

**‘ALMA MATER STUDIORUM’ UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

DOTTORATO DI RICERCA

IN

GEOFISICA

XIX CICLO

SETTORE SCIENTIFICO DISCIPLINARE GEO/11

**SEPARAZIONE DI CONTRIBUTI DI ONDA PIANA E DI CAMPO VICINO  
PER L’INVERSIONE DI DATI MAGNETOTELLURICI**

TUTORE:

DOTT.ZACCARIA PETRILLO

CANDIDATO:

MARIA GIULIA DI GIUSEPPE

REFERENTE:

CH.MO PROF. DOMENICO PATELLA

COORDINATORE DEL DOTTORATO:

CH.MO PROF. MICHELE DRAGONI

## Introduzione

Nei primi anni 50 Andrei Nikolaevich Tikhonov, matematico e fisico russo, introdusse la Magnetotellurica (MT) come metodo di prospezione geofisica, ma curiosamente, forse a causa della stessa vastità dei suoi interessi, non ne intuì appieno le sue potenzialità. A pochi anni di distanza, con un famoso articolo del 1953, fu il fisico francese Louis Cagniard a rivelare a pieno la forza di questa metodologia, condividendone di diritto la paternità.

La MT è un metodo a sorgente naturale che sfrutta le variazioni del campo magnetico terrestre di origine esterna nella banda di frequenza  $10^{-4} \div 10^4$  Hz. La complessa interazione del vento solare (sostanzialmente protoni ed elettroni liberi) con la magnetosfera terrestre genera campi elettromagnetici (EM) che eccitano sistemi di correnti nella ionosfera. La riemissione di campo EM verso la superficie terrestre, compresa nell'intervallo di frequenza  $10^{-4} \div 1$  Hz, è la sorgente a bassa frequenza MT. Nell'intervallo  $1 \div 10^4$  Hz la sorgente è invece legata alle auto-oscillazioni di Schumann del sistema terra-ionosfera eccitate dalla attività temporalesca, praticamente continua nella fascia tra i tropici.

Il principio su cui si basa la Magnetotellurica è l'approssimazione diffusiva del campo EM all'interno di un conduttore, viste le frequenze MT e l'intervallo di resistività  $0.1 \div 10^6$   $\Omega$ -m, che caratterizza i materiali terrestri. Il valore del campo magnetico alla superficie è determinato dal campo incidente e dai campi secondari indotti dalle correnti di Foucault, mentre il campo elettrico è ricavato dalla differenza di potenziale tra due punti della superficie.

Nonostante la Magnetotellurica si sia dimostrata un potente e versatile mezzo geofisico per studi fondamentali sia su strutture continentali che di dettaglio, ricerca di idrocarburi e sorgenti geotermiche, i notevoli vantaggi rispetto ad altri metodi di prospezione legati all'utilizzo di sorgenti naturali sono bilanciati dal non controllo delle sorgenti, che rappresenta il punto più delicato dell'applicazione del metodo, soprattutto in aree fortemente urbanizzate, dove le sorgenti di tipo antropico legate alle linee di distribuzione della corrente elettrica ed alle reti ferroviarie, anche esse elettriche, sono difficilmente trattabili sia dal punto di vista matematico che da quello statistico. Queste ultime, infatti, dal punto di vista elettromagnetico, possono essere rappresentate da segnali dipolari (campo vicino) che, in generale, si sovrappongono o possono oscurare la sorgente MT, impedendo la corretta stima della resistività apparente. In particolare, il segnale immesso dai treni nel terreno tende a propagarsi, mantenendosi coerente per un raggio dell'ordine delle decine di chilometri.

Questo contesto spinge all'utilizzo di nuove e più sofisticate tecniche di analisi dati, capaci di sfruttare, inoltre, il carattere altamente multivariato della natura del problema e la possibilità di avere un numero di canali di acquisizione dati più elevato rispetto al passato grazie alle nuove tecniche di acquisizione.

Le tecniche di processing che si basano su un modello statistico multivariato, quindi, appaiono essere, anche a seguito della più recente letteratura, le più promettenti per la soluzione delle problematiche prima accennate.

Tra queste l'algoritmo più recente, è quello introdotto da Egbert (1997), che permette di definire uno stimatore dei parametri MT, chiamato RMEV, che si basa sull'analisi robusta di array di stazioni costituite da multipli canali, e che permette di esplorare in dettaglio la struttura del segnale elettromagnetico, di fornire una stima del numero di serie coerenti (d'onda piana e non) presenti nello spazio vettoriale dei dati e di ricostruire tutte le relazioni lineari che collegano tra loro singoli canali con singoli canali o gruppi di canali a gruppi di canali, come, ad esempio, gli elementi del tensore impedenza, nel caso delle funzioni di trasferimento tra canali locali magnetici e canali locali elettrici, la funzione di trasferimento magnetico nel caso di canali magnetici di siti differenti, ed il tipper nel caso di canali locali magnetici.

In questo lavoro di tesi, si è cercato di stimare, utilizzando l'analisi multivariata, le curve di resistività apparente e fase relative a sondaggi MT effettuati ai Campi Flegrei, per ottenere un imaging elettromagnetico dell'area.

I Campi Flegrei, totalmente urbanizzati e strutturalmente complessi, rappresentano un ambiente in cui, l'applicazione dei metodi elettromagnetici è particolarmente complicata, sia dal punto di vista del segnale elettromagnetico, con una sorta di bagno in cui sono state immerse le stazioni di misura, caratterizzato da una serie di dipoli elettrici mobili e contemporanei, i treni locali e nazionali, che circondano i siti, creando complessi effetti sulla natura dei campi alla superficie, a priori tutti da identificare, sia per il carattere fortemente 3D delle strutture geologiche da analizzare, che si aggiunge ad un possibile effetto di screening del mare. Alla luce di quanto detto, il nucleo del lavoro di tesi è stata la ricerca di un criterio che permettesse di discernere i contributi associabili a sorgenti d'onda piana da quelli di campo vicino, di natura antropica, implementando aspetti particolari delle tecniche multivariate applicate in maniera standard in MT, insieme ad un lavoro di test, sintetici e non, in fase di inversione dei dati.

La tesi si sviluppa sostanzialmente in due parti: nella prima parte, che comprende i primi quattro capitoli, di carattere puramente teorico, si sistematizza l'introduzione della metodologia e dei problemi legati alla natura delle sorgenti, oltre a sviluppare un'utile riassunto delle tecniche di analisi dati.

La seconda parte (quinto e sesto capitolo) comprende il lavoro sperimentale, con le misure di campagna (14 sondaggi MT e 17 sondaggi CSAMT), l'effettuazione di test su set di dati controllati per verificare l'estendibilità dell'approccio multivariato all'analisi del segnale MT non solo da un punto di vista teorico, l'elaborazione dei dati raccolti, analizzati in dettaglio sito per sito sulla difficile strada della separazione del segnale MT dal noise coerente, e l'inversione 2D di un profilo parallelo alla costa.

# 1 Principi teorici

## 1.1 Equazioni di Maxwell nei mezzi macroscopici

Le equazioni di Maxwell, per il campo elettrico  $\vec{E}$  e il campo magnetico  $\vec{B}$ , possono essere concepite come equazioni che forniscono i campi in ogni punto dello spazio, purché siano note le sorgenti rappresentate dalla densità di carica  $q$  e dalla densità di corrente  $\vec{J}$ . Se le sorgenti sono localizzate e in piccolo numero, la determinazione dei campi è un problema trattabile, ma, in presenza di aggregati macroscopici di molecole la soluzione delle equazioni è praticamente impossibile.

In genere ciò che è importante è il valore del campo o della sorgente su un volume che è grande rispetto al volume occupato da un singolo atomo o da una molecola. Chiamiamo queste grandezze medie i campi macroscopici o le sorgenti macroscopiche.

Le equazioni di Maxwell macroscopiche sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = q \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{J}(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

dove  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  [ $\text{Vm}^{-1}$ ] è il vettore intensità del campo elettrico,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  [ $\text{Vsm}^{-2}$ ] è il vettore induzione magnetica,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  [ $\text{Am}^{-1}$ ] è il vettore intensità del campo magnetico,  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  [ $\text{Asm}^{-2}$ ] è il vettore di induzione dielettrica o vettore spostamento elettrico,  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  [ $\text{Am}^{-2}$ ] è il vettore densità di corrente e  $q$  [ $\text{Cm}^{-2}$ ] la densità di carica.

Le sorgenti del campo elettromagnetico non sono fra di loro completamente indipendenti essendo soggette alla condizione di conservazione della carica, formalizzata attraverso l'equazione di continuità

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

L'insieme delle equazioni di Maxwell coinvolge le componenti dei quattro campi vettoriali  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{D}(\vec{r}, t)$ . Per una loro risoluzione formale è necessario esprimere i campi derivati,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  in funzione di  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Queste relazioni, implicite nelle equazioni di Maxwell, sono note come *relazioni costitutive* ed assumono la forma

$\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}]$  e  $\vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$ . A queste va affiancata, per i mezzi conduttori, la *legge di Ohm* generalizzata,  $\vec{J} = \vec{J}[\vec{E}, \vec{B}]$ .

Queste relazioni, non necessariamente semplici, riflettono le proprietà elettromagnetiche del mezzo materiale in esame e, nel caso di mezzi omogenei ed isotropi, assumono la semplice forma

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.3)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.4)$$

dove  $\mu$  è la permeabilità magnetica e  $\epsilon$  è la permittività elettrica, che nel vuoto assumono rispettivamente i valori  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  henry/metro e  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  farad/metro, mentre la legge di Ohm assume la forma

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (1.5)$$

dove  $\sigma$  rappresenta la conducibilità elettrica del mezzo, ed il suo reciproco  $\rho$ , la resistività elettrica.

## 1.2 Condizioni ai limiti sulle superfici di separazione tra mezzi diversi

Le equazioni di Maxwell sono valide all'interno di ogni dominio omogeneo del mezzo materiale considerato. All'interfaccia tra due mezzi omogenei differenti i valori dei parametri che caratterizzano il mezzo ( $\mu, \sigma, \epsilon$ ) possono avere brusche variazioni.

Quindi nel caso in cui porzioni diverse dello spazio siano riempite con materiali con caratteristiche elettriche diverse, il problema viene trattato risolvendo le equazioni di Maxwell all'interno di ogni materiale e imponendo ai campi, sulle superfici di separazione tra materiali diversi, le condizioni di raccordo.

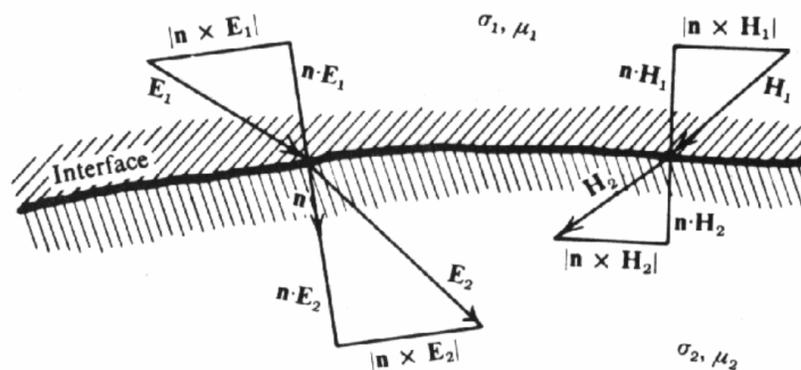


Figura 1.1: Condizioni al contorno sul campo elettromagnetico all'interfaccia tra due mezzi omogenei.

Detto  $\hat{n}$  il versore normale alla superficie di separazione tra due mezzi, in un dato punto, se si suppone che siano assenti cariche e correnti esterne, valgono, per le componenti normali dei campi, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} &= 0 \\ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} &= \eta\end{aligned}\tag{1.6}$$

dove  $\eta$  è la densità superficiale di cariche elettriche lungo l'interfaccia tra i due mezzi. Dunque la componente normale di  $\vec{B}$  è continua nella transizione attraverso l'interfaccia, mentre quella di  $\vec{D}$  subisce una discontinuità pari proprio a  $\eta$ . Questa condizione si ricava applicando il teorema della divergenza ad un cilindretto con basi appartenenti ai mezzi 1 e 2 disposto perpendicolarmente all'interfaccia.

Per le componenti tangenziali dei campi, invece si avrà:

$$\begin{aligned}\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_s \\ \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0\end{aligned}\tag{1.7}$$

dove  $\vec{J}_s$  rappresenta la densità di corrente superficiale. Questa condizione si ottiene applicando il teorema di Stokes ad un circuito che va dal mezzo 1 al mezzo 2 lungo un piano passante per la normale alla superficie.

Nel caso in cui la densità di carica superficiale  $q_s$  e la densità di corrente superficiale  $J_s$  siano nulle si ottengono delle equazioni la cui validità nel caso che i due mezzi siano dielettrici è estendibile senza alcuna modifica dal caso stazionario a quello non stazionario e, dunque, al caso di onde elettromagnetiche che attraversino la superficie di interfaccia tra due materiali dielettrici diversi.

### 1.3 Onde elettromagnetiche nei conduttori

Consideriamo un'onda elettromagnetica incidente su un conduttore omogeneo e indefinito. Per effetto del campo elettromagnetico periodico, gli elettroni liberi del conduttore si muoveranno con moto oscillatorio forzato, e a questo moto si accompagneranno effetti dissipativi. Ci aspettiamo, dunque che quando un'onda elettromagnetica si propaga in un conduttore, l'onda si attenui e il conduttore si riscaldi.

Nel caso di un conduttore ohmico la relazione che lega staticamente la densità di corrente  $\vec{J}$  al campo elettrico  $\vec{E}$  applicato è la legge di Ohm (1.5).

Trattandosi di una relazione locale, che lega cioè solo grandezze calcolate nello stesso punto, ci aspettiamo che questa relazione valga anche in condizioni non stazionarie.

La quarta equazione di Maxwell nel caso di un conduttore ohmico sarà:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.8)$$

calcolando il rotore e utilizzando una nota identità vettoriale<sup>(a)</sup>, otteniamo per il campo magnetico la seguente relazione

$$-\nabla^2 \vec{H} = \sigma(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (1.9)$$

e sostituendo la terza equazione di Maxwell si ha

$$\nabla^2 \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

Un'equazione formalmente identica si ottiene per  $\vec{E}$  applicando l'operatore rotore alla terza equazione di Maxwell e confrontandola con la quarta. Per cui in definitiva le equazioni per la propagazione dei campi elettromagnetici in un mezzo isotropo e omogeneo avente conduttività elettrica  $\sigma$ , permeabilità  $\mu$  e costante dielettrica  $\epsilon$  saranno

$$\nabla^2 \vec{H} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Consideriamo, per il momento, i parametri  $\mu$  e  $\epsilon$  indipendenti dalla frequenza e scriviamo il campo elettrico e quello magnetico come il prodotto di una componente sinusoidale nel tempo e di una funzione delle sole coordinate spaziali

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\omega) e^{(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\omega) e^{(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)} \quad (1.12)$$

Sostituendo queste espressioni nelle (1.11) abbiamo

$$\nabla^2 \vec{E} - i\omega \sigma \mu \vec{E} + \epsilon \mu \omega^2 \vec{E} = 0 \quad \nabla^2 \vec{H} - i\omega \sigma \mu \vec{H} + \epsilon \mu \omega^2 \vec{H} = 0 \quad (1.13)$$

Analizziamo due casi limite:

Nello spazio libero ed in molti dielettrici la conducibilità elettrica  $\sigma \rightarrow 0$  rendendo trascurabile il termine in  $\omega$ . Le equazioni precedenti diventeranno

$$\nabla^2 \vec{E} + \epsilon \mu \omega^2 \vec{E} = 0 \quad \nabla^2 \vec{H} + \epsilon \mu \omega^2 \vec{H} = 0 \quad (1.14)$$

---

(a)  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

queste equazioni note come equazioni di Helmholtz sono equazioni d'onda stazionaria poiché non compare la dipendenza dal tempo, e il campo elettromagnetico si propaga senza attenuazione.

Nei metalli e nei mezzi altamente conduttivi il termine trascurabile è quello in  $\omega^2$ . Si ottiene quindi

$$\nabla^2 \vec{E} - i\omega\sigma\mu\vec{E} = 0 \quad \nabla^2 \vec{H} - i\omega\sigma\mu\vec{H} = 0 \quad (1.15)$$

questo tipo di equazione è nota come equazione di diffusione e il campo elettromagnetico si diffonde con un fattore di attenuazione legato a  $\sigma$ .

Queste due relazioni si riducono all'equazione di Laplace nel caso di onde elettromagnetiche che si propagano nell'aria o in rocce caratterizzate da una conduttività molto piccola.

Generalmente, queste equazioni sono di difficile risoluzione. Esiste, però, un caso particolare, quando si considera un'onda piana polarizzata, in cui si ottiene facilmente una soluzione. Assumiamo che l'onda si stia propagando lungo l'asse  $z$ , in modo che il piano  $xy$  sia il piano di polarizzazione. Si avrà

$$H = H(z, t) = H_0 e^{(kz + i\omega t)} \quad (1.16)$$

da cui sostituendo nella prima delle (1.15) le seguenti relazioni

$$\nabla^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = k^2 H \quad \frac{\partial H}{\partial t} = i\omega H \quad (1.17)$$

abbiamo il numero d'onda  $k$ , per un modello quasi stazionario

$$k^2 = i\omega\sigma\mu \quad \Rightarrow \quad k = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} = \pm(1+i)a \quad (1.18)$$

$$\text{con } a = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}} .$$

Poiché  $H$  deve avere un valore finito quando  $z \rightarrow +\infty$ , scartiamo la soluzione con il segno positivo, ottenendo

$$H = H_0 e^{i\omega t - (1+i)az} = H_0 e^{-az + i(\omega t - az)} \quad (1.19)$$

Consideriamo, come soluzione richiesta solo la parte reale

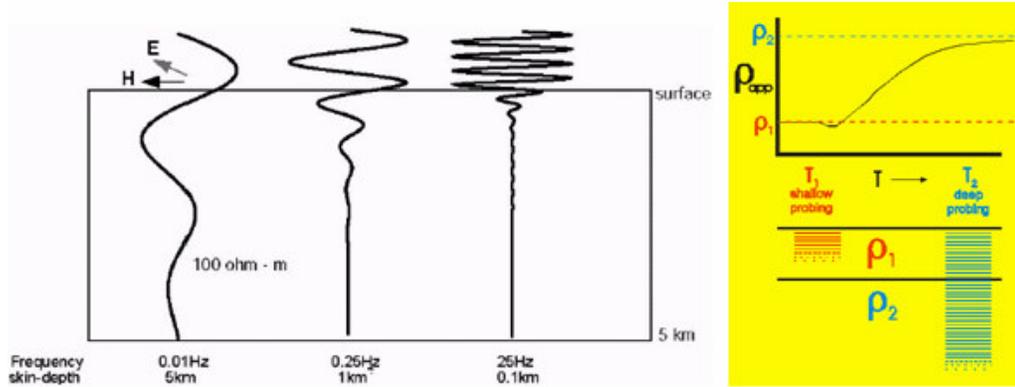
$$H = H_0 e^{-az} \cos(\omega t - az) \quad (1.20)$$

la seconda parte della precedente espressione caratterizza un semplice moto armonico con un proprio shift di fase. L'esponenziale, invece, rappresenta l'attenuazione  $\delta$  dell'onda.

Le onde elettromagnetiche, quindi, hanno uno smorzamento esponenziale con la distanza: un'onda che penetra in un conduttore è smorzata per un fattore  $1/e=0.369$  su una distanza

$$\delta = \frac{1}{a} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (1.21)$$

Questa espressione è l'approssimazione valida per buoni conduttori. La distanza  $\delta$  prende il nome di skin depth o profondità di penetrazione. Per un conduttore rame il rame  $\delta=0.85$  cm per una frequenza di 60 Hz e  $\delta=0.71 \cdot 10^{-3}$  per 100 MHz.



**Figura 1.2:** Le onde elettromagnetiche penetrano in profondità in modo inversamente proporzionale alla frequenza. A ogni frequenza il rapporto E/H determina la resistività elettrica media in funzione dello skin depth. Combinando le misure a diverse frequenze si ottengono le variazioni di resistività in profondità.

## 2 Il metodo magnetotellurico

La magnetotellurica (MT), nata negli anni 50, è uno dei metodi di prospezione geofisica, che per studiare la struttura di conducibilità elettrica del sottosuolo utilizza come sorgente campi elettromagnetici naturali, cioè non prodotti dall'intervento umano, ma presenti in natura. Permette l'esplorazione di zone impervie, o povere di dati sismici, a costi molto bassi, creando un minimo, se non proprio nullo impatto ambientale.

L'idea alla base del metodo MT è molto semplice: scelto un punto di osservazione sulla superficie terrestre, le componenti orizzontali dei campi magnetici ed elettrici, misurati in tale punto e associati a sorgenti naturali ci permettono di ottenere informazioni sulla struttura elettrica del sottosuolo. Il rapporto, infatti, tra l'intensità del campo elettrico e quella del campo magnetico, definisce una quantità che ha le dimensioni di un'impedenza elettrica e che, in particolari condizioni, è funzione delle proprietà elettriche del mezzo.

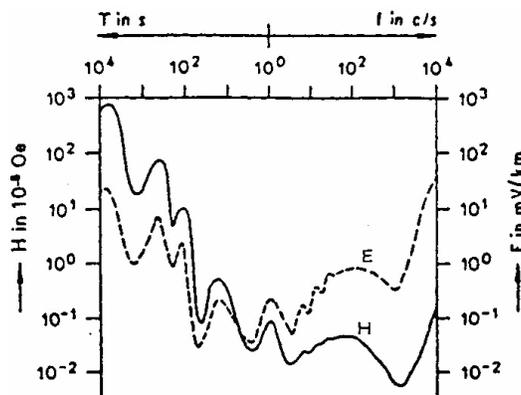


Figura 2.1: Spettro delle ampiezze delle variazioni MT nell'intervallo di frequenze  $10^{-4}$ - $10^4$  Hz.

La forza del metodo sta nella capacità, che lo rende unico tra le altre tecniche di prospezione geofisica, di esplorare un range di frequenze molto ampio. A frequenze relativamente alte, a causa dell'effetto di skin, l'impedenza fornisce informazioni soltanto sulle proprietà degli strati più superficiali. A frequenze più basse, invece, la lunghezza di penetrazione del campo aumenta, permettendo in questo modo l'osservazione di aree più profonde.

Nonostante la sua potenza e versatilità il non controllo delle sorgenti rappresenta per altri versi anche il punto più delicato dell'applicazione MT, soprattutto in aree fortemente urbanizzate, dove a quella MT si sovrappongono sorgenti di tipo antropico, legate alle linee di distribuzione della corrente elettrica ed alle reti ferroviarie, anche esse elettriche, che, soprattutto in alcune bande di frequenza possono risultare dominanti e che sono, inoltre, difficilmente trattabili sia dal punto di vista matematico che da quello statistico.

## 2.1 Sorgenti del metodo MT

Il metodo magnetotellurico utilizza come sorgente le variazioni nel tempo della componente di origine esterna del campo magnetico terrestre (c.m.t.).

Sulla superficie terrestre il 98% circa del c.m.t. è di origine interna alla terra, mentre il rimanente 2% è di origine esterna. Il campo magnetico di origine interna, varia così lentamente nel tempo, che può essere considerato costante nel range temporale analizzato dal metodo magnetotellurico.

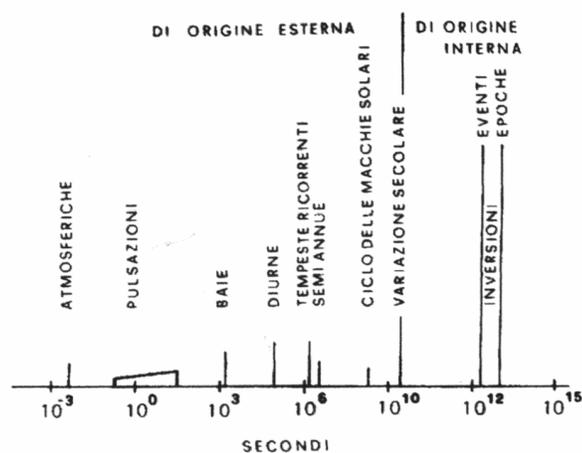


Figura 2.2: Spettro delle principali variazioni temporali del c. m. t.. Le ampiezze delle variazioni di origine interna non sono in scala con quelle delle variazioni di origine esterna [Garland, 1975].

### 2.1.1 Sorgenti ad alta frequenza

Le sorgenti MT sono di natura differente. Per frequenze che vanno da 1 a  $10^4$  Hz sono principalmente dipendenti dall'attività meteorologica ed in particolare dai fulmini legati ai grandi temporali, che rappresentano una sorgente di energia elettromagnetica sostanzialmente uniforme data la presenza più o meno costante di temporali sulla superficie terrestre. Il punto in cui abbiamo la maggiore attività temporalesca è localizzato nelle regioni equatoriali, dove le piogge sono presenti in media 100 giorni all'anno.

Se si analizza l'andamento a breve distanza del campo elettromagnetico generato da un fulmine, si osserva un'alta densità di energia in una banda che va da 1 a 10 kHz. Propagandosi a distanze più grandi le componenti ad alta frequenza si attenuano, mentre quelle a frequenza minore si amplificano grazie ad una propagazione a guida d'onda con riflessioni multiple dei fronti d'onda tra la superficie terrestre e la ionosfera.

Alle nostre latitudini questo meccanismo conduce a fronti d'onda sostanzialmente piani nella banda di frequenza  $[1-10^4]$  Hz.



Figura 2.3: Numero medio di temporali per anno sulla superficie terrestre.

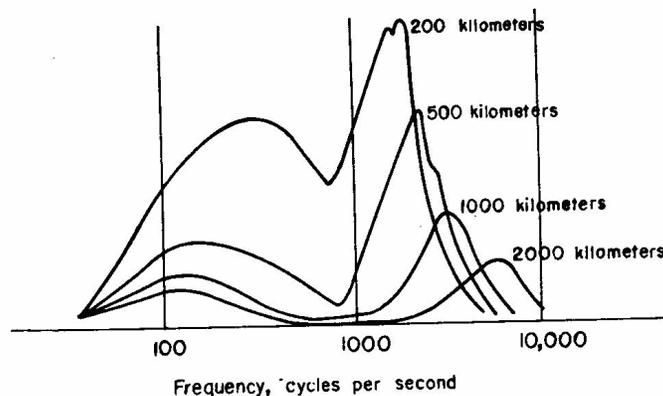


Figura 2.4: Spettro della densità di energia del campo elettromagnetico generato da un fulmine, in funzione della distanza.

### 2.1.2 Sorgenti a bassa frequenza

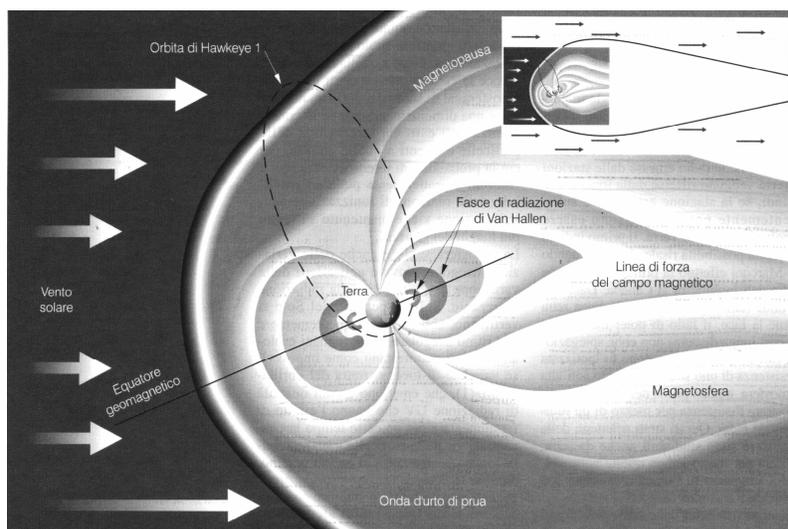
Uno dei vantaggi della MT è la possibilità di esplorare grandi profondità: le frequenze più interessanti sono, quindi, quelle che variano nell'intervallo  $1-10^4$  Hz.

In questo range di frequenze le variazioni del campo elettromagnetico terrestre di origine esterna, sono legate all'interazione del vento solare con il campo magnetico terrestre permanente e con la ionosfera.

Nelle vicinanze della terra, ad una distanza pari a 3-4 volte il raggio terrestre, le linee di forza del campo magnetico terrestre sono abbastanza simmetriche, mentre a distanze maggiori, il campo comincia a deformarsi: le linee di forza si infittiscono nella parte rivolta al sole, mentre si diradano nella parte opposta. Questo accade a causa dell'interazione tra il campo magnetico e il vento solare, ossia il flusso di particelle cariche che viene espulso senza interruzione dal sole a velocità comprese tra 300 e 800 km/s. Queste particelle, principalmente protoni ed

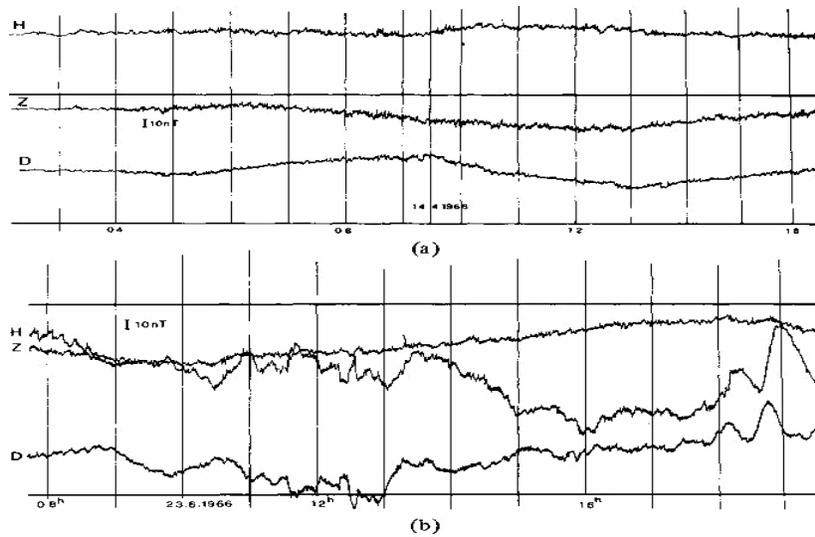
elettroni, vengono intrappolate nella magnetosfera e deflesse in direzione perpendicolare alla loro direzione di propagazione ed alle linee di forza del campo magnetico terrestre.

L'effetto globale di questi fenomeni è una brusca diminuzione del c.m.t. fino al livello di qualche nT, in una limitata zona di spazio, detta magnetopausa, che rappresenta il limite esterno della magnetosfera, cioè, della zona di spazio influenzata dal c.m.t.. La magnetopausa tende a spostarsi avanti e dietro al variare dell'energia del vento solare. Il suo bordo è più schiacciato verso la terra nella direzione del vento solare arrivando a distanze di 4-5 raggi terrestri mentre tende ad allungarsi, fino a 10-20 raggi terrestri, nella direzione opposta.

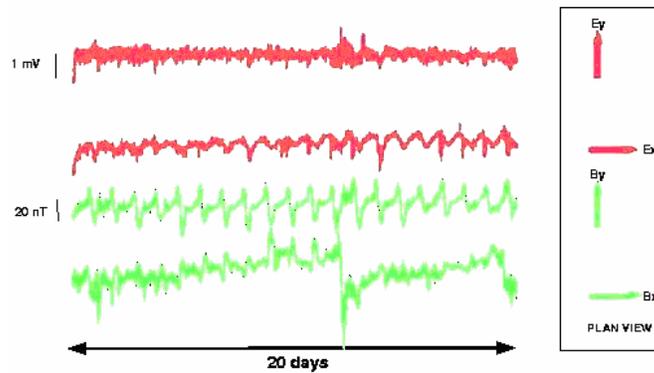


**Figura 2.5: La magnetosfera terrestre, interagendo col vento solare, assume la caratteristica forma a goccia (riquadro in alto).**

Questi fenomeni si accentuano in occasione delle tempeste magnetiche che si verificano in periodi di più intensa eruzione delle macchie solari. Le pulsazioni della magnetopausa generano all'interno della ionosfera onde magnetoidrodinamiche, legate alle correnti elettriche indotte, ed ai conseguenti spostamenti di cariche elettriche, il cui effetto globale è di modificare profondamente gli effetti magnetici che hanno origine nella magnetopausa, mentre si propagano verso la superficie terrestre. Quando sono osservati alla superficie terrestre, questi effetti sono classificati come micropulsazioni, se originati dalle variazioni del vento solare, o come effetti diurni, se originati da effetti legati alla rotazione del pianeta e della magnetosfera ad esso solidale con la sua forma simmetrica.

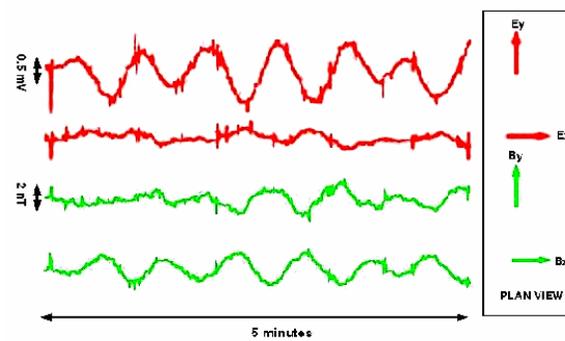


**Figura 2.6:** Regrazioni di Z (componente verticale del c.m.t.), H (componente orizzontale nella direzione N-S), D (componente orizzontale nella direzione E-W) ottenute (a) in un giorno di quiete magnetica, (b) in un giorno di tempesta magnetica.



**Figura 2.7:** Andamento dei campi MT in occasione di eruzione delle macchie solari.

Alle nostre latitudini, in approssimazione locale, i campi magnetici indotti da questi fenomeni possono essere considerati un fronte d'onda piano che incide perpendicolarmente sulla superficie terrestre e che copre la banda di frequenza  $[1-10^{-4}]$  Hz.

