

*Alma Mater Studiorum  
Università di Bologna*

**FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE  
E NATURALI**

**DOTTORATO DI RICERCA IN GEOFISICA  
XXI CICLO**

**Curriculum di Fisica del Vulcanismo  
Settore scientifico disciplinare di afferenza: GEO/10**

**MECCANISMI DI FORMAZIONE  
DEI TUBI DI LAVA**

Tesi presentata dalla  
**Dott.ssa Antonella Valerio**

Coordinatore del Dottorato  
**Prof. Michele Dragoni**

Tutore  
**Prof. Michele Dragoni**

Esame finale anno 2009

# Indice

<b>Introduzione e Riassunto</b>	<b>3</b>
<b>1 Tubi di Lava</b>	<b>6</b>
<b>2 Elementi di Meccanica dei Fluidi Viscosi</b>	<b>10</b>
2.1 Conservazione della massa . . . . .	10
2.2 Forze nei fluidi . . . . .	10
2.3 Equazione del moto per i fluidi . . . . .	11
2.4 Equazione costitutiva per fluidi newtoniani . . . . .	11
2.5 Equazione del moto per fluidi newtoniani . . . . .	14
2.6 Compressibilità della lava . . . . .	14
<b>3 Processi termici</b>	<b>16</b>
3.1 La temperatura . . . . .	16
3.2 Meccanismi di trasferimento del calore . . . . .	16
3.3 Equazione del calore in un fluido . . . . .	18
3.4 Processi termici in un flusso di lava . . . . .	18
<b>4 Reologia delle colate di lava</b>	<b>21</b>
4.1 Che cosa è la lava . . . . .	21
4.2 Fluidi newtoniani e non newtoniani . . . . .	22
4.3 Solido elastico e plastico . . . . .	23
4.4 L'influenza della temperatura sulla reologia . . . . .	24
4.5 Applicazioni al fluido lavico . . . . .	26
<b>5 Meccanismi di formazione dei tubi di lava: primo modello</b>	<b>28</b>
5.1 Riassunto . . . . .	28
5.2 Introduzione . . . . .	29
5.3 Modello dinamico . . . . .	29
5.4 Modello termico . . . . .	33
5.5 La formazione della crosta . . . . .	34

5.6	Lo sviluppo della crosta . . . . .	38
5.7	Formazione dei tubi . . . . .	38
5.8	Variazione della larghezza . . . . .	39
5.9	Variazione della pendenza . . . . .	45
5.10	Variazione della portata . . . . .	48
5.11	Confronto con le osservazioni sperimentali . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Meccanismi di formazione dei tubi di lava: secondo modello</b>	<b>55</b>
6.1	Riassunto . . . . .	55
6.2	Introduzione . . . . .	56
6.3	Modello dinamico . . . . .	56
6.4	Evoluzione della crosta lungo la direzione del moto . . . . .	63
6.5	Modello termico . . . . .	64
6.6	Frammentazione crostale . . . . .	67
6.7	Resistenza della crosta agli sforzi di taglio . . . . .	67
6.8	Resistenza della crosta agli sforzi tensili . . . . .	72
6.9	Confronto con le osservazioni sperimentali . . . . .	77
6.10	Applicabilità dei modelli . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Misure in laboratorio</b>	<b>81</b>
7.1	Apparato strumentale . . . . .	81
7.1.1	Preparazione del campione . . . . .	81
7.1.2	Descrizione dell'apparato . . . . .	81
7.1.3	Preparazione del sistema . . . . .	83
7.2	Misure di viscosità . . . . .	83
7.2.1	Raccolta dei dati . . . . .	83
7.2.2	Calcolo della viscosità . . . . .	84
7.2.3	La legge di Arrhenius . . . . .	87
7.3	Misure di conducibilità termica . . . . .	88
7.4	Conclusioni . . . . .	93
	<b>Conclusioni</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>97</b>

# Introduzione e Riassunto

I campi di lava presenti nelle zone interessate da fenomeni di vulcanismo effusivo sono formati da complessi sistemi di flussi lavici. Un flusso lavico può scorrere in un canale aperto, oppure in un condotto la cui superficie è solidificata e forma un tetto stazionario, ovvero un tubo di lava. I tubi di lava contribuiscono ad accrescere la pericolosità vulcanica, in quanto, riducendo i processi di raffreddamento, permettono alla lava di scorrere conservando pressoché inalterate le proprietà chimiche e fisiche, così da percorrere distanze maggiori che nel caso di un canale aperto e fuoriuscire da bocche secondarie. Talvolta la lava che scorre nei tubi è resa visibile da alcune aperture che si formano nel tetto, dette *skylights*, ma spesso percorre chilometri senza che la sua presenza sia evidente alla superficie, perché i tubi sono ricoperti da una crosta solida compatta o da flussi originatisi in fasi successive dell'eruzione, che si sovrappongono ad essi. Oltre all'utilizzo di telecamere termiche usate nel rilevare la presenza dei tubi di lava, la determinazione delle condizioni topografiche, delle caratteristiche di ciascun flusso e delle proprietà della lava che favoriscono la formazione dei tubi può essere di aiuto nella valutazione della pericolosità di una determinata area vulcanica.

La morfologia e i meccanismi di formazione dei tubi di lava sono stati descritti in maniera qualitativa, ed alcuni lavori sperimentali su fluidi quali il glicole polietilenico sono stati condotti allo scopo di individuare dei parametri del flusso che permettano di determinare se sia possibile la formazione di un tubo o meno. Tuttavia, la modellistica fisico-matematica dei meccanismi di formazione dei tubi di lava è ancora ad una fase di sviluppo iniziale. Nell'intento di simulare la complessità dell'evoluzione di un flusso lavico, nei suoi aspetti dinamici, termici e reologici, è necessario utilizzare notevoli semplificazioni. Cionondimeno, i modelli analitici permettono di comprendere i processi fisici che dominano nell'evoluzione di una colata, e di individuare quelli responsabili della genesi dei tubi di lava.

L'obiettivo del lavoro qui presentato è la comprensione di alcuni dei meccanismi di formazione dei tubi di lava. Nel Capitolo 1 è fornito un breve sommario delle osservazioni effettuate su tale fenomeno.

Nel Capitolo 2 sono esposti i principi fondamentali della meccanica dei fluidi, e le equazioni che ne descrivono la dinamica, con le approssimazioni usate



nell'applicazione ad un flusso di lava.

Nel Capitolo 3 sono descritti i processi di trasferimento di calore, ed è riportata l'equazione di conduzione del calore in un fluido. Attraverso opportune ipotesi di lavoro, si giunge ad una sua forma semplificata utilizzata nella descrizione di un flusso lavico.

Nel Capitolo 4 sono illustrati alcuni fondamentali e semplici modelli di comportamento reologico, per corpi fluidi, newtoniani e non, e corpi solidi, elastici o duttili.

Nel Capitolo 5 è esposto il modello analitico che descrive lo sviluppo di una crosta solida nella zona centrale del canale, e la formazione di un tubo quando essa si estenda fino agli argini laterali. Si utilizza l'approssimazione di fluido newtoniano, e si risolve l'equazione di Navier- Stokes 2-D. I processi termici considerati sono quelli di irraggiamento e convezione in atmosfera, e sono descritti mediante assegnazione di un flusso di calore alla superficie superiore del flusso. Introducendo la velocità nel calcolo della temperatura, si tiene conto anche dei termini avvevativi dipendenti dalla sola profondità nel canale. La crosta formatasi in superficie ad opera del raffreddamento è descritta come un corpo plastico, la cui resistenza è funzione decrescente esponenzialmente con la temperatura. La sua larghezza è delimitata all'interno delle zone di *shear*, dove lo sforzo di taglio applicato raggiunge i massimi valori, tali da superare lo sforzo di soglia. Sono analizzati alcuni elementi che, agendo sulle suddette funzioni, forniscono le condizioni necessarie alla formazione del tetto di un tubo. Sulla base delle indicazioni fornite dalle osservazioni, si analizzano gli effetti dei seguenti fattori: la variazione della larghezza del canale, della pendenza del suolo, del tasso effusivo. Il modello fornisce la spiegazione fisica dei processi che regolano la formazione dei tubi mediante l'allargamento crostale dal centro del canale agli argini, e individua gli intervalli di valori di alcune grandezze, caratteristiche del flusso o della topografia locale, che permettono la formazione del tubo.

Il Capitolo 6 è volto alla spiegazione del secondo modello analitico formulato, relativo al meccanismo di formazione dei tubi di lava mediante avanzamento di lembi di crosta solidificata dagli argini verso il centro del canale, fino al loro congiungimento. Il moto del fluido è descritto come nel modello esposto nel Capitolo 5. Il bilancio termico tiene conto della conduzione in atmosfera, e, attraverso i termini avvevativi, dell'effetto delle pareti laterali sulla temperatura del fluido, oltre che della profondità. La crosta che si forma ha uno spessore non trascurabile, maggiore in prossimità degli argini e minore al centro. Applicando le equazioni valide nel caso di una lamina elastica fissata ai propri estremi, è possibile stimare gli sforzi agenti sulla crosta, e determinare la distanza dalla bocca eruttiva per cui il suo spessore è tale da resistere in ogni punto allo sforzo di taglio dovuto al trascinarsi del fluido sottostante, e quella per cui l'ispessimento riesce a garantire l'autososteni-

mento del proprio peso.

Nel Capitolo 7 sono spiegati i procedimenti sperimentali utilizzati nell'effettuare misure di viscosità e conducibilità termica su campioni di lava basaltica proveniente dall'Etna. Le misure sono state svolte in un laboratorio tedesco di vulcanologia sperimentale (il Physikalisch Vulkanologisches Labor di Würzburg). Sono riportati i risultati ed esposte alcune considerazioni circa la loro utilità e applicabilità nello sviluppo dei modelli.

# Capitolo 1

## Tubi di Lava

I tubi di lava sono dei condotti che si generano quando la crosta di un flusso solidifica e si salda, ricoprendo l'intera larghezza del canale. I tubi di lava sono molto comuni nelle aree interessate da fenomeni di vulcanismo effusivo [Greeley, 1987]. Essi sono un elemento di considerevole importanza nella valutazione della pericolosità vulcanica, in quanto consentono alla lava di scorrere al di sotto di un tetto solido, conservando quasi inalterate le proprietà fisiche e percorrendo distanze maggiori che nel caso di canali aperti [Swanson, 1973, Kilburn e Lopes, 1988]. La formazione dei tubi riduce il tasso di perdita di calore, ed i gas caldi si accumulano al di sotto del tetto, mantenendo la superficie del flusso ad una temperatura prossima a quella eruttiva.

Solitamente i tubi sono visibili attraverso gli *skylights*, ovvero delle aperture presenti nel tetto che rivelano la presenza di un flusso attivo al di sotto di esso, oppure sfociano in bocche secondarie.

I meccanismi di formazione dei tubi di lava osservati in natura sono molteplici. Greeley (1971) ne fornisce per primo una classificazione, poi ripresa in dettaglio da Peterson et al. (1994). I seguenti processi di formazione dei tubi di lava sono individuati in letteratura.

(A) *Formazione e fusione di lamine di crosta duttile*. La parte superiore del canale è ricoperta da piattaforme di crosta mobili, che possono frammentarsi quando la velocità aumenta per mezzo di un aumento della pendenza del suolo o in corrispondenza di moto irregolare. In taluni casi, invece, le lastre solide possono congiungersi e saldarsi agli argini del canale fino a formare un tetto stabile [Greeley, 1987]. Peterson (1994) evidenzia come la crosta sia limitata nella sua estensione dalle regioni laterali ad alto *shearing* (elevato sforzo di taglio), sia deformabile, e venga trasportata sulla superficie del fluido come una zattera. Essa è in grado di saldarsi agli argini sotto opportune condizioni, quali una ridotta pendenza del suolo o la variazione continua della direzione del flusso. Calvari e Pinkerton (1999) osservano che questo

meccanismo avviene sull'Etna in canali larghi (10- 20 metri) e con pendenze del suolo comprese tra 5- 10° ( $\approx 0.1$ - 0.2 rad), e forniscono una stima del tempo di formazione pari a un mese.

(B) *Formazione di sottili strati di crosta stabile agli argini del canale e loro saldatura al centro.* La crosta, originatasi per raffreddamento superficiale e formazione di detriti solidi che si saldano insieme, è ben definita lungo entrambi i lati del canale, e accresce verso il centro. Se il livello della superficie rimane costante, i due lembi possono congiungersi al centro del canale, secondo un meccanismo talvolta descritto come la chiusura di una zip, con forma di V e cucitura al centro del flusso [Greeley, 1987, Peterson, 1994]. Osservazioni sull'Etna [Calvari e Pinkerton, 1999] suggeriscono che questo meccanismo avviene in canali stretti (1- 5 metri) e pendenze elevate (15- 30°, ovvero  $\approx 0.25$ - 0.5 rad).

C) *Formazione degli argini che accrescono verso il centro del canale e curvano fino a congiungersi.* Jaggar (1921) descrive flussi molto rapidi che scorrono in canali stretti e che creano degli argini. A seguito di straripamenti successivi, nuovo materiale viene aggiunto alla loro struttura, finché, accrescendo verso il centro, curvano e si uniscono. Calvari e Pinkerton (1999) osservano il prevalere di questo meccanismo in canali stretti e ne stimano un tempo medio di formazione di circa 15 giorni.

D) *Sviluppo di un sistema di protrusioni di lava che avanzano e raffreddando accrescono il tetto del tubo.* La lava pahoehoe inizialmente forma flussi estesi orizzontalmente (*sheet flows*). Se il flusso è lento, in prossimità del fronte lingue di lava fuoriescono al di sotto della superficie solidificata per raffreddamento. Quando anche esse solidificano, estendono il tubo di lava preesistente allo stesso tasso di avanzamento del flusso. In questo modo, si può avere la generazione di molteplici tunnel che si dipartono da quello principale [Baldwin, 1953, Greeley, 1987, Peterson, 1994]. Nel caso di lave pahoehoe, i tubi così generati si estendono fino a 10- 20 km dalla bocca eruttiva, con spessori fino a 20 metri e larghezze anche superiori ai 25 metri [Kauahikaua et al., (1998)].

E) *Unione di parti solide superficiali in un restringimento del canale.* Quando un canale incontra un restringimento, le parti solide laminari trasportate alla superficie del fluido possono raggrupparsi e rimanere incastrate nella strettoia, per poi saldarsi insieme e formare il tetto del tubo [Kilburn e Guest, 1993, Peterson, 1994].

F) *Rallentamento, rigonfiamento e raffreddamento superficiale del flusso.* Wentworth e Macdonald (1953) descrivono la formazione del tetto del tubo di lava genericamente per mezzo di solidificazione superficiale di un flusso pahoehoe. Il tetto accresce per raffreddamento della lava al di sotto della crosta. Questo meccanismo può essere ricondotto a quello descritto da Calvari e Pinkerton (1999) in lave 'a'a (all'Etna) in cui si ha rigonfiamento e

rallentamento del fronte: la superficie solidifica fino a generare il tetto di un tubo.

A seconda del meccanismo di formazione di tubi di lava, essi mostrano sezioni differenti: approssimativamente circolare, ellittica, triangolare (con un vertice verso l'alto) [Kilburn e Guest, 1993]. Le sezioni possono anche presentare asimmetria, che si origina quando il flusso cambia direzione, essendo la conseguenza del deposito di lava sul lato interno della curva, che si muove più lentamente rispetto a quello esterno. L'asimmetria può anche essere conseguenza di apertura di bocche effimere o accumulo di lava su un lato del tubo ed episodi di collasso parziale del tetto [Calvari e Pinkerton, 1998].

Il ripetersi di episodi eruttivi o di straripamenti successivi può originare flussi soprastanti [Greeley, 1971]. I tubi di lava possono rimanere attivi anche quando nuovi flussi scorrono al di sopra di essi, tanto che le osservazioni superficiali possono sottostimare il flusso totale di lava che viene trasportato [Kilburn e Guest, 1993]. I tubi di lava possono dunque dare vita a sistemi tridimensionali, accrescendo notevolmente la complessità dei campi lavici. Ad esempio, l'abbassamento del livello del fluido in un canale all'Etna si rivela talvolta non una conseguenza dell'erosione termica sul fondo, ma del collasso del tetto del tubo su cui scorre il fluido, a seguito della pressione esercitata da esso [Calvari e Pinkerton, 1999].

Alcuni modelli analitici sono stati proposti per spiegare la genesi del tetto di un tubo nel caso bidimensionale [Dragoni et al., 1995], ed alcuni lavori sperimentali sono stati condotti nel tentativo di individuare dei parametri del flusso che permettano di determinare se la formazione del tubo sia possibile [Griffiths e Kerr, 2001; Griffiths et al., 2003; Cashman et al., 2005].

In questo lavoro saranno esposti dei modelli analitici formulati allo scopo di descrivere i meccanismi (A) e (B).

La Fig. 1.1 mostra uno schema semplificato del primo processo di accrescimento crostale. In molti canali si forma una crosta superficiale nella parte centrale. Essa è trascinata dal fluido sottostante ed è confinata entro una determinata larghezza, a tratti costante lungo la direzione del moto. Nelle zone laterali, frammenti solidi sono presenti in superficie. La crosta così formata può percorrere diversi chilometri e non necessariamente generare un tubo di lava. Alcune condizioni relative alla topografia del suolo o determinate proprietà del flusso possono favorire l'allargamento crostale ed eventualmente la congiunzione della parte solida con le pareti laterali del canale, in modo da generare il tetto stazionario di un tubo. L'osservazione indica come fattori la variazione di larghezza del canale, della portata e della pendenza del suolo.

La Fig. 1.2 mostra uno schema semplificato del secondo processo di accrescimento crostale. A causa del raffreddamento superficiale e di quello dovuto alla presenza delle pareti laterali, lembi di crosta si formano agli argini del canale e si estendono progressivamente verso il centro. Blocchi di lava solida

presenti sulla superficie del flusso possono saldarsi ed unirsi agli argini.

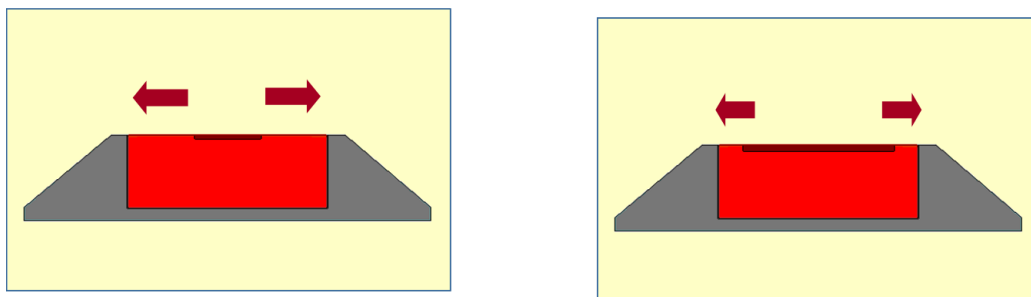


Figura 1.1: Schema dell'accrescimento laterale della crosta presente al centro di un flusso di lava (modello A).

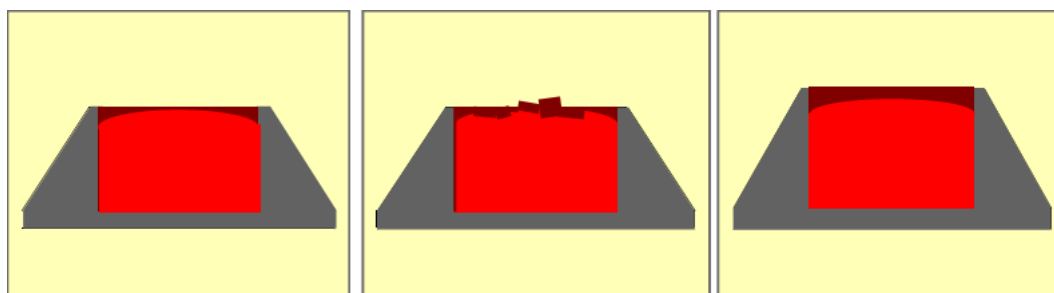


Figura 1.2: Schema dell'accrescimento degli argini laterali di un canale e congiungimento di questi con i frammenti solidi presenti al centro del canale (modello B).

L'obiettivo del lavoro è quello di fornire un'illustrazione dei processi fisici responsabili della formazione dei tubi di lava mediante i due meccanismi sopra descritti.

# Capitolo 2

## Elementi di Meccanica dei Fluidi Viscosi

### 2.1 Conservazione della massa

L'espressione della conservazione della massa nei fluidi è nota come equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $\mathbf{v}$  è il vettore velocità. Se la densità è costante nel tempo e nello spazio, l'equazione assume la forma incompressibile:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

### 2.2 Forze nei fluidi

Le forze agenti su una massa fluida possono essere divise in tre categorie: forze di volume, forze di superficie, forze di linea.

Le forze di volume sono quelle distribuite sull'intera massa del fluido, sono proporzionali ad essa e sono forze a lungo raggio. Sono esprimibili convenientemente per unità di volume. Le forze sono dette conservative quando possono essere espresse mediante il gradiente di una funzione potenziale  $\phi$ . La forza di gravità, per esempio, può essere così scritta:

$$\mathbf{g} = -\nabla(\phi) \quad (2.3)$$

Le forze di superficie agiscono mediante diretto contatto su un elemento di superficie, sono proporzionali all'estensione dell'area cui sono applicate, sono espresse per unità di area e possono essere scomposte mediante le due componenti normale e tangenziale alla superficie  $A$ :

$$\sigma_n \equiv \frac{dF_n}{dA} \quad (2.4)$$

$$\sigma_s \equiv \frac{dF_s}{dA} \quad (2.5)$$

Le due espressioni sopra riportate sono la definizione scalare di sforzo normale e tangenziale.

Le forze di linea sono dovute alla tensione superficiale, e sono espresse per unità di lunghezza. Solitamente agiscono all'interfaccia tra due mezzi differenti e la loro azione è descritta mediante le condizioni al contorno e non mediante termini nell'equazione del moto.

## 2.3 Equazione del moto per i fluidi

Applicando la legge di Newton ad un elemento di fluido nel campo di gravità si ottiene l'equazione del moto nella forma

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

dove il termine  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$  indica la componente  $i$ -esima della forza di volume associata allo sforzo  $\sigma_{ij}$ , e il termine  $Dv_i / Dt$  indica la derivata sostanziale della velocità  $v_i$ , che in forma esplicita si esprime come:

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

L'equazione del moto, anche detta equazione di Cauchy, esprime la relazione tra l'accelerazione e le forze applicate in un punto di un mezzo continuo, solido o fluido. Per descrivere il moto di un fluido, è necessario introdurre nell'equazione la relazione tra lo sforzo e la velocità di deformazione.

## 2.4 Equazione costitutiva per fluidi newtoniani

La relazione tra lo sforzo agente su una massa fluida e il tasso di deformazione è l'equazione costitutiva di un fluido. In un fluido a riposo lo sforzo ha solo le componenti normali alla superficie, ed è indipendente dall'orientazione delle stesse. Ciò vuol dire che il tensore è invariante rispetto a rotazioni del sistema di riferimento. In questo caso si parla di tensore isotropo. Un tensore isotropo del secondo ordine è proporzionale alla delta di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$



Lo sforzo in un fluido a riposo si esprime come

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.9)$$

dove la costante di proporzionalità  $p$  è la pressione termodinamica. Il segno negativo nella formula serve a definire positive le tensioni e negative le compressioni.

In un fluido in movimento lo sforzo è determinato, oltre che dal termine di pressione, anche da un termine che descrive l'attrito interno al fluido dovuto al moto di regioni diverse a velocità differenti, detto sforzo viscoso e indicato con  $\sigma'_{ij}$ . Il tensore dello sforzo totale si esprime come:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2.10)$$

Si assume che  $p$  indichi ancora la pressione termodinamica, sebbene quest'ultima sia definita in stati di equilibrio termodinamico. Un fluido in movimento non è in stato di equilibrio, ma quest'assunzione è ancora valida nell'ipotesi che il tempo di rilassamento, ovvero il tempo necessario al passaggio da uno stato di equilibrio ad un altro attraverso processi di diffusione molecolare sia molto inferiore rispetto ai tempi di scala del flusso. In un fluido viscoso, lo sforzo viscoso è funzione del gradiente di velocità  $\partial v_i / \partial x_j$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.11)$$

In particolare, la parte antisimmetrica del gradiente di velocità rappresenta le rotazioni senza deformazione, che non generano sforzo nella massa fluida, per cui lo sforzo viscoso è in relazione alla parte simmetrica di questo tensore, che definisce la velocità di deformazione o *strain rate*:

$$\dot{\epsilon}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.12)$$

Nel caso di fluidi newtoniani, la relazione tra  $\sigma'_{ij}$  e tasso di deformazione  $\dot{\epsilon}_{ij}$  è lineare

$$\sigma'_{ij} = K_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.13)$$

dove  $K_{ijkl}$  è il tensore della viscosità, con 81 componenti, attraverso le quali è possibile descrivere la relazione tra ciascuna componente dello sforzo viscoso e le nove componenti dello *strain rate*. Nell'ipotesi di fluido newtoniano isotropo, la suddetta relazione è indipendente dalle rotazioni del sistema di riferimento. L'isotropia di un tensore del quarto ordine si esprime attraverso una combinazione lineare di prodotti della delta di Kronecker, dunque il tensore  $K_{ijkl}$  assume la forma

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk} \quad (2.14)$$

Dalla simmetria del tensore degli sforzi, si ricava la simmetria del tensore della viscosità, che comporta  $\gamma = \eta$ .

Lo sforzo viscoso risulta:

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} \quad (2.15)$$

e lo sforzo totale:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} \quad (2.16)$$

dove  $\dot{\epsilon}_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v}$  è la velocità del cambiamento di volume. È possibile definire il coefficiente di viscosità di volume  $\zeta$

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\eta \quad (2.17)$$

Il suo significato risulta chiaro ricavando la pressione dall'espressione 2.10, che nel caso  $i=j$  si scrive come

$$\sigma_{ii} = -3p + (2\eta + 3\lambda)\dot{\epsilon}_{kk} \quad (2.18)$$

La pressione è

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} + \left(\frac{2}{3}\eta + \lambda\right)\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.19)$$

dove si è sostituito il termine  $\dot{\epsilon}_{kk}$  con la divergenza del vettore velocità. Definendo la pressione media  $\bar{p}$  come segue

$$\bar{p} \equiv -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad (2.20)$$

si ottiene

$$p - \bar{p} = \left(\frac{2}{3}\eta + \lambda\right)\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.21)$$

Il coefficiente di proporzionalità tra la differenza tra la pressione termodinamica e quella media e la velocità di variazione volumetrica è  $\zeta$ . In molti casi, risulta applicabile l'assunzione di Stokes per cui il valore di  $\zeta$  è nullo. Da ciò si ricava

$$\sigma_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3}\eta\nabla \cdot \mathbf{v}\right)\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.22)$$

In un fluido incompressibile, il termine  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  si annulla, e lo sforzo viscoso si riduce a

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.23)$$

mentre lo sforzo totale risulta

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.24)$$

## 2.5 Equazione del moto per fluidi newtoniani

L'equazione del moto per i fluidi newtoniani è ottenuta sostituendo l'equazione costitutiva per un fluido newtoniano nell'equazione di Cauchy:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2\eta \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{2}{3}\eta v_{j,j} \delta_{ij} \right] \quad (2.25)$$

L'equazione precedente è detta equazione di Navier- Stokes. Assumendo di trascurare le variazioni della viscosità  $\eta$  all'interno del fluido, l'equazione diventa

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + 2\eta \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x_i} v_{j,j} \quad (2.26)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \left[ \nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} v_{j,j} \right] \quad (2.27)$$

Per un fluido incompressibile, l'equazione si semplifica ulteriormente

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \nabla^2 v_i \quad (2.28)$$

Nei modelli presentati in questo lavoro viene risolta analiticamente l'equazione del moto per un fluido newtoniano, omogeneo e isotropo, nell'ipotesi che sia incompressibile. Ulteriori semplificazioni sono adottate: si considera un flusso stazionario, per cui la derivata rispetto al tempo si annulla; si assume trascurabile la variazione di pressione lungo il flusso; si assume che il moto avvenga lungo la direzione  $x$  del sistema di riferimento e che le variazioni della velocità  $v_x$  lungo la  $x$  siano trascurabili rispetto alle variazioni con le coordinate  $y$  (coordinata orizzontale) e  $z$  (profondità).

Con tali approssimazioni, la componente  $x$  dell'equazione si semplifica nella forma:

$$\eta \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (2.29)$$

Le condizioni al contorno che completano la 2.29 nella descrizione di un flusso in un condotto rettangolare sono le condizioni di aderenza alle pareti e l'annullamento delle componenti del gradiente di velocità al centro del condotto, come mostrato più in dettaglio nel paragrafo 5.1.

