a_j^{\mp 1}$  per  $j = 1, \dots, m$  e  $a_{m+i}^{\pm 1}$  con  $a_{m+2n+1-i}^{\mp 1}$  per ogni  $i = 1, \dots, 2n$  si ottiene una nuova parola  $U'_k$  che è ancora una relazione;

(2) inoltre se  $N = S^3$ ,  $\pi_1(M)$  ammette una presentazione con  $g$  generatori ed  $g$  relazioni  $\langle a_1, \dots, a_g \mid U_1, \dots, U_g \rangle$  tale che se ogni relazione  $U_j$  viene riscritta nel senso inverso resta ancora una relazione.

**Dimostrazione.** (1) Il rivestimento  $p$  è equivalente ad un rivestimento del tipo  $\pi_g^{0,m+1} \sqcup_f \pi_g^{0,m+1} : H_g \sqcup_f H_g = M \longrightarrow H_g/L_g^{0,m+1} \sqcup_f H_g/L_g^{0,m+1} = N$  indotto dall'involuzione  $\psi = L_g^{0,m+1} \sqcup_f L_g^{0,m+1}$  dove  $m+1$  è il numero delle componenti di  $L$  (corollario 3.1.2).

Se  $n$  è il genere di  $H_g/L_g^{0,m+1}$  si ha  $g = m + 2n$  e possiamo immergere  $H_g$  in  $\mathbb{R}^3$  come mostrato in figura 3.2 dove sono tracciate le curve semplici  $a_1, \dots, a_{m+2n}$  tutte orientate in senso antiorario. Il gruppo fondamentale di  $M$  è quindi  $\pi_1(M, *) = \langle a_1, \dots, a_{m+2n} \mid U_1, \dots, U_{m+2n} \rangle$ , dove  $U_i$  sono delle parole sui generatori.

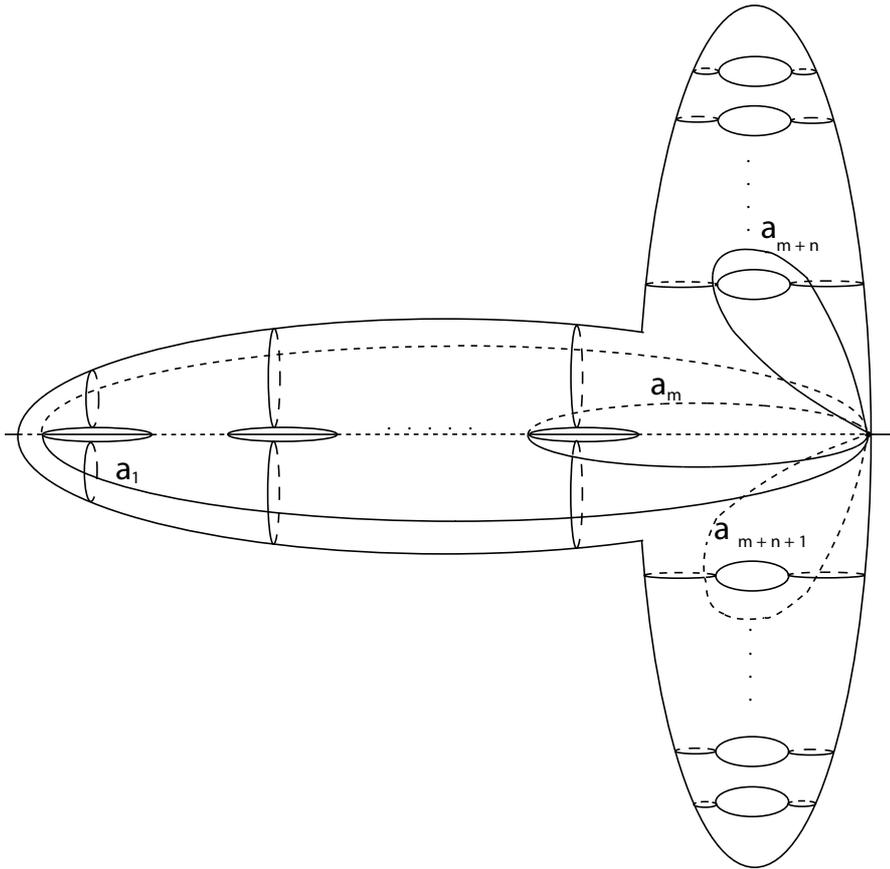


Figura 3.2: Generatori di  $H_1(T_g)$

Quindi  $\psi_*(a_i) = (L_g^{0,m+1})_*(a_i) = a_i^{-1}$  per ogni  $i = 1, \dots, m$ , mentre per gli altri generatori si ha  $\psi_*(a_{m+i}) = (L_g^{0,m+1})_*(a_{m+i}) = a_{m+2n+i-1}^{-1}$  per ogni  $i = 1, \dots, 2n$ . Siccome  $\psi_*$  è un isomorfismo, allora  $\psi_*(U_j) = 1$ , quindi (1) segue dal comportamento di  $\psi_*$  sui generatori.

(2) In questo caso  $p$  è equivalente al rivestimento ramificato doppio  $\pi_g^{0,g+1} \sqcup_f \pi_g^{0,g+1} : H_g \sqcup_f H_g \longrightarrow B \sqcup_f B$  ( $B \cong B^3$  è il quoziente  $H_g/L_g^{0,g+1}$ ), che è indotto dall'involuzione  $\psi = L_g^{0,g+1} \sqcup_f L_g^{0,g+1}$  di  $H_g \sqcup_f H_g \cong M$ . Infatti è sufficiente stabilizzare  $p$  al grado 3 (si aggiunge un nodo banale non annodato all'insieme di ramificazione con monodromia (1 3)) ed operando come descritto nella sezione 0 di [32] s'ottiene che è possibile destabilizzare il rivestimento e dotare  $M$  di uno spezzamento di Heegaard di modo che  $p$  è costruito incollando due involuzioni coniugate a quella iperellittica.

Come nella dimostrazione di (1) otteniamo  $\psi_*(a_j) = (L_g^{0,g+1})_*(a_j) = a_j^{-1}$  per ogni  $j = 1, \dots, g$  e  $\psi_*(U_j) = 1$ . Ora basta prendere  $(\psi_*(U_j))^{-1}$  per ottenere la relazione  $U_j$  letta in senso inverso.  $\square$

### 3.2 Omeomorfismi che commutano con $L_g^{0,m+1}$

In virtù della caratterizzazione dei rivestimenti ramificati doppi fra 3-varietà CCO dedotta dal corollario 3.1.2, è interessante descrivere alcuni fra i possibili omeomorfismi di spezzamento che commutano con le involuzioni di  $H_g$  che fissano degli archi.

Per comodità assumiamo che  $m + 1$  siano gli archi fissati (con  $m \geq 0$ ), e denotiamo  $L_g^{0,m+1}$  con  $L$ . In tal modo, se  $n$  è il genere del corpo di manici  $H_g/L$  si avrà  $g = m + 2n$ . La restrizione di  $L$  a  $T_g = \partial H_g$  sarà indicata ancora con  $L$ , mentre  $\pi_g^{0,m+1} : H_g \longrightarrow H_n$  è il rivestimento doppio ramificato su  $m + 1$  archi banali propriamente immersi in  $H_n$  indotto da  $L$ . La restrizione ai bordi di  $\pi_g^{0,m+1}$  è  $\pi_{g|\partial}^{0,m+1} = \pi : T_g \longrightarrow T_n$  e sarà un rivestimento doppio ramificato sull'insieme di punti isolati  $B_\pi = \{Q_1, \dots, Q_{2m+2}\}$  ottenuti intersecando gli archi di ramificazione di  $\pi_g^{0,m+1}$  con  $T_n$ . Allora se  $F_\partial = \{P_1, \dots, P_{2m+2}\}$  è l'insieme dei punti fissi di  $L|_{T_g}$  ( $F_\partial = F_L \cap T_g$ ), numerato di modo che  $\pi(P_i) = Q_i$  per ogni  $i = 1, \dots, 2m + 2$ .

Denotiamo con  $M(T_g)$  il mapping class group di  $T_g$  e con  $M(T_n, 2m+2)$  il mapping class group puntato di  $T_n$ : questo sarà l'insieme delle classi d'isotopia degli omeomorfismi che conservano l'orientazione e che fissano, non necessariamente punto per punto, l'insieme  $B_\pi$ .

**Definizione 3.3.** Un omeomorfismo  $F : T_g \longrightarrow T_g$  che conserva l'orientazione si dice *L-simmetrico* se e solo se  $L \circ F = F \circ L$ .

Un omeomorfismo che conserva l'orientazione  $f : T_n \longrightarrow T_n$  tale che  $f(B_\pi) = B_\pi$  si dice *sollevabile* se e solo se esiste un omeomorfismo

$F : T_g \longrightarrow T_g$  tale che  $\pi \circ F = f \circ \pi$ .  $F$  verrà chiamato *sollevamento* di  $f$ , mentre  $f$  sarà anche chiamato *proiezione* di  $F$ .

Se  $F$  è  $L$ -simmetrico allora  $F(P_i) \in F_{\partial}$  ed induce un omeomorfismo  $f : T_n \longrightarrow T_n$  tale che  $\pi \circ F = f \circ \pi$ . Di conseguenza, se  $F(P_i) = P_j$ , allora  $f(Q_i) = Q_j$  per ogni  $i, j = 1, \dots, 2m + 2$ . E' chiaro quindi che  $f$  può essere scelto come rappresentante di una classe di  $M(T_{n,2m+2})$  e che  $f$  è sollevabile. Infatti basta porre  $f(y) = [F(x)]$  con  $x \in \pi^{-1}(y)$ : questa definizione è buona perché  $L \circ F = F \circ L$  implica che  $f(y)$  non dipende dalla scelta di  $x$ .

Viceversa, assunto un omeomorfismo sollevabile  $f$ , allora ogni suo sollevamento  $F$  sarà un omeomorfismo  $F$ -simmetrico tale che  $F(P_i) = P_j$  se  $f(Q_i) = Q_j$ , per ogni  $i, j = 1, \dots, 2m + 2$ .

**Definizione 3.4.** Un omeomorfismo  $L$ -simmetrico  $F$  sarà chiamato  *$L$ -isotopo all'identità*  $1_g$  di  $T_g$  se e solo se esiste un'isotopia  $H_t$  di  $T_g$  tale che  $H_0 = 1_g$ ,  $H_1 = F$  e  $H_t$  è  $L$ -simmetrico per ogni  $t$ .

Sia  $S_m^{2n}(T_g)$  l'insieme delle classi d'isotopia degli omeomorfismi  $L$ -simmetrici, cioè  $S_m^{2n}(T_g)$  è uguale a

$$\{F : T_g \longrightarrow T_g \mid F \text{ omeomorfismo, } F \circ L = L \circ F\} / \mathcal{I}(T_g) = \mathcal{S}_m^{2n}(T_g) / \mathcal{I}(T_g),$$

dove  $\mathcal{I}(T_g)$  è l'insieme degli omeomorfismi  $L$ -simmetrici isotopi all'identità.  $\mathcal{S}_m^{2n}(T_g)$  è un gruppo rispetto l'operazione di composizione con l'elemento neutro rappresentato da  $1_g$ , infatti  $(\mathcal{S}_m^{2n}(T_g), \circ)$  è un gruppo con elemento neutro  $1_g$  ed  $\mathcal{I}(T_g)$  è un sottogruppo normale di  $(\mathcal{S}_m^{2n}(T_g), \circ)$ .

**NOTAZIONE.** Se  $H$  è un sottoinsieme del gruppo  $G$ , allora  $\langle H \rangle$  denoterà il sottogruppo di  $G$  generato da  $H$ .

Sarà utile definire anche il gruppo  $\tilde{S}_m^{2n}(T_g) = S_m^{2n}(T_g) / \langle L \rangle$ . Il gruppo quoziente esiste in quanto  $\langle L \rangle = \{1_g, L\}$  e tali elementi commutano con tutti gli elementi di  $S_m^{2n}(T_g)$ , quindi  $\langle L \rangle$  è normale in  $S_m^{2n}(T_g)$ .

**Definizione 3.5.** Un omeomorfismo sollevabile  $f$  si dice  *$L$ -banale* se e solo se esiste un'isotopia  $K_t$  di  $T_{n,2m+2}$  tale che  $K_0 = 1_n$ ,  $K_1 = f$  e  $K_t$  è sollevabile per ogni  $t$ .

Sia  $L(T_{n,2m+2})$  l'insieme delle classi d'isotopia degli omeomorfismi sollevabili del mapping class group puntato  $M(T_{n,2m+2})$ , cioè  $L(T_{n,2m+2})$  è uguale a  $\mathcal{L}(T_{n,2m+2}) / \mathcal{I}(T_{n,2m+2})$  dove

$$\mathcal{L}(T_{n,2m+2}) = \{f : T_n \longrightarrow T_n \mid f \text{ omeomorfismo sollevabile}\}$$

e  $\mathcal{I}(T_{n,2m+2})$  è l'insieme degli omeomorfismi di  $M(T_{n,2m+2})$  isotopi all'identità.  $L(T_{n,2m+2})$  è un gruppo rispetto l'operazione di composizione e

l'elemento neutro è rappresentato da  $1_n$ , infatti  $(\mathcal{L}(T_{n,2m+2}), \circ)$  è un gruppo con elemento neutro  $1_n$  ed  $\mathcal{I}(T_{n,2m+2})$  è un sottogruppo normale di  $(\mathcal{L}(T_{n,2m+2}), \circ)$ .

Ogni elemento di  $L(T_{n,2m+2})$  è anche un elemento di  $M(T_{n,2m+2})$  ed ogni rappresentante dell'identità di  $L(T_{n,2m+2})$  è anche un rappresentante dell'identità di  $M(T_{n,2m+2})$ . Quindi esiste un omomorfismo fra gruppi canonico

$$\phi : L(T_{n,2m+2}) \longrightarrow M(T_{n,2m+2}).$$

In più, ogni elemento di  $S_m^{2n}(T_g)$  è un elemento di  $M(T_g)$  ed ogni rappresentante dell'identità di  $S_m^{2n}(T_g)$  è un rappresentante dell'identità di  $M(T_g)$ , quindi esiste un omomorfismo fra gruppi canonico

$$\varphi : S_m^{2n}(T_g) \longrightarrow M(T_g).$$

*Osservazione 6.* Gli unici omeomorfismi che sollevano l'identità  $1_n$  di  $T_{n,2m+2}$ , tramite  $\pi$ , sono  $1_g$  oppure  $L$  stesso. Infatti  $1_g$  ed  $L$  sono sollevamenti di  $1_n$  tramite  $\pi$  ed essi sono gli unici in quanto, essendo  $\pi$  un rivestimento ramificato doppio,  $1_n$  possiede esattamente due sollevamenti rispetto  $\pi$ .

Da ciò scaturisce immediatamente che se  $f \in L(T_{n,2m+2})$ , allora esistono esattamente due sollevamenti distinti  $F_1, F_2 \in S_m^{2n}(T_g)$  di  $f$  ed inoltre  $F_2 = F_1 \circ L = L \circ F_1$ .

Si definisca l'omomorfismo

$$\psi : S_m^{2n}(T_g) \longrightarrow L(T_{n,2m+2})$$

tale che ad ogni omeomorfismo  $L$ -simmetrico  $F$  associa la sua proiezione  $f$ . Questa funzione è ben definita in quanto esiste un'unica proiezione  $f \in L(T_{n,2m+2})$  per ogni  $F \in S_m^{2n}(T_g)$ . Dall'osservazione 6 sappiamo che il nucleo di  $\psi$  è  $\langle L \rangle = \{1, L\}$ , mentre è evidente che  $\psi$  è suriettivo, quindi esiste un isomorfismo

$$\iota : \tilde{S}_m^{2n}(T_g) \longrightarrow L(T_{n,2m+2})$$

tale che  $\iota(F\langle L \rangle) = \psi(F)$  per ogni  $F \in S_m^{2n}$ , in quanto  $\tilde{S}_m^{2n}(T_g) = S_m^{2n}(T_g)/\langle L \rangle$ .

**Proposizione 3.2.1.** *Siano  $f_1, \dots, f_k$  degli elementi di  $L(T_{n,2m+2})$  ed  $F_i \in S_m^{2n}(T_g)$  sono dei sollevamenti di  $f_i$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Allora  $L(T_{n,2m+2})$  ammette la presentazione finita*

$$\langle f_1, \dots, f_k \mid r_1 = 1_n, \dots, r_s = 1_n \rangle$$

con  $r_l = \prod_{j=1}^{m_l} g_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}$  dove  $g_{l,j} \in G = \{f_1, \dots, f_k\}$  non sono necessariamente distinti e  $\epsilon_{l,j} \in \{-1, 1\}$  per ogni  $j = 1, \dots, m$  se e solo se  $S_m^{2n}(T_g)$  ammette la presentazione finita

$$\langle F_1, \dots, F_k, L \mid R_1 = 1_g, \dots, R_s = 1_g \rangle$$

con  $R_l = \prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}$  oppure  $R_l = \prod_{j=1}^m (G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}) \circ L$  dove  $G_{l,j}$  è il sollevamento di  $g_{l,j}$  in  $\{F_1, \dots, F_k\}$  per ogni  $j = 1, \dots, m$ .

**Dimostrazione.** Assumiamo che  $G$  è un insieme di generatori per  $L(T_{n,2m+2})$ . Siccome  $\tilde{S}_m^{2n}(T_g)$  è isomorfo a  $L(T_{n,2m+2})$ , esso sarà generato dal suo sottoinsieme  $\{F_i\langle L \rangle : i = 1, \dots, k\}$  in quanto  $\iota(F_i\langle L \rangle) = f_i$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Sia ora  $j : S_m^{2n}(T_g) \rightarrow \tilde{S}_m^{2n}(T_g)$  la proiezione canonica sul quoziente tale che  $j(F_i) = F_i\langle L \rangle$ , allora  $j$  è un epimorfismo di gruppi ed il suo nucleo è  $\langle L \rangle$ , quindi  $\{F_1, \dots, F_k, L\}$  genera  $S_m^{2n}(T_g)$ .

Viceversa, assumiamo che  $\{F_1, \dots, F_k, L\}$  è un insieme di generatori per  $S_m^{2n}(T_g)$ . In questo caso  $\{F_i\langle L \rangle : i = 1, \dots, k\}$  è un insieme di generatori per  $\tilde{S}_m^{2n}(T_g)$  e  $\iota(F_i\langle L \rangle) = f_i$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ , quindi  $G$  genera  $L(T_{n,2m+2})$ .

Se ora  $\prod_{j=1}^m g_j^{\epsilon_j} = 1_n$ , allora  $\prod_{j=1}^m g_j^{\epsilon_j}$  è l'identità in  $L(T_{n,2m+2})$ . Siccome  $\psi(\prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}) = \prod_{j=1}^m g_j^{\epsilon_j}$ , allora  $\prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}$  appartiene a  $\ker \psi = \langle L \rangle$ . Quindi  $\prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}$  è uguale a  $1_g$  oppure ad  $L$ , per cui  $\prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}$  oppure  $\prod_{j=1}^m (G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}) \circ L$  è una relazione di  $S_m^{2n}(T_g)$ .