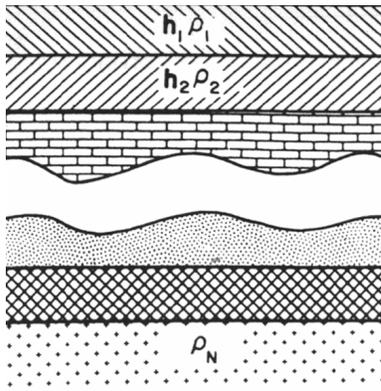


**Figura 2.8:** Campi MT generati dalle risonanze magnetiche.

## 2.2 Tensore impedenza e resistività

Per adattare le equazioni di Maxwell alla MT è necessario fare alcune assunzioni semplificative. Le sorgenti MT, come appena visto, coprono uno spettro di frequenze che va da  $10^{-4}$  Hz a  $10^4$  Hz. E' dimostrato [Madden&Nelson, 1964] che in tale banda di frequenze il campo elettromagnetico esterno incide sulla superficie terrestre con un fronte d'onda sostanzialmente piano.

Quindi, per sviluppare una base per determinare il profilo di conduttività elettrica del sottosuolo, possiamo, quindi, utilizzare un modello fisico per cui il campo MT, indotto dalle correnti ionosferiche e magnetosferiche, ha la forma di un'onda piana che viaggia



verticalmente all'interno di un mezzo stratificato e orizzontalmente uniforme.

Assumiamo che la terra sia, quindi, costituita da  $n$  strati ognuno con resistività  $\rho_n$  e di spessore  $h_n$  e che sia presente un campo elettromagnetico che non dipende dalle coordinate del piano orizzontale  $xy$ , ma sia funzione della sola coordinata  $z$  <sup>(b)</sup>. Tale campo orizzontale e uniforme, è indotto dalle correnti localizzate nella superficie libera.

**Figura 2.9: Modello per un mezzo stratificato.**

Questo campo primario, a sua volta, genera correnti nel mezzo conduttivo che inducono un campo elettromagnetico secondario. Dato che la densità di corrente indotta è sempre la stessa in ogni piano orizzontale, il campo secondario avrà componenti  $H_y$  e  $E_x$  che non dipendono dalle coordinate  $xy$ .

Quindi il campo elettromagnetico totale, somma di un campo primario generato nello spazio libero e di un campo secondario generato dalle correnti indotte nel mezzo conduttivo, avrà la forma  $E = (E_x, 0, 0)$  e  $H = (0, H_y, 0)$ . In questo caso le equazioni di diffusione diventano

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{d^2 H_y}{dz^2} + k^2 H_y = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

(b)  $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0$

dove  $k$  ha l'espressione data nella (1.18). Queste due equazioni sono valide per i campi elettrici e magnetici all'interno di ogni strato ma non sono valide su una superficie di separazione tra due strati successivi. In questo caso dobbiamo sostituire le (2.1) con le equazioni che caratterizzano le condizioni al contorno.

Le componenti dei campi elettrici e magnetici sono continue quando si passa da uno strato  $n$  ad uno  $n+1$ .

$$\begin{cases} E_x^{(n+1)} = E_x^{(n)} \\ H_y^{(n+1)} = H_y^{(n)} \end{cases} \quad (2.2)$$

dove stiamo assumendo  $z=h_n$ .

Le soluzioni delle equazioni di diffusione per i campi avranno un'espressione comune

$$E_x^{(n)} = A_n e^{ik_n z} + B_n e^{-ik_n z} \quad (2.3)$$

dove  $k_n$  è il numero d'onda per l'ennesimo strato.

Per ottenere un'espressione del campo magnetico in termini di coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  facciamo un passo indietro. Sostituendo la prima delle (1.12) nella quarta equazione di Maxwell si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} - i\omega \epsilon \vec{E} \quad (2.4)$$

Il primo termine rappresenta le correnti di conduzione, mentre il secondo termine,  $i\omega \epsilon \vec{E}$ , rappresenta le correnti di spostamento che giocano un ruolo fondamentale nella propagazione del campo elettromagnetico. Il rapporto tra i due termini di corrente è dato da

$$\frac{\omega \epsilon}{\sigma} = \frac{2\pi \rho v \cdot 10^{-9}}{36\pi} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{T} \cdot 10^{-10} \text{ (c)} \quad (2.5)$$

Il range in cui varia il periodo normalmente utilizzato in MT, varia da 0.01 a 1000 sec, mentre la resistività normalmente incontrate vanno da 1 a 1000  $\Omega m$ . E' chiaro, perciò, che le correnti di spostamento possono essere trascurate quando applichiamo il metodo magnetotellurico. Questo significa che abbiamo a che fare con un puro processo di diffusione, ossia un campo quasi stazionario che è descritto dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad (2.6)$$

quindi nel nostro caso si avrà  $\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega \mu H_y \Rightarrow H_y = (i\omega \mu)^{-1} \frac{\partial E_x}{\partial z}$  da cui

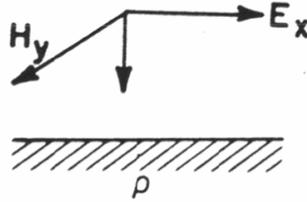
$$(c) \epsilon = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{F}{m}$$

$$H_y^{(n)} = \frac{k_n}{\omega\mu} (A_n e^{ik_n z} - B_n e^{-ik_n z}) \quad (2.7)$$

$A_n e^{ik_n z}$  rappresenta la parte del campo che diminuisce all'aumentare di  $z$ ,  $B_n e^{-ik_n z}$ , invece, la parte del campo che cresce al diminuire di  $z$ .

### 2.2.1 Semispaio omogeneo

A questo punto consideriamo il semplice caso di un semispazio omogeneo.



**Figura 2.10: Modello di un semispazio uniforme**

Poiché l'intensità del campo deve diminuire con il crescere di  $z$ , come conseguenza della trasformazione dell'energia elettromagnetica in calore, l'espressione per le componenti dei campi sarà:

$$\begin{cases} E_x = A e^{ikz} \\ H_y = \frac{k}{\omega\mu} A e^{ikz} \end{cases} \quad (2.8)$$

I campi elettrici e magnetici decrescono allo stesso modo, all'aumentare di  $z$ .

Per rappresentare un campo che oscilla armonicamente con il tempo, le componenti devono essere scritte nella seguente forma:

$$\begin{cases} E_x = \text{Re}(A e^{ikz} e^{i\omega t}) \\ H_y = \text{Re}\left(\frac{k}{\omega\mu} A e^{ikz} e^{i\omega t}\right) \end{cases} \quad (2.9)$$

Alla superficie abbiamo

$$\begin{cases} E_x(0) = A \\ H_y = \frac{k}{\omega\mu} E_x(0) \end{cases} \quad (2.10)$$

dove  $A$  contiene informazioni sulla parte principale e secondaria del campo. Partendo dal rapporto  $\frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k}$  si possono definire gli elementi  $Z_{xy}$  e  $Z_{yx}$  dell'impedenza

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{(i\sigma\omega\mu)^{1/2}} = \left(\frac{\omega\mu}{\sigma}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\pi\left(\frac{\rho}{5T}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 10^{-3} \Omega \quad (2.11)$$

$$Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} = -\frac{\omega\mu}{k} \quad (d)$$

In accordo con le equazioni (2.8), per il caso di un semispazio omogeneo,  $E_x/H_y$  e  $E_y/H_x$  non dipendono dalla coordinata  $z$  e rimangono costanti per ogni piano. L'impedenza  $Z$  e, quindi, definita da un modulo

$$|Z| = 2\pi \left( \frac{\rho}{5T} \right)^{1/2} \cdot 10^{-3} \Omega \quad (2.12)$$

e da una fase

$$\phi = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{per } (E_x, H_y) \\ \pi - \frac{\pi}{4} & \text{per } (E_y, H_x) \end{cases} \quad (2.13)$$

La fase è indipendente dalla resistività del semispazio uniforme, mentre il modulo dell'impedenza diminuisce all'aumentare della conduttività e del periodo di oscillazione.

Dalla relazione nota come formula di Cagniard, si ricava la resistività di un semispazio omogeneo:

$$\rho = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{xy}|^2 = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{yx}|^2 \quad (2.14)$$

### 2.2.2 Modello 1D

Passiamo da un semispazio omogeneo ad un caso unidimensionale. Consideriamo un modello di sottosuolo 1D, orizzontalmente stratificato costituito da un insieme di  $N$  strati, ognuno caratterizzato da una resistività  $\rho_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) e da uno spessore  $d_j$  ( $j=1, \dots, N-1$ ).

I campi si propagheranno ancora in direzione parallela a  $z$  e saranno ancora valide le espressioni per  $Z_{xy}$  e  $Z_{yx}$ , ma non sarà possibile risalire alla reale resistività del sottosuolo.

Possiamo però definire una resistività apparente

$$\rho_a(\omega) = \frac{1}{\omega\mu} |Z|^2 \quad (2.15)$$

---


$$^{(d)} \sqrt{i} = \left( e^{\left( \frac{\pi}{2} \right) i} \right)^{1/2} = \pm e^{\frac{\pi}{4} i} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$$

che fisicamente viene interpretata come la resistività reale di un semispazio ideale, omogeneo ed isotropo, che fornisca, per ogni frequenza, un valore di impedenza in superficie, pari a  $Z$ . Alla resistività apparente si può associare una fase

$$\phi(\rho_a) = \text{arctg} \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \quad (2.16)$$

Il legame tra  $E$  e  $H$  può essere espresso nella forma

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

con  $Z_{xy} = -Z_{yx}$ .

Nel caso unidimensionale, è interessante notare che, qualunque sia il numero degli strati, le componenti orizzontali del campo elettrico e magnetico sono lateralmente invarianti, essendo

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

### 2.2.3 Modello 2D

Un caso interessante e molto frequente nella pratica, è quello in cui abbiamo una resistività  $\rho = \rho(x, z)$  che dipende da due parametri (questo è il caso che ritroviamo quando siamo in presenza di una faglia).

In questo tipo di simmetria l'asse  $y$  rappresenta una direzione di invarianza (asse di strike). Il campo elettrico e quello magnetico non variano lungo tale direzione, il che implica  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ .

Ricordando che il termine relativo alle correnti di spostamento è trascurabile, la terza e la quarta equazione di Maxwell si potranno scrivere per componenti nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \sigma E_z \end{array} \right. \quad (2.18)$$

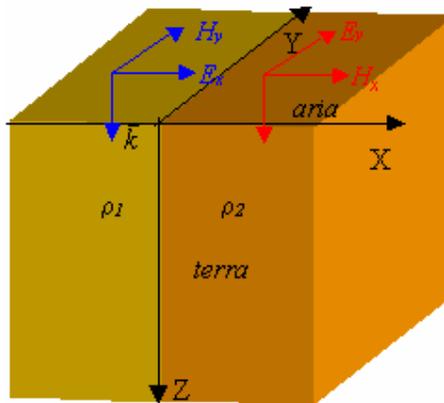
Raggruppandole in due insiemi di tre equazioni indipendenti tra loro, otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu H_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -i\omega\mu H_z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \sigma E_z \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Da queste equazioni si deduce che non esiste campo  $E_y$  indotto da  $H_y$  né campo  $E_x$  indotto da  $H_x$ . Ne risultano due polarizzazioni indipendenti:

$(E_y, H_x, H_z)$  H perpendicolare allo strike--- **modo TE**

$(E_x, E_z, H_y)$  H parallelo allo strike--- **modo TM**



**Figura 2.11: Schematizzazione di un sottosuolo con una discontinuità laterale e relativa scomposizione del campo elettromagnetico.**

Anche in questo caso possiamo introdurre un tensore impedenza che lega E a H, come già fatto nel caso unidimensionale. Questa volta gli elementi diagonali del tensore saranno ancora nulli, mentre  $Z_{xy}$  sarà diverso da  $-Z_{yx}$ .

Anche per il modello 2D possiamo introdurre le resistività apparenti  $\rho_{ij}^a = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{ij}|^2$  che potranno essere utilizzate per interpretare i casi sperimentali.

#### 2.2.4 Modello 3D

E' sicuramente il modello più generale, caratterizzato da una resistività  $\rho=\rho(x,y,z)$ . In questo caso, ad ogni frequenza ci aspettiamo un sistema lineare

$$\begin{cases} E_x = Z_{xx}H_x + Z_{xy}H_y \\ E_y = Z_{yx}H_x + Z_{yy}H_y \end{cases} \quad (2.20)$$

comunemente scritto in forma tensoriale

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

dove tutti gli elementi del tensore  $Z$  sono, almeno a priori, diversi da zero.

In fase di interpretazione, però, dato che la modellistica 3D richiede notevoli tempi di elaborazione, soprattutto se si studiano strutture complesse, si cerca sempre di confrontare i risultati sperimentali con la risposta di modelli 1D e 2D.

### 2.3 Impedenza elettrica di superficie generata da una sorgente dipolare.

Il tensore impedenza di superficie,  $Z$ , che lega le componenti del campo  $\vec{E}$  a quelle di  $\vec{H}$  alla superficie di un conduttore, può essere introdotto anche nel caso in cui la sorgente non è un fronte d'onda piano ma assume altre forme.

Un caso rilevante ai fini delle applicazioni della Magnetotellurica in ambienti urbanizzati è quello in cui la sorgente è approssimabile ad un dipolo elettrico parallelo alla superficie terrestre. L'interesse per le sorgenti dipolari nasce dal fatto che le linee ferroviarie, ad alimentazione elettrica, possono essere schematizzate in questo modo. In effetti i treni generano un segnale coerente che si propaga per diverse decine di chilometri e che spesso oscura le sorgenti di onda piana, risultando, inoltre, difficilmente separabile. L'unica soluzione può essere quella di modellare questo tipo di sorgente, sfruttandola per ricavare le informazioni utili sulla distribuzione di resistività elettrica del sottosuolo.

#### 2.3.1 Dipolo elettrico su un semispazio omogeneo

Gli aspetti teorici della propagazione all'interno del terreno del segnale elettromagnetico generato da un dipolo elettrico posto sulla superficie sono stati sviluppati, nel 1975, da *Goldstein e Strangway*. Essi hanno ricavato i valori di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  generati da un dipolo infinitesimale posto sulla superficie di un semispazio di resistività data, sovrastato da uno strato di spessore e resistività noti, del tipo in Figura 2.12.

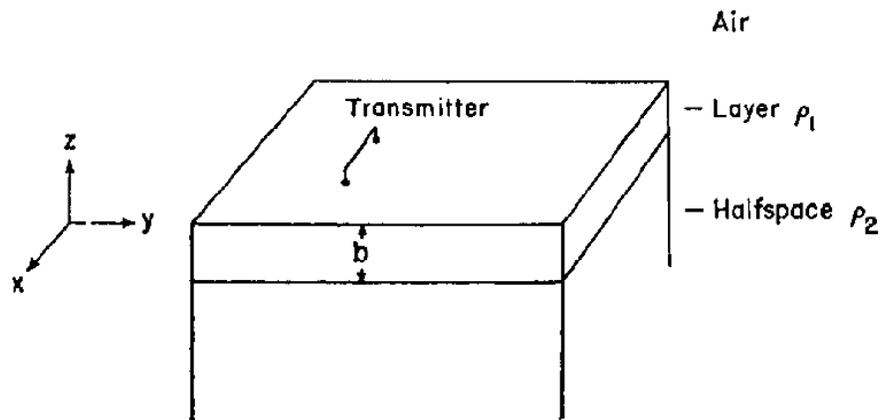


Figura 2.12 Geometria e sistema di coordinate utilizzati da Goldstein e Strangway.

Le soluzioni sono state utilizzate per determinare l'attenuazione del campo con la distanza a varie direzioni dalla sorgente e per ricostruire il rapporto tra i campi alla superficie per ricostruire l'andamento della resistività apparente per verificare in quali regioni è ancora valida l'approssimazione di onda piana. In Figura 2.13, nel riquadro sinistro, sono riportati i valori del campo elettrico orizzontale nella direzione della sorgente  $\vec{E}_x$  e del campo magnetico orizzontale nella direzione ortogonale  $\vec{H}_y$  in funzione del parametro  $\mu \frac{\omega d^2}{\rho}$  per un semispazio di resistività pari a  $0.25\Omega \cdot m$ . Questo parametro dipende dalla resistività elettrica  $\rho$ , dalla frequenza  $\omega$  e dalla distanza dalla sorgente  $d$ .

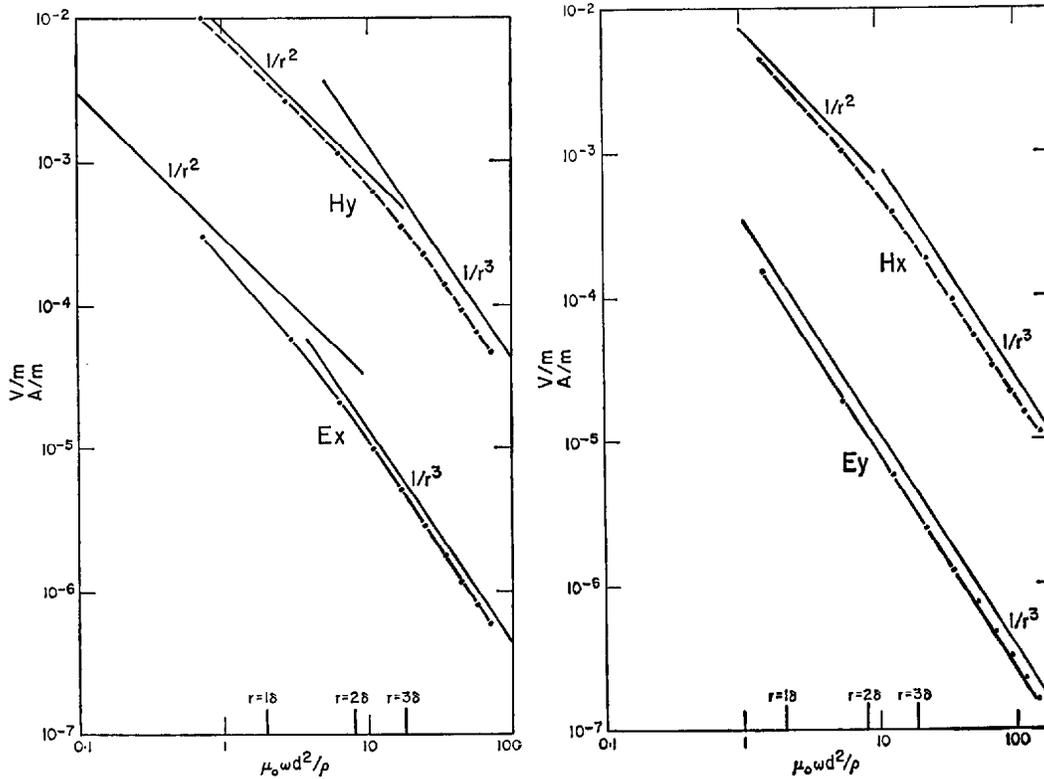


Figura 2.13: Si riportano i valori dei campi  $\bar{E}_x$  (linea continua con punti) in  $Vm^{-1}$  e  $\bar{H}_y$  (linea tratteggiata con punti) in  $Am^{-1}$ , lungo l'asse y, sotto l'assunzione di semispazio di  $0.25\Omega \cdot m$  e di sorgente di potenza unitaria. L'asse orizzontale è normalizzato rispetto al parametro riportato in figura, dove  $\rho$  è la resistività,  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica,  $\omega$  è la frequenza e  $d$  la distanza tra sorgente e ricevitore. Le linee continue rappresentano gli andamenti delle funzioni  $1/r^2$  e  $1/r^3$ .

Nelle vicinanze della sorgente entrambi i campi decadono come  $1/r^2$ , mentre, al di là di tre

skin depth  $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega}}$  di distanza dalla sorgente, entrambe le componenti decadono come  $\frac{1}{r^3}$

mentre il rapporto  $\frac{E_x}{H_y}$  tende al valore della resistività del semispazio. Nel caso di un semplice

semispazio, dunque, è chiaro che quando la sorgente è rappresentata da un dipolo elettrico, è possibile utilizzare il rapporto E/H per determinare la resistività, utilizzando l'assunzione MT di sorgente di onda piana, a patto di essere distanti almeno tre skin depth dal dipolo. Nella situazione descritta da Goldstein e Strangway la sorgente non è, ovviamente, simmetrica sul piano orizzontale. Allo scopo di valutare le variazioni azimuthali dei campi in funzione della distanza, nel riquadro destro della Figura 2.13 vengono mostrati gli andamenti dei due campi

orizzontali  $\bar{E}_y$  e  $\bar{H}_x$ , a  $45^\circ$  dalla direzione del dipolo. Il rapporto di  $\frac{E_y}{H_x}$  ha un comportamento

che risulta simile a quello  $\frac{E_x}{H_y}$ , ancora una volta, al di là di tre skin depth di distanza la resistività apparente tende a quella del semispazio.

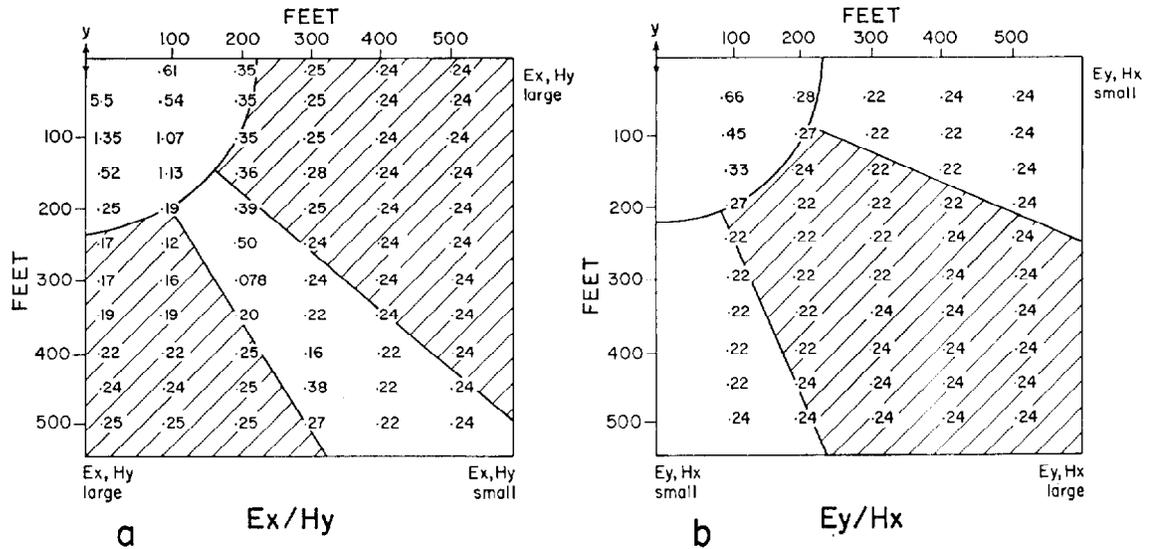


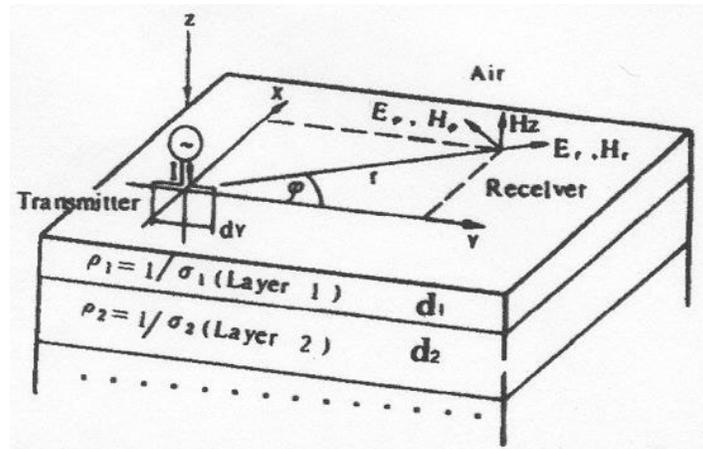
Figura 2.14: Mappa dei valori di resistività apparente calcolati in un quadrante del piano rispetto al dipolo elettrico sorgente(indicato con la freccia nell'angolo superiore destro). La regione all'interno del quarto di circonferenza indica l'area in cui non risulta valida l'approssimazione di onda piana. Il modello risolto utilizza un semispazio omogeneo di  $0.25\Omega \cdot m$  di resistività ed una frequenza di 100 Hz. Le regioni ombreggiate rappresentano le aree in cui è presente il massimo accoppiamento tra le componenti utilizzate per le misure e la sorgente. Nel riquadro (a) vengono utilizzate le componenti  $(\vec{E}_x, \vec{H}_y)$ , nel riquadro (b) le componenti  $(\vec{E}_y, \vec{H}_x)$ .

In Figura 2.14 vengono riportati i valori di resistività apparente calcolati alla superficie del semispazio di resistività pari a  $0.25\Omega \cdot m$ , calcolati per entrambi i rapporti ad una frequenza di 100 Hz. Al di là di tre skin depth i valori di resistività sono sostanzialmente quelli del mezzo. Le regioni di superficie ombreggiate rappresentano le aree in cui l'accuratezza con cui è possibile stimare le varie componenti è maggiore. Al di fuori di queste aree le componenti  $\vec{E}_y$  e  $\vec{H}_x$  (ovvero quelle  $\vec{E}_x$  e  $\vec{H}_y$ ) assumono valori bassi, tanto da rendere più significativi gli errori di misura nella pratica sperimentale. E'interessante notare la complementarità delle aree relative ai due distinti insiemi di componenti orizzontali ortogonali, che fa sì che l'utilizzo contemporaneo di entrambe le coppie fornisca una larga area di misura.

### 2.3.2 Dipolo elettrico su una struttura 1D

Si consideri un dipolo elettrico, giacente sulla superficie terrestre, ed un modello 1D di Terra, a strati piani e paralleli, con  $\rho_i$  e  $d_i$ , rispettivamente resistività e spessore dell'i-esimo strato. Si

consideri inoltre un sistema di assi cartesiani ortogonali con il piano xy coincidente con la superficie terrestre e l'asse z orientato verso il basso. Si ponga l'origine O nel centro del dipolo sorgente e l'asse y in maniera coincidente con il suo asse e si dicano r la distanza tra l'origine O, ed il punto P in cui si intende calcolare l'impedenza elettrica di superficie Z e  $\varphi$  l'angolo formato dalla congiungente  $\overline{OP}$  con l'asse y.



**Figura 2.15: Dipolo elettrico sorgente orientato lungo l'asse y su una terra stratificata.**

Il campo elettromagnetico generato da un dipolo elettrico orizzontale su un modello di Terra 1D può essere scritto in coordinate polari [Christiansen,1983] come:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(r) &= \vec{E}_1(r) \cos \varphi_j & \vec{E}_j(r) &= \vec{E}_2(r) \sin \varphi_j \\ \vec{H}_r(r) &= \vec{H}_1(r) \sin \varphi_j & \vec{H}_j(r) &= \vec{H}_2(r) \cos \varphi_j \end{aligned} \quad (2.22)$$

dove  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{H}_1, \vec{H}_2$  sono funzioni della sola distanza r. Gli elementi del tensore impedenza,  $Z_{ij}$ , in coordinate polari, sono definiti come:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r(\vec{r}) &= Z_{11} \vec{H}_r(\vec{r}) + Z_{12} \vec{H}_\varphi(\vec{r}) \\ \vec{E}_\varphi(\vec{r}) &= Z_{21} \vec{H}_r(\vec{r}) + Z_{22} \vec{H}_\varphi(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

e si verifica che, in coordinate polari, Z risulta indipendente da  $\varphi$ , e quindi dall'orientazione del dipolo, ed assume la forma:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_{22} = 0 \\ Z_{12} &= \frac{\vec{E}_1(r)}{\vec{H}_2(r)} \\ Z_{21} &= \frac{\vec{E}_2(r)}{\vec{H}_1(r)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Si noti che, essendo  $Z_{12}$  e  $Z_{21}$  indipendenti da  $\varphi$ , tale sarà anche il determinante di Z.

L'assunzione di onda piana è soddisfatta in approssimazione di campo lontano, dove  $Z_{12} = -Z_{21}$ , come previsto in un sondaggio MT. In approssimazione di campo vicino, invece,  $Z_{12}$  e  $Z_{21}$  risulteranno due quantità reali, differenti tra loro, ed indipendenti dalla frequenza. Da questo consegue che la curva che rappresenta il logaritmo della resistività apparente in funzione del logaritmo del periodo sarà una retta con pendenza di  $45^\circ$  mentre la fase andrà a zero. Per un semispazio omogeneo, in particolare, si ha che  $Z_{12} = -2Z_{21}$ .

## 2.4 Funzioni di trasferimento e Spazio di Risposta

La Magnetotellurica è stata introdotta seguendo uno schema classico. Il problema del rapporto tra le misure dei campi elettrici e magnetici alla superficie terrestre e la distribuzione di resistività del sottosuolo è stato sviluppato in un quadro che, fondamentalmente, ruota intorno allo studio della propagazione del campo elettromagnetico sulla superficie ed all'interno di un mezzo omogeneo, di conducibilità finita e non nulla, con l'assunzione, per le Equazioni di Maxwell, di un modello quasi-stazionario. La Terra è stata dapprima equiparata ad un semispazio omogeneo ed i risultati ottenuti sono stati, successivamente, generalizzati a modelli meno elementari, di tipo 1D, 2D e 3D. Questo ha richiesto l'introduzione di  $Z$ , il tensore impedenza di superficie, un tensore complesso di rango due che ha le dimensioni di un'impedenza elettrica, è dipendente dalla frequenza e che risulta legato da una relazione semplice alla resistività apparente del sottosuolo, che rappresenta il parametro fondamentale dell' MT.

Seguendo un approccio sviluppato in letteratura in vari modi, anche differenti tra loro [Egbert & Booker, 1986; Zhdanov & Berdichevsky, 1984], è possibile introdurre il metodo MT all'interno di un'analisi più generale del legame tra dati geomagnetici di superficie e caratteristiche elettriche del sottosuolo, L'utilità di questo ritorno alle basi della metodologia, in un contesto mutato e più generale, sta nella possibilità di far emergere degli aspetti fisici del problema che rischiano, nel quadro precedente, di rimanere impliciti. In particolare, seguendo l'approccio sviluppato da Egbert e Booker sarà possibile, successivamente, introdurre l'analisi di tipo multivariato per lo studio del segnale MT in modo naturale ed in un contesto fisico chiaro, legato allo studio della natura delle sorgenti del campo elettromagnetico.

Le Equazioni di Maxwell in approssimazione quasi statica ed in una regione di conducibilità elettrica arbitraria  $\sigma(\vec{r})$ , assumendo una dipendenza dal tempo del tipo  $e^{i\omega t}$  sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \vec{j}^e \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Si introduca un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con la superficie terrestre coincidente con il piano  $xy$ , e si assuma che, all'interno della Terra, sia  $\vec{j}^e = 0$ . Si assuma, inoltre, che in un sottile strato esterno alla superficie  $z_0 < z < 0$  (l'atmosfera) sia  $\vec{j}^e$  che  $\sigma$  siano nulli. Questa approssimazione è ben giustificata per le frequenze e per i valori di conducibilità di nostro interesse [Rokityansky, 1982].

Nella regione  $z_0 < z < 0$  si avrà, quindi, che  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ . Questo, insieme alla terza delle equazioni di Maxwell, implica l'esistenza di una funzione potenziale scalare  $\phi$ , tale che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \phi$  e tale inoltre, da soddisfare l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$ .

Il potenziale  $\phi$  può essere espresso come somma di un potenziale interno  $\phi_i$  e di un potenziale esterno  $\phi_e$  tali che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi_i + \phi_e \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_i = 0 \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \phi_e = 0 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

E' inoltre possibile dimostrare [Egbert, 1987] che sulla superficie  $z = 0$  il potenziale interno è una funzione lineare del potenziale esterno,  $\phi_i = L_{\sigma, \omega}(\phi_e)$ .

L'operatore lineare  $L_{\sigma, \omega}$  dipende dalla frequenza  $\omega$  e dalla conducibilità  $\sigma$  e contiene, al variare di  $\omega$ , tutta l'informazione sulla conducibilità elettrica  $\sigma$  che può essere ottenuta da misure sulla superficie terrestre.

La formulazione,  $\text{dati} \rightarrow L_{\sigma, \omega} \rightarrow \sigma$ , anche se del tutto generale, presenta due problemi.

Primo, la stima dell'operatore  $L_{\sigma, \omega}$  viene fatta a partire da un insieme di osservazioni del campo magnetico ed elettrico effettuate in un numero di stazioni finito (e generalmente piccolo), non permettendo, quindi, una stima unica e completa dell'operatore, che è infinito-dimensionale. Secondo le misure a disposizione riguardano i campi totali in superficie e pertanto i potenziali interno ed esterno, necessari per stimare l'operatore, non sono direttamente osservabili.

Queste difficoltà richiedono una semplificazione del problema, ossia l'assunzione di ulteriori ipotesi restrittive che rendano possibile la stima di  $L_{\sigma, \omega}$ . L'esempio più noto di questo tipo di

approccio è proprio il metodo MT, in cui si assume che le sorgenti generino un fronte d'onda piano che incide normalmente alla superficie terrestre. In generale, tutti i metodi che si basano su *array* di dati geomagnetici (Metodi Magnetovariazionali, etc.) usano, più o meno implicitamente, ipotesi di questo tipo, che possono essere inquadrare in un modello generale in cui i potenziali esterni osservabili sono ristretti ad un sottospazio a dimensione finita (ed usualmente piccola) dello spazio più ampio, formato da tutti i potenziali sorgente possibili.

Si assume, cioè, che lo spazio  $\Phi = \left\{ \phi_e : \phi_e = \sum_{j=1}^p \phi_j \right\} = \text{Sp}\{\phi_j : j = 1, \dots, p\}$  sia di dimensione finita  $p$ . nel caso in cui si assume come ipotesi una sorgente d'onda piana (metodo MT),  $p=2$  e  $\Phi = \text{Sp}\{\phi_1 = x, \phi_2 = y\}$ .

Per quanto detto in precedenza, qualsiasi campo magnetico  $\vec{B}$  osservabile sulla superficie terrestre può essere espresso come il gradiente di un potenziale scalare  $\phi = \phi_i + \phi_e$ , con

$\phi_e = \sum_{j=1}^p \alpha_j \phi_j$ , e dunque:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}[\phi_e + L_{\sigma, \omega}(\phi_e)] = \sum_{j=1}^p \alpha_j \vec{\nabla}[\phi_j + L_{\sigma, \omega}(\phi_j)] = \sum_{j=1}^p \alpha_j \vec{B}_j \quad (2.27)$$

cioè la realizzazione osservabile del campo magnetico giace nello spazio  $p$ -dimensionale generato dalle funzioni di base  $\vec{B}_j = \vec{\nabla}[\phi_j + L_{\sigma, \omega}(\phi_j)]$  che danno il campo magnetico totale (interno più esterno) risultante dai potenziali esterni  $\phi_j$ .

