

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Facoltà di Ingegneria - DISTART

**Dottorato di Ricerca in
SCIENZE GEODETICHE E TOPOGRAFICHE**

**Raggruppamento disciplinare
ICAR 06**

**STUDIO DELLE DEFORMAZIONI
GRAVITAZIONALI DELLE ANTENNE VLBI DI
MEDICINA E DI NOTO CON METODOLOGIE
LASER SCANNING, TOPOGRAFICHE E FEM**

Tesi di Dottorato di:
Ing. Simonetta Montaguti

Tutori:
**Prof. Luca Vittuari
Dott. Pierguido Sarti**

Coordinatore:
Prof. Gabriele Bitelli

XX Ciclo

**QUESTA TESI E' STATA SVOLTA NELL'AMBITO DELLE
ATTIVITA' DI RICERCA FINANZIATE DALL'ISTITUTO DI
RADIOASTRONOMIA DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI
ASTROFISICA DI BOLOGNA**

PAROLE CHIAVE

ANTENNE VLBI
DEFORMAZIONI GRAVITAZIONALI
LASER SCANNING
GEODESIA CLASSICA
ELEMENTI FINITI

INDICE

Introduzione	1
1. VLBI (<i>Very Long Baseline Interferometry</i>)	5
1.1 Introduzione alla interferometria radio	5
1.1.1 La tecnica VLBI	9
1.1.2 Applicazioni della tecnica VLBI	15
1.2 Radiotelescopi di Medicina e di Noto	20
1.2.1 Tipologie dei radiotelescopi	26
1.2.2 Punto di riferimento delle tecniche geodetiche spaziali	28
1.2.3 Deformazioni strutturali delle antenne VLBI	32
2. Tecniche integrate <i>laser scanning</i> e topografiche per la misura delle deformazioni gravitazionali delle antenne VLBI di Medicina e di Noto	37
2.1 Introduzione ai sistemi <i>laser scanner</i> terrestri	37
2.1.1 Principi di acquisizione	39
2.1.2 Procedure di rilievo e <i>data processing</i>	44
2.2 Indagini <i>laser</i> realizzate presso i radiotelescopi di Medicina e di Noto	46
2.3 Considerazioni pratiche ed operative sulle procedure di rilievo topografiche	49
2.4 Indagini topografiche realizzate presso i radiotelescopi di Medicina e di Noto	52
3. FEM (<i>Finite Element Method</i>)	57
3.1 Introduzione ai modelli numerici	57
3.1.1 Presentazione del metodo	58
3.1.2 Proprietà del metodo	62

3.2 Modello agli elementi finiti realizzato per il radiotelescopio di Medicina	72
4. Analisi e confronti fra le diverse metodologie	81
4.1 <i>Post-processing</i> dei dati <i>laser</i> e relativi risultati	81
4.1.1 Codice realizzato in <i>Fortran 90</i> per la stima del paraboloide di <i>best-fit</i>	97
4.2 <i>Post-processing</i> dei dati topografici e relativi risultati	102
4.3 Deformazioni gravitazionali del riflettore primario dei telescopi VLBI: <i>laser scanning</i> e FEM a confronto	107
4.4 Deformazioni gravitazionali del quadrupode dei telescopi VLBI: osservazioni topografiche e FEM a confronto	114
Conclusioni	120
Bibliografia	124
Appendice A	
Nodal solution: output dell'elaborazione Ansys per il modello matematico alla elevazione di 90°	131

INTRODUZIONE

Le antenne paraboliche di Medicina (BO) e di Noto (SR) sono dei telescopi realizzati nell'ambito del progetto nazionale VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), per operare in collegamento con altri radiotelescopi esteri, sfruttando la tecnica interferometrica a lunga base (Sovers et al. 1998, Thompson et al. 2001). Tali antenne, in particolare, fanno parte delle reti europee per l'astronomia, EVN (*European VLBI Network*) e per la Geodesia e, in quest'ultimo settore, partecipano ai programmi osservativi gestiti e coordinati dall'*International VLBI Service for Geodesy and Astrometry*, IVS (<http://ivscc.gsfc.nasa.gov/>).

Negli ultimi anni, l'attenzione della comunità geodetica internazionale si è concentrata sulla necessità di realizzare misure di alta precisione dei vettori eccentricità tra i punti di riferimento delle diverse tecniche geodetiche co-locate presso il medesimo osservatorio.

Quest'approccio, oltre a garantire un effettivo apporto delle *local ties* in sede di compensazione ITRF (Altamimi et. al. 2002, Altamimi et. al. 2005, Altamimi et. al. 2007) e per gli altri parametri combinati (e.g. Kruegel et al. 2007, Thaller et al. 2007), permette di valorizzare il ruolo degli osservatori geodetici multi-tecnica anche nelle applicazioni a scala nazionale, regionale e locale. In particolare, la possibilità di collegare i punti di riferimento di tecniche, quali VLBI, SLR (*Satellite Laser Ranging*), DORIS (*Doppler Orbitography Radiopositioning Integrated by Satellite*) e GPS (*Global Positioning System*), a reti terrestri consente l'inquadramento di reti locali, anche di carattere tecnico, nel sistema di riferimento internazionale (Sarti e Vittuari 2004).

Gli osservatori di Medicina e di Noto sono entrambi dei siti co-locati ITRF dove i vettori eccentricità fra le due tecniche presenti, GPS-VLBI, vengono regolarmente rilevati utilizzando un metodo

indiretto basato su osservazioni terrestri di elevata precisione (Sarti et al. 2004). Entrambe le *local ties*, rilasciate nel formato SINEX (*Solution Independent Exchange format*) con la rigorosa matrice di varianza e covarianza, sono state utilizzate nel più recente calcolo del sistema di riferimento internazionale terrestre: *ITRF2005* (Altamimi et al. 2007).

Diverse sono le cause che possono influenzare la precisione nella stima delle eccentricità: la stabilità dei punti di riferimento dei diversi strumenti geodetici spaziali co-locati riveste un ruolo fondamentale. La posizione teorica del *reference point* è ben definita per ogni strumento geodetico spaziale (Sarti e Angermann 2005) ma la sua realizzazione fisica potrebbe subire notevoli variazioni a causa della gravità e dei gradienti termici che tendono a modificare la struttura del telescopio VLBI.

Modelli di deformazione dipendenti dalla temperatura sono attualmente in fase di definizione allo scopo di valutare l'influenza delle variazioni termiche durante le osservazioni (Nothnagel et al. 1995, Wresnik et al. 2007).

Difficilmente modellabili risultano invece le deformazioni gravitazionali che tendono a degradare le osservazioni geodetiche VLBI e a diminuire l'accuratezza dei parametri geodetici stimati (Carter et al. 1980).

I metodi indiretti per la stima del punto di riferimento, basati su osservazioni terrestri di *targets* distribuiti sulla struttura esterna del radiotelescopio, possono fornire importanti informazioni riguardanti le deformazioni di alcune parti della struttura del telescopio ma non sono in grado di descrivere completamente la variazione del percorso del segnale VLBI dovuto alle deformazioni gravitazionali.

Al fine di creare un modello di elevazione che tenga conto delle variazioni del percorso del segnale indotte dalla gravità occorre determinare la variazione di posizione dei ricevitori, lo scivolamento del *dish* e le variazioni della distanza focale (Clark e Thomsen 1988).

Nei telescopi VLBI le variazioni della distanza focale sono direttamente legate alle deformazioni della specchio primario (paragrafo 1.2-3).

Nel settembre del 2005, la forma del riflettore primario delle antenne VLBI di Medicina e di Noto, a differenti elevazioni (90° , 75° , 60° , 45° , 30° , 15°), è stata da noi direttamente determinata mediante un'indagine *laser* di tipo terrestre. Il sistema *laser* utilizzato, *Trimble-Mensi GS200* (<http://www.trimble.com/gs200.shtml>), è stato posizionato in prossimità del fuoco secondario, su due supporti creati *ad hoc* per questo tipo di indagine e la distanza focale, nonché gli altri parametri geometrici del paraboloide, sono stati stimati utilizzando un approccio *best-fit* applicato alle nuvole di punti acquisite.

L'indagine *laser* è stata integrata con osservazioni terrestri realizzate da due *total stations* di alta precisione; TDA5005 (15 mgon; 1 millimetro + 2 ppm), TC2003 (0,15 mgon; 1 millimetro + 1ppm). In particolare, le indagini topografiche hanno permesso l'inserimento delle nuvole *laser* all'interno dello stesso sistema topocentrico utilizzato per la stima delle *local ties*. Inoltre, grazie alle campagne di misura realizzate nel mese di ottobre 2006, presso l'osservatorio di Medicina, e nel mese di agosto 2007 in entrambi i telescopi VLBI di Medicina e di Noto, è stato possibile valutare le deformazioni gravitazionali del quadrupode.

Infine, per poter confrontare e confermare le deformazioni gravitazionali del riflettore primario e del quadrupode, ricavate dalle indagini *laser* e topografiche, un modello agli elementi finiti è stato applicato all'antenna di Medicina.

Di seguito viene brevemente illustrata la struttura attraverso la quale si articolerà la presente tesi.

Capitolo 1. Breve introduzione alla interferometria radio fino a giungere alla descrizione della tecnica interferometrica ad elementi disconnessi (*Very Long Baseline Interferometry*) e alle sue principali

applicazioni soprattutto in campo geodetico. Descrizione delle caratteristiche geometriche e tecniche delle antenne VLBI di Medicina e di Noto, delle loro differenze e delle deformazioni strutturali a cui esse possono essere soggette. Definizione dei *reference points* per le principali tecniche geodetiche spaziali e breve illustrazione del procedimento indiretto utilizzato per determinare l'*invariant point* per la tecnica VLBI.

Capitolo 2. Considerazioni pratiche ed operative sulle procedure di rilievo utilizzate per lo studio delle deformazioni gravitazionali dei radiotelescopi di Medicina e di Noto (*laser scanning* terrestre e topografia). Descrizione di tutte le operazioni, le soluzioni tecniche, gli accorgimenti adottati in entrambe la campagne di misura e le problematiche incontrate.

Capitolo 3. Illustrazione dei concetti di base e delle caratteristiche generali su cui si fonda il metodo di analisi strutturale agli elementi finiti e delle fasi fondamentali attraverso le quali si esplica l'analisi stessa con questo tipo di approccio. Descrizione di tutti gli schemi strutturali agli elementi finiti, delle condizioni di carico e di vincolo adottate nel modello dell'antenna VLBI di Medicina.

Capitolo 4. Analisi dei dati acquisiti dalle indagini *laser* e topografiche e confronto dei risultati ottenuti dalle diverse metodologie sperimentati per i telescopi VLBI di Medicina e di Noto con lo scopo di mettere in luce una loro possibile congruenza.

1.

VLBI

(VERY LONG BASELINE INTERFEROMETRY)

1.1 Introduzione alla interferometria radio

La radioastronomia studia i corpi celesti rilevando ed analizzando le radiazioni elettromagnetiche da loro emesse nell'intervallo spettrale delle radioonde, ossia con frequenze comprese fra 10 MHz e 300 GHz.

La radioastronomia ha avuto inizio, in modo casuale, con la scoperta delle radioemissioni cosmiche nel dicembre del 1931 per opera di Karl Jansky, un giovane ingegnere dei *Bell Telephone Laboratories* che studiava l'origine dei disturbi di tipo atmosferico che interferivano con le prime radiocomunicazioni commerciali a lunga distanza. Le osservazioni di Jansky furono confermate e perfezionate da G. Reber che realizzò i primi apparati concepiti per uso radioastronomico. Negli anni che seguirono la seconda guerra mondiale, stimolata dal consolidarsi della tecnologia elettronica dei sistemi di radiocomunicazione e radar, la radioastronomia ebbe uno sviluppo rapidissimo, rivelandosi uno strumento fondamentale ed insostituibile per la conoscenza sempre più approfondita dell'universo.

Gli strumenti che vengono utilizzati per effettuare le ricerche radioastronomiche sono i radiotelescopi (Figura 1.1-2).

Il radiotelescopio è generalmente scomponibile in due parti principali: il sistema d'antenna che costituisce il vero e proprio trasduttore destinato a trasformare l'energia elettromagnetica incidente in un differenza di potenziale (segnale utile), ed il ricevitore, costituito

da un insieme di apparati elettronici necessari per amplificare il debole segnale fornito dall'antenna fino a renderlo misurabile. Il più generale processo di analisi dei segnali consiste nella misura dell'intensità delle radiazioni extraterrestri captate dalle diverse direzioni dello spazio per differenti lunghezze d'onda (caratteristiche spettrali della radiazione), insieme alla misura del loro grado di polarizzazione.

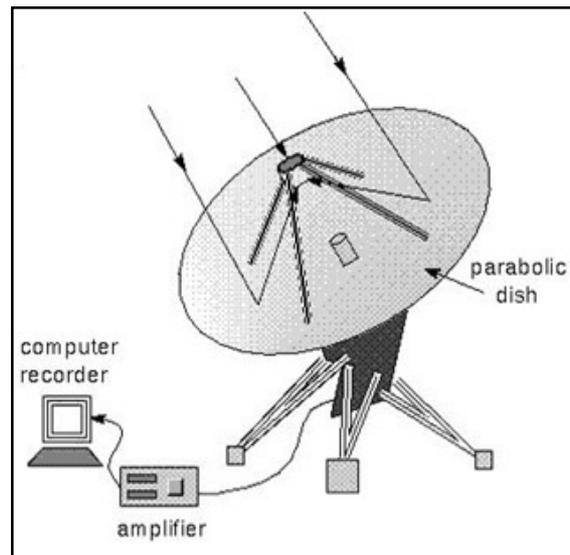


Figura 1.1-2: Struttura schematica essenziale di un radiotelescopio.

Le principali grandezze caratterizzanti un radiotelescopio sono:

- Sensibilità;
- Potere risolutore (o di risoluzione).

La sensibilità rappresenta la capacità di rilevare segnali molto deboli. Tale grandezza dipende dall'area di raccolta (aumenta proporzionalmente con il quadrato del diametro), dall'efficienza di antenna e dalla sensibilità del ricevitore utilizzato per amplificare i segnali ricevuti.

Il potere risolutore rappresenta invece l'angolo minimo sotto cui è possibile distinguere due oggetti vicini. In particolare, in radioastronomia, per angolo minimo si intende la minima separazione angolare tra due oggetti celesti, alla quale le immagini risultano distinte anziché confuse in una sola. Il potere risolutore è legato

all'apertura del fascio di antenna che dipende, a sua volta, dal diametro della stessa. Se si indica con φ l'apertura del fascio, espressa in radianti, e con D il diametro dello specchio riflettente del paraboloide che costituisce l'antenna, il potere risolvente dello strumento alla frequenza ν è esprimibile dalla seguente relazione:

$$\varphi \propto \frac{c}{D\nu} \quad (1.1-1)$$

Se il diametro aumenta, il fascio si restringe, per cui il sistema diventa più direttivo e la risoluzione migliora (Figura 1.1-3).

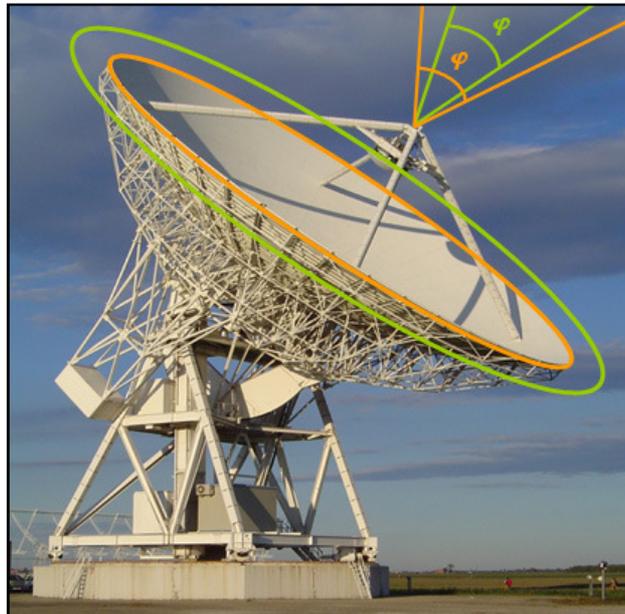


Figura 1.1-3: Relazione tra il diametro dell'antenna e l'apertura del fascio.