Viceversa, se una fra  $\prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}$  e  $\prod_{j=1}^m (G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}) \circ L$  è una relazione di  $S_m^{2n}(T_g)$ , allora essa si proietta nell'identità di  $L(T_{n,2m+2})$ . Quindi, siccome sia  $\psi(\prod_{j=1}^m G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}})$  che  $\psi(\prod_{j=1}^m (G_{l,j}^{\epsilon_{l,j}}) \circ L)$  sono uguali a  $\prod_{j=1}^m g_j^{\epsilon_j}$ , quest'ultima è una relazione di  $L(T_{n,2m+2})$ .  $\square$

### 3.3 Generatori di alcuni sottogruppi di $S_m^{2n}(T_g)$

Dall'articolo [20] di C. Labruère e L. Paris sappiamo che  $M(T_{2n,2m+2})$  è generato dai braid twist  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}$  lungo gli archi  $a_1, \dots, a_{2m+1}$  tracciati in figura 3.3 e dai twist  $\beta_1, \dots, \beta_{3n}$  lungo le curve semplici chiuse  $b_1, \dots, b_{3n}$  sempre di figura 3.3.

La mappa  $\alpha_i$  si solleva ai twist  $\gamma_i$  lungo la curva semplice chiusa  $c_i$  rappresentata in figura 3.4 per ogni  $i = 1, \dots, 2m + 1$ .

E' evidente che i twist  $\beta_1, \dots, \beta_n$  si sollevano sugli omeomorfismi

$$\Gamma_i = \gamma_{2m+4n+i} \circ \tau_{L(c_{2m+4n+i})}$$

per  $i = 1, \dots, n$  dove  $\tau_{L(c_{2m+4n+i})}$  è il twist lungo  $L(c_{2m+4n+i})$ . Nell'introduzione del mapping class group abbiamo ricordato che se  $a$  è una curva semplice chiusa non separante ed  $f$  un omeomorfismo, allora  $\tau_{f(a)} = f \circ \tau_a \circ f^{-1}$ . Per cui

$$\Gamma_i = \gamma_{2m+4n+i} \circ L \circ \gamma_{2m+4n+i} \circ L.$$

In più, si è anche detto che se  $a_1$  e  $a_2$  sono due curve semplici disgiunte non separanti allora  $\tau_{a_1}$  e  $\tau_{a_2}$  commutano, quindi

$$\Gamma_i = \tau_{L(c_{2m+4n+i})} \circ \gamma_{2m+4n+i} = L \circ \gamma_{2m+4n+i} \circ L \circ \gamma_{2m+4n+i}.$$

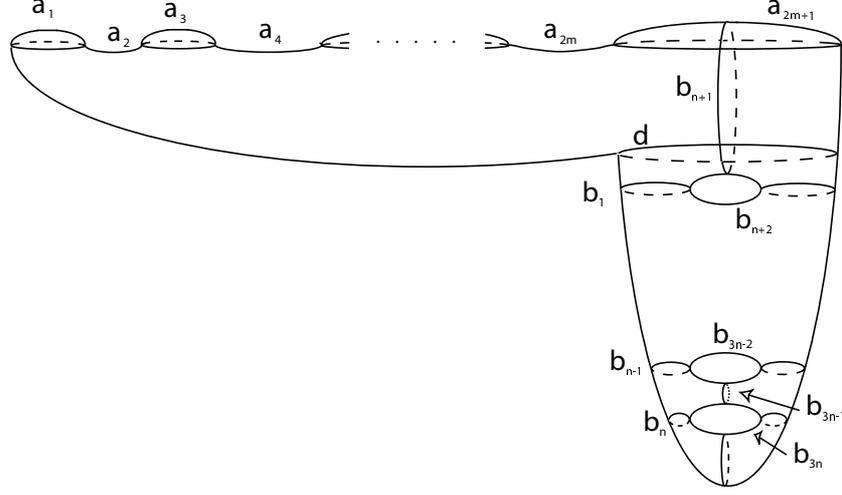


Figura 3.3: Curve su  $T_n$

Gli omeomorfismi  $\Gamma_i$  sono  $L$ -simmetrici perché sono dei sollevamenti di omeomorfismi di  $T_{n,2m+2}$  (dalle descrizioni date di  $\Gamma_i$  è molto semplice verificarlo direttamente).

In modo del tutto analogo abbiamo che i sollevamenti di  $\beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}$  sono gli omeomorfismi  $L$ -simmetrici  $\Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{3n}$  tali che

$$\Gamma_{n+i} = \gamma_{2m+2n+i} \circ \tau_{L(c_{2m+2n+i})} = \tau_{L(c_{2m+2n+i})} \circ \gamma_{2m+2n+i},$$

di modo che

$$\gamma_{2m+2n+i} \circ L \circ \gamma_{2m+2n+i} \circ L = \Gamma_{n+i} = L \circ \gamma_{2m+2n+i} \circ L \circ \gamma_{2m+2n+i}$$

per ogni  $i = 2, \dots, 2n$ .

Resta da considerare  $\beta_{n+1}$ . Tale omeomorfismo fissa tutti i punti di ramificazione ( $\beta_{n+1}(Q_i) = Q_i$  per ogni  $i = 1, \dots, 2m+1$ ). I generatori del gruppo fondamentale  $\pi_1(T_n - \{Q_1, \dots, Q_{2m+2}\}, *)$  sono dei cappi meridiani  $\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{2m+2}$  intorno ai punti di ramificazione di  $\pi$  ed i cappi  $\bar{b}_j$  che si ottengono connettendo le curve semplici chiuse  $b_j$  con  $*$  tramite un arco semplice, per ogni  $j = 1, 2, \dots, n, n+2, n+4, \dots, 3n$ . Così abbiamo  $\omega_\pi([\beta_{n+1}(\bar{b}_{n+2})]) = (12)$ , mentre  $\omega_\pi([\bar{b}_{n+2}]) = 1$ , quindi  $\beta_{n+1}$  non è sollevabile.

Il twist  $\gamma_{2m+2n+1}$  lungo la curva  $c_{2m+2n+1} \subset T_g$  è un omeomorfismo  $L$ -simmetrico. Infatti, a meno di omeomorfismi, esso è l'identità al di fuori di un intorno cilindrico, omeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$ , di  $c_{2m+2n+1}$  in  $T_g$  mentre su tale intorno cilindrico esso è, a meno di omeomorfismi,  $(\theta, t) \mapsto (\theta + 2\pi t, t)$

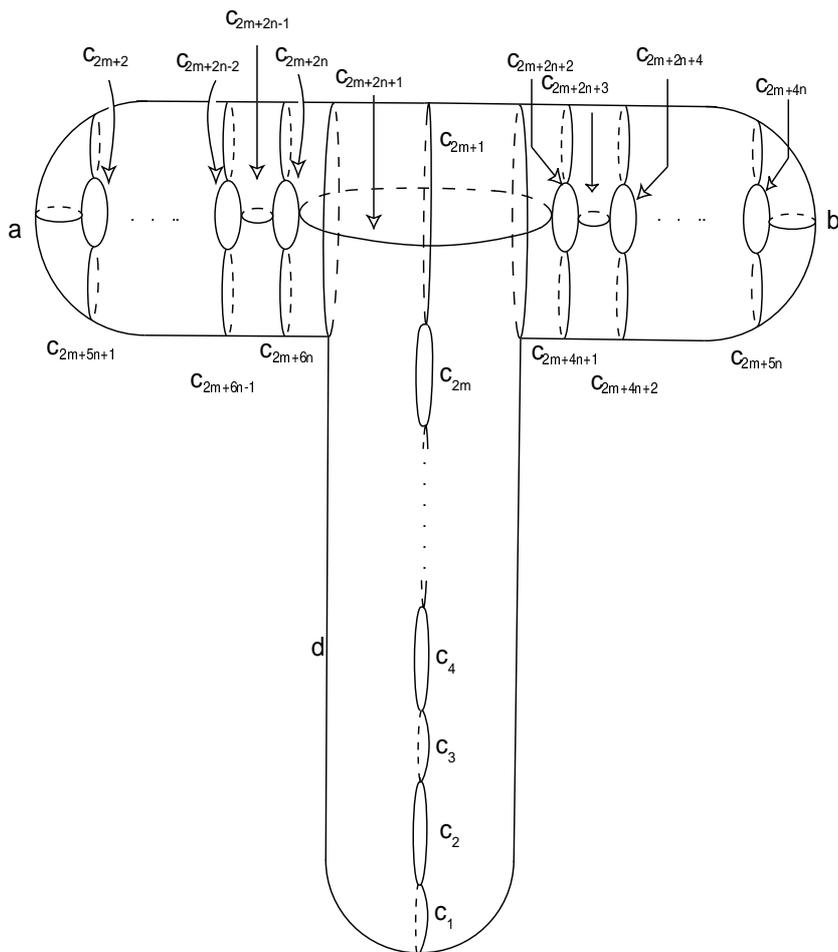


Figura 3.4: Curve su  $T_g$

e la restrizione di  $L$  è, a meno di omeomorfismi,  $(\theta, t) \mapsto (\theta + \pi, t)$ . Il quoziente di  $S^1 \times [0, 1]$  attraverso questa involuzione è il sottospazio  $S$  di  $T_n$  omeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$  e se  $c_{2m+2n+1}$  è identificata con  $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$  allora il suo quoziente sarà la curva  $b_{n+1} \subset S$  di  $T_n$  identificata ancora con  $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$  nella parametrizzazione di  $S$  con  $S^1 \times [0, 1]$ .

Prendendo il rivestimento ramificato  $\pi : T_g \rightarrow T_n$  indotto da  $L$ , allora  $\pi$ , ristretto agli intorni cilindrici di  $c_{2m+2n+1}$  e di  $b_{n+1}$  parametrizzati da  $S^1 \times [0, 1]$ , sarà una mappa del tipo  $S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1]$  tale che ad ogni rotazione di angolo  $\theta$  di  $S^1 \times \{t\}$  incluso nel dominio fa corrispondere una rotazione di angolo  $2\theta$  intorno al corrispondente  $S^1 \times \{t\}$  dell'immagine. Quindi, siccome la twist  $\gamma_{2m+2n+1}$  fissa  $S^1 \times \{0\}$ , ruota  $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$  (identificata con  $c_{2m+2n+1}$ ) di  $\pi$  radianti e ruota  $S^1 \times \{1\}$  di  $2\pi$  radianti, la sua mappa quoziente fissa  $S^1 \times \{0\}$ , ruota  $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$  (identificata con  $b_{n+1}$ ) di  $2\pi$  radianti e ruota  $S^1 \times \{1\}$  di  $4\pi$  radianti. Così la mappa indotta al quoziente da  $\gamma_{2m+2n+1}$  è  $\beta_{n+1}^2$ .

Sia  $G$  l'insieme dei generatori di  $M(T_{n,2m+2})$ , quindi

$$G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+2}, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}\}.$$

Da [20] seguono le seguenti relazioni:

- (i)  $\beta_{n+1}^\epsilon \circ \beta_j^\eta = \beta_j^\eta \circ \beta_{n+1}^\epsilon$  per ogni  $j \neq n+2$  ed ogni  $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ ,
- (ii)  $\beta_{n+1}^\epsilon \circ \alpha_j^\eta = \alpha_j^\eta \circ \beta_{n+1}^\epsilon$  per ogni  $j \neq 2m+1$  ed ogni  $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ ,
- (iii)  $\beta_{n+1} \circ \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1} = \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1} \circ \beta_{n+2}$ .

Le relazioni (i) e (ii) implicano che  $\beta_{n+1}^{\pm 1} \circ \alpha_j \circ \beta_{n+1}^{\mp 1}$  e  $\beta_{n+1}^{\pm 1} \circ \beta_i \circ \beta_{n+1}^{\mp 1}$  sono sollevabili per ogni  $j \neq 2m+1$  ed ogni  $i \neq n+2$  (infatti esso sono rispettivamente uguali ad  $\alpha_j$  e  $\beta_i$ ). Siano così  $f = \beta_{n+1}^{\pm 1}$  e  $g = \alpha_j \circ \beta_{n+1}^{\mp 1}$ , allora abbiamo che  $f$  e  $g$  non sono sollevabili, ma  $f \circ g$  è sollevabile.

Da (iii) segue che  $\beta_{n+1}^{\pm 1} \circ \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1}^{\mp 1}$  non è sollevabile. Infatti

$$\beta_{n+1} \circ \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1}^{-1} = \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1} \circ \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1}^{-2},$$

con  $\beta_{n+2}$  e  $\beta_{n+1}^{-2}$  sollevabili e  $\beta_{n+1}$  non sollevabile. Analogamente si procede per  $\beta_{n+1}^{-1} \circ \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1}$ , di conseguenza anche  $\beta_{n+1}^{\pm 1} \circ \beta_{n+2}^{-1} \circ \beta_{n+1}^{\mp 1}$  non è sollevabile. Siano così  $f = \beta_{n+1}^{\pm 1}$  e  $g = \beta_{n+2} \circ \beta_{n+1}^{\mp 1}$ , allora abbiamo che  $f$  e  $g$  non sono sollevabili ed anche  $f \circ g$  non è sollevabile.

Proviamo infine che  $\beta_{n+1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1}^{-1}$  è sollevabile. Sempre da [20] deduciamo che  $\beta_{n+1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1}^{-1}$  è la braid twist  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}$  lungo l'arco regolare  $\beta_{n+1}(a_{2m+1})$  (l'arco chiaro nella figura 3.5(a)).

In figura 3.6 è tracciata la curva  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}(b_{n+2})$  dentro l'intorno  $U$ , omeomorfo a  $B^2$ , di  $\beta_{n+1}(a_{2m+1})$  dove il braid twist  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}$  è diversa

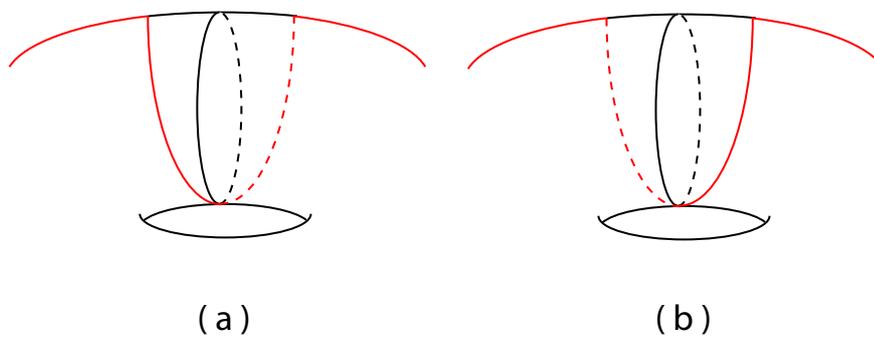


Figura 3.5:  $\beta_{n+1}(a_{2m+1})$  e  $\beta_{n+1}^{-1}(a_{2m+1})$

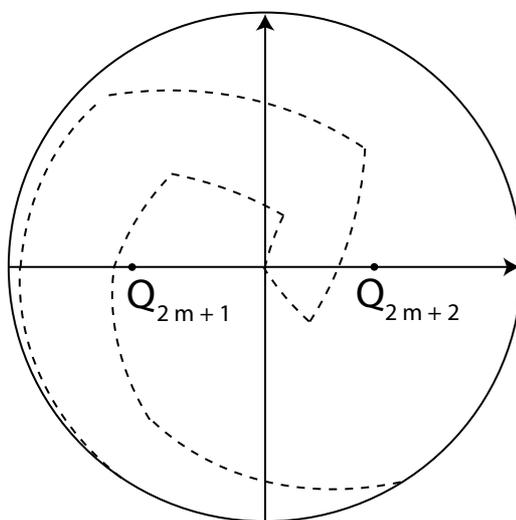


Figura 3.6:  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}(b_{n+2})$

dall'identità. Così  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}(b_{n+2})$  si ottiene unendo questo arco con il sottoarco di  $b_{n+2}$  esterno ad  $U$ , allora  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}(b_{n+2})$  non circonda alcun punto di ramificazione  $Q_i$  e quindi

$$\omega_\pi([\bar{b}_{n+2}]) = 1 = (\omega_\pi \circ \tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})^*})([\bar{b}_{n+2}]).$$

Inoltre,  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}$  interscambia il meridiano  $\bar{m}_{2m+1}$  con  $\bar{m}_{2m+2}$ . Le altre curve  $\bar{b}_j$  e  $\bar{m}_i$  sono lasciate invariate da  $\tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}$ , quindi  $\omega_\pi = \omega_\pi \circ \tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})^*} \circ \tau_{\beta_{n+1}(a_{2m+1})}$  è sollevabile.

Abbiamo mostrato la sollevabilità di  $\beta_{n+1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1}^{-1}$  che implica la sollevabilità anche della sua inversa  $\beta_{n+1} \circ \alpha_{2m+1}^{-1} \circ \beta_{n+1}^{-1}$ . Siccome

$$\beta_{n+1}^{-1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1} = \beta_{n+1}^{-2} \circ \beta_{n+1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1}^{-1} \circ \beta_{n+1}^2,$$

anche  $\beta_{n+1}^{-1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1} = \tau_{\beta_{n+1}^{-1}(a_{2m+1})}$  è sollevabile. L'arco  $\beta_{n+1}^{-1}(a_{2m+1})$  è tracciato in chiaro nella figura 3.5(b) ed è omotopo alla proiezione su  $T_n$  dell'arco  $d_1$  di figura 3.7. Questo implica che il twist  $\delta_1$ , lungo la curva semplice chiusa  $d_1$  di figura 3.7, è un sollevamento di  $\beta_{n+1}^{-1} \circ \alpha_{2m+1} \circ \beta_{n+1}$  che, d'ora in poi, denoteremo con  $\tau_1$ . L'omeomorfismo sollevabile inverso di  $\tau_1$  è  $\beta_{n+1}^{-1} \circ \alpha_{2m+1}^{-1} \circ \beta_{n+1}$ .

**Proposizione 3.3.1.** *Siano  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{S}$  rispettivamente gli insiemi*

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}^2, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}, \tau_1\} \subset L(T_{n,2m+2})$$

e

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \gamma_{2m+2n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{3n}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2n}\} \subset S_m^{2n}(T_g)$$

dove  $d_i$  è il twist lungo la curva  $d_i$  di figura 3.7 per ogni  $i = 0, 1, \dots, 2n$  ed  $F \in S_m^{2n}(T_g)$  un sollevamento di  $f \in L(T_{n,2m+2})$ . Allora  $F \in \langle \mathcal{S} \rangle$  se e solo se  $f \in \langle \mathcal{G} \rangle$ .