Per il campo elettrico  $\vec{E}$  è necessario introdurre un nuovo operatore lineare  $L_E$  che lo colleghi al campo magnetico orizzontale  $\vec{B}_h$ , misurato alla superficie, secondo la relazione:

$$\vec{E} = L_E(\vec{B}_h) = L_E \left[ \sum_{j=1}^p \alpha_j \vec{B}_{h_j} \right] = \sum_{j=1}^p \alpha_j L_E(\vec{B}_{h_j}) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \vec{E}_j(\vec{r}) \quad (2.28)$$

dove  $\vec{E}_j$  rappresenta il campo elettrico associato alla  $j$ -ma sorgente  $\phi_j$ .

La (2.27) e la (2.28), insieme, implicano che tutte le componenti osservabili del campo elettromagnetico possono essere scritte come:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \vec{F}_j(\vec{r}) \quad (2.29)$$

dove  $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \vec{B}(\vec{r}) \\ \vec{E}(\vec{r}) \end{bmatrix}$  e  $\vec{F}_j(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \vec{B}_j(\vec{r}) \\ \vec{E}_j(\vec{r}) \end{bmatrix}$ .

Supponiamo, ora, di avere a disposizione un array di  $n$  stazioni di misura, variamente disposte sulla superficie terrestre, ognuna composta da  $K$  canali di acquisizione. Il numero totale di canali sarà, pertanto,  $m = K \cdot n$ .

Dopo un opportuno processing dei dati a disposizione si otterrà, per ogni fissata frequenza  $\omega$ , un valore del campo stimato per ognuno degli  $m$  canali di misura. Mediante tali stime è possibile, fissata una frequenza  $\omega$ , definire un vettore  $\bar{b}$ , vettore dei dati, relativo all' array di stazioni considerate, in questo modo:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} F^1(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ F^m(\mathbf{r}_n) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Risulta inoltre possibile introdurre un vettore complesso  $m$ -dimensionale  $u_j$  che esprime il campo associato al  $j$ -mo potenziale esterno  $\phi_j$ :

$$\bar{u}_j = \begin{bmatrix} F_j^1(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ F_j^m(\mathbf{r}_n) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le prime  $K$  componenti del vettore  $\bar{b}$  rappresenteranno i campi stimati alla superficie, sempre alla frequenza fissata  $\omega$ , relativi alla prima stazione di misura e così via. Analogamente, le prime  $K$  componenti del vettore  $u_j$  rappresenteranno quella componente dei campi misurati alla prima stazione dovuta al  $j$ -mo potenziale sorgente.

Se le misure sono prive di rumore,  $\bar{b}$  può essere espresso, grazie alla (2.27) ed alla (2.28), come combinazione lineare delle  $p$  funzioni  $u_j$ . Esisterà quindi un vettore  $p$ -dimensionale  $\alpha$ , formato da  $p$  costanti complesse  $\alpha_j$ , tale che:

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j \bar{u}_j = \bar{b} \in \mathfrak{R} = \text{Sp}\{\bar{u}_j : j = 1, \dots, p\} \quad (2.32)$$

Lo spazio  $\mathfrak{R}$ , generato dalle funzioni  $u_j$ , è un sottospazio  $p$ -dimensionale di  $C^m$  ed è detto *spazio risposta*. Per una data frequenza,  $\omega$  una volta fissato l'array di stazioni di misura, tutti i vettori dei dati (supposti liberi da rumore) fisicamente osservabili dovranno giacere in  $\mathfrak{R}$ . Risulta chiaro, dalla (2.32), che i vettori  $u_j$ , rappresentano una base di tale spazio, pur non formando un sistema linearmente indipendente, visto che  $p < m$ . Inoltre il vettore a  $m$  componenti  $\bar{b}$ , appartenendo ad uno spazio che, per ipotesi, è *p-dimensionale*, avrà  $m-p$  componenti linearmente dipendenti dalle rimanenti  $p$ .

Sia  $\mathbf{U}$  la matrice la cui  $j$ -ma colonna è il vettore di base  $\mathbf{u}_j$ ; si supponga, per fissare le idee che  $\mathbf{U}$  e  $\bar{\mathbf{b}}$  siano partizionate in modo che:

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1 \\ \bar{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p \\ m-p \end{matrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p \times p \\ (m-p) \times p \end{matrix} \quad (2.33)$$

La matrice  $\mathbf{U}$  ed il vettore  $\bar{\mathbf{b}}$  saranno tali che:

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1 \\ \bar{\mathbf{b}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p \\ \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p \\ \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_1 \quad (2.34)$$

se  $\mathbf{U}_1$  è non singolare e se  $\bar{\mathbf{b}} \in \mathfrak{R}$ .

Così, assumendo  $\mathbf{U}_1$  non singolare, le  $m-p$  componenti di  $\bar{\mathbf{b}}_2$  sono legate alle  $p$  componenti di  $\bar{\mathbf{b}}_1$ , tramite la *matrice delle funzioni di trasferimento*  $\mathbf{T} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1}$ . In questo modo, assumendo che lo spazio delle sorgenti sia finito-dimensionale è possibile ricostruire, partendo dai vettori  $\mathbf{u}_j$ , tutte le possibili funzioni di trasferimento, definite, appunto, dalla matrice  $\mathbf{T}$ .

La determinazione delle funzioni di trasferimento dalla relazione  $\mathbf{T} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1}$  non è univocamente legata alla matrice  $\mathbf{U}$ . Infatti sia

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p \times p \\ (m-p) \times p \end{matrix} \quad (2.35)$$

una matrice le cui colonne formino una base di  $\mathfrak{R}$ . Esisterà una matrice non singolare  $\mathbf{A}$  tale che  $\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{A}$ , essendo  $\mathbf{U}$  è una base dello spazio risposta.

Quindi,  $\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1^{-1} = (\mathbf{U}_2 \mathbf{A})(\mathbf{U}_1 \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1} = \mathbf{T}$ , e.g. le funzioni di trasferimento risulteranno ricostruibili a partire da una qualsiasi base di  $\mathfrak{R}$ .

Come esempio consideriamo il caso del tensore impedenza  $\mathbf{Z}$ , stimato a partire dai valori di  $\bar{\mathbf{E}}$  e di  $\bar{\mathbf{H}}$  sulla superficie terrestre. In questo caso si avrà che  $p=2$ , e lo *spazio risposta*  $\mathfrak{R}$  sarà generato dai due vettori  $\bar{\mathbf{u}}_1$  e  $\bar{\mathbf{u}}_2$ , corrispondenti alle due sorgenti polarizzate ortogonalmente  $\{\phi_1 = x, \phi_2 = y\}$ :

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_x^1 \\ \bar{\mathbf{H}}_y^1 \\ \bar{\mathbf{E}}_x^1 \\ \bar{\mathbf{E}}_y^1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_x^2 \\ \bar{\mathbf{H}}_y^2 \\ \bar{\mathbf{E}}_x^2 \\ \bar{\mathbf{E}}_y^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}_x^1 & \bar{\mathbf{H}}_x^2 \\ \bar{\mathbf{H}}_y^1 & \bar{\mathbf{H}}_y^2 \\ \bar{\mathbf{E}}_x^1 & \bar{\mathbf{E}}_x^2 \\ \bar{\mathbf{E}}_y^1 & \bar{\mathbf{E}}_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Il tensore  $Z$ , che collega  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , avrà la forma:

$$Z = \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{E}_x^1 & \vec{E}_x^2 \\ \vec{E}_y^1 & \vec{E}_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{H}_x^1 & \vec{H}_x^2 \\ \vec{H}_y^1 & \vec{H}_y^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.37)$$

E' stato introdotto, in questo modo, il concetto di funzione di trasferimento geomagnetica, che collega linearmente componenti di campi misurate a stazioni diverse. L'uso del termine richiede però una certa cautela. Infatti una funzione di trasferimento ha rappresentazioni sia nel dominio della frequenza che in quello del tempo. La rappresentazione nel dominio del tempo della funzione di trasferimento, la funzione di risposta impulsiva, non è altro che la trasformata inversa di Fourier della rappresentazione in frequenza considerata finora. In altri termini, due funzioni  $\tilde{u}_1(t)$  e  $\tilde{u}_2(t)$  che sono legate linearmente, in frequenza, da una funzione di trasferimento  $u_2(\omega) = T(\omega)u_1(\omega)$ , nel dominio del tempo risultano collegate da una convoluzione  $\tilde{u}_2(t) = \tilde{T}(t)\tilde{u}_1(t)$ , dove  $\tilde{T}(t) = \int d\omega e^{i\omega t} T(\omega)$ .

In una situazione normale  $\tilde{u}_1(t)$  può essere vista come variabile di input e  $\tilde{u}_2(t)$  come variabile di output, mentre la funzione di trasferimento deve essere causale e stabile ( $\tilde{T}(t) = 0$  per  $t < 0$ ). Questo esprime la condizione per cui un sistema fisicamente realizzabile, non possa fornire un output prima dell'input e che, ad un input finito, debba corrispondere necessariamente un output finito.

Nel caso dei dati geomagnetici la situazione è molto più complicata: decidere quale sia l'input e quale l'output risulta totalmente arbitrario. Pensando alla rappresentazione nel tempo della relazione tra potenziali interno ed esterno, si potrebbe considerare  $\phi_e$  come input e  $\phi_i$  come output. In realtà, però, quello che misuriamo alla superficie terrestre è una combinazione di campi interni ed esterni, tra l'altro funzione anche del tipo di simmetria del sottosuolo, che costituisce l'incognita che si cerca di determinare. I campi totali in superficie non possono dunque essere semplicemente pensati come l'output lineare di un potenziale esterno.

Una soluzione completa del problema consisterebbe nella stima dell'operatore infinito-dimensionale  $L_{\sigma,\omega}$  che rappresenta i potenziali interni indotti da ogni possibile sorgente esterna. Come detto in precedenza, però, la situazione migliore in cui possiamo sperare è la stima dei campi associati ad una configurazione di sorgenti finita. Ad esempio, per un'ipotesi di onda piana, si può tentare la stima dei campi indotti dalle due polarizzazioni ortogonali della sorgente. In effetti anche questo è impossibile a causa della non diretta osservazione dei campi esterni, per cui risulta necessario introdurre un'ulteriore ipotesi: esistono dei campi *normali* di riferimento, che possono essere utilizzati per dedurre la forma della sorgente

esterna. La scelta di questi campi *normali* risulta comunque arbitraria, a maggior ragione quando  $p$  risulta maggiore di due e, più in generale è preferibile rinunciare del tutto ad un'interpretazione del tipo input-output.

In realtà l'approccio più corretto è quello che considera lo spazio risposta  $\mathfrak{R}$  come l'entità fondamentale da stimare. La conoscenza di  $\mathfrak{R}$  è infatti completamente equivalente alla conoscenza delle funzioni di trasferimento, lo spazio risposta è un oggetto perfettamente definito per un arbitrario, ma finito, numero di sorgenti, e, non richiedendo nessuna scelta di campi *di riferimento*, è in sintesi tutto quello che può con certezza essere stimato dai dati. L'interpretazione delle funzioni di trasferimento, definite a partire da  $\mathfrak{R}$ , è un passo che richiede informazioni aggiuntive o assunzioni che esulano dai dati sperimentali e la formulazione del problema in termini di determinazione di  $\mathfrak{R}$  enfatizza questo aspetto.

### 3 La stima di Z

Il metodo MT si è dimostrato, dalla sua introduzione negli anni 50, ad opera di Cagniard e Tikhonov, ad oggi, un utilissimo mezzo geofisico sia per studi fondamentali sulle strutture continentali sia per studi di dettaglio finalizzati alla ricerca di idrocarburi o sorgenti geotermiche.

L'uso da parte della magnetotellurica di sorgenti naturali legate alla variazione nel tempo della componente di origine esterna del campo magnetico terrestre permette, come già detto, notevoli vantaggi rispetto ad altri metodi di prospezione, ma si osserva, in generale, un livello del rapporto segnale rumore altamente variabile, che spesso è totalmente fuori dal controllo degli sperimentatori. Questo comporta una grande attenzione ai metodi con cui si processano i dati.

L'obiettivo dell'analisi dati è estrarre dal segnale acquisito un insieme di funzioni che siano in grado di rappresentare la risposta del mezzo in esame, e che possano essere utilizzate per interpretarne la struttura conduttiva.

Nel caso della MT lo scopo è quello di determinare il più accuratamente possibile, il tensore impedenza di superficie che lega, per ogni fissata frequenza  $\omega$ , le componenti orizzontali del campo elettrico alle componenti  $H_x$  e  $H_y$  del campo magnetico, in approssimazione di onda piana.

Considerando la (2.20), è possibile scrivere

$$\begin{cases} E_{x,i}(\omega) = Z_{xx}(\omega)H_{x,i}(\omega) + Z_{xy}(\omega)H_{y,i}(\omega) \\ E_{y,i}(\omega) = Z_{yx}(\omega)H_{x,i}(\omega) + Z_{yy}(\omega)H_{y,i}(\omega) \end{cases} \quad (3.1)$$

dove  $H_x(\omega)$ ,  $H_y(\omega)$ ,  $E_x(\omega)$  e  $E_y(\omega)$  sono le trasformate di Fourier del campo magnetico ed elettrico, in cui è sottintesa la dipendenza dalla posizione, e l'indice  $i$ , che varia da 1 ad  $n$ , caratterizza il numero di osservazioni che si sta considerando.

Il campione statistico è realizzato, utilizzando  $n$  intervalli temporali, di lunghezza  $T$  caratterizzati da un passo di campionamento  $\Delta T$ : la trasformata di Fourier di ognuno di questi intervalli, darà  $m\Delta T/2$  frequenze ( $m\Delta T=T$ ), spaziate di  $1/T$  (risoluzione spettrale). Per un'assegnata frequenza  $\omega_i \in \{ \omega_1, \dots, \omega_{m/2} \}$  esisteranno  $n$  distinte valutazioni dell'ampiezza e della fase del campo  $A(\omega_i)$  considerato.

Le  $\omega$  che, però, compaiono nelle (3.1), non sono tutte le  $m/2$  frequenze a cui sono state fatte delle osservazioni, si utilizza, infatti, una proprietà del tensore impedenza, secondo cui  $Z$  non varia rapidamente con la frequenza: esiste, cioè, un intorno di  $\omega$  in cui le barre d'errore del tensore  $Z$  sono molto più grandi della variazione vera e propria dell'impedenza. Si può quindi associare ad un'intera banda di frequenza uno stesso valore di  $Z$ . Se supponiamo che in una

banda di frequenza cadano  $l$  punti per i quali l'impedenza è invariata, allora l'insieme statistico che caratterizza la  $Z(\omega_i)$  avrà dimensioni  $l \times n$ .

Le  $\omega$  presenti nelle (3.1) sono, appunto le frequenze che caratterizzano le bande cui è associato uno stesso valore di  $Z$ . la convenzione generalmente diffusa, prevede che, per caratterizzare lo sviluppo di una curva di impedenza, si utilizzino dai 6 ai 10 punti in frequenza per decade logaritmica.

### 3.1 Il metodo dei minimi quadrati

Il problema della stima di  $Z$  è ampiamente affrontato in letteratura e ha fatto sì che venissero introdotti diversi metodi che, in generale, si basano sul metodo dei minimi quadrati (LS).

La stima di  $Z^H$  viene fatta minimizzando la somma dei quadrati di uno scarto definito da

$$\eta = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (E_i - Z^H H_i)^2 \quad (3.2)$$

Le prime realizzazioni di questo tipo di stima [Berdichevskiy, 1968; Sims et al.,1971] si basano sulla minimizzazione di  $|\eta_x|$  e  $|\eta_y|$ .

In questo modo si ottengono otto equazioni, che possono essere risolte per determinare gli elementi dell'impedenza:

$$\begin{aligned} Z_{xx} &= \frac{\langle E_x, H_x^* \rangle \langle H_y, H_y^* \rangle - \langle E_x, H_y^* \rangle \langle H_y, H_x^* \rangle}{\langle H_x, H_x^* \rangle \langle H_y, H_y^* \rangle - \langle H_x, H_y^* \rangle \langle H_y, H_x^* \rangle} \\ Z_{xy} &= \frac{\langle E_x, H_y^* \rangle \langle H_x, H_x^* \rangle - \langle E_x, H_x^* \rangle \langle H_x, H_y^* \rangle}{\langle H_x, H_x^* \rangle \langle H_y, H_y^* \rangle - \langle H_x, H_y^* \rangle \langle H_y, H_x^* \rangle} \\ Z_{yx} &= \frac{\langle E_y, H_x^* \rangle \langle H_y, H_y^* \rangle - \langle E_y, H_y^* \rangle \langle H_y, H_x^* \rangle}{\langle H_x, H_x^* \rangle \langle H_y, H_y^* \rangle - \langle H_x, H_y^* \rangle \langle H_y, H_x^* \rangle} \\ Z_{yy} &= \frac{\langle E_y, H_y^* \rangle \langle H_x, H_x^* \rangle - \langle E_y, H_x^* \rangle \langle H_x, H_y^* \rangle}{\langle H_x, H_x^* \rangle \langle H_y, H_y^* \rangle - \langle H_x, H_y^* \rangle \langle H_y, H_x^* \rangle} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Allo stesso risultato si giunge, in modo più immediato, proiettando le (3.1) sul campo magnetico:

$$\begin{cases} \langle E_x, H_x^* \rangle = Z_{xx} \langle H_x, H_x^* \rangle + Z_{xy} \langle H_y, H_x^* \rangle \\ \langle E_x, H_y^* \rangle = Z_{xx} \langle H_x, H_y^* \rangle + Z_{xy} \langle H_y, H_y^* \rangle \end{cases} \quad (3.4)$$

si ottengono così due equazioni complesse in due incognite complesse,  $Z_{xx}$  e  $Z_{xy}$ , che possono essere risolte per calcolare i due elementi del tensore impedenza. Si procede in modo analogo per le componenti  $Z_{yx}$  e  $Z_{yy}$ . In generale si può scrivere

$$Z^H = [EH] \cdot [HH]^{-1} \quad (3.5)$$

dove  $[AB]$  è la matrice di densità spettrale per i campi  $A$  e  $B$ , definita come:

$$[AB] = \begin{pmatrix} \langle A_x, B_x^* \rangle & \langle A_x, B_y^* \rangle \\ \langle A_y, B_x^* \rangle & \langle A_y, B_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Analogamente si può proiettare la (3.1) sul campo elettrico, ottenendo

$$Z^E = [EE] \cdot [HE]^{-1} \quad (3.7)$$

Nelle (3.3) si può notare la presenza di termini del tipo  $\langle A_k, A_k^* \rangle$  con  $k=x$  o  $k=y$  e di termini del tipo  $\langle A_k, B_k^* \rangle$ , con  $k=x,y$  e  $c$  con  $k \neq k'$ . I primi, numeri reali, definiti come il quadrato di

$$\langle A, A^* \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i A_i^*} \quad (3.8)$$

vengono detti autopower (AP), mentre i termini del tipo  $\langle A_k, B_k^* \rangle$  e  $\langle A_k, B_k^* \rangle$ , detti crosspower (CP), sono generalmente numeri complessi e si possono definire come

$$\langle A, B^* \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i B_i^* \quad (3.9)$$

### 3.1.1 Il metodo dei minimi quadrati pesati

L'applicazione del metodo LS standard richiede alcune ipotesi sui set di dati sperimentali da analizzare. Le variabili predicenti (il campo magnetico, nel caso della formulazione (3.5)) devono essere note senza errore e le variabili predette (il campo elettrico) devono essere non correlate tra loro ed avere la stessa varianza, i.e.  $\sigma^2(\eta_i) = \sigma^2$ .

Nel caso in cui le variabili predette siano sempre scorrelate, ma gli errori abbiano varianze distinte, i.e.  $\sigma^2(\eta_i) = \sigma_i^2$ , è possibile ottenere una stima  $Z^H$  ai minimi quadrati pesati (WLS), minimizzando una somma pesata dei quadrati dei residui, del tipo  $\eta = \sum_{i=1}^n w_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n w_i (E_i - Z^H H_i)^2$  dove le quantità  $w_i$  sono dei pesi inversamente proporzionali a  $\sigma_i^2$ .

L'applicazione dei WLS è giustificata da considerazioni sul miglioramento della stima ottenuta, ma soprattutto dal fatto che i LS standard attribuiscono troppo peso ai dati con alta potenza. In situazioni estreme la stima del parametro può essere determinata quasi integralmente da uno o due punti. Inoltre i LS dipendono fortemente dall'assunzione di uguale varianza.

## 3.2 Il metodo della Remote Reference

Uno dei principali problemi del metodo di analisi dati introdotto precedentemente, è legato alla presenza dell'effetto di *bias*. Con questo termine si vuole indicare l'erronea riduzione del

valore degli elementi del tensore impedenza. Nel caso in cui vi è rumore random nello spettro magnetico ed elettrico, sarà presente un bias verso il basso, nelle curve di impedenza calcolate utilizzando la (3.5). Nel caso in cui, si stimi  $Z^E$ , lo stesso tipo di rumore porterà un bias verso l'alto nelle curve. Ci si può rendere conto di ciò, considerando, semplicemente, un segnale come la somma di due termini, il primo S che rappresenta il segnale vero e proprio ed un secondo termine N che caratterizza il noise:

$$\begin{aligned} A &= S_A + N_A \\ B &= S_B + N_B \end{aligned} \quad (3.10)$$

Moltiplicando la prima delle precedenti espressioni, prima per  $A^*$  e poi per  $B^*$  si avrà

$$\begin{aligned} AA^* &= S_A S_A^* + 2S_A N_A^* + N_A N_A^* \\ AB^* &= S_A S_B^* + S_A N_B^* + S_B N_A^* + N_A N_B^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

Supponendo che la coerenza tra i segnali sia massima mentre quella tra segnale e rumore sia nulla

$$\begin{aligned} \langle AA^* \rangle &> \langle S_A S_A^* \rangle \\ \langle AB^* \rangle &\approx \langle S_A S_B^* \rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

si ottengono termini AP sovrastimati che porteranno un errore sistematico nel calcolo degli elementi del tensore impedenza. Quindi, ogni equazione come le (3.3), che contiene AP sarà soggetta ad effetti di bias.

Notevoli miglioramenti, nella stima del tensore Z, si ottengono con il metodo della Remote Reference (RR) [Clarke *et al.*, 1978; Gamble *et al.*, 1979a]. La necessità di introdurre questa nuova tecnica, che utilizza due ulteriori campi  $R_x$  e  $R_y$ , nasce dall'incapacità del metodo precedentemente analizzato, di rimuovere efficacemente il noise elettromagnetico dai dati, soprattutto nel caso in cui questo sia anche correlato.

L'idea sviluppata alla fine degli anni '70 da Gamble, Clarke e Goubau, per migliorare la stima delle componenti di Z consiste nell'occupare simultaneamente due siti. I canali della remote,  $R_x$  e  $R_y$ , sono usualmente campi magnetici( si utilizzano campi magnetici perché, in generale, questo segnale risulta coerente anche in aree molto ampie, ed è meno disturbato del segnale elettrico) misurati da sensori posti ad una distanza che va da un minimo di centinaia di metri ad alcune centinaia di km. Si è dimostrato che, in presenza di solo rumore random, è sufficiente posizionare i magnetometri di riferimento a poche decine di metri affinché il metodo sia efficace.

In generale la distanza a cui vanno posizionati i sensori della remote reference dipende dall'origine e dalla distribuzione spaziale del rumore coerente.

Proiettando le (3.1) sui campi remoti  $R_x$  e  $R_y$ , si ottiene  $Z^R = [ER][HR]^{-1}$  che esplicitata dà per le quattro componenti di  $Z$  un'espressione simile alle (3.3).

### 3.3 Metodi robusti

L'usuale assunzione MT di sorgenti spazialmente uniformi, implica una relazione tra  $E$  ed  $H$ , nel dominio delle frequenze, caratterizzata dal semplice modello statistico lineare

$$E = ZH + \varepsilon \quad (3.13)$$

dove  $\varepsilon$  rappresenta il rumore.

Il metodo dei minimi quadrati, per la stima del tensore  $Z$ , spesso non dà buoni risultati, quando si processano dati caratterizzati da una forte componente di rumore, producendo curve di impedenza che presentano un pesante effetto di bias e sono fortemente oscillanti. Il fallimento di tale metodo è causato, soprattutto da due inadeguatezze del modello statistico utilizzato. La prima è legata al fatto che il modello in questione è appropriato, solo nel caso in cui il rumore è ristretto ai canali elettrici, che sono i canali predetti nel caso di  $Z^H$ , mentre i campi magnetici, che rappresentano i canali di input, sono considerati privi di errore. La seconda inadeguatezza è data dall'ipotesi implicita, fatta per la stima ai minimi quadrati, secondo cui gli errori definiti nella (3.13) sono caratterizzati da una distribuzione gaussiana. Questa ipotesi non è valida per i dati MT a causa della non stazionarietà sia del segnale che del rumore, e per la presenza di outlier causati da errori di misura e disomogeneità nei campi sorgente [Egbert&Booker, 1986; Chave et al., 1987; Chave&Thomson, 1989].

Questo ha motivato l'introduzione di metodi robusti, che sono poco sensibili alla non stazionarietà dei campi e alle inadeguatezze del modello considerato, reagendo gradualmente alle perturbazioni.

Questi metodi, il CWE (Coherence Weighted Estimates)[Stodt, 1983, 1986; Jones&Jodicke, 1984] e il RME (Regression M-estimate) [Huber, 1981; Egbert&Booker, 1986; Chave et al., 1987; Chave&Thomson, 1989; Larsen, 1989; Sutarno&Vozoff, 1991] solo per citarne alcuni, sono in grado di operare uno screening dei dati, adattando i pesi da applicare al tipo di outlier presenti, impedendo in questo modo che pochi dati predominino nella stima.

I pesi  $w_i$  sono, quindi, determinati dagli stessi dati, con la caratteristica di evidenziarne la buona qualità. Per il metodo RME, ad esempio, i pesi sono determinati in modo iterativo dalla normalizzazione dei residui: nel caso dei cosiddetti pesi di *Huber*, utilizzati da Egbert&Booker [1986] e Chave et al. [1987] si ha:

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{se } |r_i| \leq 1.5 \\ \frac{1.5}{r_i} & \text{se } |r_i| > 1.5 \end{cases} \quad r_i = \frac{[E_{xi} - (Z_{xx} H_{xi} + Z_{xy} H_{yi})]}{\sigma} \quad (3.14)$$

dove la varianza  $\sigma$  rappresenta una stima della scala d'errore.

La determinazione dei dati pesati avviene attraverso un processo iterativo. La stima iniziale dell'impedenza si può ottenere applicando ai dati non pesati il semplice metodo dei minimi quadrati. I residui che ne risultano sono, quindi, utilizzati per determinare i pesi.

### 3.4 Metodi Multivariati

Sono state introdotte finora le tecniche standard per la stima del tensore impedenza  $Z$  e sono state presentate tutta una serie di problematiche che, in ultima analisi, sono legate alla natura univariata dell'approccio statistico utilizzato.

I metodi presentati sono tutti basati, infatti sui minimi quadrati e d utilizzano, per la stima di  $Z$  un modello per cui ogni canale di output è rappresentabile come combinazione lineare di una serie di canali di input, i canali predicenti, cui si sovrappone un termine legato agli errori. La stima assunta per il parametro minimizza la somma dei quadrati dei residui secondo una relazione del tipo

$$\eta = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (E_i - Z^H H_i)^2 \quad (3.15)$$

Tutte le versioni alternative per questo tipo di approccio, siano esse pesate o robuste, anche se capaci di ottenere una stima migliore rispetto ai LS standard, trattano alcune variabili come indipendenti e prive d'errore, mentre le restanti sono considerate variabili dipendenti, che presentano quindi un rumore che racchiude sia gli errori di misura che le inadeguatezze legate al modello di sorgente assunto

Modelli di questo tipo possono essere ragionevoli in alcuni casi, ad esempio la stima dell'impedenza per single station MT, dove alcuni campi possono essere misurati più accuratamente di altri, ma l'inevitabile presenza di rumore nei canali predicenti comporta comunque un bias nella stima. Questo tipo di effetto, ampiamente trattato in letteratura, ha condotto, in MT, all'introduzione del metodo della remote reference presentato precedentemente.

Oggi i sondaggi MT presentano un carattere altamente multivariato. Vengono effettuati, infatti con multiple stazioni costituite da multipli canali di acquisizione contemporanei, racchiudendo, in questo modo, un'informazione utilizzabile per sviluppare un modello per i dati che sia più coerente con la complessità degli aspetti legati alla natura della sorgente.

L'introduzione di nuovi modelli, in funzione di quanto detto finora, deve tener conto della presenza di rumore in tutti i canali, sviluppando un approccio di tipo multivariato, che offre due tipi di vantaggi. I metodi multivariati trattano tutte le variabili in modo simmetrico e sono dunque basati su un approccio statistico più accettabile. Inoltre sfruttano la contemporaneità degli array che caratterizza i sondaggi MT attuali, permettendo un'analisi delle strutture coerenti di segnale presenti nei dati per testare la validità dei modelli di sorgente assunti ed, eventualmente, renderli più adeguati alle reali caratteristiche del segnale e del rumore che caratterizzano gli array di dati geomagnetici.

Supponiamo che le sorgenti esterne siano elementi dello spazio finito dimensionale  $\Phi$  e consideriamo un modello che assuma la presenza di rumore in tutti i canali, generalizzando quello (2.32):

$$\bar{X}_k = \bar{b}_k + \bar{e}_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{jk} \bar{u}_j + \bar{e}_k = U\alpha_k + \bar{e}_k \quad (3.16)$$

dove  $\bar{b}$  (vettore ad  $m$  componenti appartenente allo spazio di risposta  $\mathfrak{R}$ ,  $p$ -dimensionale),  $\bar{u}_j$  ed  $U$  ( $U$  è la matrice  $m \times p$  le cui colonne  $\bar{u}_j$  rappresentano i campi osservati nelle stazioni di misura relative al  $j$ -mo potenziale esterno sorgente  $\varphi_j$ ) hanno il significato presentato in precedenza. I  $p$  vettori complessi  $\bar{\alpha}_k$  rappresentano l'ampiezza e fase delle  $p$  funzioni sorgente  $\varphi_j$  per il  $k$ -mo segmento dei dati. Nel caso di sorgente d'onda piana, i.e.  $p=2$ , i vettori  $\bar{\alpha}_k$  rappresentano i vettori di polarizzazione che troviamo nella teoria di propagazione delle onde [Jackson, 1975].

Modelli di questo tipo, per dati reali, sono ampiamente trattati in letteratura, in vari ambiti, dalla statistica all'economia, e sono conosciuti, secondo diverse nomenclature, come *Factor analysis models* [Anderson&Rubin, 1956], *Multivariate errors in variables models* [Gleser, 1981], *Linear functional equations models* [Gleser&Watson, 1973]. Una trattazione completa di modelli di questo genere è stata sviluppata da Anderson, 1984.

La difficoltà nel determinare dei campi di riferimento, è implicita nella relazione (3.16), infatti se  $A$  è una qualsiasi matrice  $p \times p$  non singolare, si ha che:

$\bar{X}_k = U\alpha_k + \bar{e}_k = UAA^{-1}\alpha_k + \bar{e}_k = \tilde{U}\tilde{\alpha}_k + \bar{e}_k$  e dunque  $\tilde{U} = UA$  e  $\tilde{\alpha}_k = A^{-1}\alpha_k$  danno origine, esattamente, agli stessi dati di  $U$  e  $\alpha_k$ . A partire dai dati, non è quindi possibile determinare unicamente, né i campi totali corrispondenti ad una data sorgente né i vettori di polarizzazione.

D'altra parte si ha che, detta  $\tilde{u}_j$  la  $j$ -ma colonna di  $\tilde{U}$ :

$$\mathfrak{R} = \text{Sp}\{\bar{u}_j : j = 1 \dots p\} = \text{Sp}\{\bar{z}_j : j = 1 \dots p\} \quad (3.17)$$

lo spazio di risposta risulta essere univocamente determinato. Si noti che questa è una ulteriore dimostrazione di come la quantità fondamentale da stimare sia  $\mathfrak{R}$  piuttosto che i vettori  $\bar{u}_j$ .

### 3.4.1 Stima dello spazio risposta

Consideriamo, dunque il problema della stima dello spazio di risposta  $\mathfrak{R}$ , ad una data frequenza  $\omega$ , partendo da una serie di  $N$  vettori di dati  $\bar{X}_k$ , e introduciamo la *matrice di densità spettrale* (SDM), nota anche come matrice di covarianza dei campioni, i.e. la matrice di tutte le possibili autopotenze e crosspotenze:

$$S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{X}_k \bar{X}_k^* \quad (3.18)$$

dove i vettori  $\bar{X}_k$  possono essere considerati dei vettori complessi  $m$  dimensionali casuali, indipendenti e appartenenti ad una stessa distribuzione di probabilità.

Supponiamo, inizialmente, che le assunzioni di dimensionalità  $p$  dello spazio delle sorgenti e di dati privi di rumore valgano in maniera esatta.

In questa ipotesi si può scrivere  $\Xi = U\alpha$  dove  $\Xi$  è la matrice  $m \times N$  la cui  $k$ -ma colonna è il vettore  $\bar{X}_k$ . Si ha inoltre che:

$$S = \frac{1}{N} \Xi \Xi^{-1} = \frac{1}{N} U \alpha \alpha^* U^* = U \Sigma_a U^* \quad (3.19)$$

La matrice  $S$ , per come è definita, risulta Hermitiana e positiva e, supponendola non singolare, può essere decomposta come  $S = \mathbf{V} \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}^*$  dove  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ , mentre  $\mathbf{V}$  è una matrice  $m \times m$  unitaria, ( $\mathbf{V} \mathbf{V}^* = \mathbf{1}_m$ ). La  $i$ -ma colonna di  $\mathbf{V}$  sarà un autovettore di  $S$ , corrispondente all'autovalore  $\gamma_i$  (supposti ordinati dal più grande al più piccolo). Se  $\Sigma_a$  è non singolare, e quindi di rango  $p$ , anche la SDM risulterà non singolare e dotata di  $p$  autovalori non nulli. Si avrà inoltre che:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\gamma_i} S \bar{v}_i = \frac{1}{\gamma_i} U [\Sigma_a U^* \bar{v}] = U \beta \quad (3.20)$$

dove  $\beta = \frac{1}{\gamma_i} [\Sigma_a U^* \bar{v}]$  è un vettore complesso  $p$ -dimensionale. Questo dimostra che i  $p$  autovettori  $\bar{v}_i$  di  $S$ , corrispondenti ai  $p$  autovalori,  $\gamma_i$ , non nulli di  $S$  possono essere espressi come combinazione lineare dei vettori  $\bar{u}_j, j = 1 \dots p$  e dunque appartengono a  $\mathfrak{R}$ . Essendo  $\bar{v}_i$ ,

$p$  vettori linearmente indipendenti dello spazio risposta, ne rappresenteranno una base e, pertanto  $\text{Sp}\{\bar{\mathbf{v}}_i : i = 1, \dots, p\} = \mathfrak{R}$ .