Per ottenere, ad esempio, delle risoluzioni simili a quelle dell'occhio umano, dell'ordine di 1 minuto d'arco, occorre avere, nel caso di osservazioni effettuate alla lunghezza d'onda di 20 cm, uno specchio delle dimensioni di 700 m.

Il potere risolvente e la sensibilità sono quindi i fattori più critici e più delicati per gli studi radioastronomici. La rivelazione delle onde radio richiede, infatti, superfici di raccolta della radiazione

elettromagnetica molto grandi, comportando evidenti problemi meccanici, strutturali (legati alla gravità) e di costo. Tali problemi sono stati risolti introducendo la tecnica interferometrica.

L'interferometria si basa sul principio di interferenza delle onde elettromagnetiche e permette di ottenere elevati poteri risolutivi combinando coerentemente le informazioni che provengono da più osservatori astronomici distribuiti sulla superficie terrestre. La distanza fra le varie antenne può variare da pochi metri a migliaia di chilometri, ovvero fino a dimensioni dell'ordine del diametro terrestre. Il potere risolutivo risultante è proporzionale alla distanza tra gli osservatori stessi. Con antenne collocate in paesi e continenti diversi ed applicando un approccio interferometrico si possono ottenere radiotelescopi dotati di risoluzioni angolari altissime, dell'ordine della frazione del millisecondo d'arco (mas). Ad esempio, un'osservazione condotta a $\lambda = 20$ cm da due telescopi distanti 8000 km permette di ottenere una risoluzione angolare pari a circa 5.2 mas.

Ogni antenna che compone l'interferometro è dotata di una strumentazione che permette di registrare lo stesso segnale da cui, successivamente possono essere estratte le informazioni di interesse astronomico, oppure geodetico. L'unico modo per ottenere tali informazioni è quello di sottoporre i segnali ad un processo di cross-correlazione, per ogni coppia di antenne che osserva simultaneamente lo stesso oggetto.

Con riferimento alla figura 1.2-3 il modello più semplice di radiointerferometro è costituito da due antenne collegate fra loro e orientate verso la stessa sorgente. In tal caso B rappresenta la linea di base dell'interferometro.

Il fronte d'onda emesso da una radiosorgente in direzione ϑ percorrerà una lunghezza diversa per raggiungere le due antenne e la differenza di cammino sarà espressa dalla relazione:

$$l = B \sin \vartheta \quad (1.1-2)$$

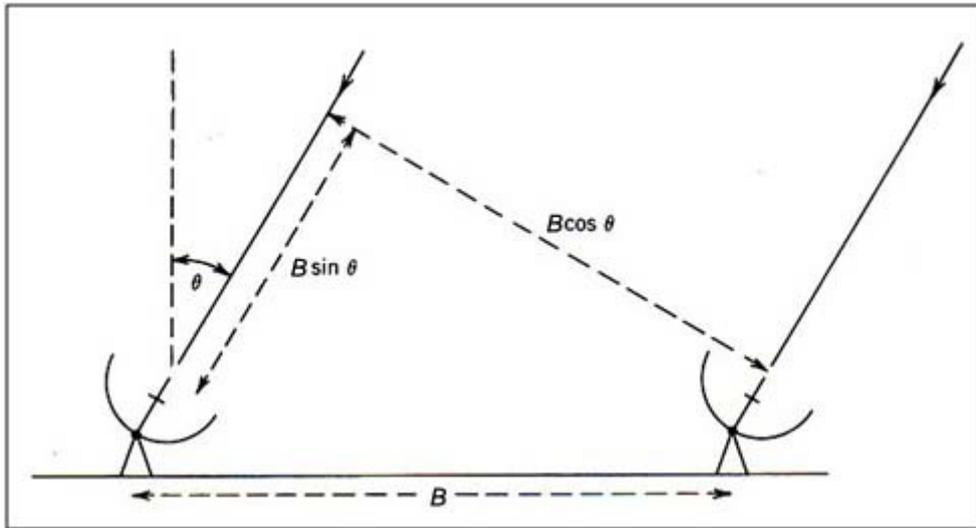


Figura 1.2-3: Geometria di un interferometro elementare composto da due antenne.

Il processo di correlazione dei dati, in termini di frequenza ν e al variare dell'angolo ϑ con la rotazione terrestre, permetterà di ricostruire le cosiddette *frange d'interferenza* espresse dalla seguente funzione:

$$F = \cos 2\pi\nu\tau_g = \cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right) \quad (1.1-3)$$

dove il ritardo geometrico, $\tau_g = \frac{B}{c} \sin \vartheta$, in funzione della velocità c della luce, esprime il tempo impiegato dallo stesso fronte d'onda per giungere alla seconda stazione dopo che è stato ricevuto dalla stazione più vicina.

1.1-1 La tecnica VLBI

La più recente e diffusa tipologia di sistemi radio interferometrici è quella denominata VLBI. Si tratta di interferometri in cui le antenne possono distare fra loro migliaia di km con basi che in linea di principio possono essere grandi quanto il diametro della Terra; il loro potere risolutore è, come già detto, equivalente a quello che si

otterrebbe con un unico paraboloide di dimensioni analoghe all'interferometro.

Questo sistema esalta al massimo le prestazioni degli impianti interferometrici: mentre, in genere, gli elementi di raccolta della radiazione cosmica sono collegati elettricamente fra loro mediante linee di trasmissione (ad esempio VLA, *Very Large Array*; WSRT, *Westerbork Synthesis Radio Telescope*; ATCA, *Australian Telescope Compact Array*) o ponti radio (MERLIN, *Multi Element Radio Linked Interferometer*), con la tecnica VLBI le antenne riceventi sono indipendenti e possono essere spaziate fino a migliaia di chilometri sulla superficie terrestre ed eventualmente anche poste a bordo di satelliti artificiali (Figura 1.1.1-1).

Nella tecnica ad elementi connessi le antenne sono caratterizzate da un medesimo standard di frequenza che, eliminando i problemi legati alla sincronizzazione degli orologi delle stazioni, consente una più precisa ricerca delle frange di interferenza. La connessione fra le antenne limita però la lunghezza delle *baselines* e di conseguenza anche il potere risolutore dello strumento.



Figura 1.1.1-1: Tecnica VLBI Terra-Spazio.

I sistemi d'antenna progettati per l'applicazione VLBI sono in genere riflettori parabolici con illuminazione *Cassegrain* che consentono di raggiungere basse temperature di rumore con elevata efficienza di radiazione su un ampio spettro di frequenze.

La tecnica VLBI utilizza come segnali le emissioni radio provenienti da sorgenti naturali: in particolare, *quasars* per quanto riguarda le osservazioni geodetiche. Data l'enorme distanza delle radiosorgenti, il fronte d'onda del segnale può essere considerato piano (Figura 1.1.1-2).

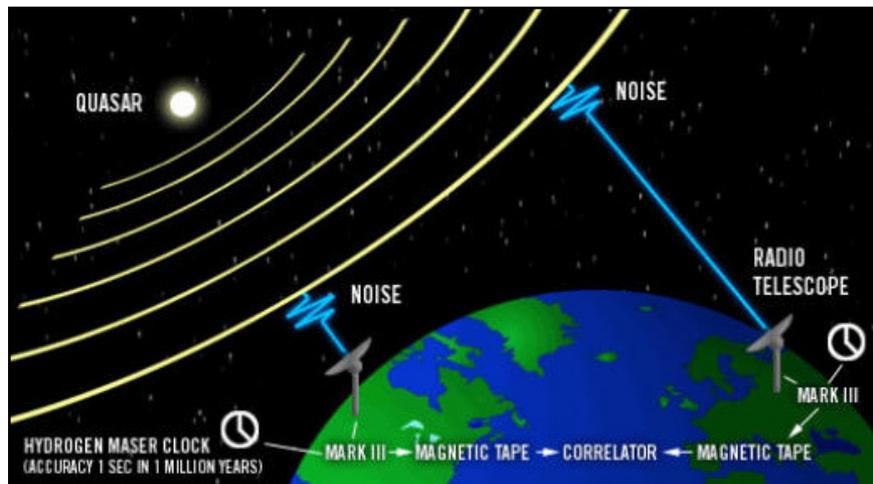


Figura 1.1.1-2: Schema di una acquisizione interferometrica VLBI: l'enorme distanza delle *quasars* permette di considerare il segnale da loro emesso piano.

Per ottenere l'interferenza fra le stazioni che partecipano all'esperimento occorre registrare il segnale radioastronomico insieme ad un preciso segnale di riferimento temporale in modo da poter eseguire correttamente la combinazione delle osservabili.

Negli osservatori di Medicina e di Noto le osservazioni VLBI vengono effettuate utilizzando i terminali Mark IV (conversione, suddivisione delle bande, digitalizzazione) e Mark V (raccolta dati). Il terminale Mark V è costituito da 2 serie di 8 dischi rigidi con capacità 400 Gbyte ciascuno.

Il processo di correlazione fra i segnali registrati alle diverse stazioni è effettuato successivamente da un elaboratore elettronico dedicato, situato nel centro di raccolta dei dati.

La riuscita dell'esperimento è condizionata dalla perfetta conservazione della fase originale del segnale nei singoli punti di osservazione quando si effettua la conversione di frequenza dalla banda di ricezione a quella di video in banda-base.

Il VLBI è un interferometro in cui le singole antenne non vengono utilizzate in una sola configurazione standard, ma questa può essere modificata secondo le esigenze dell'esperimento.

Le antenne di Medicina e di Noto, ad esempio, offrono principalmente due tecniche di mappatura : *Raster Scan* e *On-The-Fly*.

Nella modalità *Raster Scan* si utilizzano puntamenti discreti adiacenti durante i quali l'antenna si ferma per il tempo di esposizione necessario. Tipicamente si scansionano alternativamente due direzioni perpendicolari tra di loro.

La tecnica di mappatura *On-The-Fly* consiste invece, nell'acquisire i dati in modo continuo mentre l'antenna si sposta a velocità costante lungo la sorgente, tipicamente con percorsi a "righe" o "colonne".

I dati acquisiti vengono elaborati ogni pochi secondi, cui corrispondono escursioni di pochi arcsec (a seconda della velocità dell'antenna) lungo la scansione. Per ottenere sensibilità apprezzabili occorre ripercorrere più volte gli stessi punti, preferibilmente lungo direzioni diverse. Questa tecnica attualmente è stata testata e utilizzata solo per osservazioni polarimetriche.

Le antenne che partecipano all'esperimento possono differire in maniera sensibile sia per funzionalità che per potenzialità. I sistemi di ricezione e di registrazione non sempre sono omogenei a causa di sviluppi tecnologici realizzati in tempi diversi e per scopi differenti.

Un altro importante aspetto che influisce sulla qualità dei dati raccolti riguarda la distribuzione delle antenne sulla superficie terrestre: l'emisfero boreale presenta una densità molto maggiore, anche se non uniforme, rispetto all'emisfero australe.

Le osservazioni infine, vengono effettuate da antenne che utilizzano degli standard temporali indipendenti. Per alcune applicazioni, come quelle geodetiche, questo produce un'incertezza che si riflette sulla precisione dei risultati raggiunti tramite la ricerca delle frange d'interferenza. La sincronizzazione degli orologi presenti presso i vari osservatori è quindi fondamentale.

L'Italia partecipa alla rete internazionale VLBI con due stazioni realizzate per lo scopo, una a Medicina e l'altra a Noto, entrambe attualmente gestite dall'Istituto di Radioastronomia dell'INAF (Istituto Nazionale di Astrofisica) di Bologna (<http://www.ira.inaf.it>).

Ciascuna stazione comprende un'antenna a riflettore parabolico con diametro di 32 metri completamente orientabile in azimut e zenit.

Le antenne di Medicina e di Noto, in particolare, fanno parte delle reti europee per l'astronomia, EVN (Figura 1.1.1-3), e per la Geodesia (Figura 1.1.1-4) e, in quest'ultimo settore, partecipano ai programmi osservativi gestiti e coordinati dall'IVS (Schlueter e Behrend 2007).

Le antenne sono usate come strumento singolo per il 50% del loro tempo per misure di variabilità e polarizzazione della emissione dalle radiosorgenti e per misure della intensità e della larghezza di righe spettrali da nubi molecolari e regioni di formazione stellare.

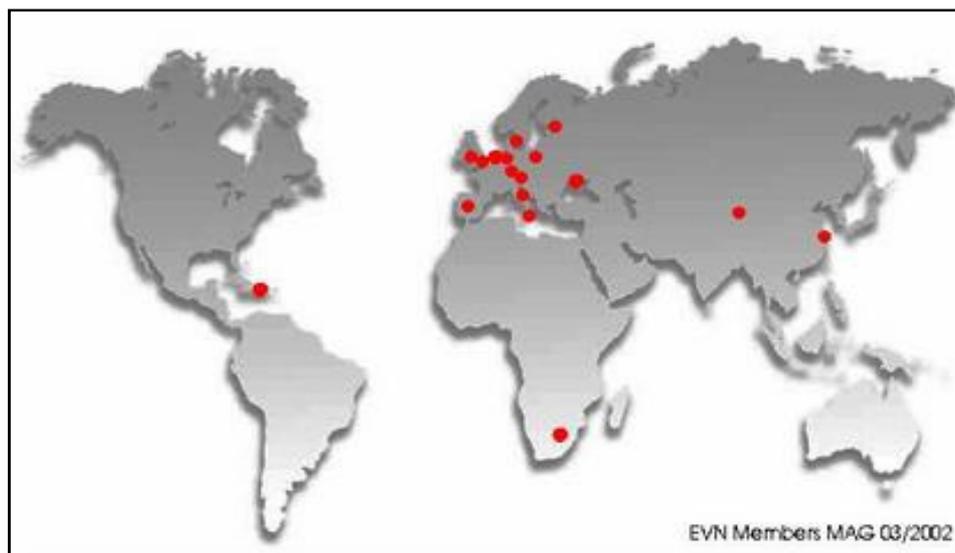


Figura 1.1.1-3: European VLBI Network.



Figura 1.1.1-4: Siti in cui si trovano le antenne radioastronomiche che fanno parte della rete mondiale di VLBI e principali centri di elaborazione.

Una terza stazione, il *Sardinia Radio Telescope* (SRT), è attualmente in costruzione presso la località San Basilio in provincia di Cagliari (Olmi e Grueff 2006) e sarà un radiotelescopio di tipo AZ-EL con specchio primario di 64 metri.

La realizzazione di SRT, grazie alle sue caratteristiche e alla sua collocazione, consentirà la nascita di una rete VLBI completamente italiana (I-VLBI): la combinazione con i radiotelescopi di Medicina e Noto genera una configurazione geometrica a triangolo con *baselines* comprese tra i 500 e i 900 km (Figura 1.1.1-5) che fornisce informazioni utili e complementari per gli studi geofisici e di dinamica crostale (Setti 2006).

L'eventuale inserimento successivo del radiotelescopio di Matera renderebbe poi ancora più efficiente il sistema, aggiungendo tre *baselines* più corte (400÷700 km).



Figura 1.1.1-5: Rete VLBI italiana.

1.1.2 Applicazioni della tecnica VLBI

Il VLBI, nato all'inizio degli anni settanta come tecnica radioastronomica per lo studio della parte centrale delle radiosorgenti compatte, si è contemporaneamente sviluppato anche come tecnica geodetica per misure di grande precisione, su distanze intercontinentali.

L'evoluzione tecnologica degli ultimi anni ha notevolmente migliorato le prestazioni della strumentazione utilizzata per condurre studi nel campo della Geodesia. L'affidabilità dei risultati è conseguentemente aumentata e ha permesso di collegare con più sicurezza gli effetti e le cause che concorrono alla realizzazione dei fenomeni studiati. Al giorno d'oggi la Geodesia Spaziale possiede caratteri di elevata interdisciplinarietà: i suoi risultati sono utili, tra gli altri, nel campo della Geofisica, della Meteorologia, della Climatologia e dell'Astronomia. I numerosi processi che influenzano l'evoluzione del nostro Pianeta sono originati da fenomeni di diversa natura ed intensità. Il VLBI geodetico è in grado di studiarne una parte in modo indiretto, valutando gli effetti che essi hanno su alcune

caratteristiche fondamentali del moto terrestre. Le forze originate da fenomeni che hanno luogo all'interno della Terra e sulla sua superficie si combinano con le forze che trovano origine al di fuori dell'atmosfera (come, ad esempio, l'attrazione gravitazionale della Luna e dei pianeti del Sistema Solare) e concorrono a variare la velocità di rotazione della Terra attorno al proprio asse e l'orientazione dello stesso asse terrestre. Le precipitazioni, la pressione atmosferica, le correnti oceaniche, le maree concorrono a variare la distribuzione delle masse superficiali e contribuiscono a variare la direzione dell'asse terrestre.