**Dimostrazione.** Se  $F \in \langle \mathcal{S} \rangle$ , allora  $F$  è un prodotto di mappe in  $\mathcal{S}$ , allora  $f = \psi(F)$  è un prodotto di mappe in  $\mathcal{G}$ , in quanto le proiezioni di  $\delta_0, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$  sono opportune composizioni di mappe in  $\mathcal{G}$ . Viceversa, se  $f \in \langle \mathcal{G} \rangle$ , allora  $f$  è un prodotto di mappe in  $\mathcal{G}$  quindi  $f\langle L \rangle$  è un prodotto di

$$\gamma_1\langle L \rangle, \dots, \gamma_{2m+1}\langle L \rangle, \Gamma_1\langle L \rangle, \dots, \Gamma_n\langle L \rangle, \gamma_{2m+2n+1}\langle L \rangle, \Gamma_{n+2}\langle L \rangle, \dots, \Gamma_{3n}\langle L \rangle.$$

Ora da [14] sappiamo che  $L$  è generato da  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2n}$ , quindi  $F$  è un prodotto di mappe in  $\mathcal{G}$ .  $\square$

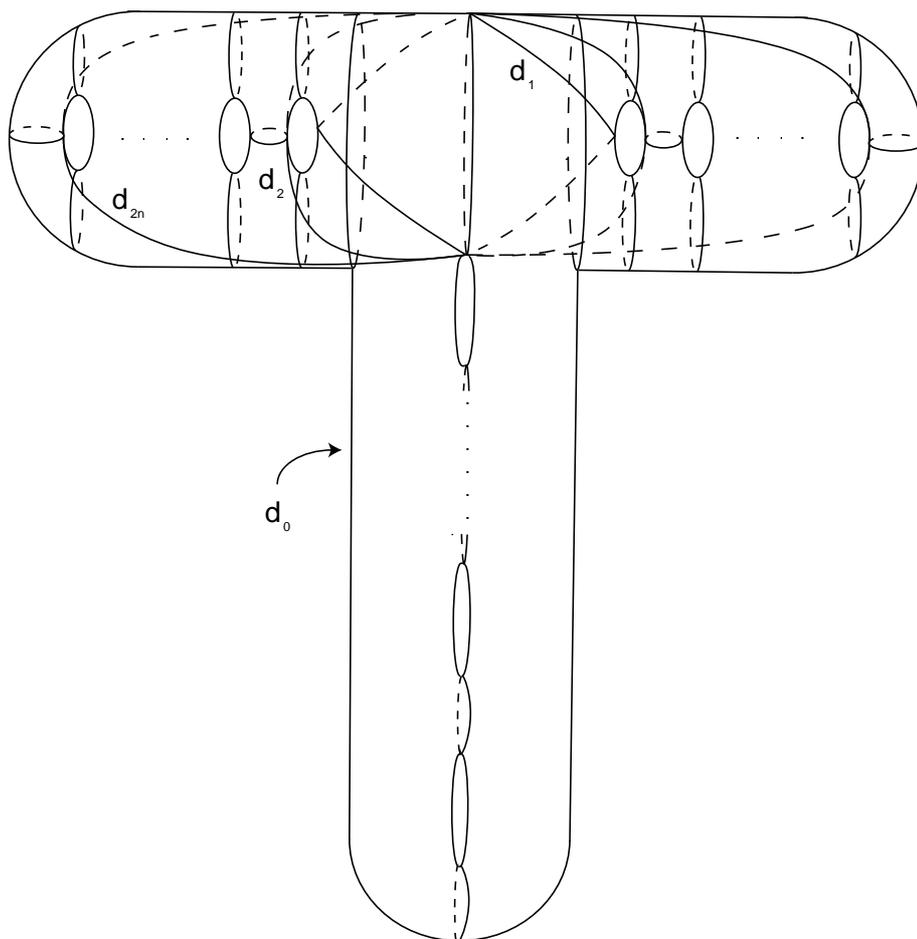


Figura 3.7: Curve  $d_0, \dots, d_{2n}$  su  $T_g$

*Osservazione 7.* Siano  $c$  una curva semplice chiusa di  $T_g$ ,  $\gamma$  il twist su  $c$  ed  $f : T_g \rightarrow T_g$  un omeomorfismo. Siccome il twist  $\tau_{f(c)}$  lungo  $f(c)$  è uguale a  $f \circ \gamma \circ f^{-1}$ , nella proposizione 3.3.1 possiamo sostituire

$$\mathcal{S}' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \gamma_{2m+2n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{3n}, \delta_1\}$$

ad  $\mathcal{S}$  senza alterare l'asserto.

Infatti, per ogni  $i = 2, \dots, 2n$ , a meno di isotopie si ha

$$(\Gamma_{n+i} \circ \dots \circ \Gamma_{n+2})(d_1) = d_i,$$

allora  $\delta_2, \dots, \delta_{2n}$  sono generati da  $\delta_1, \Gamma_{n+1}, \dots, \Gamma_{3n}$ . Se ora  $a$  e  $b$  sono le curve della figura 3.4, allora  $\alpha \circ \beta$  è un'omeomorfismo isotopo a  $\Gamma_n$ . Quindi dall'identità

$$d_0 = (\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{2n} \circ (\alpha \circ \beta))(d_{2n}) = (\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_{2n} \circ (\alpha \circ \beta) \circ \Gamma_{3n} \circ \dots \circ \Gamma_{n+2})(d_1),$$

segue che  $\delta_0$  è generato da  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}, \delta_1, \Gamma_{n+1}, \dots, \Gamma_{3n}$ .

Vediamo un'applicazione di questi risultati ai rivestimenti ramificati doppi fra delle 3-varietà CCO.

Sia  $p : M \rightarrow N$  un rivestimento doppio ramificato sul link  $L$  con  $m+1$  componenti. Dal corollario 3.1.2 sappiamo che  $M$  ammette lo spezzamento  $H_g \sqcup_f H_g$  con  $f \in S_m^{2n}(T_g)$  e denotiamo come al solito  $\hat{f} : H_n \rightarrow H_n$  l'omeomorfismo indotto al quoziente da  $f$ .

Supponiamo che  $\hat{f}$  sia generato dagli omeomorfismi

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \beta_{n+1}^2, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}. \quad (3.1)$$

Osserviamo che un omeomorfismo fra  $f$  e  $f \circ L$  possiede un'espressione generata dagli omeomorfismi

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}, \gamma_{2m+2n+1}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{3n} \quad (3.2)$$

che formano un sottoinsieme proprio di  $\mathcal{S}$ . Infatti gli omeomorfismi (3.1) si sollevano alle mappe (3.2), quindi un sollevamento  $l$  di  $\hat{f}$  (con  $l = f$  oppure  $l = f \circ L$ ) sarà il prodotto degli elementi (3.2) ottenuto sostituendo ogni potenza di una mappa di (3.1) con l'analoga potenza della mappa di (3.2) su cui essa si solleva. Nel caso in cui  $l = f$ , allora si mantiene la descrizione  $H_g \sqcup_f H_g$  di  $M$ , altrimenti si prende  $H_g \sqcup_{f \circ L} H_g$ , che è ancora uno spezzamento di  $M$  in virtù dell'omeomorfismo

$$L \sqcup_f \text{id} : H_g \sqcup_f H_g \rightarrow H_g \sqcup_{f \circ L} H_g.$$

Da questa corrispondenza possiamo sia ottenere  $\hat{f}$  a partire da  $f$ , sostituendo ogni potenza di ogni generatore di  $f$  con l'analoga potenza della proiezione

di tale generatore, che ottenere  $f$  a partire da  $\hat{f}$ , sostituendo ogni potenza di ogni generatore di  $\hat{f}$  con l'analogha potenza del suo sollevamento in (3.2).

I braid twist  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}$  descrivono il link di ramificazione  $L_p$  di  $p$ , anche se questa rappresentazione non è completa, infatti è evidente che l'immersione di  $L_p$  in  $N$  può dipendere anche dagli altri generatori di  $\hat{f}$ .

## Capitolo 4

# Rivestimenti ramificati doppi iterati di $S^3$

Anche in questo capitolo per le 3-varietà chiuse, connesse ed orientabili useremo la dicitura 3-varietà CCO.

### 4.1 Definizioni preliminari

Dedichiamo questa sezione alle definizioni delle varie tipologie di rivestimenti doppi ramificati iterati che prenderemo in considerazione.

**Definizione 4.1.** Siano  $M$  ed  $N$  due 3-varietà CCO. Diremo che la varietà  $M$  è un  $m$ -iterazione di rivestimenti ramificati doppi su  $N$  (o più semplicemente  $m$ -iterazione su  $N$ ) se e solo se  $m$  è il più piccolo numero naturale per cui esiste una successione finita di rivestimenti doppi

$$p_1 : M \longrightarrow M_1, \dots, p_j : M_{j-1} \longrightarrow M_j, \dots, p_m : M_{m-1} \longrightarrow N,$$

ognuno ramificato su di un link, tali che  $M_1, \dots, M_{m-1}$  sono 3-varietà CCO. Le  $m$ -iterazioni su  $S^3$  saranno chiamate semplicemente  $m$ -iterazioni.

E' evidente che una 1-iterazione è un rivestimento doppio di  $S^3$  ramificato su un link, quindi possiede un'involuzione che conserva l'orientazione con spazio delle orbite omeomorfo ad  $S^3$ , quindi una 1-iterazione è anche nota in letteratura con il nome di 3-varietà iperellittica.

**NOTAZIONE.** Per semplificare l'esposizione definiamo l'insieme  $\mathcal{C}_m$  come l'insieme delle 3-varietà CCO che sono  $k$ -iterazioni per ogni  $1 \leq k \leq m$ ; chiaramente

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3 \subset \dots \subset \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1} \subset \dots$$

*Esempio 1.* Il toro tridimensionale  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$  è una 2-iterazione. Infatti ammette l'involuzione  $\psi : T^3 \longrightarrow T^3$  definita tramite la formula

$$\psi(t, \theta, s) = (\pi - t, -\theta, s)$$

dove  $t, \theta, s \in [0, 2\pi]$  ed  $S^1$  è identificato con  $[0, 2\pi]_{/0 \sim 2\pi}$ . Lo spazio delle orbite  $T^3/\psi$  è omeomorfo a  $(T^2/\varphi) \times S^1$  dove  $\varphi(t, \theta) = (\pi - t, -\theta)$  è un'involuzione di  $T^2$  con i punti fissi  $\{(\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{3}{2}\pi, 0), (\frac{3}{2}\pi, \pi)\}$  e  $\psi = \varphi \times id_{S^1}$ . Infatti se denotiamo con  $[(t, \theta, s)]$  i punti di  $T^3/\psi$  e con  $[(t, \theta)]$  quelli di  $T^2/\varphi$  otteniamo

$$[(t, \theta, s)] = [(t', \theta', s')] \Leftrightarrow [(t, \theta)] = [(t', \theta')] \text{ ed } s = s'.$$

Ora  $T^2/\varphi \cong S^2$ , così  $T^3$  è un rivestimento ramificato doppio di  $S^2 \times S^1$  che, a sua volta, è un rivestimento ramificato doppio di  $S^3$ . D'altra parte  $T^3 \notin \mathcal{C}_1$  ([9]).

In modo analogo si prova che  $T_g \times S^1$  è una 2-iterazione, in quanto  $T_g \times S^1$  è un rivestimento ramificato doppio di  $S^2 \times S^1$ , e  $T_g \times S^1 \notin \mathcal{C}_1$  ([9]).

In letteratura sono ben note due caratterizzazioni dei rivestimento doppi di  $S^3$  ramificati su dei link, cioè gli elementi di  $\mathcal{C}_1$ .

**Teorema 4.1.1 ([5]).** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO.  $M \in \mathcal{C}_1$  se e solo se esiste uno spezzamento di Heegaard  $H_n \sqcup_{\tau \circ f} H'_n$  di  $M$  con  $f$  generato dalle twist lungo le curve  $a_1, \dots, a_n, b_1, b_n, c_1, \dots, c_{n-1}$  di figura 4.10.*

**Teorema 4.1.2 ([27]).** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO.  $M \in \mathcal{C}_1$  se e solo se  $M$  si ottiene tramite una chirurgia razionale di  $S^3$  su un link fortemente invertibile.*

E' semplice mostrare che una condizione sufficiente affinché una 3-varietà CCO  $M$  sia una  $k$ -iterazione sulla 3-varietà CCO  $N$  è che essa ammetta l'azione del gruppo  $G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2}_n$ , dove ogni fattore è generato da

un'involuzione  $\varphi_i$  che fissa un link di  $M$ , tale che  $M/G \cong N$  e  $n \geq k$ . Infatti, a causa della commutatività, sul quoziente  $M_1 = M/\varphi_1$  restano definite le involuzioni  $\varphi_i^1 = \varphi_i/\varphi_1$  per ogni  $i = 2, \dots, k$  che generano  $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2}_{k-1}$  e

così via. Inoltre, sempre a causa della commutatività di  $G$ , il quoziente di  $M$  per  $G$  è uguale al quoziente di  $M_{n-1}/\varphi_n^{n-1}$ .

In modo analogo se  $M$  ammette un'azione di  $\mathbb{Z}_{2^n}$  generata dalla mappa  $\rho$  tale che l'insieme dei punti fissi  $F$  di  $\rho$  ha dimensione uno e  $M/\mathbb{Z}_{2^n} \cong N$ , allora  $M$  è una  $k$ -iterazione su  $N$  con  $k \leq n$ . Ancora una volta è la commutatività di  $G$  che ci permette di quozientare per l'involuzione  $\psi = \rho^{2^{n-1}}$  ottenendo la 3-varietà  $M_1 = M/\psi$  con l'azione del gruppo  $\mathbb{Z}_{2^{n-1}}$  generato

dall'omeomorfismo di  $M_1$  definito da  $\rho_1([x]) = [\rho(x)]$  che ha periodo  $2^{n-1}$  e, continuando per induzione, si giunge alla 3-varietà CCO  $M_n = M_{n-1}/\rho_{n-1}$ . Ancora dalla commutatività di  $G$  segue  $N = M/G \cong M_n$ .

Possiamo unificare le precedenti condizioni nella seguente proposizione, che è una condizione sufficiente per essere una  $k$ -iterazione con  $k$  opportuno.

**Proposizione 4.1.3.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se  $M$  possiede un'azione di  $\mathbb{Z}_{2^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{2^{n_k}}$  che fissa una link  $F$  ed il cui spazio quoziente è  $N$ , allora  $M$  è una  $k$ -iterazione su  $N$  con  $k \leq n_1 + \dots + n_k$ .*

Esiste anche una semplice condizione necessaria affinché una 3-varietà CCO sia una  $k$ -iterazione.

**Proposizione 4.1.4.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se  $M$  è una  $m$ -iterazione allora è un rivestimento ramificato di grado  $2^m$  su  $S^3$ .*

**Dimostrazione.** Se  $m = 1$  la tesi è ovvia, quindi assumiamola vera per  $m - 1$ . Per definizione di  $m$ -iterazione esiste una successione finita di rivestimenti doppi

$$p_1 : M \longrightarrow M_1, \dots, p_j : M_{j-1} \longrightarrow M_j, \dots, p_m : M_{m-1} \longrightarrow N,$$

ognuno ramificato su di un link. Ora  $M_1$  è una  $(m - 1)$ -iterazione, infatti se fosse una  $i$ -iterazione con  $i < m - 1$  allora  $M$  sarebbe una  $j$ -iterazione con  $j < m$ , ma questo è assurdo. Così, per ipotesi induttiva, esiste un rivestimento ramificato  $q : M_1 \longrightarrow S^3$  di grado  $2^{m-1}$  che, insieme al rivestimento ramificato doppio  $p_1 : M \longrightarrow M_1$ , definisce un rivestimento ramificato  $M \longrightarrow S^3$  di grado  $2^m$ .  $\square$ .

Se una 3-varietà CCO appartiene a  $\mathcal{C}_k$  allora è un rivestimento ramificato doppio di una 3-varietà CCO  $N$ , quindi se  $M \in \mathcal{C}_k$  allora esiste un'azione effettiva di  $\mathbb{Z}_2$  su  $M$ . In [35] è dimostrato che esistono 3-varietà CCO che non possiedono azioni effettive di gruppi finiti, quindi tali spazi non possono appartenere a  $\bigcup_{k>0} \mathcal{C}_k$  e per questo motivo introduciamo una nozione simile ma più debole (come vedremo in seguito).

**Definizione 4.2.** Sia  $M$  una 3-varietà CCO.  $M$  è una 1-iterazione debole se esistono una 3-varietà CCO  $M_1$  e due rivestimenti doppi  $p : M_1 \longrightarrow M$  e  $q : M_1 \longrightarrow S^3$  ramificati su dei link:

$$M \xleftarrow{p} M_1 \xrightarrow{q} S^3.$$

$M$  è una  $k$ -iterazione debole (con  $k > 1$ ) se  $k$  è il più piccolo intero per cui esistono due 3-varietà CCO  $M_k, N$  ed i rivestimenti doppi  $p : M_k \longrightarrow M$  e  $q : M_k \longrightarrow N$  ramificati su dei link tali che  $N$  è una  $(k - 1)$ -iterazione debole e:

$$M \xleftarrow{p} M_k \xrightarrow{q} N.$$

Ad esempio, se  $M$  è una 2-iterazione debole, allora esistono le 3-varietà CCO  $M_1, M_2, N$  e quattro rivestimenti doppi  $p_1 : M_1 \rightarrow N$ ,  $q_1 : M_1 \rightarrow S^3$ ,  $p_2 : M_2 \rightarrow M$ ,  $q_2 : M_2 \rightarrow N$  ramificati su dei link:

$$M \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N \xleftarrow{p_1} M_1 \xrightarrow{q_1} S^3.$$

In generale un diagramma per una  $k$ -iterazione debole è il seguente:

$$M \xleftarrow{p_k} M_k \xrightarrow{q_k} N_{k-1} \xleftarrow{p_{k-1}} M_{k-1} \xrightarrow{q_{k-1}} N_{k-2} \dots N_2 \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N_1 \xleftarrow{p_1} M_1 \xrightarrow{q_1} S^3.$$

E' ovvio che  $S^3$  è una 1-iterazione debole.

**Definizione 4.3.** Sia  $M$  una 3-varietà CCO.  $M$  si dice  $(k, h)$ -iterazione se e solo se esiste una 3-varietà CCO  $P$  tale che  $P$  è sia una  $k$ -iterazione su  $M$  che una  $h$ -iterazione con  $k + h$  minimo. Quindi esiste un diagramma

$$M \leftarrow M_{k-1} \leftarrow \dots \leftarrow M_2 \leftarrow M_1 \leftarrow P \rightarrow N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow \dots \rightarrow N_{h-1} \rightarrow S^3$$

dove tutte le mappe sono dei rivestimenti doppi ramificati su un link e tutti gli spazi sono delle 3-varietà CCO.

I concetti di 1-iterazione debole e di (1,1)-iterazione sono equivalenti.

## 4.2 Correlazioni fra i rivestimenti ramificati doppi iterati di $S^3$

In questa sezione proveremo che sussistono le seguenti implicazioni:

- se  $M$  è una  $k$ -iterazione allora  $M$  è una  $h$ -iterazione debole con  $h \leq k$ ;
- se  $M$  è una  $m$ -iterazione debole allora  $M$  è una  $(k, h)$ -iterazione con  $k, h \leq m$ .

**Lemma 4.2.1.** *Siano  $M$  ed  $N$  due 3-varietà CCO,  $p : M \rightarrow N$  un rivestimento doppio ramificato sul link  $L_p$  ed  $L$  un link in  $N$ . Allora esiste un rivestimento doppio  $q : M \rightarrow N$  ramificato sul link  $L_q$  che è fortemente equivalente a  $p$  e  $L_q \cap L = \emptyset$ .*

**Dimostrazione.** Con delle isotopie trasformiamo  $L_p$  in un link  $L_q$  trasversale ad  $L$  quindi, siccome  $\dim L + \dim L_q = 1 + 1 < 3 = \dim N$ ,  $L_q$  è disgiunto da  $L$ . Siccome  $L_p$  ed  $L_q$  sono isotopi dentro la 3-varietà CCO  $N$ , allora esiste un omeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  isotopo all'identità tale che  $h(L_p) = L_q$ . Poniamo  $q = h \circ p : M \rightarrow N$ , allora  $q$  è un rivestimento doppio ramificato su  $L_q$  e gli insiemi singolari di  $p$  e  $q$  sono identici. Inoltre da

$q \circ \text{id}_M = q = h \circ p$  si ottiene che  $h$  è sollevabile, quindi  $p$  e  $q$  sono fortemente equivalenti.  $\square$

Per mostrare le precedenti equivalenze abbiamo bisogno di introdurre i pullback di rivestimenti ramificati, la cui esistenza è garantita dal seguente lemma.