## 2.6 Compressibilità della lava

La lava contiene delle bolle di gas, che la rendono un mezzo comprimibile, cioè la sua densità  $\rho$  dovrebbe essere espressa come funzione di  $p$  secondo l'equazione di stato:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0)] \quad (2.30)$$

dove  $\rho_0$  è la densità alla pressione atmosferica  $p_0$  e  $\beta$  la compressibilità. La componente  $z$  dell'equazione del moto per un fluido incompressibile è:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \cos \alpha = 0 \quad (2.31)$$

Sostituendo la 2.30 nella 2.31, si ha la soluzione

$$p(z) = p_0 + \frac{1}{\beta} \left[ e^{\beta \rho_0 g (h-z) \cos \alpha} - 1 \right] \quad (2.32)$$

La densità diventa

$$\rho = \rho_0 e^{[\beta \rho_0 g (h-z) \cos \alpha]} \quad (2.33)$$

Dall'equazione precedente si ricava che la densità della lava è sensibile alle variazioni di pressione se  $h > h_c$ , dove  $h_c$  è la scala di lunghezza della compressibilità:

$$h_c = (\beta \rho_0 g \cos \alpha)^{-1} \quad (2.34)$$

Considerando  $\rho_0 \approx 3000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$  e  $\cos \alpha \approx 1$ , si calcola  $h_c \approx 30 \text{ m}$ . Eccetto il caso dei duomi di lava, la dimensione verticale di un flusso di lava è limitata ad alcuni metri, per cui è ragionevole accettare l'approssimazione di fluido incompressibile nel presente lavoro [Dragoni *et al.*, 1995].

# Capitolo 3

## Processi termici

### 3.1 La temperatura

La temperatura della lava è un parametro fondamentale, in quanto influisce sulle proprietà fisiche, sulle proprietà reologiche, sul grado di polimerizzazione del fuso silicatico, sul tasso di formazione e crescita dei cristalli [Pinkerton, 1993]. Le temperature di effusione della lava sono comprese nell'intervallo di fusione, cioè l'intervallo che ha come estremo inferiore la temperatura alla quale termina il processo di solidificazione nella fase di raffreddamento, indicata con  $T_s$  (solidus), e come estremo superiore quel valore di temperatura in corrispondenza del quale si completa il processo di fusione nella fase di riscaldamento, indicato con  $T_l$  (liquidus). L'ampiezza dell'intervallo è di 150 – 200 °C e i valori dei suoi estremi variano a seconda della composizione e della pressione [Dragoni, 1993].

### 3.2 Meccanismi di trasferimento del calore

I processi di trasferimento del calore sono tre: conduzione, convezione e irraggiamento.

La conduzione è un processo di trasferimento di energia interna da una regione ad un'altra di un corpo, qualora esista tra esse un gradiente di temperatura, o tra due corpi a differenti temperature, posti a contatto tra loro. Tale meccanismo avviene per effetto delle collisioni molecolari: è un processo diffusivo in cui le molecole, soggette ad agitazione termica, trasmettono la loro energia cinetica ad altre molecole nelle collisioni con esse, estendendo il moto vibratorio da un volume caldo ad uno freddo del mezzo cui appartengono.

La legge fondamentale per il trasporto conduttivo di calore è la legge di Fourier:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (3.1)$$

Tale legge esprime il flusso di calore  $\mathbf{q}$  per unità di superficie e di tempo in funzione del gradiente di temperatura. La costante di proporzionalità tra le due grandezze è  $k$ , detta conducibilità termica, parametro che indica la capacità di un mezzo di condurre calore tra molecole adiacenti in un corpo. Essa dipende dalla composizione chimica del materiale, dalla fase (liquida, solida o gassosa), dalla pressione e dalla temperatura e si misura in  $\text{W } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ m}^{-1}$ . Per un liquido, la dipendenza della conducibilità dalla pressione può essere trascurata, mentre risulta di notevole importanza la dipendenza dalla temperatura. Il segno meno nella formula significa che il flusso di calore è diretto in verso opposto alla direzione delle temperature crescenti, poiché il calore passa dalla zona più calda a quella più fredda del mezzo.

Il processo di trasferimento di calore per convezione avviene quando un fluido presenta differenze di densità da una regione all'altra del volume che occupa: se elementi di fluido più densi sono posti più in alto di elementi meno densi, l'instabilità gravitazionale produce lo spostamento dei primi verso il basso e dei secondi verso l'alto, dando origine ad un circuito che prende il nome di cella convettiva. Se la causa del gradiente di densità è una differenza di temperatura nelle diverse regioni del fluido, si parla di convezione termica. A livello microscopico, il trasferimento di energia tra molecole di fluido adiacenti è dovuto alla conduzione, mentre l'energia termica è trasportata da una regione all'altra dello spazio mediante lo spostamento del fluido stesso. Può essere interessante studiare come il calore sia trasmesso da una superficie solida ad un mezzo fluido convettivo. Il fluido ha una componente della velocità nella direzione parallela alla superficie di interfaccia variabile da un valore minimo (nullo sulla parete), ad uno massimo, cioè quel valore di regime, in corrispondenza del quale si assume il fluido inviscido, (ovvero con viscosità nulla). La regione all'interno della quale sono riscontrabili questi effetti della viscosità del fluido è definita come strato limite. Se il moto del fluido in questa regione è laminare, cioè caratterizzato dallo scorrimento relativo di strati di fluido adiacenti, il processo di trasferimento di calore si riduce al caso conduttivo, mentre se il moto è turbolento, c'è una mescolanza del fluido nella direzione perpendicolare al flusso, con un incremento del trasporto del calore nella direzione perpendicolare alla superficie.

L'irraggiamento consiste nel trasporto di calore da parte della radiazione elettromagnetica emessa da un corpo. La legge di Stefan - Boltzmann esprime il flusso di calore  $q$  generato per irraggiamento in funzione della quarta

potenza della temperatura  $T$ :

$$q = -E\Sigma T^4 \quad (3.2)$$

dove  $\Sigma$  è la costante di Stefan,  $E$  è l'emissività, costante compresa tra 0 e 1, corrispondente al rapporto tra il calore emesso attraverso la superficie del corpo considerato e quello emesso da un corpo nero alla stessa temperatura.

### 3.3 Equazione del calore in un fluido

L'equazione conduttiva del calore in un fluido si esprime come:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + H \quad (3.3)$$

dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante,  $\mathbf{q}$  è la densità di flusso di calore,  $H$  è l'insieme delle eventuali sorgenti di calore. Introducendo nella 3.3 la legge di Fourier 3.1 e assumendo  $k$  costante, l'equazione precedente diventa

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + H \quad (3.4)$$

Le variazioni della temperatura nell'unità di tempo e volume sono dunque dovute alla conduzione (primo addendo nel membro di destra della 3.3), ai termini viscosi (secondo addendo), alle sorgenti di calore, come può essere la produzione di calore latente di solidificazione, nel caso del raffreddamento di un fluido che subisca transizione di fase.

Nell'equazione precedente si assume che non avvengano processi convettivi all'interno del fluido.

### 3.4 Processi termici in un flusso di lava

I processi termici hanno un ruolo fondamentale sull'evoluzione di un flusso lavico. Molti sono i meccanismi che concorrono a determinare la temperatura della lava: la conduzione alle pareti ed al suolo, la conduzione e convezione in atmosfera, l'irraggiamento in atmosfera, la produzione di calore latente di solidificazione, la dissipazione viscosa. Descrivere l'insieme di questi meccanismi con metodi analitici è un problema complesso.

Di seguito viene riportata l'equazione del calore in un fluido con alcune semplificazioni adoperate nell'applicazione ad un flusso di lava. Nel caso di flusso stazionario, si trascura la derivata parziale della temperatura rispetto al tempo, ed il primo membro della 3.3 può essere valutato come segue:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} \approx \rho c_p v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \approx 10^5 \text{ J m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.5)$$

assumendo  $\rho \approx 3000 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_p \approx 1 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x_i} \approx 0.1 - 0.5 \text{ K m}^{-1}$ .

Una stima del termine di dissipazione viscosa è la seguente:

$$\sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \approx \eta \left( \frac{\bar{v}}{h} \right)^2 \approx 10^3 \text{ J m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.6)$$

avendo usato  $\bar{v} \approx 1 \text{ m s}^{-1}$  come velocità media,  $h \approx 3 \text{ m}$  come spessore del flusso e  $\eta \approx 10^4 \text{ Pa s}$  come viscosità, mentre il termine dovuto al calore latente di solidificazione è:

$$\rho L \frac{d\phi}{dt} \approx 10^3 \text{ J m}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.7)$$

avendo usato  $L \approx 4 \cdot 10^5 \text{ J kg}^{-1}$  come calore latente di solidificazione per unità di massa e  $\phi \approx 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  come grado di cristallizzazione.

Dalle stime sopra riportate, risulta che i termini di dissipazione viscosa e di produzione di calore interna al fluido possono essere trascurati.

Nei modelli esposti in questo lavoro è utilizzata l'equazione 3.3, privata dei suddetti termini e applicata inizialmente ad un mezzo immobile, per cui l'equazione assume la forma:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (3.8)$$

Si ipotizzano variazioni di temperatura solo lungo la direzione verticale del mezzo, trascurando le variazioni nelle altre due direzioni (si pensi ad un semispazio con condizione al contorno assegnata alla superficie), così da poter riscrivere la 3.6 come:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

Il problema sarà corredato delle opportune condizioni al contorno, a seconda dei processi che si vogliono includere nell'analisi. Un problema semplicemente conduttivo è descritto mediante la condizione di temperatura assegnata alla superficie di interfaccia tra il mezzo conduttivo e l'ambiente esterno (l'atmosfera).

Applicando la derivata parziale in  $z$  all'equazione 3.9, e considerando la legge di Fourier 3.1, si ottiene l'equazione nell'incognita  $q$ , densità di flusso di calore, nella forma:

$$\rho c_p \frac{\partial q}{\partial t} = k \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

Nel caso si assegni sulla superficie superiore del fluido una densità di flusso di calore, è possibile scegliere un valore opportuno tale da descrivere non solo il contributo conduttivo, ma quello di radiazione e convezione in atmosfera. Nell'applicare la soluzione della 3.9 ad un flusso di lava stazionario,



si può sostituire il tempo con il rapporto tra spazio e velocità, in modo da esprimere la temperatura non più come funzione di  $t$  e  $z$ , ma delle sole coordinate spaziali.

Nei Capitoli 5 e 6 saranno esposti due diversi modelli termici, e saranno spiegate le scelte delle ipotesi formulate, differenti a seconda del fenomeno che si vuole studiare.

# Capitolo 4

## Reologia delle colate di lava

La reologia studia la risposta di un corpo alla sollecitazione ad opera di sforzi, in termini di deformazione (in un solido) e velocità di deformazione (in un fluido).

Lo studio dei fenomeni vulcanici non può prescindere dalle considerazioni reologiche del materiale lavico, in quanto, assieme alle condizioni dinamiche e agli effetti termici, esse contribuiscono a determinare l'evolversi dei fenomeni vulcanici.

Nel paragrafo seguente sono esposte sinteticamente alcune caratteristiche della lava, utili per comprendere quanto complesso ed eterogeneo sia questo materiale. Di seguito sono riportati dei cenni ad alcuni semplici modelli reologici e sono spiegate le approssimazioni adottate per poter descrivere la complessità della lava attraverso di essi.

### 4.1 Che cosa è la lava

La lava è un sistema eterogeneo multifase, in cui coesistono fase liquida, solida e gassosa. Le percentuali variabili in cui sono presenti le tre fasi sono determinate dalle condizioni chimiche (composizione) e fisiche (temperatura e pressione) del sistema. Generalmente la fase liquida è prevalente ed ha composizione silicatica [*Dragoni, 1993, Kilburn, 1993*].

La composizione della lava viene dedotta mediante le analisi chimiche effettuate su campioni di rocce ignee. I risultati delle analisi sono espressi in termini di presenza di ossidi, cioè composti di metalli e non metalli con l'ossigeno, che è l'elemento più abbondante. Le diverse composizioni delle rocce sono determinate dalle percentuali differenti con cui ciascun composto è presente nel campione. L'ossido prevalente nelle rocce ignee è la silice,  $SiO_2$ , la cui percentuale in peso permette la classificazione delle rocce in: acide (76 -

66 %, es. rioliti), intermedie (66 - 52 %, es. andesiti), basiche (52 - 45 %, es. basalti).

A causa dell'agitazione termica, la posizione dei gruppi ionici nel fluido lavico non è fissa, come in un cristallo, ma il modo in cui si combinano gli atomi presenta sistematicità: il silicio  $\text{Si}^{4+}$ , con quattro elettroni di valenza, posizionato centralmente in una struttura tetraedrica, lega quattro atomi di ossigeno  $\text{O}^{2-}$ , posti nei vertici. Ciascun ossigeno ha ancora un elettrone di valenza libero per poter creare un ulteriore legame: esso lega altri atomi di silicio, formando così delle catene di tetraedri. Questo è il processo di polimerizzazione che dà vita a strutture complesse all'interno del fluido. Il silicio può essere sostituito in questo ruolo di costruttore di struttura da altri ioni con elevata forza di legame, come  $\text{B}^{3+}$ ,  $\text{P}^{5+}$ ,  $\text{Al}^{3+}$ . Se il liquido contiene cationi metallici ( $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ), questi tendono a legarsi con l'ossigeno e generano legami ionici più deboli con esso, riducendo il grado di polimerizzazione del sistema.

L'analisi di campioni di rocce ignee permette di rilevare la presenza di bolle rimaste intrappolate nella struttura solida, senza tener conto però dei fenomeni di essoluzione che avvengono durante il raffreddamento.

## 4.2 Fluidi newtoniani e non newtoniani

L'equazione costitutiva di un fluido viscoso è la relazione tra lo sforzo viscoso  $\sigma_{ij}$  e la velocità di deformazione  $\dot{\epsilon}_{ij}$

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}) \quad (4.1)$$

D'ora in avanti lo sforzo totale sarà espresso esplicitamente come somma dello sforzo viscoso e del termine di pressione, per cui lo sforzo viscoso sarà per semplicità indicato omettendo l'apice. Se la funzione  $f$  esprime una relazione lineare, il fluido è newtoniano. Nelle ulteriori ipotesi di fluido isotropo e incompressibile, la 4.1 risulta

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.2)$$

Se il flusso avviene lungo una direzione fissata, si riscrive la formula omettendo gli indici

$$\sigma = 2\eta\dot{\epsilon} \quad (4.3)$$

La viscosità è definita come il rapporto tra lo sforzo e la velocità di deformazione. Nel caso di un fluido newtoniano essa assume un valore costante al variare della velocità di deformazione. In un grafico di  $\sigma$  in funzione di  $\dot{\epsilon}$  il fluido newtoniano è rappresentato da una retta passante per l'origine, il cui

coefficiente angolare è la viscosità.

L'equazione costitutiva dei fluidi newtoniani è un caso particolare di una relazione che descrive una maggiore varietà di fluidi, ovvero la seguente

$$\sigma = \sigma_0 + \eta_p \dot{\varepsilon}^n \quad (4.4)$$

dove  $\sigma_0$ ,  $\eta_p$  ed  $n$  sono costanti.

Nel caso in cui  $\sigma_0$  sia nullo, la relazione dello sforzo dal tasso di deformazione secondo legge di potenza definisce un fluido pseudoplastico se  $n < 1$  ed un fluido dilatante se  $n > 1$ . Il rapporto tra  $\sigma$  e  $\dot{\varepsilon}$  non è costante: esso dunque anziché definire un valore univoco, definisce la viscosità apparente, funzione decrescente della velocità di deformazione in un fluido pseudoplastico, e funzione crescente in un fluido dilatante. In entrambi i casi, in un grafico di  $\sigma$  in funzione di  $\dot{\varepsilon}$  la viscosità è la tangente alla curva.

Nel caso invece in cui  $\sigma_0$  sia non nullo, ed  $n$  assuma valore unitario, si parla di fluido di Bingham. Il significato del termine  $\sigma_0$  è quello di una soglia nel dominio degli sforzi, per cui la struttura del fluido è in grado di resistere indeformata agli effetti degli sforzi applicati, se inferiori alla soglia.

I modelli reologici con legge di potenza e la reologia di Bingham vengono ampiamente utilizzati nel descrivere il comportamento lavico. L'applicazione di questi modelli allo studio delle colate spiega alcune evidenze, come lo sviluppo di regioni di fluido indeformate, in superficie e agli argini del flusso (il *plug*).

### 4.3 Solido elastico e plastico

Finora sono stati brevemente illustrati alcuni modelli di comportamento reologico per i fluidi. Poiché nel lavoro si analizza anche il comportamento della crosta che si forma a causa del raffreddamento sulla superficie del flusso, è opportuno esporre sinteticamente quali sono i modelli reologici utilizzati nel descrivere i corpi solidi.

L'equazione costitutiva di un solido consiste nella relazione tra sforzo e deformazione, quest'ultima definita mediante il tensore:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.5)$$

In un corpo elastico, la deformazione prodotta da uno sforzo è reversibile, cioè è recuperata al termine della sollecitazione. Se lo sforzo è una funzione ad un solo valore della deformazione, ovvero

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (4.6)$$

si definisce un corpo perfettamente elastico. In esso la deformazione causata dall'azione dello sforzo si annulla al termine della sollecitazione seguendo la stessa curva descritta dall'equazione 4.6 e rilasciando tutta l'energia immagazzinata durante l'applicazione del carico. Un caso particolare della precedente è il solido di Hooke, descritto nel caso unidimensionale dalla relazione lineare:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon \quad (4.7)$$

dove gli indici sono stati omissi considerando il moto in una direzione e la costante di proporzionalità  $\mu$  è definita come la rigidità.

Un corpo elastico risponde ad un aumento dello sforzo con un aumento della deformazione, fino al raggiungimento di un limite di elasticità, ovvero un valore dello sforzo in corrispondenza del quale la struttura del mezzo cede dando luogo a fenomeni di frattura o scorrimento duttile. Il meccanismo favorito è quello che richiede lo sforzo minore nelle particolari condizioni chimico-fisiche cui il materiale è sottoposto. A seconda del meccanismo prevalente tra i due si definisce un comportamento elastico fragile o duttile.

Un mezzo è definito plastico quando la sua struttura è in grado di impedire la deformazione per valori di sforzo applicato inferiori alla soglia, mentre si deforma indefinitamente per valori superiori ad essa.

Il comportamento reologico di un mezzo è fortemente connesso alle condizioni fisiche cui è sottoposto. Pressione e temperatura determinano, ad esempio, il fatto che in un mezzo si verifichi un comportamento fragile piuttosto che duttile, laddove entrambi sono possibili: le rocce della litosfera terrestre mostrano ambedue i comportamenti, a seconda delle condizioni fisiche e della scala temporale di osservazione.

## 4.4 L'influenza della temperatura sulla reologia

Il comportamento reologico di un fluido ha una forte dipendenza dalla temperatura. La temperatura influenza molteplici aspetti della struttura interna del mezzo, come la sua composizione, la nucleazione di cristalli, la formazione di bolle, l'essoluzione di volatili. In tal modo, non solo essa definisce degli intervalli di validità di un dato comportamento reologico adottato dal fluido, ma determina delle variazioni nei parametri che compaiono nella sua equazione costitutiva.

In particolare, la viscosità dipende fortemente dalla temperatura. La viscosità è una proprietà fondamentale nella dinamica di processi vulcanici sia intrusivi che effusivi, in diverse fasi, dalla differenziazione alla risalita e fuoriuscita magmatica. Al di sopra del *liquidus*, la relazione tra viscosità e

temperatura è espressa dalla legge di Arrhenius:

$$\eta(T) = \eta_0 e^{E/(RT)} \quad (4.8)$$

dove  $\eta$  è la viscosità,  $\eta_0$  una costante,  $E$  l'energia di attivazione per un fluido viscoso,  $R$  la costante dei gas. I parametri  $\eta_0$  ed  $E$  dipendono dalla composizione.

L'equazione di Shaw (1969) propone la seguente espressione per la dipendenza della viscosità dalla temperatura, quando questa è al di sotto del *liquidus*:

$$\eta(T) = \eta_l e^{a(T_l - T)} \quad (4.9)$$

dove  $\eta_l$  è la viscosità della lava alla temperatura  $T_l$ , mentre  $a$  è un parametro dipendente dalla composizione del fluido, dal contenuto di cristalli, dalla velocità di raffreddamento e di deformazione, i cui valori variano tra 0.02 e 0.10 °K<sup>-1</sup>.

In analogia alla viscosità apparente, anche per lo sforzo di soglia si assume una dipendenza esponenziale dalla temperatura, del tipo:

$$\sigma_{0l}(T) = \sigma_{0l} e^{b(T_l - T)} \quad (4.10)$$

dove  $\sigma_{0l}$  è lo sforzo di soglia alla temperatura  $T_l$ , mentre  $b$  è un parametro che misura la sensibilità di  $\sigma_0$  da  $T$ .

La viscosità dipende non solo dalla temperatura, ma da molti fattori, quali la presenza di bolle, la concentrazione e la dimensione dei cristalli, la composizione. Negli ultimi anni molteplici studi composizionali sono stati realizzati attraverso procedimenti sperimentali. Giordano e Dingwell (2003, 2008) elaborano un modello sulla base di più di 1770 misure di viscosità effettuate su campioni di rocce silicatiche, per studiarne la dipendenza dalla temperatura e dalla composizione, al di sotto del liquidus. La legge utilizzata per interpolare i dati esprime la viscosità in funzione della temperatura nel caso in cui non sia applicabile la legge di Arrhenius (al di sotto del liquidus), ed è la equazione di Tammann- Vogel- Fulcher (TVF):

$$\log_{10}\eta(T) = A + B/(T - C) \quad (4.11)$$

dove  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono tre parametri. Il parametro  $A$  fornisce il limite della viscosità per temperature molto elevate. Da studi sperimentali, si ricava un valore di  $A$  costante al variare della composizione: i fluidi silicatici presentano una forte dissociazione per temperature ben superiori al liquidus, tale per cui la viscosità risulta indipendente dalla composizione. Il valore di  $A$  ottenuto dai dati nel limite  $T_s/T \rightarrow 0$  è  $\eta_{T \rightarrow \infty} = 10^{-5}$  Pa s. I parametri  $B$  e  $C$

contengono la dipendenza dalla composizione del fuso silicatico, secondo le seguenti espressioni:

$$B = \sum_{i=1}^7 [b_i M_i] + \sum_{j=1}^3 [b_{1j} (M_{11j} \cdot M_{21j})] \quad (4.12)$$

$$C = \sum_{i=1}^6 [c_i N_i] + [c_{11} (N_{111} \cdot N_{211})] \quad (4.13)$$

dove i coefficienti  $M$  ed  $N$  indicano le concentrazioni molari percentuali di determinati ossidi e  $b_i$ ,  $b_{1j}$ ,  $c_i$  e  $c_{11}$  sono i coefficienti individuati sperimentalmente.

## 4.5 Applicazioni al fluido lavico

In questo lavoro, la lava è descritta come un fluido newtoniano. Sebbene si tratti di una forte semplificazione, l'assunzione newtoniana permette di descrivere il comportamento del flusso lavico nelle fasi iniziali della messa in posto, nelle regioni prossime alla bocca eruttiva. La soluzione dell'equazione del moto per un fluido newtoniano, con le ulteriori semplificazioni di omogeneità e isotropia, descrive ragionevolmente la dinamica complessiva del flusso di lava, pur ignorando le molteplici eterogeneità presenti nel fluido. Maggiori dettagli sull'utilità e sui limiti dell'assunzione newtoniana saranno discussi nel paragrafo 5.1, mentre nel capitolo 8 sarà fornito un approccio di tipo sperimentale al problema della determinazione della reologia della lava. Un'ulteriore ipotesi di lavoro consiste nel trascurare le variazioni delle proprietà fisiche della lava con la temperatura, in particolare, della viscosità. La viscosità può variare anche di diversi ordini di grandezza nell'intervallo di fusione della lava, ma le sue variazioni sono confinate entro uno strato superficiale sottile, così da non influenzare la dinamica complessiva del fluido. Nei due modelli esposti in questo lavoro, si studia lo sviluppo della crosta e la sua resistenza agli sforzi applicati, per cui è necessario chiarire anche quali assunzioni reologiche sono utilizzate nell'analisi della fase solida. Nel primo modello si assumerà che la crosta presenti una reologia di tipo plastico, ovvero sia in grado di opporsi agli effetti degli sforzi applicati, quando inferiori alla soglia di plasticità. Sarà dunque definito lo sforzo di soglia  $\tau(T)$ , per il quale si ipotizza una relazione di decrescita esponenziale con la temperatura, analogamente a quanto visto nel caso dello sforzo di soglia di Bingham. Nel secondo modello, si assume una reologia elastica, e si studiano gli effetti di fratturazione della crosta nel raggiungimento dei limiti di elasticità nel caso di sforzi tensili e di taglio.

L'utilizzo di modelli reologici differenti per descrivere la crosta recentemente

formata è sostenuto dal fatto che si tengono in conto condizioni termiche diverse. Nel primo modello i processi termici considerati producono un raffreddamento più lento che nel secondo caso, in cui è compreso anche il contributo delle pareti laterali.



# Capitolo 5

## Meccanismi di formazione dei tubi di lava: primo modello

### 5.1 Riassunto

Nei flussi di lava si osserva spesso la presenza di una crosta solida nella regione centrale, mentre nelle zone laterali, la superficie è costituita da lava incandescente e da frammenti solidi. Sotto opportune condizioni, la crosta può accrescere lateralmente, estendendosi nelle zone prossime agli argini, fino a congiungersi con essi.

Nel presente capitolo viene esposto un modello analitico che propone una spiegazione alla formazione della crosta ed alla sua evoluzione, nel passaggio dalla fase in cui è limitata lateralmente a quella in cui si unisce agli argini generando il tetto stazionario di un tubo. Il fluido è assunto newtoniano, il moto stazionario e laminare avviene in un condotto rettangolare, su un terreno dalla pendenza fissata. Il profilo della temperatura nel flusso è ricavato ipotizzando che la lava sia un mezzo conduttivo che raffredda per convezione e radiazione in atmosfera. Questi due meccanismi termici sono considerati quelli predominanti nel segmento limitato di flusso esaminato nel modello, ed il loro effetto congiunto è descritto attraverso l'applicazione di una densità di flusso di calore superficiale costante alla superficie superiore del fluido. Il contributo dei termini avvevativi dipendenti dalla coordinata verticale è incluso nello studio dei processi termici, introducendo nell'espressione della temperatura la velocità, calcolata come media lungo la coordinata orizzontale  $y$ . Si trascura l'effetto della presenza degli argini sull'evoluzione termica del flusso. Al fine di comprendere come la crosta sia limitata lateralmente nella regione centrale del canale, è necessaria un'analisi del suo comportamento reologico. La formazione solida è descritta come un corpo plastico, la cui soglia di plasticità è una funzione della temperatura, indicata come  $\tau(T)$ . Laddove la resistenza  $\tau$  della crosta supera lo sforzo di taglio applicato, la crosta può

saldarsi, in caso contrario subisce disgregazione, come nelle zone laterali del canale, dove lo sforzo di taglio raggiunge i valori più elevati.

Le variazioni di alcuni fattori possono incidere sui valori dello sforzo di taglio, in modo tale da favorire l'allargamento crostale, fino alla formazione del tubo. Quelli esaminati nel lavoro sono la variazione di larghezza del canale, di pendenza del suolo e il tasso di effusione.

Il risultato fondamentale del modello è quello di determinare i processi fisici che concorrono alla formazione della crosta e del tetto del tubo mediante uno dei meccanismi osservati. Il principale responsabile è individuato nello sforzo esercitato dal flusso.

L'analisi delle variazioni di alcuni parametri caratteristici del flusso permette di individuare gli intervalli di valori degli stessi che favoriscono la formazione del tubo.

## 5.2 Introduzione

Il moto del fluido è descritto attraverso la soluzione analitica all'equazione 2-D di Navier- Stokes per un fluido newtoniano, omogeneo e isotropo, che scorre in un condotto rettangolare su pendenza del suolo fissata. Il moto è stazionario e laminare.

Il modello termico tiene conto dei processi di convezione ed irraggiamento in atmosfera. L'espressione della temperatura è ricavata dalla soluzione dell'equazione del calore 3.10 per un semispazio conduttivo, con flusso di calore assegnato in superficie all'istante iniziale. L'introduzione di una velocità media nella larghezza del flusso permette di includere l'effetto dell'avvezione sul profilo di temperatura.

Il processo di raffreddamento genera uno strato crostale uniforme lungo la larghezza del canale. Si assume che la crosta appena formata abbia un comportamento duttile, con una soglia di plasticità decrescente esponenzialmente dalla temperatura. Il superamento dello sforzo di soglia  $\tau$  da parte dello sforzo di taglio ne produce la frammentazione. Ciò spiega perché la crosta non si estenda fino agli argini del canale, ma abbia una larghezza limitata dalla presenza di regioni laterali caratterizzate da elevati valori dello sforzo di taglio.