La mutevole interazione tra la massa atmosferica e la superficie terrestre nonché l'azione dei venti hanno invece un effetto riconoscibile sulla velocità di rotazione della Terra.

Lo studio della dinamica terrestre viene condotto attraverso la stima dei Parametri di Orientazione della Terra (EOP), ovvero la misura della rotazione terrestre rispetto alle stelle fisse (UT1), il Moto del Polo, la Precessione e la Nutazione (Mathews et al. 2002).

Il VLBI è l'unica tecnica geodetica spaziale capace di misurare contemporaneamente ed accuratamente gli EOP: parametri che vengono utilizzati per identificare la trasformazione tra il Sistema di Riferimento Internazionale Terrestre (ITRS) ed il Sistema di Riferimento Internazionale Celeste (ICRS). Entrambi i sistemi (Figura 1.1.2-1) sono mantenuti dallo IERS, *International Earth Rotation and Reference System Service* (Figura 1.1.2-2), e materializzati dai rispettivi *reference frames*, ITRF e ICRF (Ma 2004, Altamimi et al. 2005, Feissel-Vernier et al. 2006, Titov 2007).

L'ICRS è realizzato, utilizzando esclusivamente osservazioni VLBI, da un catalogo di coordinate celesti di radiosorgenti extragalattiche, le quali, ad un'epoca fondamentale arbitraria, definiscono l'ICRF. In particolare, l'ICRS è realizzato attraverso l'ICRF definito da un catalogo di coordinate equatoriali (ascensioni rette e declinazioni) di oltre 200 sorgenti radio extragalattiche (*quasars*) all'epoca J2000.0. La direzione degli assi di riferimento è

definita implicitamente dal catalogo ICRF in cui sono riportate le coordinate delle sorgenti radio calcolate annualmente dai vari centri di analisi dello IERS. L'origine è realizzata modellando osservazioni nell'ambito della relatività generale.

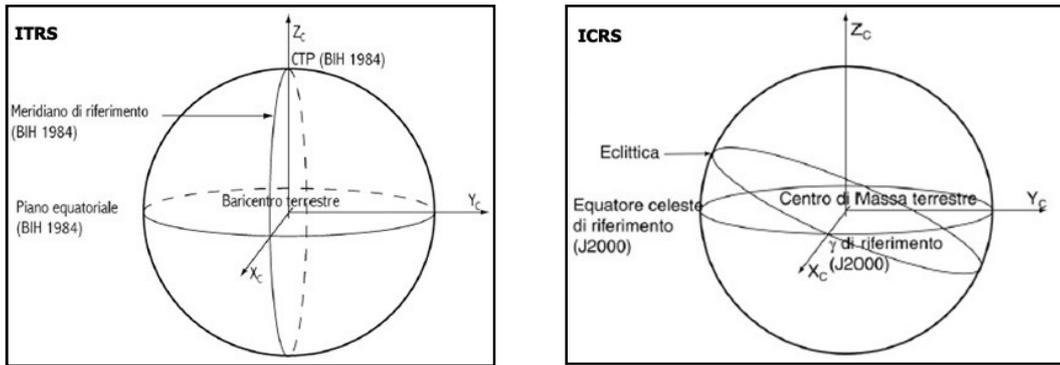


Figura 1.1.2-1: Sistemi di riferimento globali: ITRS, ICRS.

Le *quasars* grazie ad alcune caratteristiche fisiche quali, l'elevata potenza, la morfologia compatta e la stabilità, sono radiosorgenti ideali per formare un sistema di riferimento celeste quasi-inerziale. Rispetto a tale sistema si esprimono tutte le misure effettuate osservando gli altri oggetti astronomici.

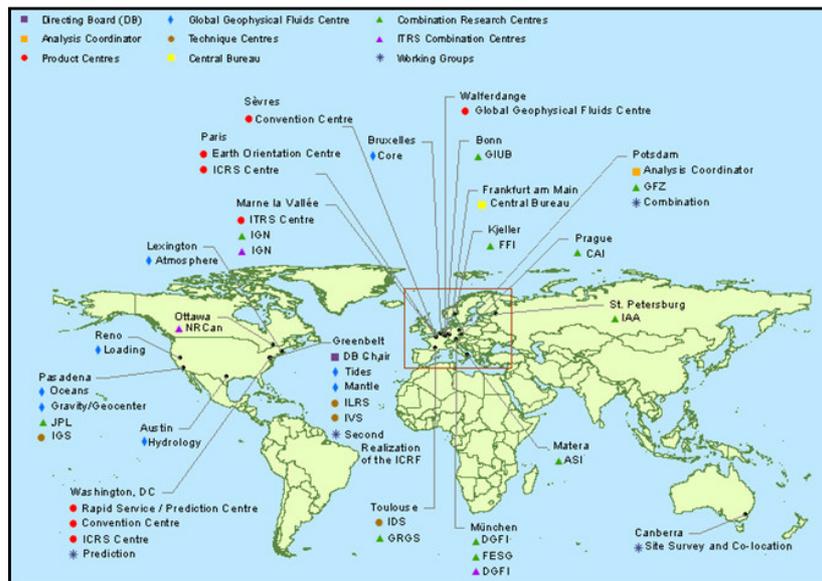


Figura 1.1.2-2: Siti mondiali dello IERS.

L'ITRS è un sistema geocentrico e solidale con la Terra. Geocentrico poiché ha l'origine coincidente con il centro di massa convenzionale della Terra, calcolato includendo gli oceani e l'atmosfera; solidale con la Terra, nel senso che il sistema è "fissato" alla Terra e quindi la segue nei suoi moti.

La realizzazione dell'ITRF (Boucher et al. 1999, Altamimi et al. 2005, Altamimi et al. 2007) inizialmente si basava sulla combinazione di un set di coordinate e di velocità di stazioni ricavate da osservazioni VLBI, SLR e LLR; successivamente, furono introdotti i dati GPS (nel 1991) e i dati DORIS (nel 1994).

Oggi vengono usate le osservazioni che derivano dalle seguenti tecniche geodetiche spaziali: VLBI, SLR, GPS e DORIS.

L'evoluzione attuale dell'ITRF, ITRF2005, è stata rilasciata il 5 ottobre 2006: la sua realizzazione è stata effettuata utilizzando le diverse stazioni riportate nella figura 1.1.2-3. L'ITRF2005, diversamente dalle precedenti versioni, è stato realizzato utilizzando come input i dati sotto forma di serie storiche delle posizioni delle stazioni e dei Parametri di Orientamento Terrestre (EOP) e le *local ties* nei siti comuni.

È importante sottolineare che la realizzazione dell'ITRS, fino ad ora, si basava su stime di posizioni e velocità di un insieme di stazioni a terra, ottenute con misure VLBI, LLR, SLR, GPS e DORIS. Nei siti co-locali, in cui vengono effettuate misure di geodesia spaziale con più di uno dei suddetti sistemi, le soluzioni connesse non sono tra loro perfettamente coerenti; tali incoerenze sono presenti nella soluzione combinata ITRF.

Il vantaggio di utilizzare le serie temporali delle posizioni delle stazioni che hanno contribuito alla realizzazione dell'ITRF2005 consiste nella possibilità di isolare e controllare tutti i tipi di discontinuità presenti generando così un ITRF rigorosamente coerente.

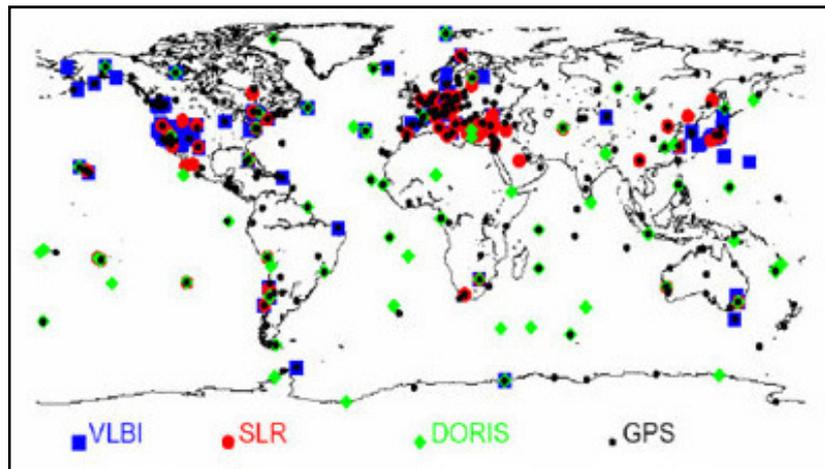


Figura 1.1.2-3: Il frame ITRF2005.

Per questa applicazione, quindi, sono particolarmente importanti le misure che vengono fatte presso gli osservatori che ospitano due o più tecniche di Geodesia Spaziale.

Insieme a quello di Noto, l'osservatorio di Medicina è uno dei settanta osservatori geodetici che ospitano due tecniche: GPS e VLBI (Figura 1.1.2-2). Presso il Centro di Geodesia Spaziale di Matera sono invece presenti tre tecniche: GPS, SLR e VLBI.



Figura 1.1.2-2: Co-locazione fra l'antenna GPS e il radiotelescopio VLBI presso l'osservatorio di Medicina.

Le soluzioni delle serie storiche utilizzate sono fornite con un campionamento settimanale dallo IAG, *International Services of satellite techniques* (IGS, ILRS e IDS), e su base quotidiana (VLBI session-wise) dall'IVS.

Ad eccezione della tecnica DORIS, ognuna delle serie storiche relative alla singola tecnica è già una combinazione, su base settimanale, delle soluzioni dei singoli *Analysis Center*.

Un'altra importante applicazione della tecnica VLBI è lo studio della cinematica regionale e globale della crosta terrestre: le posizioni e le velocità di spostamento dei siti in cui sono presenti i radiotelescopi possono essere determinati con una precisione sub-centimetrica.

In Europa, i dati raccolti coprono ormai un periodo di quasi 20 anni per la maggior parte degli osservatori; è quindi possibile studiare l'evoluzione delle deformazioni nell'area mediterranea, nella quale la placca Africana e quella Eurasiatica interagiscono. L'origine della notevole attività sismica che interessa il nostro paese e le aree limitrofe è riconducibile proprio al processo di sprofondamento della placca Africana sotto a quella Europea.

1.2 Radiotelescopi di Medicina e di Noto

Le antenne VLBI di Medicina (Figura 1.2-1) e di Noto sono dei radiotelescopi di configurazione Cassegrain (specchio primario parabolico, specchio secondario iperbolico) di tipo Azimut-Elevazione (paragrafo 1.2-1) attualmente gestiti dall'Istituto Nazionale di Astrofisica.

Entrambi i telescopi sono coinvolti in diversi progetti, in rete o in single *dish*, ovvero la modalità operativa in cui l'antenna compie le sue osservazioni singolarmente, non in modalità interferometrica.

Il riflettore primario, di 32 metri di diametro, è costituito da circa 240 pannelli di alluminio sorretti da una travatura reticolare posteriore.



Figura 1.2-1: Antenna VLBI di Medicina.

Al vertice dello specchio è previsto l'alloggiamento per la strumentazione relativa al fuoco Cassegrain: fino a 9 ricevitori di cui uno centrale e gli altri otto periferici (Figura 1.2-2).

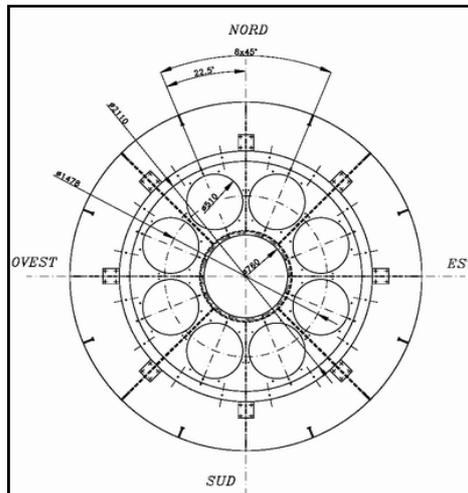


Figura 1.2-2: Alloggiamenti in fuoco Cassegrain.

La travatura dello specchio primario sostiene anche il secondario (Figura 1.2-3), posto a circa 9 metri di distanza, tramite il classico sistema a quattro travi inclinate di 45° (quadrupode).

Lo specchio secondario, o sub-riflettore, presenta un diametro di circa 3.2 metri ed è formato da un unico pannello convesso di forma iperbolica, alle spalle del quale sono fissati 3 attuatori che ne consentono lo spostamento angolare. Tutto l'insieme è in grado inoltre di traslare lungo gli assi x e y (Figura 1.2-3).

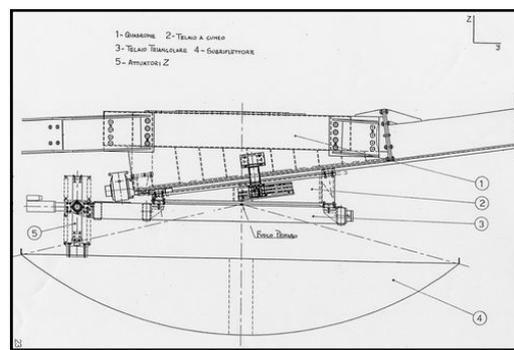


Figura 1.2-3: Riflettore secondario.

Il sub-riflettore, posto di fronte al riflettore primario, fa convergere le onde radio al centro dello specchio principale (fuoco secondario), dove risiede il sistema di ricezione (Figura 1.2-5b). Le osservazioni in fuoco primario, invece, impongono che lo specchio iperbolico sia completamente retratto lungo l'asse y (Figura 1.2-4).

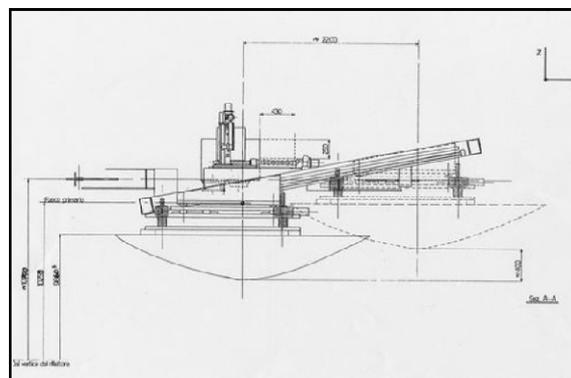


Figura 1.2-4: Configurazione per osservazioni in fuoco Cassegrain (linea continua) e in fuoco primario (linea tratteggiata).

Un supporto scorrevole permette quindi di spostare lo specchio secondario ogni volta che le osservazioni devono essere realizzate con i ricevitori posizionati nel fuoco primario (Figura 1.2-5a).

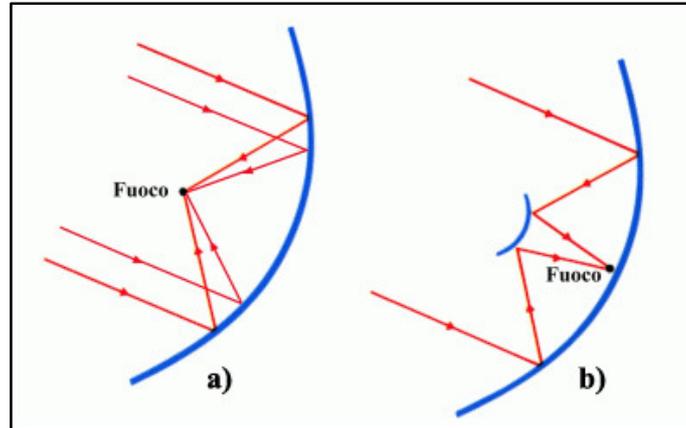


Figura 1.2-5: Schema delle osservazioni in fuoco primario (a) e secondario (b).