**Lemma 4.2.2 (Lemma 3 di [33]).** *Siano  $P, Q, N$  una terna di 3-varietà CCO e  $p : P \rightarrow N, q : Q \rightarrow N$  dei rivestimenti ramificati di grado rispettivamente  $d(p)$  e  $d(q)$ . Se i link di ramificazione soddisfano  $L_p \cap L_q = \emptyset$ , allora esiste una 3-varietà CCO  $M$  e dei rivestimenti ramificati  $p' : M \rightarrow P, q' : M \rightarrow Q$  tali che:*

$$(i) \quad d(p') = d(q), \quad d(q') = d(p);$$

$$(ii) \quad L_{p'} = p^{-1}(L_q), \quad L_{q'} = q^{-1}(L_p);$$

(iii)  $\omega_{p'} = \omega_q \circ p_*$ ,  $\omega_{q'} = \omega_p \circ q_*$  dove  $p_*, q_*$  sono gli omomorfismi indotti sui gruppi fondamentali dalle restrizioni ovvie di  $p, q$  e  $\omega_p, \omega_q, \omega_{p'}, \omega_{q'}$  sono le rispettive monodromie di  $p, q, p', q'$ .

**Proposizione 4.2.3.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se  $M$  è una  $k$ -iterazione allora  $M$  è una  $h$ -iterazione debole con  $h \leq k$ .*

**Dimostrazione.** Proviamo la tesi per induzione su  $k$ . Se  $k = 1$ , allora esiste un rivestimento doppio  $p : M \rightarrow S^3$  ramificato sul link  $L \subset S^3$ . Anche  $S^3$  è un rivestimento doppio di  $S^3$  ramificato sul nodo banale  $K$  e, per il lemma 4.2.1, possiamo assumere, a meno equivalenze forti,  $L \cap K = \emptyset$ . Allora esiste un rivestimento doppio  $q : S^3 \rightarrow S^3$  ramificato su  $K$  con cui costruire il diagramma

$$M \xrightarrow{p} S^3 \xleftarrow{q} S^3$$

tale che  $p, q$  soddisfano le ipotesi del lemma 4.2.2, quindi esiste una 3-varietà CCO  $M_1$  ed i rivestimenti doppi  $p_1 : M_1 \rightarrow M, q_1 : M_1 \rightarrow S^3$  ramificati su dei link con cui si costruisce il diagramma

$$M \xleftarrow{p_1} M_1 \xrightarrow{q_1} S^3,$$

allora  $M$  è una 1-iterazione debole.

Assumiamo la tesi vera per  $k - 1$ . Se  $M$  è una  $k$ -iterazione, allora esiste un rivestimento doppio  $\rho : M \rightarrow N$  ramificato su un link tale che  $N$  è una  $(k - 1)$ -iterazione. Per ipotesi induttiva  $N$  è una  $(h' - 1)$ -iterazione debole con  $h' \leq k$ , quindi esistono le 3-varietà CCO  $N_1, \dots, N_{h'-1}$  e  $N'_1, \dots, N'_{h'-2}$  ed i rivestimenti doppi ramificati su dei link del seguente diagramma:

$$M \xrightarrow{\rho_{h'}} N \xleftarrow{\pi_{h'-1}} N_{h'-1} \xrightarrow{\rho_{h'-1}} N'_{h'-2} \xleftarrow{\pi_{h'-2}} N_{h'-2} \dots N_2 \xrightarrow{\rho_2} N'_1 \xleftarrow{\pi_1} N_1 \xrightarrow{\rho_1} S^3 \xleftarrow{\pi_0} S^3,$$

dove  $\rho_{h'}$  è il precedente rivestimento  $\rho$  e  $\pi_0$  è il rivestimento doppio standard  $S^3 \rightarrow S^3$  ramificato sul nodo banale.

Applicando i lemmi 4.2.1 e 4.2.2 ai rivestimenti  $\rho_{h'}$  e  $\pi_{h'-1}$  si ottiene che esiste una 3-varietà CCO  $M_{h'}$  e due rivestimenti ramificati doppi  $p_{h'} : M_{h'} \rightarrow M$  e  $q_{h'} : M_{h'} \rightarrow N_{h'-1}$ . Per ogni  $i = h'-1, \dots, 2$ , sempre dai lemmi 4.2.1 e 4.2.2, a partire dai rivestimenti  $\rho_i$  e  $\pi_{i-1}$  segue l'esistenza di una 3-varietà CCO  $M_i$  e di due rivestimenti ramificati doppi  $p_i : M_i \rightarrow N_i$  e  $q_i : M_i \rightarrow N_{i-1}$ . Analogamente con  $\rho_1$  e  $\pi_0$  si costruiscono la 3-varietà CCO  $M_1$  ed i rivestimenti ramificati doppi  $p_1 : M_1 \rightarrow N_1$  e  $q_1 : M_1 \rightarrow S^3$ . Possiamo così scrivere il diagramma

$$M \xleftarrow{p_{h'}} M_{h'} \xrightarrow{q_{h'}} N_{h'-1} \xleftarrow{p_{h'-1}} M_{h'-1} \xrightarrow{q_{h'-1}} N_{h'-2} \dots N_2 \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N_1 \xleftarrow{p_1} M_1 \xrightarrow{q_1} S^3.$$

Quindi esiste  $h \leq k$  tale che  $M$  è una  $h$ -iterazione debole.  $\square$

**Corollario 4.2.4.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se esistono le varietà CCO  $M_1, \dots, M_n, N_1, \dots, N_{n-1}$  ed  $\bar{N}$  tali che*

$$M \xleftarrow{p_n} M_n \xrightarrow{q_n} N_{n-1} \xleftarrow{p_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{q_{n-1}} N_{n-2} \dots N_2 \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N_1 \xleftarrow{p_1} M_1 \xrightarrow{q_1} \bar{N}$$

dove tutte le mappe sono rivestimenti doppi ramificati su dei link ed  $\bar{N}$  è una  $k$ -iterazione, allora  $M$  è una  $h$ -iterazione debole con  $h \leq k + n$ .

**Dimostrazione.** Basta scrivere il diagramma dell'enunciato e poi il diagramma di  $\bar{N}$  come  $n$ -iterazione debole.  $\square$

**Corollario 4.2.5.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se esistono le varietà CCO  $M_1, \dots, M_n, N_1, \dots, N_{n-1}$  ed  $\bar{N}$  tali che*

$$M \xleftarrow{p_n} M_n \xrightarrow{q_n} N_{n-1} \xleftarrow{p_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{q_{n-1}} N_{n-2} \dots N_2 \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N_1 \xleftarrow{p_1} \bar{N}$$

dove tutte le mappe sono rivestimenti doppi ramificati su dei link ed  $\bar{N}$  è una  $k$ -iterazione, allora  $M$  è una  $h$ -iterazione debole con  $h \leq k + n - 1$ .

**Dimostrazione.** Esiste un rivestimento doppio ramificato  $q_1 : \bar{N} \rightarrow \bar{N}'$  con  $\bar{N}'$   $(k-1)$ -iterazione, quindi la tesi segue dal diagramma

$$M \xleftarrow{p_n} M_n \xrightarrow{q_n} N_{n-1} \xleftarrow{p_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{q_{n-1}} N_{n-2} \dots N_2 \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N_1 \xleftarrow{p_1} \bar{N} \xrightarrow{q_1} \bar{N}'$$

e dal corollario 4.2.4.  $\square$

**Proposizione 4.2.6.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se  $M$  è una  $m$ -iterazione debole, allora  $M$  è una  $(k, h)$ -iterazione per  $k, h$  opportuni.*

**Dimostrazione.** Se  $m = 1$  allora abbiamo già detto che i due concetti sono equivalenti.

Assumiamo la tesi vera per  $m - 1$  ed  $M$  sia una  $m$ -iterazione debole, allora esiste il diagramma

$$M \xleftarrow{p_m} M_m \xrightarrow{q_m} N_{m-1} \xleftarrow{p_{m-1}} M_{m-1} \xrightarrow{q_{m-1}} N_{m-2} \dots N_2 \xleftarrow{p_2} M_2 \xrightarrow{q_2} N_1 \xleftarrow{p_1} M_1 \xrightarrow{q_1} S^3$$

dove tutte le mappe sono dei rivestimenti doppi ramificati su un link e tutti gli spazi sono delle 3-varietà CCO.

La 3-varietà  $N_{m-1}$  è una  $(m - 1)$ -iterazione debole, allora per ipotesi induttiva è una  $(k', h')$ -iterazione, quindi esiste il diagramma

$$N_{m-1} \leftarrow W_{k'-1} \leftarrow \dots \leftarrow W_2 \leftarrow W_1 \leftarrow P \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{h'-1} \rightarrow S^3$$

dove tutte le mappe sono dei rivestimenti doppi ramificati su un link e tutti gli spazi sono delle 3-varietà CCO. Sappiamo anche che esiste il rivestimento ramificato doppio  $M_m \rightarrow N_{m-1}$  che, insieme a  $W_{k'-1} \rightarrow N_{m-1}$ , tramite i lemmi 4.2.1 e 4.2.2, garantiscono l'esistenza di una 3-varietà CCO  $P_{k'}$  e dei rivestimenti doppi  $P_{k'} \rightarrow M_m$ ,  $P_{k'} \rightarrow W_{k'-1}$  ramificati su dei link. Analogamente a partire da  $P_{k'} \rightarrow W_{k'-1}$  e  $W_{k'-2} \rightarrow W_{k'-1}$  si costruiscono una 3-varietà CCO  $P_{k'-1}$  e dei rivestimenti doppi  $P_{k'-1} \rightarrow P_{k'}$ ,  $P_{k'-1} \rightarrow W_{k'-2}$  ramificati su dei link. Continuando induttivamente si giunge alla costruzione di una 3-varietà CCO  $P_1$  e dei rivestimenti doppi  $P_1 \rightarrow P_2$ ,  $P_1 \rightarrow P$  ramificati su dei link. Abbiamo quindi definito il diagramma

$$M \leftarrow M_m \leftarrow P_{k'} \leftarrow \dots \leftarrow P_2 \leftarrow P_1 \rightarrow P \rightarrow Q_1 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{k-2} \rightarrow S^3,$$

allora esistono  $k, h$  tali che  $M$  è una  $(k, h)$ -iterazione.  $\square$

**Corollario 4.2.7.** *Ogni  $m$ -iterazione è una  $(k, h)$ -iterazione per  $k, h$  opportuni.*

**Dimostrazione.** Immediata dalla proposizioni 4.2.3 e 4.2.6.  $\square$

### 4.3 Iterazioni e chirurgia

Abbiamo già detto che in [27] sono caratterizzati gli elementi di  $\mathcal{C}_1$  come le 3-varietà CCO ottenibili mediante chirurgia (razionale) su un nodo fortemente invertibile. Con un approccio differente mostreremo che sarà sufficiente considerare solamente le chirurgie intere. Per provare ciò useremo delle tecniche di topologia quadridimensionale e la notazione che adotteremo sarà quella di [7] e di [12].

Un nodo  $K$  di  $S^3$  è fortemente invertibile se e solo se esiste un'involuzione  $u : S^3 \rightarrow S^3$  che fissa, punto per punto, un nodo banale per cui  $u(K) = K$  e la restrizione  $u|_K : K \rightarrow K$  fissa esattamente due punti. Un link  $L$  di  $S^3$  è fortemente invertibile se e solo se esiste un'involuzione  $u : S^3 \rightarrow S^3$  che fissa, punto per punto, un nodo banale tale che ogni componente  $K$  di  $L$  risulta fortemente invertibile rispetto ad  $u$ .

Consideriamo la 4-varietà chiusa connessa orientabile

$$W = H^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_n^1 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_m^2.$$

Dall'unicità dell'incollamento degli 1-manici in varietà orientabili e dalla cancellabilità delle coppie 0-/1-manico, in presenza di più 0-manici, abbiamo

$$\sharp_n S^1 \times B^3 \cong H^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_n^1 \cong H_1^0 \cup \dots \cup H_{k+1}^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_{n+k}^1$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Nella sezione 4.5 del capitolo 4 di [12] è mostrato come interpretare i framing dei 2-manici tramite degli interi opportuni nel caso in cui si considera una decomposizione di  $W$  con un unico 0-manico. Questo fatto motiva la seguente definizione.

Diremo che una 3-varietà CCO  $M$  si ottiene tramite chirurgia intera di  $\sharp_n S^1 \times S^2$  lungo il link  $(L, \vec{f})$  se e solo se  $M$  è il bordo della 4-varietà compatta orientabile

$$W = (\sharp_n S^1 \times B^3) \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_m^2,$$

dove  $H_i^2$  è incollato lungo il nodo  $K_i$  immerso in  $\partial(\sharp_n S^1 \times B^3) = \sharp_n S^1 \times S^2$  con framing  $f_i \in \mathbb{Z}$ ,  $L = \bigcup_{i=1}^m K_i$  e  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ .

Un nodo  $K$  in  $\sharp_n S^1 \times S^2$  sarà fortemente invertibile se e solo se esiste un'involuzione non libera che conserva l'orientazione  $u$  di  $\sharp_n S^1 \times S^2$  con spazio delle orbite  $S^3$  tale che  $u(K) = K$  e  $u|_K : K \rightarrow K$  fissa esattamente due punti. Un link  $L$  in  $\sharp_n S^1 \times S^2$  sarà fortemente invertibile se e solo se esiste un'involuzione non libera che conserva l'orientazione  $u$  di  $\sharp_n S^1 \times S^2$  con spazio delle orbite  $S^3$  tale che ogni componente  $K$  di  $L$  risulta fortemente invertibile rispetto ad  $u$ .

Da [19] sappiamo che ogni involuzione non libera che conserva l'orientazione  $u$  di  $\sharp_n S^1 \times S^2$  con spazio delle orbite  $S^3$  è coniugata a quella standard  $t$ . La mappa  $t$  si ottiene restringendo l'involuzione

$$T : \sharp_n S^1 \times B^3 \rightarrow \sharp_n S^1 \times B^3$$

la cui mappa quoziente è il rivestimento doppio standard  $\sharp_n S^1 \times B^3 \rightarrow B^4$  ramificato su  $n + 1$  dischi disgiunti non linkati propriamente immersi. In altre parole, immergendo  $\sharp_n S^1 \times B^3$  in  $\mathbb{R}^4$  di modo che i vari  $S^1 \times \{0\}$  siano dei traslati nel piano  $xy$  del cerchio  $x^2 + y^2 = 1$ , allora  $T$  è la restrizione a

$\sharp_n S^1 \times B^3$  della simmetria di  $\mathbb{R}^4$  rispetto al piano  $xy$ . E' altresì noto che ogni involuzione  $u$  di  $S^3$  che conserva l'orientazione è equivalente alla restrizione al bordo della simmetria di  $B^4$  rispetto al piano  $xy$  ([46]), così  $F_u$  è un nodo banale e  $S^3/u \cong S^3$ .

**Lemma 4.3.1.** *Siano  $W$  un 2-corpo di manici quadridimensionale ed  $F$  una superficie ribbon, priva di autointersezioni ribbon, propriamente immersa in  $B^4$ . Se  $W$  è un rivestimento doppio di  $B^4$  ramificato su  $F$ , allora  $W$  possiede una decomposizione a manici*

$$H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_{n+1}^1 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_r^2$$

tale che il link d'incollamento dei 2-manici è fortemente invertibile in  $\sharp_n S^1 \times S^2 = \partial W_1$  con  $W_1 = H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_{n+1}^1$  rispetto  $T$  ed i framing di tutti i nodi di  $L$  sono interi.

**Dimostrazione.** Sia  $F = D_1 \cup \dots \cup D_{n+1} \cup B_1 \cup \dots \cup B_r$  con  $D_i$  0-manici bidimensionali e  $B_j$  1-manici bidimensionali per ogni  $i = 1, \dots, n+1$  e  $j = 1, \dots, r$ . La costruzione della sezione 2 di [7] mostra che  $W$  è uguale a  $H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_{n+1}^1 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_r^2$  tale che  $H_i^1$  sono incollati sia a  $H_1^0$  che a  $H_2^0$  per ogni  $i = 1, \dots, n+1$ , mentre, per ogni  $j = 1, \dots, r$ ,  $H_j^2$  è incollato dal nodo  $K_j = p_1^{-1}(C_j)$  dove  $p_1 = p|_{W_1}$  e  $C_j$  è il nucleo di  $B_j$  ed il framing  $f_j$  di  $K_j$  è uguale al doppio delle semitwist di  $B_j$ , quindi è intero. Siccome  $F$  è priva di autointersezioni ribbon, nel diagramma di Kirby generalizzato associato a  $(W, F)$  i nodi  $K_j$  sono linkati solamente con i cerchi puntati rappresentanti  $H_{i_1}^1$  e  $H_{i_2}^1$  che corrispondono agli 0-manici  $D_{i_1}$  e  $D_{i_2}$  di  $F$  a cui  $B_j$  è attaccato ( $i_1$  ed  $i_2$  possono anche essere uguali).

Sia  $T$  la precedente involuzione, allora dentro  $H_i^1 \cong B^1 \times B^3$ , con  $\{-1\} \times B^3 \subset H_1^0$  e  $\{1\} \times B^3 \subset H_2^0$ , abbiamo un unico 2-disco fissato punto per punto da  $T$  che corrisponde a  $\{0\} \times B^2 \subset B^1 \times B^3$ .

A meno di isotopie su  $K_j$ , la precedente costruzione mostra che  $K_j \cap F_T$  è formato da due punti  $P_{j_1}$  e  $P_{j_2}$ . Infatti, se  $i_1 \neq i_2$ , allora  $K_j \cap F_T$  è l'intersezione della coppia di 2-dischi  $F_T \cap H_{i_1}^1$ ,  $F_T \cap H_{i_2}^1$  con i sottoarchi  $K_j \cap H_{i_1}^1$  e  $K_j \cap H_{i_2}^1$  di  $K_j$ . Se  $i_1 = i_2$ , che denotiamo con  $i$ , allora  $K_j \cap F_T$  è l'intersezione del 2-disco  $F_T \cap H_i^1$  con i due sottoarchi di  $K_j \cap H_i^1$  che corrispondono alle percorrenze lungo  $\partial H_j^i$  di  $K_j$  rappresentate dal doppio link di  $K_j$  con il cerchio puntato del diagramma di Kirby corrispondente a  $H_i^1$ . In ogni caso,  $T$  fissa  $P_{j_1}$  e  $P_{j_2}$ . Inoltre  $p_1^{-1}(C_j)$  è formato dall'incollamento di due archi  $\alpha_{j_1}$  e  $\alpha_{j_2}$  da  $P_{j_1}$  a  $P_{j_2}$  che sono due copie identiche del nucleo di  $B_j$ , così, sempre a meno di isotopie, possiamo fare in modo che  $T$  interscambi  $\alpha_1$  con  $\alpha_2$ , per cui  $K_j$  è fortemente invertibile.  $\square$

**Teorema 4.3.2.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Allora  $M \in \mathcal{C}_1$  se e solo se  $M$  si ottiene tramite chirurgia intera su  $S^3$  lungo un link fortemente invertibile.*

**Dimostrazione.** Se  $M \in \mathcal{C}_1$  esiste il rivestimento doppio  $p : M \rightarrow S^3$  ramificato sul link  $L$ . Seguendo la dimostrazione della proposizione 4.7 di [7] si ottiene l'esistenza di un rivestimento doppio  $q : W \rightarrow B^4$  ramificato su una superficie ribbon che soddisfa le seguenti proprietà:

- $W$  è un 2-corpo di manici di dimensione 4 tale che  $\partial W = M$ ,  $\partial F = L \subset \partial B^4 = S^3$  e  $q|_M = p$ ;
- $F$  è priva di autointersezioni ribbon.