## 5.3 Modello dinamico

Si considera un fluido newtoniano, isotropo, incompressibile, omogeneo che scorre in un canale rettangolare con dimensioni  $a$  e  $h$  su un terreno dalla pendenza costante  $\alpha$ . Si assume che il flusso, stazionario e laminare, avvenga

lungo la direzione  $x$ .

La viscosità  $\eta$  è assunta costante ed omogenea, ovvero si trascurano le variazioni di  $\eta$  con la temperatura. Si tratta di una notevole semplificazione dei reali flussi di lava, considerata la forte dipendenza delle proprietà reologiche dalla temperatura. Si tiene conto tuttavia del fatto che le forti variazioni termiche, corrispondenti ad elevati valori della componente  $\partial\eta/\partial z$  del gradiente della viscosità, sono confinate in uno strato superficiale sottile (pochi centimetri) [Dragoni, 1989], mentre il nucleo del fluido può essere considerato a temperatura uniforme, fin tanto che il flusso è alimentato da nuova lava, come mostrato da alcune osservazioni e misure sul campo. Le variazioni di viscosità dunque influenzano la dinamica complessiva del flusso in maniera trascurabile.

L'approssimazione di flusso sottile permette di trascurare l'effetto della compressibilità dovuta alla presenza di bolle [Dragoni et al., 1995], e di assumere la densità costante.

Facendo riferimento al sistema di coordinate in Fig. 5.1, si considera

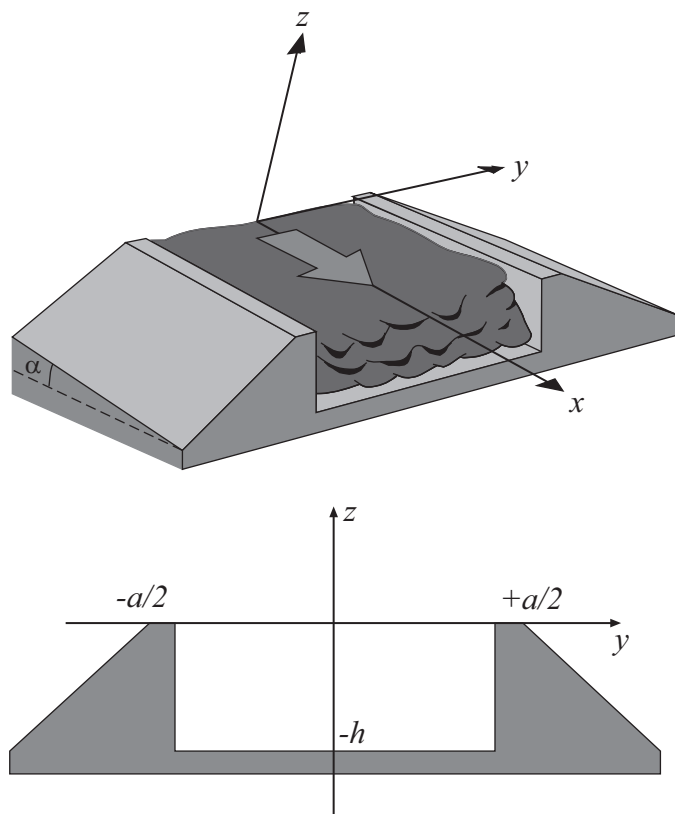


Figura 5.1: Schema del modello e sistema di coordinate.

l'equazione di Navier- Stokes 2.29 nel dominio di dimensioni  $a$  e  $2h$ , qui riportata per chiarezza,

$$\eta \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g \sin \alpha = 0 \quad (5.1)$$

corredata dalle condizioni al contorno di aderenza lungo il perimetro del dominio

$$v_x(y, \pm h) = 0 \quad (5.2)$$

$$v_x(\pm a/2, z) = 0 \quad (5.3)$$

e di componenti del gradiente di velocità nulle al centro, per ragioni di simmetria

$$\frac{\partial v_x(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial v_x(0,0)}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

La soluzione [Tallarico e Dragoni, 1999] è ricavata per analogia all'equazione che descrive la torsione in un condotto rettangolare [Timoshenko e Goodier, 1951]:

$$v_x(y, z) = \frac{16h^2 \rho g \sin \alpha}{\pi^3 \eta} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y/2h)}{\cosh(n\pi a/4h)} \right] \cos \frac{n\pi z}{2h} \quad (5.5)$$

La funzione  $v_x$  ha il suo massimo in  $y = 0, z = 0$ .

$$\hat{v}_x = h^2 \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} \left[ 1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \operatorname{sech} \frac{n\pi a}{4h} \right] \quad (5.6)$$

Le componenti non nulle dello sforzo di taglio sono calcolate della relazione costitutiva per fluidi newtoniani

$$\sigma_{xy}(y, z) = -\frac{8h}{\pi^2} \rho g \sin \alpha \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{(n-1)/2} \frac{\sinh(n\pi y/2h)}{\cosh(n\pi a/4h)} \cos \frac{n\pi z}{2h} \quad (5.7)$$

$$\sigma_{xz}(y, z) = -\frac{8h}{\pi^2} \rho g \sin \alpha \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y/2h)}{\cosh(n\pi a/4h)} \right] \sin \frac{n\pi z}{2h} \quad (5.8)$$

Mentre la soluzione nell'intero dominio è valida in un condotto rettangolare, la soluzione limitata alla metà inferiore di esso (spessore  $h$ ) fornisce la velocità ed il campo di sforzi in un canale aperto. Sulla superficie libera del canale lo sforzo di taglio  $\sigma_{xz}$  si annulla. La Fig. 5.2 mostra le isolinee della velocità normalizzate rispetto al suo valore massimo  $\hat{v}_x$  e quelle dello sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$ , in una sezione del canale. In Fig. 5.3 è riportato l'andamento dello sforzo superficiale, in modulo. Il suo valore massimo è raggiunto agli argini.

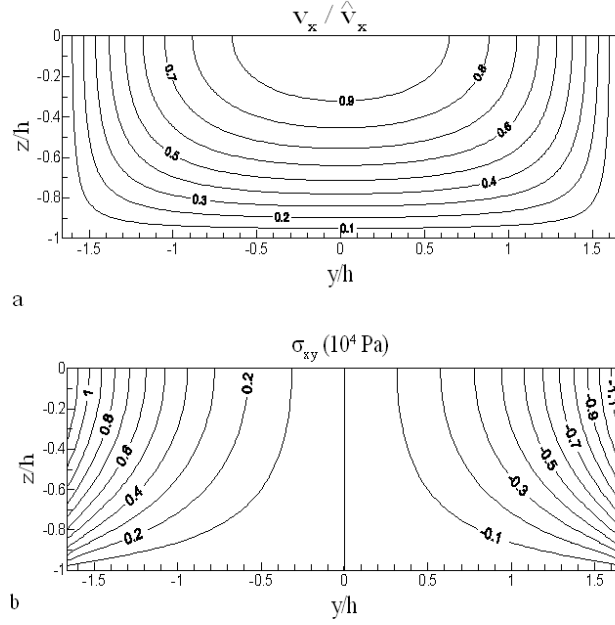


Figura 5.2: (a) Velocità del flusso  $v_x/\hat{v}_x$  e (b) sforzo viscoso  $\sigma_{xy}$  in una sezione del canale. I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a$  e  $h$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

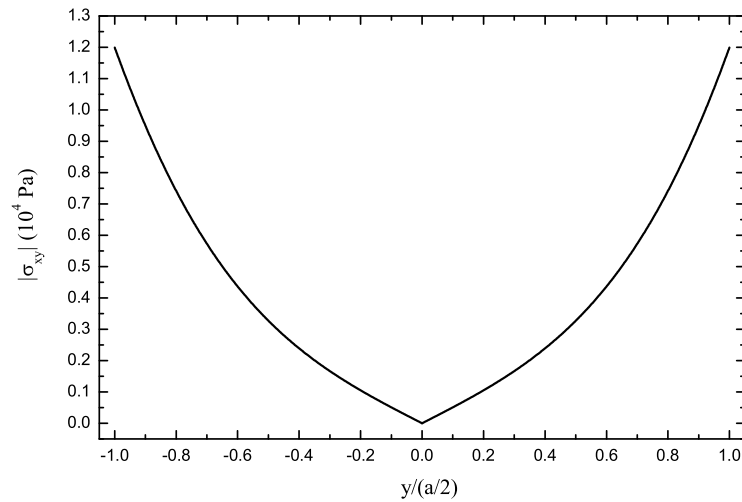


Figura 5.3: Sforzo viscoso superficiale  $\sigma_{xy}$  (in modulo) in funzione della larghezza del flusso. I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a$  e  $h$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

## 5.4 Modello termico

Nel modello si assume che la lava abbia una temperatura iniziale  $T_0$  uniforme, e si descrive il raffreddamento mediante una densità di flusso di calore  $q$  costante dalla superficie superiore del flusso verso l'atmosfera. Il flusso di calore  $q$  rappresenta la somma dei contributi al raffreddamento dei processi di radiazione e convezione in atmosfera, considerati i processi dominanti alla superficie del flusso, sulla base di rilevazioni sperimentali [Harris et al., 2005]. Il valore di  $q$  è una stima del flusso di calore medio efficace, dovuto ai suddetti processi, relativo al contributo della superficie ricoperta da crosta e di quella libera, il cui valore è assunto sulla base di alcune misure dirette (i valori dei parametri usati nel modello sono riportati in Tabella 5.1 e 5.2). Limitatamente al segmento della lunghezza del canale studiato e all'intervallo di temperature analizzate dal modello, l'approssimazione ad un valore costante di  $q$  è accettabile. Sono trascurati gli altri processi termici. Si descrive il raffreddamento di un semispazio ( $z < 0$ ) con flusso di calore assegnato in superficie, risolvendo la seguente equazione [Turcotte e Schubert, 1982]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \quad (5.9)$$

dove  $q$  è il flusso di calore applicato alla superficie a partire dall'istante iniziale e  $\chi$  la diffusività termica. Le condizioni iniziali e al contorno sono:

$$q(z < 0, t = 0) = 0 \quad (5.10)$$

$$q(z = 0, t > 0) = q_0 \quad (5.11)$$

$$q(z \rightarrow -\infty, t > 0) = 0 \quad (5.12)$$

La soluzione, espressa nella variabile di similarità  $\zeta = z/2\sqrt{\chi t}$ , è:

$$q(\zeta) = q_0 \operatorname{erfc} \zeta \quad (5.13)$$

Sostituendo in essa la legge di Fourier e assumendo la temperatura  $T_0$  inizialmente uniforme nel semispazio, si ricava l'espressione per la temperatura

$$T(z, t) = T_0 - \frac{2q_0}{k} \left[ \sqrt{\frac{\chi t}{\pi}} e^{\frac{-z^2}{4\chi t}} + \frac{z}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{-z}{2\sqrt{\chi t}} \right) \right] \quad (5.14)$$

Nell'intento di descrivere un flusso stazionario, la variabile temporale è sostituita da

$$t = \frac{x}{\bar{v}(z)} \quad (5.15)$$

dove  $\bar{v}$  è un valore medio per  $v_x$ , ottenuto integrando l'equazione 5.5 su  $y$  da  $-a/2$  a  $+a/2$

$$\bar{v}(z) = \frac{32h^2}{a\pi^3} \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \left[ \frac{a}{2} - \frac{2h}{n\pi} \tanh \frac{na\pi}{4h} \right] \cos \frac{n\pi z}{2h} \quad (5.16)$$

In questo modo si tiene conto dell'influenza dei termini avvevativi dipendenti dalla coordinata verticale  $z$  sul bilancio termico, mentre si trascurano gli effetti del raffreddamento dovuto alla presenza delle pareti laterali. Quest'ultima assunzione è valida quando si analizzino canali larghi, in cui gli effetti delle pareti sul bilancio termico siano ragionevolmente ininfluenti sui processi alla superficie. L'espressione della temperatura risulta

$$T(z, x) = T_0 - \frac{2q_0}{k} \left[ \sqrt{\frac{\chi x}{\pi \bar{v}}} e^{-\frac{z^2 \bar{v}(z)}{4\chi x}} + \frac{z}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{-z}{2} \sqrt{\frac{\bar{v}}{\chi x}} \right) \right] \quad (5.17)$$

In superficie si ha:

$$T(0, x) = T_0 - \frac{2q_0}{k} \sqrt{\frac{\chi x}{\pi \bar{v}}} \quad (5.18)$$

$$\bar{v}(0) = \frac{32h^2}{a\pi^3} \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \left( \frac{a}{2} - \frac{2h}{n\pi} \tanh \frac{na\pi}{4h} \right) \quad (5.19)$$

La Fig. 5.4 mostra il profilo della temperatura superficiale per il canale aperto lungo la coordinata  $x$ . L'utilizzo di una reologia newtoniana, invece di una pseudo-plastica o binghamiana, produce una sovrastima della velocità. Ad ogni modo, tale sovrastima non inficia considerevolmente lo spessore della crosta, limitato a pochi centimetri, né la presenza di due zone laterali, con alti valori dello sforzo.

## 5.5 La formazione della crosta

Quando viene raggiunta la temperatura  $T_s$ , si forma uno strato crostale. Esso è presente uniformemente lungo l'intera larghezza del canale, in quanto sono state trascurate le variazioni laterali della temperatura. Ciò che si osserva in natura è in realtà la presenza di crosta nella regione centrale del canale, avente larghezza a tratti costanti lungo la direzione del moto, e trascinata dal fluido sottostante. La superficie delle zone adiacenti agli argini laterali è occupata da frammenti solidi che si muovono trasportati dalla lava incandescente. Allo scopo di indagare e spiegare lo sviluppo non uniforme della crosta lungo la larghezza del canale, si assumono ipotesi reologiche e si effettua un'analisi sugli sforzi applicati alla crosta, reputando lo sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$  il fattore principalmente responsabile della frammentazione della parte

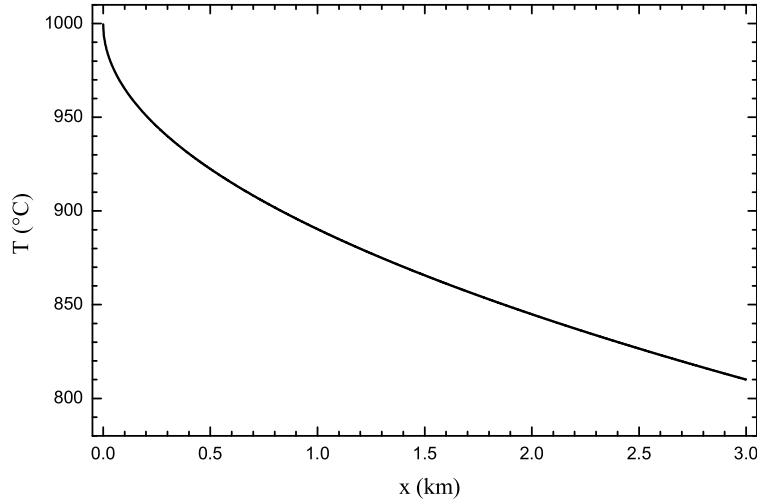


Figura 5.4: Temperatura superficiale  $T$  in funzione della distanza  $x$  dalla bocca eruttiva. I valori dei parametri del modello  $k$ ,  $\rho$ ,  $c_p$ , e  $q_0$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

solida nelle regioni laterali. La crosta è descritta come un corpo plastico, caratterizzato da una soglia di plasticità detta sforzo di soglia, una resistenza alla deformazione di taglio. Quando lo sforzo applicato alla crosta è minore della soglia, la struttura solida è in grado di resistere alla deformazione di taglio, così che i frammenti possono unirsi, mentre, quando è maggiore, la struttura della crosta collassa e permette il movimento di taglio.

Ciò che si vuole determinare nel modello è l'evoluzione della larghezza della crosta lungo la direzione del moto, dalla sua formazione, al suo accrescimento fino al raggiungimento di una larghezza costante. Dall'analisi termica si evince che lo spessore crostale resta limitato a pochi centimetri, entro le distanze dalla bocca eruttiva osservate nel modello, per cui si assume ragionevolmente che lo spessore abbia effetto trascurabile nel determinare la resistenza dello strato crostale e l'analisi sarà limitata a ciò che avviene in superficie.

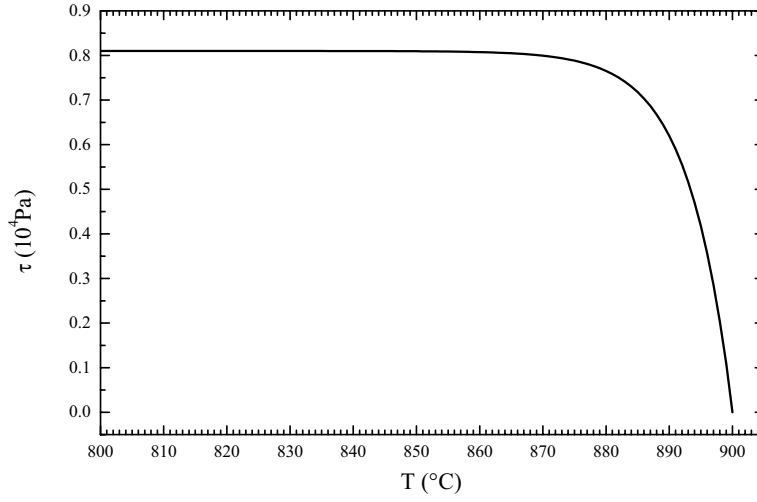
Lo sforzo di soglia è descritto come una funzione dipendente esponenzialmente dalla temperatura, in analogia con la viscosità e la soglia di Bingham:

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 \left[ 1 - e^{(T/T_s - 1)b} \right], & T \leq T_s \\ \tau = 0, & T > T_s \end{cases} \quad (5.20)$$

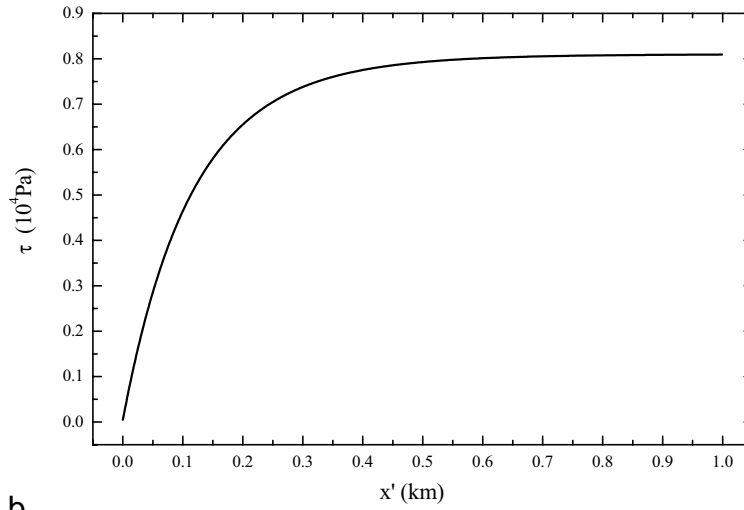
con opportuni valori dei parametri  $\tau_0$ ,  $b$ , e  $T_s$  riportati in Tabella 5.2. Lo sforzo di soglia può essere espresso in funzione della direzione del moto  $x$ ,



sostituendo l'equazione 5.18 nella 5.20. Volendo indagare lo sviluppo della crosta che si va formando alla superficie del canale, è utile adoperare un nuovo asse di riferimento orizzontale  $x'$ , con l'origine nel punto in cui in superficie si ha il raggiungimento della temperatura del solidus. La Fig. 5.5 mostra lo sforzo di soglia in funzione della temperatura  $T$  (a) ed in funzione della coordinata  $x'$  (b).



**a**



**b**

Figura 5.5: (a) Sforzo di soglia  $\tau$  in funzione della temperatura e (b) sforzo di soglia superficiale in funzione della distanza  $x'$ . I valori dei parametri del modello  $b$  e  $\tau_0$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

## 5.6 Lo sviluppo della crosta

La larghezza della crosta in superficie viene calcolata per ogni punto lungo la direzione del moto attraverso il confronto tra lo sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$  e la soglia di plasticità  $\tau$ . Come risultato, la crosta si sviluppa dapprima al centro del canale, poi si estende lateralmente al crescere di  $\tau$  con il diminuire della temperatura, fino a raggiungere una larghezza costante, quando  $\tau$  approssima il suo valore asintotico. Solitamente la crosta resta confinata al centro del canale, dove la soglia supera lo sforzo applicato, mentre le zone laterali sono caratterizzate dalla presenza di frammenti solidi e lava incandescente, a causa degli elevati valori di sforzo di taglio. In Fig 5.6 è riportata la frazione della larghezza del canale ricoperta da crosta, indicata con  $d/a$ , in funzione della direzione del moto  $x'$ . Sebbene la crosta ricopra buona parte della superficie del canale, essa non raggiunge gli argini.

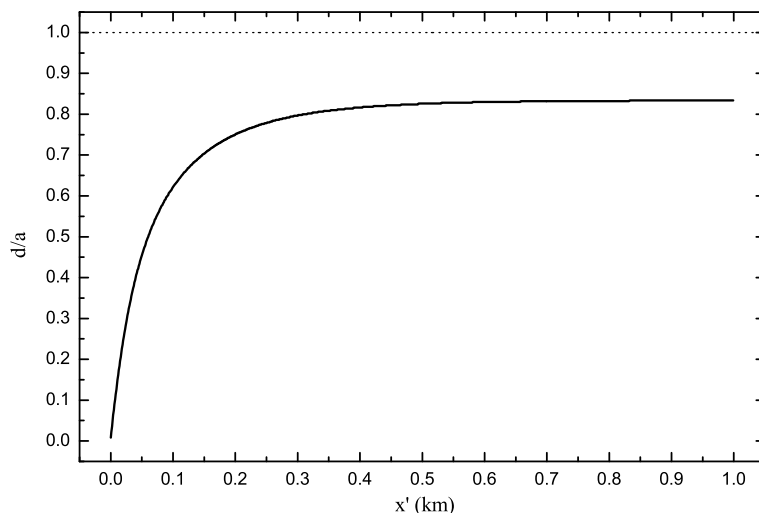


Figura 5.6: Frazione della larghezza del canale ricoperta da crosta superficiale in funzione della distanza  $x'$ ; la linea tratteggiata ( $d/a = 1$ ) rappresenta la condizione per la formazione del tubo. I valori dei parametri sono mostrati in Tabella 5.2.

## 5.7 Formazione dei tubi

Nelle colate laviche è molto frequente il passaggio da una crosta mobile trasportata dal fluido ad uno strato solido stazionario, che ricopre l'intera

larghezza del canale, è saldato agli argini e genera così il tetto di un tubo di lava.

Nel lavoro si spiega come la formazione del tetto sia possibile come conseguenza di variazioni specifiche della topografia locale o di alcuni parametri caratteristici del flusso. In particolare, sulla base delle osservazioni dirette all’Etna e di risultati di laboratorio, si indaga l’effetto delle variazioni della larghezza del canale, della portata e della pendenza del suolo, e si studia come questi parametri modificano, i valori dello sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$ , così che la crosta possa resistere alla sua azione anche nelle zone laterali.

## 5.8 Variazione della larghezza

Si analizzano dapprima le variazioni della larghezza del canale. Dati i parametri iniziali pari a quelli riportati in Tabella 5.2, si ipotizza che il flusso di lava possa variare la sua larghezza, ovvero che la sua estensione orizzontale possa gradualmente assecondare eventuali restringimenti topografici (restringimento del canale), o la presenza di bacini (allargamento). Nelle fasi iniziali della messa in posto di un flusso lavico è osservabile tale comportamento, e l’assunzione che il fluido sia newtoniano permette di descriverlo.

La portata

$$Q = \frac{\rho g \sin \alpha}{3\eta} a h^3 \left[ 1 - \frac{384}{\pi^5} \frac{h}{a} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi a}{4h} \right] \quad (5.21)$$

è assunta costante. Seppur forte, questa semplificazione risulta ragionevole, in quanto i tempi di formazione dei tubi sono molto minori della durata dei fenomeni eruttivi. Per supportare una portata costante, lo spessore del flusso varia in funzione delle variazioni della sua larghezza. La relazione tra  $h$  e  $a$  è trovata graficamente dall’equazione 5.21, e mostrata in Fig. 5.7, per valori di *aspect ratio*  $A \leq 1$  ( $A=h/a$ ). Al variare della sezione verticale del flusso, si hanno variazioni nel profilo di velocità e di sforzi all’interno di esso. In particolare, si osserva in Fig. 5.8 come il profilo della velocità superficiale si appiattisca per canali larghi, presentando dei massimi via via maggiori al restringersi della sezione. La Fig. 5.9 mostra il parametro  $\bar{v}$ , ovvero la velocità media in superficie, utilizzata nel modello termico. Essa ha una diminuzione al crescere della larghezza  $a$  del canale, a causa dell’effetto frenante del fondo sulla superficie, ma in canali stretti questo andamento è invertito a causa del freno costituito dalla presenza degli argini. Analogamente, lo sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$  assume valori massimi crescenti, al restringimento del canale (Fig. 5.10). Il grafico in Fig. 5.11 mostra la decrescita del massimo dello sforzo di taglio

in funzione della semilarghezza del canale, suggerendo che l'accrescimento crostale verso le zone laterali è favorito dall'allargamento del flusso.

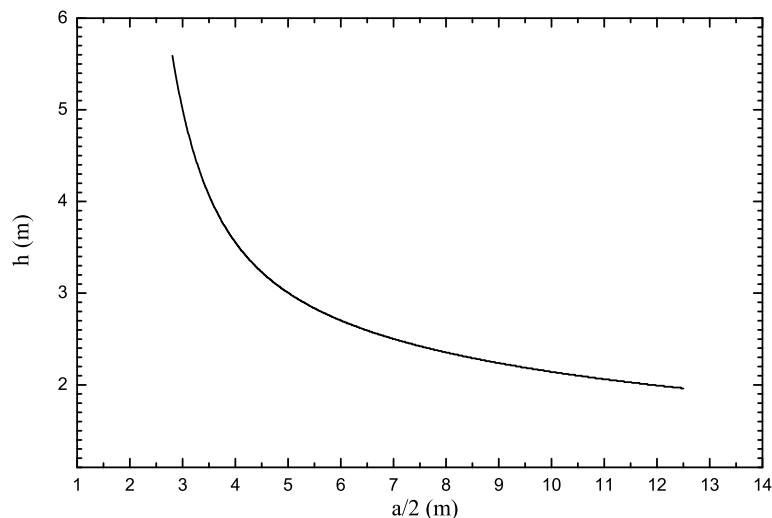


Figura 5.7: Spessore del flusso  $h$  in funzione della semilarghezza del canale  $a/2$ . I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  e  $\alpha$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

Mantenendo costanti i parametri iniziali del flusso, si fa variare la larghezza del canale, e conseguentemente il suo spessore, e si determina qual è, per quelle determinate dimensioni del flusso, la massima porzione della larghezza ricoperta dalla crosta, confrontando lo sforzo di taglio con il valore massimo della soglia  $\tau$ . Il risultato è mostrato in Fig. 5.12, dove si osserva una crescita crostale con l'allargamento del canale. La condizione che rende possibile la formazione del tubo consiste nel totale ricoprimento crostale della superficie del canale, quando cioè i valori dello sforzo applicato sono inferiori alla soglia di plasticità ovunque lungo la direzione  $y$ . Il raggiungimento di tale condizione ( $d/a = 1$ ) si ha in corrispondenza di  $a/2 = 11.8$  m. Il significato e l'affidabilità di questo risultato saranno discussi nel paragrafo 5.11.

Allo scopo di studiare gli effetti della pendenza sui risultati ottenuti, si ripete l'analisi immaginando che il flusso di lava si muova su terreni dalla pendenza differente, mantenendo invariati gli altri parametri. In Fig 5.13 (a) la curva continua è la medesima del caso inizialmente considerato ed è riportata assieme alle altre curve, calcolate per valori di  $\alpha$  differenti. Si osserva che le curve si allontanano dal valore  $d/a = 1$ , per valori via via crescenti della pendenza del suolo. Su terreni ripidi, lo sforzo di taglio assume valori più

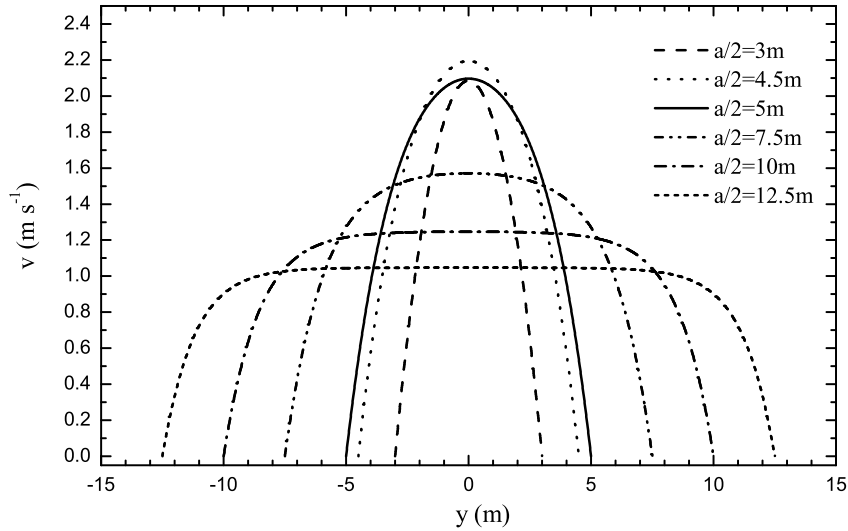


Figura 5.8: Velocità superficiale in funzione della coordinata orizzontale  $y$ , per diversi valori della larghezza del canale (in figura è indicata la semi-larghezza  $a/2$ ). I valori dei parametri del modello fissati sono mostrati in Tabella 5.2.

elevati, per cui la formazione del tubo è sfavorita. Considerato un terreno dalla pendenza di  $0.1$  rad, la condizione di formazione del tubo è sempre verificata, dati i parametri usati nel modello.