In un sistema di riferimento cartesiano, il paraboloide di rotazione che caratterizza la superficie del riflettore primario, avente vertice $(0,0,0)$ e fuoco sull'asse z $(0,0, f_T)$, è rappresentato dalla seguente equazione:

$$Z = \frac{X^2 + Y^2}{4f_T} \quad (1.2-1)$$

La distanza focale teorica (f_T) per le antenne di Medicina e di Noto vale 10.259 metri; se, a causa di forze esterne l'antenna si deforma, il paraboloide potrebbe modificare la sua forma, posizione ed orientamento.

A differenza del radiotelescopio di Medicina l'antenna di Noto dispone, a partire dalla seconda metà del 2001, di un sistema di movimentazione dei pannelli, tramite attuatori elettromeccanici (Figura 1.2-6), in cui un computer aggiorna la posizione dello specchio ripristinando la forma parabolica a tutte le elevazioni. Questo è possibile grazie ad un modello di deformazione d'antenna che è

stato creato utilizzando varie tecniche di misura, teodolite, fotogrammetria, olografia (Orfei et al. 2004).

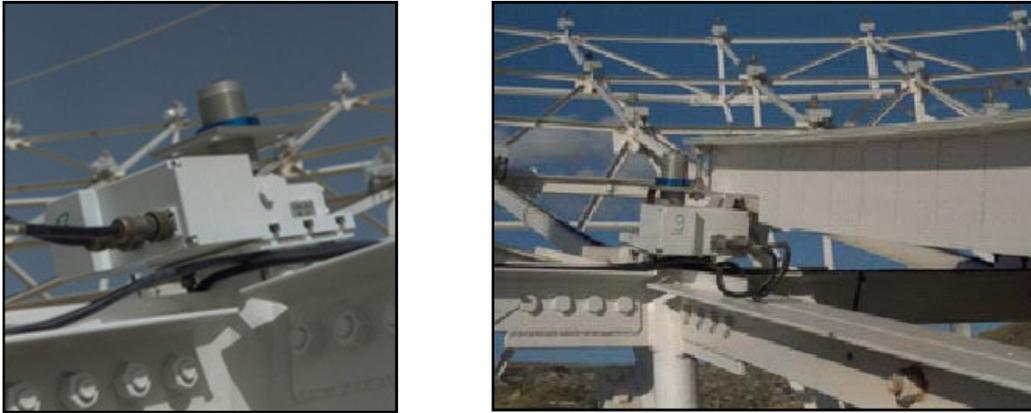


Figura 1.2-6: Particolare di uno dei 244 attuatori della superficie attiva del radiotelescopio di Noto. Tali attuatori sono gestiti e comandati da un master computer collocato nella stanza di fuoco secondario e su ognuno di essi poggiano 4 dei pannelli che costituiscono il rivestimento dello specchio primario.

Al variare delle elevazioni, le deformazioni della superficie tendono a diminuire il guadagno generale dell'antenna perché lo specchio perde sempre più la forma parabolica. Tale riduzione è tanto maggiore quanto più alta è la frequenza in uso.

Il guadagno dell'antenna è definito dalla seguente relazione:

$$G = 10^{-26} \frac{m\eta_A A_g}{k_B} \left(\frac{K}{J_y} \right) \quad (1.2-2)$$

dove:

$m = 0.5$ (radiazione non polarizzata);

A_g = area geometrica di raccolta;

k_B = costante di Boltzmann;

η_A = efficienza complessiva dell'antenna calcolata tenendo in considerazione tutti i fattori di degradazione del segnale in ricezione.

L'idea che sta alla base del concetto di superficie attiva è quella di compensare gli effetti di deformazione per gravità della struttura di sostegno dello specchio primario, muovendo i pannelli che ne formano la superficie per riposizionarli in modo da creare nuovamente una superficie prossima a quella descritta dall'equazione (1.2-1). Per mantenere alta l'efficienza, riducendo il degrado del guadagno d'antenna e consentendo una maggiore frequenza durante le osservazioni, è fondamentale sapere come le differenti parti di un radiotelescopio VLBI si deformano.

Il radiotelescopio di Medicina è dotato di una serie di ricevitori che possono lavorare a frequenze comprese tra 1.4÷22 GHz (cioè tra 21 e 1.3 cm di lunghezza d'onda); tali ricevitori possono essere collegati a diversi *backend* per osservazioni nel continuo (inclusa polarizzazione), in spettroscopia e di pulsar. Grazie alla *frequency agility*, i ricevitori possono essere riposizionati in breve tempo; il telescopio risulta quindi essere particolarmente appropriato laddove si voglia effettuare un monitoraggio multi-frequenza di sorgenti variabili.

La superficie attiva installata nel telescopio di Noto garantisce osservazioni molto efficienti anche ad elevate frequenze. La gamma di ricevitori a Noto infatti lavora da 327 MHz a 43 GHz (cioè tra 92 e 0.7 cm di lunghezza d'onda).

Le configurazioni osservative vengono gestite in remoto con possibilità di impostare velocemente e con semplicità i parametri richiesti per le varie osservazioni astronomiche e geodetiche.

I ricevitori utilizzati per le osservazioni geodetiche sono denominati S/X, operano rispettivamente alle frequenze di 2.3 e 8.3 GHz e sono collocati in fuoco primario.

1.2.1 Tipologie dei radiotelescopi

La montatura di un radiotelescopio indica la struttura meccanica alla quale è affidato il compito di sostenere in modo stabile la strumentazione scientifica di osservazione permettendo allo stesso tempo di orientare con facilità il telescopio nella direzione voluta grazie al movimento attorno a due assi tra loro perpendicolari.

Una montatura per essere efficiente deve essere rigida, esente da flessioni e vibrazioni e deve poter ruotare in senso orario (per annullare il moto apparente degli astri da Est verso Ovest) con la stessa velocità della Terra in modo da mantenere l'oggetto permanentemente al centro del campo di osservazione.

Le montature (Figura 1.2.1-1) utilizzate per i radiotelescopi sono sostanzialmente di due tipi (Ma 1978): montature equatoriali e montature altazimutali; quest'ultime caratteristiche delle antenne VLBI di Medicina e di Noto.

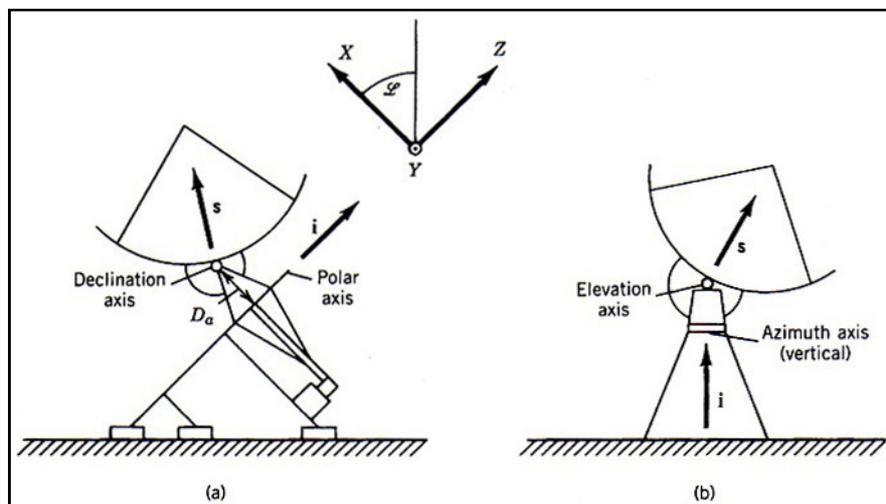


Figura 1.2.1-1: Diagramma schematico di due antenne con montatura equatoriale (a) e altazimutale (b). Gli assi di declinazione e di elevazione sono normali al piano della pagina.

Nelle montature equatoriali i due assi principali sono detti asse polare e asse di declinazione: l'asse polare viene diretto parallelamente all'asse terrestre mentre l'asse di declinazione viene orientato sull'astro

in esame. Poiché la latitudine è indicata dall'altezza del polo sull'orizzonte, l'asse polare è inclinato in modo da formare un angolo uguale alla latitudine del luogo d'osservazione. Una volta orientato correttamente l'asse di declinazione, per mantenere l'asse ottico del telescopio puntato sull'oggetto in esame, basta far ruotare il telescopio attorno all'asse polare in verso opposto e con la stessa velocità di rotazione della Terra.

Con le montature altazimutali (AZ-EL) i radiotelescopi possono ruotare attorno a due assi, uno verticale, con il quale si orienta l'asse ottico del telescopio in azimut, e uno orizzontale, con il quale si orienta l'asse in altezza: questi telescopi hanno quindi bisogno di due movimenti continui, e con velocità variabile, per poter seguire le stelle, a differenza dei telescopi con montature equatoriali che ne hanno bisogno di uno solo e molto semplice.

La montatura altazimutale avendo l'asse principale perpendicolare al suolo, origina il fenomeno della cosiddetta rotazione di campo, secondo il quale l'immagine risultante ruota ad una velocità dipendente dalla declinazione del corpo celeste osservato. In altre parole, per il corretto puntamento ed inseguimento degli oggetti con questa montatura è necessario l'utilizzo di *software* specifici in grado di correggere in tempo reale il puntamento del telescopio.

La montatura altazimutale non può però lavorare in prossimità del polo celeste quindi non è in grado di inseguire oggetti allo zenit per via del fatto che la derotazione di campo richiederebbe una velocità assai elevata e variabile.

Nelle montature altazimutali, infine, le pesanti attrezzature necessarie per l'osservazione sono fissate ad un'estremità dell'asse zenitale e vengono fatte ruotare in azimut assieme al telescopio. Tale montatura si presenta, quindi, assai più compatta e rigida della montatura equatoriale che presenta le masse spostate al di fuori del centro di gravità naturale.

1.2.2 Punto di riferimento delle tecniche geodetiche spaziali

I *tracking points* di ciascuna tecnica geodetica spaziale che contribuisce alla stima dell'ITRF vengono individuati unicamente da un numero "DOMES" (*Directory of MERit Sites*) assegnato dallo IERS, *International Earth Rotation and Reference Systems Service* (IERS 2005). In particolare, i numeri sono contraddistinti da una lettera "M" o "S" a seconda che i *tracking points* siano dei punti materializzati, ad esempio da pilastri, oppure i *reference points* di una tecnica geodetica spaziale (punti non fisicamente materializzati).

Per le tecniche GPS e DORIS il *tracking point* coincide normalmente con un *marker* geodetico esterno, fisicamente individuabile sull'antenna.

Tale punto per la tecnica GPS (Figura 1.2.2-1) è chiamato *Antenna Reference Point* (ARP) e la sua posizione può essere individuata attraverso triangolazione della sagoma esterna dell'antenna *choke ring*, sfruttando la sua simmetria, secondo uno schema descritto dettagliatamente in Sarti et al. 2004.

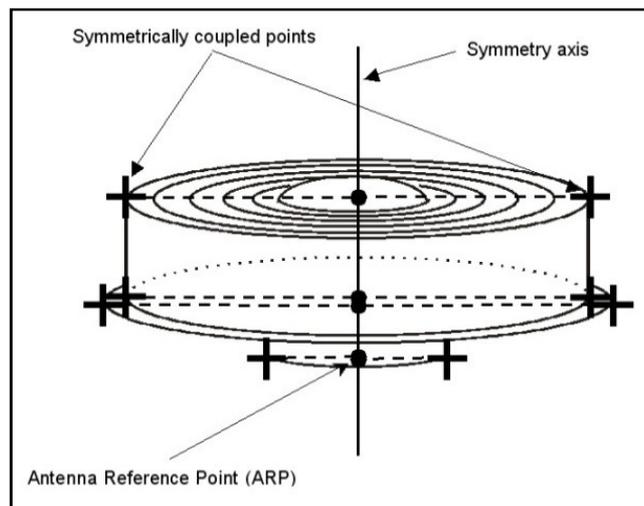


Figura 1.2.2-1: Posizione dell'ARP per un'antenna GPS.

Un vantaggio della strategia adottata consiste nel fatto che la posizione dell'ARP può essere stimata senza rimuovere l'antenna stessa. Tale vantaggio è chiaramente legato alle caratteristiche operative delle reti permanenti per le quali un'interruzione del funzionamento del sistema è un evento indesiderabile.

Per i sistemi VLBI e SLR l'*ITRF tracking point* coincide invece con il punto di riferimento, ovvero con un punto non fisicamente materializzato. Per le due ultime tecniche citate, pertanto, la definizione fisica del *reference point* rivestirà un ruolo estremamente importante. Una delle definizioni più generali è la seguente: il punto di riferimento della tecnica VLBI e SLR è rappresentato dall'intersezione dell'asse primario (asse fisso) con il vettore perpendicolare fra l'asse secondario (asse mobile) e l'asse primario (Johnston e Dawson 2004, Johnston et al. 2004).

Dal momento che il *reference point* del radiotelescopio VLBI è definito attraverso i suoi assi di rotazione esisterà un collegamento diretto fra la direzione di osservazione che il telescopio segue nello spazio e la posizione del punto di riferimento stesso. Coerentemente a questa sua proprietà cinematica, il *reference point* VLBI è anche conosciuto come IVP, *Invariant Point* (Figura 1.2.2-2).

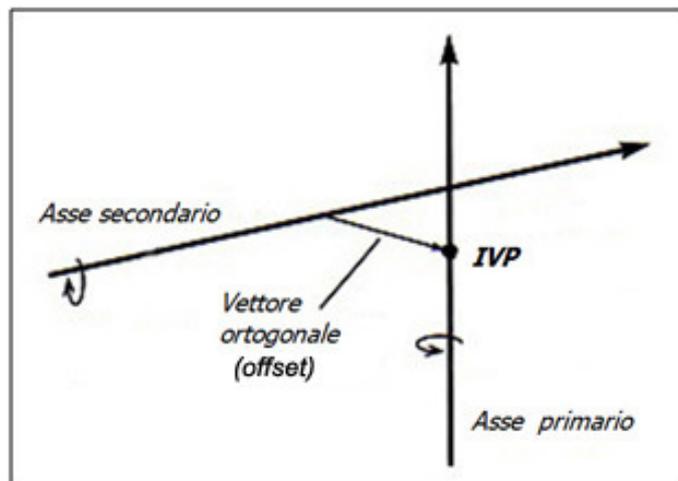


Figura 1.2.2-2: Definizione dell'*Invariant Point*.

Le antenne VLBI di Medicina e di Noto sono caratterizzate da una montatura altazimutale che non presenta intersezione fra l'asse di rotazione e quello di elevazione; fra i due assi esiste infatti un *offset* di circa 1.80 metri (Figura 1.2.2-3). Il punto di riferimento è teoricamente ben definito attraverso le proprietà cinematiche del radiotelescopio ma ad esso non corrisponderà materialmente alcun punto. La sua individuazione sarà possibile solamente attraverso una stima indiretta, mediante misure topografiche di alta precisione (e/o GPS), basate su osservazioni di *targets* distribuiti sulla struttura esterna del radiotelescopio, che permettono di stimare la giacitura degli assi di rotazione e quindi la posizione del punto di riferimento.

In particolare, quando l'antenna ruota in azimut, mantenendo fisso l'asse di elevazione, i prismi descrivono dei cerchi orizzontali aventi i centri allineati lungo l'asse di azimut del telescopio. Allo stesso modo, quando l'antenna si muove in elevazione, mantenendo fisso l'asse di azimut, i prismi descrivono dei cerchi con i centri allineati lungo una particolare posizione dell'asse di elevazione (Figura 1.2.2-4).

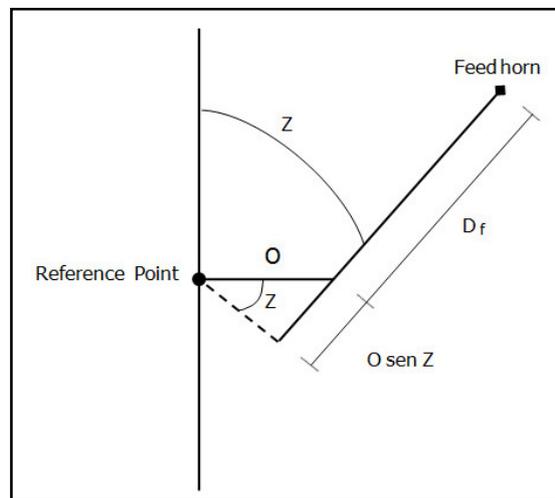


Figura 1.2.2-3: Radiotelescopio di tipo AZ-EL con *offset* O fra gli assi di rotazione.