L'assunzione che  $\Sigma_a$  sia non singolare è ragionevole e risulta valida ammesso che tutte le sorgenti possibili siano adeguatamente campionate. Quindi, per dati liberi da rumore, gli autovettori associati agli autovalori non nulli di  $S$  generano lo spazio risposta. I dati reali saranno sempre contaminati da rumore e la situazione sarà, naturalmente più complessa.

Supponiamo, inizialmente, gli errori scorrelati dal segnale: il valore atteso della SDM soddisferà la relazione

$$\Sigma = E(S) = U\Sigma_a U^* + E(\bar{\mathbf{e}}\bar{\mathbf{e}}^*) = \Sigma_S + \Sigma_N \quad (3.21)$$

dove  $\Sigma_S = U\Sigma_a U^*$  rappresenta la matrice di covarianza del segnale vero e proprio, privo di errori, mentre  $\Sigma_N$  rappresenta la matrice di covarianza dell'errore  $\bar{\mathbf{e}}_k$ .

La situazione più semplice è quella in cui gli errori sulle varie componenti sono scorrelati tra loro e di uguale grandezza, i.e.  $\Sigma_N = \sigma^2 \mathbf{1}_m$  (3.22). Quindi, detto  $\bar{\mathbf{v}}_i$  l' $i$ -mo autovettore di  $\Sigma_S$ , si avrà che

$$\Sigma \bar{\mathbf{v}}_i = (\Sigma_S + \Sigma_N) \bar{\mathbf{v}}_i = (\gamma_i + \sigma^2) \bar{\mathbf{v}}_i \quad (3.23)$$

e dunque  $\bar{\mathbf{v}}_i$  sarà anche autovettore di  $\Sigma = E(S)$ .

A differenza di quanto verificato nel caso di dati privi di rumore, tutti gli autovalori di  $\Sigma$  saranno non nulli. Tuttavia, mentre gli  $m-p$  autovalori più piccoli saranno pari  $\sigma^2$ , i  $p$  più grandi rimarranno inalterati rispetto al caso precedente. Questi  $p$  autovettori dominanti definiscono lo spazio risposta  $\mathfrak{R}$ .

La matrice  $\Sigma$  rappresenta il valore atteso della SDM dei campioni e tenderà a  $S$  per un numero infinito di dati. Avendo a disposizione un numero finito di campioni, il valore di  $S$  sarà solo distribuito intorno a  $\Sigma$ , con una certa distribuzione di probabilità, e dunque la struttura di autovalori presentata in precedenza, risulterà disturbata in qualche modo. Comunque, se il

rapporto segnale-rumore, approssimabile a  $\frac{\gamma}{\sigma^2}$ , dove  $\gamma$  è un valore della dimensione dei  $\gamma_i$ ,

risulta abbastanza elevato, la distribuzione degli autovalori dovrebbe approssimare quella utile. Dovrebbero, cioè emergere  $p$  autovalori più grandi, circa pari a  $\gamma$ , rispetto a  $m-p$  autovalori della dimensione di  $\sigma^2$ . Inoltre gli autovettori corrispondenti ai  $p$  autovalori più grandi, descrivono un sottospazio  $p$ -dimensionale che è una forma perturbata, ragionevolmente vicina, al vero spazio risposta.

Con un buon rapporto segnale rumore, quindi, è possibile ottenere una buona stima di  $\mathfrak{R}$ , a partire dai  $p$  autovettori dominanti di  $S$ :

$$\hat{R} = \text{Sp}\{\hat{v}_j : j = 1 \dots p\} \quad (3.24)$$

L'assunzione di rumore isotropico nelle varie componenti, ed in particolare l'ipotesi di  $p$ -dimensionalità della sorgente, risultano nella pratica, spesso violate. Esempi di questo tipo sono presenti in letteratura, e sono stati analizzati in profondità nell'ambito dell'analisi dei dati MT raccolti nel progetto EMSLAB negli Stati Uniti, lungo profili formati da diverse stazioni disposte lungo poche centinaia di chilometri. Nonostante l'estensione del profilo piccola rispetto alla dimensione di coerenza attesa per la sorgente d'onda piana, stimata al migliaio di chilometri a medie latitudini [Porath *et al.*, 1971], già un'analisi qualitativa dei dati dimostrava l'esistenza di strutture di autovalori addizionali nella SDM, principalmente a causa del segnale coerente generato dalla presenza, seppure a distanze elevate, di reti ferroviarie ad alimentazione elettrica.

Effetti di questo genere sono spesso presenti nella pratica, soprattutto in aree ad elevata urbanizzazione e richiedono un'attenta interpretazione fisica, sia dal punto di vista delle ipotesi sulle caratteristiche e sul numero di sorgenti che da quello degli effetti sulla stima dei parametri.

Le ragioni per cui un modello isotropico del rumore risulta inadeguato sono collegate a differenti fenomeni. Innanzitutto i dati geomagnetico includono misure di campi differenti, elettrici e magnetici, spesso effettuati con strumenti diversi. Ma anche per misure di campi dello stesso tipo, effettuate con strumenti analoghi, l'assunzione di errori di eguale grandezza sui vari canali è spesso discutibile. Ad esempio, la misura dei campi elettrici può risentire di rumori che dipendono dal contatto suolo-elettrodo e che risultano variabili sia tra differenti siti di misura che nel singolo sito. Per i canali magnetici gli effetti del rumore antropico variano spesso fortemente da sito a sito, ma anche nel sito stesso. Particolarmente complesse risultano le situazioni in cui alcune forme di rumore risultino collegate tra canali. La matrice di covarianza del rumore  $\Sigma_N$  dovrà dunque avere elementi fuori diagonale non nulli. Questi effetti possono essere presenti tra canali di un singolo sito, a causa del rumore culturale nei canali magnetici, ma anche tra siti diversi, a causa principalmente delle linee di alimentazione elettrica e delle reti ferroviarie elettriche. A queste sorgenti sia aggiungono altri effetti non di natura antropica, legati ad esempio, agli effetti della variazione diurna della temperatura sugli strumenti di misura. Infine, e principalmente, il rumore correlato può essere originato da violazione delle ipotesi sulla dimensionalità della sorgente. In questo caso può essere complesso anche stabilire una distinzione tra segnale e rumore, nel senso che gli effetti

collegati alle sorgenti, pur facendo certamente parte del segnale elettromagnetico, possono condurre a modelli inadeguati di sorgente ed implicare pericolosi errori in fase di inversione dei dati, quando si tratta di associare alle curve sperimentali un modello di sottosuolo su base probabilistica.

In generale, se il modello (3.22) non risulta adeguato, gli autovalori della SDM attesa  $\Sigma$  saranno diversi da quelli della SDM del segnale  $\Sigma_s$  e, pertanto, la stima  $\hat{R}$  dello spazio di risposta presenterà un bias. E' possibile dimostrare che, detta  $\Sigma_N^{1/2}$  una matrice tale che  $\Sigma_N^{1/2}(\Sigma_N^{1/2})^* = \Sigma_N$  e  $\bar{v}_i$ , gli autovettori di  $S' = \Sigma_N^{-1/2}S\Sigma_N^{1/2}$ , ordinati per grandezza decrescente dei relativi autovalori,  $\hat{R} = \text{Sp}\{\Sigma_N^{1/2}\bar{v}_i; i = 1, \dots, p\}$  rappresenta uno stimatore asintoticamente corretto di  $\mathfrak{R}$ . Dato che, generalmente,  $\Sigma_N$  non è nota a priori, sarà necessario stimare anche questa grandezza tramite opportuni algoritmi. A questo scopo introduciamo il metodo RMEV [Egbert, 1997].

### 3.4.2 Il metodo RMEV

In base a quanto precedentemente, è possibile assumere per i dati geomagnetici un modello del tipo  $\bar{X}_k = U\alpha_k + \bar{e}_k$ , ed utilizzare, per lo spazio risposta, uno stimatore definito a partire dalla diagonalizzazione di una matrice del tipo  $\Sigma_N^{1/2}$ , collegata alla matrice di covarianza dei campioni sperimentali a disposizione. Mentre in linea di principio il rumore ed i parametri che caratterizzano il segnale sono modellabili in una ampia gamma di forme, in realtà, per ottenere dei risultati che siano applicabili sperimentalmente, risulta fondamentale restringere le forme possibili per la matrice di covarianza del rumore,  $\Sigma_N$ . In effetti, uno dei modelli più semplici a cui è possibile pensare è quello per cui  $\Sigma_N = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)$ , che corrisponde ad un rumore scorrelato non solo tra le stazioni di misura, ma anche tra i vari canali di una singola stazione. In teoria, in questo caso, sarebbe possibile stimare le  $\sigma_i^2$  per ogni singolo canale a partire dai dati relativi ad una single-station MT a 5 canali. Nella pratica è spesso necessario assumere modelli più complessi per  $\Sigma_N$ , per tener conto della presenza di rumore correlato tra i canali di una singola stazione o, nel caso peggiore, di rumore correlato anche tra i diversi siti.

Cerchiamo di modificare opportunamente la (3.16)

$$\bar{X}_k = U\alpha_k + V\gamma_k + \bar{e}_k = W\beta_k + \bar{e}_k \quad (3.25)$$

Nella (3.25) sono combinati insieme, in una matrice  $\mathbf{W}$  ed un vettore di polarizzazione  $\beta_k$ , i termini legati al segnale, espressi dalla matrice  $\mathbf{U}$  e dal vettore di polarizzazione  $\alpha_k$ , e quelli legati alle sorgenti di rumore coerente, espressi, analogamente a quanto fatto per il segnale, da una matrice  $\mathbf{V}$  ed un vettore di polarizzazione  $\gamma_k$ .

In questo modello, quindi, il termine  $\bar{c}_k$  rappresenterà il solo rumore incoerente. Adottando questo approccio sarà dunque possibile ricondursi ad una forma, per  $\Sigma_N$ , del tipo diagonale, a patto però di ridurre il problema, in questo modo, alla sola separazione tra segnale coerente e rumore scorrelato tra i canali. In questo modello, pertanto, non sono contemplati gli aspetti inerenti alla separazione tra una parte, che può essere interpretata come il segnale vero e proprio, ed una parte del segnale trattabile come rumore coerente. Scegliamo, invece, un modello di partenza del tutto generale. In questo modo risulterà possibile stimare il livello di rumore incoerente nei vari canali e ripulire dai vari outliers, ma, soprattutto, stimare la *dimensione di coerenza*  $M$  dei dati (i.e. il numero di colonne di  $\mathbf{W}$ ) e quindi la dimensionalità del rumore coerente.

Con una buona stima delle  $\sigma_i^2$ , è possibile scalare il vettore dei dati secondo la relazione:

$$\bar{C}'_k = \frac{\bar{X}_k}{\sigma_k} \quad (3.26)$$

riducendosi ad uno spazio in cui solo i vettori corrispondenti alla parte coerente dei dati dovrebbero avere una varianza significativamente maggiore di uno. Utilizzando questi dati scalati per la diagonalizzazione della matrice  $S' = \Sigma_N^{-1/2} S \Sigma_N^{1/2}$ , il numero di autovalori maggiori di uno darà una buona stima di  $M$  ed i corrispondenti autovettori, riscalati nello spazio originario, daranno una stima di  $\mathbf{W}$ .

Su questa base, il metodo RMEV può essere schematizzato in questo modo:

Si stima la matrice  $S' = \Sigma_N^{-1/2} S \Sigma_N^{1/2}$ , usando i dati originali  $X_i$  e una prima stima di  $\sigma_i^2$  (in effetti, per cominciare si possono prendere in considerazione varianze unitarie, i.e.  $\Sigma_N = \mathbf{1}_m$ ).

Per ogni componente  $k$  si estraggono gli  $L$  autovettori dominanti della sottomatrice di  $S'$  ottenuta eliminando la  $k$ -ma riga e colonna. Si utilizzano gli autovettori precedenti e i dati scalati per stimare i parametri di polarizzazione.

Si calcolano i residui, i pesi e dei nuovi vettori dei dati, ripuliti.

I nuovi vettori dei dati vengono utilizzati per ottenere una nuova stima di  $\mathbf{W}$ .

Si reitera fino alla convergenza, ripartendo dalle stime ottenute per i dati e per  $\Sigma_N$ . Si ottiene una stima definitiva di  $S'$  utilizzando i valori dei dati e delle varianze ottenuti dall'iterazione finale. Gli autovalori ed autovettori di  $S'$  daranno una nuova stima di  $M$  e di  $\mathbf{W}$ .

Si reiterano, fino alla convergenza, i passi precedenti, tenendo questa volta fissati i valori di  $\sigma_i^2$ , per rifinire le stime di  $\mathbf{M}$  e di  $\mathbf{W}$ .

Se la stima ottenuta comporta che  $M=2$ , allora  $\mathbf{W}$  potrà essere identificata con  $\mathbf{U}$ , la risposta della Terra ad una sorgente di onda piana, e risulterà possibile stimare le funzioni di trasferimento. Se, invece,  $M>2$ , risulta chiara la presenza di rumore coerente. In questo caso, non esiste un modo generale di garantire l'affidabilità dei risultati ottenuti.. In effetti, quando  $M>2$ , i vettori di polarizzazione relativi alla sorgente MT,  $\alpha_k$ , e quelli relativi al rumore coerente,  $\gamma_k$ , sono combinati insieme nei parametri stimati  $\beta_k$ . Disponendo di una stima affidabile di  $\alpha_k$ , sarebbe possibile modificare lo schema precedente per ottenere una stima di  $\mathbf{U}$ , e dunque del tensore  $\mathbf{Z}$  relativo ad una sorgente di onda piana, anche nel caso  $M>2$ . Il modo più semplice, per ottenere una stima di questo genere, è di disporre di un sito di Remote Reference che sia quiet, cioè che sia adatto a fornire i canali normali di riferimento. In altri termini le caratteristiche del sito, devono essere tali (sorgente MT, assenza di discontinuità laterali della resistività), da permettere di supporre che i vettori di polarizzazione stimati in quel sito possano essere assunti anche per la sorgente di onda piana. In questo modo, una volta stimati, dal sito RR, gli  $\alpha_k$  sarà possibile, con una modifica dello schema RMEV, stimare  $\mathbf{U}$  e successivamente anche  $\mathbf{V}$  e  $\gamma_k$ .

Se il rumore coerente è presente in tutti i siti, una separazione di questo tipo risulta impossibile. Lo schema multivariato permette, però, una chiara diagnostica della presenza di rumore coerente e, applicandolo a brevi segmenti di dati, può essere possibile trovarne alcuni che siano non contaminati. Da questi è possibile ricostruire una stima di  $\mathbf{U}$  ed usarla come punto di partenza per una separazione segnale-rumore coerente.

## 4 Cenni di teoria dell'inversione

In MT un modello può essere ricostruito o a partire da un modelling diretto, che rappresenta l'unico modo per ottenere, data una distribuzione di conducibilità elettrica, dei dati sintetici o da un'inversione che permette di calcolare, in modo iterativo, un modello di resistività a partire da osservazioni sperimentali.

### 4.1 Metodi differenziali per il modelling elettromagnetico

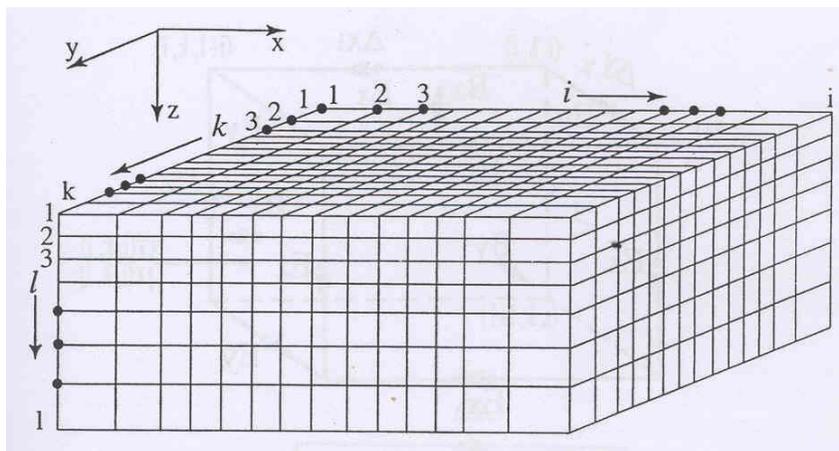
Il *problema diretto* può essere rappresentato da una semplice relazione del tipo

$$\vec{d} = A(\vec{m}) \quad (4.1)$$

dove  $\vec{d}$  è il vettore dei dati,  $A$  è un operatore definito diretto ed  $\vec{m}$  è il vettore le cui componenti non sono altro che i parametri del modello.

In molte delle applicazioni dei metodi elettromagnetici alla geofisica risulta necessario modellare la risposta di strutture geoelettriche di forma e dimensioni arbitrarie, caratterizzate da anomalie di resistività non necessariamente ristrette a scala locale.

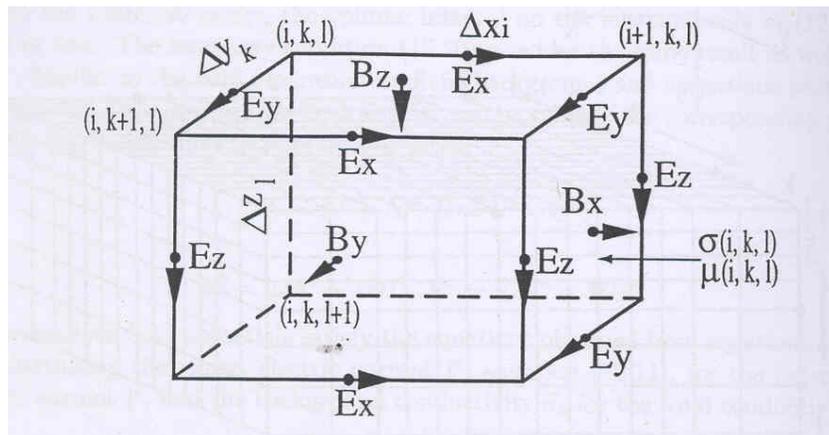
Esistono differenti tecniche per il modelling elettromagnetico diretto, basate fondamentalmente sull'implementazione numerica di un approccio basato sulla forma differenziale (DE) delle Equazioni di Maxwell (metodi alle differenze finite (FD) o agli elementi finiti (FE) ) ovvero sulla loro forma integrale (IE). Esistono differenti modi di ottenere un analogo numerico delle Equazioni di Maxwell ma, nella maggioranza dei casi, si opera la discretizzazione di un modello in un certo numero di celle elementari, come mostrato in Figura 4.1



**Figura 4.1: Esempio di discretizzazione di un modello in celle elementari**  
Si assume la costanza dei parametri elettromagnetici all'interno di ogni cella.

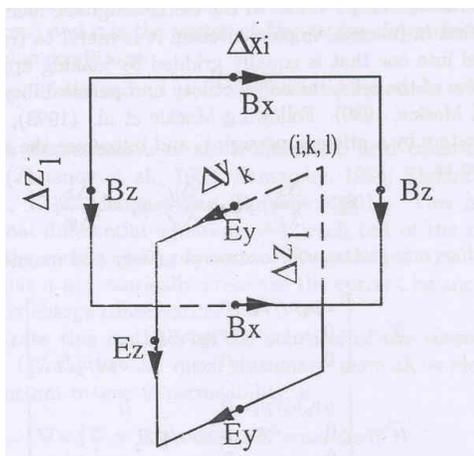
Viene introdotto un sistema di coordinate cartesiano ortogonale, con l'asse z diretto verso il basso e l'asse x diretto verso destra; i parametri elettromagnetici  $\rho$ ,  $\mu$ , ed  $\varepsilon$ , vengono considerati costanti all'interno di ogni cella elementare. I singoli nodi della griglia, infine, vengono numerati, con gli indici  $(i, k, l)$ , lungo le tre direzioni coordinate  $\hat{x}_i \in \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ .

La tecnica comune di discretizzazione dei campi prevede che le componenti del campo elettrico  $\vec{E}$  siano definite al centro degli spigoli di ognuna delle celle elementari, mentre la componente del campo magnetico  $\vec{H}$  lungo uno dei tre versori coordinati  $\hat{x}_i$  viene definita nel centro delle due facce della cella elementare ortogonali a tale direzione.



**Figura 4.2: Discretizzazione del campo elettromagnetico lungo la griglia.**

Il vantaggio di una simile discretizzazione è che le componenti di  $\vec{E}$  risultano continue lungo gli spigoli delle celle e quelle di  $\vec{H}$  sulle facce. In questo modo, dunque, la griglia risulta composta da due *loop* elementari: un *loop* elettrico, formato da quattro componenti di  $\vec{E}$  parallele ai bordi di una faccia della cella, ed un *loop* magnetico, formato da quattro componenti adiacenti di  $\vec{H}$ .



**Figura 4.3 I loop elettrici e magnetici.**

Le Equazioni di Maxwell, vengono discretizzate lungo questi *loop*. Ad esempio consideriamo:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{i\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \vec{E} &= \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \times \vec{H}\end{aligned}\quad (4.2)$$

Integrando la prima delle (4.2) lungo una faccia S della generica cella elementare, il cui bordo sia L, ed applicando il teorema di *Stoke* si ha che:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{i\omega} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}\quad (4.3)$$

E' possibile discretizzare l'integrale (4.3) ricordando che, per quanto detto in precedenza sugli andamenti dei campi nelle singole celle, per il generico nodo (i, k, l) componenti di  $\vec{E}$  lungo le direzioni cardinali  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  saranno definite rispettivamente nei nodi  $\left(i + \frac{1}{2}, k, l\right), \left(i, k + \frac{1}{2}, l\right), \left(i, k, l + \frac{1}{2}\right)$ , mentre quelle di  $\vec{H}$  nei nodi  $\left(i, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right), \left(i + \frac{1}{2}, k, l + \frac{1}{2}\right), \left(i + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, l\right)$ .

Considerando, a titolo esempio, una faccia parallela al piano verticale xz, si otterrà che:

$$i\omega B_x(i, k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}) \Delta y_k \Delta z_l = \left[ E_y(i, k + \frac{1}{2}, l) - E_y(i, k + \frac{1}{2}, l + 1) \right] \Delta y_k + \left[ E_z(i, k + 1, l + \frac{1}{2}) - E_z(i, k, l + \frac{1}{2}) \right] \Delta z_l \quad (4.4)$$

Per le altre facce della generica cella elementare risulterà possibile ottenere espressioni simili. Analoghe formule possono essere derivate dalla seconda delle (4.2). Dalla combinazione di tutte le equazioni algebriche si otterrà un sistema di equazioni lineari le cui soluzioni rappresenteranno i valori discreti del campo elettromagnetico nelle celle elementari, ossia la soluzione numerica del problema elettromagnetico diretto. In particolare per la Magnetotellurica, viene assunta una sorgente di campo magnetico uniforme sulla superficie della terra (discretizzata) e tramite equazioni discretizzate, come la (4.4), viene propagata nel mezzo per ogni frequenza; il modello assunto restituisce alla superficie valori dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  dai quali si ottiene il tensore Z (dato sintetico).

## 4.2 Il problema inverso

Solitamente il principale obiettivo delle indagini geofisiche consiste nella determinazione di strutture geologiche e dei parametri che le caratterizzano, a partire da dati sperimentali. Ciò costituisce il *problema inverso*. Una definizione generale del problema inverso può essere schematizzata con una mappa astratta del tipo

vettore dei dati sperimentali,  $\vec{d} = \vec{d}_{\text{obs}} \rightarrow$  modello  $\vec{m}$

o analogamente come soluzione di un'equazione agli operatori del tipo:

$$\vec{m} = A^{-1}(\vec{d}) \quad (4.5)$$

dove  $A^{-1}$  è detto operatore inverso,  $\vec{m} \in M$  è una funzione, o un vettore, che descrive i parametri del modello ed appartiene ad uno spazio metrico  $M$ , e  $\vec{d}$  è il data set a disposizione, che può essere considerato, nel caso di osservazioni discrete, un vettore appartenente ad uno spazio metrico  $D$ . Risolvere la (4.5) significa determinare un modello predetto  $\vec{m}_{\text{pr}}$  che generi un vettore dei dati  $\vec{d}_{\text{pr}}$  in grado di approssimare, compatibilmente all'accuratezza delle nostre misure, i dati osservati.

### 4.3 Problematiche relative alla soluzione del problema inverso

Le proprietà essenziali del generico problema inverso riguardano l'esistenza, l'unicità e la stabilità della sua soluzione. L'esistenza è associata alla formulazione matematica del problema inverso dato che, se è pur vero che da un punto di vista fisico si tratta dello studio di strutture reali, dal punto di vista matematico potrebbero non esserci modelli numerici adeguati a fittare i dati osservati sperimentalmente.

La necessità che la soluzione sia unica è evidente, se si pensa solo a come risultati impossibile stabilire quale abbia più significato fisico tra due differenti modelli  $\vec{m}_1$  e  $\vec{m}_2$ , che generano lo stesso dato  $\vec{d}_0$ , cioè tali che  $A(\vec{m}_1) = A(\vec{m}_2) = \vec{d}_0$ .

La questione della stabilità infine, è altrettanto cruciale: infatti spesso piccole variazioni del dato possono introdurre grandi variazioni nella soluzione.

Fu il matematico francese *Hadamard*, nel 1902, ad introdurre per la prima volta i concetti di problemi *ill-posed* e *well-posed*. Utilizzando la definizione data nel 1977 dalla teoria di regolarizzazione di *Tikhonov* e *Arsenin* (equivalente alla definizione introdotta da *Hadamard*) un problema risulta *well-posed* se la soluzione  $\vec{m}$  dell'equazione (4.5) esiste, è unica e se l'operatore  $A^{-1}$  è continuo e definito su tutto lo spazio dei dati  $D$ . Se viene meno solo una di queste tre condizioni il problema risulta essere *ill-posed*

In realtà la maggior parte dei problemi inversi geofisici, e fisici più in generale sono *ill-posed*. Questo implica la non determinazione di una soluzione esatta<sup>(e)</sup>.

Per superare questo ostacolo Tikhonov [Tikhonov&Arsenin, 1977] ha dimostrato, nell'ambito della sua teoria relativa ai metodi di regolarizzazione della soluzione di un problema inverso, che se si restringe la classe di modelli utilizzati nell'inversione, un problema originariamente *ill-posed* può diventare *well-posed*, imponendo dei vincoli ai parametri del modello.

#### 4.4 Cenni di teoria della regolarizzazione

Un algoritmo di regolarizzazione, principalmente, considera invece di un unico problema *ill-posed*, una famiglia di problemi *well-posed* che approssimi il problema inverso  $\bar{m} = A_\alpha^{-1}(\bar{d})$  (4.6), dove  $\alpha$  è detto parametro di regolarizzazione. Indicando, inoltre, con  $\bar{m}_\alpha$  e  $\bar{m}_t$ , rispettivamente la soluzione del problema (4.6) e quella del problema inverso originale (4.5), si assume che  $\bar{m}_\alpha \rightarrow \bar{m}_t$  quando  $\alpha \rightarrow 0$ . In altri termini, un algoritmo di regolarizzazione è basato sull'approssimazione dell'operatore non continuo  $A^{-1}$ , con una famiglia di operatori inversi continui  $A_\alpha^{-1}$ , detti regolarizzanti, dipendenti dal parametro  $\alpha$ . La regolarizzazione deve essere tale che, quando  $\alpha$  si annulla, gli operatori rappresentativi dei termini della famiglia tendano a  $A^{-1}$ . Poniamo  $R(\bar{d}, \alpha) = A_\alpha^{-1}$ .

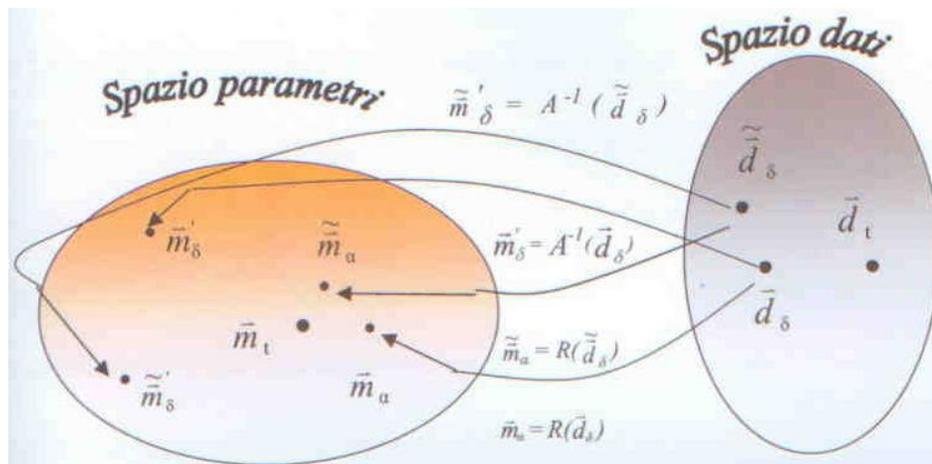


Figura 4.4 :Rappresentazione del comportamento degli operatori regolarizzanti R, che a vettori poco distanti nello spazio dei dati, associano vettori poco distanti nello spazio dei parametri.

(e) Con l'espressione soluzione esatta si fa riferimento all'esistenza di una soluzione del problema inverso che sia unica e stabile.

Nella Figura 4.4 viene data una rappresentazione di facile lettura dell'uso della teoria di regolarizzazione di problemi inversi.

Il vettore  $\bar{d}_t$ , appartenente allo spazio vettoriale dei dati  $D$ , rappresenta il vettore dati teorici, privi di rumore. Il vettore dati sperimentali, affetto da noise, è invece indicato con  $\bar{d}_s = \bar{d}_t + \delta\bar{d}$ . È immediato osservare, come l'applicazione di un generico operatore  $A^{-1}$  su dati prossimi<sup>(f)</sup>, come  $\bar{d}_s$  e  $\tilde{\bar{d}}_s$ , appartenenti allo spazio  $D$ , genera soluzioni, rispettivamente  $\bar{m}_s$  e  $\tilde{\bar{m}}_s$ , che risultano essere fortemente instabili. In altri termini piccole perturbazioni che si verificano nello spazio dati non risultano essere associabili ad altrettanto minime perturbazioni nello spazio dei modelli  $M$ .

Contrariamente a ciò, un operatore regolarizzante  $R$  individua in  $M$  soluzioni stabili, indicate con  $\bar{m}_\alpha$  e  $\tilde{\bar{m}}_\alpha$  (cioè a vettori poco distanti nello spazio dei dati corrispondono vettori poco distanti nello spazio dei modelli). Uno dei risultati più rilevanti, conseguiti da Tikhonov, è stato dimostrare che esiste una soluzione  $\bar{m}_s$  tale da minimizzare un funzionale, detto *funzionale di misfit* del tipo:

$$\varphi(\bar{m}) = \|A(\bar{m}) - \bar{d}_s\|^2 \quad (4.7)$$

dove  $\|A(\bar{m}) - \bar{d}_s\|$  non è altro che la definizione di metrica nello spazio dei dati  $D$ .

Questo è equivalente a determinare, tra i possibili modelli che rendono *well posed* il problema inverso, quello in corrispondenza del quale i dati sperimentali risultano essere meglio approssimati. Diversi algoritmi di minimizzazione di  $\varphi(\bar{m})$  sono stati adottati nel tempo.

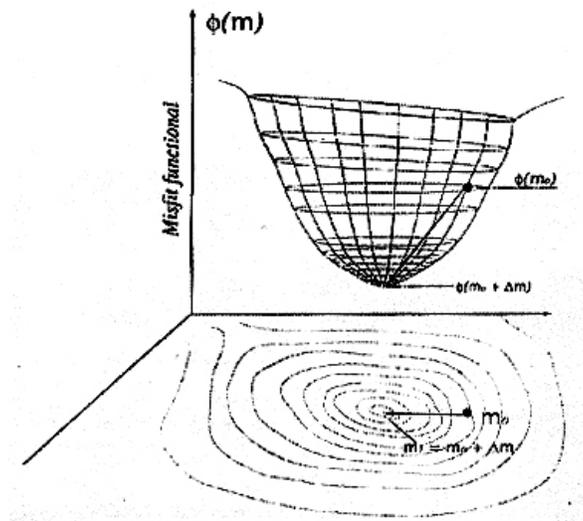
#### 4.4.1 Algoritmi di minimizzazione del funzionale di misfit

Gli algoritmi di minimizzazione del funzionale  $\varphi(\bar{m})$  maggiormente adottati sono il metodo di Gauss-Newton, il metodo della massima pendenza e quello dei gradienti coniugati. Le tre tecniche sono basate sulla comune assunzione che esista un minimo globale di  $\varphi(\bar{m})$ . Esse si differenziano principalmente per il modo con il quale viene ricercato tale minimo. Il metodo di Gauss-Newton, ad esempio, cerca di determinare la direzione che individua l'estremo

---

(f) I vettori in considerazione devono risultare prossimi dal punto di vista della norma introdotta in  $D$ .

globale del funzionale, per ogni iterazione  $\vec{m}_{n+1} = \vec{m}_n + \delta\vec{m}_n$  con  $n = 1, \dots, N$ , attraverso un'unica perturbazione apportata ad un modello iniziale  $\vec{m}_0 \in M$ .



**Figura 4.5: Luogo geometrico dei punti rappresentativi dei valori assunti dal funzionale di misfit in  $\mathbb{R}^3$ . La ricerca del minimo globale di tale funzione, quando si utilizza il metodo di Gauss-Newton, avviene mediante un'unica iterazione effettuata nello spazio dei parametri.**

In sostanza tale metodo ipotizza che si parta da un buon modello iniziale e che l'operatore  $A$  sia linearizzabile intorno  $\vec{m}_0$ .

Utilizzando il metodo della massima pendenza, la ricerca del minimo globale avviene tramite più iterazioni del tipo  $\vec{m}_{n+1} = \vec{m}_n + \delta\vec{m}_n$  con  $n = 1, \dots, N$  che soddisfino la condizione  $\varphi(\vec{m}_{n+1}) < \varphi(\vec{m}_n)$ . La quantità  $\delta\vec{m}_n$  rappresenta la perturbazione apportata all' $n$ -mo modello.