La prima è scontata, mentre la seconda proprietà vale in quanto nei rivestimenti di grado 2 tutte le trecce sono sollevabili, quindi la superficie ribbon di Seifert per  $L$  può essere costruita, tramite l'algoritmo descritto in [39], a partire dai generatori del gruppo delle trecce senza dover ricorrere ai loro coniugati. In questo modo  $F$  non avrà intersezioni ribbon. Ora il lemma 4.3.1 implica  $W = H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_{n+1}^1 \cup H_1^2 \cup \dots \cup H_r^2$  ed il link d'incollamento dei 2-manici  $(L, \vec{f})$  è fortemente invertibile, rispetto  $T$ , in  $\sharp_n S^1 \times S^2 = \partial W_1$  con  $W_1 = H_1^0 \cup H_2^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_{n+1}^1$ . Sempre dal lemma 4.3.1 risulta  $f_i \in \mathbb{Z}$ , quindi  $M$  si ottiene tramite chirurgia intera su  $\sharp_n S^1 \times S^2$  lungo un link  $(L, \vec{f})$  fortemente invertibile rispetto  $T$ . Dalla costruzione del link  $(L, \vec{f})$  descritta nel lemma 4.3.1 è chiaro che  $L$  possiede un diagramma planare regolare fortemente invertibile, in altri termini  $(L, \vec{f})$  è fortemente invertibile anche in  $S^3$ . Inoltre  $\sharp_n S^1 \times S^2$  si ottiene come chirurgia sul link banale con  $n$  componenti tutti con framing zero, quindi  $M$  si ottiene tramite chirurgia intera su  $S^3$  lungo un link fortemente invertibile.

Il viceversa è ovvio, in quanto ogni chirurgia intera può essere interpretata come chirurgia razionale.  $\square$

*Osservazione 8.* Nella dimostrazione del teorema 4.3.2 abbiamo provato, come risultato preliminare, che se  $M \in \mathcal{C}_1$ , allora  $M$  si ottiene tramite chirurgia intera su  $\sharp_n S^1 \times S^2$  lungo un link fortemente invertibile rispetto  $t$ . Mostriamo ora che anche il viceversa è vero. Se  $M$  si ottiene tramite chirurgia intera su  $\sharp_n S^1 \times S^2$  lungo un link  $(L, \vec{f})$  fortemente invertibile rispetto  $t$ , allora  $M$  è il bordo del corpo di manici costruito a partire da  $W_1 = H^0 \cup H_1^1 \cup \dots \cup H_n^1 \cong \sharp_n B^1 \times B^3$  incollando i 2-manici tramite le istruzioni di  $(L, \vec{f})$ . Su  $W_1$  esiste l'involuzione  $T$  che estende  $t$  tale che  $W_1/T \cong B^4$  ed il lemma 3 di [16] mostra come estendere  $T$  ad una involuzione  $R$  su tutto  $W$  tale che  $W/R \cong B^4$ . Allora  $R|_M$  è l'involuzione che induce il rivestimento ramificato doppio cercato.

Abbiamo già ricordato cosa s'intende per link e nodi fortemente invertibili in  $S^3$ , questi tipi di simmetrie non sono le uniche ed, inoltre, possiamo definirle anche in qualsiasi 3-varietà che possiede un'involuzione che fissa punto per punto un link. Siano quindi  $M$  una 3-varietà CCO ed  $u : M \rightarrow M$  un'involuzione tale che  $F_u$  è un link la cui mappa quoziente è il rivestimento doppio  $p : M \rightarrow M/u$  ramificato sul link  $p(F_u)$  dentro  $M/u$ .

Un nodo  $K$  in  $M$  è fortemente invertibile rispetto  $u$  se e solo se  $u(K) = K$  e  $u|_K : K \rightarrow K$  fissa esattamente due punti. Un nodo  $K$  in  $M$  è periodico rispetto  $u$  se e solo se  $u(K) = K$  e  $u(x) \neq x$  per ogni  $x \in K$ . Un 2-link  $K \cup \bar{K}$  è interscambiabile rispetto  $u$  se e solo se  $u$  interscambia i due nodi. Un link  $L$  è 2-simmetrico rispetto  $u$  se e solo se  $u(L) = L$ .

Sia  $L$  un link in  $M$  2-simmetrico rispetto  $u$ , allora esiste la partizione

$$\{K_1 \cup \dots \cup K_{2s}, K_{2s+1} \cup \dots \cup K_{2s+r}, K_{2s+r+1} \cup \dots \cup K_{2s+r+l}, \\ K_{2s+r+l+1} \cup \dots \cup K_n\}$$

di  $L$  tale che  $K_{2i-1} \cup K_{2i}$  è un 2-sottolink interscambiabile rispetto  $u$  per ogni  $i = 1, \dots, s$ ,  $K_{2s+j}$  è un nodo periodico rispetto  $u$  per ogni  $j = 1, \dots, r$ ,  $K_{2s+r+p}$  è un nodo fortemente invertibile rispetto  $u$  per ogni  $p = 1, \dots, l$  e  $K_{2s+r+l+1}, \dots, K_n$  sono fissati, punto per punto, da  $u$  (cioè  $K_{2s+r+l+1} \cup \dots \cup K_n \subseteq F_u$ ). Infatti assumiamo  $K \subset L$  tale che  $u(K) = K$  e  $K - F_u \neq \emptyset$ . In questo caso  $u|_K$  è un'involuzione di  $K$  con  $K \cong S^1$ , quindi  $u|_K$  è libera o fissa esattamente due punti, da cui  $K$  è periodico o fortemente invertibile. Se  $K \subseteq F_u$  allora  $u|_K$  è l'identità  $\text{id}_K$  di  $K$ . Invece, se  $u(K) \neq K$  allora  $u(K) \subset L$ , la continuità di  $u|_K$  e la connessione di  $K$  implicano che esiste  $\bar{K}$ , distinto da  $K$ , tale che  $u(K) = \bar{K}$  ma, siccome  $u^2 = \text{id}_M$ ,  $u(\bar{K}) = K$ , così  $K \cup \bar{K}$  è un 2-link interscambiabile. L'immagine tramite  $p$  di un 2-sottolink interscambiabile  $K_1 \cup K_2$ , di un nodo periodico  $K$  e di un nodo fissato  $K'$  sono rispettivamente i nodi  $p(K_1 \cup K_2)$ ,  $p(K')$  e  $p(K'') \subset p(F_u)$  di  $M/u$ , mentre l'immagine tramite  $p$  di un nodo fortemente invertibile  $K''$  è l'arco  $p(K'')$  tale che  $p(K'') \cap p(F_u)$  è formato da due punti isolati.

Se  $M = S^3$  ed  $L$  è invariante rispetto l'involuzione  $u : S^3 \rightarrow S^3$  che conserva l'orientazione, allora non possono esistere contemporaneamente nodi di  $L$  fortemente invertibili e nodi fissati, punto per punto, da  $u$ . Altrimenti se  $K \subset L$  è fortemente invertibile e  $K' \subset L$  è fissato punto per punto, siccome  $F_u$  è un nodo banale,  $F_u = K'$  e  $K \cap K' = K \cap F_u$  sarebbe non vuoto ma formato da due punti, ma ciò è impossibile.

Se  $L$  è un nodo in  $M$ , denotiamo con  $\nu(L)$  un intorno regolare di  $L$  in  $M$ .

*Osservazione 9.* Siano  $M$  una 3-varietà CCO ed  $L \subset M$  un link 2-simmetrico rispetto l'involuzione  $u$  di  $M$  che fissa, punto per punto, un

link ed ha mappa quoziente  $p : M \longrightarrow M/u$ . Consideriamo la partizione di  $L$  nei sottolink  $L_1, L_2, L_3$  tali che  $L_1$  contiene le eventuali componenti fortemente invertibili,  $L_2$  contiene sia le eventuali componenti periodiche che quelle fissate punto per punto ed  $L_3$  contiene le eventuali componenti interscambiabili. Se  $L_3 = \emptyset$ , denotiamo con  $\chi(L)$  una 3-varietà CCO che si ottiene tramite chirurgia di  $M$  lungo  $L$ , altrimenti denotiamo con  $\chi(L)$  una 3-varietà CCO che si ottiene tramite chirurgia di  $M$  lungo  $L$  di modo che per ogni coppia interscambiabile  $K \cup \overline{K}$  di  $L_3$  gli omeomorfismi  $\phi : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial\nu(K)$  e  $\overline{\phi} : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial\nu(\overline{K})$ , che incollano le due copie di  $S^1 \times B^2$  al posto di  $\nu(K)$  e  $\nu(\overline{K})$  rispettivamente, danno luogo all'omeomorfismo  $\overline{\phi}^{-1} \circ u \circ \phi : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$  che si estende ad un omeomorfismo di tutto  $S^1 \times B^2$ . Allora  $\chi(L)$  è un rivestimento doppio della 3-varietà CCO  $\chi(p(L_2) \cup p(L_3))$  opportunamente costruita come chirurgia di  $M/u$  lungo il link  $p(L_2) \cup p(L_3)$ .

In [27] (teoremi 1 e 2) è mostrato come l'involuzione  $u$  di  $S^3 - \text{Int } \nu(L)$  si estende nel toro pieno contenente un nodo fortemente invertibile o periodico. Se  $K_1 \cup K_2 \subset L_3$ , quindi  $u(K_i) = K_j$  per  $i, j = 1, 2$  ed  $i \neq j$ . Allora  $u$  induce un'involuzione  $v : \nu(K_1) \cup \nu(K_2) \longrightarrow \nu(K_1) \cup \nu(K_2)$  che interscambia le due componenti. Siano  $V_1, V_2$  due copie di  $S^1 \times B^2$  e  $\phi_i : \partial V_i \longrightarrow \partial\nu(K_i)$  gli omeomorfismi con cui incolliamo  $V_i$  al posto di  $\nu(K_i)$  per  $i = 1, 2$ . Definiamo  $\phi_2^{-1} \circ \partial v \circ \phi_1 : \partial V_1 \longrightarrow \partial V_2$  e  $\phi_1^{-1} \circ \partial v \circ \phi_2 : \partial V_2 \longrightarrow \partial V_1$ . Per ipotesi essi si estendono a degli omeomorfismi  $V_1 \longrightarrow V_2, V_1 \longrightarrow V_2$  che definiscono un'involuzione  $V_1 \cup V_2 \longrightarrow V_1 \cup V_2$  con cui estendere  $u$  su  $V_1 \cup V_2$ . Abbiamo quindi esteso  $u$  sullo spazio ottenuto tramite chirurgia di  $M$  lungo  $K_1 \cup K_2$  che, al quoziente, induce una chirurgia di  $M/u$  lungo il nodo  $p(K_1 \cup K_2)$ .

Inoltre, si assuma  $M = S^3$ . Se i nodi  $K_1 \sqcup K_2$  di un 2-sottolink interscambiabile di  $L$  possiedono lo stesso framing, allora l'omeomorfismo  $\phi : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial\nu(K)$  e l'omeomorfismo  $\overline{\phi} : S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial\nu(\overline{K})$ , che incollano le due copie di  $S^1 \times B^2$  al posto di  $\nu(K)$  e  $\nu(\overline{K})$  rispettivamente, possono essere considerati come lo stesso omeomorfismo da  $S^1 \times S^1$  su se stesso. In tal caso l'omeomorfismo  $\overline{\phi}^{-1} \circ u \circ \phi : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$  è un'involuzione di  $S^1 \times S^1$  e quindi si estende ad un'involuzione di  $S^1 \times B^2$ . Quindi quando i nodi interscambiati  $K_1 \sqcup K_2$  hanno lo stesso framing allora la richiesta che l'omeomorfismo  $\overline{\phi}^{-1} \circ u \circ \phi : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$  si estenda ad un omeomorfismo di  $S^1 \times B^2$  è sempre vera.

In realtà questa descrizione delle involuzioni che conservano l'orientazione di 3-varietà CCO (e quindi dei rivestimenti doppi da esse indotte) è caratterizzante. Infatti dal teorema 2.1 di [40] si estrae il seguente fatto.

**Teorema 4.3.3.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO e  $T$  un'involuzione di  $M$  che conserva l'orientazione. Allora in  $S^3$  esiste un link  $L$  con framing intero  $\vec{f}$  tale che*

1.  $L$  è 2-simmetrico in  $S^3$  rispetto ad un'involutione  $u : S^3 \rightarrow S^3$  tale che  $F_u$  è un nodo banale in  $S^3$  e  $F_u \cap L = \emptyset$ ;
2. i nodi di un 2-sottolink interscambiabile qualsiasi di  $L$  possiedono lo stesso framing;
3.  $M$  si ottiene tramite chirurgia di  $S^3$  lungo  $(L, \vec{f})$  e  $T$  è equivalente all'involutione di  $M$  costruita a partire dalla restrizione di  $u$  ad  $S^3 - \text{Int } \nu(L)$  estesa a tutto  $M$ .

Vediamo come è possibile usare questi risultati per costruire alcuni esempi di rivestimenti ramificati doppi iterati di  $S^3$ .

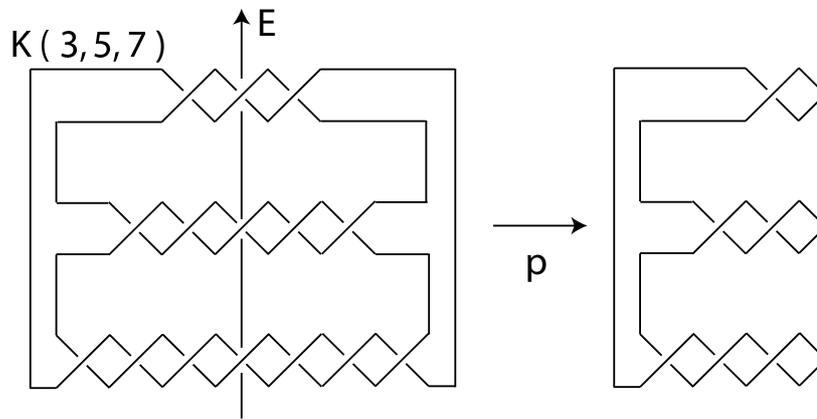


Figura 4.1: Nodo di Pretzel  $K(3, 5, 7)$

*Esempio 2.* Sia  $K(a, b, c)$  il nodo a pretzel in  $S^3$  (in figura 4.1 abbiamo il caso in cui  $a = 3, b = 5, c = 7$ ). Se  $a, b$  ed  $c$  sono tutti pari allora  $K(a, b, c)$  è fortemente invertibile, se sono tutti dispari allora Trotter ha mostrato che  $K(a, b, c)$  non è invertibile ([43]), quindi non può essere fortemente invertibile (ogni nodo fortemente invertibile è invertibile). Comunque, se  $a, b, c$  sono dispari,  $K(a, b, c)$  è periodico, allora ogni varietà  $\chi(K(a, b, c))$  che si ottiene tramite chirurgia su  $S^3$  lungo di esso è un rivestimento doppio su  $\chi(p(K(a, b, c)))$  ramificato su un link, dove  $\chi(p(K(a, b, c)))$  è un'opportuna chirurgia di  $S^3$  lungo  $p(K(a, b, c))$ . Siccome  $p(K(a, b, c))$  è banale (per  $p(K(3, 5, 7))$  si veda la figura 4.1), allora è fortemente invertibile, quindi  $\chi(p(K(a, b, c))) \in \mathcal{C}_1$ . Quindi  $\chi(K(a, b, c)) \in \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1$ , in quanto, essendo  $K(a, b, c)$  non invertibile, abbiamo che  $\chi(K(a, b, c)) \notin \mathcal{C}_1$ .

*Esempio 3.* Sia  $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  il link di  $S^3$  chiamato "anelli di Borromeo" (figura 4.2). Se rimuoviamo gli intorni regolari  $\nu(K_1) \cup \nu(K_2) \cup \nu(K_3)$

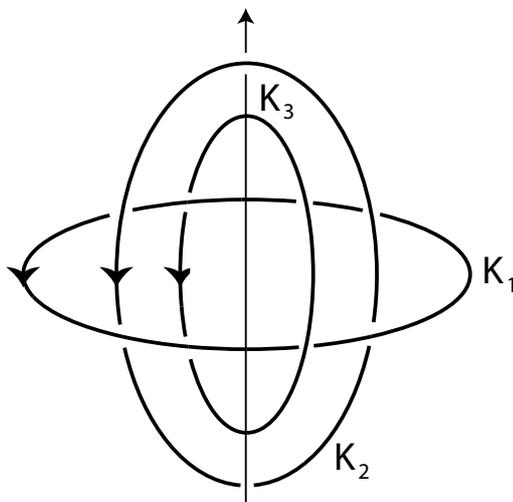


Figura 4.2: Anelli di Borromeo

da  $S^3$  e li ricolliamo di modo che le curve orientate  $K_i$  siano identificate con i meridiani, otteniamo il toro  $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$  ([21]). Siccome  $T^3 \notin \mathcal{C}_1$ , gli anelli di Borromeo non costituiscono un link fortemente invertibile. La figura 4.2 ci mostra che  $L$  è comunque 2-simmetrico con  $K_1$  periodico e  $K_2, K_3$  fortemente invertibili. Quindi ogni varietà  $\chi(L)$  è un rivestimento doppio di  $\chi(p(K_1))$  ramificato su un link e, siccome  $p(K_1)$  è banale,  $\chi(L) \in \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1$ .

*Esempio 4.* Sia  $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  il link nella parte superiore della figura 4.3,  $L$  è 2-simmetrico rispetto alla simmetria  $a$  intorno ad  $E$ . Infatti il 2-sottolink  $K_1 \cup K_2$  è interscambiabile, mentre  $K_3$  è fortemente invertibile. Sia  $\chi(L)$  la 3-varietà CCO ottenuta tramite chirurgia su  $L$  di modo che gli omeomorfismi  $\phi_1 : S^1 \times S^1 \rightarrow \partial\nu(K_1)$  e  $\phi_2 : S^1 \times S^1 \rightarrow \partial\nu(K_2)$ , che incollano le due copie di  $S^1 \times B^2$  al posto di  $\nu(K_1)$  e  $\nu(K_2)$  rispettivamente, danno luogo all'omeomorfismo  $\phi_2^{-1} \circ u \circ \phi_1 : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  che si estende ad un omeomorfismo di tutto  $S^1 \times B^2$ . Allora  $\chi(L)$  è un rivestimento doppio di  $\chi(p(K_1 \cup K_2))$  ramificato su un link. Siccome  $p(K_1 \cup K_2)$  è il nodo banale nella parte inferiore della figura 4.3,  $\chi(p(K_1 \cup K_2)) \in \mathcal{C}_1$  quindi  $\chi(L) \in \mathcal{C}_2$ .