La Fig. 5.13 (b) mostra la parametrizzazione della curva  $d/a$  rispetto alla portata. La curva continua, calcolata con i valori iniziali, è riportata assieme alle altre, ottenute considerando portate differenti che alimentano flussi della medesima larghezza iniziale. Il risultato mostra come portate decrescenti permettano la formazione del tubo, anche su canali dalla ridotta dimensione laterale, a causa della riduzione dello sforzo di taglio.

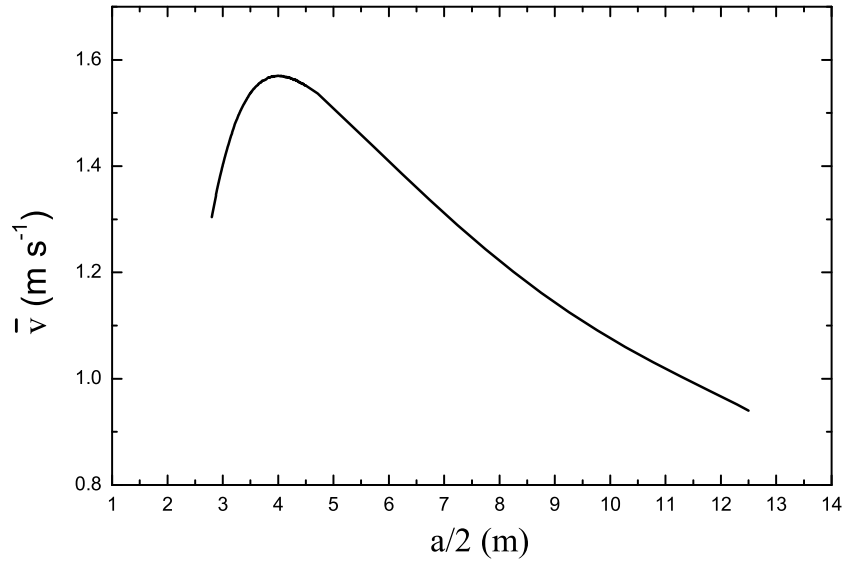


Figura 5.9: Parametro  $\bar{v}$  calcolato come media della velocità in  $y$ , in superficie, espressa in funzione della semilarghezza  $a/2$  del canale. I valori dei parametri del modello fissati sono mostrati in Tabella 5.2.

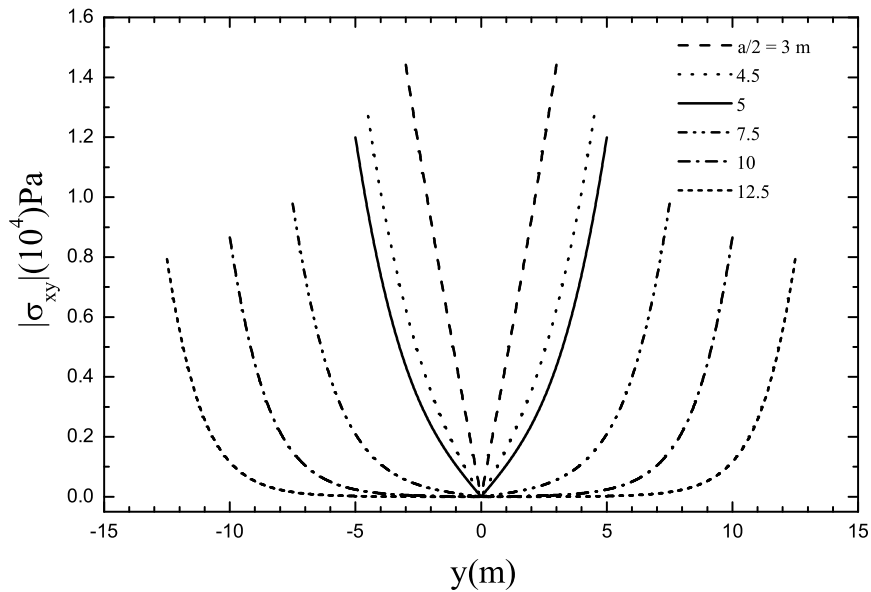


Figura 5.10: Sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$  superficiale (in modulo) in funzione della coordinata orizzontale  $y$ , per diversi valori della larghezza del canale (in figura è indicata la semilarghezza  $a/2$ ). I valori dei parametri del modello fissati sono mostrati in Tabella 5.2.

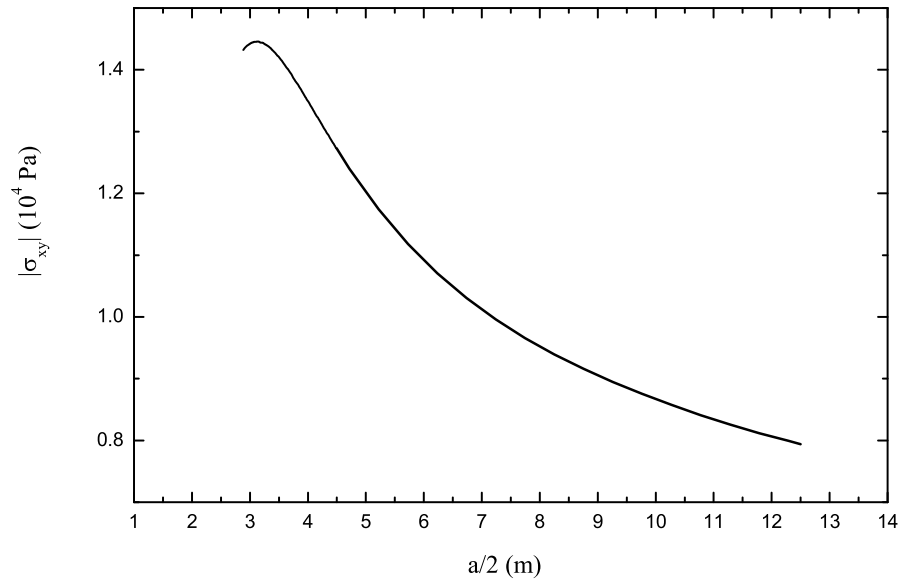


Figura 5.11: Sforzo viscoso  $\sigma_{xy}$  calcolato in  $z = 0$  e  $y = \pm a/2$  in funzione della semilarghezza del canale  $a/2$ . I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  e  $\alpha$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

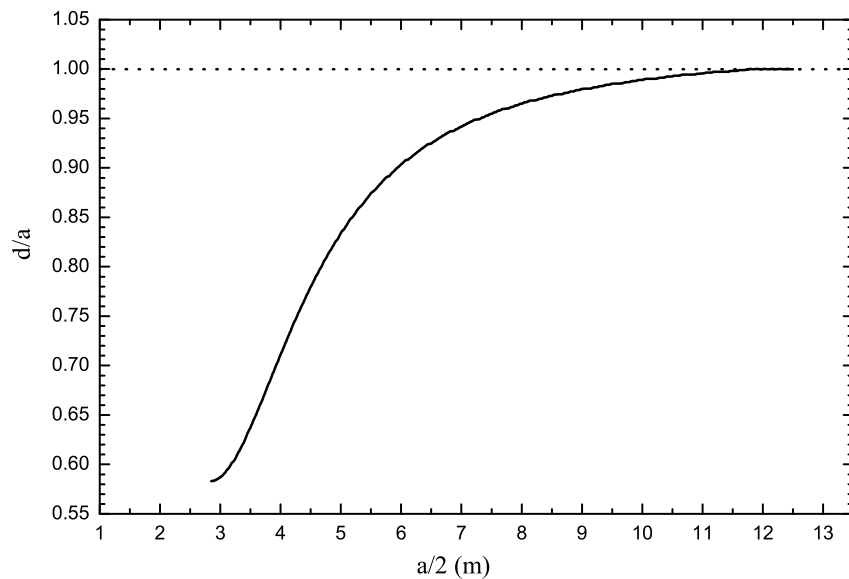
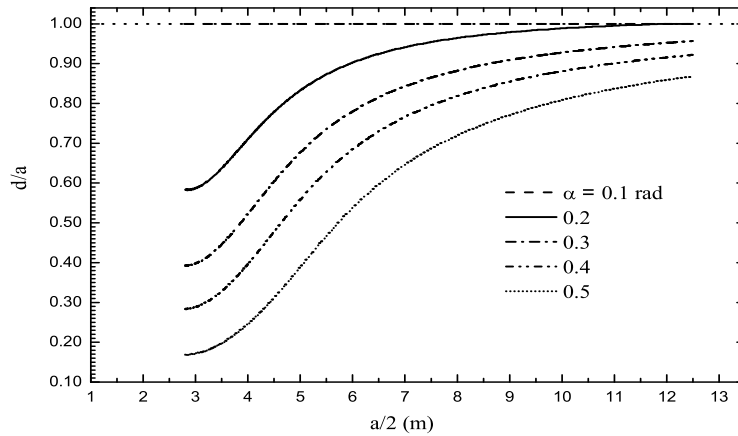
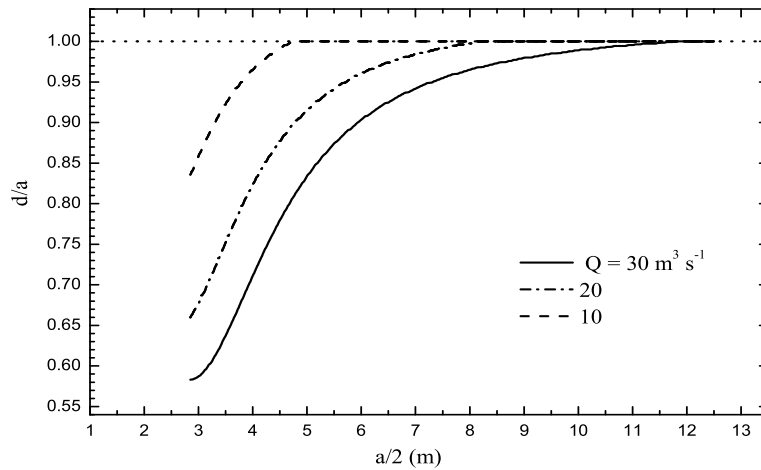


Figura 5.12: Larghezza massima della crosta superficiale  $d/a$  in funzione di  $a/2$ . La linea orizzontale tratteggiata si riferisce al caso  $d = a$ , cioè la condizione di formazione del tubo. I valori dei parametri fissati sono indicati in Tabella 5.2.





a



b

Figura 5.13: (a) Larghezza massima della crosta superficiale  $d/a$  in funzione di  $a/2$ , calcolata per diversi valori della pendenza  $\alpha$ , con un valore fissato dello spessore iniziale  $h$ . In Figura 5.13 (b), la stessa funzione è calcolata per diversi valori della portata  $Q$ , con un valore fissato della pendenza  $\alpha$ . La Tabella 5.2 contiene i valori dei parametri che sono mantenuti costanti. In entrambi i grafici, la curva continua è la stessa mostrata in Figura 5.12.

## 5.9 Variazione della pendenza

Il secondo fattore considerato è la variazione della pendenza del suolo. Si studia il caso di un flusso di lava che, conservando inalterata la sua larghezza, percorra un terreno dalla pendenza variabile. Al diminuire della pendenza, il flusso rallenta e lo spessore aumenta, con una corrispondente riduzione dello sforzo di taglio, come mostrato in Fig. 5.14. La frazione della larghezza del canale  $d/a$  ricoperta da crosta diminuisce all'aumentare della pendenza del terreno, e la condizione di formazione del tubo è raggiunta per valori di  $\alpha \leq 0.1$  rad (Fig. 5.15). Si ripete l'analisi considerando dei canali con diversa larghezza  $a$ , ma con il medesimo spessore iniziale. A ciascun flusso corrispondente alle curve mostrate in Fig. 5.16 (a) è assegnato un valore differente e costante della portata. Il flusso avanza lungo un terreno dalla pendenza variabile. Si ricava che lo sviluppo crostale è favorito, a parità di pendenza del suolo, in canali larghi, mentre la formazione del tubo è indipendente dalla larghezza. Ciò si spiega considerando che l'altezza dei canali corrispondenti alle diverse curve è inizialmente la medesima (è stata fissata la sezione del canale), per portate molto diverse (a causa dei diversi valori di  $a$ ). Al variare della pendenza, le variazioni nello spessore, che supportano una portata costante su ciascun flusso, sono minime, tali da non generare una differenza nello sforzo di taglio che è il fattore maggiormente responsabile dei processi qui analizzati.

Nella Fig. 5.16 (b), la dipendenza di  $d/a$  dall'angolo  $\alpha$  è parametrizzata in funzione della portata  $Q$ : al diminuire della portata, la riduzione dello sforzo di taglio rende la formazione del tubo possibile anche su terreni dalla pendenza più elevata rispetto al caso iniziale (curva continua).

Quando un fluido scorre su un terreno con una piccola inclinazione, il gradiente di pressione in direzione  $x$  diventa un fattore non più trascurabile nell'equazione del moto, e l'applicabilità del modello è ridotta.

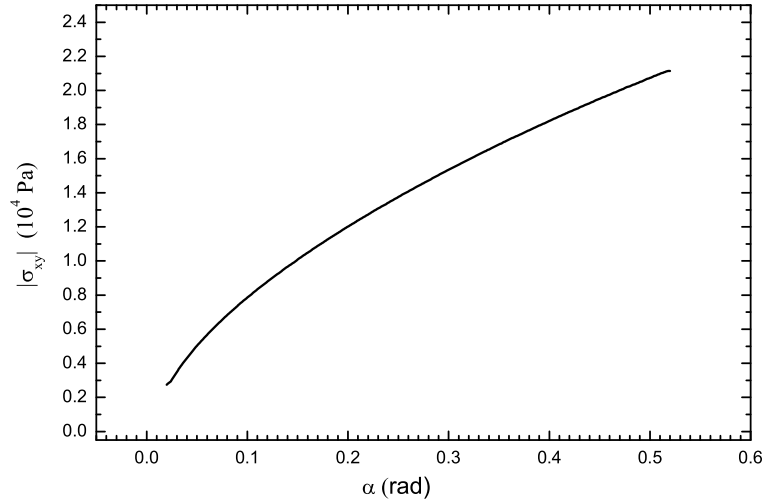


Figura 5.14: Sforzo viscoso  $\sigma_{xy}$  calcolato in  $z = 0$ ,  $y = \pm a/2$  in funzione della pendenza del suolo  $\alpha$ . I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$  e  $a$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

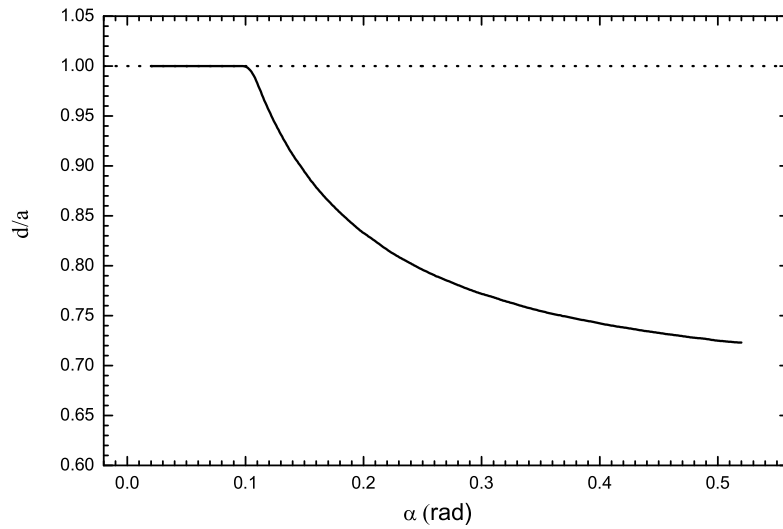
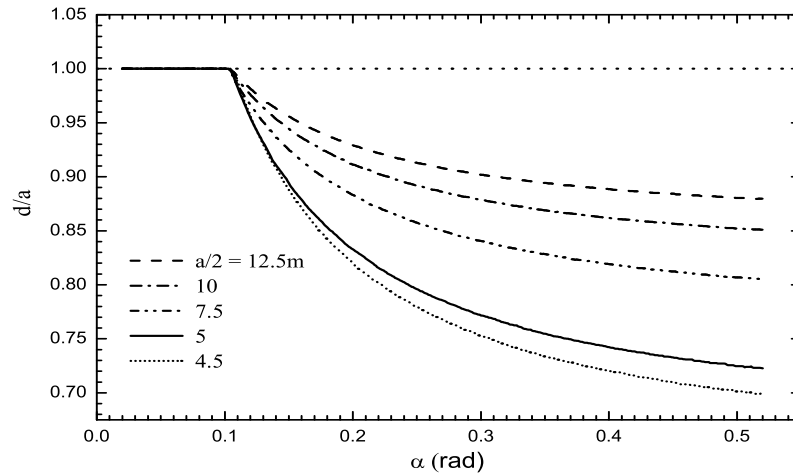
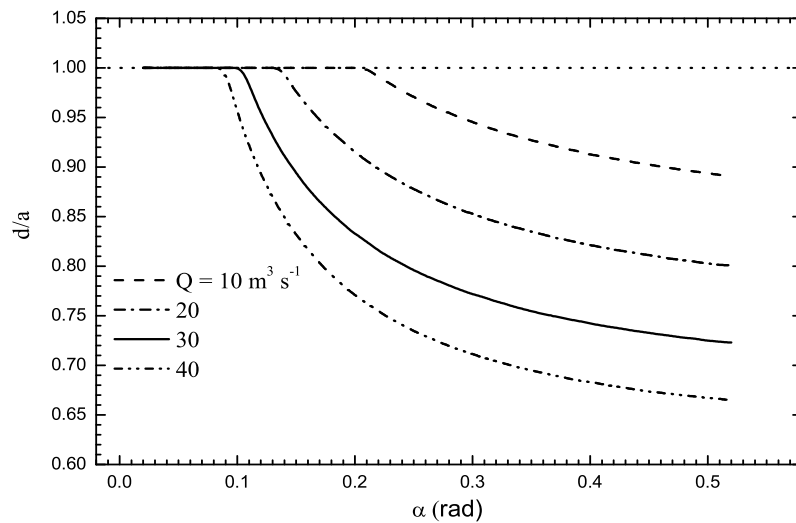


Figura 5.15: Larghezza massima della crosta superficiale  $d/a$  in funzione di  $\alpha$ . La linea orizzontale tratteggiata si riferisce al caso  $d = a$ , cioè la condizione di formazione del tubo. I valori dei parametri fissati sono indicati in Tabella 5.2.



**a**



**b**

Figura 5.16: (a) Larghezza massima della crosta superficiale  $d/a$  in funzione di  $\alpha$ , calcolata per diversi valori della larghezza  $a/2$ , con un valore fissato dello spessore iniziale  $h$ . In Figura 5.16 (b), la stessa funzione è calcolata per diversi valori della portata  $Q$ , con un valore fissato della semilarghezza  $a/2$ . La Tabella 5.2 contiene i valori dei parametri che sono mantenuti costanti. In entrambi i grafici, la curva continua è la stessa mostrata in Figura 5.15.

## 5.10 Variazione della portata

Si analizza infine l'effetto della portata sullo sviluppo della crosta. La Fig. 5.17 evidenzia come lo sforzo di taglio diminuisca con la portata, favorendo lo sviluppo crostale. Confrontando lo sforzo di taglio con la soglia di plasticità al variare della portata, si calcola la frazione della larghezza solidificata  $d/a$ , i cui valori sono riportati in Fig. 5.18. Si osserva che l'allargamento crostale è favorito da bassi tassi effusivi e la condizione di formazione del tubo è raggiunta per valori di portata di circa  $10 \text{ m s}^{-1}$ . Nella Fig. 5.19 la medesima analisi è effettuata mediante una parametrizzazione rispetto alla larghezza del canale (a) e alla pendenza del suolo (b). Supponendo che ciascun flusso rappresentato da una diversa curva in Fig. 5.19 (a) abbia sezione iniziale differente e fissata, si osserva che la condizione di formazione del tubo nei canali più larghi è possibile per valori più elevati della portata. Nel grafico (b) della Fig. 5.19 si osserva come portate maggiori di quella inizialmente considerata possano indurre la formazione del tubo, se si considerano flussi che percorrano terreni dalla pendenza ridotta.

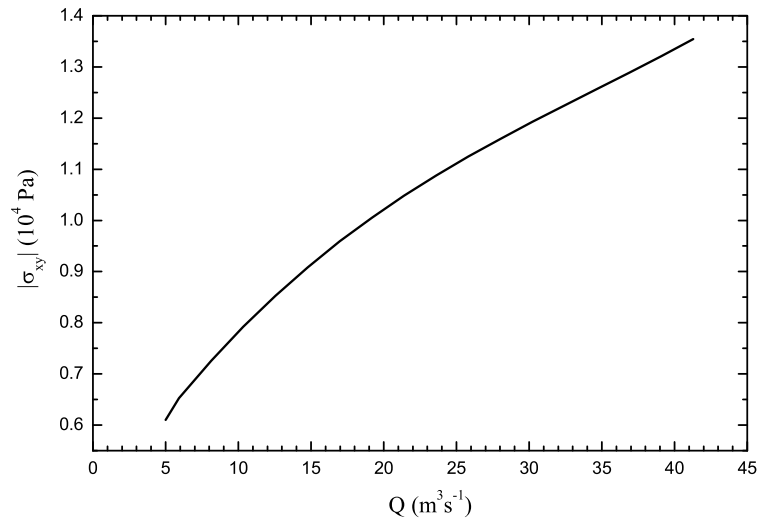


Figura 5.17: Sforzo viscoso  $\sigma_{xy}$  calcolato in  $z = 0$ ,  $y = \pm a/2$  in funzione della portata  $Q$ . I valori dei parametri  $g$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $a$  e  $\alpha$  sono fissati e mostrati in Tabella 5.2.

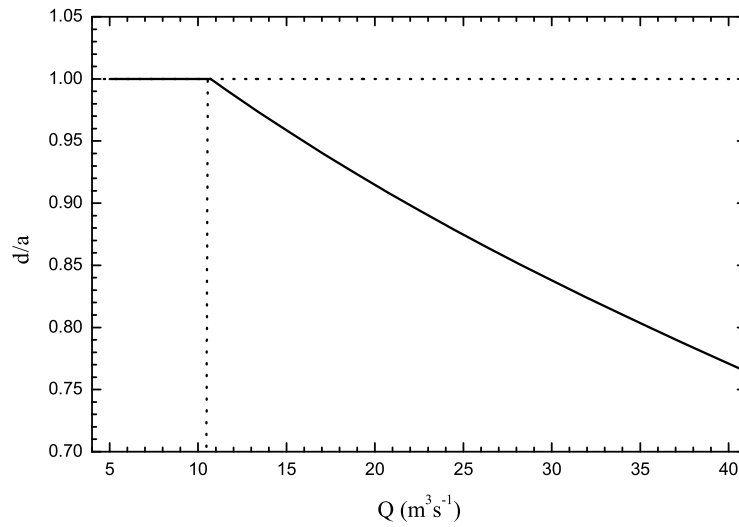


Figura 5.18: Larghezza massima della crosta superficiale  $d/a$  in funzione di  $Q$ . La linea orizzontale tratteggiata si riferisce al caso  $d = a$ , cioè la condizione di formazione del tubo. I valori dei parametri fissati sono indicati in Tabella 5.2.

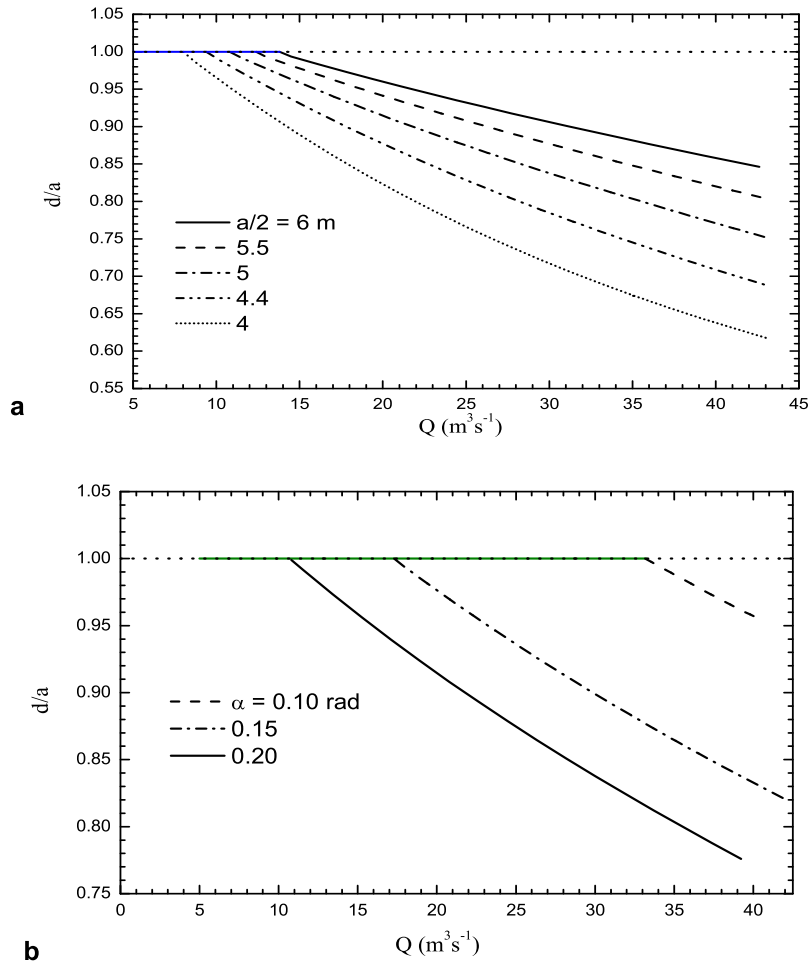


Figura 5.19: (a) Larghezza massima della crosta superficiale  $d/a$  in funzione di  $Q$ , calcolata per diversi valori della semilarghezza  $a/2$ , con un valore fissato dello spessore iniziale  $h$ . In Figura 5.19 (b), la stessa funzione è calcolata per diversi valori della pendenza  $\alpha$ , con un valore fissato della larghezza  $a$ . La Tabella 5.2 contiene i valori dei parametri che sono mantenuti costanti. In entrambi i grafici, la curva continua è la stessa mostrata in Figura 5.18.

## 5.11 Confronto con le osservazioni sperimentali

Numerosi autori [*Rowland e Walker*, 1990; *Kauahikaua et al.*, 1998; *Sakimoto e Gregg*, 2001; *Cashman et al.*, 2005] hanno suggerito, attraverso l'osservazione diretta, i metodi numerici e le indagini sperimentali, che i tubi di lava possono formarsi in condizioni di bassi tassi effusivi e pendenze del suolo ridotte. Il presente lavoro indaga l'effetto della variazione di alcuni parametri sulla dinamica del flusso e sugli sforzi in esso presenti, ed individua lo sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$  come maggiore responsabile dello sviluppo crostale e della possibile formazione del tubo. Il confronto dei risultati del modello con quanto accade nei flussi reali non è semplice, a causa della scarsità dei dati provenienti dall'osservazione sul campo, o dell'aspetto prevalentemente qualitativo delle osservazioni dirette. I risultati degli studi di laboratorio sono confrontabili qualitativamente con quelli del modello, ma non numericamente, perché effettuati su campioni di fluidi, che possono solo simulare il comportamento della lava, ma sono ben diversi da essa.