Il metodo, per ogni iterazione, cerca la direzione di massima ascesa intorno ad  $\vec{m}_n$  nello spazio dei parametri e si muove in direzione opposta per congiungere  $\vec{m}_n$  con  $\vec{m}_{n+1}$ . L'intersezione del piano verticale, passante per tale direzione, con il luogo geometrico rappresentativo del funzionale di misfit, descrive una curva, della quale viene trovato il minimo associato al vettore che supponiamo essere  $\vec{m}_{n+1}$  (figura). Successivamente ci si muove ortogonalmente alla vecchia direzione e si ripete l'operazione di minimizzazione, e così per ogni iterazione.

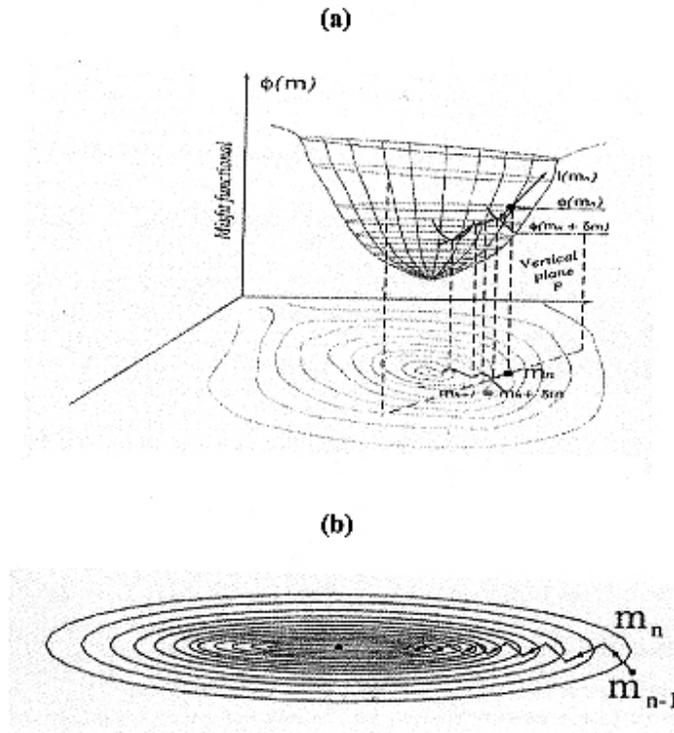


Figura 4.6: (a) Luogo geometrico dei punti rappresentativi dei valori assunti dal funzionale di misfit in  $\mathbf{R}^3$ . La ricerca del minimo globale di tale funzione, quando si utilizza il metodo della massima pendenza, avviene effettuando più iterazioni nello spazio dei parametri. (b) Rappresentazione dell'ortogonalità delle direzioni di massima pendenza nello spazio dei parametri  $M$ .

Il metodo dei gradienti coniugati è, in generale, molto simile a quello appena descritto, anche se permette una più rapida individuazione dell'estremo globale. Per meglio comprendere il motivo di tale vantaggio, si supponga di determinare in  $M$ , le prime due direzioni ortogonali di massima pendenza del funzionale, denotate con  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , corrispondenti alle prime due iterazioni, in modo del tutto analogo a quello descritto per il metodo di massima pendenza. Se, come mostrato in Figura 4.7, le successive iterazioni vengono effettuate in modo da muoversi nello spazio dei parametri lungo la direzione del vettore  $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ , allora è immediato concludere che il minimo del funzionale verrà raggiunto più rapidamente di quanto non si faccia adottando il metodo precedente.

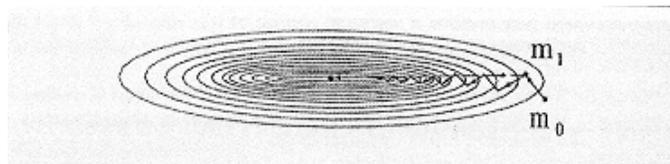


Figura 4.7: Evidenza grafica della maggiore rapidità di raggiungimento del minimo globale del funzionale di misfit, quando si utilizza il metodo dei gradienti coniugati.

## 4.5 Inversione 2D di dati magnetotellurici e studi di sensitività

In questo lavoro di tesi, per interpretare i dati MT, viene utilizzato il codice di inversione 2D di Mackie e Rodi [Mackie et al., 1997; Rodi&Mackie, 2001], che cerca di regolarizzare la soluzione ai minimi quadrati mediante una funzione costo, realizzata tramite un operatore differenziale che agisce nelle direzioni orizzontale e verticale.

La soluzione di tale inversione è fortemente controllata da un parametro di *trade-off* che influenza significativamente i risultati e che deve, quindi, essere scelto molto accuratamente. Nell'algoritmo di regolarizzazione di Rodi e Mackie, basato sul metodo dei gradienti coniugati, l'oggetto da minimizzare è il funzionale

$$\Phi = \Phi_d + \tau \cdot \Phi_m \quad (4.8)$$

che è combinazione di una funzione  $\chi^2$  del tipo  $\Phi_d = \left\| \frac{\vec{d} - f(\vec{m})}{\sigma} \right\|^2$  dove  $\vec{d}$  è il vettore dei dati,  $f(\vec{m})$  è la soluzione diretta del modello  $\vec{m}$ ,  $\sigma$  caratterizza gli errori, e un termine di regolarizzazione di Tikonov  $\Phi_m = \|\mathbf{D}(\vec{m} - \vec{m}_0)\|^2$ , che è realizzato da un operatore differenziale  $\mathbf{D}$  del primo o del secondo ordine che agisce sulla differenza tra il modello  $\vec{m}$  ed un dato modello di partenza  $\vec{m}_0$  e che ha un notevole effetto di smoothing sui risultati dell'inversione.

Questi ultimi dipendono fortemente dalle informazioni strutturali del modello iniziale  $\vec{m}_0$ , che possono portare ad un bias nel modello finale se non sono consistenti con i dati, e dal parametro di *trade-off*  $\tau$ , che controlla il bilancio tra il fitting dei dati e quanto è smooth il modello, ed ha un valore fissato per ogni iterazione del processo d'inversione.

Quindi, per cercare un appropriato modello, si fa ripartire il processo con differenti valori del parametro  $\tau$  ed esplorando il comportamento dell'errore

$$\text{r.m.s.} = \sqrt{\frac{1}{N} \Phi_d} \quad (4.9)$$

È possibile verificare che, mentre per  $\tau$  troppo piccoli l'algoritmo comincia a diventare instabile, per valori maggiori del parametro di regolarizzazione si avrà come risultato un modello più smooth.

Ciò nonostante, la soluzione che si ottiene è soltanto una delle possibili soluzioni appartenenti ad uno spazio dei modelli multidimensionale.

Il problema della non unicità può essere affrontato introducendo la matrice di sensitività che non è altro che la misura di quanto i dati vengono influenzati da piccole distorsioni del modello. Tale matrice si ottiene, automaticamente, quando, nel processo di inversione, si linearizza il problema diretto, ma di fatto, può essere calcolata per ogni dato modello.

I suoi elementi non sono altro che le derivate parziali dei dati rispetto ai parametri del modello:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{m}} \quad (4.10)$$

Il calcolo della matrice di sensitività rappresenta, in un tipico processo di inversione 2D, la parte più dispendiosa, ma questo tipo di analisi risulta indispensabile per comprendere quali parametri del modello vengono risolti in modo peggiore dai dati, così da poterli escludere dall'interpretazione.

## **5 Separazione di contributi d'onda piana e di campo vicino**

Nella realtà, spesso, si possono incontrare situazioni molto complesse in cui la modellazione MT, che prevede la presenza di sole due sorgenti di campo elettromagnetico spazialmente uniformi non è totalmente verificata. E', infatti, possibile ritrovarsi in presenza di sorgenti non all'infinito, dette sorgenti di campo vicino, che non sono caratterizzate da un fronte d'onda e che quindi non forniscono campi elettromagnetici relazionati da tensori d'onda piana. Questo avviene, soprattutto, quando si effettuano sondaggi in zone ad elevata urbanizzazione. In questo caso si riscontra la presenza di rumore coerente caratterizzato da una complicata struttura di correlazione tra le componenti dei campi misurati. Un tipico esempio di noise coerente è quello connesso al passaggio di treni su linee ferroviarie alimentate a corrente continua. La presenza di tale sorgente, che può essere associata ad un dipolo di ampiezza e potenza variabile (sezione 2.3), si manifesta con una distorsione delle curve di resistività apparente e fase, per periodi compresi tra 1 e 300 s, con i dati veri e propri che non appaiono particolarmente scatterati, data la coerenza tra il campo magnetico e quello elettrico.

In generale linee elettriche, insediamenti industriali, antenne e ripetitori, linee ferroviarie, traffico veicolare, reti, recinzioni e tubature metalliche e qualsiasi tipo di attività urbana sono fonte di rumore antropico.

Il metodo RMEV, come introdotto nella sezione 3.4.2, rappresenta una tecnica multivariata, importata dalla meteorologia, che si basa sull'analisi robusta di array di stazioni costituite da multipli canali, che permette di esplorare in dettaglio la struttura del segnale elettromagnetico e di fornire una stima del numero di serie coerenti (d'onda piana e non) presenti nello spazio vettoriale dei dati. Può essere dimostrato che, utilizzando la rappresentazione nella base degli autovettori (empirical orthogonal function), è possibile ricostruire tutte le relazioni lineari che collegano tra loro singoli canali con singoli canali o gruppi di canali a gruppi di canali, come, ad esempio, gli elementi del tensore impedenza, nel caso delle funzioni di trasferimento tra canali locali magnetici e canali locali elettrici, la funzione di trasferimento magnetico nel caso di canali magnetici di siti differenti, ed il tipper nel caso di canali locali magnetici.

Allo scopo di ricostruire curve di resistività apparente e fase relative ai sondaggi effettuati ai Campi Flegrei si è cercato, utilizzando l'analisi multivariata, un criterio che permettesse di discernere i contributi associabili a sorgenti d'onda piana e di campo vicino, di natura antropica.

## 5.1 Test su dati sintetici

Per analizzare in dettaglio lo schema multivariato, e per ricavare utili elementi interpretativi che contribuiscono a favorire la separazione tra contributi d'onda piana e contributi di campo vicino, sono stati, inizialmente, processati dei dati sintetici.

Il dataset utilizzato è parte integrante del Comdat Project (CMDT)[*Sokolova et al.*, 1994], il cui obiettivo è, appunto, quello di fornire un insieme di dati che simulino serie temporali reali di risposta nota, utilizzabili per confrontare programmi di stima delle funzioni di trasferimento e per controllare la struttura del segnale e del rumore, utilizzando nuovi schemi.

Il set di dati  $MT_S$  consiste in quattro serie temporali sintetiche, con la funzione di canali locali, e due di riferimento, da utilizzare come remote-reference, campionate a 20 s e costruite assegnando allo spettro del campo magnetico una struttura il più realistica possibile e calcolando lo spettro del campo elettrico ipotizzando una struttura di tipo 2D.

Inizialmente i dati  $MT_S$  sono stati processati per verificare il corretto funzionamento dell'algoritmo RMEV (sezione 3.4.2) e la corrispondenza tra l'ipotesi di sorgente di onda piana e l'esistenza di due soli autovalori che emergono dal livello di background del noise incoerente.

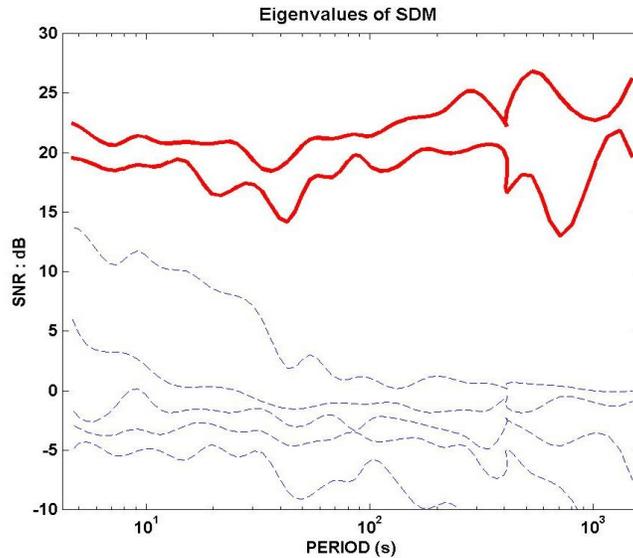
Constatata la buona qualità dei risultati con questo test preliminare, i canali locali sono stati contaminati aggiungendo del rumore coerente. Più precisamente, per simulare una sorgente mobile di campo vicino (quale, ad esempio, un treno) è stato supposto che gli effetti di una sorgente dipolare possano essere rappresentati da un segnale  $MT_N$  modulato sugli assi magnetici ( $H_x$  ed  $H_y$ ) ed elettrici ( $E_x$  ed  $E_y$ ) come segue:

$$H_x = R \sin \left[ \left( \frac{i-1}{N} \right) \frac{\pi}{2} \right] \quad H_y = R \cos \left[ \left( \frac{i-1}{N} \right) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$E_x = R \sin \left[ \left( \frac{i-1}{N} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{20} \right] \quad E_y = R \cos \left[ \left( \frac{i-1}{N} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{20} \right]$$

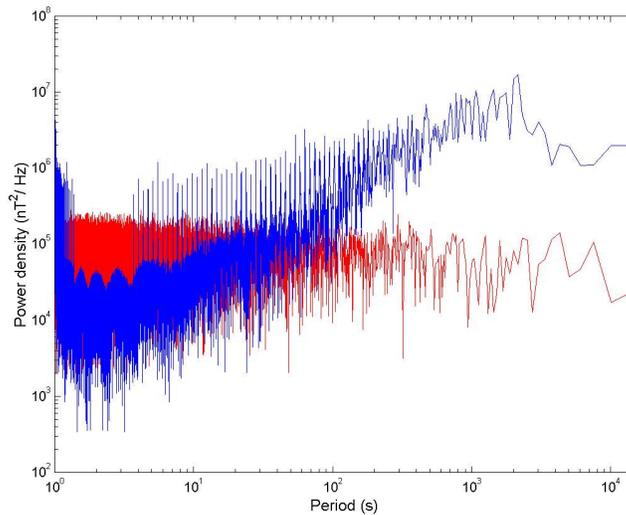
dove  $i = 1, 2, \dots, N$  con  $N$  il numero totale di campioni costituenti le serie, ed  $R$  rappresenta una serie temporale random i cui elementi seguono una distribuzione di probabilità normale a valor medio nullo.

In Figura 5.1 viene riportata la struttura degli autovalori principali (in dB) della matrice di densità spettrale relativa ai dati sintetici con aggiunta di noise, stimati tramite il metodo RMEV, in funzione del periodo (in s). Nella banda di periodo 4-60 s compaiono tre distinti autovalori significativamente più grandi di uno che emergono, quindi, dal background del rumore incoerente.



**Figura 5.1: Autovalori (in dB) della SDM relativa al dataset MT corrotto analizzato, in funzione del periodo (in s).**

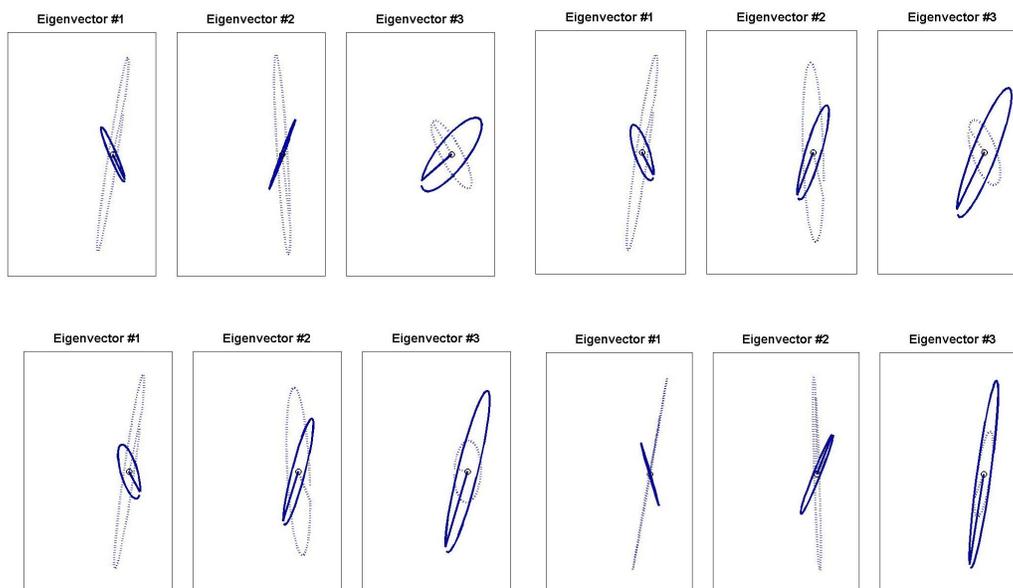
La presenza di un terzo autovalore testimonia chiaramente l'aggiunta di noise coerente. Si noti che, in pieno accordo con la Figura 5.2, in cui vengono mostrati gli andamenti degli spettri di potenza del segnale e del noise coerente aggiunto, relativi alla componente  $H_x$ , il terzo autovalore decresce al crescere del periodo fino a 60 s, quando cade definitivamente sotto il livello di background.



**Figura 5.2: Spettro di potenza della componente  $H_x$  del segnale sintetico (in blu) e del noise coerente aggiunto (in rosso).**

A questo punto sono state analizzate le polarizzazioni dei tre autovettori principali, nella banda di periodo intorno a  $T=20$  s, all'interno di quattro finestre temporali che corrispondono

a quattro distinte posizioni angolari della sorgente mobile di noise coerente, nell'intervallo 0-90°.

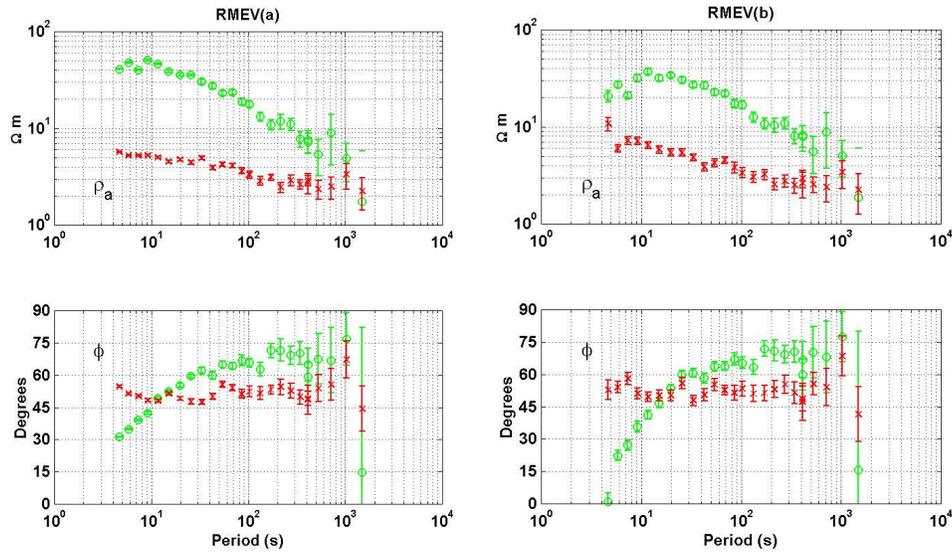


**Figura 5.3: Diagramma polare degli autovettori magnetici (linea continua) ed elettrici (linea tratteggiata) relativi al dataset analizzato, stimati nella banda intorno a  $T=20$  s, all'interno di quattro finestre temporali contigue.**

La Figura 5.3 rappresenta un plot degli autovettori elettrici (linee tratteggiate) e magnetici (linee continue) nella banda  $T=20$  s. Nonostante il livello del segnale e del noise appaiano simili (Figura 5.2), i primi due autovettori si presentano molto stabili, come da prevedersi, essendo questi ultimi rappresentativi della sorgente MT, quindi, di una sorgente di onda piana stabile. Il terzo autovettore, invece, ruota seguendo la sorgente mobile  $MT_N$ . Al diminuire del periodo il contributo del noise aggiunto comincia ad essere più forte e gli autovettori tendono ad essere combinazione lineare delle tre sorgenti, perdendo direttività.

La Figura 5.4 mostra le curve di resistività apparente (in  $\Omega m$ ) e fase (in gradi) per i modi TM e TE in funzione del periodo (in s), stimate utilizzando il metodo RMEV sul dataset sintetico in presenza ed in assenza di noise coerente, e assumendo che gli autovettori associati ai due autovalori dominanti rappresentino la sorgente MT.

Nonostante la presenza di effetti di bias residui nella banda di alta frequenza, indicativi della partecipazione della sorgente di noise coerente nella stima, la qualità dei risultati ottenuti con il metodo RMEV può essere ritenuta più che soddisfacente rispetto a quelle ottenibili con altri metodi.



**Figura 5.4: Curve di resistività apparente(in  $\Omega\text{m}$ ) e fase (in gradi) in funzione del periodo (in s), stimate col metodo RMEV, utilizzando i dati con l'aggiunta di noise coerente (b) e senza (a).**

Analizzando il comportamento degli autovettori associati agli autovalori dominanti è stato, dunque, possibile individuare nella rotazione degli autovettori probabilmente collegati a sorgenti mobili un utile criterio interpretativo per discriminare contributi d'onda piana da contributi di campo vicino, al fine di ricostruire una corretta stima dei parametri MT anche quando si ha a che fare con segnali corrotti da forte presenza di noise coerente.

Applichiamo questo tipo di analisi ai dati sperimentali a disposizione. Nel caso reale, una tale applicazione risulta più complessa poiché gli autovalori dominanti della matrice di densità spettrale non sono necessariamente rappresentativi della sorgente MT di onda piana, rendendo la distinzione tra segnale MT e rumore coerente problematica.

## 5.2 Sondaggi MT

I Campi Flegrei costituiscono un ambiente particolarmente ostico per l'applicazione dei metodi elettromagnetici a causa della combinazione tra la presenza del mare e la complessità delle strutture vulcaniche presenti, che crea effetti molto difficili da modellare. A questo va aggiunta la totale urbanizzazione dell'area che induce forti problemi di sorgente, legati in particolare alla presenza delle reti ferroviarie ed elettriche e che limita le zone in cui è possibile effettuare indagini geofisiche riducendo notevolmente il numero di eventuali punti sondaggio.

La realizzazione nell'area flegrea, di 14 sondaggi MT e 17 sondaggi a sorgente controllata CSAMT, costituisce una parte sostanziale del lavoro di tesi ed ha impegnato più di due anni (Figura 5.5). Il metodo CSAMT (Controlled Source Audio frequency Magnetotelluric) utilizza, in aggiunta ai campi naturali MT, una sorgente di segnale artificiale generata da un trasmettitore, tipicamente nella banda [1-100] kHz: tale tecnica viene usata per stimare il tensore impedenza di superficie  $Z$  nella banda ad alta frequenza, dove il segnale naturale risulta particolarmente basso, migliorando notevolmente la qualità dei dati.



**Figura 5.5: Mappa dei sondaggi MT (in rosso) e dei sondaggi CSAMT (in bianco) effettuati nell'area flegrea.**

Come già accennato precedentemente, l'individuazione di siti di misura idonei, cioè con un buon rapporto segnale rumore e con una ridotta presenza di noise coerente, rappresenta un punto molto delicato quando si effettuano sondaggi elettromagnetici in un'area totalmente urbanizzata, quale quella napoletana. In zone di questo tipo, inoltre, il numero di siti è fortemente limitato anche da problemi di tipo logistico.

Un sondaggio magnetorellurico consiste in un'acquisizione delle tre componenti ortogonali del campo magnetico ( $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ), e delle due componenti orizzontali del campo elettrico ( $E_x$ ,  $E_y$ ), in un prescelto punto della superficie terrestre, che definiamo sito locale.

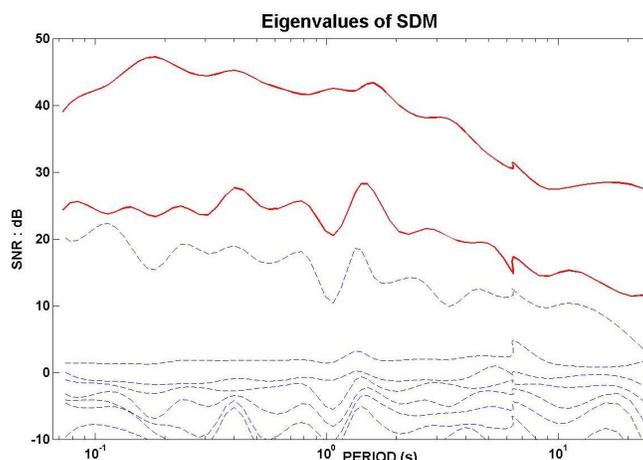
Nella pratica sperimentale sono utilizzate diverse disposizioni degli strumenti dipendenti sia dal numero di canali disponibili per l'indagine che da considerazioni logistiche. E' abbastanza chiaro che un maggior numero di canali permette un sovracampionamento dei campi,

fornendo, pertanto, maggiori possibilità di controllo dei singoli canali, soprattutto se questi ultimi sono inseriti in schemi multivariati in grado di trarre il massimo delle informazioni possibili da array formati proprio da multipli canali relativi a molteplici stazioni di misura.

Durante la campagna MT nell'area flegrea sono state utilizzate per le stazioni, configurazioni di tipo single station e a stella. La prima non è altro che una stazione MT completa a 5 canali, con la terna degli  $\vec{H}$  e la coppia degli  $\vec{E}$  disposte in modo che  $H_y$  e  $E_y$  siano diretti lungo il nord magnetico. La configurazione a stella prevede, invece, l'installazione di due stazioni distinte nello stesso sito, in due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali ruotati tra loro di un angolo noto.

### 5.2.1 Solfatara

In Solfatara sono stati effettuati tre sondaggi MT. Due stazioni sono state poste agli estremi settentrionale e meridionale del cratere, e due sono state installate al centro della fangaia, in configurazione a stella con gli assi omologhi ruotati tra loro di  $45^\circ$ , in modo da permettere un sovracampionamento dei campi elettrici e magnetici. In particolare analizziamo il sondaggio effettuato in fangaia.

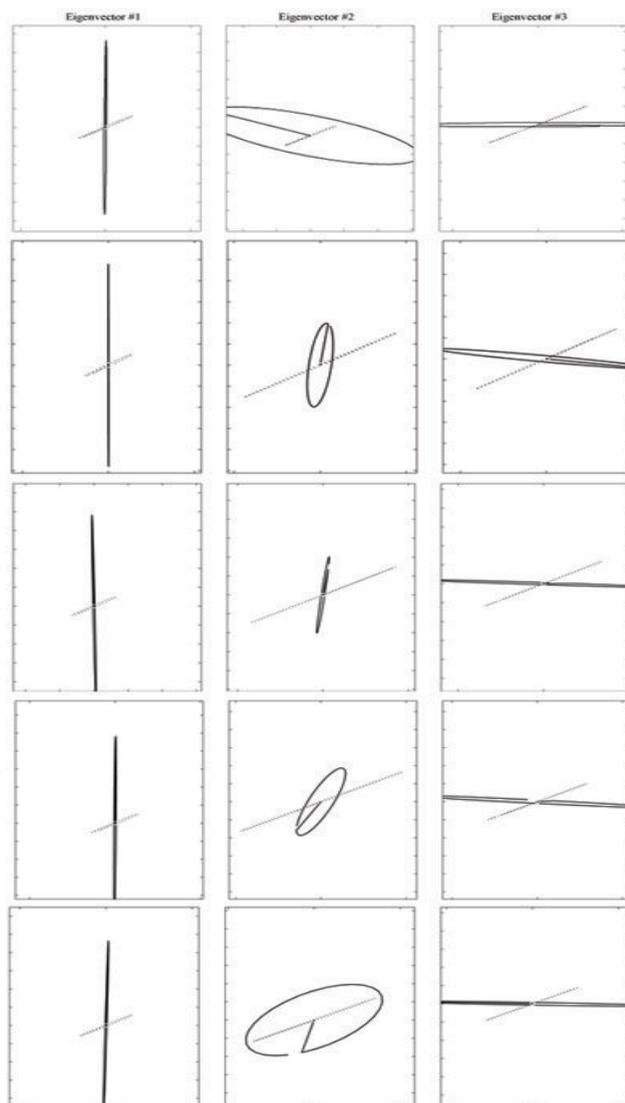


**Figura 5.6:** Autovalori della matrice di densità spettrale relativa ad un sondaggio MT, effettuato in Solfatara con due stazioni, della durata temporale di 600s e con una frequenza di campionamento di 64Hz.

In Figura 5.6 sono plottati gli autovalori della SDM relativa ad un dataset della durata di 600s e con una frequenza di campionamento di 64 Hz, estratto dall'intera acquisizione. La presenza di tre autovalori al di sopra del background del noise incoerente (livello zero) mostra una chiara evidenza di noise coerente nell'intera banda di periodo analizzata.

La maggiore stabilità angolare (Figura 5.7) degli autovettori associati al primo e al terzo autovalore nella banda intorno a  $T=0.4$  ci permette di ipotizzare che essi siano rappresentativi della sorgente MT. Il secondo autovettore, che mostra chiari cambiamenti di direzione, è probabilmente legato alla sorgente di campo vicino associabile al treno.

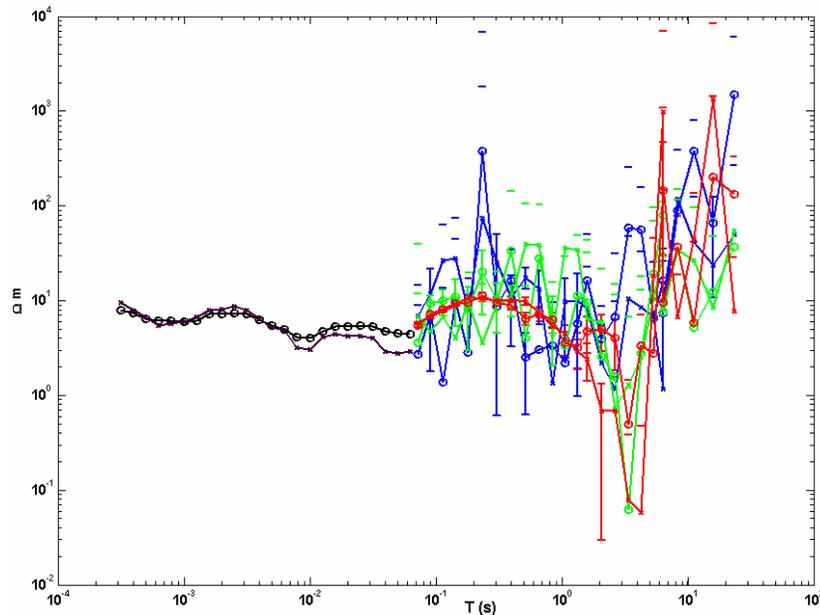
Questa conclusione è in pieno accordo con il fatto che il livello del segnale associato ai contributi di campo vicino può essere paragonabile o più alto del livello del segnale MT quando la distanza tra il sito di misura e la sorgente di noise coerente è minore di una decina di chilometri.



**Figura 5.7: Diagramma polare degli autovettori magnetici (linea continua) ed elettrici (linea tratteggiata) della SDM, calcolati nella banda  $T=0.4$  s, considerando cinque finestre temporali contigue della durata di 600s (Solfatara).**

Nella figura successiva vengono mostrate le curve di resistività apparente e fase (in blu nella Figura 5.8) calcolate con il metodo RMEV che di default utilizza i primi due autovettori della SDM relativa ai dati in questione; le curve presentano un comportamento distorto nell'intera banda di periodo investigata. I due modi crescono in funzione del periodo con una pendenza a  $45^\circ$ : questo andamento è tipico di un segnale MT contaminato da sorgenti di noise EM non uniformi [Mackie and Madden, 1992; Qian and Pedersen, 1991].

Ovviamente, ciò è in accordo con il numero di autovalori dominanti della SDM (Figura 5.6).



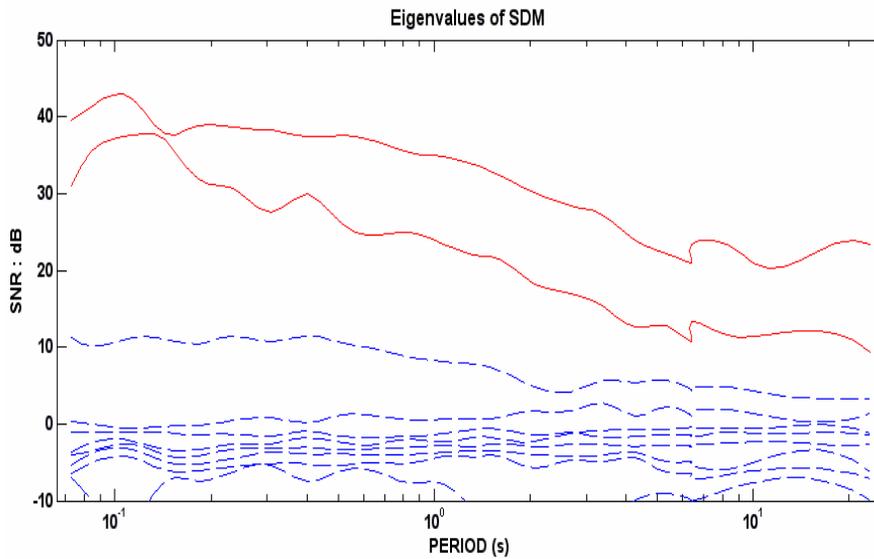
**Figura 5.8: Curve di resistività apparente calcolate utilizzando il 1° e il 2° autovettore della SDM relativa ai dati acquisiti in Solfatara (curve in blu), il 2° e il 3° (curve in verde) autovettore ed il 1° e il 3° autovettore (curve in rosso). In nero sono riportate le curve CSAMT.**

A questo punto ricostruiamo la resistività apparente usando anche il terzo autovettore. Paragonando le curve ottenute con la precedente, sembra che utilizzando il primo e il terzo autovettore, le relative curve di resistività (in rosso nella Figura 5.8) siano migliori, con un andamento simile a quello delle curve in verde (ottenute utilizzando il secondo ed il terzo autovettore) e di quelle in blu, ma appaiono più smooth nel range di periodo 0.1-2 s.