#### 4.4 Caratterizzazione delle $k$ -iterazioni

Lo scopo è ora quello di mostrare che le  $k$ -iterazioni possono essere messe in corrispondenza con gli omeomorfismi di spezzamento di  $S^3$ .

**Lemma 4.4.1.** *Se  $H_g \sqcup_f H_g$  è uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico rispetto l'involuzione  $\varphi = L_g^{0,m} \sqcup_f L_g^{0,m}$  allora è possibile eseguire una*

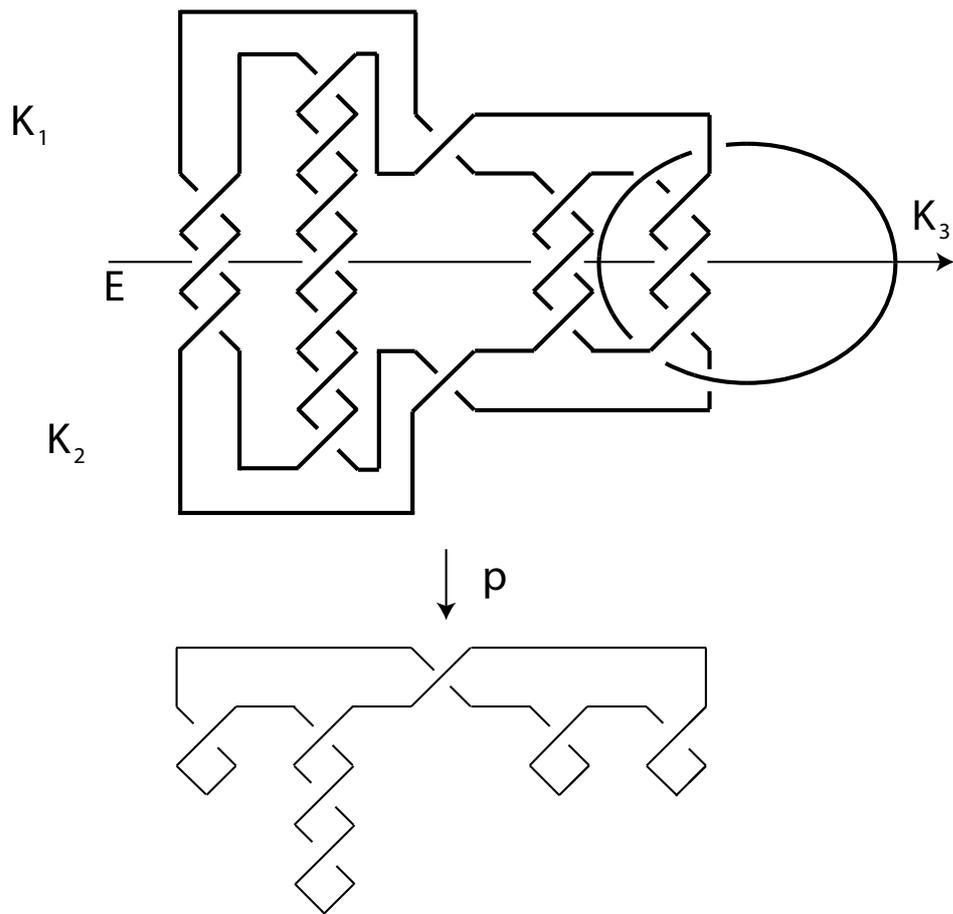


Figura 4.3: Esempio di link 2-simmetrico

sua stabilizzazione in modo tale che resti ancora 2-simmetrico rispetto alla medesima  $\varphi$  (a meno d'equivalenze).

**Dimostrazione.** Sia  $B$  un 2-disco contenente il punto  $P_1 \subset F_{L_g^{0,m}} \cap \partial H_g$  e nessun altro punto fisso ed immerso nel bordo della prima copia di  $H_g$  in  $H_g \sqcup_f H_g$  come mostrato in figura 4.4 tale che  $L_g^{0,m}(B) = B$ . Sia  $B' = f(B)$  l'immagine di  $B$  tramite  $f$  nel bordo della seconda copia di  $H_g$  in  $H_g \sqcup_f H_g$ , allora, siccome  $L_g^{0,m} \circ f = f \circ L_g^{0,m}$ ,  $L_g^{0,m}(B') = B'$ ,  $B'$  contiene un punto  $P_i \subset F_{L_g^{0,m}} \cap \partial H_g$  e nessun altro punto fisso ed è immerso nel bordo della seconda copia di  $H_g$  in  $H_g \sqcup_f H_g$ .

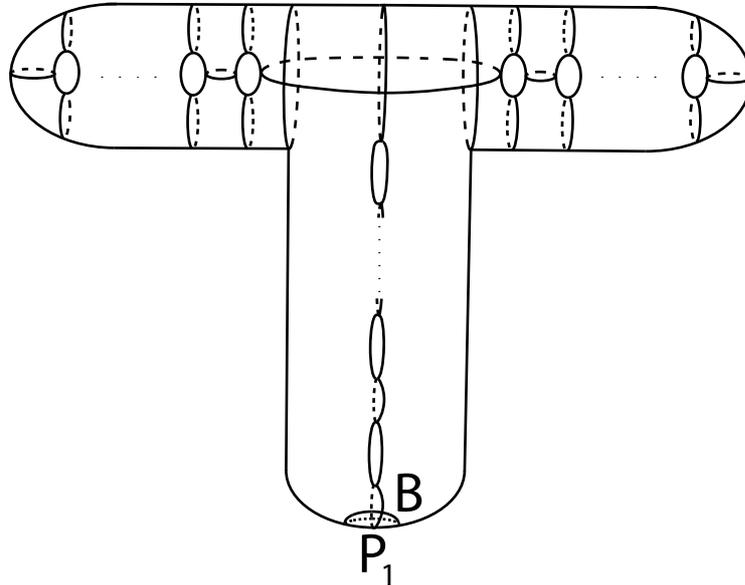
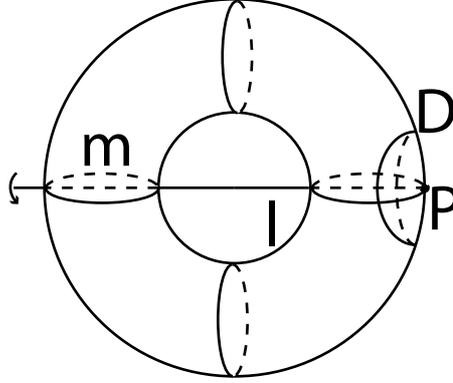


Figura 4.4: 2-disco  $B$

Consideriamo il toro pieno  $S^1 \times B^2$  dotato dell'involuzione ellittica  $L_1^{0,2}$  e gli omeomorfismi  $M$  ed  $L$  di  $S^1 \times S^1$  rispettivamente uguali ai twist lungo il meridiano  $m$  ed il parallelo  $l$  di  $S^1 \times S^1$ . Se  $\alpha : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  è uguale a  $L \circ M \circ L$ , allora  $L_1^{0,2} \circ \alpha = \alpha \circ L_1^{0,2}$ . Siano  $T, T'$  due copie di  $S^1 \times B^2$  ognuna dotata dell'involuzione  $L_1^{0,2}$  ed  $h : \partial T \rightarrow \partial T'$  l'omeomorfismo corrispondente al precedente  $\alpha$ .

Prendiamo un 2-disco  $D \subset \partial T$  contenente il punto  $P \subset F_{L_1^{0,2}} \cap \partial T$  e nessun altro punto fisso come mostrato in figura 4.5, allora  $L_1^{0,2}(D) = D$  e, se  $D' = h(D) \subset \partial T'$ ,  $L_1^{0,2}(D') = D'$ ,  $D'$  contiene un punto  $P' \subset F_{L_1^{0,2}} \cap \partial T'$  e nessun altro punto fisso.


 Figura 4.5: 2-disco  $D$ 

Siccome  $L_1^{0,2}$  e  $L_g^{0,m}$  sono mappe ortogonali che ristrette rispettivamente a  $D$  e  $B$  sono delle rotazioni intorno ad un punto, allora esiste un omeomorfismo  $\nu_1$  da  $B$  a  $D$  tale che  $L_1^{0,2} \circ \nu_1 = \nu_1 \circ L_g^{0,m}$ . Quando incolliamo  $T$  alla prima copia di  $H_g$  mediante  $\nu_1$  otteniamo il corpo di manici  $\overline{H}_{g+1} = H_g \sqcup_{\nu_1} T$ , inoltre  $L_1^{0,2}$  e  $L_g^{0,m}$  si raccordano definendo un'involuzione  $\overline{R}_{g+1}^{m+1}$  su  $\overline{H}_{g+1}$  equivalente a  $L_{g+1}^{0,m+1}$ .

Definiamo l'omeomorfismo  $\nu_2 : B' \rightarrow D'$  uguale a  $h \circ \nu_1 \circ f^{-1}$  ed incolliamo  $T'$  alla seconda copia di  $H_g$  mediante  $\nu_2$ . Abbiamo così costruito il corpo di manici  $\tilde{H}_{g+1} = H_g \sqcup_{\nu_2} T'$  e dalla definizione di  $\nu_2$  segue l'esistenza dell'omeomorfismo

$$l = f \sqcup_{\nu_1} h = \partial \overline{H}_{g+1} = \partial(H_g \sqcup_{\nu_1} T) \longrightarrow \partial \tilde{H}_{g+1} = \partial(H_g \sqcup_{\nu_2} T).$$

Inoltre dalle scelte effettuate segue

$$L_1^{0,2} \circ \nu_2 = L_1^{0,2} \circ h \circ \nu_1 \circ f^{-1} = h \circ \nu_1 \circ f^{-1} \circ L_g^{0,m} = \nu_2 \circ L_g^{0,m},$$

allora  $L_1^{0,2}$  e  $L_g^{0,m}$  si raccordano definendo un'involuzione  $\tilde{R}_{g+1}^{m+1}$  su  $\tilde{H}_{g+1}$  equivalente a  $L_{g+1}^{0,m+1}$ .

Siccome  $f$  commuta con  $L_g^{0,m}$  ed  $h$  commuta con  $L_1^{0,2}$ , segue  $l \circ \overline{R}_{g+1}^{m+1} = \tilde{R}_{g+1}^{m+1} \circ l$  quindi  $\overline{H}_{g+1} \sqcup_l \tilde{H}_{g+1}$  possiede l'involuzione  $\psi = \overline{R}_{g+1}^{m+1} \sqcup_l \tilde{R}_{g+1}^{m+1}$ .

$T \sqcup_h T'$  è omeomorfo ad  $S^3$ , così  $\overline{H}_{g+1} \sqcup_l \tilde{H}_{g+1}$  rappresenta la stabilizzazione 2-simmetrica di  $H_g \sqcup_f H_g$  e, siccome  $L_1^{0,2} \sqcup_h L_1^{0,2}$  è un'involuzione non libera che conserva l'orientazione di  $S^3$ , allora il suo spazio quoziente è  $S^3$ , quindi  $\varphi$  e  $\psi$  possiedono lo stesso spazio quoziente.

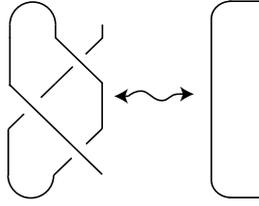


Figura 4.6: Isotopia fra la ramificazione di  $q$  e quella di  $p$

Siano ora  $p$  e  $q$  i rivestimenti ramificati doppi indotti rispettivamente da  $\varphi$  e  $\psi$ , allora essi possiedono lo stesso spazio base e lo stesso dominio. L'insieme di ramificazione di  $q$  si ottiene a partire da quello di  $p$  mediante l'isotopia di figura 4.6 che avviene nella 3-cella di  $(\overline{H}_{g+1} \sqcup_l \tilde{H}_{g+1})/\psi$  ottenuta come quoziente della 3-cella  $C$  originata dall'incollamento dei due tori pieni  $T$  e  $T'$  dentro  $\overline{H}_{g+1} \sqcup_l \tilde{H}_{g+1}$ . Al di fuori di  $C$  i rivestimenti  $q$  e  $p$  sono identici, quindi  $p$  e  $q$  sono equivalenti allora  $\varphi$  e  $\psi$  sono coniugate.

Dall'osservazione 4 sappiamo che  $\overline{H}_{g+1} \sqcup_l \tilde{H}_{g+1}$  è equivalente ad uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico  $H_{g+1} \sqcup_{l'} H_{g+1}$  per un omeomorfismo di spezzamento  $l'$  opportuno e l'involuzione  $\psi$  è equivalente all'involuzione  $L_{g+1}^{0,m+1} \sqcup_{l'} L_{g+1}^{0,m+1}$ .  $\square$

**Lemma 4.4.2.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Affinché  $M \in \mathcal{C}_2$  è necessario e sufficiente che esistano uno spezzamento di Heegaard 2-simmetrico  $H_g \sqcup_f H_g$  di  $M$  con spazio quoziente equivalente a  $H_n \sqcup_l H_n$  ed un naturale  $0 \leq r \leq n$  per cui  $h \circ \pi_n^{0,r+1} = \pi_n^{0,r+1} \circ l$  dove  $h : T_s \rightarrow T_s$  è un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$  ed  $s = \frac{n-r}{2}$ .*

**Dimostrazione.** La condizione sufficiente è immediata, infatti esiste il rivestimento ramificato doppio  $\pi_n^{0,r+1} \sqcup_l \pi_n^{0,r+1} : H_n \sqcup_l H_n \rightarrow H_s \sqcup_h H_s$ , ma  $H_s \sqcup_h H_s \cong S^3$  ed inoltre  $M$  è un rivestimento ramificato doppio di  $H_n \sqcup_l H_n$ . Resta da provare che questa è anche una condizione necessaria.

Se  $M \in \mathcal{C}_2$  allora esistono i rivestimenti ramificati doppi

$$M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} S^3,$$

infatti se  $M \in \mathcal{C}_1$  possiamo prendere  $N = S^3$ . Così esistono gli spezzamenti di Heegaard 2-simmetrici  $H_{k_1} \sqcup_{f'} H_{k_1}$  di  $M$  ed  $H_{k_2} \sqcup_{l'} H_{k_2}$  di  $N$  tali che  $p$  è equivalente a

$$\pi_{k_1}^{0,m_1+1} \sqcup_{f'} \pi_{k_1}^{0,m_1+1} : H_{k_1} \sqcup_{f'} H_{k_1} \rightarrow H_{k_1}/L_{k_1}^{0,m_1+1} \sqcup_{f''} H_{k_1}/L_{k_1}^{0,m_1+1}$$

e  $q$  è equivalente a

$$\pi_{k_2}^{0,m_2+1} \sqcup_{l'} \pi_{k_2}^{0,m_2+1} : H_{k_2} \sqcup_{l'} H_{k_2} \rightarrow H_{k_2}/L_{k_2}^{0,m_2+1} \sqcup_{l''} H_{k_2}/L_{k_2}^{0,m_2+1}.$$

Sia  $H_{k_1}/L_{k_1}^{0,m_1+1} \sqcup_{f''} H_{k_1}/L_{k_1}^{0,m_1+1}$  che  $H_{k_2} \sqcup_{l'} H_{k_2}$  sono spezzamenti di  $N$  quindi sono stabilmente equivalenti.

Applicando ripetutamente il lemma 4.4.1, possiamo eseguire delle stabilizzazioni 2-simmetriche di  $H_{k_1} \sqcup_{f'} H_{k_1}$  e delle stabilizzazioni 2-simmetriche di  $H_{k_2} \sqcup_{l'} H_{k_2}$  di modo che:

- (i)  $M = H_g \sqcup_f H_g$ ,  $N = H_n \sqcup_l H_n$ ;
- (ii)  $p$  è equivalente a  $\pi_g^{0,m+1} \sqcup_f \pi_g^{0,m+1} : H_g \sqcup_f H_g \longrightarrow H_n \sqcup_{\hat{f}} H_n$ ;
- (iii)  $q$  è equivalente a  $\pi_n^{0,r+1} \sqcup_l \pi_n^{0,r+1} : H_n \sqcup_l H_n \longrightarrow H_s \sqcup_h H_s$ ;
- (iv) esistono due omeomorfismi  $\phi, \psi : H_n \longrightarrow H_n$  tali che  $l \circ \phi|_{\partial H_n} = \psi|_{\partial H_n} \circ \hat{f}$  con cui si definisce l'omeomorfismo di equivalenza fra spezzamenti  $\Phi = \phi \sqcup_{\hat{f}} \psi : H_n \sqcup_{\hat{f}} H_n \longrightarrow H_n \sqcup_l H_n$ .

Così lo spazio quoziente  $H_n \sqcup_{\hat{f}} H_n$  di  $H_g \sqcup_f H_g$  è equivalente a  $H_n \sqcup_l H_n$  tramite  $\Phi$  ed inoltre (iii) implica sia  $h \circ \pi_n^{0,r+1} = \pi_n^{0,r+1} \circ l$  con  $H_s \sqcup_h H_s \cong S^3$  che  $s = \frac{n-r}{2}$ .  $\square$

**Teorema 4.4.3.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO.  $M \in \mathcal{C}_2$  se e solo se esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 T_g & \xrightarrow{f} & T_g \\
 \downarrow \rho_1 & & \rho_2 \downarrow \\
 T_n & \xrightarrow{l} & T_n \\
 \pi_n^{0,r+1} \downarrow & & \downarrow \pi_n^{0,r+1} \\
 T_s & \xrightarrow{h} & T_s
 \end{array}$$

tale che  $H_g \sqcup_f H_g$  è spezzamento di Heegaard di  $M$ ,  $h$  un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$ ,  $l$  un omeomorfismo e  $\rho_1, \rho_2 : H_g \longrightarrow H_n$  due rivestimenti ramificati doppi (con  $\partial H_g = T_g$  e  $\partial H_n = T_n$ ).

**Dimostrazione.** Se  $M \in \mathcal{C}_2$  allora dal lemma 4.4.2 seguono: esiste uno spezzamento di Heegaard  $H_g \sqcup_f H_g$  di  $M$  tale che  $L_g^{0,m+1} \circ f = f \circ L_g^{0,m+1}$  ed  $f$  ha l'omeomorfismo quoziente  $\hat{f} = f/L_g^{0,m+1} : H_n \longrightarrow H_n$ , esistono gli omeomorfismi  $\varphi_1, \varphi_2 : H_n \longrightarrow H_n$  con cui si costruisce l'omeomorfismo d'equivalenza fra spezzamenti di Heegaard  $\varphi_1 \sqcup_{\hat{f}} \varphi_2 : H_n \sqcup_{\hat{f}} H_n \longrightarrow H_n \sqcup_l H_n$ , esiste un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$  tale che  $h \circ \pi_n^{0,r+1} = \pi_n^{0,r+1} \circ l$ . Allora, se definiamo  $\rho_i = \varphi_i \circ \pi_g^{0,m+1}$  ( $i = 1, 2$ ) e se consideriamo le restrizioni ai bordi di  $\rho_1, \rho_2$  e  $\pi_n^{0,r+1}$ , otteniamo il diagramma commutativo voluto.