I risultati riguardanti la frazione di superficie ricoperta da crosta sono confrontati con alcune stime ricavate dalle analisi di fotografie aeree di flussi di lava. *Cashman et al.* (2005) confermano la crescita crostale nei casi di allargamento del canale e la riduzione della crosta nei casi di restringimento. La percentuale crostale  $d/a$  rispetto alla larghezza del canale viene stimata essere compresa tra 0.69 e 0.80 lungo un segmento di canale di ampiezza variabile, con un valore medio di 0.80 in corrispondenza della larghezza del flusso di 10 m. Nel caso di un flusso di lava del vulcano Pu'u 'O 'o (giugno, 1983), è stimato un valore medio di 0.8 per  $d/a$ . Il risultato del modello, visibile in Fig. 5.6 è compatibile con le suddette stime.

In maniera analoga, ovvero mediante la misura da fotografie (Figg. 5.20 e 5.21), si ottiene il valore medio di 0.72 per  $d/a$  relativamente ad un canale dell'Etna di larghezza pari a 3 m [*Harris et al.*, 2005].

Come riportato da *Cashman et al.* (2005) e come visibile nell'immagine in Fig. 5.22, in corrispondenza di un bacino di lava, la crosta subisce un notevole allargamento, ma non è osservata la formazione di tubi. Ciò può essere spiegato tenendo conto che la crosta appena formata è costituita da un sottile strato solido molto esteso orizzontalmente (la sua larghezza è molto maggiore del suo spessore), il quale può non essere in grado di autosostenere il proprio peso.

Nel caso del restringimento del canale, invece, il modello prevede la rottura della crosta. In natura sono osservati casi in cui delle piattaforme di crosta restano incastrate nel restringimento e si sviluppa un tetto nella direzione opposta al moto del fluido. La descrizione di tale meccanismo esula dalla competenza del presente modello.



Nel caso di variazione di pendenza, si osserva la rottura della crosta in corrispondenza di un aumento della pendenza del suolo (immagine in Fig. 5.23), mentre il meccanismo qui descritto è osservato sull'Etna per pendenze lievi [Calvari e Pinkerton, 1999]. A causa della mancanza di dati precisi, il confronto dei risultati circa la variazione della portata con i fenomeni reali può essere solo qualitativo: la formazione dei tubi si ha in corrispondenza di tassi di effusione ridotti [Greeley, 1971].

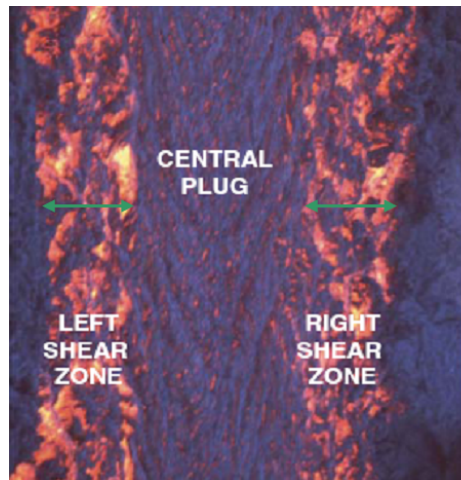


Figura 5.20: Formazione della crosta superficiale nella regione centrale di un flusso di lava (Harris, 2005), limitata lateralmente dalle zone ad elevati valori dello sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$ .



Figura 5.21: Flusso di lava con presenza di crosta nella regione centrale del canale (Harris, 2005).



Figura 5.22: Formazione della crosta sulla superficie di un bacino lavico sull'Etna (La Volpe, 2007).



Figura 5.23: Disgregazione della crosta superficiale in corrispondenza di una variazione della pendenza del suolo sull'Etna (La Volpe, 2007).

Tabella 5.1: Lista dei simboli usati nel Cap. 5.

Simbolo	Quantità	Unità
$\rho$	densità	$\text{Kg m}^{-3}$
$\eta$	viscosità	$\text{Pa s}$
$a$	larghezza del flusso	$\text{m}$
$h$	spessore del flusso	$\text{m}$
$A$	aspect ratio ( $h/a$ )	
$d$	larghezza della crosta	$\text{m}$
$d/a$	frazione della larghezza del flusso coperta da crosta	
$\alpha$	pendenza del suolo	$\text{rad}$
$g$	accelerazione di gravità	$\text{m s}^{-2}$
$Q$	portata	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$x$	direzione del moto	$\text{m}$
$x'$	asse nella direzione del moto ( $T(x' = 0, z = 0) = T_s$ )	$\text{m}$
$v_x$	componente $x$ della velocità	$\text{m s}^{-1}$
$\hat{v}_x$	massima velocità del flusso	$\text{m s}^{-1}$
$\bar{v}_x$	velocità media integrata su $y$	$\text{m s}^{-1}$
$\sigma_{ij}$	tensore degli sforzi	$\text{Pa}$
$c_p$	calore specifico a pressione costante	$\text{J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	conducibilità termica	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
$\chi$	diffusività termica	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$q_0$	densità di flusso di calore superficiale	$\text{W m}^{-2}$
$T$	temperatura	$\text{K}$
$T_0$	temperatura iniziale	$\text{K}$
$T_s$	temperatura del solidus	$\text{K}$
$t$	tempo	$\text{s}$
$\tau$	sforzo di soglia	$\text{Pa}$
$\tau_0$	valore asintotico dello sforzo di soglia	$\text{Pa}$
$b$	coefficiente esponenziale	

Tabella 5.2: Valori dei parametri del modello.

Parametro	Valore
$a$	10 m
$h$	3 m
$\alpha$	0.20 rad
$g$	9.8 $\text{m s}^{-2}$
$\rho$	2800 $\text{Kg m}^{-3}$
$Q$	30 $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$\eta$	10 <sup>4</sup> $\text{Pa s}$
$c_p$	837 $\text{J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	3 $\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
$q_0$	10 <sup>4</sup> $\text{W m}^{-2}$
$T_0$	1273 K
$T_s$	1173 K
$\tau_0$	8100 Pa
$b$	170

# Capitolo 6

## Meccanismi di formazione dei tubi di lava: secondo modello

### 6.1 Riassunto

Uno dei meccanismi osservati circa la formazione dei tubi di lava è la congiunzione di frammenti solidi presenti nella regione centrale della superficie del canale e la saldatura di questi con strati di lava solidificata sviluppatasi in prossimità degli argini. Il modello analitico esposto nel presente capitolo descrive la formazione della crosta sulla superficie di un canale in cui si tenga conto dell'effetto degli argini sul bilancio termico, indaga i fattori responsabili della sua frammentazione, individuando le condizioni cui lo strato solido deve soddisfare per poter resistere alla rottura. Nel modello dinamico si assume una reologia newtoniana, e si descrive il moto di un fluido che scorre in un condotto rettangolare, su un terreno dalla data pendenza. Il raffreddamento induce la formazione di blocchi solidi superficiali che rallentano il flusso ed aumentano lo sforzo di taglio  $\sigma_{xz}$  all'interfaccia tra il solido ed il fluido. Le variazioni della velocità e degli sforzi sono descritte analiticamente, utilizzando le funzioni relative al caso di canale aperto e tubo, opportunamente modificate.

La presenza degli argini incrementa i processi di raffreddamento e lo spessore crostale nelle zone laterali è tale da superare l'effetto disgregante dello sforzo di taglio  $\sigma_{xy}$  analizzato nel capitolo precedente. La distribuzione, seppur discontinua, di parti solide lungo tutta la larghezza del canale suggerisce l'utilizzo di un modello termico conduttivo, in cui si tenga conto anche dei processi di trasferimento di calore tra il flusso e le pareti laterali del canale attraverso i termini avvevivi. Si descrive così la formazione di blocchi solidi superficiali, con notevole ispessimento in prossimità degli argini del canale, e si utilizza una reologia elastica per descrivere questa configurazione crostale. La configurazione crostale risultante ha spessore variabile lungo la larghezza

del canale, minimo al centro e maggiore in prossimità degli argini laterali. Perché la crosta possa generare il tetto di un tubo, è necessario che soddisfichi due condizioni: che resista all'effetto dello sforzo di taglio dovuto al trascinarsi del fluido che scorre al di sotto di essa e che sia in grado di autosostenere il proprio peso. Utilizzando l'approssimazione della lamina elastica sottile, impernata alle estremità, si ottengono le espressioni analitiche degli sforzi agenti sulla crosta. Si determina il valore massimo che ciascuna componente dello sforzo, di taglio e tensile, assume alla base della crosta e lo si confronta con i rispettivi limiti di elasticità. Laddove le soglie di elasticità sono superate, il corpo subisce frammentazione. Quando la configurazione crostale è tale da resistere al taglio ed alla tensione, il tetto del tubo può formarsi e saldarsi. È così determinata la distanza dalla bocca eruttiva in corrispondenza della quale la crosta assume configurazione tale da resistere al taglio ed alla tensione in ogni punto della sua larghezza, ed il tetto del tubo può formarsi e consolidarsi.

## 6.2 Introduzione

Analogamente al modello precedente, il fluido è assunto newtoniano, omogeneo, isotropo e incompressibile. Il moto, laminare e stazionario, avviene in un condotto dalla sezione rettangolare, su pendenza del suolo fissata. Esso è descritto dalla soluzione analitica dell'equazione di Navier-Stokes 2-D.

I processi termici sono ricondotti al problema del semispazio conduttivo che raffredda dalla superficie di contatto con l'atmosfera, su cui è fissata la temperatura. La velocità in funzione delle coordinate  $y$  e  $z$  è introdotta nell'espressione della temperatura, permettendo di considerare l'effetto sul bilancio termico dei termini avvevativi, dipendenti sia dalla variazione della velocità con la profondità che dalla presenza degli argini. La superficie del flusso solidifica formando dei blocchi solidi, che agiscono rallentando il flusso e producendo un aumento dello sforzo  $\sigma_{xz}$  all'interfaccia tra il fluido e la crosta. La dinamica del fluido durante le fasi di solidificazione superficiale è descritta introducendo nelle funzioni analitiche la variazione della distanza  $z_0$  tra la superficie del fluido ed il piano in cui si annulla lo sforzo  $\sigma_{xz}$ . Perché possa formarsi il tubo, la crosta prodotta ad opera del raffreddamento deve resistere all'azione degli sforzi applicati.

## 6.3 Modello dinamico

La descrizione della dinamica del fluido nel secondo modello è analoga a quanto visto nel primo. Si considera il moto stazionario di un fluido newtoniano, omogeneo e isotropo, che scorre in un condotto rettangolare di

dimensioni  $a$  e  $h$  su un terreno dalla pendenza  $\alpha$ , con riferimento alla Fig. 5.1 per il sistema di coordinate. Il problema dinamico è descritto dall'equazione 5.1 con le condizioni al contorno 5.2- 5.4, e la soluzione è l'espressione della velocità 5.5, di seguito riportata per chiarezza:

$$v_x(y, z) = \frac{16h^2}{\pi^3} \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y/2h)}{\cosh(n\pi a/4h)} \right] \cos \frac{n\pi z}{2h} \quad (6.1)$$

Sono pure riportate le espressioni per le componenti non nulle del tensore degli sforzi, ricavate dalla velocità attraverso l'equazione costitutiva:

$$\sigma_{xy}(y, z) = -\frac{8h}{\pi^2} \rho g \sin \alpha \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{(n-1)/2} \frac{\sinh(n\pi y/2h)}{\cosh(n\pi a/4h)} \cos \frac{n\pi z}{2h} \quad (6.2)$$

$$\sigma_{xz}(y, z) = -\frac{8h}{\pi^2} \rho g \sin \alpha \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(n\pi y/2h)}{\cosh(n\pi a/4h)} \right] \sin \frac{n\pi z}{2h} \quad (6.3)$$

Durante i processi di raffreddamento, blocchi solidi si formano sulla superficie del flusso, creando un effetto frenante sul fluido sottostante. La formazione e l'accrescimento delle parti solide in superficie produce, oltre alla riduzione della velocità, un aumento dello sforzo di taglio  $\sigma_{xz}$  all'interfaccia tra il fluido e la parte solida sovrastante. Nell'ipotesi di portata costante, ragionevole se applicata ad un segmento limitato del canale, la riduzione della velocità è compensata dall'ispessimento del flusso. La fase in cui si ha la crescita dei blocchi solidi superficiali è descritta da espressioni per la velocità e gli sforzi ricavate dalle precedenti, apportandovi delle opportune modifiche mediante l'introduzione del termine  $z_0$ . La distanza  $z_0$  tra la superficie superiore del fluido e il piano in cui si annulla  $\sigma_{xz}$  coincide con la superficie libera nel caso del canale aperto e con metà dello spessore del flusso nel caso del tubo.

Si ottengono le seguenti espressioni analitiche:

$$v_x(y, z) = \frac{16(h - z_0)^2}{\pi^3} \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2(h - z_0)}}{\cosh \frac{n\pi a}{4(h - z_0)}} \right] \cos \frac{n\pi(z + z_0)}{2(h - z_0)} \quad (6.4)$$

$$\sigma_{xy}(y, z) = -\frac{8(h - z_0)}{\pi^2} \rho g \sin \alpha \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{(n-1)/2} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{2(h - z_0)}}{\cosh \frac{n\pi a}{4(h - z_0)}} \cos \frac{n\pi(z + z_0)}{2(h - z_0)} \quad (6.5)$$

$$\sigma_{xz}(y, z) = -\frac{8(h - z_0)}{\pi^2} \rho g \sin \alpha \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{(n-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh \frac{n\pi y}{2(h - z_0)}}{\cosh \frac{n\pi a}{4(h - z_0)}} \right] \sin \frac{n\pi(z + z_0)}{2(h - z_0)} \quad (6.6)$$

Ponendo  $z_0 = 0$  nelle formule precedenti, si ottengono le funzioni che descrivono un canale aperto.

Lo spessore del flusso  $h$  è variabile con la velocità del fluido, in modo da supportare la portata costante, da un valore iniziale indicato con  $h_0$  a quello finale  $h_t$ , nel caso della formazione del tubo.

In Fig. 6.1 sono riportate le isolinee della velocità nella sezione del canale, calcolate per tre diversi valori di  $z_0$  e corrispondenti a tre diverse fasi. Per primo è mostrato il caso del canale aperto, con la velocità massima raggiunta alla superficie superiore del flusso, e  $z_0 = 0$ . Il secondo grafico è relativo al caso di formazione parziale della crosta, con riduzione della velocità superficiale e  $z_0 = h_t/4$ . Nel terzo grafico, la funzione è stata calcolata nel caso del tubo per un valore di  $z_0 = h_t/2$ . In Fig. 6.2 è mostrata la velocità calcolata al centro del canale ( $y = 0$  m), in funzione della profondità: si osserva un andamento analogo al caso 2-D [Dragoni *et al.* 1995] ed una riduzione della velocità alla superficie del fluido come conseguenza del graduale accrescimento dei blocchi solidi. Si osserva il passaggio da un profilo semiparabolico (a), in cui la velocità massima è raggiunta alla superficie, ad uno parabolico, in cui essa si annulla simmetricamente alla base del flusso ed all'interfaccia tra il fluido e il tetto del tubo (c), per la condizione di aderenza.

La Fig. 6.3 mostra le isolinee dello sforzo di taglio  $\sigma_{xz}$ , nei tre casi suddetti. Come conseguenza della formazione e crescita dei frammenti solidi, lo sforzo superficiale progressivamente aumenta. La figura successiva, Fig 6.4, riporta lo sforzo calcolato al centro del canale: si osserva l'aumento del modulo di  $\sigma_{xz}$  in superficie, dal valore nullo (canale aperto), al valore massimo, simmetrico a quello raggiunto sulla base del tubo.

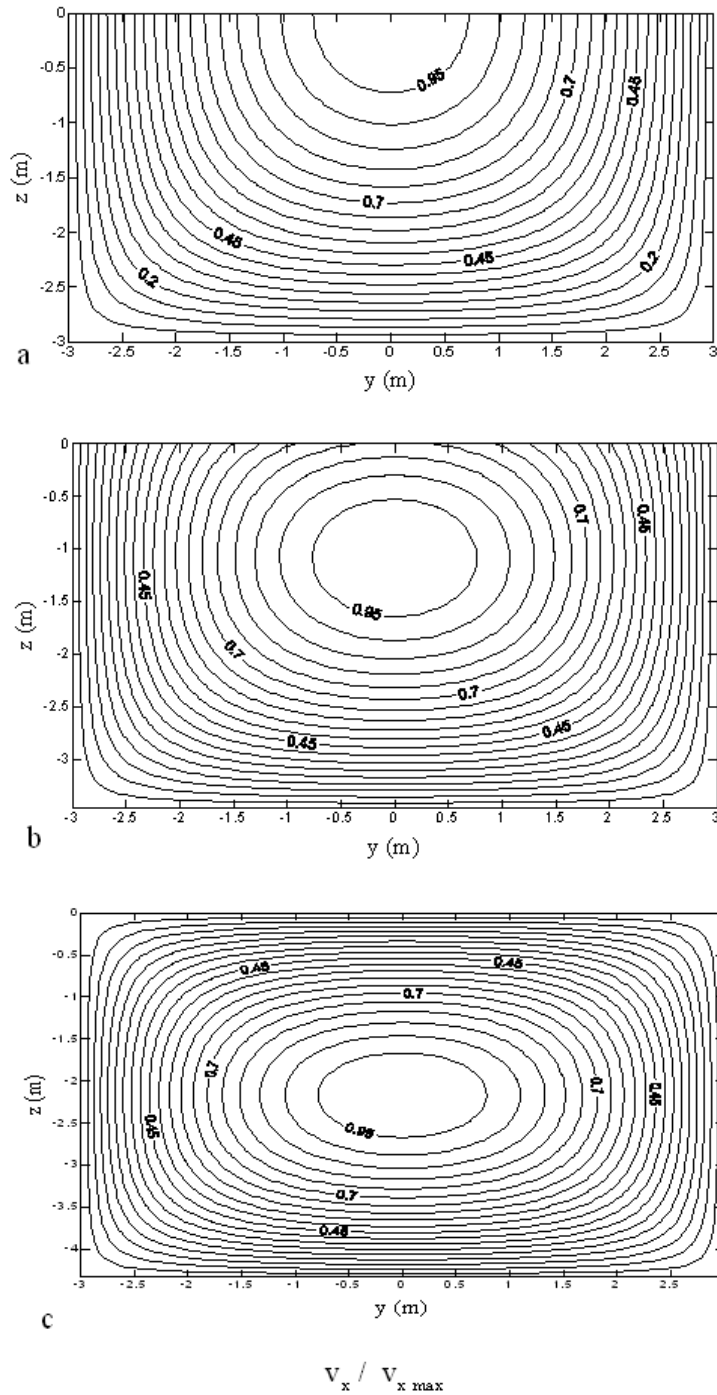


Figura 6.1: Isolinee della velocità  $v_x(y, z)$  su una sezione del canale, calcolata per tre diversi valori di  $z_0$ : (a)  $z_0=0$ , (b)  $z_0=h_t/4$ , (c)  $z_0=h_t/2$ . I valori dei parametri del modello  $g, \eta, \rho, \alpha, a, h_0$  e  $h_t$  sono riportati in Tabella 6.2.



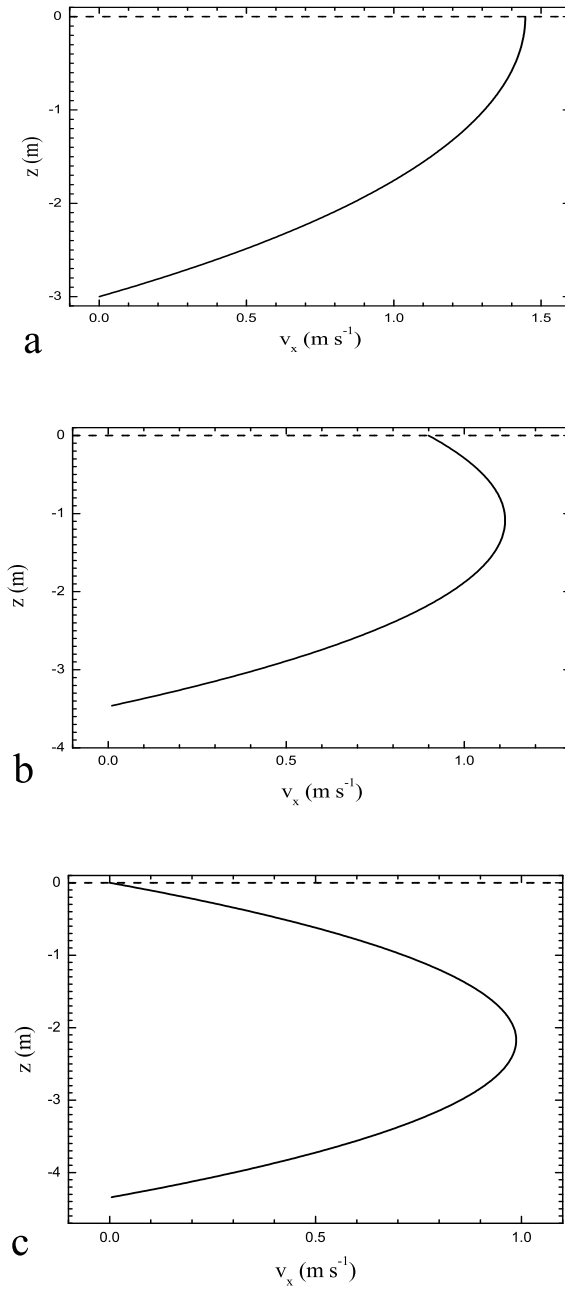
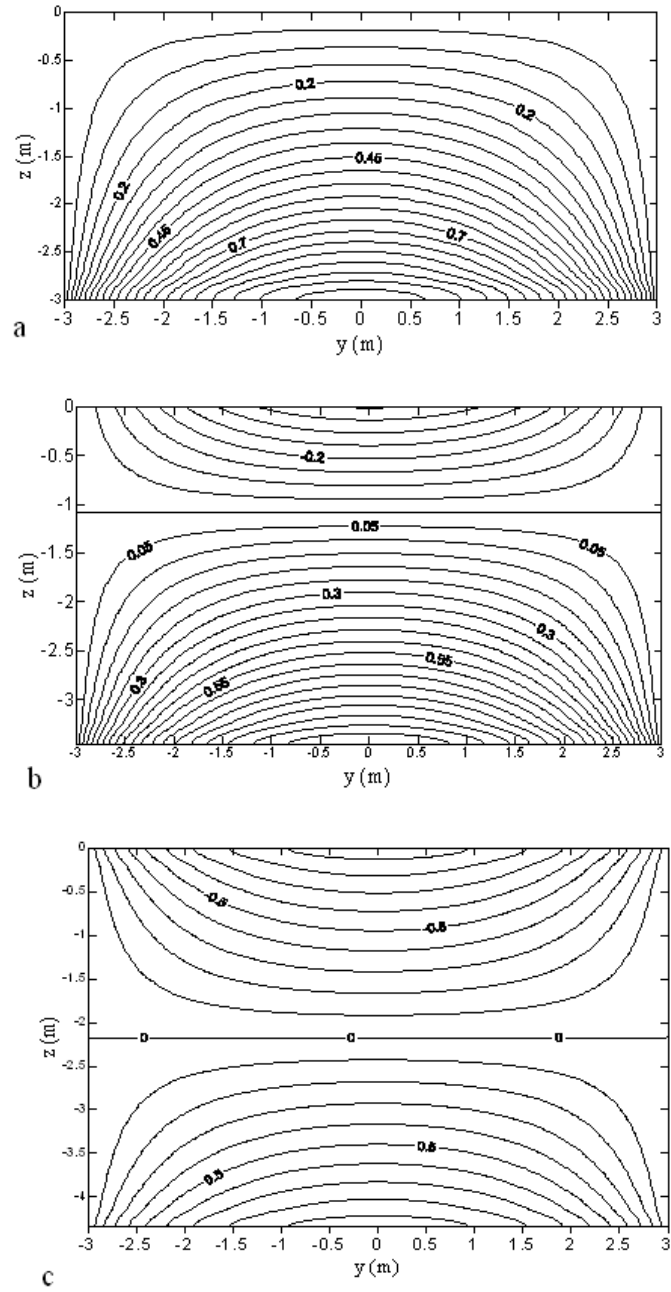


Figura 6.2: Velocità  $v_x$  in funzione della profondità del canale  $z$ , calcolata al centro del canale ( $y=0$  m) per tre diversi valori di  $z_0$ : (a)  $z_0=0$ , (b)  $z_0=h_t/4$ , (c)  $z_0=h_t/2$ . I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $h_0$  e  $h_t$  sono riportati in Tabella 6.2.



$$\sigma_{xz} \text{ (Pa) } / 10^4$$

Figura 6.3: Isolinee dello sforzo di taglio  $\sigma_{xz}$  su una sezione del canale, calcolato per tre diversi valori di  $z_0$ : (a)  $z_0=0$ , (b)  $z_0=h_t/4$ , (c)  $z_0=h_t/2$ . I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $h_0$  e  $h_t$  sono riportati in Tabella 6.2.

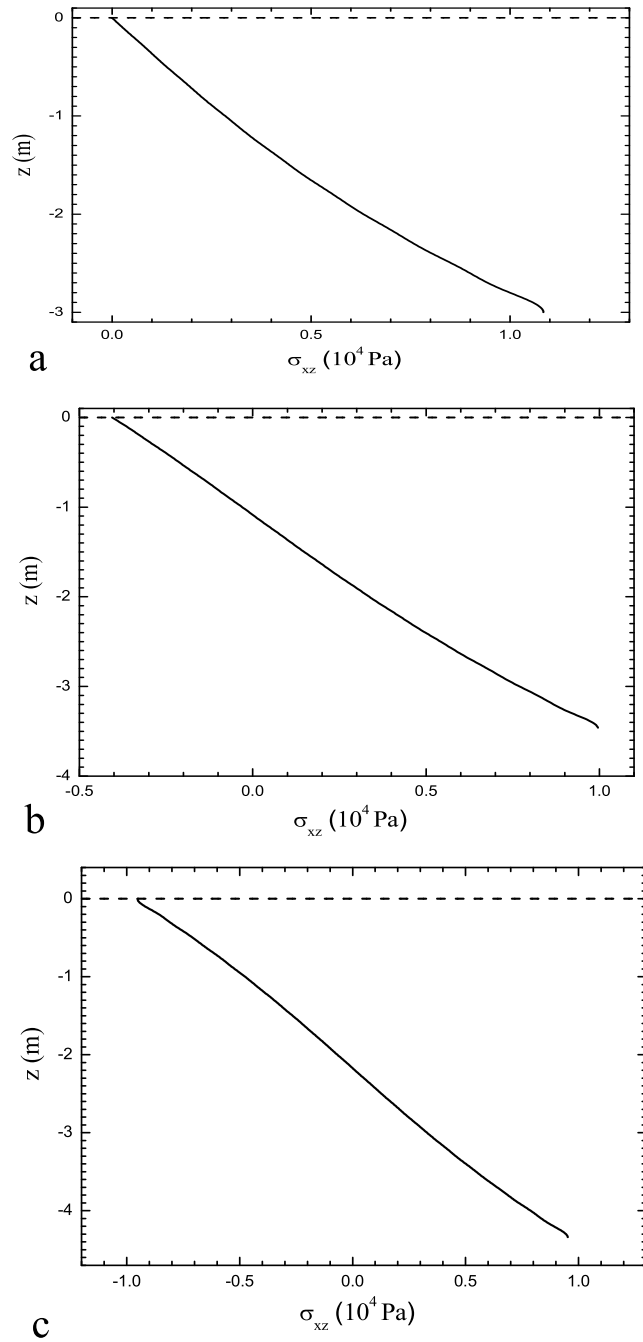


Figura 6.4: Sforzo di taglio  $\sigma_{xz}$  in funzione della profondità del canale  $z$ , calcolato al centro del canale ( $y=0$  m) per tre diversi valori di  $z_0$ : (a)  $z_0=0$ , (b)  $z_0=h_t/4$ , (c)  $z_0=h_t/2$ . I valori dei parametri del modello  $g$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $h_0$  e  $h_t$  sono riportati in Tabella 6.2.

## 6.4 Evoluzione della crosta lungo la direzione del moto

Si è finora ipotizzato che la portata sia costante, per cui le variazioni della velocità sono compensate dalle variazioni della sezione del flusso. Considerando invariata la larghezza, sarà lo spessore a dover aumentare alla diminuzione della velocità. Il suo valore è ricavato numericamente dall'espressione della portata  $Q$ , dal valore iniziale  $h_0$  per il canale privo di superficie crostale, a quello finale  $h_t$ , calcolato nel caso del tubo.

$$Q = \frac{32(h - z_0)^3}{\pi^4} \frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{1}{n^4} (-1)^{(n-1)/2} \left[ a - \frac{4(h - z_0)}{n\pi} \tanh \frac{n\pi a}{4(h - z_0)} \right] \left[ \sin \frac{n\pi z_0}{2(h - z_0)} + \sin \frac{n\pi}{2} \right] \quad (6.7)$$

L'equazione 6.7 è equivalente alla 5.21, ma nell'integrare la velocità sulla sezione del canale si è usata l'espressione 6.4.