Nella stessa figura, mostriamo anche le curve CSAMT relative ad un sondaggio effettuato nello stesso sito di misura MT. Il livello delle curve CSAMT (in nero) è paragonabile a quello delle curve MT ottenute utilizzando il primo ed il terzo autovettore. Il buon accordo tra i dati CSAMT e quelli MT costituisce un'ulteriore conferma della possibilità di usare differenti combinazioni di autovettori per ottenere una migliore stima del tensore Z.

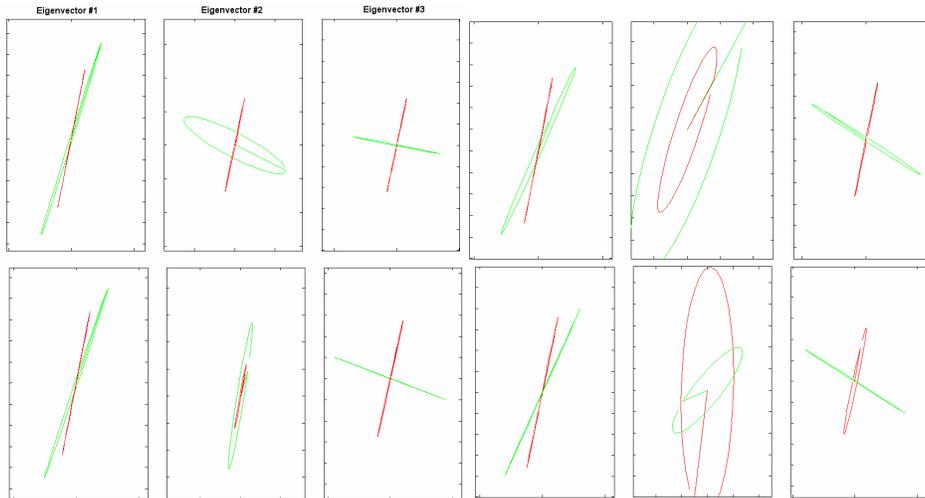
Le curve CSAMT, rispetto a quelle MT, presentano un andamento più regolare. La spiegazione verte sul fatto che, in condizioni favorevoli, per valori della distanza, tra sorgente dipolare e sito di misura, sufficientemente grandi, in rapporto alla skin depth, il segnale dipolare e l'approssimazione MT di onda piana forniscono risposte paragonabili, rendendo il segnale antropico una buona sorgente [Goldstein&Strangway,1975]. Se i dipoli sono troppo vicini, o la frequenza su cui si stimano i parametri è troppo bassa, le due risposte non coincidono e le curve presentano degli andamenti distorti e/o non accettabili.

Estraiamo dall'intero sondaggio a disposizione un'altra finestra temporale della durata di 30 minuti e procediamo con un'analisi analoga a quella effettuata per il dataset precedente.



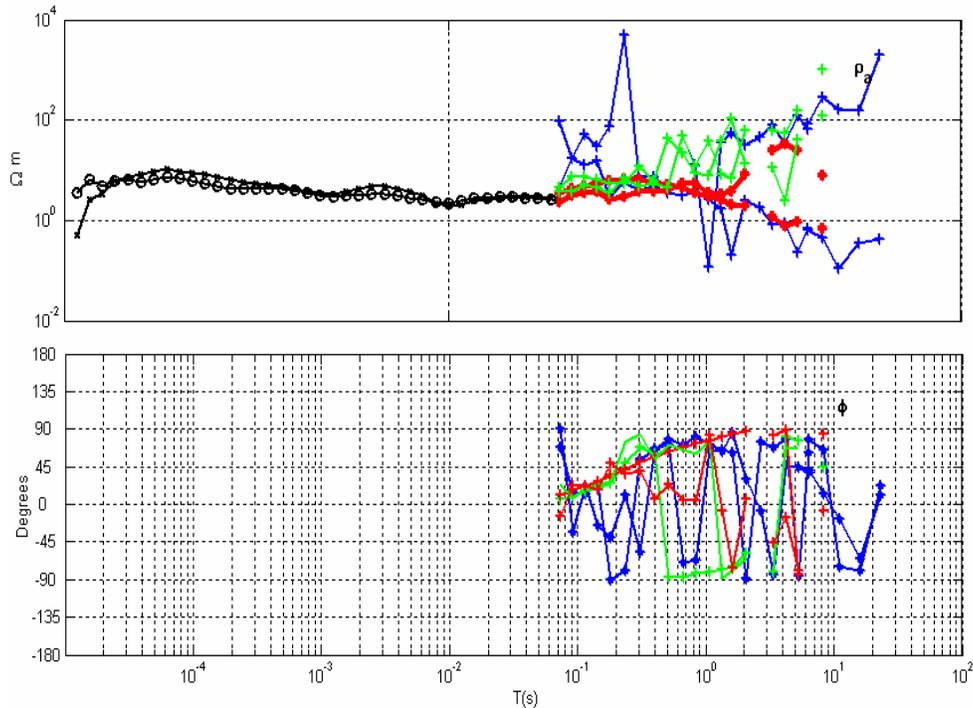
**Figura 5.9: Struttura degli autovalori della SDM (in dB) in funzione del periodo (in s) relativa all'acquisizione effettuata in Solfatara della durata di 30 minuti**

Anche in questo caso la matrice di densità spettrale relativa è caratterizzata da tre autovalori che emergono dal background del noise incoerente, nell'intero range di frequenza considerato.



**Figura 5.10: Diagramma polare degli autovettori magnetici (in verde) ed elettrici (in rosso) della SDM, calcolati nella banda  $T=0.4$  s, considerando quattro finestre temporali contigue della durata di 30 minuti.**

Andando a verificare la direzione degli autovettori relativi (Figura 5.10) a quattro finestre temporali contigue, nella banda di periodo intorno a  $T=0.3$  s si ritrova una forte stabilità angolare del primo e del terzo autovettore. Questi ultimi, possono quindi considerarsi, ancora una volta, associabili alla sorgente d'onda piana. Come fatto nel caso precedente calcoliamo le curve di resistività e fase utilizzando i tre autovalori dominanti.



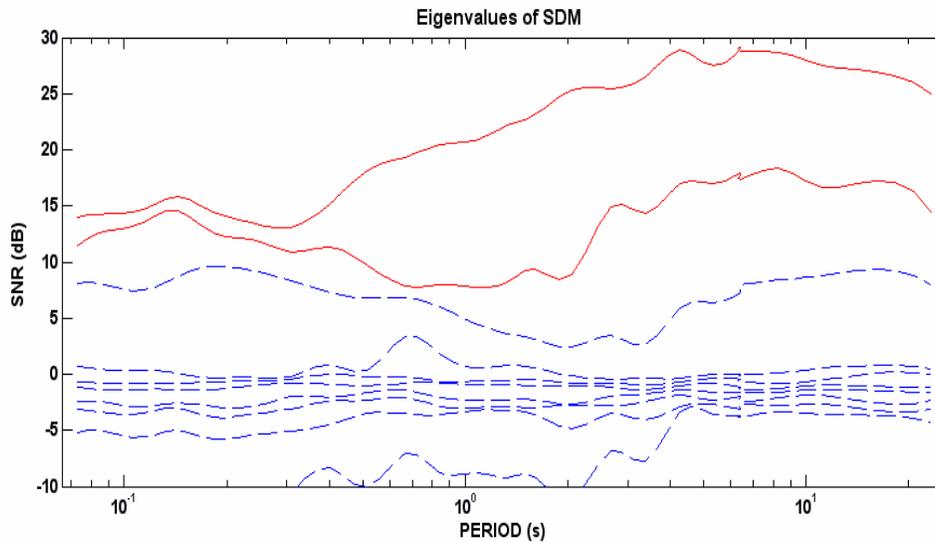
**Figura 5.11: Curve di resistività apparente calcolate utilizzando il 1° e il 2° autovettore della SDM relativa ai dati acquisiti in Solfatara (curve in blu), il 2° e il 3° (curve in verde) autovettore ed il 1° e il 3° autovettore (curve in rosso). In nero sono riportate le curve CSAMT.**

Sia la curva di resistività che quella di fase stimate utilizzando gli autovalori dominanti (in rosso in Figura 5.11) che presentano una maggiore stabilità, presentano un andamento più smooth di quello delle curve costruite combinando diversamente gli autovettori (Figura 5.11). Questo sembra confermare che la rotazione degli autovettori dominanti rappresenta un'utile criterio interpretativo per una possibile ricostruzione delle corrette curve di resistività.

Anche per questo dataset le curve CSAMT sono caratterizzate da un livello paragonabile a quello delle curve di resistività stimate utilizzando il primo ed il terzo autovettore.

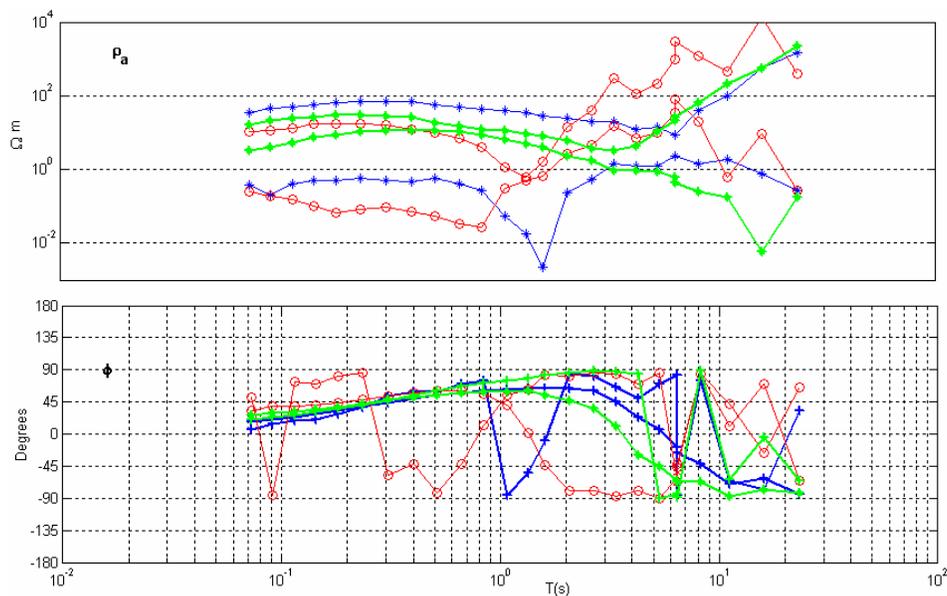
### 5.2.2 Astroni

Analogamente a quanto fatto precedentemente per il sondaggio in Solfatara, riportiamo l'andamento degli autovalori della SDM relativa ad una finestra della durata temporale di 1h e con una frequenza di campionamento di 64 Hz, estratta da un sondaggio effettuato con due stazioni MT poste in configurazione a stella, con gli assi omologhi ruotati di 45° all'interno del cratere degli Astroni. In tutta la banda di frequenza (Figura 5.12) sono presenti tre autovalori dominanti.



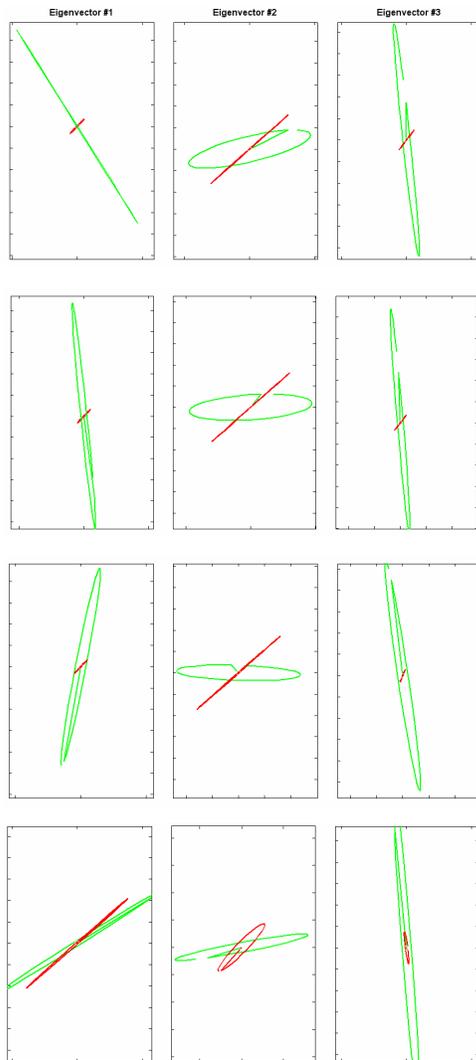
**Figura 5.12: Andamento in funzione del periodo degli autovalori della SDM relativa all'acquisizione della durata di un'ora a 64 HZ agli Astroni.**

Utilizziamo gli autovettori dominanti, per stimare le curve di resistività e fase.



**Figura 5.13: Curve di resistività apparente calcolate utilizzando il 1° e il 2° autovettore della SDM di Figura 5.12 (curve in blu), il 2° e il 3° (curve in verde) ed il 1° e il 3° autovettore (curve in rosso).**

In questo caso con il secondo ed il terzo autovettore (in verde), si ottengono curve con un andamento simile a quello delle curve ottenute con i primi due autovettori (in blu) ma con livelli differenti: in particolare i due modi in verde non presentano effetti di static shift (una variazione dei livelli delle curve associabili a fenomeni di distorsione dovuti alla presenza di disomogeneità elettriche in superficie).



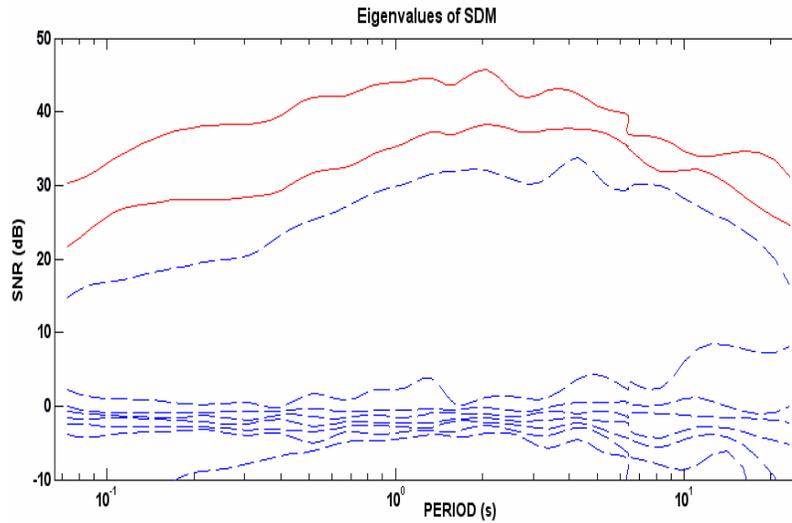
Mostrando in dettaglio il comportamento dei primi tre autovettori calcolati nella banda di periodo intorno a  $T=10$  s in quattro finestre vicine della durata di 1h (Figura 5.14), si verifica la forte stabilità del secondo e del terzo autovettore come prevedibile dai risultati ottenuti in Figura 5.13

Estraiamo un'ulteriore finestra dall'acquisizione che stiamo analizzando, questa volta della durata di 10 minuti, e procediamo come fatto finora.

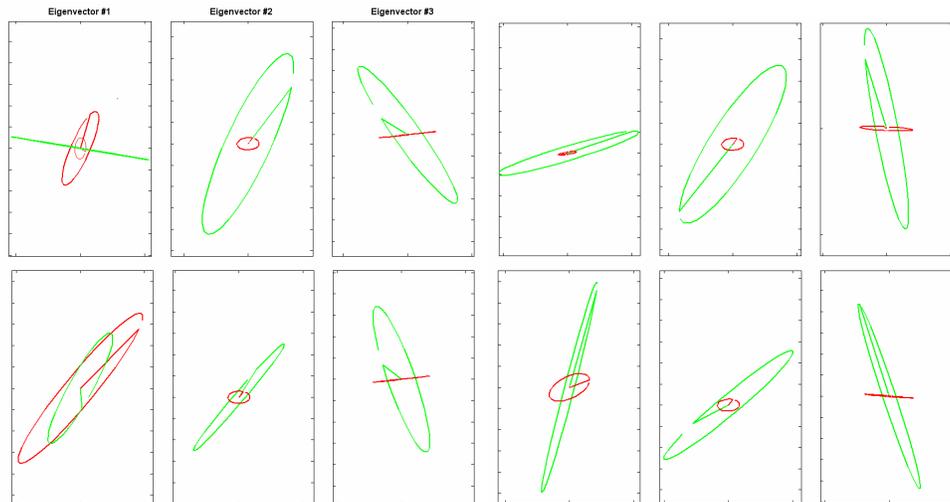
Nonostante l'andamento degli autovalori della matrice di densità spettrale (Figura 5.14), sia più regolare rispetto a quello della SDM mostrata in Figura 5.12, anche in questo caso, abbiamo un numero di autovalori dominanti maggiore di due. Il metodo RMEV sta quindi diagnosticando la presenza, nei dati, di ulteriori sorgenti di segnale coerente.

**Figura 5.14: Diagramma polare degli autovettori magnetici (in verde) ed elettrici (in rosso), calcolati nella banda  $T=10$  s, considerando quattro finestre temporali vicine della durata di un'ora (Astroni).**

Selezionando un range di periodo intorno a  $T=3$  s ed analizzando la posizione angolare degli autovettori dominanti ritroviamo un primo autovettore che modifica bruscamente la propria direzione al variare del tempo (Figura 5.16).

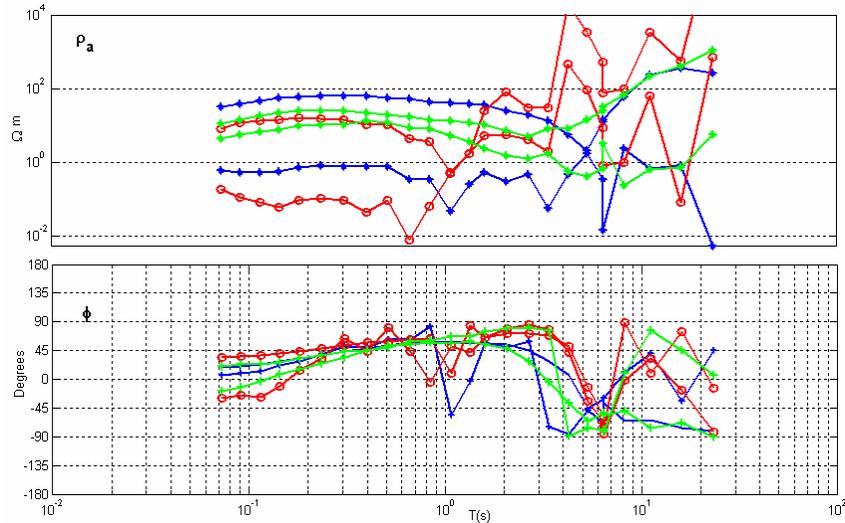


**Figura 5.15: Andamento in funzione del periodo degli autovalori della SDM relativa ad una finestra temporale di 10 minuti (Astroni)**



**Figura 5.16: Plot degli autovettori dominanti della SDM, relativi a quattro finestre della durata di 10 minuti e calcolati nella banda intorno a  $T=3$  s.**

Nelle curve di resistività e fase legate al secondo ed al terzo autovettore (in verde nella Figura 5.17) emerge un forte miglioramento nella stima, nettamente più regolare: in particolare, nelle curve di resistività apparente è presente un minore static shift rispetto a quello che si riscontra nei due modi in blu: nonostante ciò per periodi superiori ai 5 s, la resistività (in particolare il modo più alto) comincia comunque a risalire con una forte pendenza a  $45^\circ$ , mentre la fase scende bruscamente a  $-90^\circ$ , caratteristiche queste tipiche del segnale dipolare (sezione 2.3.2).



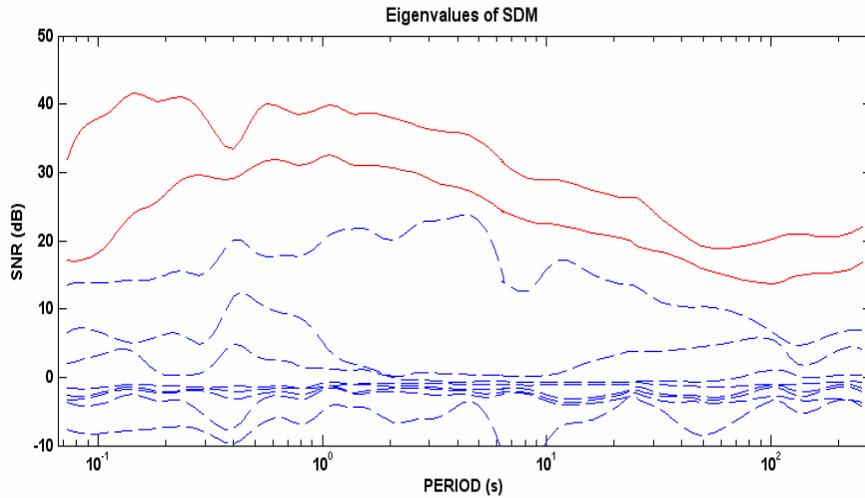
**Figura 5.17: Curve di resistività apparente e fase calcolate utilizzando il 1° e il 2° autovettore della SDM relativa ai dati acquisiti agli Astroni (curve in blu), il 2° e il 3° autovettore ed il 1° e il 3° autovettore (curve in rosso).**

Nel cratere degli Astroni non sono stati effettuati sondaggi CSAMT: non possiamo, quindi, effettuare un ulteriore controllo sul livello delle curve di resistività come fatto per i sondaggi effettuati in Solfatara.

### 5.2.3 Carney Park

Sempre nel quadro dell'analisi multivariata, si riporta in Figura 5.18, l'andamento, in funzione del periodo degli autovalori della SDM relativa all'array di misure contemporanee effettuate con due stazioni MT complete, entrambe in configurazione di single-station, in località Campiglione, all'interno di Carney Park.

A bassi valori del periodo, fino a 2 s, si nota una struttura molto complessa con almeno quattro autovalori al di sopra del livello di background del noise incoerente, che si va successivamente semplificando nella banda 3-20 s, in cui sopravvivono tre autovalori, abbastanza distinti tra loro. Per periodi maggiori riemerge un quarto autovalore, in concomitanza con un generale abbassamento del rapporto segnale-rumore, dovuto probabilmente alla riduzione del campione statistico su cui vengono effettuate le stime dei parametri.



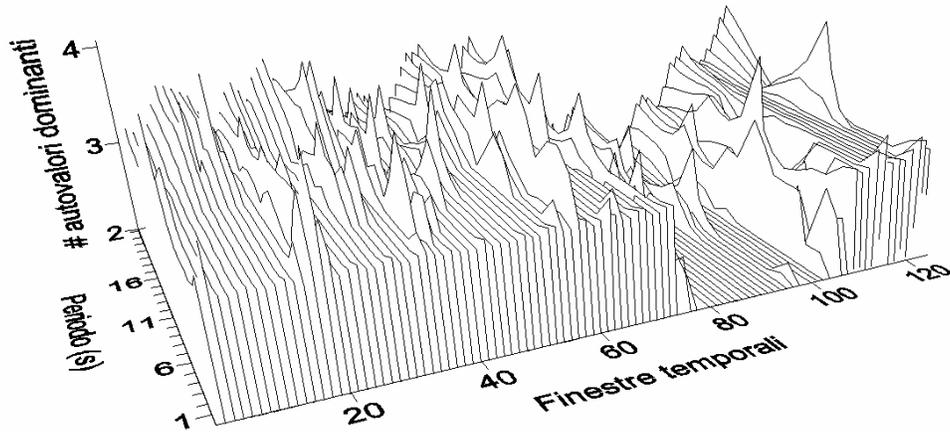
**Figura 5.18: Andamento degli autovalori della SDM relativa ai siti di Carney Park, in funzione del periodo.**

L'analisi delle direzioni di polarizzazione dei primi quattro autovettori della SDM riflette la complessità della struttura della matrice di densità spettrale. Nonostante siano state selezionate e analizzate in dettaglio diverse finestre temporali estratte dall'acquisizione totale, non è stato possibile individuare delle posizioni angolari stazionarie per gli autovettori principali.

Nel caso in cui non è semplice estrarre informazioni utili dalla rotazione degli autovalori dominanti, il metodo RMEV offre comunque, mediante la stima della dimensione di coerenza  $M$ , una chiara diagnostica della presenza di rumore coerente. Ipotizzando, infatti, la presenza di una sorgente intermittente e utilizzando dati provenienti da una lunga acquisizione, come quelli che abbiamo a disposizione per Carney Park, si spera di trovare alcuni intervalli temporali o alcune bande di periodo, caratterizzate da una dimensione di coerenza pari a 2 e non contaminate, quindi, da noise coerente.

I dati relativi al sondaggio effettuato a Carney Park sono stati, a tal fine, suddivisi in segmenti temporali della durata di dieci minuti e ad ognuno di essi è stato applicato lo schema multivariato RMEV.

Graficando la dimensione di coerenza, ossia il numero di autovalori dominanti della SDM relativa ad ogni finestra, in funzione del periodo, si ottengono i risultati mostrati nella figura successiva.

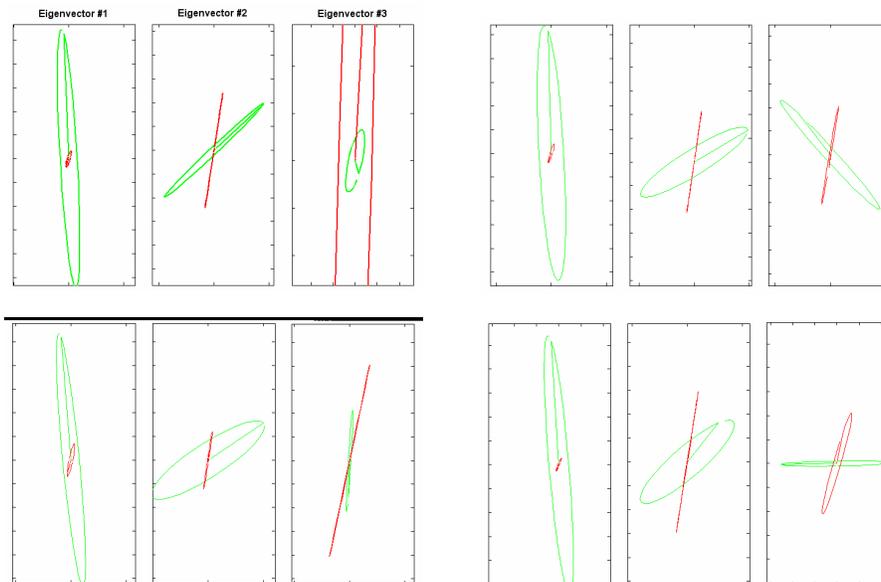


**Figura 5.19:** Numero di autovalori dominanti della SDM relativa ad ognuno degli intervalli temporale della durata di dieci minuti, funzione del periodo e del tempo.

E' evidente l'esistenza di un intervallo temporale, compreso tra la 80-ma e la 100-ma finestra, in cui vi sono range di frequenza con dimensione di coerenza dei dataset analizzati uguale a due. Questi intervalli rappresentano una fascia oraria che va dalle 2.00a.m. alle 5.00a.m. e coincidono, approssimativamente, con la sosta notturna del servizio ferroviario metropolitano locale.

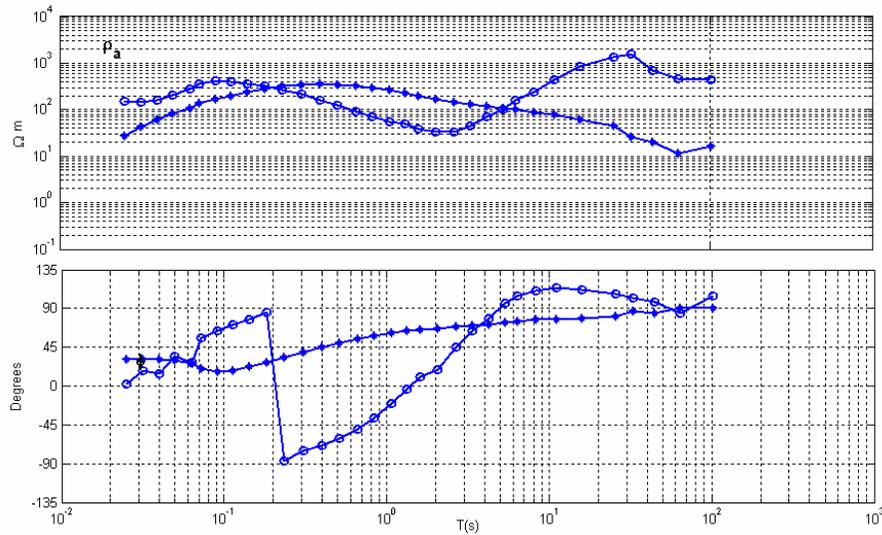
In questo caso i due autovalori dominanti della SDM possono essere associati alla sorgente MT d'onda piana ed i relativi autovettori possono essere utilizzati per stimare le componenti del tensore impedenza MT. A conferma di quanto detto verificiamo (

Figura 5.20) la stabilità direzionale dei primi due autovettori in quattro finestre contigue appartenenti all'intervallo temporale caratterizzato da  $M=2$  in un intorno di  $T=2s$ .



**Figura 5.20:** Plot degli autovettori dominanti della SDM, relativi a quattro finestre della durata di 10 minuti e calcolati nella banda intorno a  $T=2$  s.

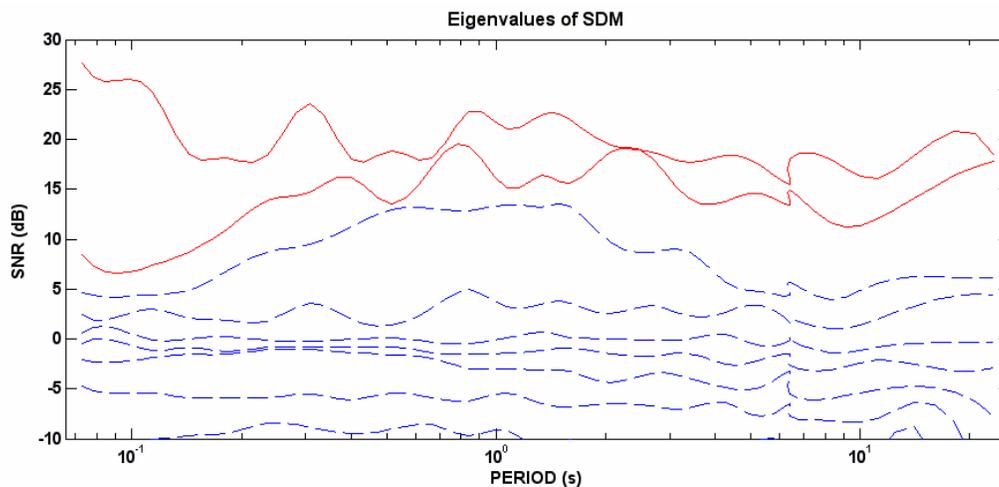
Di seguito mostriamo l'andamento delle curve di resistività apparente e fase stimate mediante i primi due autovettori (Figura 5.21)



**Figura 5.21: Curve di resistività e fase stimate utilizzando i primi due autovettori della matrice di densità spettrale.**

#### 5.2.4 Fondi di Baia

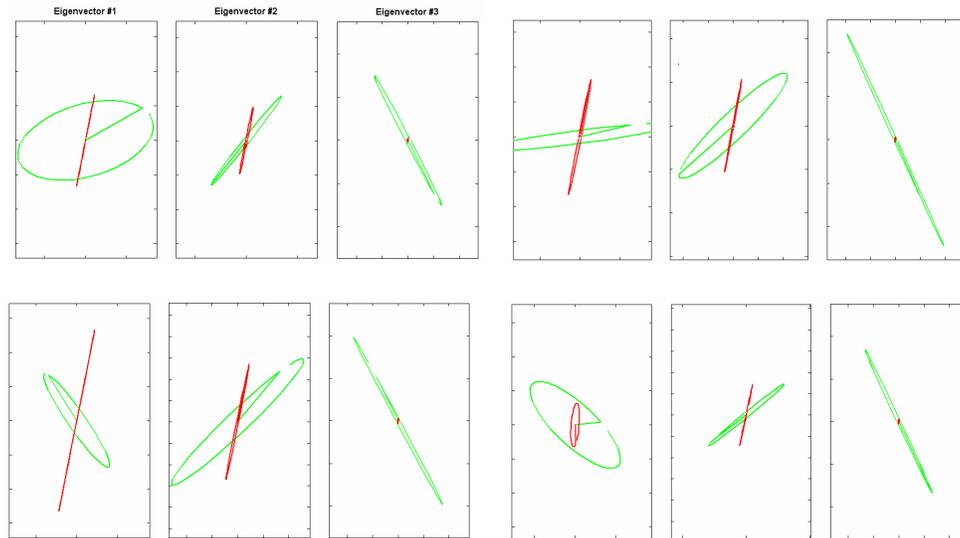
Procediamo con l'analisi un sondaggio effettuato nell'area di Fondi di Baia. La SDM per la banda a 64 Hz relativa ad una finestra temporale di 600 s, fornisce l'andamento degli autovalori mostrato in Figura 5.22. Si nota l'ormai usuale complessità della struttura.



**Figura 5.22: Autovalori della matrice di densità spettrale relative ad un sondaggio MT della durata temporale di 600s e con una frequenza di campionamento di 64 Hz.**

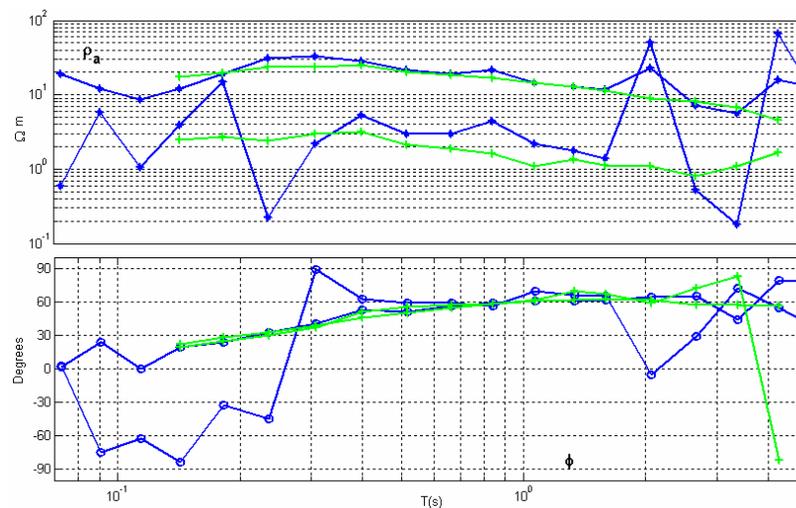
Osserviamo nella figura successiva le direzioni relative agli autovettori principali.