Nel caso specifico di Medicina e di Noto quindi, il punto di riferimento sarà individuato dalla proiezione dell'asse di elevazione su quello di azimut (Figura 1.2.2-5).

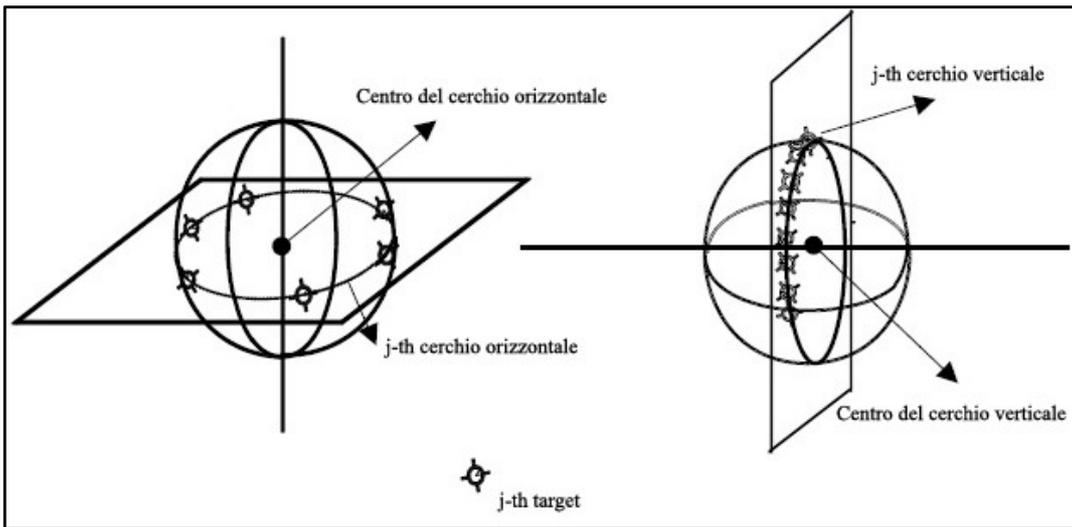


Figura 1.2.2-4: Cerchio orizzontale e verticale descritto da un target attorno agli assi di azimut e di elevazione.

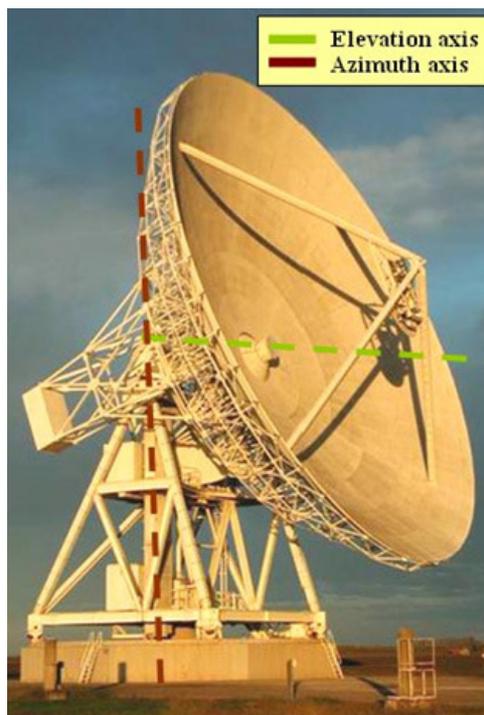


Figura 1.2.2-5: Radiotelescopio AZ-EL di Medicina: gli assi di rotazione sono rappresentati in rosso (azimut) e verde (elevazione).

Nel caso in cui gli assi di rotazione del radiotelescopio si intersechino fra di loro, la distanza D_f fra il RP e il punto in cui viene

registrato il segnale (*Feed horn*) rimane costante così come il tempo necessario per percorrere tale distanza. Questo non è quindi valido per le antenne VLBI di Medicina e di Noto per le quali alla distanza D_f occorrerà aggiungere la proiezione dell'*offset* lungo la linea di vista per valutare l'*extra path*:

$$D = D_f + O \sin Z \quad (1.2.2-1)$$

dove Z rappresenta l'angolo fra l'asse fisso del radiotelescopio e la linea di vista (Figura 1.2.2-3).

Il valore di D durante le osservazioni VLBI varierà al variare della posizione della radiosorgente ed ogni nuovo valore dovrà essere opportunamente calcolato e considerato nell'analisi dei dati; è quindi fondamentale una accurata conoscenza del valore dell'*offset* presente fra gli assi nonché le caratteristiche strutturali dell'antenna quali il valore della distanza D_f . Tali valori, tuttavia, sono noti teoricamente ma non possono essere considerati costanti durante l'osservazione: le deformazioni gravitazionali modificano D_f e in modo meno marcato Z che saranno quindi dipendenti dalla posizione in elevazione dell'antenna.

1.2.3 Deformazioni strutturali delle antenne VLBI

I radiotelescopi possono essere soggetti principalmente a delle deformazioni strutturali indotte dalle variazioni di temperatura e dalla gravità (Figura 1.2.3-1). Tali deformazioni possono essere di notevole entità, pertanto, non devono essere trascurate ma quantificate in modo da mettere in luce il contributo che esse introducono nelle osservazioni astronomiche e geodetiche.

Mentre le deformazioni termiche (Greve et al. 2005) potrebbero essere continuamente monitorate attraverso sensori di temperatura

disposti a differenti quote, quelle indotte dalla gravità richiedono l'utilizzo di tecniche e approcci di alta precisione.

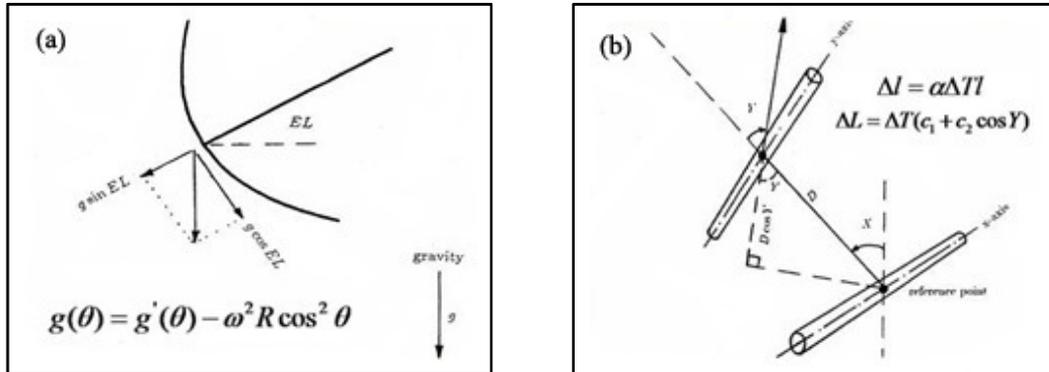


Figura 1.2.3-1: Principali deformazioni a cui possono essere soggetti i telescopi VLBI: (a) deformazioni indotte dalla gravità, (b) deformazioni provocate dalle variazioni di temperatura.

Fra le deformazioni indotte dalla gravità vi sono la deformazione dello specchio primario, lo scivolamento del riflettore primario sottoposto al peso proprio e la deformazione del quadrupode che sostiene l'alloggiamento dei ricevitori geodetici.

La gravità agisce costantemente sulla struttura del telescopio e lo deforma in relazione alla posizione di puntamento del *dish* durante le osservazioni. Deformazioni rilevanti si verificano soprattutto quando cambia l'elevazione dell'antenna VLBI mentre rotazioni in azimut non modificano in maniera significativa la struttura del telescopio.

Le deformazioni gravitazionali delle antenne VLBI, al variare della loro elevazione, tendono quindi a modificare la forma parabolica dello specchio primario, la posizione dei ricevitori geodetici e quindi la posizione geometrica del punto di riferimento. Pertanto, in ambito geodetico, è necessario determinare con estrema precisione le deformazioni indotte dalla gravità sulle antenne VLBI al variare della loro elevazione.

Qualunque variazione del cammino ottico dell'onda elettromagnetica osservata col VLBI (δdL) ed originata dall'azione della gravità sulla struttura del radiotelescopio, in accordo con Clark e Thomsen (1988), può essere descritta dalla seguente relazione:

$$\delta dL = \alpha_f dF + \alpha_v dV + \alpha_r dR \quad (1.2.3-1)$$

dove:

dF = variazione della lunghezza focale;

dV = variazione di posizione del vertice del paraboloide;

dR = variazione di posizione del ricevitore.

I valori del primo e del secondo termine sono strettamente legati alla deformazione dello specchio primario, mentre il terzo termine dR , quando le osservazioni sono realizzate con i ricevitori posti in fuoco primario, è collegato alle deformazioni del quadrupode. I coefficienti α_f , α_v , α_r dipendono dalle dimensioni della struttura del telescopio e contribuiscono a definire la variazione totale del percorso del segnale (Clark e Thomsen 1988).

La lunghezza focale, così come la posizione del ricevitore e del vertice, dipendono dalla direzione di puntamento del telescopio: la superficie dello specchio primario è deformata dalla gravità e quindi riflette il fronte d'onda in arrivo in diversi fuochi. Al fine di contrastare l'effetto della gravità e ripristinare la forma parabolica del *dish*, il telescopio di Noto è stato dotato, come detto nel paragrafo 1.2, di una superficie attiva. Nelle osservazioni radioastronomiche, particolarmente alle alte frequenze, è indispensabile mantenere parabolica la forma dello specchio primario; i pannelli vengono mossi sulla base di precise correzioni calcolate sperimentalmente allo scopo di mantenere la coerenza del segnale e massimizzare il guadagno di antenna.

La posizione del ricevitore durante le osservazioni è altrettanto fondamentale: esso deve essere posizionato nel punto focale o nelle sue immediate vicinanze. A tale scopo i telescopi VLBI di Medicina e di Noto sono dotati di equipaggiamenti che possono permettere il movimento dei ricevitori collocati nel fuoco primario (paragrafo 1.2).

La posizione del ricevitore che massimizza il guadagno di antenna in funzione della elevazione viene determinata tramite una procedura

di calibrazione. Alcune radiosorgenti vengono osservate mentre il ricevitore viene spostato avanti ed indietro lungo la direzione di osservazione; applicando questa procedura è possibile determinare e registrare, per ogni frequenza di osservazione, la posizione del ricevitore che massimizza il guadagno di antenna.

La figura 1.2.3-2 mostra le posizioni dei ricevitori geodetici S/X che massimizzano il guadagno di antenna e i relativi spostamenti lungo la linea di vista. In tale figura le posizioni dei ricevitori sono influenzate da tutti e tre i termini dell'equazione (1.2.3-1) oltre che dalla frequenza di osservazione.

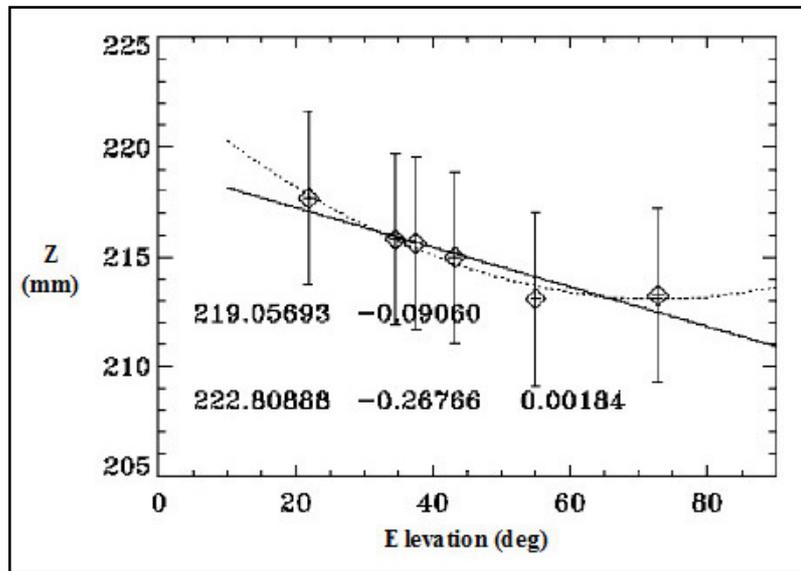


Figura 1.2.3-2: Spostamenti relativi dei ricevitori S/X lungo la linea di vista Z in funzione delle differenti posizioni in elevazione del telescopio VLBI di Noto. Le posizioni dei ricevitori sono determinate sperimentalmente, ricercando il massimo del guadagno di antenna alle differenti elevazioni. Sono rappresentati i coefficienti dei polinomi di primo e secondo ordine stimati interpolando i dati sperimentali.

Clark e Thomsen (1998), al fine di determinare i tre termini dell'equazione (1.2.3-1), hanno utilizzato un modello agli elementi finiti (FEM). Quest'ultimo approccio richiede che gli schemi strutturali e statici più appropriati al modello fisico in esame ed i tipi di elementi finiti più idonei allo sviluppo del calcolo vengano individuati in maniera precisa ed accurata. Una conoscenza

approssimativa di questi aspetti può ridurre l'affidabilità e la qualità dell'analisi e, naturalmente, dei risultati.

Un approccio alternativo ai FEM per studiare le deformazioni gravitazionali è stato da noi affrontato mediante l'utilizzo di osservazioni dirette. In particolare, attraverso la combinazione di un rilievo geodetico classico (trilaterazione e triangolazione) e di un rilievo *laser* di tipo terrestre.

2.

TECNICHE INTEGRATE LASER SCANNING E TOPOGRAFICHE PER LA MISURA DELLE DEFORMAZIONI GRAVITAZIONALI DELLE ANTENNE VLBI DI MEDICINA E DI NOTO

2.1 Introduzione ai sistemi *laser scanner* terrestri

Un sistema *laser scanner* fornisce come risultato diretto della sessione di misura un insieme di coordinate tridimensionali, in un sistema di riferimento solidale allo strumento, riferite ad un numero molto elevato di punti che vengono colpiti dal raggio laser: la nuvola dei punti (Figura 2.1-1) così generata descrive la superficie esterna dell'oggetto scansionato.

Un rilievo *laser* è in genere caratterizzato da elevata automazione e densità di misura e dalla capacità, nel caso dei sistemi terrestri (*Terrestrial Laser Scanner*, TLS), di poter fornire il dato acquisito in tempo reale. Per ogni punto rilevato, oltre alle coordinate tridimensionali, può essere disponibile anche un quarto valore legato all'intensità del segnale *laser* di ritorno, cui frequentemente ci si riferisce con il termine di riflettanza. L'intensità dell'onda elettromagnetica di ritorno è funzione di alcune importanti grandezze fisiche, tra cui la distanza tra l'oggetto e l'origine del sistema di presa, l'effetto di diffusione atmosferica e la riflessione della radiazione elettromagnetica da parte dell'oggetto colpito: quest'ultima, a sua volta funzione del tipo di materiale e delle condizioni di umidità e rugosità dell'oggetto stesso.

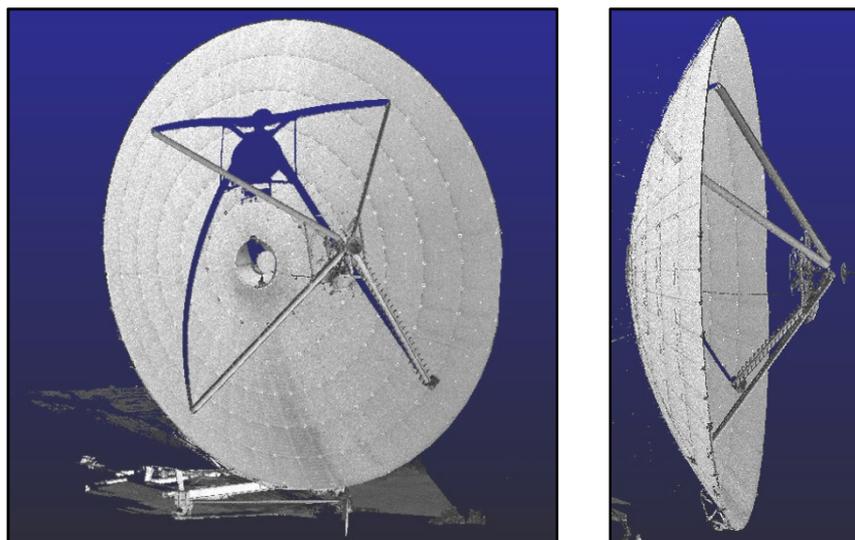


Figura 2.1-1: Esempi di nuvole di punti del radiotelescopio di Noto ricavate dal rilievo *laser* realizzato nel settembre del 2005. Tali nuvole sono state acquisite posizionando lo strumento esternamente al paraboloide.