Viceversa,  $H_n \sqcup_l H_n$  è il quoziente di  $H_g \sqcup_f H_g = M$  tramite  $\rho_1 \sqcup_f \rho_2$ . Siccome vale  $h \circ \pi_n^{0,r+1} = \pi_n^{0,r+1} \circ l$ , il lemma 4.4.2 garantisce che  $M \in \mathcal{C}_2$ .  $\square$

**Corollario 4.4.4.** *Sia  $M$  una 3-varietà CCO.  $M \in \mathcal{C}_k$  se e solo se esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 T_g & \xrightarrow{f} & T_g \\
 \downarrow \rho_{1,1} & & \rho_{1,2} \downarrow \\
 T_{n_1} & \xrightarrow{l_1} & T_{n_1} \\
 \downarrow \rho_{2,1} & & \rho_{2,2} \downarrow \\
 T_{n_2} & \xrightarrow{l_2} & T_{n_2} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 T_{n_{k-2}} & \xrightarrow{l_{k-2}} & T_{n_{k-2}} \\
 \rho_{k-1,1} \downarrow & & \downarrow \rho_{k-1,2} \\
 T_{n_{k-1}} & \xrightarrow{l_{k-1}} & T_{n_{k-1}} \\
 \pi_{n_{k-1}}^{0,r+1} \downarrow & & \downarrow \pi_{n_{k-1}}^{0,r+1} \\
 T_s & \xrightarrow{h} & T_s
 \end{array}$$

tale che  $H_g \sqcup_f H_g$  è spezzamento di Heegaard di  $M$ ,  $h$  un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$ ,  $l_1, \dots, l_{k-1}$  sono omeomorfismi e  $\rho_{i,j}$  sono rivestimenti ramificati doppi fra corpi di manici opportuni, per ogni  $i = 1, \dots, k-1$  ed ogni  $j = 1, 2$ .

**Dimostrazione.** Si procede per induzione su  $k$  con le stesse argomentazioni usate per il teorema 4.4.3.  $\square$

Come applicazione del teorema 4.4.3 mostriamo alcuni esempi di varietà in  $\mathcal{C}_2$ , adottando le stesse notazioni della proposizione 3.3.1.

*Esempio 5.* Sia  $M$  una 3-varietà CCO. Se esistono due interi  $n, m$  tali che  $M = H_{2n+m} \sqcup_f H_{2n+m}$  con  $f$  generato dai twist

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}, \Gamma_1, \Gamma_n, \gamma_{2m+2n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{3n}, \delta_1\} \subset S_m^{2n}(T_g),$$

allora  $M \in \mathcal{C}_2$ .

*Dimostrazione dell'esempio 5.* La varietà  $M$  è un rivestimento ramificato doppio di  $N = H_n \sqcup_{\hat{f}} H_n$  con  $\hat{f}$  generato da

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \beta_1, \beta_n, \beta_{n+1}^2, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}, \tau_1\}$$

per la proposizione 3.3.1. Dimentichiamoci dei punti di ramificazione del rivestimento doppio  $\pi_{m+2n}^{0,m+1}$  indotto da  $L_{m+2n|T_{m+2n}}^{0,m+1}$ . Così  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}$  sono isotopi all'identità, quindi anche  $\tau_1 = \beta_{n+1}^{-1} \circ \alpha_{2m+1}^{-1} \circ \beta_{n+1}$  è isotopo all'identità e  $\beta_{n+1}$  diviene isotopo a  $\beta_1$ . Allora  $N$  possiede uno spezzamento di Heegaard generato da  $\beta_1, \beta_n, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}$ , quindi  $N$  è un rivestimento ramificato doppio di  $S^3$ .  $\square$

Esempio 6. Sia  $f : T_g \rightarrow T_g$  uguale al prodotto

$$P \prod_{j=1}^s \Gamma_{n+2j} \Gamma_j \Gamma_{n+2j} \prod_{j=n-s+1}^n \Gamma_{n+2j} \Gamma_j \Gamma_{n+2j}$$

dove  $P$  è un prodotto qualsiasi di  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}$  per ogni  $0 \leq s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , allora  $H_g \sqcup_f H_g \in \mathcal{C}_2$ .

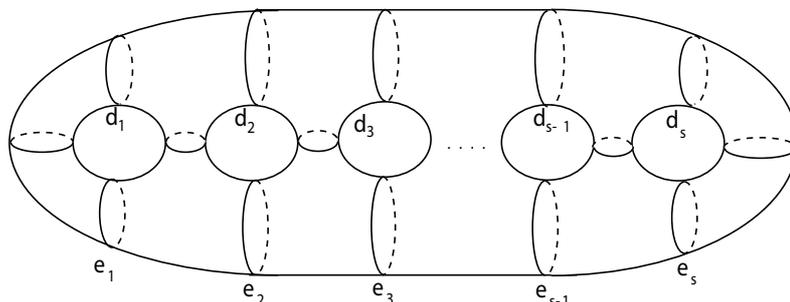


Figura 4.7: Curve in  $T_s$

*Dimostrazione dell'esempio 6.* Assumiamo  $h = \delta_1 \epsilon_1 \delta_1 \delta_2 \epsilon_2 \delta_2 \dots \delta_s \epsilon_s \delta_s$  dove  $\delta_i$  e  $\epsilon_i$  sono rispettivamente i twist lungo le curve  $d_i$  ed  $e_i$  di figura 4.7, allora  $H_s \sqcup_h H_s \cong S^3$ . Si osservi che tutti gli omeomorfismi che generano  $P$  commutano fra loro e con i vari  $\Gamma_r$  che definiscono  $f$ , quindi possiamo permutare a piacere il loro ordine nella definizione di  $f$ .  $H_g \sqcup_f H_g$  è 2-simmetrico rispetto  $L_g^{0,m+1}$  ed inoltre l'omeomorfismo quoziente  $\hat{f}$  di  $f$  è isotopo ad

$$l = \prod_{j=1}^s \beta_{n+2j} \beta_j \beta_{n+2j} \prod_{j=n-s+1}^n \beta_{n+2j} \beta_j \beta_{n+2j}$$

una volta trascurati i punti di ramificazione di  $\pi_g^{0,m+1}$ .

Immergiamo  $H_n$  in  $\mathbb{R}^3$  come in figura 4.8, di modo che i primi  $s$  buchi e gli ultimi  $s$  siano interscambiati dall'involuzione  $L_n^{0,r+1}$  con  $r = s - 2n$  (i buchi orizzontali sono quelli da  $s + 1$  ad  $n - s$ ). Risulta quindi evidente che  $h \circ \pi_n^{0,r+1} = \pi_n^{0,r+1} \circ l$ , quindi  $l$  ha omeomorfismo quoziente  $h$ , per cui  $H_n \sqcup_l H_n \in \mathcal{C}_1$  in quanto  $H_s \sqcup_h H_s \cong S^3$  ed  $H_s = H_n / L_n^{0,r+1}$ . Si conclude così che  $H_g \sqcup_f H_g \in \mathcal{C}_2$ .  $\square$

Vediamo un altro esempio d'applicazione nel caso in cui  $H_g \sqcup_{\hat{f}} H_g$  è uno spezzamento di Heegaard quoziente opportuno di  $H_k \sqcup_f H_k$  (tramite un'involuzione  $T \sqcup_f T$  con  $T$  equivalente a  $L_k^{0,l+1}$ ) ed esiste  $0 \leq m \leq g$  per

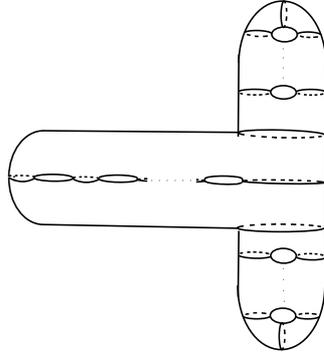


Figura 4.8: Immersione di  $H_n$

cui  $h \circ \pi_g^{0,m+1} = \pi_n^{0,m+1} \circ \hat{f}$  dove  $h : T_{g-2n} \rightarrow T_{g-2n}$  è un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$ . La figura a cui faremo riferimento sarà la figura 4.9.

Risulta evidente dall'immersione di  $H_k$  in  $\mathbb{R}^3$  della figura 4.9 che  $k$  ed  $l$  sono dispari: questo è sempre possibile a meno di eseguire una stabilizzazione 2-simmetrica (come vedremo in seguito). L'omeomorfismo quoziente  $\hat{f}$  di  $f$  tramite  $T$  (o meglio tramite il rivestimento ramificato doppio  $t$  indotto da  $T$ ) è simmetrico rispetto l'involuzione  $L_g^{0,m+1}$  di  $H_g = H_k/T$ , quindi assumiamo che  $\hat{f}$  sia generato dagli omeomorfismi

$$\gamma_1, \dots, \gamma_{2m+1}, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \gamma_{2m+2n+1}, \Gamma_{n+2}, \dots, \Gamma_{3n}, \delta_1$$

che si proiettano tramite  $\pi_g^{0,m+1}$  rispettivamente sulle twist

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}^2, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}, \tau_1$$

(adottando la notazione della proposizione 3.3.1). Osserviamo che anche  $L_g^{0,m+1}$  è sollevabile tramite  $t$ , infatti l'involuzione  $R$  di  $H_k$  è un suo sollevamento ed inoltre:

- un sollevamento di  $\gamma_i$  tramite  $t$  è l'omeomorfismo

$$\gamma'_i = \tau(a'_i) \circ \tau(T(a'_i))$$

per ogni  $i = 1, \dots, 2m + 1$  dove  $\tau(a'_i)$  è il twist lungo  $a'_i$ ;

- un sollevamento di  $\gamma_{2m+2n+1}$  tramite  $t$  è l'omeomorfismo

$$\gamma'_{2m+2n+1} = \tau(a') \circ \tau(T(a'))$$

dove  $\tau(a')$  è il twist lungo  $a'$ ;

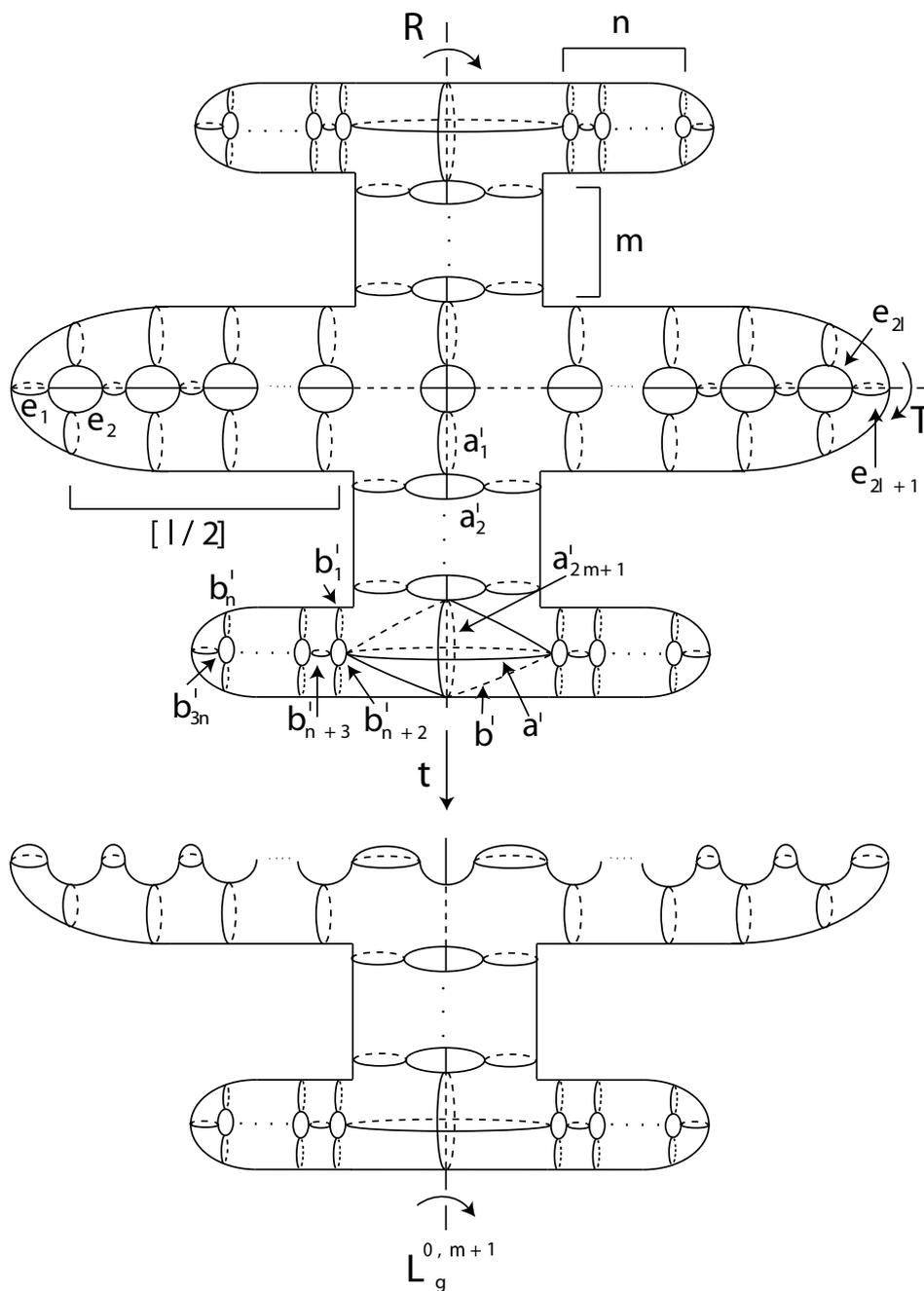


Figura 4.9: Immersione di  $H_k$  in  $\mathbb{R}^3$  con doppia simmetria

- un sollevamento di  $\Gamma_i$  tramite  $t$  è l'omeomorfismo

$$\Gamma'_i = \tau(b'_i) \circ \tau(T(b'_i)) \circ \tau(R(b'_i)) \circ \tau(T(R(b'_i)))$$

per ogni  $i = 1, \dots, n, n+2, \dots, 3n$  dove  $\tau(b'_i)$  è il twist lungo  $b'_i$ ;

- $\delta_1$  si solleva ad un omeomorfismo

$$\delta'_1 = \tau(b') \circ \tau(T(b'))$$

dove  $\tau(b')$  è il twist lungo  $b'$ .

Così gli omeomorfismi

$$\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2m+1}, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_n, \gamma'_{2m+2n+1}, \Gamma'_{n+2}, \dots, \Gamma'_{3n}, \delta'_1$$

si proiettano tramite il rivestimento ramificato  $\pi_g^{0,m+1} \circ t$  di grado 4 rispettivamente sui twist

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}^2, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}, \tau_1$$

di  $H_n$  e, dimenticandosi dei punti di ramificazione  $\pi_g^{0,m+1} \circ t$ , le mappe  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \tau_1$  sono isotope all'identità mentre  $\beta_{n+1}$  è isotopo a  $\beta_1$ .

Infine, i twist  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2l+1}$  lungo le curve  $e_1, \dots, e_{2l+1}$  commutano con  $T$  ma non con  $R$  ma  $\epsilon'_i = \epsilon_i \circ \epsilon_{2[\frac{l}{2}]+2+i}$  per ogni  $i = 1, \dots, 2[\frac{l}{2}] + 1$  e  $\epsilon'_{2[\frac{l}{2}]+2} = \epsilon_{2[\frac{l}{2}]+2}$  allora questi commutano sia con  $R$  che con  $T$ . In più, ogni  $\epsilon'_i$  si proietta tramite  $\pi_g^{0,m+1} \circ t$  in un braid twist opportuno che, dimenticandosi dei punti di ramificazione, è isotopo all'identità.

Allora se  $f$  è generato dagli omeomorfismi

$$\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2m+1}, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_n, \gamma'_{2m+2n+1}, \Gamma'_{n+2}, \dots, \Gamma'_{3n}, \delta'_1, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{2[\frac{l}{2}]+2}$$

di modo che una volta sostituite ogni occorrenza di

$$(\gamma'_1)^{\pm 1}, \dots, (\gamma'_{2m+1})^{\pm 1}, (\delta'_1)^{\pm 1}, (\epsilon'_1)^{\pm 1}, \dots, (\epsilon'_{2[\frac{l}{2}]+2})^{\pm 1}$$

con l'identità di  $H_n$  ed ognuna di

$$(\Gamma'_1)^{\pm 1}, \dots, (\Gamma'_n)^{\pm 1}, (\gamma'_{2m+2n+1})^{\pm 1}, (\Gamma'_{n+2})^{\pm 1}, \dots, (\Gamma'_{3n})^{\pm 1}$$

rispettivamente con i twist  $\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_n^{\pm 1}, \beta_1^{\pm 2}, \beta_{n+2}^{\pm 1}, \dots, \beta_{3n}^{\pm 1}$  di  $H_n$  si ottiene un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$  di genere  $n$ , allora  $H_k \sqcup_f H_k \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .

Possiamo estendere questo risultato al seguente esempio.

*Esempio 7.* Se  $f : T_k \longrightarrow T_k$  è generato dagli omeomorfismi

$$\gamma'_1, \dots, \gamma'_{2m+1}, \Gamma'_1, \dots, \Gamma'_n, \gamma'_{2m+2n+1}, \Gamma'_{n+2}, \dots, \Gamma'_{3n}, \delta'_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{2l+1}$$

di modo che una volta sostituite ogni occorrenza di

$$(\gamma'_1)^{\pm 1}, \dots, (\gamma'_{2m+1})^{\pm 1}, (\delta'_1)^{\pm 1}, (\epsilon_1)^{\pm 1}, \dots, (\epsilon_{2l+1})^{\pm 1}$$

con l'identità di  $H_n$  ed ognuna di

$$(\Gamma'_1)^{\pm 1}, \dots, (\Gamma'_n)^{\pm 1}, (\gamma'_{2m+2n+1})^{\pm 1}, (\Gamma'_{n+2})^{\pm 1}, \dots, (\Gamma'_{3n})^{\pm 1}$$

rispettivamente con i twist  $\beta_1^{\pm 1}, \dots, \beta_n^{\pm 1}, \beta_1^{\pm 2}, \beta_{n+2}^{\pm 1}, \dots, \beta_{3n}^{\pm 1}$  di  $H_n$  si ottiene un omeomorfismo di spezzamento di  $S^3$  di genere  $n$ , allora  $H_k \sqcup_f H_k \in \mathcal{C}_2$ .

*Dimostrazione dell'esempio 7.* I twist  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2l+1}$  commutano con  $T$  e, una volta dimenticati i punti di ramificazione di  $t$ , essi sono isotopi all'identità di  $H_g = H_k/T$ . Allora la tesi segue da quanto già osservato.  $\square$

## 4.5 Esempi di rivestimenti ramificati doppi iterati di $S^3$

Assumiamo le varietà CCO  $M$  e  $Q$  tali che esiste un rivestimento doppio  $p : M \longrightarrow Q$  ramificato sul link  $L$ .