Il secondo ed il terzo autovettore mantengono nelle quattro finestre contigue la stessa direzione in un intorno di  $T=1.6$  s, mentre il primo varia fortemente la propria posizione angolare.



**Figura 5.23: Diagramma polare degli autovettori magnetici (in verde) ed elettrici (in rosso) della SDM, calcolati nella banda  $T=1.6$ s, considerando quattro finestre temporali contigue della durata di 600s (Fondi di Baia)**

Nella Figura 5.24 sono visibili, nella banda  $[0.07-5]$  s i miglioramenti nella stima delle curve di resistività apparente e fase ottenute dal secondo e dal terzo autovettore (in verde).

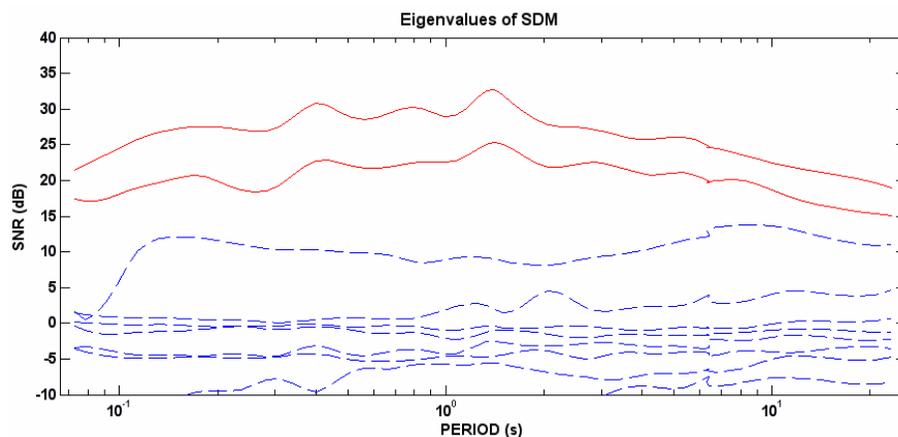


**Figura 5.24: Stima delle curve di resistività apparente e fase calcolate utilizzando il 1° e il 2° autovettore (curve in blu) ed il 2° e il 3° autovettore (curve in verde), nella banda di periodo  $[0.07-5]$  s.**

### 5.2.5 Monteleone

Il sito di Monteleone si trova nell'area settentrionale dei Campi Flegrei.

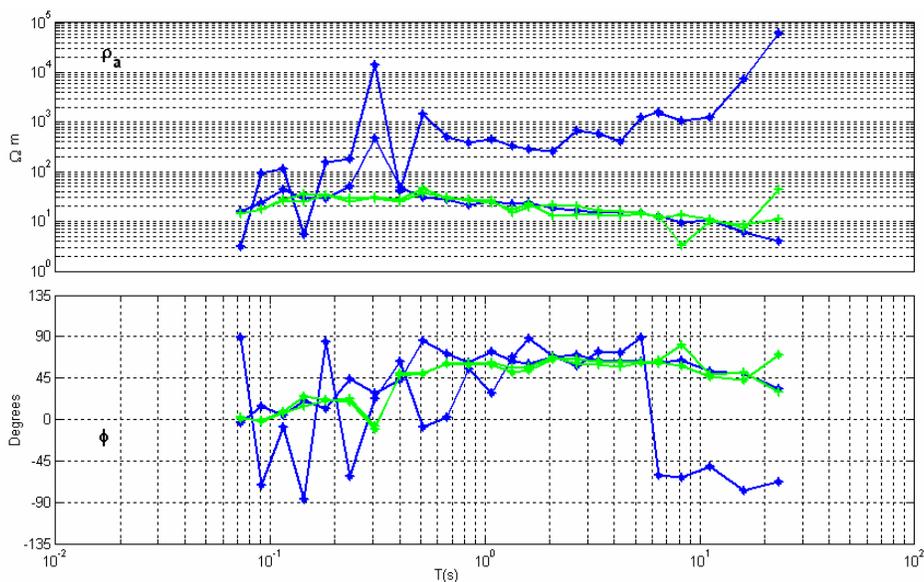
L'andamento, in funzione del periodo, degli autovalori della matrice di densità spettrale relativa ad una finestra temporale della durata di dieci minuti, è mostrato in Figura 5.25.



**Figura 5.25: Andamento in funzione del periodo degli autovalori della SDM relativa ad una finestra temporale di 10 minuti (Monteleone).**

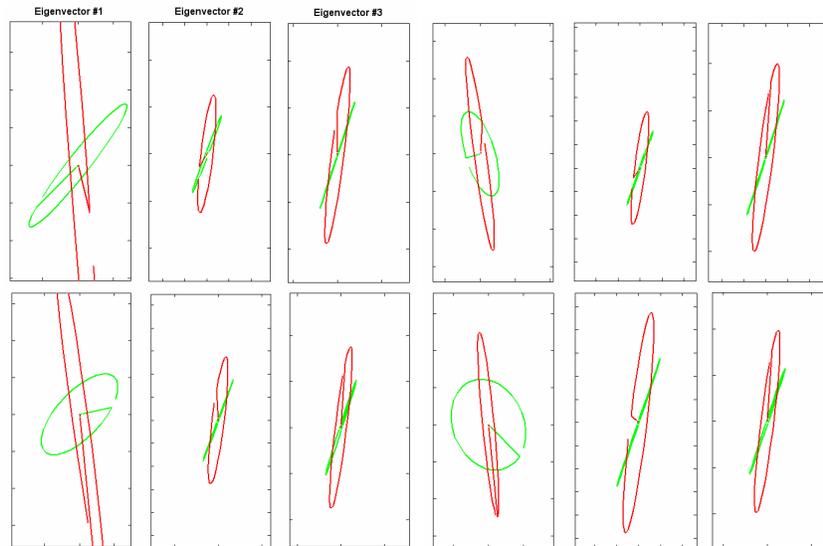
Tre autovalori, due dei quali con un andamento molto simile, sono presenti al di sopra del livello di noise incoerente nell'intera banda investigata.

Nella Figura 5.26 sono riportate le curve di resistività e fase calcolate utilizzando il secondo ed il terzo autovettore (in verde).



**Figura 5.26: Stima delle curve di resistività apparente e fase calcolate utilizzando il 1° e il 2° autovettore (curve in blu) ed il 2° e il 3° autovettore (curve in verde).**

Tale miglioramento nella stime di  $\rho_a$  e  $\phi$  è confermata dalla stabilità angolare dei due autovettori utilizzati (Figura 5.27).

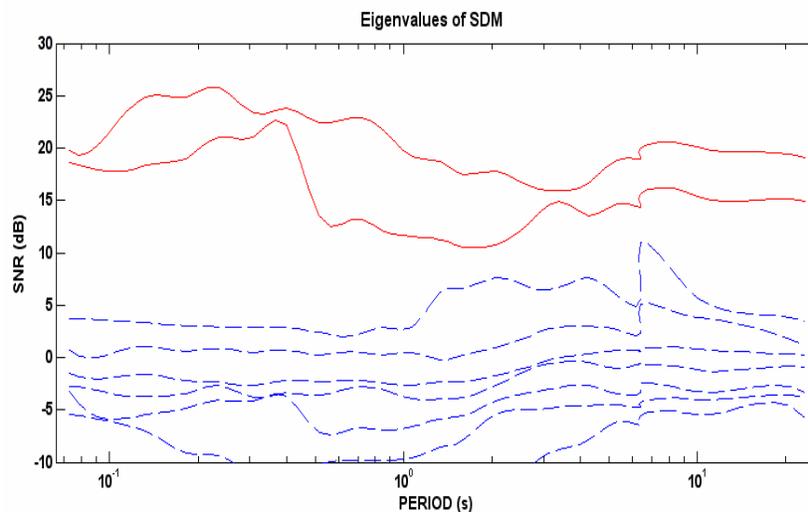


**Figura 5.27: Diagramma polare degli autovettori magnetici (in verde) ed elettrici (in rosso) della SDM, calcolati nella banda  $T=4.3$  s, considerando quattro finestre temporali contigue della durata di 1 ora (Monteleone).**

### 5.2.6 Agnano est ed Agnano ovest

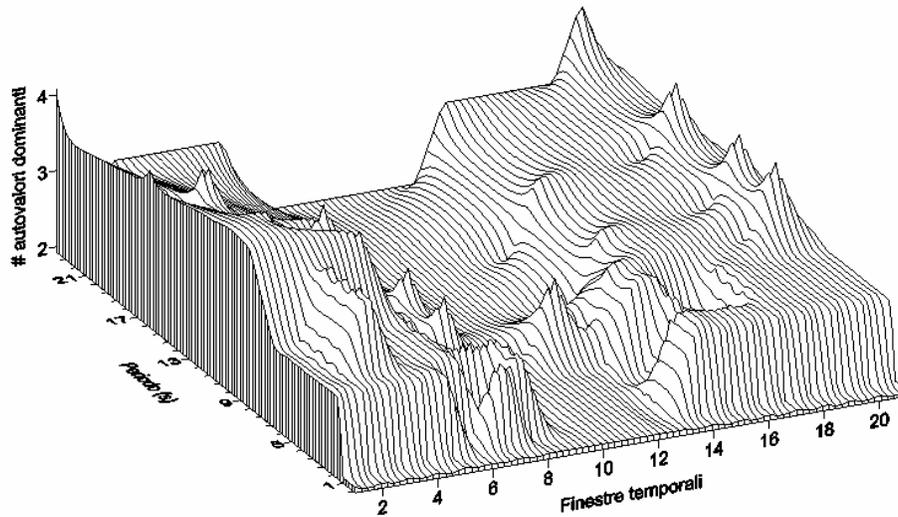
All'interno della piana di Agnano, più precisamente nell'area dell'Ippodromo, sono state disposte due stazioni MT, a circa 1 km di distanza reciproca.

Anche i dati raccolti nei siti di Agnano sono stati analizzati tramite le tecniche multivariate. In particolare la struttura di autovalori della SDM è riportata in Figura 5.28: Struttura degli autovalori della SDM (dB), in funzione del periodo (s), per i siti di Agnano. In rosso sono riportati i due autovettori dominanti. Nonostante l'apparente linearità della struttura, nelle serie temporali si mescolano effetti di sorgente molto complessi tra loro, che non permettono l'immediata individuazione di intervalli temporali in cui si ottengono miglioramenti nella stima dei parametri MT con l'uso di diversi autovettori.



**Figura 5.28:Struttura degli autovalori della SDM (dB), in funzione del periodo (s), per i siti di Agnano. In rosso sono riportati i due autovettori dominanti.**

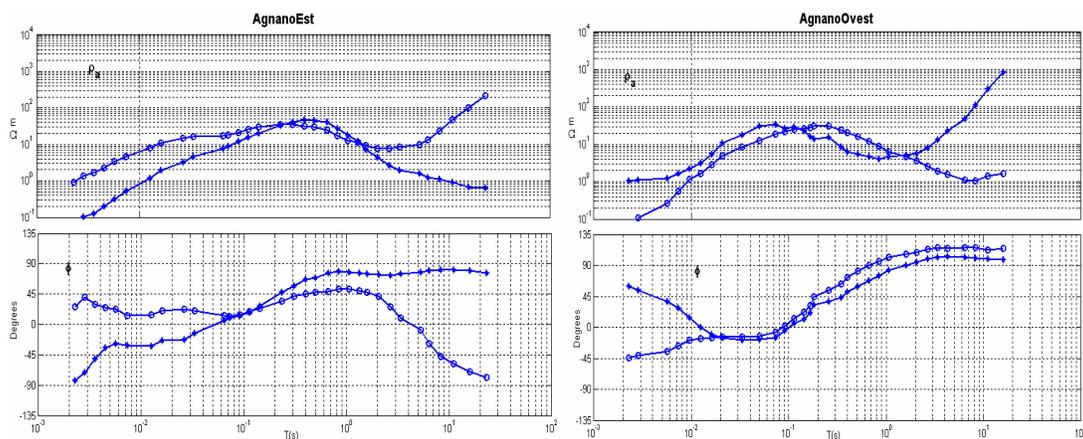
Come fatto per il sondaggio di Carney Park dividiamo l'intera acquisizione in finestre di un'ora, al fine di individuare un intervallo temporale e/o un range di frequenze in cui la dimensione di coerenza è pari a due, come mostrato in Figura 5.29.



**Figura 5.29 :Numero di autovalori dominanti della SDM relativa ad ognuno degli intervalli temporale della durata di un'ora, funzione del periodo e del tempo.**

Anche in questo caso, come accaduto per il sondaggio di Carney Park, tale intervallo esiste ed è coincidente con la fascia oraria notturna in cui il servizio metropolitano locale è fermo.

Le relative curve di resistività e fase stimate utilizzando i primi due autovettori sono mostrate nella figura successiva.



**Figura 5.30: Curve di resistività e fase stimate utilizzando i primi due autovettori della matrice di densità spettrale.**

Nonostante l'applicazione ai dati sperimentali di un protocollo unico per l'individuazione di contributi d'onda piana e contributi di campo vicino risulta molto complessa è stato comunque possibile effettuare dei miglioramenti nella stima delle curve di resistività e fase. Per riuscire a delineare le caratteristiche del segnale elettromagnetico nell'area flegrea e le loro conseguenze sulle stime MT è stato necessario un alto grado di attenzione ed intervento, sito per sito e curva per curva.

## 6 Modelli per i Campi Flegrei

Come già accennato nel capitolo precedente i Campi Flegrei rappresentano un'area in cui sono presenti una serie di complicazioni sia teoriche che pratiche. Ai complessi effetti di sorgente dovuti all'elevata urbanizzazione della zona, si sommano, infatti, i problemi derivanti dal carattere fortemente 3D delle strutture geologiche da analizzare. E' abbastanza chiaro che in questo contesto una modellazione dei Campi Flegrei non è cosa semplice.

Prima di procedere, quindi, con l'inversione dei dati sperimentali, analizzati in dettaglio nella sezione 5.2, sono state sviluppate una serie di simulazioni numeriche per verificare teoricamente la risposta elettromagnetica dell'area.

### 6.1 Modelling 3D

Innanzitutto verifichiamo la capacità del metodo magnetotellurico di rilevare un oggetto conduttivo contenuto in un host generalmente resistivo e parzialmente ricoperto da uno strato di mare, al fine di poter individuare un'eventuale camera magmatica sommersa nell'area dei Campi Flegrei. L'algoritmo presentato nella sezione 4.1, può essere applicato alla modellazione dei campi elettromagnetici in presenza di strutture dotate di simmetria 2D e 3D. In questo ultimo caso, nella pratica si considera un host 2D in cui viene alloggiata una parte 3D. I valori delle componenti tangenziali del campo magnetico  $\vec{H}$  ai bordi del 3D vero e proprio vengono imposti, come condizioni al contorno, utilizzando i valori dei campi provenienti dal modelling della struttura 2D. questo equivale sostanzialmente ad assegnare a priori il campo di correnti regionali sia lateralmente che verticalmente.

Date queste condizioni al contorno, ogni slice verticale del modello 3D viene trattata come parte interna di un modello 2D a scala più ampia. Se si ha l'accortezza di costruire un modello in cui il bordo della parte 3D risulti sufficientemente lontano dalle anomalie e sei modelli 2D sono simili per ogni slice, allora le condizioni al contorno saranno sufficientemente smooth e gli errori nella soluzione saranno ridotti.

Consideriamo il seguente modello: una camera magmatica 3D (Figura 6.1), assimilata ad un parallelepipedo di  $20 \times 10 \times 5 \text{ km}^3$  con resistività di  $1 \Omega \cdot \text{m}$ , è inserita in un host roccioso omogeneo, con resistività pari a  $500 \Omega \cdot \text{m}$  in contatto laterale con uno strato d'acqua di mare profondo 50 m e con resistività pari a  $0.5 \Omega \cdot \text{m}$ .

Il top della camera, che è collocata in modo da giacere parzialmente sotto lo strato di mare, si trova a 5 km di profondità.

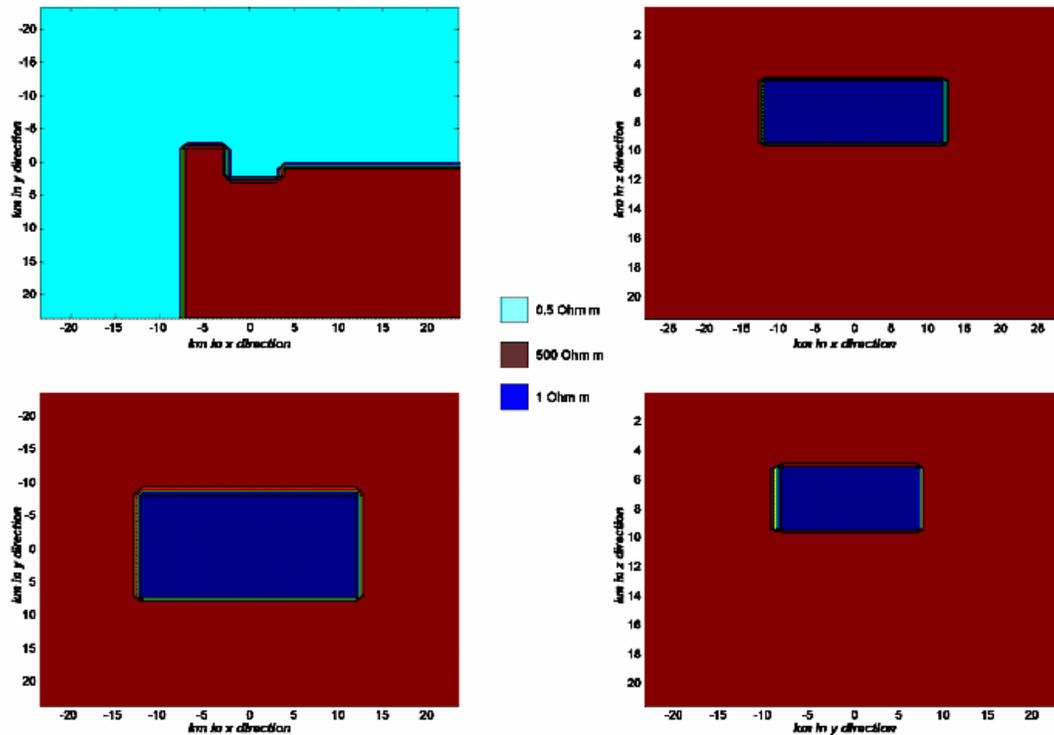
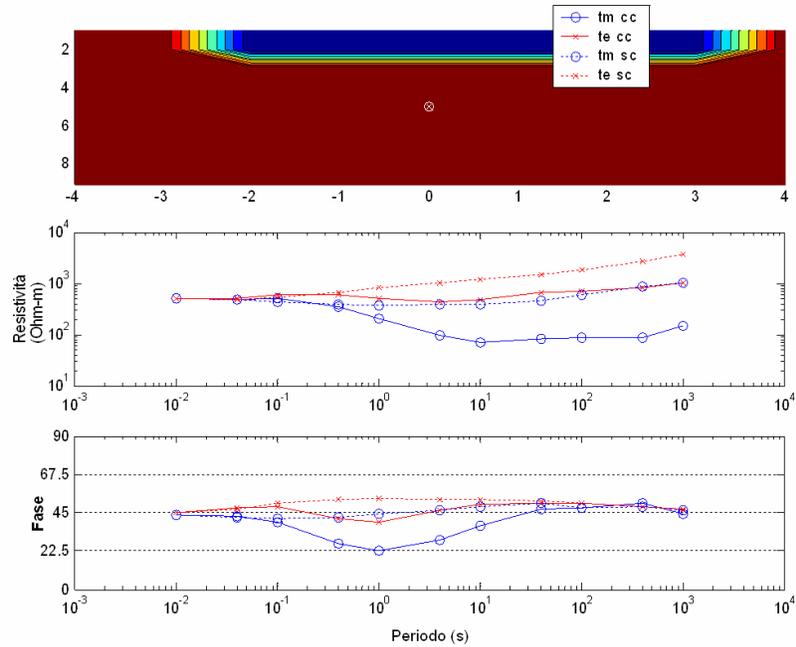


Figura 6.1: Modello 3D che simula l'area vulcanica dei Campi Flegrei, nel piano xy al livello del mare (riquadro in alto a sinistra) e ad una profondità di 5 km (riquadro in basso a sinistra), nel piano xz (riquadro in alto a destra) e nel piano yz (riquadro in basso a destra) .

Si può notare la variazione che subiscono le curve di resistività apparente, relative ai modi TE e TM, nei due casi ( con camera magmatica e senza). I rami iniziali di entrambi i modi in entrambi i casi, coincidono , come atteso, con la resistività dell'host pari a  $500 \Omega \cdot m$ .

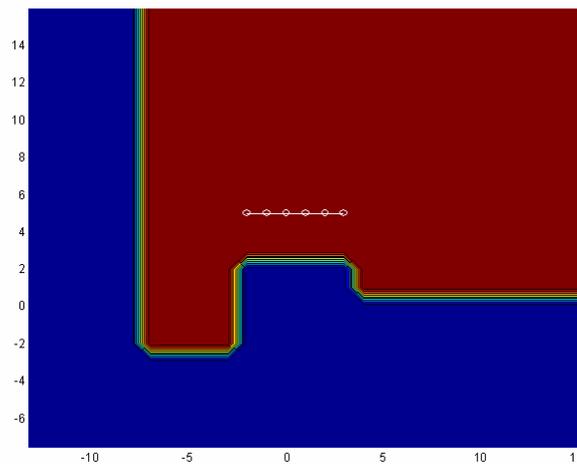
Il metodo MT è quindi in grado di rilevare un oggetto conduttivo contenuto in un host generalmente resistivo e ricoperto da uno strato di mare.



**Figura 6.2:** Curve di resistività apparente e fase per sondaggi sintetici effettuati lungo la costa (riquadro in alto) relativi al modello di Figura 6.1. Sono riportati i modi TE (in rosso) e TM (in blu) per un modello con (linee continue) e senza (linee tratteggiate) camera.

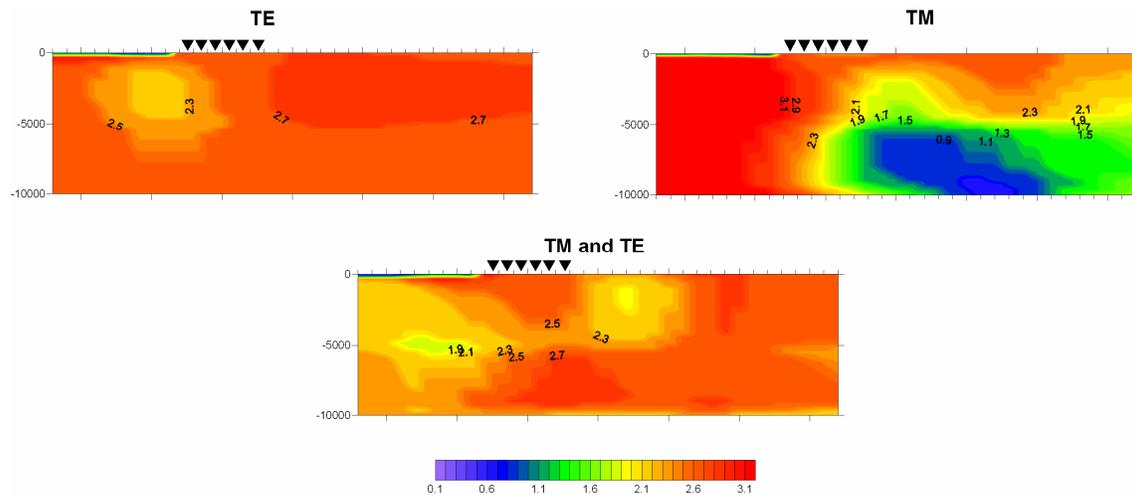
## 6.2 Inversione 2D dei dati sintetici

Utilizziamo il codice di inversione di Mackie e Rodi (sezione 4.5) per modellare i dati sintetici lungo un profilo di circa 10 km, costituito da 6 sondaggi MT e posizionato parallelamente alla costa come mostrato in Figura 6.3.



**Figura 6.3:** Profilo MT, costituito da sei sondaggi, invertito con il codice 2D di Mackie&Rodi.

Come input sono stati considerati i modi TE e TM della resistività apparente e della fase. I modelli ottenuti sono mostrati in Figura 6.4.



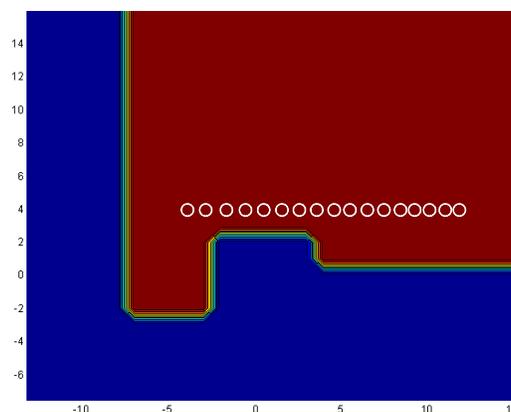
**Figura 6.4:** Sezione di resistività (in scala logaritmica) in funzione della profondità (in m) ottenuta tramite l'inversione 2D di Mackie e Rodi. I triangoli rappresentano i punti sondaggio.

Per i tre modelli il parametro di regolarizzazione,  $\tau$  (sezione 4.5), ha un valore pari a 30. Il misfit relativo a questa inversione è stato sufficientemente basso per il modo TM, con un valore pari a 3.5, indicando un buon fitting dei dati sintetici. Per il modo TE e per i modi TE e TM congiunti, l'r.m.s è, rispettivamente, pari a 9.3 e a 7.7.

Va specificato che per gli errori è stato utilizzato un livello standard del 20% dei valori per la resistività apparente e di circa  $10^\circ$  sulla fase.

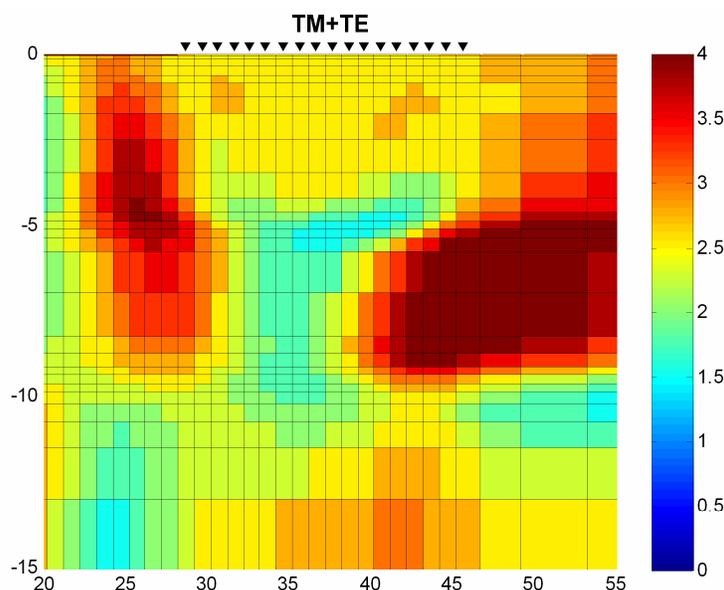
Il modello ottenuto dall'inversione TM rileva (Figura 6.4) un conduttore a profondità compresa tra i 5 e i 10 km ma dislocato nel piano xy rispetto alla linea dei sondaggi.

Per risolvere più in dettaglio il problema, è stato aumentato il numero di vincoli considerando un profilo lungo più di 15 km, costituito da 17 sondaggi (Figura 6.5).



**Figura 6.5:** Profilo MT lungo circa 15 km, costituito da diciassette sondaggi, e posizionato parallelamente alla costa.

Questa volta sono stati invertiti insieme il modo TM e quello TE. Il modello ottenuto (Figura 6.6) ha una risoluzione migliore rispetto a quello di Figura 6.4: è possibile identificare un conduttore ad una profondità che va di 5 ai 10 km e perfettamente posizionato sotto la linea dei sondaggi nel piano xy in pieno accordo con il modello mostrato in Figura 6.1.

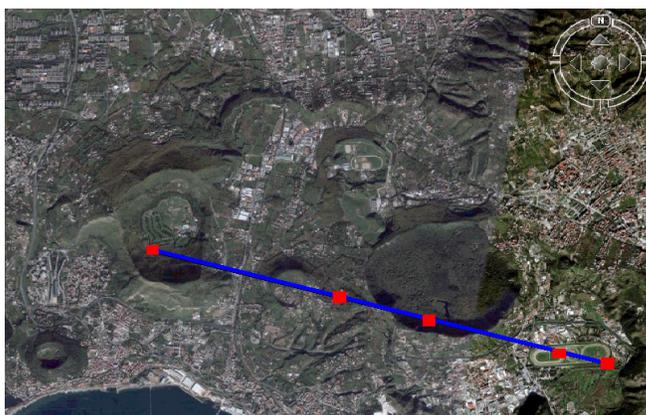


**Figura 6.6:** Sezione di resistività (in scala logaritmica) in funzione della profondità (in km) ottenuta tramite l'inversione del modo congiunto TM+TE. I triangoli rappresentano i 17 punti sondaggio.

Il parametro di regolarizzazione  $\tau$  è uguale a 10, mentre l'r.m.s. estremamente basso, pari a 1.8, conferma il buon fitting dei dati sintetici.

### 6.3 Inversione 2D dei dati sperimentali.

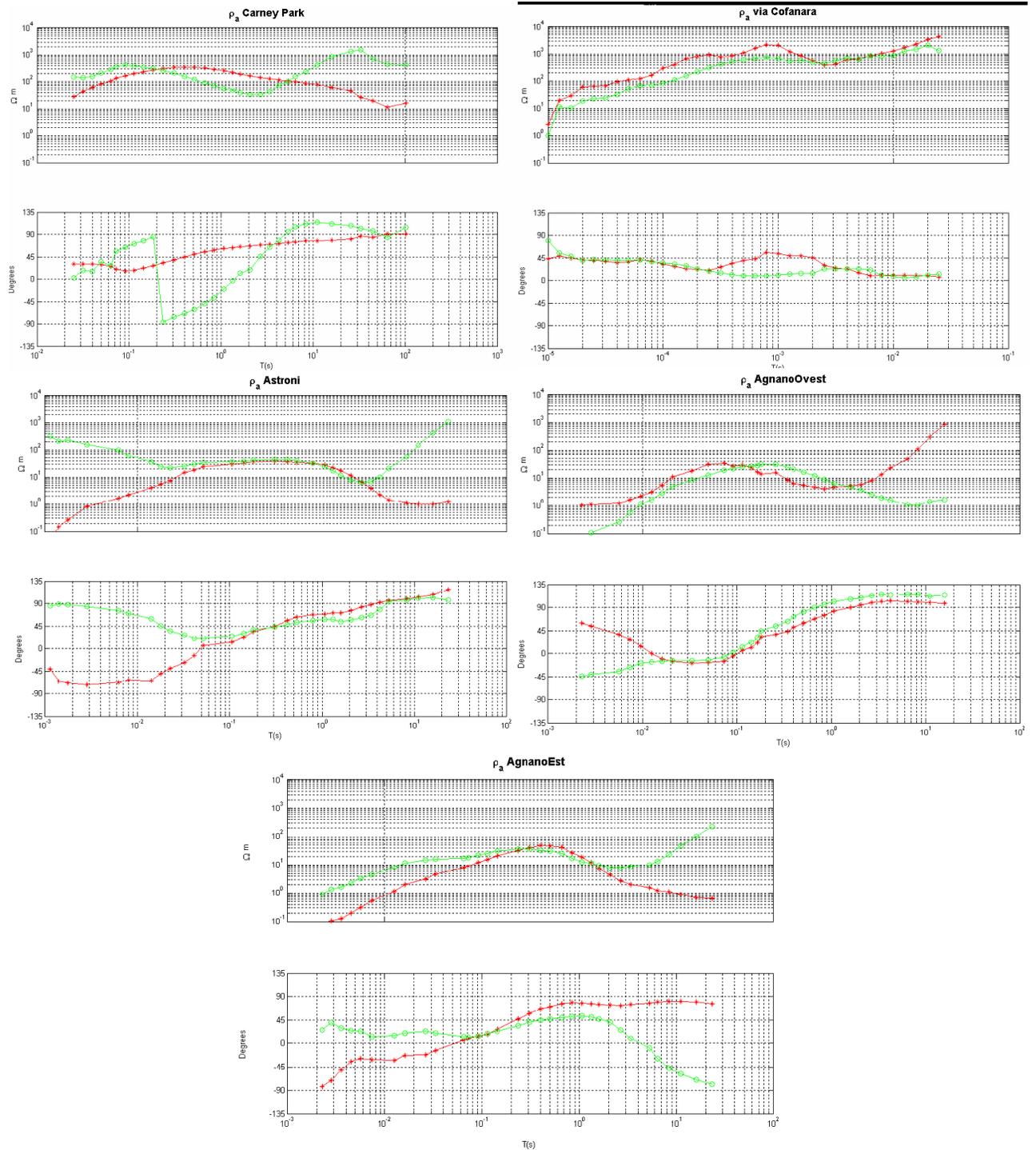
Il profilo MT (Figura 6.7) individuato per ottenere informazioni sull'immagine strutturale dell'area flegrea, si svolge parallelamente alla costa e raggruppa cinque siti di misura: Carney Park, via Cofanara, Astroni, Agnano Est ed Agnano Ovest.