Si è descritto analiticamente l'effetto della formazione dei blocchi solidi sulle funzioni velocità e sforzo all'interno del fluido, immaginando che tale processo avvenga gradualmente lungo la direzione del moto. Per poter correlare quantitativamente l'aumento della formazione crostale con l'avanzamento del flusso nella direzione  $x$ , è opportuno introdurre un'ipotesi sulla dipendenza di  $z_0$  da  $x$ . Ipotizzando che questa dipendenza sia di tipo lineare, si ottiene una variazione graduale dello sforzo  $\sigma_{xz}$  lungo la  $x$  (di tipo quasi lineare), mentre la velocità  $v_x$  varia con una rapidità lievemente minore nelle fasi iniziali della formazione dei blocchi superficiali, maggiore laddove la formazione del tetto del tubo è quasi completa. Si ritiene che queste caratteristiche delle funzioni, derivanti dall'ipotesi su  $z_0$ , siano in prima istanza un'approssimazione ragionevole del comportamento dei flussi reali. L'espressione per  $z_0(x)$  è dunque:

$$z_0(x) = \bar{z}_0 \frac{x}{\bar{x}} \quad (6.8)$$

dove  $\bar{x}$  indica il valore della coordinata orizzontale  $x$  in cui si ha la formazione del tubo (da determinare),  $\bar{z}_0$  indica il valore di  $z_0$  in  $\bar{x}$ , pari a  $h_t/2$ . La Fig. 6.5 mostra la variazione dello spessore  $h$  del flusso dal valore iniziale  $h_0$  in  $x = 0$  a quello finale  $h_t$  in  $\bar{x}$ , per due diversi ipotetici valori di  $\bar{x}$ .

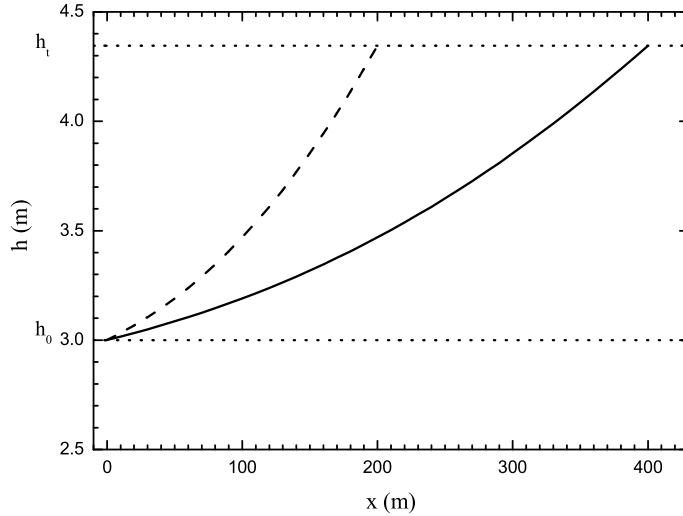


Figura 6.5: Spessore del flusso in funzione della  $x$ , per due diversi ipotetici valori di  $\bar{x}$ :  $\bar{x} = 200$  m (curva tratteggiata) e  $\bar{x} = 400$  m (curva continua).

## 6.5 Modello termico

Si considera la lava come un mezzo conduttivo, che raffredda per conduzione in atmosfera. Il problema del raffreddamento di un semispazio conduttivo è descritto dalla seguente equazione del calore [Turcotte e Schubert, 1982]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (6.9)$$

con la condizione iniziale di temperatura del mezzo uniforme

$$T(z, t = 0) = T_0 \quad (6.10)$$

e con la condizione al contorno di temperatura fissata all'interfaccia solido-fluido

$$T(z = 0, t) = T_a \quad (6.11)$$

dove  $T_0$  è la temperatura iniziale,  $T_a$  è la temperatura atmosferica. La soluzione è

$$T(z, t) = T_0 + (T_a - T_0) \operatorname{erfc} \frac{-z}{2\sqrt{\chi t}} \quad (6.12)$$

Come nel modello precedente, l'approssimazione della conduzione in un flusso lavico con il raffreddamento di un semispazio è spiegata considerando che il fluido ha una temperatura pressoché costante ed uniforme nella sua parte

centrale, mentre le maggiori variazioni termiche si concentrano entro un limitato strato superficiale.

La soluzione dipendente dal tempo viene espressa come funzione delle sole variabili spaziali mediante la sostituzione

$$t = \frac{x}{v_x(y, z)} \quad (6.13)$$

che fornisce la soluzione

$$T(x, y, z) = T_0 + (T_a - T_0) \operatorname{erfc} \left( \frac{-z}{2} \sqrt{\frac{v}{\chi x}} \right) \quad (6.14)$$

La velocità usata nel calcolo della temperatura è una funzione di  $y$  e  $z$ , fornita dalla 6.4. Con la sostituzione della variabile temporale come rapporto tra la distanza percorsa dal flusso  $x$  e la velocità  $v_x(y, z)$ , si introducono nel profilo della temperatura i termini avvertivi dipendenti da entrambe le coordinate  $y$  e  $z$ , tenendo conto delle variazioni di velocità dovute alla profondità e di quelle orizzontali dovute alla presenza degli argini laterali.

Dall'applicazione del modello conduttivo si ricava il profilo crostale. Eguagliando  $T(x, y, z)$  con la temperatura del solidus  $T_s$ , e ricavando per via grafica la coordinata verticale al variare di  $x$  e  $y$ , si ottiene lo spessore della crosta  $\Delta(x, y)$ . Esso varia lungo la larghezza del flusso, ovvero lungo la direzione  $y$ : è minimo al centro del canale e cresce verso gli argini, a causa del calo della temperatura dovuto all'effetto della velocità che va annullandosi sulle pareti. Nel presente modello, a differenza di quello esposto nel Cap. 5, la presenza degli argini del canale ha un'importanza determinante sul bilancio termico e sullo spessore della crosta, elemento di cui si terrà conto nella valutazione della resistenza agli sforzi. La Fig. 6.6 mostra lo spessore della crosta al variare di  $\bar{x}$ . Ipotizzando che il tubo possa formarsi per un qualsiasi valore  $\bar{x}$  lungo la direzione del moto, si utilizza il profilo di velocità relativo al tubo nel calcolo della temperatura. L'isoterma del solidus delinea la base inferiore della crosta. I grafici mostrano  $\Delta$  calcolata in due diversi punti sulla larghezza del canale: al centro ( $y = 0$  m), dove assume valore minimo, risentendo meno dell'effetto delle pareti laterali, ed in prossimità degli argini ( $y = 2.9$  m), laddove si ispessisce notevolmente. In Fig. 6.7 è riportato l'andamento della temperatura in funzione della profondità  $z$ , al centro del canale ( $y = 0$  m), avendo fissato il valore di  $\bar{x}$  a 400 m. Le due curve, relative a due diverse distanze dalla bocca eruttiva, mostrano il progressivo raffreddamento dello strato superficiale, confinato entro pochi decimetri, mentre il nucleo centrale del flusso è a temperatura uniforme.

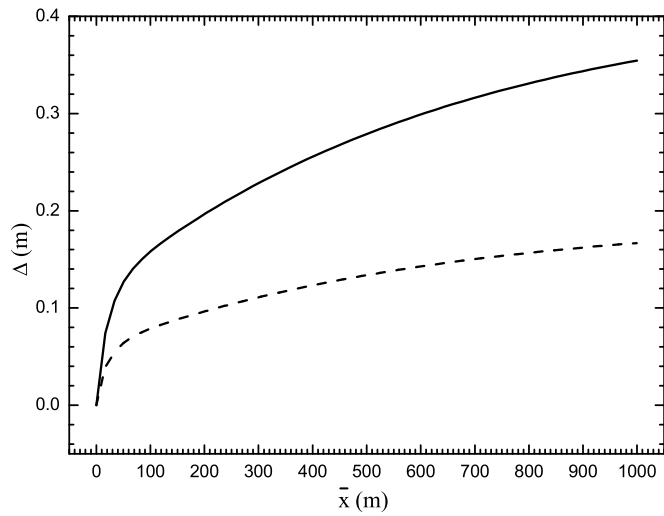


Figura 6.6: Spessore della crosta in funzione di  $\bar{x}$ , calcolato in due diversi punti lungo la larghezza del canale: al centro ( $y = 0$  m, curva tratteggiata) ed in prossimità degli argini ( $y = 2.9$  m, curva continua).

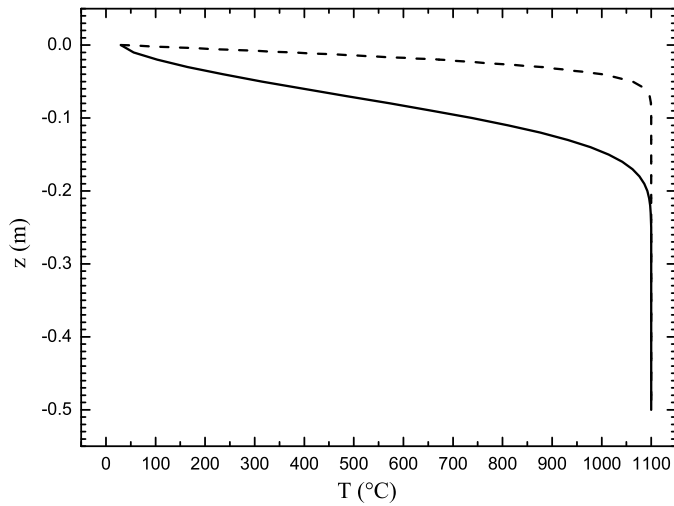


Figura 6.7: Temperatura in funzione della profondità  $z$ , calcolata al centro del canale ( $y = 0$  m), per due diversi valori di  $x$ :  $x = 200$  m (curva tratteggiata) e  $x = 400$  m (curva continua), ipotizzando che la formazione del tubo avvenga in  $\bar{x} = 400$  m.

## 6.6 Frammentazione crostale

Il raffreddamento superficiale provoca la formazione di uno strato crostale. Su di esso agiscono però degli sforzi che impediscono alle parti solide di saldarsi stabilmente e generare un tetto stazionario su tutta la larghezza del canale. I processi di frammentazione cessano quando la crosta raggiunge, a seguito del raffreddamento, una configurazione tale da poter resistere agli sforzi applicati in ogni suo punto.

Nel modello si studia l'effetto dello sforzo di taglio, dovuto al trascinarsi del fluido che continua a scorrere sotto la crosta, e di quello tensile, dovuto alla sua forza peso.

Si assume che la crosta abbia reologia elastica e limiti di elasticità  $\tau_s$  per gli sforzi di taglio e  $\tau_t$  per quelli tensili.

Considerati i parametri usati nel calcolo, mostrati in Tabella 6.2, in un flusso dalla larghezza  $a$  di 3 m lo spessore della crosta varia notevolmente in prossimità degli argini, in regioni dall'ampiezza di qualche dm, mentre si mantiene pressoché uniforme nella regione centrale. Sulla base di ciò, si ritiene ragionevole l'approssimazione dello strato solido con una lamina dallo spessore costante in  $y$ , nella determinazione dell'espressione analitica degli sforzi agenti. Detta  $l$  la lunghezza della lamina lungo la direzione  $x$ , osservando che  $\Delta \ll a$  e  $\Delta \ll l$ , il problema è ricondotto a quello della lamina elastica, fissata ai propri estremi.

## 6.7 Resistenza della crosta agli sforzi di taglio

In primo luogo, si analizza l'effetto dello sforzo di taglio.

Indicando con  $\tau_{ij}$  il tensore degli sforzi, il bilancio delle forze applicate alla crosta lungo la componente  $x$  fornisce la seguente equazione:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\bar{\tau}_0}{\Delta} - \rho g \sin \alpha = 0 \quad (6.15)$$

Nell'equazione precedente si è indicato con  $\bar{\tau}_0$  lo sforzo dovuto al trascinarsi del fluido sottostante la crosta, il cui valore corrisponde allo sforzo  $\sigma_{xz}$  calcolato secondo la 6.6, nella configurazione degli sforzi nel tubo ( $z_0 = h_t/2$ ), all'interfaccia solido- fluido:

$$\bar{\tau}_0 = \sigma_{xz}(y, -\Delta) \quad (6.16)$$

Data la condizione al contorno

$$\tau_{xy}(y = 0) = 0 \quad (6.17)$$



la soluzione è espressa dalla seguente

$$\tau_{xy}(y) = \frac{y}{\Delta} \left( \rho g \sin \alpha \Delta + \bar{\tau}_0 \right) \quad (6.18)$$

Ottenuta l'espressione analitica dello sforzo  $\tau_{xy}$ , il suo valore viene calcolato, per ogni punto nella direzione del moto  $x$ , lungo il profilo della crosta, tenendo conto del suo spessore variabile con la larghezza del canale.  $\tau_{xy}$  dipende dunque dallo spessore della crosta  $\Delta(x, y)$  oltre che dal valore di  $\bar{\tau}_0$ . Per ogni punto  $x$ , è sufficiente confrontare il valore massimo di  $\tau_{xy}$ , individuato numericamente, con la soglia. Quando il massimo dello sforzo  $\tau_{xy}$  supera la soglia  $\tau_s$ , si ha la frammentazione della crosta, in caso contrario, la superficie solida ha assunto una configurazione tale da resistere alla deformazione di taglio ed alla rottura.

In Fig. 6.8 è riportato il grafico del massimo dello sforzo di taglio  $\tau_{xy}$  in funzione della distanza lungo l'asse  $x$  in cui si ipotizza possa formarsi il tubo, confrontata con il limite di elasticità per gli sforzi di taglio (linea orizzontale tratteggiata). L'intersezione delle due curve fornisce l'indicazione del punto in cui la prima condizione è verificata.

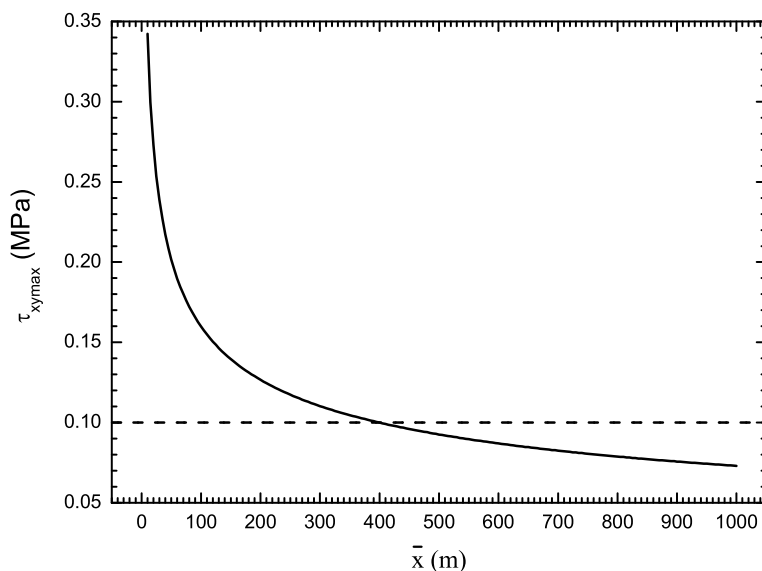


Figura 6.8: Sforzo di taglio  $\tau_{xy}$  massimo in funzione di  $\bar{x}$ . La linea orizzontale tratteggiata indica la soglia di taglio. I valori dei parametri usati nel modello sono riportati in Tabella 6.2.

Nella figura successiva, si osserva lo sforzo  $\tau_{xy}$  (curva continua riferita all'asse verticale di sinistra) in funzione della  $y$ , calcolato sulla base inferiore della crosta ( $z = -\Delta(x, y)$ ). Lo sforzo supera la soglia (linea discontinua orizzontale) per  $\bar{x} = 200$  e  $300$  m (Fig 6.9 a e b), provocando la frammentazione crostale, mentre decresce al di sotto di essa per  $\bar{x} = 400$  m (c). La curva tratteggiata riferita all'asse verticale di destra è il profilo della crosta a quella determinata distanza dalla bocca eruttiva. Esso è rappresentato insieme allo sforzo per evidenziare i tratti in cui la crosta subisce frattura. Per  $\bar{x} = 400$  m, lo spessore minimo della crosta (al centro del canale) è di 0.13 m.

In Fig. 6.10 sono riportate le isolinee della temperatura in un dettaglio della sezione del canale, limitata alla semilarghezza ed allo strato superficiale dello spessore di 0.5 m, per i valori di  $\bar{x}$  di 200 e 300 m. La curva tratteggiata è l'isoterma del solidus e le croci su di essa indicano il punto di massima fragilità crostale, dove lo sforzo  $\tau_{xy}$  è massimo. Quando il valore massimo è inferiore alla soglia, la crosta resiste all'effetto di trascinamento del fluido sottostante.

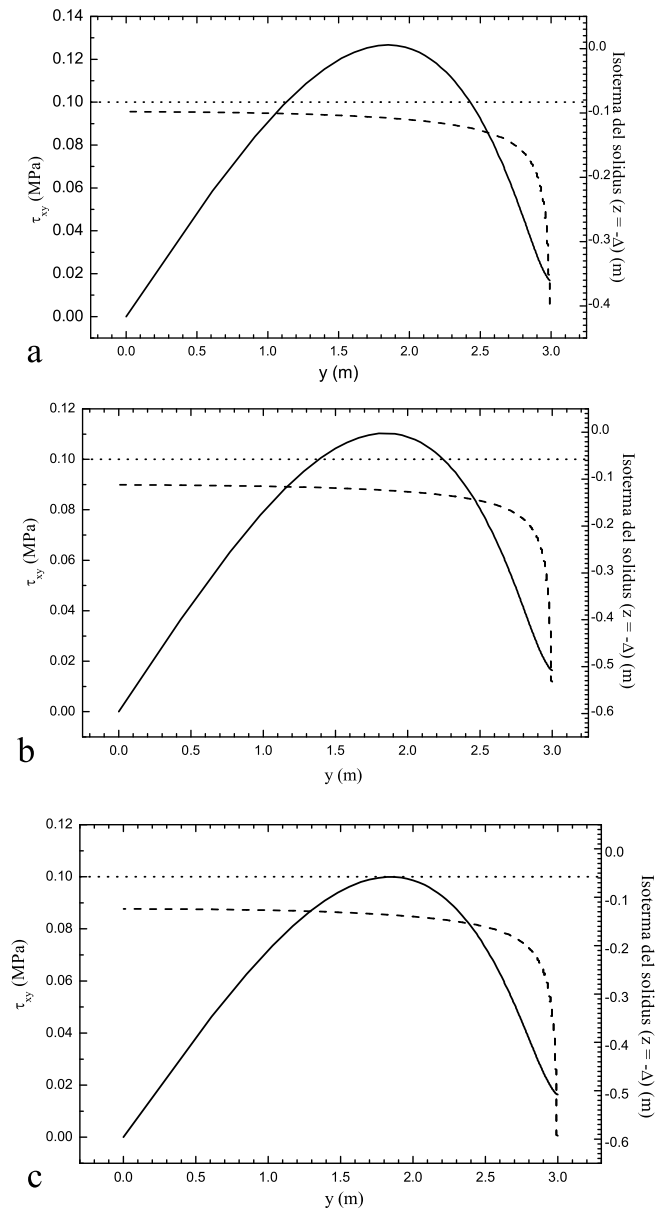


Figura 6.9: Sforzo di taglio  $\tau_{xy}$  (curva continua riferita all'asse verticale di sinistra) in funzione di  $y$ , calcolato in  $z = -\Delta(\bar{x}, y)$ , per tre diversi valori di  $\bar{x}$ : (a)  $\bar{x} = 200$  m, (b) 300 m, (c) 400 m. Il profilo della crosta è rappresentato dalla curva tratteggiata, riferita all'asse verticale di destra. La soglia di taglio (linea discontinua orizzontale) è superata dallo sforzo  $\tau_{xy}$  in (a) e (b), non in (c) dove è verificata la condizione per la formazione del tubo. I valori dei parametri usati nel modello sono riportati in Tabella 6.2.

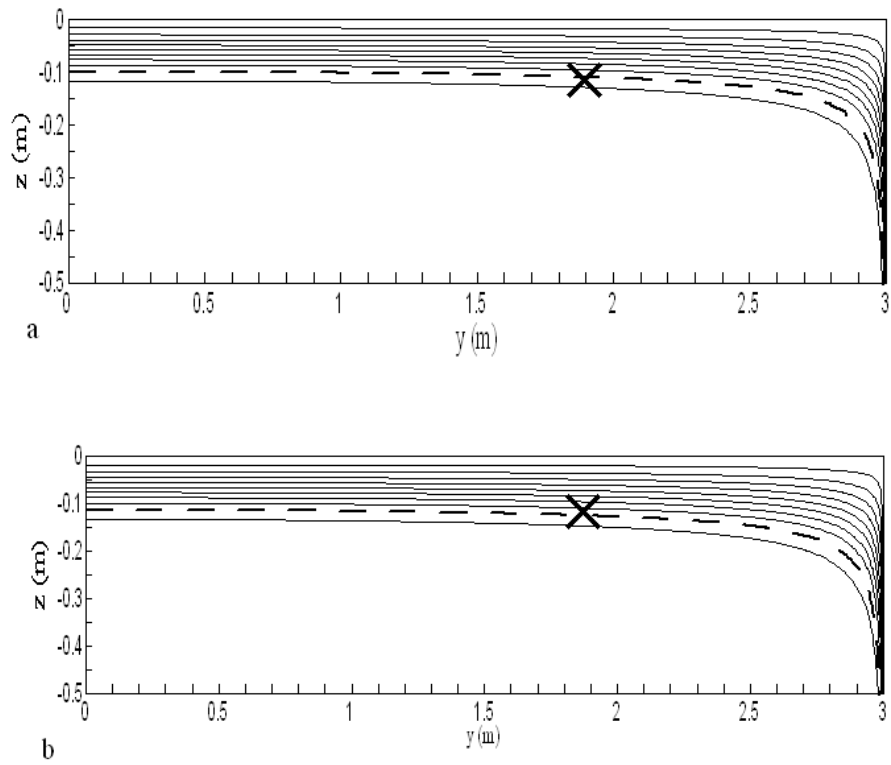


Figura 6.10: Isoleone della temperatura in una porzione della sezione del canale, calcolata in  $\bar{x}$  pari a 200 m (a) e 300 m (b). La curva tratteggiata indica l'isoleone del solidus, ovvero il limite inferiore della crosta, le croci indicano il punto di massima fragilit .

## 6.8 Resistenza della crosta agli sforzi tensili

La seconda condizione che la crosta deve soddisfare per formare un tubo è che riesca ad autosostenere il proprio peso. L'equazione per una lamina elastica fissata agli estremi, sottoposta all'azione della propria forza peso, è la seguente [Turcotte et Schubert, 1982]:

$$D \nabla^4 u_z + \rho g d \cos \alpha = 0 \quad (6.19)$$

dove  $u_z$  è la deflessione verticale e  $D$  la rigidità della lamina. Date le seguenti condizioni al contorno, sulla deflessione e la sua derivata prima alle estremità:

$$u_z \left( y = \pm \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} \left( y = \pm \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (6.21)$$

la soluzione è

$$u_z = \bar{u}_z \left( 1 - 4 \frac{y^2}{a^2} \right)^2 \quad (6.22)$$

dove il termine  $\bar{u}_z$  è il seguente

$$\bar{u}_z = \frac{\rho g \cos \alpha}{E d^2} (1 - \nu^2) \quad (6.23)$$

Nella 6.23 si è indicato con  $\nu$  il modulo di Poisson, e sostituito  $D$  con  $E h^3 / [12(1 - \nu^2)]$ .

Gli sforzi tensili agenti sulla lamina sono  $\tau_{yy}$  e  $\tau_{xx}$ , mentre  $\tau_{zz}$  è nullo. Poiché  $\tau_{xx} = \nu \tau_{yy}$  e  $\nu \leq 1/2$ , il massimo degli sforzi tensili è  $\tau_{yy}$ , espresso come:

$$\tau_{yy} = \varepsilon_{yy} \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (6.24)$$

dove  $E$  è il modulo di Young e  $\varepsilon_{yy}$  è la componente  $yy$  del tensore della deformazione. Nell'approssimazione della lamina elastica sottile, fissata ai suoi estremi, si ha

$$\varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (6.25)$$

Sostituendo le espressioni sopra nella 6.24 si ricava

$$\tau_{yy} = \frac{\rho g \cos \alpha a^2}{2 \Delta^2} \left( 12 \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \left( z + \frac{\Delta}{2} \right) \quad (6.26)$$

Sostituendo  $z$  con  $-\Delta$  nell'equazione precedente, si calcola  $\tau_{yy}$  all'interfaccia tra la crosta e il fluido:

$$\tau_{yy} = \frac{\rho g \cos \alpha a^2}{2 \Delta^2} \left( 12 \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) \left( -\frac{\Delta}{2} \right) \quad (6.27)$$

In analogia con il procedimento relativo agli sforzi di taglio, si calcola, a partire dal punto lungo la direzione del moto  $x$ , in cui è verificata la prima condizione, il valore massimo che lo sforzo tensile assume sulla crosta e lo si confronta con la soglia tensile  $\tau_t$ . Laddove lo sforzo applicato è inferiore alla soglia, la crosta è in grado di resistere all'effetto del proprio peso, dando origine al tetto del tubo. La Fig. 6.11 mostra lo sforzo tensile massimo in funzione di  $\bar{x}$ , confrontato con il limite di elasticità  $\tau_t$ . Come spiegato nel paragrafo precedente, si usa il simbolo  $\bar{x}$  per indicare la distanza dalla bocca eruttiva in cui la crosta è completa da un argine all'altro del canale. Con i parametri utilizzati nel modello, e mostrati in Tabella 6.2, la seconda condizione per la formazione del tubo è soddisfatta a circa 3 km dalla bocca eruttiva (in  $\bar{x} = 2910$  m). In Fig. 6.12 è riportato l'andamento dello sforzo

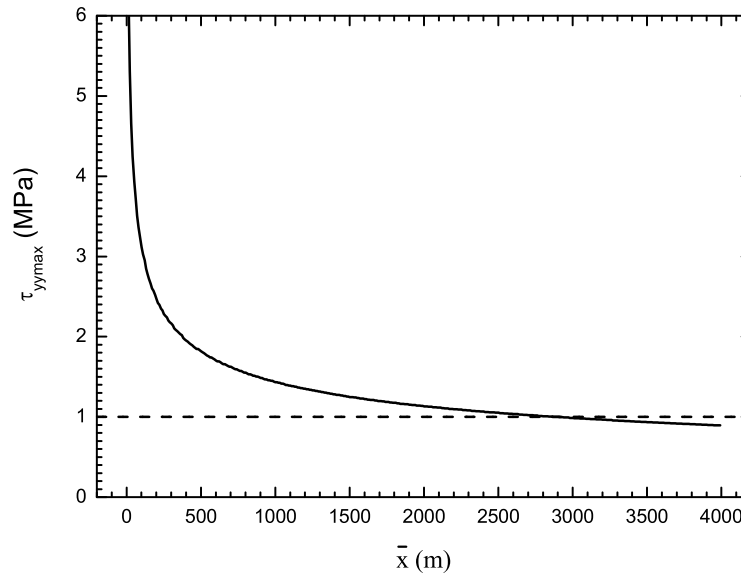
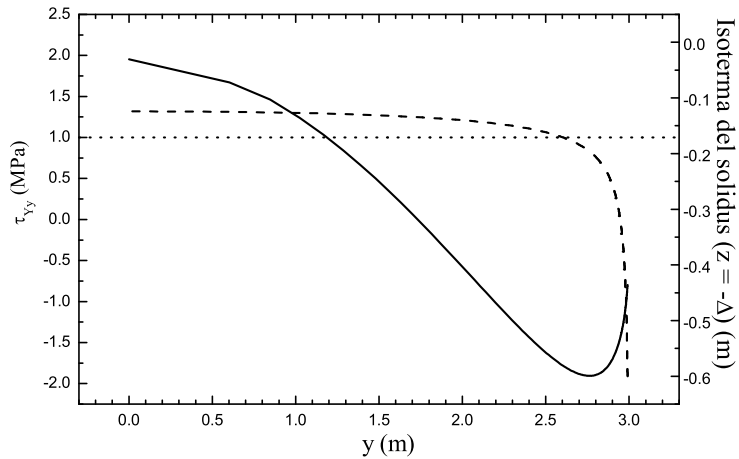


Figura 6.11: Sforzo tensile  $\tau_{yy}$  massimo in funzione di  $\bar{x}$ . La linea orizzontale tratteggiata indica la soglia tensile. I valori dei parametri usati nel modello sono riportati in Tabella 6.2.