Per il corollario 3.1.2 esistono gli spezzamenti di Heegaard  $H_g \sqcup_f H_g$  e  $H_n \sqcup_f H_n$  rispettivamente di  $M$  ed  $Q$  tali che  $f \in S_m^{2n}(T_g)$  ed  $\hat{f} \circ \pi_g^{0,m+1} = \pi_g^{0,m+1} \circ f$ . Quindi l'omeomorfismo  $\hat{f} : T_{n,2m+2} \longrightarrow T_{n,2m+2}$  è sollevabile e, se ci dimentichiamo dei  $2m+2$  punti di ramificazione in  $T_{n,2m+2}$  della restrizione di  $\pi_g^{0,m+1}$  a  $T_g$ , allora  $\hat{f}$  diventa un elemento  $h$  di  $M(T_n)$  che è generato dai twist  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2$  e  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  rispettivamente lungo le curve  $a_1, \dots, a_n, b_1, b_2$  e  $c_1, \dots, c_{n-1}$  di figura 4.10([20]) per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ . Infatti  $\hat{f}$  è un prodotto opportuno di

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}, \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n}$$

che abbiamo già visto come si riducono ai generatori

$$\beta_1, \beta_2, \beta_{n+2}, \dots, \beta_{3n} \tag{4.1}$$

di  $M(T_n)$ , una volta trascurati i punti di ramificazione del rivestimento ramificato doppio  $\pi_{g|T_g}^{0,m+1}$  indotto da  $L_{g|T_g}^{0,m+1}$ , ma le mappe (4.1) corrispondono alle twist  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ .

Consideriamo il 2-disco  $B$  immerso in  $T_n$  come mostrato in figura 4.10. Possiamo assumere che le restrizioni delle twist  $\alpha_i, \beta_r$  e  $\gamma_j$  a  $B$  siano uguali

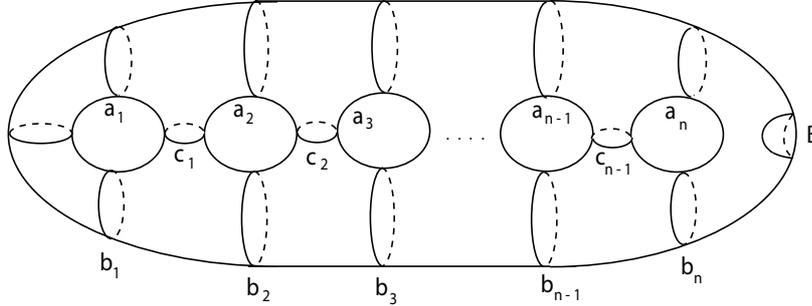


Figura 4.10: Generatori di Lickorish di  $M(T_n)$  e 2-disco  $B$

all'identità per ogni  $i = 1, \dots, n$ , ogni  $j = 1, \dots, n - 1$  ed ogni  $r = 1, 2$ , così anche  $h|_B$  è uguale all'identità. Se ora prendiamo due copie di  $H_n$  e le incolliamo identificando le due copie di  $B$  tramite un omeomorfismo  $B \rightarrow B$  che inverte l'orientazione, si ottiene il corpo di manici  $H_{2n}$ . Per costruzione su  $H_{2n}$  esiste l'involuzione  $R$  equivalente a  $L_{2n}^{0,1}$ , inoltre, se denotiamo con  $h^\uparrow : T_{2n} \rightarrow T_{2n}$  l'omeomorfismo ottenuto incollando le due copie di  $h$ , risulta  $R \circ h^\uparrow = h^\uparrow \circ R$  (infatti  $T_n = T_{2n}/R|_{T_{2n}}$  ed  $h^\uparrow$  induce su  $T_n$  l'omeomorfismo  $h$ ). Definiamo la 3-varietà CCO  $N = H_{2n} \sqcup_{h^\uparrow} H_{2n}$ , allora esiste un rivestimento doppio  $q : N \rightarrow Q$  ramificato su un nodo. Quindi, a partire da

$$M \xrightarrow{p} Q \xleftarrow{q} N,$$

grazie ai soliti lemmi 4.2.1 e 4.2.2, possiamo costruire una 3-varietà CCO  $W$  e dei rivestimenti doppi  $\tilde{p} : W \rightarrow M$ ,  $\tilde{q} : W \rightarrow N$  ramificati su dei link:

$$M \xleftarrow{\tilde{p}} W \xrightarrow{\tilde{q}} N.$$

Nel prossimo teorema i twist sono riferiti alle curve della figura 4.10.

**Teorema 4.5.1.** *Sia  $W$  una 3-varietà CCO. Supponiamo che  $W$  possieda uno spezzamento di Heegaard  $H_n \sqcup_h H_n$  che soddisfa una delle seguenti condizioni:*

- (i)  $n = 0, 1, 2$ ;
- (ii)  $n \geq 3$  ed  $h$  è generato da

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\};$$

- (iii)  $n \geq 3$  ed  $h$  è generato da

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_{n-1}, \}$$

Allora ogni rivestimento doppio  $M$  di  $W$  ramificato su un link è una  $k$ -iterazione debole con  $k \in \{1, 2, 3\}$ . Inoltre,  $W$  è una  $(r, s)$ -iterazione con  $r + s \leq 2k + 1$ .

**Dimostrazione.** Trattiamo i casi (i) e (ii) contemporaneamente. Se  $n = 0$  allora  $W$  è omeomorfa a  $S^3$ , quindi  $M \in \mathcal{C}_1$  ed  $M$  è una 1-iterazione debole. Se  $n = 1, 2$  o  $n \geq 3$  ed  $h$  è generato da  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\}$  allora  $W \in \mathcal{C}_1$  ([5] o [6]), quindi  $M \in \mathcal{C}_2$  ed è una  $k$ -iterazione debole con  $k \in \{1, 2\}$ .

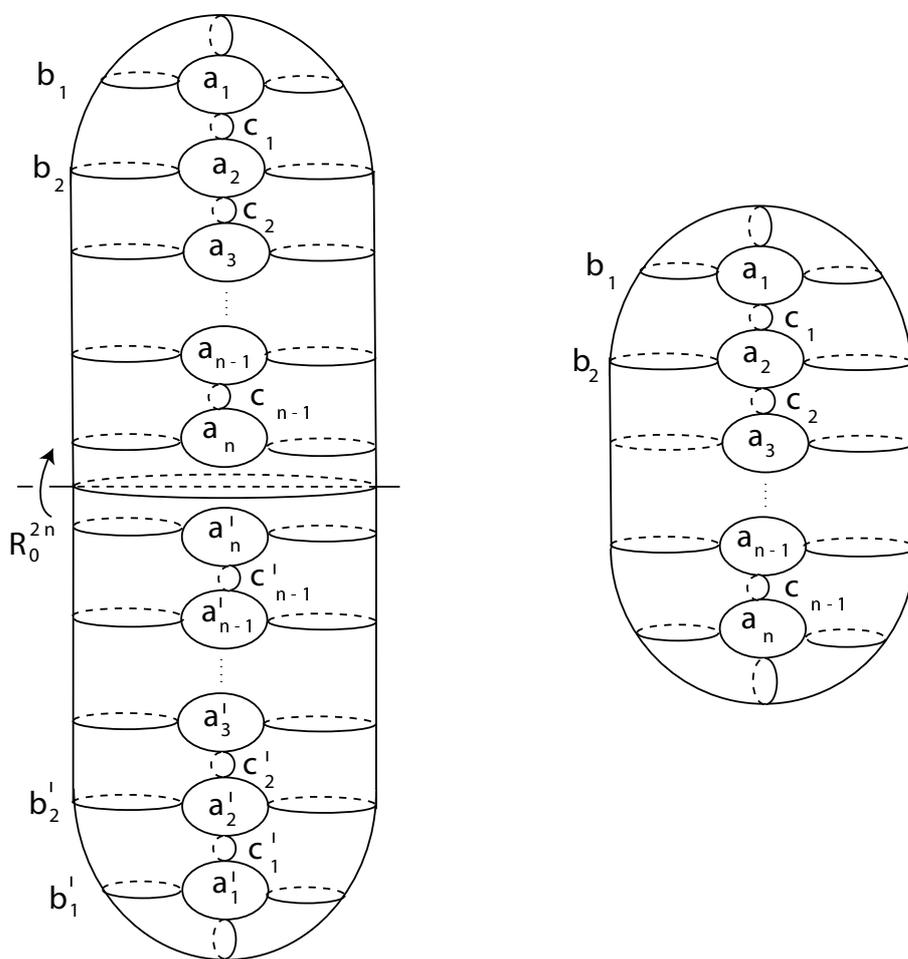


Figura 4.11: Sollevamenti dei generatori di  $h$

Si assuma (iii). Costruiamo la 3-varietà CCO  $N = H_{2n} \sqcup_{h^\uparrow} H_{2n}$  come mostrato all'inizio di questa sezione. Gli omeomorfismi che generano  $h^\uparrow$

appartengono al sottoinsieme dei generatori di  $S_0^{2n}(T_{2n})$  seguente

$$S = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{n+2}, \Gamma_{n+3}, \Gamma_{n+4}, \Gamma_{n+6}, \dots, \Gamma_{3n}\},$$

in quanto  $\Gamma_2 = \beta_2 \circ \beta'_2$  è un sollevamento di  $\beta_2$ ,  $\Gamma_1 = \beta_1 \circ \beta'_1$  è un sollevamento di  $\beta_1$ ,  $\Gamma_{n+2i} = \alpha_i \circ \alpha'_i$  è un sollevamento di  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) e  $\Gamma_{n+2j+3} = \gamma_{j+1} \circ \gamma'_{j+1}$  è un sollevamento di  $\gamma_{j+1}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) (vedere la figura 4.11).

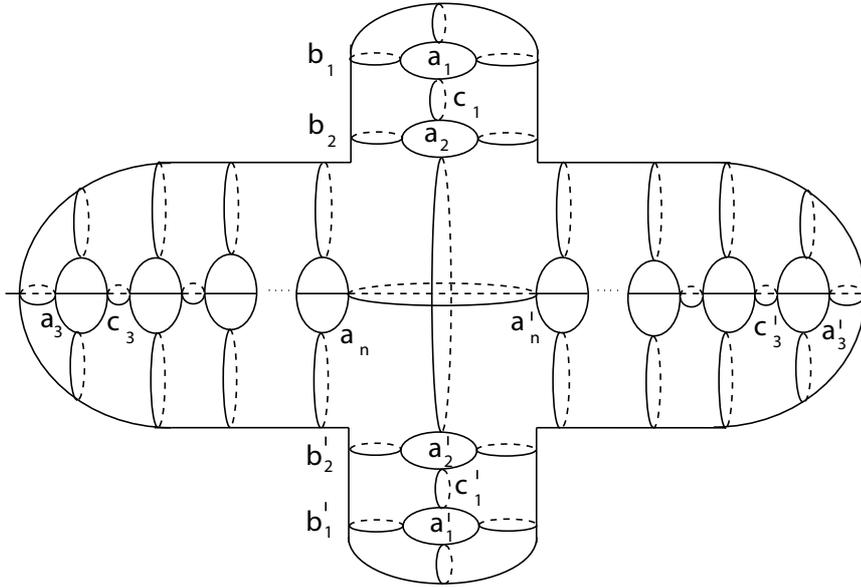


Figura 4.12: Immersione  $L_{2n}^{0,2n-3}$ -simmetrica

In figura 4.12 è mostrato come immergere  $H_{2n}$  dentro  $\mathbb{R}^3$  di modo che possieda la simmetria rispetto  $L_{2n}^{0,2n-3}$  (con spazio delle orbite  $H_2$ ). Si noti anche che tutti gli elementi di  $S$  appartengono a  $S_{2n-4}^4(T_{2n})$  (il mapping class group degli omeomorfismi  $L_{2n}^{0,2n-3}$ -simmetrici), allora  $h \in S_{2n-4}^4(T_{2n})$  e, di conseguenza,  $N = H_{2n} \sqcup_{h^\uparrow} H_{2n}$  possiede l'involuzione  $L_{2n}^{0,2n-3} \sqcup_{h^\uparrow} L_{2n}^{0,2n-3}$ , in altri termini  $N$  è un rivestimento ramificato doppio di una 3-varietà CCO  $P$  di genere di Heegaard al massimo 2. Allora  $P \in \mathcal{C}_1$ , quindi  $N \in \mathcal{C}_2$  allora  $N$  è una  $h$ -iterazione debole con  $h \in \{1, 2\}$ . Siccome sappiamo che esiste il diagramma di rivestimenti doppi ramificati su link

$$M \xleftarrow{\tilde{p}} W \xrightarrow{\tilde{q}} N,$$

allora  $M$  è una  $k$ -iterazione debole con  $k \in \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

## 4.6 Conclusioni

Il teorema 4.5.1 mostra una condizione sufficiente affinché una 3-varietà CCO sia una  $(k, h)$ -iterazione con  $k + h \leq 7$ . Nella condizione (iii) del teorema 4.5.1, fra tutti i twist che servono per descrivere completamente il mapping class group (e quindi tutte le 3-varietà CCO), manca solo  $\gamma_2$ . Quindi ha senso porsi le seguenti questioni:

- l'ultima proposizione può essere estesa a tutte le 3-varietà?
- in caso affermativo, il numero minimo di rivestimenti ramificati doppi per una tale rappresentazione può essere determinante?
- nel caso in cui anche l'ultima questione abbia una risposta affermativa, il numero minimo dei rivestimenti ramificati doppi resta "relativamente ridotto"?

Tali quesiti aperti sono una prospettiva di lavoro futura, per poter, forse, costruire un nuovo modo di rappresentare le 3-varietà CCO.



# Bibliografia

- [1] J.K. Bartoszyńska. *Involutions on 2-handlebodies*. Proc. Symp., Poznan/Pol. 1985 (Transformation groups), Lectures Notes Math. 1217, 151-166 (1986).
- [2] J. Berstein and A.L. Edmonds. *On the construction of the branched coverings of low-dimensional manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 247 (1979), 87-124.
- [3] J.S. Birman. *Mapping class groups of surfaces: a survey*. Annals Math. Studies 79, Discontinuous Groups and Riemann Surfaces, ed. Greenberg (Princeton Univ. Press, 1974), 57-71.
- [4] J.S. Birman. *Braids, links and mapping class group*. Annals Math. Studies 82, Princeton Univ. Press (1974).
- [5] J.S. Birman, H. Hilden. *On the mapping class group of closed surfaces as covering spaces*. Adv. Theory Riemann Surfaces, Proc.1969 Stony Brook Conf., 81-115 (1971).
- [6] J.S. Birman, H. Hilden. *Heegaard splittings of branched coverings of  $S^3$* . Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 315-352.
- [7] E. Bobthceva, R. Piergallini. *Covering moves and Kirby's calculus*. Preprint.
- [8] S. Donaldson. *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*. Doc. Math. J. DMV., Extra Volume, ICMII (1998), 309-314.
- [9] R.H. Fox. *A note on branched cyclic coverings of spheres*. Rev. Mat. Hisp-Amer. 32 (1972), 158-166.
- [10] R.H. Fox. *Two theorems about periodic transformations of the 3-sphere*. Mitch. Math. J. 14 (1967), 331-334.
- [11] R.H. Fox. *Coverings space with singularities*. Algebraic Geometry and Topology, Symposium in honour of S. Lefschetz, Princeton 1957, 243-257.

- [12] R.E. Gompf, A.I. Stipsicz. *4-manifolds and Kirby calculus*. Graduate Studies in Mathematics 20, Amer. Math. Soc. (1999).
- [13] C. McGordon, R.A. Litherland. *Incompressible surfaces in branched coverings*. Pure Appl Math. 112 (1984), 379-397.
- [14] Y.Z. Gurtas. *Positive Dehn twist expressions for some new involutions in mapping class group*. Preprint.
- [15] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Electronic version.
- [16] H.M. Hilden, J.M. Montesinos. *Lifting surgeries to branched coverings spaces*. Trans. Amer. Math. Soc 259, n°1 (1980), 157-165.
- [17] N.V. Ivanov. *Mapping class group*. Handbook of geometric topology.
- [18] J. Kallionigis, D. McCullough. *Orientation-reversing involutions on handlebodies*. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 1739-1755.
- [19] P.K. Kim, J.L. Tollefson. *Splitting the PL involution of nonprime 3-manifolds*. Michigan Math. J. 27 (1980), 379-397.
- [20] C. Labruère, L. Paris. *Presentations for the punctured mapping class group in terms of Artin groups*. Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), 73-114.
- [21] F. Laudenbach, R. Roussarie. *Un exemple de feuilletage sur  $S^3$* . Topology 9 (1970), 63-70.
- [22] W.B.R. Lickorish. *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60 (1964), 769-778.
- [23] C.R. Livesay. *Involutions with two fixed points on the three sphere*. Annals of Math. 78 n°3 (1963).
- [24] A. Mednykh, M. Reni. *Twofold unbranched coverings of genus two manifolds are hyperelliptic*. Israel J. Math. 123 (2001), 149-155.
- [25] A. Mednykh, M. Reni, A. Vesnin, B. Zimmermann. *Three-fold coverings and hyperelliptic manifolds: a three-dimensional version of a result of Accola*. Electronic version.
- [26] J.M. Montesinos *Lectures on branched coverings*. Note dal "Convegno - Studio" dal titolo "Geometry of differentiable manifolds", Roma 1984, 127-167.
- [27] J.M. Montesinos. *Surgery on link and double branched covers of  $S^3$* . "Knots, groups and 3-manifolds". Ann. Math. Studies 84 (1975), 227-259. Princeton Univ. Press.

- 
- [28] J.M. Montesinos. *Varietades de Seifert que son recubridores ciclicos ramificados de dos hojas*. Boll. Soc. Mat. Mexicana 18 (1973), 1-32.
- [29] J.M. Montesinos, W. Whitten. *Constructions of two-fold branched covering space*. Pacific J. Math. 125, n°2 (1986), 415-446.
- [30] M. Mulazzani. *On p-symmetric Heegaard splittings*. J. Knot th. and its appl. 9, n°8 (2000), 1059-1067.
- [31] R.B. Nelson. *Some fiber preserving involutions of orientable 3-dimensional handlebodies*. Houst. J. Math. 9 (1983), 255-269.
- [32] R. Piergallini. *Covering moves*. Trans. Amer. Math. Soc. 325 (1991), 903-920.
- [33] R. Piergallini. *3-manifolds and pullbacks of branched coverings*. J. Knot Theory Ramif. 4 (1995), 493-501.
- [34] J.H. Przytycki. *Action of  $Z_n$  on some surfaces-bundle over  $S^1$* . Colloq. Math. 47, n°2 (1982), 221-239.
- [35] F. Raymond, J.L. Tolleson. *Closed 3-manifolds with no periodic maps*. Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), 403-418; Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 803-807.
- [36] M. Reni, B. Zimmermann. *Extending finite group actions from surfaces to handlebodies*. Proc. Amer. Math. Soc. 124 n°9 (1996), 2877-2887.
- [37] D. Rolfsen. *Knots and links*. Publish or perish, 1976.
- [38] C.P. Rourke, B.J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982.
- [39] L. Rudolph. *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*. Comment. Math Helvetici 58 (1983), 1-37.
- [40] M. Sakuma. *Surgery description of orientation-preserving periodic maps on compact orientable 3-manifolds*. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste (Suppl 1) XXXII (2001), 375-396.
- [41] N. Saveliev. *Lectures on the topology of 3-manifolds*. Berlin, New York: de Gruyter, 1999.
- [42] S. Suzuki. *On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody*. Can. J. Math. XXIX, No. 1 (1977), 111-124.
- [43] H. F. Trotter. *Non-invertible knot exist*. Topology 2 (1964), 275-280.

- [44] O.J. Viro. *Linkings, 2-sheeted branched coverings and braids*. Math. USSR Sbornik 16 (1972), 223-226.
- [45] F. Waldhausen. *Heegaard Zerlegungen der 3-sphere*. Topology 7 (1968), 195-203.
- [46] F. Waldhausen. *Über involutionen der 3-sphere*. Topology 8 (1969), 81-91.