Il raggio *laser* emesso da un sistema a scansione è in genere affetto da una leggera divergenza, proporzionale alla distanza percorsa dal raggio stesso: tale divergenza dipende dalle piccole dimensioni della cavità nella quale si crea il raggio e dal fenomeno di diffrazione generato dalla finestra d'uscita del fascio stesso. Il raggio *laser*, a causa della divergenza, incide una qualunque superficie secondo un'area di impatto non puntiforme: in tal caso, la misura della posizione del punto risulta meno precisa.

La capacità di distinguere oggetti molto piccoli o particolari dell'oggetto stesso all'interno della nuvola di punti viene definita attraverso la risoluzione di scansione. A questa capacità contribuiscono due differenti caratteristiche del sistema *laser*: il passo angolare, ovvero l'incremento minimo possibile dell'angolo fra due punti successivi, e la dimensione dello *spot laser* sull'oggetto.

La portata di un sistema *laser* a scansione dipende dal tipo di materiale colpito dal raggio ed, in particolar modo, dalla sua riflettività alla lunghezza d'onda del segnale *laser*. Maggiore è la quantità di energia assorbita dalla superficie (minore è quindi la riflettività) e minore sarà la portata del *laser*. Le superfici bianche, a

differenza di quelle nere, producono una forte riflessione; l'effetto delle superfici colorate dipende fortemente dalle caratteristiche del laser, mentre le superfici lucide sono di solito difficili da rilevare.

Inoltre, la portata di un sistema *laser* può essere notevolmente ridotta, a parità di materiale costituente l'oggetto, dalla scabrosità della superficie colpita dal segnale *laser*: la scabrosità tende ad aumentare la quantità di energia riflessa in direzioni differenti da quella di ritorno verso lo strumento.

Anche le condizioni atmosferiche possono modificare la precisione degli strumenti *laser* e di conseguenza quella del rilievo (Lichti et al. 2000, Boehler 2001, Blais 2003). Sebbene ogni *scanner* può essere calibrato per funzionare correttamente all'interno di un determinato *range* di temperatura, anche all'interno di tale intervallo si possono avere errori, soprattutto nella misura della distanza. Quest'ultimo aspetto è stato da noi riscontrato nei rilievi effettuati presso i radiotelescopi di Medicina e di Noto (vedi paragrafo 4.2). L'implementazione di procedure di correzione sono quindi necessarie al fine di non compromettere la precisione del rilievo.

2.1.1 Principi di acquisizione

In base al principio di acquisizione i sistemi *laser* possono essere classificati in *distanziometrici* e *triangolatori* (Bornaz 2006). I primi utilizzano il *laser* in modo attivo, ossia affidano al *laser* stesso il compito di misurare una distanza mentre i triangolatori utilizzano il *laser* in modo passivo. In quest'ultimo caso il *laser* ha il compito di evidenziare un'entità geometrica (punto, linea, superficie) che viene però misurata con un altro metodo.

I *laser scanner* distanziometrici acquisiscono la posizione tridimensionale dei punti misurando per ognuno di essi un angolo zenitale, un angolo azimutale ed una distanza inclinata; quest'ultimi vengono acquisiti in automatico una volta definita l'area che si vuole

misurare e la densità dei punti necessaria per il rilievo. Pertanto, non esiste la possibilità, come avviene invece nei rilievi topografici effettuati con *total stations*, di rilevare particolari punti della struttura in esame (ad esempio spigoli di edifici).

I sistemi *laser* distanziometrici possono operare con due diversi principi di funzionamento: misurando il tempo di volo oppure la differenza di fase.

Gli scanner che operano con differenza di fase sono caratterizzati da un apparato ricevente in grado di calcolare la differenza di fase fra l'onda emessa (raggio laser modulato con un'onda armonica) e quella ricevuta, dopo che è stata riflessa dall'apparato trasmittente (prisma retroriflettente). Il dato acquisito è piuttosto complesso da elaborare e di conseguenza il tempo necessario per il calcolo è superiore rispetto ad altri strumenti. Inoltre, tali distanziometri richiedono un segnale di ritorno dotato di adeguata potenza, con conseguente riduzione della portata dello strumento (Froehlich and Mettenleiter 2004).

I *laser* oggi più diffusi sono i distanziometri ad impulsi, ovvero distanziometri che misurano il tempo di volo (Figura 2.1.1-1a).

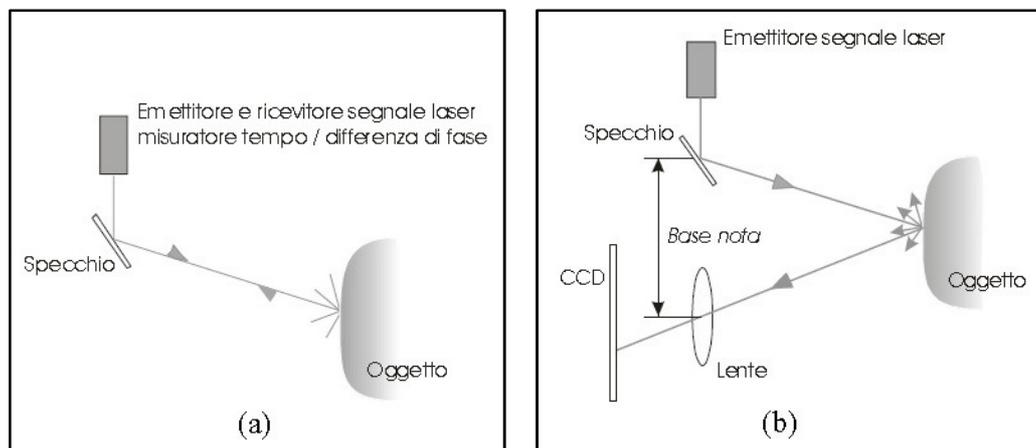


Figura 2.1.1-1: Principali schemi di funzionamento dei *laser* a scansione: (a) Tempo di volo, (b) Triangolazione ottica.

La distanza fra il centro strumentale ed il primo punto che il raggio incontra e da cui viene riflesso viene determinata dalla misura del

TOF (*Time of flight*) che intercorre tra l'emissione e la ricezione. In questo caso l'impulso *laser*, mediante opportuni sistemi ottico/meccanici in rotazione, viene inviato verso l'oggetto variando per passi discreti gli angoli azimutale e zenitale.

La distanza, insieme alla conoscenza dei due angoli di emissione del raggio, consente di determinare per coordinate polari la posizione del punto in questione. All'utente tali coordinate vengono fornite in un sistema cartesiano tridimensionale avente origine nel centro strumentale.

La precisione di questa tipologia di *laser* è legata anche alla qualità dell'elettronica interna che misura il tempo di volo dell'impulso. Ogni errore causato dall'orientamento degli assi o dai dispositivi di lettura angolare determina un errore perpendicolare alla direzione di propagazione che si ripercuote sulla posizione dei punti stessi.

Il principio di funzionamento (Figura 2.1.1-2) della misura di distanza effettuata con il *laser* può essere in generale così sintetizzata:

- un generatore di impulsi elettrici impone periodicamente ad un diodo *laser* semiconduttore di emettere degli impulsi, indirizzati e convogliati da una lente di emissione;
- una seconda lente di ricezione capta la parte del segnale di eco del raggio *laser* riflesso dalla superficie di impatto dell'oggetto, mentre un fotodiodo produce un segnale di ricezione elettrico.

L'intervallo di tempo tra il segnale emesso e l'eco del segnale ricevuto è quantificato da un orologio stabilizzato al quarzo. Il risultato viene trasmesso ad un microelaboratore interno che, nota la velocità di propagazione dell'impulso c nel mezzo considerato (aria) e il tempo di volo τ , trasforma il dato ricevuto in una misura di distanza:

$$D = \frac{1}{2} c \tau \quad (2.1.1-1)$$

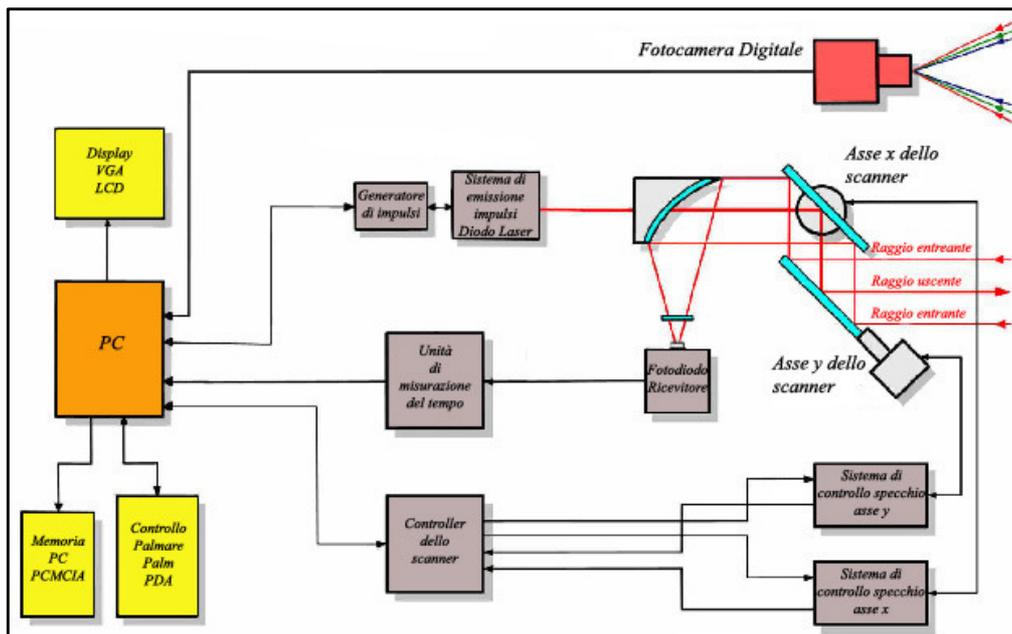


Figura 2.1.1-2: Schema del principio di funzionamento dei sistemi *laser* basati sul tempo di volo.

Se la relazione (2.1.1-1) permette di calcolare la distanza, allora la precisione può essere determinata dalla relazione seguente:

$$\delta D = \frac{1}{2} c \delta \tau \quad (2.1.1-2)$$

Nei sistemi *laser* che utilizzano come principio di acquisizione la triangolazione ottica (Figura 2.1.1-1b), un raggio *laser* viene deflesso, secondo un passo regolare da uno specchio rotante e inviato verso l'oggetto da acquisire. Uno o più sensori di immagine a stato solido CCD (*Charge-Coupled Device*) o CMOS (*Complementary Metal Oxide Semiconductor*) ricevono il punto o la linea *laser* che viene riflessa. Tali sensori sono posti ad una distanza nota e calibrata rispetto al punto da cui il *laser* viene inviato all'oggetto. Note quindi la distanza relativa fra proiettore e sensore CCD e l'angolo di inclinazione della sorgente, con semplici relazioni trigonometriche si determinano le coordinate dei punti acquisiti. In questa tipologia di strumenti la misura è effettuata mediante un sistema ottico (ad

esempio la camera CCD): tale misura è perciò limitata dalle leggi fisiche dell'ottica e della diffrazione. In genere la precisione tende a diminuire con il quadrato della distanza fra lo *scanner* e l'oggetto (Boehler e Marbs 2002).

La triangolazione ottica permette di ottenere delle precisioni sicuramente maggiori rispetto agli strumenti che sfruttano il tempo di volo ma hanno in genere una portata di misura limitata a pochi metri. Le precisioni raggiungibili possono essere ampiamente sub-millimetriche per i sistemi *laser* triangolatori e da millimetriche a centimetriche per i sistemi basati sul tempo di volo, con possibilità di operare anche fino al chilometro.

In genere, i sistemi triangolatori risultano più precisi ma sono ottimizzati per portate assai minori e quindi più adatti per applicazioni *very close-range* di tipo industriale o per oggetti piccoli; è possibile trovarne applicazione in ambiti molto diversi, dal controllo di qualità sino all'ambito del rilievo dei Beni culturali (Pieraccini et al. 2001, Yemez and Wetherilt 2007).

Le caratteristiche appena enunciate hanno pertanto indirizzato la scelta sul sistema *Trimble-Mensi GS200* per realizzare le indagini *laser* presso i radiotelescopi di Medicina e di Noto (vedi paragrafo 2.2). Al tempo in cui è stato realizzato il rilievo, settembre 2005, il *laser* GS200 possedeva specifiche tecniche idonee a garantire precisioni millimetriche anche alle distanze necessarie per il rilievo delle antenne VLBI.

2.1.2 Procedure di rilievo e *data processing*

Le fasi che costituiscono la base di un rilievo *laser* di tipo terrestre possono essere brevemente riassunte come segue (Rinaudo 2003):

- 1) Acquisizione;
- 2) Trattamento preliminare dei dati;

3) Creazione del prodotto finale.

Gli aspetti da considerare quando si progetta la fase di acquisizione riguardano principalmente la scelta del tipo di strumento da utilizzare nella campagna di misura, l'oggetto che si vuole rilevare (dimensioni e forma) e l'ambiente nel quale si prevede di operare. Un'accurata progettazione dei punti di presa è necessaria per garantire continuità durante l'acquisizione così come un'analisi preliminare dell'oggetto è indispensabile per decidere la più idonea densità di acquisizione in grado di garantire il rilievo completo dell'oggetto stesso.

Per stabilire la qualità e quindi l'applicabilità di un determinato sistema *laser* in un rilievo, oltre alle inderogabili considerazioni riguardanti la precisione, occorre valutare anche altre caratteristiche tecniche ed operative (Boehler e Marbs 2002, Boehler et al. 2003). Fra queste, ad esempio, la velocità di acquisizione dei punti, la portata dello strumento in relazione ai materiali da cui è formato l'oggetto, la risoluzione di scansione, la divergenza del raggio *laser*, il campo di misura, la classe dei *laser*, la presenza di sensori RGB accoppiati, l'autonomia operativa, l'autonomia di alimentazione e la trasportabilità (peso e ingombro) dello strumento e non ultima la disponibilità e la qualità del *software* necessario per il controllo dell'operazione di rilievo e per la gestione della nuvola di punti.

Nelle applicazioni terrestri la fase di pre-trattamento prevede diverse operazioni fra le quali, l'eliminazione degli *outliers*, lo sfoltimento o il filtraggio dei dati, la registrazione e la fusione delle nuvole acquisite e l'eventuale assegnazione ad un sistema di riferimento oggetto: quest'ultima è un'operazione fondamentale quando si vuole utilizzare il rilievo *laser* in modo integrato con i dati acquisiti con altre metodologie.

Le nuvole ripulite da eventuali punti, ritenuti superflui ai fini della realizzazione del modello 3D finale, vengono sottoposte alla fase di registrazione; ogni singola scansione verrà orientata, attraverso una rototraslazione, in un unico sistema di riferimento.

In generale, la registrazione risulta più affidabile e precisa se viene realizzata mediante l'utilizzo di segnali catarifrangenti o di forma nota (ad esempio sfere): l'utilizzo di questi punti è però possibile solo quando l'oggetto è accessibile. In tal caso molti *software* consentono un'acquisizione automatica ad elevata risoluzione di questi *targets* e quindi l'operatore è chiamato alla sola collimazione.

La maggior parte dei software oggi in commercio espletano la fase di registrazione mediante l'algoritmo ICP, *Iterative Closest Point* (Besl e McKay 1992). Tale algoritmo applica in modo iterativo una roto-traslazione rigida nello spazio ad una delle due nuvole, considerata mobile, affinché si sovrapponga nel miglior modo possibile all'altra nuvola, considerata fissa.