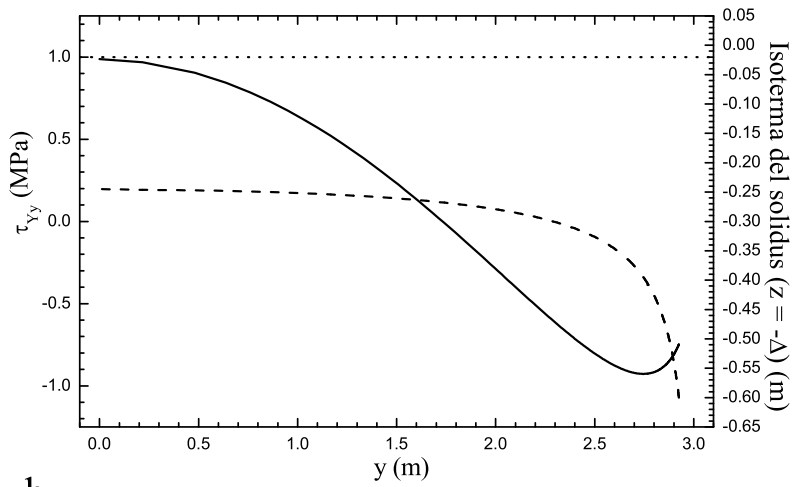
tensile in funzione della  $y$  (curva continua riferita all'asse verticale di sinistra), calcolato sul profilo della crosta (curva tratteggiata riferita all'asse verticale di

destra). Si osserva che lo sforzo applicato supera la soglia (linea orizzontale) nel caso di  $\bar{x}$  pari a 400 m, dove è verificata la prima condizione (a). Per  $\bar{x} = 2910$  m lo sforzo  $\tau_{yy}$  scende al di sotto della soglia (Fig. 6.12 b) e il tetto resiste all'effetto del proprio peso.

Le isoterme calcolate in corrispondenza di questi due valori di  $\bar{x}$ , sono raffigurate in una porzione della sezione del canale. Osservando l'isoterma del solidus (cuva tratteggiata), lo spessore crostale al centro del flusso raddoppia.



a



b

Figura 6.12: Sforzo di taglio  $\tau_{yy}$  (curva continua riferita all'asse verticale di sinistra) in funzione di  $y$ , calcolato in  $z = -\Delta(\bar{x}, y)$ , per due diversi valori di  $\bar{x}$ : (a)  $\bar{x} = 400$  m, (b) 2910 m. Il profilo della crosta è rappresentato dalla curva tratteggiata, riferita all'asse verticale di destra. La soglia tensile (linea discontinua orizzontale) è superata dallo sforzo  $\tau_{yy}$  in (a) dove  $\bar{x} = 400$  m, mentre in (b) è verificata la seconda condizione per la formazione del tubo. I valori dei parametri usati nel modello sono riportati in Tabella 6.2.



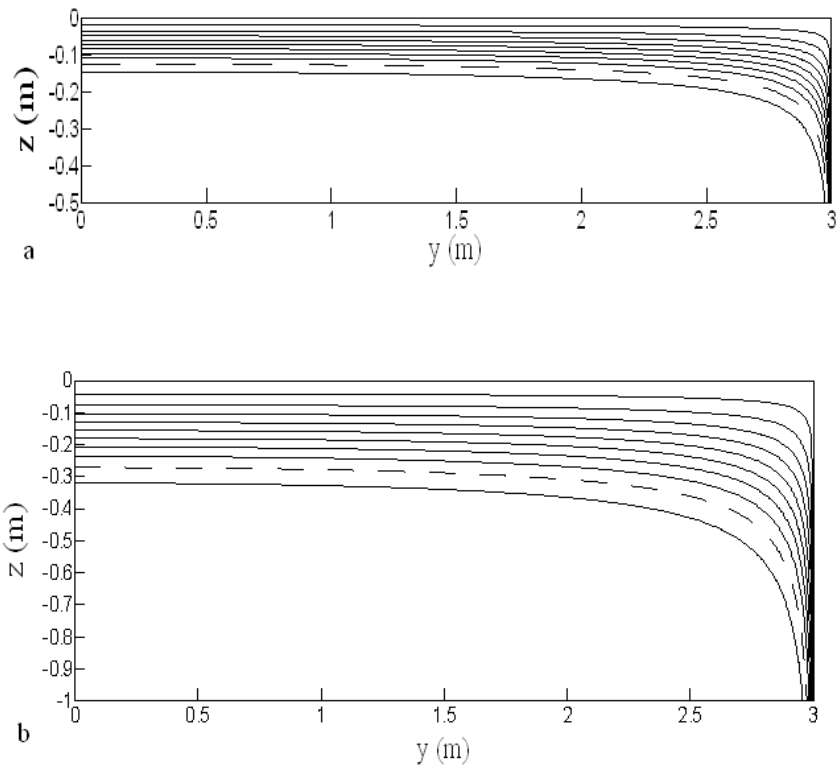


Figura 6.13: Isoleee della temperatura in una porzione della sezione del canale, per (a)  $\bar{x} = 400$  m e (b)  $\bar{x} = 2910$  m. La curva tratteggiata indica l'isoleea del solidus. I valori dei parametri usati nel modello sono riportati in Tabella 6.2.

## 6.9 Confronto con le osservazioni sperimentali

Il modello esposto nel presente capitolo indaga quali processi fisici sono responsabili della formazione del tubo, secondo il meccanismo di saldatura dei blocchi solidi superficiali tra essi ed agli argini del canale. Da un punto di vista qualitativo, il modello è in accordo con l'osservazione diretta: esso spiega la formazione della crosta e l'accrescimento degli argini del canale, che progressivamente si estendono verso la regione centrale. È individuato lo sforzo di taglio come causa della disgregazione crostale nelle prime fasi della messa in posto del flusso ed è spiegata la necessità che la portata sia costante per un tempo sufficientemente lungo affinché la crosta si ispessisca, sostenuta dal liquido sottostante, e sia in grado di resistere all'effetto del proprio peso. Una riduzione della portata induce un calo del livello del fluido, per cui, se la crosta non è in grado di autosostenersi, subisce frammentazione. Se da un punto di vista qualitativo i risultati si adattano alle osservazioni sul campo, una forte carenza di dati quantitativi impedisce un confronto più ampio e rigoroso con la fenomenologia.

Il modello utilizza molti parametri, alcuni noti da misure dirette, come la densità e la conducibilità termica, altri ricavati da stime di ampi intervalli di valori, come i limiti di elasticità [*Singh*, 1989]. L'incertezza su questi parametri comporta un'incertezza anche sui risultati numerici del modello, fortemente dipendenti dalla scelta dei valori usati. È auspicabile poter disporre di dati precisi ricavati dall'osservazione della formazione dei tubi, per testare le ipotesi e i valori dei parametri usati nel modello, oppure procedere nell'individuazione attraverso misure dirette di alcune proprietà della lava, in modo da ridurre l'incertezza sui risultati ottenuti.

## 6.10 Applicabilità dei modelli

I due modelli esposti nei capitoli 5 e 6 forniscono una spiegazione dei processi fisici responsabili della formazione dei tubi di lava, secondo due diversi meccanismi osservati in natura. Ci si propone in questo paragrafo di offrire dei chiarimenti circa l'applicabilità dei due modelli. I due meccanismi studiati sembrano essere opposti: nel primo c'è uno sviluppo della crosta dal centro agli argini, nell'altro una estensione degli argini verso il centro del canale, a congiungersi con altre parti solide. Essi sono entrambi osservati sui campi di lava, e nessuna contraddizione caratterizza la loro coesistenza. La concorrenza di fattori diversi comporta l'innescarsi dell'uno o dell'altro meccanismo. Si è cercato di individuare un elemento che permetta di determinare l'accadimento di uno dei due fenomeni.

La differenza sostanziale tra i due modelli è il fatto che si consideri o meno la presenza degli argini del canale sul bilancio termico. Essa è trascurata nel primo modello, dove si usa nel calcolo della temperatura la velocità media  $\bar{v}_x(z)$ , mentre ha un ruolo fondamentale nello sviluppo crostale nel secondo modello, dove la velocità usata è  $v_x(y, z)$ . È ragionevole pensare che il raffreddamento laterale della lava, seppure calcolato solo attraverso i termini avvevativi, sia trascurabile su canali larghi e rilevante in quelli più stretti.

Questo concetto può essere espresso in termini quantitativi valutando la variazione della velocità lungo la  $y$ . In particolare, si calcola la componente  $y$  del gradiente della velocità lungo la larghezza del canale, in superficie. Tale grandezza è valutata rispetto ad un valore di riferimento, il valore massimo, raggiunto agli argini del canale. Il criterio definito per individuare variazioni di velocità in  $y$  trascurabili o meno è il seguente: se la componente  $\partial v / \partial y$  del gradiente di velocità supera il 50% del suo valore massimo, in una porzione della larghezza superiore al 30% della larghezza totale del canale, allora non si trascura la dipendenza della velocità dalla coordinata orizzontale (secondo modello); altrimenti, si considera accettabile l'uso di un valore medio di velocità in  $y$  (primo modello). La variazione relativa della velocità,  $v_{x,y} / v_{x,y \max}$  (si è utilizzata qui per chiarezza espositiva la notazione indiciale) è calcolata come il rapporto:

$$\frac{\sigma_{xy}(y, z)}{\sigma_{xy}(\pm a/2, 0)} \quad (6.28)$$

La Fig. 6.14 mostra la componente  $y$  del gradiente della velocità, normalizzata rispetto al suo valore massimo, calcolata in superficie per un valore dell'*aspect ratio*  $A$  ( $h/a$ ) pari a 0.3, espressa in funzione della larghezza adimensionale del canale. Nel grafico in figura, il limite definito di 0.5 è superato in un intervallo della larghezza inferiore al 30%, per cui si ritiene che trascurare la dipendenza della velocità dalla  $y$  nel bilancio termico sia un'approssimazione accettabile, e si utilizza il primo modello. Applicando questo

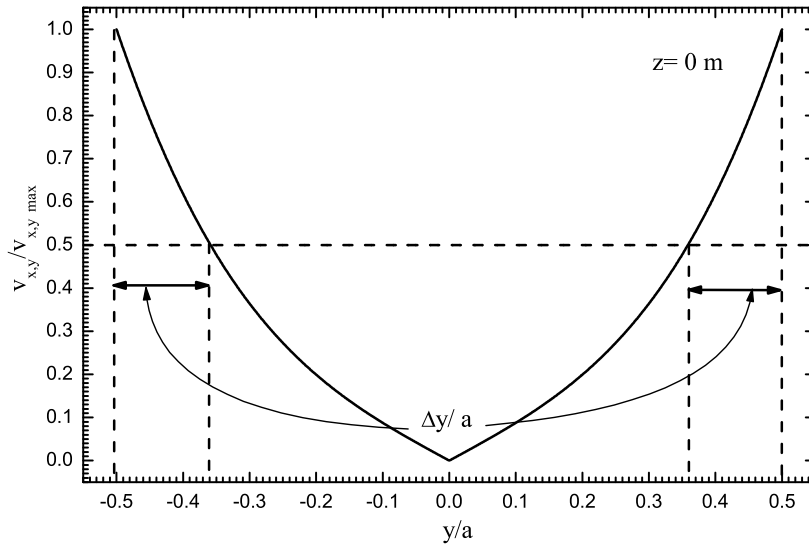


Figura 6.14: Componente  $y$  del gradiente di velocità, normalizzato rispetto al suo valore massimo, in funzione della larghezza del canale. La linea tratteggiata orizzontale indica il limite di variazione del 50% rispetto al valore massimo, superato nelle regioni del canale indicate dalle frecce.

critério a canali dalla sezione differente, si osserva che il risultato sull'applicabilità dei due modelli dipende dall'*aspect ratio*  $A$ : per  $A < 0.33$  si utilizza il primo modello, per  $A \geq 0.33$  il secondo. Pur non potendo confrontare questo valore con una stima ottenuta da misure dirette, l'osservazione sui campi lavici conferma che la formazione dei tubi avviene mediante il primo meccanismo (A) in canali larghi e mediante il secondo (B) in canali stretti [Calvari e Pinkerton, 1998, 1999].

Tabella 6.1: Lista dei simboli usati nel Cap. 6.

Simbolo	Quantità	Unità
$\rho$	densità	$\text{Kg m}^{-3}$
$\eta$	viscosità	Pa s
$a$	larghezza del flusso	m
$h$	spessore del flusso	m
$h_0$	spessore iniziale del flusso	m
$h_t$	spessore del tubo	m
$A$	aspect ratio ( $h/a$ )	
$d$	spessore della crosta	m
$\alpha$	pendenza del suolo	rad
$g$	accelerazione di gravità	$\text{m s}^{-2}$
$Q$	portata	$\text{m}^3 \text{s}^{-1}$
$x$	direzione del moto	m
$\bar{x}$	distanza dalla bocca eruttiva dove può formarsi il tubo	m
$v_x$	componente $x$ della velocità	$\text{m s}^{-1}$
$\sigma_{ij}$	tensore degli sforzi nel fluido	Pa
$\tau_{ij}$	tensore degli sforzi nella lamina elastica	Pa
$\tau_s$	soglia di taglio della crosta	Pa
$\tau_t$	soglia tensile della crosta	Pa
$D$	rigidità flessurale	N m
$E$	modulo di Young	Pa
$\nu$	modulo di Poisson	
$c_p$	calore specifico a pressione costante	$\text{J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	conducibilità termica	$\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
$\chi$	diffusività termica	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
$T$	temperatura	K
$T_0$	temperatura iniziale	K
$T_s$	temperatura del solidus	K
$T_a$	temperatura ambiente	K
$t$	tempo	s

Tabella 6.2: Valori dei parametri del modello.

Parametro	Valore
$a$	6 m
$h_0$	3 m
$h_t$	4.32 m
$\alpha$	0.20 rad
$g$	$9.8 \text{ m s}^{-2}$
$\rho$	$2800 \text{ Kg m}^{-3}$
$\eta$	$10^4 \text{ Pa s}$
$c_p$	$837 \text{ J Kg}^{-1} \text{K}^{-1}$
$k$	$3 \text{ W K}^{-1} \text{m}^{-1}$
$T_0$	1373 K
$T_s$	1173 K
$T_a$	300 K
$\tau_s$	0.1 MPa
$\tau_t$	1 MPa
$E$	$10^{11} \text{ Pa}$
$\nu$	0.25

# Capitolo 7

## Misure in laboratorio

È evidente, come già accennato nella discussione dei modelli teorici, quanto importante sia la disponibilità di dati sulle osservazioni dirette e la conoscenza delle proprietà fisiche della lava per testare la validità dei modelli ed introdurre una maggiore precisione sul valore dei parametri utilizzati in input. In questo capitolo sono riportati i risultati sperimentali relativi alle misure di viscosità e conducibilità termica su materiale basaltico proveniente dall'Etna, con una descrizione dell'apparato strumentale e della metodologia utilizzata nell'indagine sperimentale. Le misure sono state effettuate presso il Physikalisch Vulkanologisches Labor, il laboratorio di fisica del vulcanismo presso l'Università di Würzburg (Germania).

### 7.1 Apparato strumentale

#### 7.1.1 Preparazione del campione

Nelle misure sono stati adoperati campioni di roccia basaltica proveniente dall'Etna, prelevati a seguito di un evento eruttivo del 2002. Questo materiale è stato triturato e ridotto in granuli. Allo scopo di ottenere un campione omogeneo, i granuli sono stati setacciati, e sono stati selezionati quelli della dimensione media di 2 mm. Questa operazione consente di eliminare la polvere e i frammenti di dimensioni maggiori.

#### 7.1.2 Descrizione dell'apparato

Le misure sono state effettuate mediante l'uso di un viscosimetro cilindrico. All'interno di una fornace cilindrica costruita con materiale altamente isolante sono presenti delle barre metalliche, che permettono di stabilire la temperatura. Affinché essa sia omogenea e isotropa all'interno della fornace,

le barre metalliche sono poste in modo tale da creare una simmetria cilindrica. Tre termocouple, di cui una di riferimento, monitorano la temperatura. L'accuratezza sperimentale è migliore di 2.5 K, la stabilità termica migliore di 1 K. All'interno della fornace è realizzata un'atmosfera di argon costante. Il materiale da analizzare viene posto in un crogiolo cilindrico in ceramica, accuratamente posizionato al centro del sistema, dall'altezza di circa 8 cm e diametro di circa 5 cm. Nel materiale, una volta fuso, viene inserita una barra rotante connessa all'apparato di registrazione dei dati. Il viscosimetro è dunque uno strumento fornito di una barra che viene immersa nel fluido e di un sensore per la misura della velocità di rotazione imposta all'asta dallo sperimentatore e del momento torcente risultante. Lo strumento è collegato ad un'interfaccia grafica che permette di visualizzare le diverse grandezze nel tempo. È possibile stabilire meccanicamente la profondità di immersione della barra rotante nel fuso. In Fig. 7.1, dove è illustrato uno schema dell'apparato strumentale, questa profondità è indicata con  $L$ , mentre  $R_o$  è il raggio del crogiolo ed  $R_i$  il raggio dell'asta rotante. In Fig. 7.2 è mostrata una sezione orizzontale del fuso, con all'interno la barra metallica, che ruota con velocità angolare  $\omega$ .

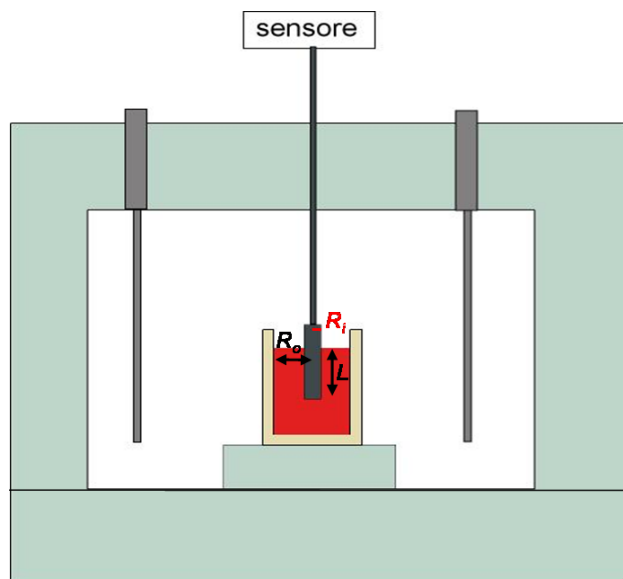


Figura 7.1: Schema dell'apparato sperimentale. Sono mostrati: la fornace, con all'interno le barre metalliche per fissare la temperatura (barre laterali); il crogiolo contenente il fuso; l'asta immersa nel fuso alla profondità  $L$  e collegata al sensore.

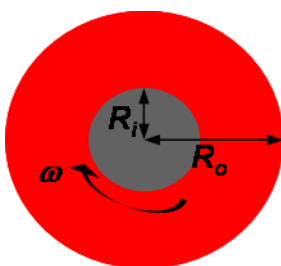


Figura 7.2: Sezione orizzontale del fuso, di raggio  $R_o$ , con al suo interno la barra metallica, di raggio  $R_i$ , rotante con velocità angolare  $\omega$ .

### 7.1.3 Preparazione del sistema

Il campione è posto all'interno del crogiolo, in posizione centrale nel sistema. Chiusa la fornace, viene fissata la temperatura alla quale si vogliono effettuare le misure. Il passaggio dalla temperatura ambiente a quella sperimentale, al di sopra del liquidus, avviene gradualmente e necessita di un tempo per il raggiungimento dell'equilibrio. Perché le misure siano ripetibili, bisogna non solo che siano effettuate in condizioni di equilibrio termico, ma che il campione lavico abbia raggiunto un equilibrio chimico-fisico per quella data temperatura (si ricordi che la lava è un sistema eterogeneo multifase molto complesso).

## 7.2 Misure di viscosità

### 7.2.1 Raccolta dei dati

Una volta preparato il fuso, si immerge la barra rotante in esso e le si impone la frequenza di rotazione, da cui si ottiene la velocità angolare  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi f \quad (7.1)$$

Si registrano i dati della frequenza e del momento torcente  $N$  per un tempo sufficiente ad ottenere un valore di  $N$  costante (superando il tempo di rilassamento del fluido), per poi calcolare un valore medio di dette grandezze. Si misura il momento torcente applicato  $N$ , dato dalla differenza tra i momenti misurati per due diverse profondità di immersione, in modo da ridurre gli effetti di fine. Dal momento torcente  $N$ , si ricava  $\sigma$ , sforzo di taglio agente sulla superficie cilindrica di raggio  $R_i$  ed altezza  $L$  [Krieger e Herold, 1953]:

$$\sigma = \frac{N}{2\pi R_i^2 L} \quad (7.2)$$



Detta  $\Delta l$  la differenza tra le due profondità di immersione, misurata come la variazione di altezza della barra del viscosimetro, e tenendo conto dello spostamento del fluido durante l'immersione dell'asta,  $L$  risulta

$$L = \frac{\Delta l}{1 - \lambda} \quad (7.3)$$

dove  $\lambda$  è

$$\lambda = \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2 \quad (7.4)$$

Le misure sono ripetute, alla temperatura fissata, per diversi valori della frequenza angolare, in modo da ottenere una serie di coppie di dati  $N$  ed  $\omega$ , di cui un esempio è illustrato in Fig. 7.3. Le serie di misure sono state ripetute per tre diverse temperature: 1200, 1225, 1250 °C.

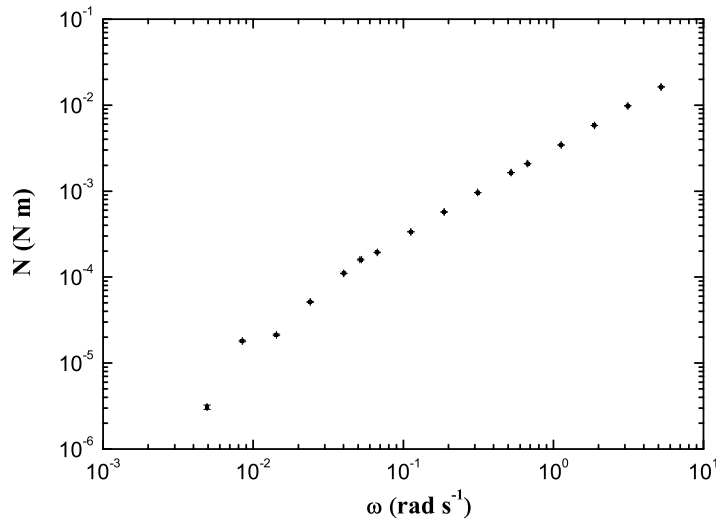


Figura 7.3: Serie di dati  $N$ ,  $\omega$  ottenuti dal viscosimetro, alla temperatura di 1473 K.

## 7.2.2 Calcolo della viscosità

Il tasso di deformazione nel caso della simmetria cilindrica è [*Krieger e Herold*, 1953]:

$$\dot{\gamma} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{N} \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{N}} \Big|_{\tilde{N}=\lambda^i N} \quad (7.5)$$

dove  $\tilde{N} = \lambda^i N$ . La derivata parziale  $\partial \omega / \partial \tilde{N}$  è calcolata graficamente, cioè suddividendo in tratti la curva sperimentale  $\omega(N)$  e valutando la tangente

ad essa nei punti di misura  $(N, \omega)$ . Ciò permette di procedere nel calcolo di  $\dot{\gamma}$  senza introdurre ipotesi sulla funzione  $\omega(N)$ , ovvero ipotesi a priori sulla reologia del fluido [Sonder et al., 2006]. La viscosità è calcolata come:

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \quad (7.6)$$

I risultati relativi alle tre diverse temperature sono mostrati in Fig. 7.4. La viscosità è circa costante per valori della velocità di deformazione superiori a  $0.1 \text{ s}^{-1}$ , a conferma di un comportamento newtoniano nell'intervallo di temperature studiate. Per valori inferiori di  $\dot{\gamma}$ , corrispondenti a piccole velocità angolari, i valori di  $N$  misurati sono vicini alla risoluzione dello strumento, per cui le misure sono considerate poco affidabili e l'errore sulla viscosità calcolata è maggiore che per valori superiori del tasso di deformazione. La Tabella 7.1 riporta i valori medi della viscosità, con i relativi errori, calcolati per le tre diverse temperature, nell'intervallo in cui è costante.

Tabella 7.1: Viscosità: risultati delle misure.

Temperatura $T$ (K)	Viscosità $\eta$ (Pa s)
1473	$157 \pm 5$
1498	$68 \pm 4$
1523	$43 \pm 4$

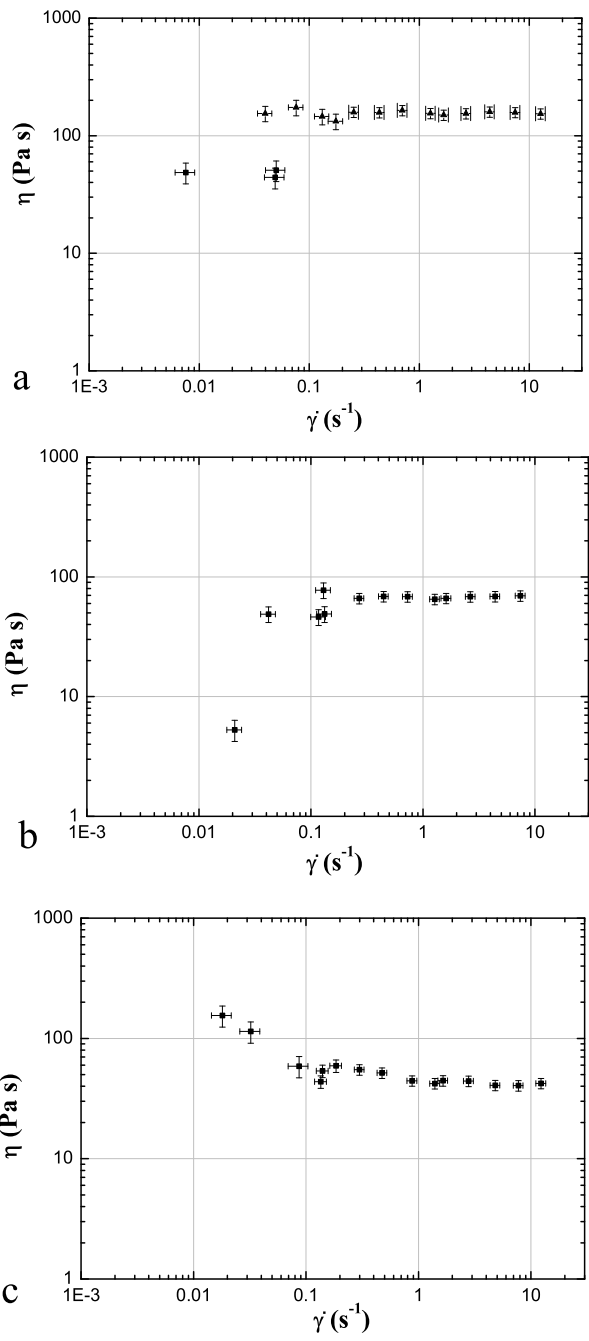


Figura 7.4: Misure di viscosità in funzione del tasso di deformazione, per tre diverse temperature: (a) 1473, (b) 1498, (c) 1523 K.

### 7.2.3 La legge di Arrhenius

La dipendenza della viscosità dalla temperatura è espressa dalla legge di Arrhenius, qui riportata per chiarezza:

$$\eta(T) = \eta_0 e^{C/T} \quad (7.7)$$

con  $\eta_0$  e  $C$  costanti. Dalla precedente si ottiene:

$$\ln \eta(T) = \ln \eta_0 + \frac{C'}{10^4 T} \quad (7.8)$$

L'interpolazione dei dati misurati con la legge di Arrhenius è illustrata nel grafico di  $\ln(\eta)$  in funzione di  $10^4/T$  in Fig. 7.5. I valori dei coefficienti della curva interpolatrice sono riportati in Tabella 7.2.

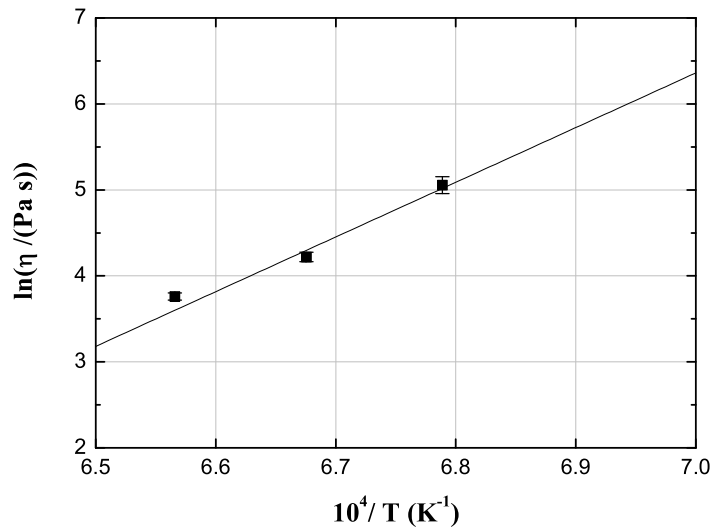


Figura 7.5: Interpolazione dei dati sulla viscosità con la legge di Arrhenius.