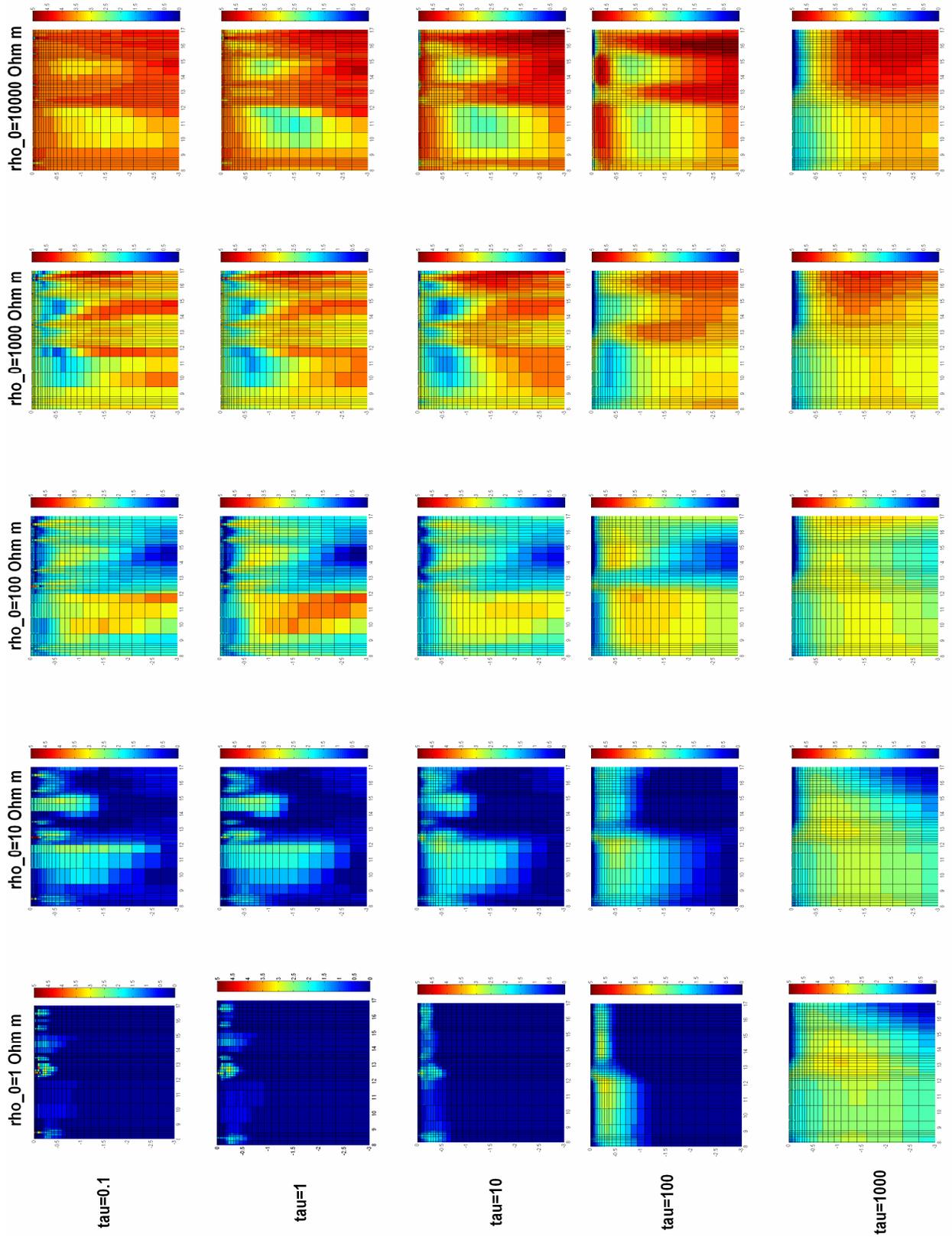
**Figura 6.7:** Mappa dei siti del profilo MT da invertire

Ad esclusione di via Cofanara, dove non sono stati effettuati sondaggi magnetotellurici, ma solo due sondaggi a sorgente controllata (CSAMT), gli altri siti sono stati analizzati in dettaglio nella sezione

5.2. Vengono riportate di seguito le curve di resistività e fase relative al profilo di Figura 6.7.



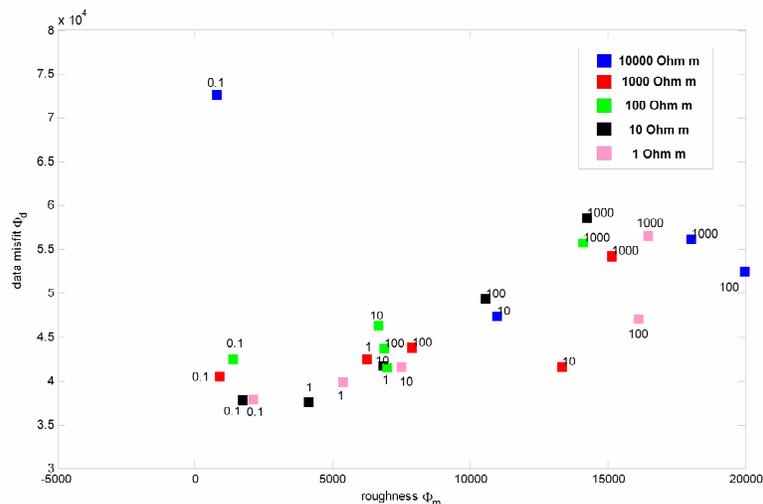
**Figura 6.8: Curve di resistività apparente e fase relative al profilo MT mostrato in Figura 6.7. Va sottolineato che il range di periodo investigato non è lo stesso per tutti i punti del profilo.**



**Figura 6.8:** Curve di resistività apparente e fase relative al profilo MT mostrato in Figura 6.7. Sezioni di resistività in funzione della profondità ottenute tramite l'inversione 2D di Mackie del modo TM, per diversi valori di  $\tau$  e di  $\rho_0$ .

Come nel caso sintetico, per modellare i dati sperimentali è stato utilizzato il codice di inversione di Mackie&Rodi. Come dati di input usiamo il modo TM della resistività apparente e della fase. La scelta di invertire solo questo modo verte sul fatto che in presenza di dati relativi a strutture 3D (come nel caso dei Campi Flegrei) invertiti con codici 2D il modo TM fornisce risultati migliori [Siripunvaraporn *et al.*, 2005]. Per gli errori è stato considerato un livello standard del 20% dei valori di resistività apparente e di 10° sulla fase. Nella Figura 6.9 sono mostrati i risultati dell'inversione per diversi valori della resistività apparente iniziale,  $\rho_0$  e del parametro di trade-off. Per la comparazione dei vari modelli le profondità sono state tagliate a 3 chilometri. Inoltre l'ampia escursione della scala logaritmica di resistività, che copre cinque ordini di grandezza non permette la migliore visualizzazione delle sezioni ottenute.

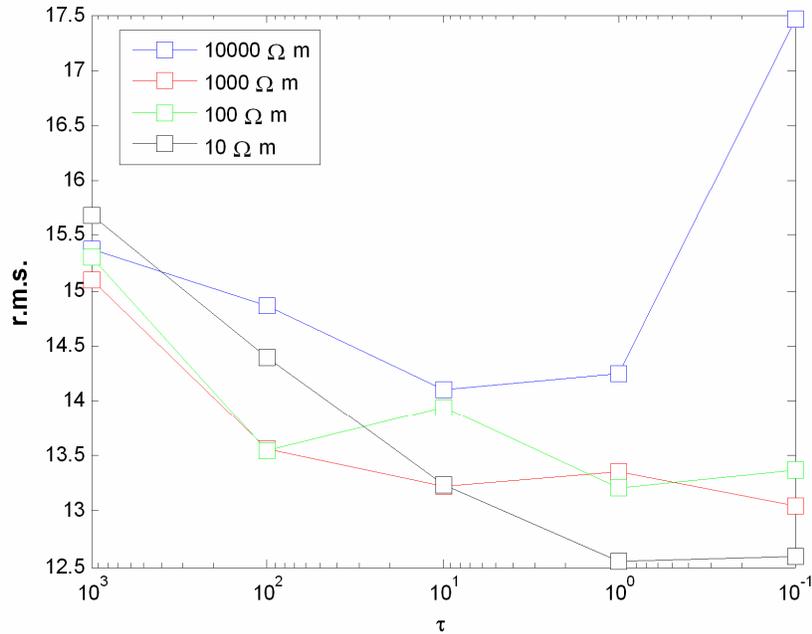
Per determinare un appropriato valore di  $\tau$  e per selezionare, quindi, un modello, tra quelli mostrati in Figura 6.9, che meglio fitta i dati sperimentali, plottiamo  $\Phi_d$  in funzione di  $\Phi_m$  al variare di  $\tau$  (i cui valori sono indicati in Figura 6.10) e di  $\rho_0$  (rappresentati in figura da differenti colori).



**Figura 6.6.90:** Per determinare un valore ottimale del parametro  $\tau$  viene plottata la funzione di misfit,  $\Phi_d$ , in funzione di  $\Phi_m$  al variare di  $\tau$  e di  $\rho_0$ .

Le sezioni caratterizzate da  $(\tau=0.1 ; \rho_0=10\Omega m)$ ,  $(\tau=0.1 ; \rho_0=1\Omega m)$  e  $(\tau=1 ; \rho_0=10\Omega m)$  sono quelle per cui si ottengono valori del misfit più bassi.

Ad ulteriore conferma grafichiamo (Figura 6.11) per differenti valori di resistività iniziale (indicati nella figura con diversi colori) l'r.m.s. in funzione del parametro di regolarizzazione  $\tau$ .



**Figura 6.11:** Plot semilogaritmico del misfit in funzione del parametro di trade-off  $\tau$ , al variare della resistività iniziale  $\rho_0$  (rappresentati da differenti colori).

I valori di misfit più bassi, anche in questo plot, coincidono con i modelli ottenuti con ( $\tau=0.1$ ;  $\rho_0=10\Omega m$ ) e ( $\tau=0.1$ ;  $\rho_0=1\Omega m$ ). Tra i due modelli scegliamo quello caratterizzato dalla prima coppia ( $\tau$ ;  $\rho_0$ ). Restringendo la scala logaritmica di resistività ed estendendo la profondità fino a 10 km si ottiene la sezione di resistività mostrata in Figura 6.12.

Emerge in tale modello, nella zona tra Carney Park e via Cofanara, una struttura più conduttiva tra i tre e i cinque chilometri. Un ulteriore strato conduttivo più superficiale si evidenzia, ad est, tra uno e tre chilometri di profondità.

Più superficialmente affiorano strutture con resistività più elevata.

Una volta fissati i valori di  $\tau$  e di  $\rho_0$ , consideriamo il modello di Figura 6.12 quello che fitta meglio il dataset sperimentale, ma come accennato nella sezione 4.5, essendo il problema inverso MT *ill-posed* altri modelli 2D possono essere consistenti con i dati.

Per esplorare questo aspetto, calcoliamo la Matrice di Sensività  $\mathbf{S}$  relativa al modello di Figura 6.12.

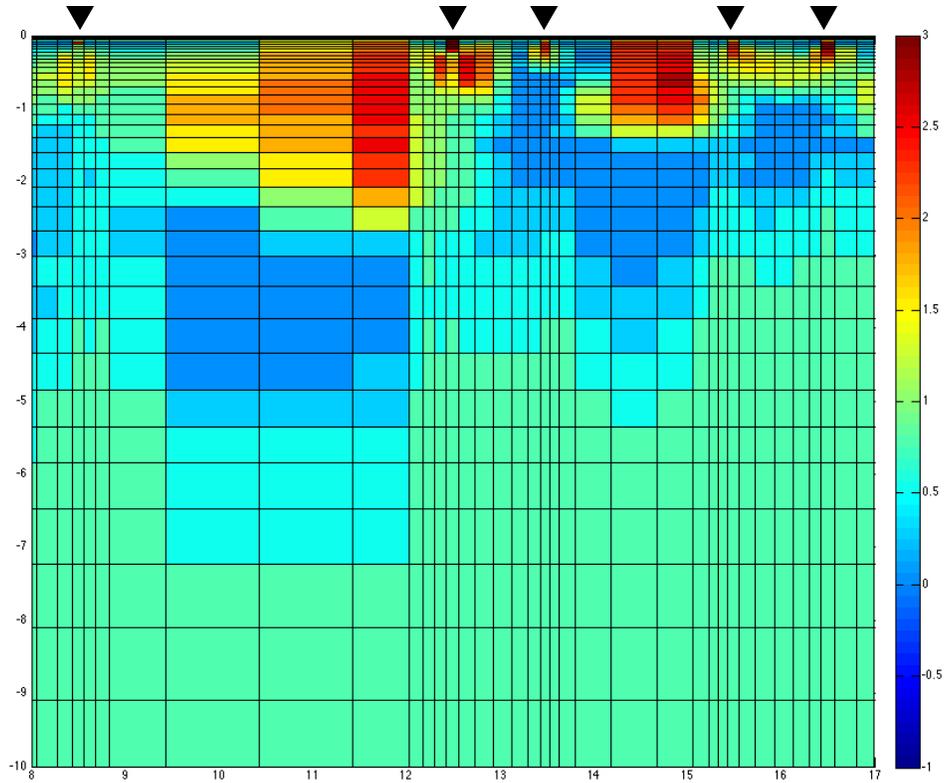
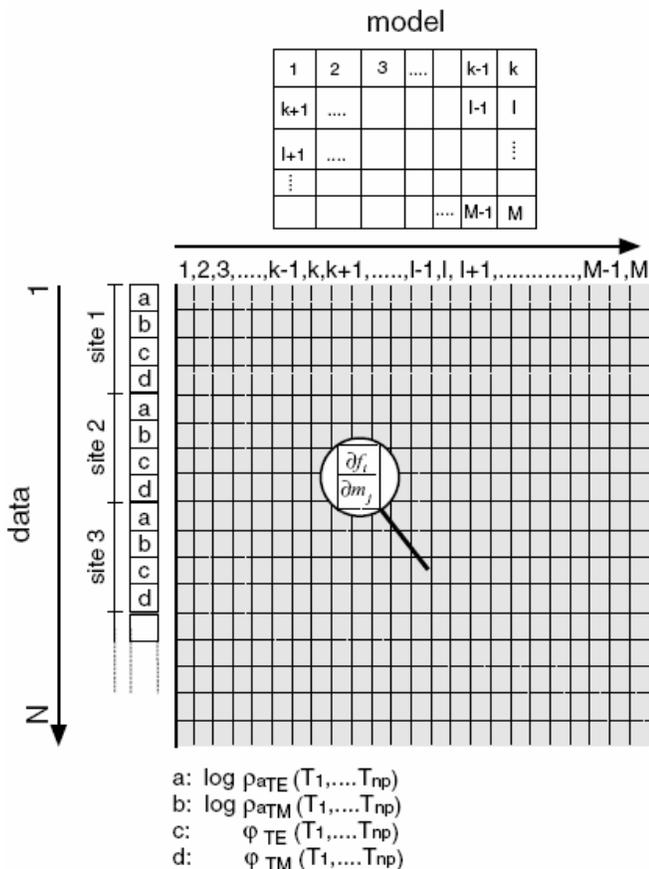


Figura 6.12: Sezione di resistività (in scala logaritmica) in funzione della profondità, relativa al modello con  $\tau=0.1$  e  $\rho_0=10\Omega m$ .

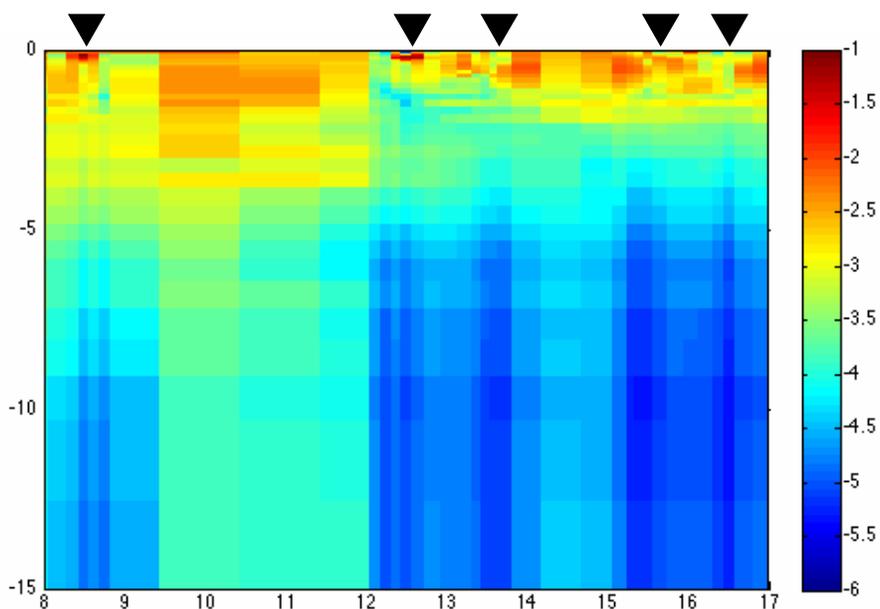


La Figura 6.13 mostra uno schema per la Matrice di Sensitività, nel caso MT: ogni colonna contiene le derivate parziali di tutti i dati, ( $\log \rho_{aTM}$ ,  $\log \rho_{aTE}$ ,  $\varphi_{TM}$ ,  $\varphi_{TE}$ ) per ogni sito e per ogni periodo, rispetto ad un preciso parametro del modello mentre ogni riga rappresenta la derivate parziale di un singolo dato rispetto a tutti i parametri del modello (la conducibilità di ogni singola cella).

Figura 6.13 Schema della matrice di sensitività nel caso MT. Le colonne sono relative allo spazio dei dati ed hanno  $N$  elementi ( $N = \# \text{ siti} \times \# \text{ periodi}$ )  $(np) \times 4$  tipi di dato ( $\log \rho_{aTE}$ ,  $\log \rho_{aTM}$ ,  $\varphi_{TE}$ ,  $\varphi_{TM}$ ). Le righe contengono i vettori costituiti dai parametri del modello,  $\log j$ ,  $j=1, \dots, M$ .

In generale, il termine sensitività è inteso come l'influenza che hanno sui dati piccole variazioni dei parametri dei modelli. Anche se il calcolo di  $\mathbf{S}$  costituisce la parte più dispendiosa di un'inversione MT, la sua analisi risulta indispensabile per capire quali parametri del modello sono meno risolti dai dati, in modo da escluderli dall'interpretazione.

Nella figura 6.14 mostriamo il comportamento di  $\mathbf{S}$  per  $\tau$  e di  $\rho_0$  scelti. La sensitività, decresce rapidamente con la profondità ed i valori delle isolinee della matrice mostrano che le strutture fino a 5 km di profondità sono ben risolte dall'inversione dei dati MT [Schwalenberg *et al.*, 2002].



**Figura 6.14:** Matrice di sensitività relativa al modello mostrato in figura 6.11.

I modelli presentati sono evidentemente essenziali e non hanno alcuna pretesa di ricostruzione compiuta delle strutture sepolte. Esse possono, comunque, essere utilizzate per una prima identificazione delle caratteristiche elettromagnetiche dell'area flegrea.

## Conclusioni

L'utilizzo della Magnetotellurica come metodo d'indagine per ricostruire immagini strutturali del sottosuolo in funzione di contrasti di resistività elettrica, analizzando il tensore impedenza  $Z$  di superficie, ha avuto negli ultimi anni notevoli sviluppi sia di tipo teorico che sperimentale. In particolare, le maggiori innovazioni si sono avute nelle tecniche di analisi dati. Nonostante ciò, una corretta stima di  $Z$  non è sempre fattibile, soprattutto quando si effettuano sondaggi in aree densamente urbanizzate. Infatti, la non uniformità del campo MT e la non stazionarietà dei contributi coerenti associabili a sorgenti di campo elettromagnetico (sorgenti di campo vicino) non approssimabili ad onde piane (sorgenti MT), possono essere la causa di curve di resistività, relative allo stesso sito, che presentano sviluppi differenti a seconda del sottocampione utilizzato.

Attualmente l'uso di tecniche di analisi multivariata dei dati, la cui introduzione, dopo il metodo della Remote Reference nel '78 ed i metodi robusti negli anni 80, fornisce una nuova e potente chiave di lettura dei dati MT in aree elettricamente rumorose, permette di analizzare in dettaglio la struttura del rumore elettromagnetico, consentendo una stima del numero di sorgenti coerenti ed, in alcuni casi, l'estrazione del segnale MT da sovrapposizioni complicate, d'onda piana e termini di sorgenti coerenti vicine. Tale separazione rappresenta un passo obbligato per la ricostruzione delle strutture sepolte.

Obiettivo di questo lavoro di tesi è stato, appunto, lo studio dei contributi di onda piana e di campo vicino per la definizione del distretto vulcanico dell'area flegrea mediante l'uso del metodo MT.

I Campi Flegrei rappresentano un ambiente totalmente ostile all'applicazione dei metodi elettromagnetici, a causa della combinazione tra l'effetto di screening del mare e la complessità delle strutture vulcaniche che crea effetti molto difficili da modellare. Inoltre, la totale urbanizzazione dell'area induce forti problemi di sorgente, legati in particolare alla presenza delle reti ferroviarie ed elettriche, e limita, notevolmente, le zone in cui è possibile effettuare indagini geofisiche riducendo il numero di eventuali punti sondaggio.

Queste caratteristiche hanno imposto, durante lo sviluppo del lavoro, un adeguamento delle tecniche di processing utilizzate, anche di quelle più raffinate. Tali tecniche non sono, comunque, in grado di ricostruire gli andamenti dei parametri MT in maniera automatica. È stato necessario, quindi, un alto grado di attenzione ed intervento per riuscire, sito per sito e curva per curva, a delineare le caratteristiche del segnale elettromagnetico nell'area flegrea e le loro conseguenze sulle stime MT.

In particolare è stato sviluppato un criterio per separare il segnale MT dal rumore coerente che si basa sulla ricostruzione della resistività apparente e della fase attraverso l'utilizzo di coppie di autovettori dominanti della Matrice di Densità Spettrale relativa ai dati sperimentali, che manifestino una direzione di polarizzazione stabile nel tempo, associando invece gli autovettori che tendono a ruotare con sorgenti mobili, di tipo antropico.

Tale tipo di approccio, totalmente innovativo, ha mostrato risultati interessanti, con notevoli miglioramenti delle stime dei parametri MT relativi ai sondaggi effettuati ai Campi Flegrei, rendendo il lavoro presentato particolarmente originale.

La mole di dati raccolti ed analizzati (14 sondaggi MT e 17 sondaggi CSAMT) , combinata con il lavoro di modelling, fa di questo lavoro un buon punto di partenza per ottenere un imaging elettromagnetico dei Campi Flegrei, obiettivo che richiede sicuramente un ulteriore livello di approfondimento.

Le prime inversioni delle curve stimate, infatti, pur non avendo nessuna pretesa di fornire un modello completo dei Campi Flegrei, né di sue parti, possono, comunque, essere utilizzate per una prima identificazione delle caratteristiche elettriche dell'area.

La scelta di invertire le curve di resistività apparente relative al solo modo TM, giustificata teoricamente con simulazioni 3D, ha condotto a risultati che fanno supporre l'esistenza di uno strato conduttivo (confermato dagli studi di sensitività della zona), sotto l'area Carney Park-Astroni-Agnano, intorno ai 4 km di profondità.

La possibilità futura di tentare un approccio 3D, sicuramente più corretto vista la simmetria dell'area, aumentando la copertura sperimentale per l'inversione rappresenta un punto di notevole interesse.

Un ulteriore piano di sviluppo consisterebbe, inoltre, nel cercare di modellare la risposta strutturale dei Campi Flegrei ai segnali dipolari, e non solo rispetto al segnale di onda piana, al fine di migliorare ulteriormente le tecniche di separazione del segnale dal rumore coerente nell'area flegrea.

## 7 Bibliografia

- Anderson, T.W., 1984. Estimating linear statistical relationship, *Ann. Stat.*, 12, 1-45.
- Anderson, T.W., Rubin, H., 1956. Statistical inference in factor analysis, in *Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, vol.5, edited by J. Neyman, pp111-150, University of California Press, Berkeley.
- Banks, R.J., 1998. The effects of non stationary noise on electromagnetic response estimates, *Geophys. J. Int.*, 135, 553-563.
- Bahr, K., 1988. Interpretation of the magnetotelluric impedance tensor: Regional induction and local telluric distortion. *Journal of Geophysics*, **62**.
- Berdichevsky, M.N., 1968. Electrical prospecting by the method of magnetotelluric profiling, *Nedra Moscow*, 255 pp.
- Berdichevsky, M.N., Zhdanov, M.S., 1984. Advanced theory of deep geomagnetic sounding. *Methods in Geochemistry and geophysics I, Elsevier Science Publishing Co.* **19**.
- Booker, J.R. & Chave, A.D., 1989. Introduction to the Special Issue on the EMSLAB-Juan de Fuca experiment, *J. geophys. Res.*, **94**, 14093-14098.
- Cagniard, L., 1953. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting, *Geophysics*, **18**, 605-635.
- Chave, A.D. & Thomson, D.J., 1989. Some comments on magnetotelluric response function estimation, *J. geophys. Res.*, **94**, 14215-14226.
- Chave, A.D., Thomson, D.J. & Ander, M.E., 1987. On the robust estimation of power spectra, coherences, and transfer functions, *J. geophys. Res.*, **92**, 633-648.
- Clarke, J., Gamble, T.D., Goubau, W.M., Kock, R.H., Miracky, R.F., 1983. Remote Reference Magnetotellurics: Equipments and Procedures, *Geophysical Prospecting*, **31**, 149-170.

Christensen, 1983. A theoretical and practical investigation of the marine electrical sounding method. *Ph.D. Thesis. Univ. of Aarhus.*

Di Maio, R., Mauriello, P., Patella, D., Petrillo, Z., Piscitelli, S., Siniscalchi, A., 1998. Electric and electromagnetic outline of the Mount Somma\_Vesuvius structural setting, *Journal of Volcanology and geothermal Research*, **82**, 219-338.

Egbert, G.D., 1997. robust multiple-station magnetotelluric data processing, *Geophys. J. Int.*, **130**, 475-496.

Egbert, G.D. & Booker, J. R., 1986. Robust estimation of geomagnetic transfer functions, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **87**, 173-194.

Egbert, G.D. & Booker, J. R., 1989. Multivariate analysis of geomagnetic array data I: The response space, *J. geophys. Res.*, **94**, 14227-14248.

Egbert, G.D., 1989. Multivariate analysis of geomagnetic array data II: Random source models, *J. geophys. Res.*, **94**, 14249-14265.

Egbert, G.D., Livelybrooks, D.W., 1996. Single station magnetotelluric impedance estimation: Coherence Weighting and regression M-estimate, *Geophysics*, **61**, 964-970.

EMSLAB Group, 1988. The EMSLAB electromagnetic sounding experiment. E.O.S. Transaction, *American Geophysical Union.*

Fraser-Smith, A.C. & Coates, D.B., 1978. Large amplitude ULF electromagnetic fields from BART, *Radio Science*, **13**, 661-668.

Gamble, T.D., Goubau, W.M. & Clarke, J., 1979. Magnetotellurics with a remote reference, *Geophysics*, **44**, 53-68.

Gamble, T.D., Goubau, W.M. & Clarke, J., 1979. Error analysis for remote reference magnetotellurics, , *Geophysics*, **44**, 959-968.

Gleser, L. J., 1981. Estimation in a multivariate “errors in variables” regression model: large sample results, *Ann. Stat.*, **9**, 24-44.

Gleser, L. J., Watson, G.S., 1973. Estimation of a linear transformation, *Biometrika*, **60**, 525-534.

Goldstein, Strangway, 1975. Audio-frequency magnetotellurics with a grounded electric dipole source. *Geophysics*, **40**.

Goubau, W.M., Gamble, T.D., Clarke, J., 1978. Magnetotelluric data analysis: removal of bias, *Geophysics*, **43**, 1157-1166.

Hadamard, J., 1902, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Princeton Univ. Bull.*, **13**, 49-52.

Hermance, 1982. The asymptotic response of three-dimensional basin offsets to magnetotelluric fields at long periods: The effect of current channeling. *Geophysics*, **47**.

Huber, P.J., 1981. Robust Statistics, Wiley, New York, NY.

Jackson, J.D., 1975. Classical Electrodynamics, 2<sup>nd</sup> Ed., *John Wiley and Sons, Inc.*

Jones, A.G. & Jodicke, H., 1984. Magnetotelluric transfer function estimation improvement by a coherence-based rejection technique, *paper presented at 54<sup>th</sup> Ann. Int. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*

Jones, A.G., Chave, A.D., Egbert, G.D., Auld, D. & Bahr, K., 1989. A comparison of techniques for magnetotelluric response function estimation, *J. geophys. Res.*, **94**, 14201-14214.

Jupp, D.L.B., 1978. Estimation of the magnetotelluric impedance functions, *Phys. Earth planet. Inter.*, **17**, 75-82.

Larsen, J.C., 1989. Transfer functions: smooth robust estimates by least squares and remote reference methods, *Geophys. J. Int.*, **99**, 655-663.

Kaufmann, A.A., Keller, G.V., 1981. The magnetotelluric sounding method, *Elsevier S.P.C.*

Mackie, R.L., Madden, T.R., 1992. A magnetotelluric survey around the Loma Prieta fault zone, EOS, *Trans. Am. Geophys. Un.*, **73**, 99.

Mackie, R.L., Madden, T.R., 1993. Three-dimensional Magnetotelluric Modeling Using conjugate gradients, *Geophys. J. Int.*, **115**, 215-229.

Mackie, R.L., Rieven, S. and Rodi, W., 1997. *Users Manual and Software Documentation for Two-Dimensional Inversion of Magnetotelluric Data*, GSY-USA, Inc., San Francisco, Ca 94114, User Documentation.

Mackie, R.L., Madden, T.R. and Wannamaker, P.E. 1993. Three-dimensional Magnetotelluric Modeling Using Difference Equations- Theory and Comparison to Integral Equation solutions, *Geophysics*, **58**, 215-226.

Madden, T.R., Nelson P.H., 1964. A defense of Cagniard's Magnetotelluric Method, ONR Report Project NR-371-401, *Geophysics Lab*, M.I.T..

Park, J. & Chave, A.D., 1984. On the estimation of magnetotelluric response functions using the singular value decomposition, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, **77**, 683-709.

Porath, H., Gough, D.I., 1971. Mantle conductivity structures in the western United States from magnetometer array studies, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, **22**, 261-275.

W. Qian, L.B. Pedersen, 1991. Industrial Interference Magnetotellurics: an Example from the Tangshan Area China, *Geophysics*, **56**, 265-273.

Rodi, W., Mackie, R.L., 2001. Non linear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversions, *Geophysics*, **66**, 174-187.

Rokityansky, I.I., 1982. Geoelectromagnetic Investigation of the Earth's Crust and Mantle, *Springer-Verlag, New York*.

Sims, W.E., Bostick, F.X. & Smith, H.W., 1971. The estimation of magnetotelluric impedance tensor elements from measured data, *Geophysics*, **36**, 938-942.

Siripunvaraporn, W., Egbert, G., 2000. An efficient data subspace inversion method for 2-D magnetotelluric data. *Geophysics*, **65**.

Siripunvaraporn, W., Egbert, G., Uyeshima, M., 2005. Interpretation of two dimensional magnetotelluric profile data with three dimensional inversion: synthetic examples, *Geophys. J. Int.*, **160**, 804-814.

Sokolova, Svetov, Varenstov, 1994. The study of MT data processing techniques using synthetic time series (the COMDAT project), *XII Workshop on EM induction in the Earth (Abstract), Brest, France*.

Stodt, J.A., 1986. Weighted averaging and coherence sorting for least squares magnetotelluric estimates, *8<sup>th</sup> Workshop on Geomagnetic Induction in the Earth and Moon, assoc. Geomag. Aeron.*

Sutarno, D. & Vozoff, K., 1991. Phase-smoothed robust M-estimation of magnetotelluric impedance functions, *Geophysics*, **56**, 1999-2007.

Telford, Geldart, Sheriff, 1990. Applied Geophysics, *Cambridge University Press*.

Tikhonov, 1963. Solution of Ill-posed problem and regularization method (in russo). *Soviet Math Dokladi*, 4.

Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y., 1977, Solution of ill-posed problems, *V.H. Winston and Sons*, 258 pp.

Vozoff, K., 1972. The Magnetotelluric method in the exploration of sedimentary basins, *Geophysics*, **37**, 98-141.

K. Vozoff. The Magnetotelluric Method. Capitolo 8, 641-711.

Wannamaker, 1991. Advances in three-dimensional magnetotelluric method using integral equations. *Geophysics*, **56**.

Zhdanov, 2002. Geophysical inverse theory and regularization problems. *Methods in Geochemistry and Geophysics*, **36**. Elsevier Science Publishing Co.

<b>Introduzione</b> .....	2
<b>1 Principi teorici</b> .....	5
1.1 Equazioni di Maxwell nei mezzi macroscopici.....	5
1.2 Condizioni ai limiti sulle superfici di separazione tra mezzi diversi.....	6
1.3 Onde elettromagnetiche nei conduttori .....	7
<b>2 Il metodo magnetotellurico</b> .....	11
2.1 Sorgenti del metodo MT .....	12
2.1.1 Sorgenti ad alta frequenza .....	12
2.1.2 Sorgenti a bassa frequenza.....	13
2.2 Tensore impedenza e resistività.....	16
2.2.1 Semispazio omogeneo .....	18
2.2.2 Modello 1D.....	19
2.2.3 Modello 2D.....	20
2.2.4 Modello 3D.....	21
2.3 Impedenza elettrica di superficie generata da una sorgente dipolare. ....	22
2.3.1 Dipolo elettrico su un semispazio omogeneo .....	22
2.3.2 Dipolo elettrico su una struttura 1D.....	25
2.4 Funzioni di trasferimento e Spazio di Risposta.....	27
<b>3 La stima di Z</b> .....	34
3.1 Il metodo dei minimi quadrati .....	35
3.1.1 Il metodo dei minimi quadrati pesati.....	36
3.2 Il metodo della Remote Reference .....	36
3.3 Metodi robusti.....	38
3.4 Metodi Multivariati.....	39
3.4.1 Stima dello spazio risposta .....	41
3.4.2 Il metodo RMEV.....	44
<b>4 Cenni di teoria dell'inversione</b> .....	47
4.1 Metodi differenziali per il modelling elettromagnetico .....	47
4.2 Il problema inverso .....	49
4.3 Problematiche relative alla soluzione del problema inverso .....	50
4.4 Cenni di teoria della regolarizzazione.....	51
4.4.1 Algoritmi di minimizzazione del funzionale di misfit .....	52
4.5 Inversione 2D di dati magnetotellurici e studi di sensitività.....	55

<b>5</b>	<b>Separazione di contributi d'onda piana e di campo vicino .....</b>	<b>57</b>
5.1	Test su dati sintetici.....	58
5.2	Sondaggi MT .....	61
5.2.1	Solfatara.....	63
5.2.2	Astroni .....	67
5.2.3	Carney Park.....	71
5.2.4	Fondi di Baia.....	74
5.2.5	Monteleone .....	76
5.2.6	Agnano est ed Agnano ovest .....	77
<b>6</b>	<b>Modelli per i Campi Flegrei .....</b>	<b>80</b>
6.1	Modelling 3D.....	80
6.2	Inversione 2D dei dati sintetici .....	82
6.3	Inversione 2D dei dati sperimentali. ....	84
	<b>Conclusioni .....</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Bibliografia.....</b>	<b>93</b>