Il risultato finale della fase di allineamento consiste in un insieme di scansioni ancora registrate come entità separate che non si prestano ad alcun tipo di operazione di lettura delle informazioni metriche. L'operazione di fusione permetterà, a partire dall'insieme di punti campionati, la ricostruzione di un'unica superficie che supporti con maggiore semplicità ed efficienza operazioni di visualizzazione, estrazione di sezioni e misurazioni.

L'operazione di modellazione vera e propria avviene quindi con la trasformazione della nuvola di punti in una superficie continua tramite la generazione delle *mesh*; nel caso di oggetti dotati di una geometria semplice, la creazione del modello è un'operazione quasi automatica, ma nel caso di oggetti complessi caratterizzati da molte discontinuità, ottenere un modello corretto richiede tempi di elaborazione più lunghi ed un notevole intervento da parte dell'operatore. In generale, per gli oggetti complessi è necessario suddividere la nuvola di punti in porzioni appartenenti ad entità uniformi tramite la cosiddetta fase di segmentazione (Roggero 2006); ciascuna entità viene quindi, modellata separatamente, mentre il modello complessivo è generato dall'unione delle singole entità modellate.

2.2 Indagini *laser* realizzate presso i radiotelescopi di Medicina e di Noto

Lo strumento utilizzato per studiare la forma del paraboloide delle antenne VLBI di Medicina e di Noto è un sistema ad impulsi, *Trimble-Mensi GS200* (Figura 2.2-1) che, sfruttando la metodologia del tempo di volo per determinare la posizione dei punti, è in grado di acquisire circa 5000 punti al secondo con una risoluzione nominale di 1.5 mm a 50 metri (<http://www.trimble.com/gs200.shtml>).

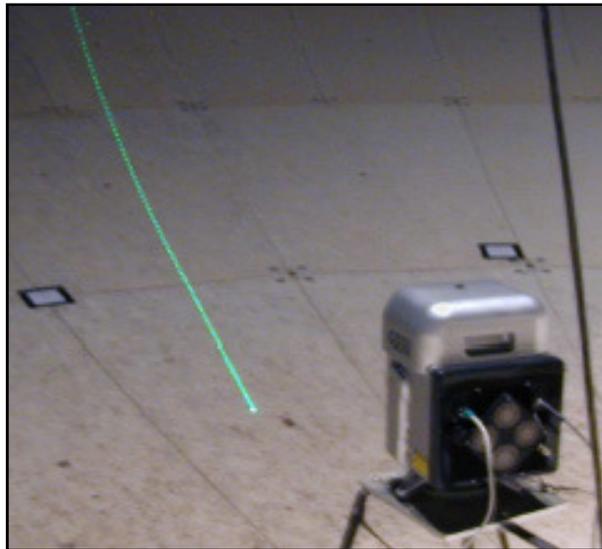


Figura 2.2-1: Sistema *Trimble-Mensi GS200* operante all'interno del riflettore primario del radiotelescopio VLBI di Noto.

I rilievi sono stati realizzati disponendo le antenne VLBI a diverse elevazioni (90° , 75° , 60° , 45° , 30° , 15°) ed effettuando le scansioni di notte in modo da ridurre gli effetti indotti dalla rifrattività (Figura 2.2-2).

Il sistema *laser* è stato posizionato direttamente all'interno del riflettore primario su due supporti (F1, F2) creati appositamente per questo tipo di rilievo e fissati rigidamente in prossimità del fuoco secondario ("tamburo" al centro del paraboloide) (Figura 2.2-3). In questo caso, infatti, viste anche le enormi dimensioni delle strutture in

esame, non è stato possibile utilizzare le alte piattaforme esterne impiegate solitamente nei rilievi fotogrammetrici: quando l'antenna si trova alla sua massima elevazione, cioè quando la linea di vista punta allo zenit, la superficie dello specchio primario non sarebbe visibile da una tale piattaforma che, tra l'altro, non assicurerebbe nemmeno la necessaria stabilità del punto di stazione.



Figura 2.2-2: Antenna VLBI di Noto: sistema *laser* che opera durante una sessione di misura notturna. Il GS200 è posizionato su di un fianco della struttura che protegge i ricevitori posti in fuoco secondario (“tamburo” al centro del paraboloide).

Le specifiche tecniche dello strumento (rotazione orizzontale e verticale rispettivamente di 360° e di 60°) avrebbero permesso la copertura dell'intera superficie dello specchio primario attraverso un unico stazionamento realizzato dal centro del paraboloide. Tuttavia, a causa dell'occlusione indotta dal *tamburo* e della necessità di realizzare supporti in grado di rimanere stabili ad ogni elevazione del *dish*, il riflettore primario è stato scansionato facendo stazione rispettivamente in F1 e F2 (Figura 2.2-3).

Pertanto, per tutte le elevazioni studiate, sono state ricavate 2 nuvole di punti della superficie del *dish*; tali nuvole sono state allineate nella fase di elaborazione per mezzo di 6 *targets* sferici posizionati sul bordo esterno del paraboloide (indicati dalla lettera “S” nella figura 2.2-3), utilizzati come punti comuni e, quindi rilevati sia da F1 che da F2.

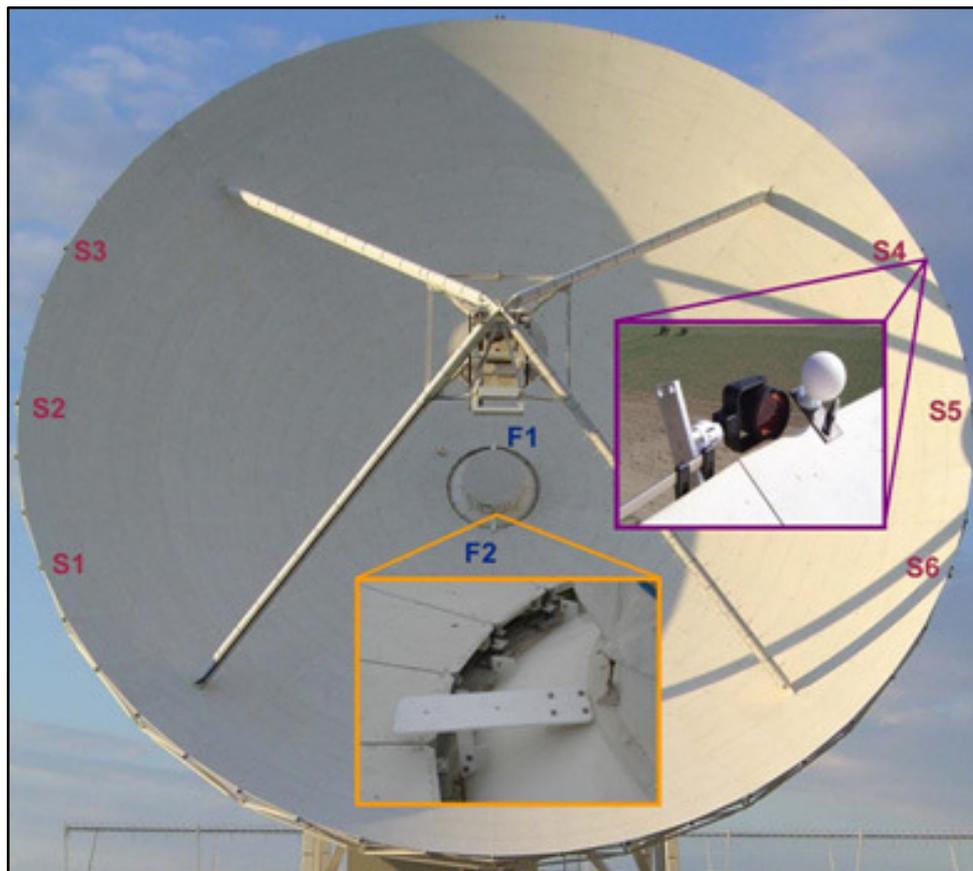


Figura 2.2-3: Antenna VLBI di Medicina: supporti F1 e F2, posizionati simmetricamente rispetto alla struttura che protegge i ricevitori, disposizione delle sfere e dei prismi retroriflettenti; le sfere sono state osservate con *laser scanner* e triangolazione mentre i prismi sono stati triangolati e trilaterati. Riquadro giallo: particolare di uno dei supporti. Riquadro viola: coppia sfera-prisma utilizzata come punto comune per la rete topografica interna ed esterna al paraboloide.

In particolare, lo specchio primario e le sei sfere sono state rilevate adottando un passo di campionamento rispettivamente di 2 cm e di 3 mm a 15 m: la maggiore densità per i *targets* è richiesta per garantire il minimo di errore nella fase di allineamento.

2.3 Considerazioni pratiche e operative sulle procedure di rilievo topografiche

La scelta del numero, della qualità degli strumenti e degli accessori, nonché delle strategie adottate durante i rilievi, è fondamentale per assicurare un'elevata accuratezza delle osservazioni topografiche e dei relativi prodotti finali. Tutto questo diventa particolarmente importante quando, come nel caso della stima delle *local ties*, il risultato finale deve essere atteso con una precisione millimetrica. I procedimenti adottati devono quindi garantire tale ordine di precisione. Allo stesso tempo tutte le attività di campagna devono essere pianificate ed ottimizzate in modo da assicurare un breve periodo di inattività delle antenne VLBI.

Viste le brevi distanze (poche centinaia di metri) caratterizzanti l'estensione delle reti locali di controllo realizzate presso gli osservatori di Medicina e di Noto, le *local ties* vengono stimate utilizzando solo osservazioni terrestri; in particolare, mediante triangolazione e trilaterazione. I moderni e precisi strumenti topografici sono fondamentali per un rapido e affidabile rilievo.

Le stazioni totali che sono state utilizzate, TDA5005 (15 mgon; 1 millimetro + 2 ppm) e TC2003 (0,15 mgon; 1 millimetro + 1ppm), assicurano un'alta accuratezza in termini di risoluzione angolare e in termini di misura della distanza, EDM (*Electronic Distance Meter*).

L'EDM, in condizioni operative ben definite (intervisibilità dei punti), si presta ad un uso speditivo dello strumento. La misura della distanza deve però essere corretta in sede di elaborazione dagli errori atmosferici legati principalmente alla pressione atmosferica, alla temperatura ambientale e all'umidità relativa. In particolare, è stata utilizzata la formula di correzione di Barrel and Sear's:

$$\Delta D_1 = 281.8 - \left[\frac{0.029065p}{(1+at)} - \frac{4.126E-04h}{(1+at)} 10^x \right] \quad (2.3-1)$$

dove:

ΔD_1 = correzione atmosferica in p.p.m;

p = pressione atmosferica in mb (millibar);

t = temperatura ambientale (°C);

h = umidità relativa (%);

$\alpha = 1/273.16$;

$x = \frac{7.5t}{237.3+t} + 0.7857$.

Le distanze sono misurate utilizzando dei prismi retroriflettenti posizionati in tutti i punti della rete di controllo a terra e in alcuni punti della struttura dell'antenna VLBI. Le costanti dei prismi vengono verificate in laboratorio e vista la difficoltà ad eseguire in Italia calibrazioni strumentali per classi di EDM di così elevata precisione, si è comunque verificata in campagna la consistenza delle misure di distanza eseguite con le due *total stations* su distanze coincidenti.

Entrambe le stazioni totali sono dotate di un compensatore biassiale per la correzione delle letture angolari; il compensatore permette infatti misurazioni accurate correggendo gli errori di stazionamento che si ripercuotono sugli assi verticali e orizzontali. Le maggiori difficoltà sono legate alla corretta lettura angolare dei prismi posizionati sulla struttura del telescopio a causa del cambiamento di orientamento stesso dei *targets*.

Tutte le letture angolari sono ripetute tre volte, sia nella posizione diretta che inversa della stazione totale, al fine di rendere per quanto possibile accidentali gli errori di collimazione. A differenza dello strumento TC2003, dove la collimazione avviene manualmente, la stazione totale TDA5005 è capace di riconoscere in automatico il *target* grazie al sistema ATR (*Automatic Target Recognition*): pertanto, la misura delle distanze e degli angoli verticali ed orizzontali vengono effettuate in maniera totalmente automatizzata.

La ripetibilità dei rilievi diventa un parametro essenziale quando si vuole monitorare la stabilità dei vettori eccentricità e del sito collocato. Il tempo che separa le diverse campagne di misura dipende dalla stabilità del sito: a Medicina, a causa del problema della subsidenza si è deciso di procedere con una ripetizione pressochè annuale delle misure. La situazione geologica, infatti, è quella caratteristica delle zone alluvionali; le argille si trovano sino a quasi 20 metri di profondità e la tavola d'acqua è posizionata poco sotto la superficie fisica (Zerbini et al. 2002).

L'installazione dei *marker* geodetici, le monumentazioni e le realizzazioni delle reti di controllo devono essere accuratamente studiate e realizzate tenendo in considerazione tali caratteristiche.

La rete di controllo a Medicina è materializzata da tre pilastri (definiti da un ITRF DOMES) posizionati sul lato ovest dell'antenna VLBI, sui quali è possibile fare stazione tramite centramento forzato; questo tipo di stazionamento è in grado di garantire un'elevata stabilità e ripetibilità della messa in stazione degli strumenti nelle tre coordinate spaziali permettendo inoltre, la misura diretta della quota (Figura 2.3-1).



Figura 2.3-1: Sistema utilizzato per il centramento della stazione totale in corrispondenza di un pilastro della rete locale di controllo e per la misura dell'altezza strumentale.

La rete di controllo locale dell'osservatorio di Medicina è fortemente disomogenea: i pilastri sono localizzati solo sul lato ovest del radiotelescopio ed è quindi necessario ricorrere all'installazione di treppiedi per completare la rete, anche se solo in maniera temporanea.

In particolare, le coordinate planimetriche sono riferite ad un sistema avente origine nel pilastro P₃ e asse delle ascisse diretto secondo la congiungente P₃-P₁ (Figura 2.3-2) mentre le elevazioni vengono determinate come differenza rispetto ad un *target* verticale fisso installato nel *marker* G7 (Figura 2.3-3).

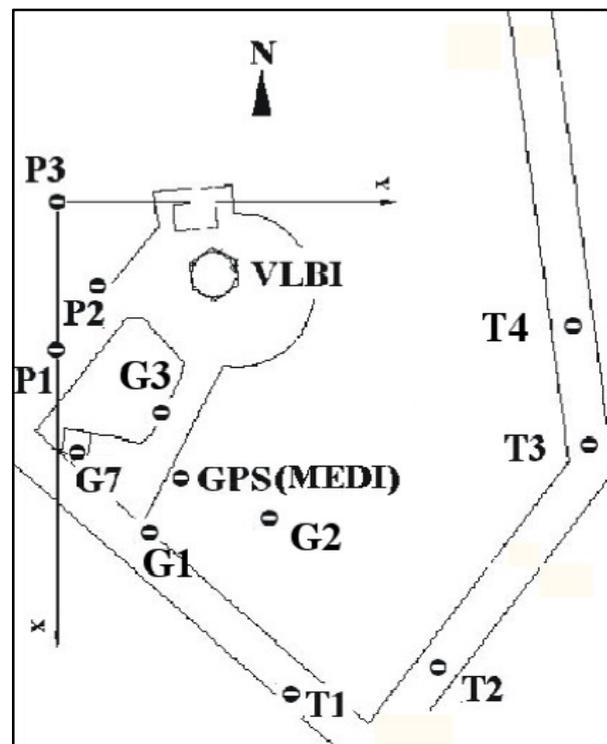


Figura 2.3-2: Schema della rete di controllo realizzata a Medicina nella campagna di misura del 2003: i punti rappresentati dalla lettera P sono dei pilastri permanenti definiti da un ITRF DOMES, G7 è il punto di riferimento verticale, T sono dei punti materializzati temporaneamente da treppiedi, G1, G2, G3 rappresentano dei treppiedi utilizzati per assicurare una connessione topografica con la superficie esterna dell'antenna GPS.