Tabella 7.2: Coefficienti della legge di Arrhenius.

$\ln(\eta_0)$ (Pa s)	$C'$ (K <sup>-1</sup> )
$-38.2 \pm 4.6$	$6.4 \pm 0.7$

### 7.3 Misure di conducibilità termica

Per la determinazione sperimentale della conducibilità termica si è applicato un metodo che combina considerazioni sulla temperatura nel fluido con ipotesi reologiche. Le equazioni usate nella descrizione del problema termico sono quelle del caso non stazionario, in coordinate cilindriche, in analogia con il caso del metodo del *filamento caldo* [Buttner et al., 2000]. Considerando una barra conduttiva di raggio  $R_i$  in un mezzo fluido dalla conducibilità termica  $k$  e la diffusività termica  $\chi$ , il problema è descritto dall'equazione

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (7.9)$$

La condizione iniziale di temperatura uniforme nel mezzo è

$$T(r, t \leq 0) = T_0 \quad (7.10)$$

e la condizione al contorno sulla temperatura è

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, t) = T_0 \quad (7.11)$$

La densità di flusso di calore  $q$  per unità di lunghezza è fissata all'interfaccia tra il fluido e la barra

$$2\pi k \left[ r \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r \rightarrow R_i} = -q \quad (7.12)$$

Risolviendo il problema precedente, si ha il profilo della temperatura in funzione di  $r$  e  $t$  [Carslaw e Jaeger, 1959]:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{q}{4\pi k} \int_{r^2/4\pi\chi}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} dn \quad (7.13)$$

$$T(r, t) = T_0 - \frac{q}{4\pi k} \left[ \gamma_E + \ln \left( \frac{r^2}{4\chi t} \right) - \frac{r^2}{4\chi t} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{r^2}{4\chi t} \right)^2 \right) \right] \quad (7.14)$$

Nel limite  $t \rightarrow \infty$ , si ha:

$$T(r, t) = T_0 + \frac{q}{4\pi k} \left[ -\gamma_E + \ln \left( \frac{4\chi t}{r^2} \right) \right] \quad (7.15)$$

con  $\gamma_E = \ln C_{\gamma_E}$ ,  $\gamma_E$  pari alla costante di Eulero. La 7.15 si riscrive come

$$T(r, t) = T_0 + \frac{q}{4\pi k} \ln \left( \frac{4\chi t}{r^2 C_{\gamma_E}} \right) \quad (7.16)$$

$$T(r, t) = T_0 + \frac{q}{4\pi k} \ln \left( \frac{4\chi(s)}{r^2 C_{\gamma_E}} \right) + \frac{q}{4\pi k} \ln(t/(s)) \quad (7.17)$$

Raggruppando i parametri costanti, si rende esplicita la dipendenza lineare della temperatura dal logaritmo naturale del tempo.

$$T(r, t) = A + B \ln(t/s) \quad (7.18)$$

dove

$$A = T_0 + \frac{q}{4\pi k} \ln \frac{4\chi(s)}{r^2 C_{\gamma E}} \quad (7.19)$$

$$B = \frac{q}{4\pi k} \quad (7.20)$$

Il coefficiente  $B$  contiene la conducibilità termica  $k$ , per cui si ricava

$$k = \frac{q}{4\pi B} \quad (7.21)$$

Il fattore  $q/4\pi$  è una costante relativa all'apparato sperimentale, che viene determinata dalla misura della conducibilità termica nota di un materiale usato per la calibrazione del sistema:

$$\frac{q}{4\pi} = B_{cal} k_{cal} \quad (7.22)$$

I dati della calibrazione sono riportati in Tabella 7.3.

Dalla precedente,  $k$  si calcola come:

$$k = \frac{B_{cal} k_{cal}}{B} \quad (7.23)$$

Il parametro  $B$  è il coefficiente angolare della retta di equazione 7.18. Utilizzando il medesimo apparato strumentale descritto nel paragrafo 7.1, si procede nel sottoporre il campione contenuto nella fornace a processi di raffreddamento, portandolo da una temperatura di equilibrio iniziale  $T_1$ , ad una finale  $T_2$ . Viene fissata la velocità di rotazione della barra all'interno dal fluido e si misura così il momento torcente, nel passaggio dall'una all'altra fase di equilibrio, registrando i dati per un tempo sufficiente ad ottenere un valore costante di  $N$ . Gli sforzi calcolati dai momenti iniziale e finale sono indicati con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Dalla temperatura iniziale di 1350 °C si è ripetuto il procedimento imponendo variazioni di temperatura di 25 °C, fino al liquidus (1200 °C). È necessario connettere i dati relativi agli sforzi con la temperatura, in modo da ottenere un grafico di questa variabile in funzione del tempo. Stimando dal grafico il valore di  $B$  si calcola la conducibilità termica  $k$ . A tale scopo, sono utili alcune valutazioni reologiche. Considerando la legge di Arrhenius 7.7, e la relazione con legge di potenza tra viscosità e sforzo

$$\eta(\sigma) = C_1 \sigma^p \quad (7.24)$$

si ottiene

$$\sigma^p(T) = \sigma_0^p e^{C/T} \quad (7.25)$$

Nel caso di fluido newtoniano, la 7.25 si semplifica nella forma:

$$\sigma(T) = \sigma_0 e^{C/T} \quad (7.26)$$

da cui

$$\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \frac{C}{T} \quad (7.27)$$

È ora possibile esprimere la temperatura in funzione dello sforzo  $\sigma$ :

$$T = C \frac{1}{\ln\frac{\sigma}{\sigma_0}} \quad (7.28)$$

I valori dei parametri  $C$  e  $\ln(\sigma_0)$  sono ricavati dalle seguenti espressioni:

$$T_2 - T_1 = \frac{C}{\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_0}} - \frac{C}{\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_0}} \quad (7.29)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\ln\frac{\sigma_2}{\sigma_0}} \quad (7.30)$$

con  $T_1$  e  $T_2$  temperature iniziale e finale,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  valori dello sforzo iniziale e finale, misurati in condizioni di equilibrio.

Dalle misure dello sforzo si calcolano i valori della temperatura secondo la 7.28 e se ne traccia un grafico durante il processo di raffreddamento in funzione del logaritmo naturale del tempo. La Fig. 7.6 mostra uno dei grafici così ottenuti. Esso mostra una prima fase transitoria dovuta alla variazione della temperatura nella fornace, poi una fase transiente in cui il fluido raffredda con velocità quasi costante, ed una terza fase caratterizzata da un basso gradiente termico tra la fornace ed il campione. I dati sono interpolati da una retta nella fase di transizione tra la temperatura iniziale e finale (la seconda regione). L'equazione della retta ottenuta graficamente è confrontata con l'equazione teorica 7.18: la conoscenza della pendenza  $B$  permette di ricavare la conducibilità termica dalla 7.23. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 7.4 e mostrati in Fig 7.7: per temperature superiori al liquidus, la conducibilità termica  $k$  del campione analizzato risulta costante entro le barre di errore.

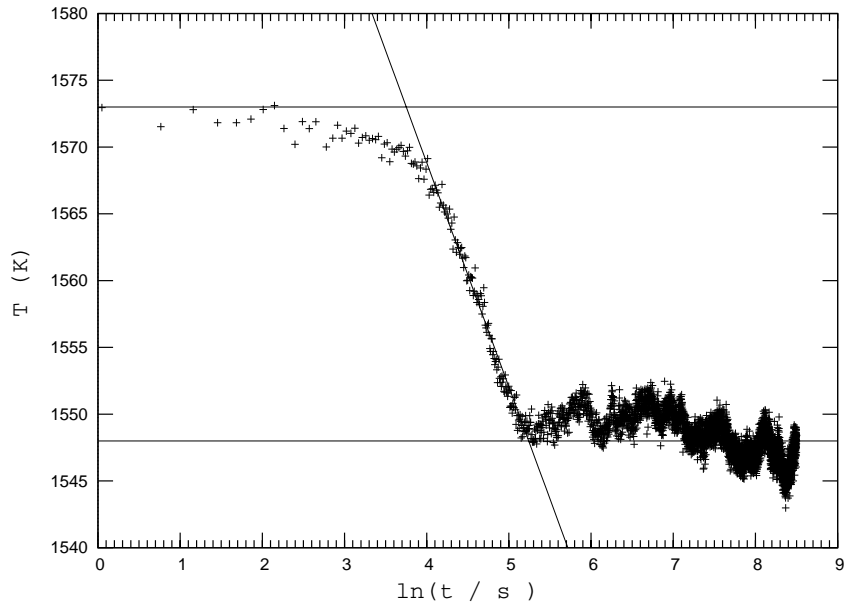


Figura 7.6: Temperatura calcolata dai dati dello sforzo al variare del tempo, per il processo di raffreddamento da 1300 a 1275 °C.

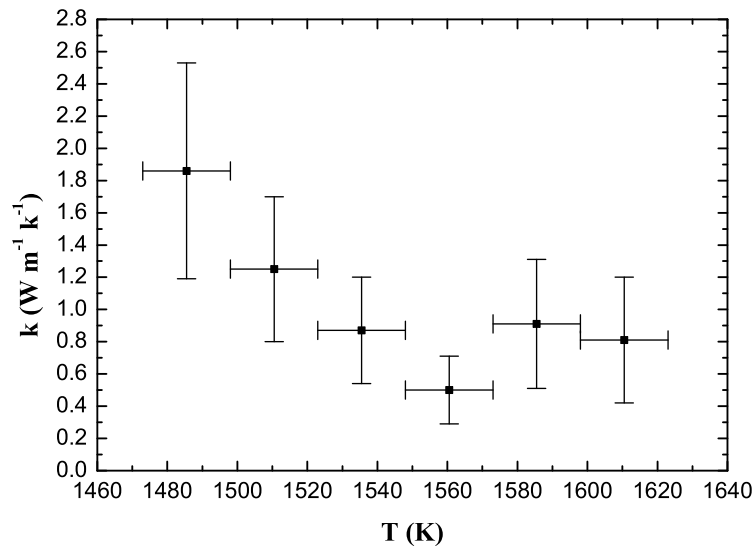


Figura 7.7: Conducibilità termica in funzione della temperatura: valori ottenuti dalle misure. Le barre orizzontali indicano l'intervallo usato nel processo di raffreddamento.



Tabella 7.3: Tabella di calibrazione per la conducibilità termica

$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	$B_{cal}$ (K <sup>-1</sup> )	$k_{cal}$ (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
1350	1325	-13.71± 0.82	0.98± 0.39
1325	1300	-12.45± 0.29	1.00± 0.38
1300	1275	- 8.24± 0.23	1.02± 0.38
1275	1250	-11.76± 0.11	1.04± 0.37
1250	1225	-11.17± 0.09	1.06± 0.37
1225	1200	-10.00± 0.08	1.08± 0.37

Tabella 7.4: Risultati per la conducibilità termica

$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	$B$ (K <sup>-1</sup> )	$k$ (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
1350	1325	-16.58± 0.45	0.81± 0.39
1325	1300	-13.69± 0.42	0.91±0.40
1300	1275	-16.78± 0.25	0.50± 0.21
1275	1250	-14.17± 0.23	0.86± 0.33
1250	1225	-9.48± 0.07	1.25± 0.45
1225	1200	-5.79± 0.05	1.86± 0.67

## 7.4 Conclusioni

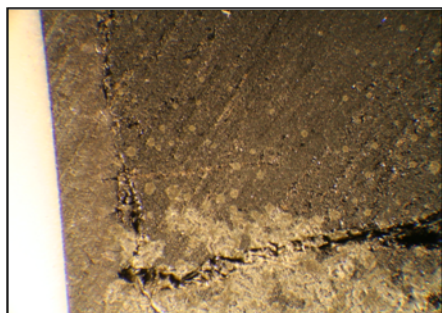
Dalle misure di laboratorio si deduce che il fluido esaminato ha un comportamento newtoniano per valori del tasso di deformazione superiori a  $0.1 \text{ s}^{-1}$ , per temperature comprese tra  $1200$  e  $1250 \text{ }^\circ\text{C}$ . Il valore medio della viscosità decresce con la temperatura.

Interpolando i dati ottenuti con la legge di Arrhenius, si ottiene una stima dei valori dei parametri in essa contenuti e della viscosità.

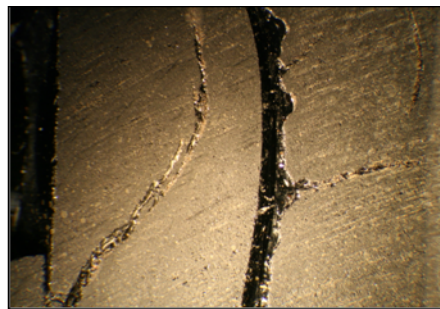
La conducibilità termica risulta costante per temperature superiori al liquidus, fino a  $1350 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Per temperature appena inferiori a quella del liquidus non è possibile ottenere misure riproducibili. Al termine delle misure, i campioni esaminati sono rapidamente raffreddati fino alla temperatura ambiente. Il rapido raffreddamento, pur non essendo esattamente un'operazione di *quenching*, permette di avere un'immagine del campione molto prossima a quella precedente il raffreddamento. Sezionando i campioni, si osserva che quelli raffreddati a partire da temperature iniziali superiori o uguali a  $1200 \text{ }^\circ\text{C}$  hanno struttura vetrosa, omogenea, con presenza di cristalli depositati alla base (Fig 7.8 a e b); le sezioni di campioni raffreddati a temperature inferiori al liquidus, anche solo di  $10$  o  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , presentano cristalli di dimensioni maggiori, dalla forma e distribuzione irregolare, bolle gassose visibili ad occhio nudo, dovute alla separazione di elementi volatili, colorazione verde-bronzo dovuta probabilmente alla presenza di olivina (Fig 7.8 c e d). Queste osservazioni rendono evidente la disomogeneità del sistema per temperature inferiori alla soglia di  $1200 \text{ }^\circ\text{C}$ , reputata il fattore responsabile della non riproducibilità delle misure, mentre non vi sono elementi per deduzioni sul comportamento reologico del fluido a quelle temperature.

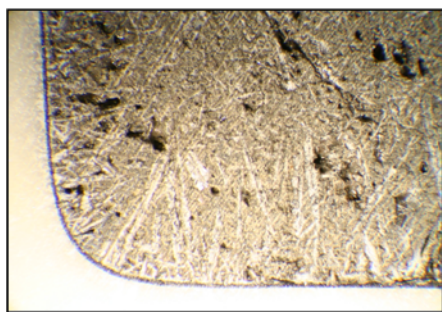
I risultati dell'indagine sperimentale confermano l'ipotesi di fluido newtoniano per temperature elevate e la legge di Arrhenius fornisce una stima della viscosità. Nella formulazione dei modelli, si è utilizzato il modello newtoniano per temperature inferiori al liquidus, assumendo che il valore della viscosità usato contenga in sé gli effetti della disomogeneità del fluido in quell'intervallo di temperature (il valore usato è un ordine di grandezza superiore a quello che si otterrebbe estrapolando la viscosità dalla legge di Arrhenius).



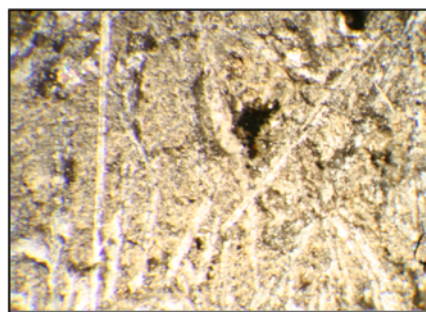
**a**



**b**



**c**



**d**

Figura 7.8: Fotografie delle sezioni dei campioni usati in laboratorio, raffreddati dalla temperatura di 1200 °C (a e b) e di 1175 °C (c e d).

# Conclusioni

I modelli esposti analizzano due dei meccanismi di formazione dei tubi di lava osservati in natura, permettendo di comprendere ed individuare i processi fisici che ne sono responsabili e fornendo una stima dei valori di alcune grandezze in corrispondenza dei quali tali processi sono favoriti.

Il primo modello spiega come la crosta superficiale presente nella regione centrale di alcuni flussi lavici raggiunga una larghezza costante, determinata dalla competizione tra la sua resistenza alla deformazione di taglio e lo sforzo applicato. Sono individuate le condizioni che permettono alla crosta di estendersi fino agli argini laterali, producendo una diminuzione dello sforzo di taglio. L'accrescimento crostale è favorito dall'allargamento del flusso, ipotizzando che esso segua e si adatti alla topografia locale, e la formazione del tubo è possibile su terreni dalla pendenza ridotta o in flussi dal basso tasso effusivo.

Il secondo modello fornisce un'indicazione sulla distanza dalla bocca eruttiva in corrispondenza della quale è possibile la formazione del tubo per accrescimento e congiunzione dei lembi di crosta formati lungo gli argini, individuando una configurazione dello spessore crostale capace di resistere all'effetto di trascinamento del fluido sottostante e all'effetto del proprio peso.

La differenza sostanziale tra i due meccanismi studiati consiste nel considerare o meno l'effetto delle pareti laterali sul bilancio termico nel fluido. Si è definito un criterio che permette di valutare se tale effetto sia trascurabile, in modo da determinare il prevalere dell'uno o l'altro meccanismo, nell'intento di quantificare le variazioni della velocità superficiale lungo la larghezza del canale. Il parametro discriminante risulta l'aspect ratio del flusso: per un valore inferiore a 0.33 si applica il modello che non tiene conto della presenza degli argini e del raffreddamento laterale, in caso contrario è necessario applicare il modello che tiene conto di questi processi. In accordo con quanto si osserva sui campi lavici, dunque, un tubo può formarsi tramite il primo meccanismo in canali larghi e tramite il secondo in canali stretti.

I risultati delle misure sperimentali confermano un comportamento di tipo newtoniano per la lava proveniente dall'Etna, rivelando che la viscosità è costante, per temperature superiori al liquidus, rispetto al tasso di defor-

mazione. Analoghe conclusioni sono tratte per la conducibilità termica: per tali temperature, essa è costante. Appena al di sotto della soglia del liquidus, l'insorgere di disomogeneità nel fluido rende le misure non riproducibili, per cui non si ha evidenza di un particolare comportamento reologico né è possibile ottenere dei valori delle suddette grandezze. Nella formulazione dei modelli, si è utilizzato in prima approssimazione un fluido newtoniano anche per temperature inferiori al liquidus.

È evidente la necessità di una più ampia e precisa indagine delle proprietà fisiche e reologiche della lava, in modo da ridurre l'incertezza sui valori dei parametri introdotti in input nei modelli, e di una sistematica raccolta di dati relativi alle osservazioni dirette sul campo lavico, per testare la validità dei risultati e potenziare l'utilità della modellistica fisico-matematica ai fini della valutazione della pericolosità delle aree vulcaniche.

# Bibliografia

Ball M., H. Pinkerton, e A. J. L. Harris, (2008), Surface cooling, advection and the development of different surface textures on active lavas on Kilauea, Hawai'i, *J. Volcanol. Geoth. Res.*, 173, 148 - 156.

Bailey J. E., A. J. L. Harris, J. Dehn, S. Calvari, e S. K. Rowland (2006), The changing morphology of an open channel on Mt. Etna, *Bull. Volcanol.*, 68, 497 - 515.

Baldwin, E. D., (1953), Notes on the 1880- 81 lava flow from Mauna Loa, *Volcano Letter*, 520, 1 -3.

Batchelor, G. (1967), *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Buttner, R., B. Zimanowski, J. Blumm, e L. Hagemann (1998), Thermal conductivity of a volcanic material (olivine-melitite) in the temperature range between 288 and 1470 K, *J. Volcan. Geoth. Res.*, 80, 293 - 302.

Buttner, R., B. Zimanowski, C. Lenk, A. Koopmann, e V. Lorenz (2000), Determination of thermal conductivity of natural silicate melts, *Appl. Phys. Lett.*, 77-12, 1810 - 1812.

Byrnes J. M., e D. Crown (2001), Relationships between pahoehoe surface units, topography, and lava tubes at Mauna Ulu, Kilauea Volcano, Hawaii, *J. Geophys. Res.*, 106, 2139 - 2151.

Calvari, S., e H. Pinkerton (1998), Formation of lava tubes and extensive flow field during the 1991- 1993 eruption of Mount Etna, *J. Geophys. Res.*, 90, 263 - 280.

Calvari, S., e H. Pinkerton (1999), Lava tube morphology on Etna and evidence for lava flow emplacement mechanism, *J. Geophys. Res.*, 103, B11 27,291 - 301.

Carslaw, H. S. e J. C. Jaeger (1959), *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford.

- Cashman, K. V., H. Pinkerton, e J. Stephenson (1998), Introduction to special section: Long lava flows *J. Geophys. Res.*, *103(B11)*, 27281-27289.
- Cashman, K. V., R. C. Kerr, e R. W. Griffiths (2005), A laboratory model of surface crust formation and disruption on lava flows through non-uniform channels, *J. Fluid Mech.*, *496*, 33 - 62.
- Dragoni, M. (1989), A dynamical model of lava flows cooling by radiation, *Bull. Volcanol.*, *51*, 88 - 95.
- Dragoni, M. (1993), Modelling the rheology and cooling of lava flows, in Kilburn, C. R. J., and G. Luongo, *Active Lavas: monitoring and modelling*, UCL Press, 235 - 307.
- Dragoni, M., M. Bonafede, e E. Boschi (1986), Downslope flow models of a Bingham liquid: implications for lava flows, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *14*, 199 - 222.
- Dragoni, M., F. D'Onza , e A. Tallarico (2002), Temperature distribution inside and around a lava tube, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *115*, 43 - 51.
- Dragoni, M., A. Piombo, e A. Tallarico (1995), A model for the formation of lava tubes by roofing over a channel, *J. Geophys. Res.*, *100*, 8435 - 8447.
- Giordano, D., e B. Dingwell (2003), Non Arrhenian multicomponent melt viscosity: a model, *Earth and Planet. Sc. Letters*, *208*, 337 - 349.
- Giordano, D., e B. Dingwell (2008), Viscosity of magmatic liquids: a model, *Earth and Planet. Sc. Letters*, *10.1016 j.epsl.2008.03.038*.
- Greeley, R., (1971), Observations of actively forming lava tubes and associated structures, Hawaii, *Mod. Geol.*, *2*, 207 - 223.
- Greeley, R., (1972), Additional observations of actively forming lava tubes and associated structures, Hawaii, *Mod. Geol.*, *3*, 157 - 160.
- Greeley, R., (1987), Role of lava tubes in Hawaiian volcanoes, *U.S. Geolog. Survey Prof. Paper*, *1350*, 1589 - 1602.
- Griffiths, R. W., R. C. Kerr, e K., V. Cashman (2001), Surface solidification in open channel flow, *14 Australian Fluid Mech. Conf.*.
- Griffiths, R. W., R. C. Kerr, e K. V. Cashman (2003), Patterns of solidification in channel flows with surface cooling, *J. Fluid Mech.*, *496*, 33 - 62.

- Harris, A., J. Bailey, S. Calvari e J., Dehn (2005), Heat loss measured at a lava channel and its implications for down-channel cooling and rheology *Geological Society of America, Special Paper*, 396.
- Healy, J.J., J.J. De Groot, e J. Kestin (1976), The theory of the hot-wire method for measuring thermal conductivity, *Phys.*, 82C, 392 - 408.
- Hoover, S. R., K. V. Cashman e M., Manga (2000), The yield strength of subliquidus basalts- experimental results, *J. Volcan. Geoth. Res.*, 107, 1 - 18.
- Hunter, G., H. Pinkerton, R. Airey e S., Calvari (2003), The application of a long-range laser scanner for monitoring volcanic activity on Mount Etna, *J. Geophys. Res.*, 123, 203 - 210.
- Jaggard T. A., (1921), Volcanic conditions in February, Activity of Halemaumau, *Monthly Bull. Hawaii Vol. Obser.*, 9, 21 - 37.
- Kauahikaua, J. W., K. V. Cashman, T. N. Mattox, C.C. Heliker, K. A. Hon, H.T. Mangan, e C. R. Thornber (1998), Observations on basaltic lava streams in tubes from Kilauea Volcano, island of Hawai'i, *Bull. Volcanol.*, 103, 27,303 - 27,323.
- Keszthelyi, L. (1995), A preliminary thermal budget for lava tubes on the Earth and planets, *J. Geophys. Res.*, 100, 20,411 - 20,420.
- Kilburn, C. R., e J. E. Guest (1993), Aa lavas of mount Etna, Sicily in Kilburn, C. R. J., e G. Luongo, *Active Lavas: monitoring and modelling*, UCL Press, 73 - 105.
- Kilburn, C. R. J., e R. M. C. Lopes (1988), The growth of aa lava flow fields on Mount Etna, Sicily *J. Geophys. Res.*, 93, 14,759 - 14,772.
- Knudsen, J. G., e D. L. Katz (1958), *Fluid dynamics and heat transfer.*, McGraw-Hill, New York.
- Krieger, I. M., e H. Erolid (1953), *Direct determination of the flow curves of non-Newtonian fluids*, *J. Applied Phys.*, 24(2), 134.
- Kundu, K. P. (1990), *Fluid mechanics*, San Diego Academic Press.
- Miyamoto, H., J. Haruyama, T. Kobayashi, K. Suzuki, T. Okada, T. Nishibori, A. P. Showman, R. Lorenz, K. Mogi, D. A. Crown, J. A. P. Rodriguez, S. Rokugawa, T. Tokunaga e K. Masumoto (2005), Mapping the structure and depth of lava tubes using ground penetrating radar, *Geophys. Res. Letters*, 32, L21316.



- Neri, A. (1998), A local heat transfer analysis of lava cooling in the atmosphere: application to thermal diffusion- dominated lava flows, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, *81*, 215 - 243.
- Nieto De Castro, C.A., B. Taxis, H.B., Roder, e W.A. Wakeam (1988), Thermal diffusivity measurement by the transient hot-wire technique: A reappraisal, *Int. J. Thermophys.*, *9*, 293 - 316.
- Peterson, D. W., R. T. Holcomb, R. I. Tilling, e R. L. Christiansen (1994), Development of lava tubes in the light of observations at Mauna Ulu, Kilauea Volcano, Hawaii, *Bull. Volcanol.*, *56*, 343 - 360.
- Pinkerton, H. (1993), Measuring the properties of flowing lavas, in Kilburn, C. R. J., e G. Luongo, *Active Lavas: monitoring and modelling*, UCL Press, 175 - 189.
- Pinkerton, H., M. James, e A. Jones (2002), Surface temperature measurements of active lava flows on Kilauea volcano, Hawai'i, *Bull. Volcanol.*, *113*, 159 - 176.
- Pinkerton, H., e L. Wilson (1994), Factors controlling the lengths of channel-fed lava flows, *Bull. Volcanol.*, *56*, 108 - 120.
- Rowland S.K., e G.P.L. Walker (1990), Pahoehoe and aa in Hawaii: Volumetric flow rate controls the lava structure, *Bull. Volcanol.*, *52*, 631 - 641.
- Sakimoto, S. E. H., J. Crisp e S. M. Baloga (1997), Eruption constraints on tube-fed planetary lava flows, *J. Geophys. Res.*, *102(E3)*, 6597-6613.
- Sakimoto, S. E. H., e T. K. P. Gregg (2001), Channeled flow: Analytic solutions, laboratory experiments, and applications to lava flows, *J. Geophys. Res.*, *106(B5)*, 8629-8644, 10.1029/2000JB900384.
- Sakimoto, S. E. H., e M. T. Zuber (1998), Flow and convective cooling in lava tubes lava, *J. Geophys. Res.*, *103(B11)*, 27465- 27487.
- Singh, M. M. (1989), Strength of rock, in Touloukian, Y. S., W. R. Judd e R.F. Roy, *Physical properties of rocks and minerals*, Hemisphere, Bristol, 83 - 121.
- Snyder, D., E. Gier, e I. Carmichael (1994), Experimental determination of the thermal conductivity of molten  $\text{CaMgSi}_6\text{O}_6$  and the transport of heat through magmas *J. Geophys. Res.*, *99-B8*, 15503- 15516.
- Sonder, I., B. Zimanowski e R. Buttner (2006), Non-Newtonian viscosity of basaltic magma, *Geophys. Res. Lett.*, *33*, L02303 -L02305.

Tallarico, A., e M. Dragoni (1999), Viscous Newtonian laminar flow in a rectangular channel: application to Etna lava flows, *Bull. Volcanol.*, 61, 40 - 47.

Turcotte, L. D., e G. Schubert (1982), *Geodynamics*, Wiley, New York.

Wentworth., C. K. e G. A. Macdonald (1953), Structures and forms of basaltic rocks in Hawaii, *U. S. Geol. Sur. Bull.*; 994.

White, F.M. (1991), *Viscous Fluid Flow*; 2nd ed., 614 pp., McGraw-Hill, New York.

Witter, J. B. e J. L. Harris (2007), Field measurements of heat loss from skylights and lava tube systems, *J. Geophys. Res.*; 112, B01203.