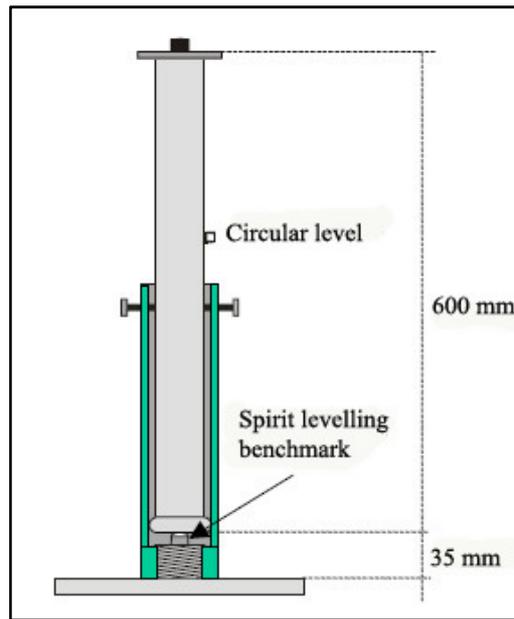


Figura 2.3-3: Sistema installato nel punto G7 (DOMES 12711M00) e utilizzato come riferimento verticale per le indagini locali.

2.4 Indagini topografiche realizzate presso i radiotelescopi di Medicina e di Noto

Al fine di realizzare un collegamento fra le osservazioni topografiche e quelle realizzate dal sistema *laser* è necessario identificare un adeguato sistema di riferimento.

Le *local ties*, come detto nel paragrafo 2.3, sono comunemente effettuate tramite delle osservazioni terrestri; di conseguenza, le misure e i calcoli realizzati per la loro stima, così come la posizione del *reference point* del telescopio VLBI e le coordinate dei *markers* della rete locale di controllo a terra, sono riferiti ad un sistema di riferimento topocentrico definito localmente. Pertanto, è conveniente esprimere le deformazioni ricavate dal rilievo *laser* nel medesimo sistema topocentrico adottato per le operazioni di stima delle *local ties*. Questo è necessario per consentire un collegamento diretto fra la superficie deformata del *dish* e la rete locale di controllo a terra.

La trasformazione fra il sistema di riferimento specifico del *laser* e il sistema topocentrico può essere realizzato, come di consueto, rilevando punti comuni. In particolare, le sfere installate sul bordo esterno del *dish* (Figura 2.2-3) sono state osservate da una coppia di *total stations* di alta precisione posizionate sui supporti F1 e F2 (Figura 2.4-1); ogni sfera è stata collegata rigidamente ad un prisma retro-direttivo che può essere ruotato ed orientato in modo da essere visibile anche dai pilastri della rete locale di controllo a terra.

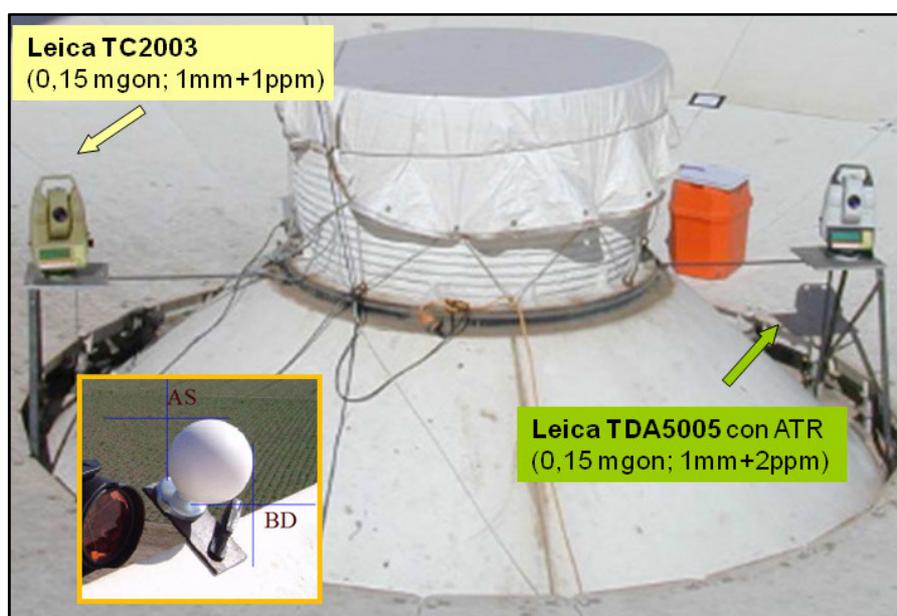


Figura 2.4-1: Stazioni totali sui supporti F1 e F2 per la misura delle sfere e dei prismi retroriflettenti utilizzati per la connessione fra le osservazioni *laser* e la rete locale esterna.

Al fine di individuare il centro di ogni sfera e stimare le loro coordinate, le sfere sono state triangolate secondo lo schema di osservazione riportato nella figura 2.4-2. La simmetria degli oggetti è stata utilizzata per ottenere degli angoli che possono essere riferiti indirettamente al centro delle sfere stesse: gli angoli zenitali, la cui lettura è stata realizzata posizionando il filo orizzontale del reticolo tangenzialmente al bordo superiore ed inferiore della sfera, Z_u e Z_l rispettivamente, possono essere mediati in modo da ottenere un valore dell'angolo zenitale riferito al centro \bar{Z} . Analogamente, i bordi a destra

e a sinistra della sfera sono stati collimati utilizzando il filo verticale del reticolo: i corrispondenti angoli orizzontali (A_r e A_l) sono stati mediati in modo da ottenere un angolo il cui valore è riferito al centro della sfera \bar{A} . Il valore medio dei due angoli è stato utilizzato durante la compensazione delle osservazioni terrestri per stimare il centro dei *targets* sferici.

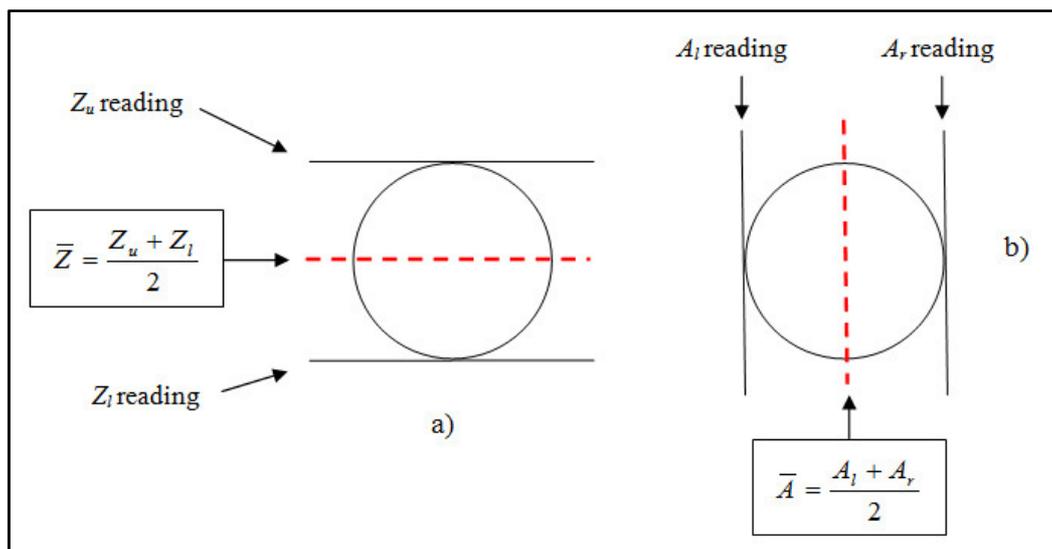


Figura 2.4-2: a) Collimazione del bordo superiore ed inferiore del *target* sferico utilizzando il filo orizzontale del reticolo; la media degli angoli zenitali è riferita al centro \bar{Z} . b) Collimazione dei bordi laterali con il filo verticale del reticolo; la media degli angoli azimutali è riferita al centro \bar{A} .

I centri delle sfere possono quindi essere osservati realizzando una triangolazione dalle due stazioni totali. Contemporaneamente, i prismi retroriflettenti posizionati accanto ad ogni sfera sono stati osservati misurando angoli e distanze. In particolare, per rendere accessibile la superficie interna del riflettore primario agli operatori e quindi, poter effettuare le osservazioni topografiche, il rilievo è stato realizzato disponendo l'antenna VLBI alla elevazione di 90° .

I prismi retroriflettenti sono stati anche collimati dai pilastri della rete locale di controllo a terra posizionando il telescopio VLBI alle stesse elevazioni (90° , 75° , 60° , 45° , 30° , 15°) utilizzate per il rilievo *laser scanner* dello specchio primario.

Allo scopo di valutare le deformazioni gravitazionali anche del quadrupode, sono state realizzate delle campagne di misura topografiche nel mese di ottobre del 2006, presso l'osservatorio di Medicina, e nel mese di agosto del 2007, oltre che a Medicina anche presso il radiotelescopio di Noto. In corrispondenza del quadrupode sono stati posizionati tre prismi retroriflettenti, indicati dalla lettera "R" nella figura 2.4-3, che sono stati osservati durante le campagne di misure Geodetiche-Topografiche di alta precisione per la determinazione del vettore eccentricità tra i punti di riferimento delle due tecniche co-locate, GPS-VLBI.



Figura 2.4-3: Prismi retroriflettenti posizionati in corrispondenza del quadrupode e utilizzati per valutare le deformazioni gravitazionali del quadrupode stesso.

La stima della posizione dell'asse di elevazione ha permesso, infatti, di determinare la distanza fra i prismi posizionati sul quadrupode e un centro di rotazione, il più indeformato possibile, e di valutare quindi il comportamento del quadrupode sotto l'azione della gravità (vedi paragrafo 4.2).

3. FEM

(FINITE ELEMENT METHOD)

3.1 Introduzione ai modelli numerici

Il metodo agli elementi finiti, FEM (*Finite Element Method*), è un particolare procedimento di calcolo numerico che trasforma problemi al continuo (ove sono incognite funzioni di una o più variabili) in problemi al discreto (ove sono incogniti i valori che le stesse funzioni incognite assumono in determinate coordinate del campo di definizione). Esso non è una prerogativa soltanto delle materie di ingegneria strutturale (settori civili, meccanici, aeronautici, navale) ma di tutti i campi dell'ingegneria e più estesamente della fisica.

Il calcolo delle deformazioni e delle sollecitazioni interne di strutture a geometria complessa, sino ad alcuni anni fa, non potendosi affrontare in forma chiusa, veniva eseguito con approssimazioni a volte grossolane e in certi casi scarsamente realistiche. Oggigiorno i modelli numerici permettono invece di considerare anche un numero elevato di punti, i cosiddetti nodi, con relativi spostamenti, deformazioni e sollecitazioni interne. L'enorme mole di informazioni da gestire viene organizzata ed ordinata in forma matriciale dal computer. In questo modo il linguaggio stesso dell'analisi strutturale ha assunto un aspetto diverso, sicuramente più sintetico e omogeneo.

La versatilità del metodo non deve però trarre in inganno l'utente; a monte di qualsiasi applicazione numerica agli elementi finiti occorre una approfondita riflessione ed un notevole criticismo da parte dell'operatore che deve saper individuare gli schemi strutturali e statici più attinenti al modello fisico in esame ed i tipi di *elementi finiti* più idonei allo sviluppo del calcolo e alla convergenza del problema (Comincioli 1991, Corradi dell'Acqua 1992, Fontanella e Pasquali

1992, Cesari 1997, Rugarli 2003). A valle dell'applicazione, ancora una volta l'utente deve attuare gli indispensabili controlli idonei ad accertare il grado di affidabilità dei risultati.

L'applicazione del metodo agli elementi finiti richiede che il sistema venga descritto da un numero finito di componenti discrete (ad esempio triangolari o quadrangolari) ognuna delle quali abbia un comportamento che possa essere determinato con facilità. Questo procedimento può approssimare tanto più il sistema originario quanto più le componenti "elementari" sono piccole. E' intuitivo il fatto che scegliendo una *mesh* di elementi finiti più fitta è possibile ottenere soluzioni più accurate anche se tale accorgimento porta ad aumentare le dimensioni del sistema algebrico che deve essere risolto e pertanto i tempi di calcolo. Una descrizione ottimale del sistema è quindi indispensabile per un giusto compromesso fra il grado di accuratezza richiesto alla soluzione e la complessità stessa della risoluzione.

3.1.1 Presentazione del metodo

Il metodo agli elementi finiti è al tempo stesso un metodo di discretizzazione, poiché considera un numero finito sebbene grande di nodi strutturali, e un metodo di interpolazione, poiché consente di stimare le grandezze statiche e cinematiche anche al di fuori dei nodi.

I singoli passi che costituiscono la base di una soluzione agli elementi finiti possono essere brevemente riassunti come segue:

1. Discretizzazione del dominio di definizione.

Il mezzo continuo viene suddiviso in un certo numero di sottodomini di forma molto semplice detti *elementi finiti*, connessi fra loro tramite i nodi (gli spostamenti dei nodi costituiscono le incognite del problema). Il numero e la forma degli elementi finiti dipende dalle caratteristiche del dominio, dal tipo di problema che deve essere risolto e naturalmente dall'accuratezza della soluzione desiderata.

La scelta di un elemento finito sbagliato o inadatto può rendere il modello labile (impossibilità di risolvere il problema) o nell'ipotesi peggiore, viene calcolata una risposta che si discosta molto da quella reale (*output* risulta inaffidabile).

La suddivisione della struttura in elementi finiti è uno dei punti più delicati dell'intero procedimento di soluzione in quanto oltre a soddisfare tutti i requisiti di regolarità che una *mesh* deve garantire, gli elementi devono essere sufficientemente piccoli dove il gradiente degli spostamenti o degli sforzi è maggiore. Alcuni criteri che possono essere seguiti per definire una *mesh* sono:

- evitare elementi finiti di forma irregolare;
- mantenere un conveniente rapporto fra la dimensione media degli elementi e le dimensioni della struttura, o di sue parti, addensando la *mesh*, come già detto, in regioni nelle quali si prevedono forti gradienti di sollecitazione;
- disporre un nodo (o un lato) della *mesh* in coincidenza del punto di applicazione di un carico concentrato (o distribuito lungo una linea);
- seguire con uno o più lati consecutivi della *mesh* eventuali linee di separazione di aree aventi differenti carichi distribuiti o differenti caratteristiche geometriche o meccaniche;
- organizzare la *mesh* prevedendo la possibilità di uno o più raffittimenti su tutta la struttura, o su una o più parti di maggiore interesse, allo scopo di ottenere indicazioni sulla accuratezza dei risultati, con successive rianalisi. Se infatti due *mesh* di diversa raffinatezza conducono a risultati simili, vuol dire che si è sufficientemente approssimato il risultato e la qualità della *mesh* risulta buona.

2. Attribuzione delle caratteristiche geometriche e meccaniche agli elementi finiti.

Ultimata la parte grafica della discretizzazione, la maggior parte degli elementi finiti richiedono che, oltre a specificare la forma, vengano a loro attribuite ulteriori caratteristiche: ad esempio lo spessore per gli elementi piastra-guscio o membrana, le aree o i momenti di inerzia per gli elementi trave. Tali caratteristiche aggiuntive sono necessarie non tanto per simulare la realtà fisica, quanto per definire correttamente il comportamento dell'elemento stesso. Ad esempio, per una piastra dotata di irrigidimenti, lo spessore, che comunque deve essere fornito quando si utilizza l'elemento piastra, dovrà essere maggiorato per tenere conto proprio della presenza dell'irrigidimento.

Oltre alle caratteristiche geometriche devono essere attribuite anche quelle meccaniche in base al tipo di materiale che caratterizza la struttura: in particolare, modulo elastico, coefficiente di Poisson e densità di peso del materiale. Generalmente le caratteristiche meccaniche sono definite per un gruppo di elementi di materiale affine.

3. Scelta delle funzioni di interpolazione.

Il metodo agli elementi finiti richiede che le funzioni approssimanti siano assegnate singolarmente ad ogni elemento in quanto devono rappresentare, mediante le funzioni di forma (vedi paragrafo 3.1.2) l'andamento della variabile di campo (pressione, spostamento, temperatura, velocità o densità) all'interno dell'elemento stesso. In generale, l'interpolante è un polinomio algebrico arrestato ad un certo ordine prefissato ed i punti di interpolazione sono i vertici dell'elemento. La dimensione dello spazio in cui è descritta l'interpolante dà luogo ad elementi monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali. Il criterio di interpolazione permette di determinare lo spostamento in ogni punto dell'elemento in base agli spostamenti dei nodi.

4. Attribuzione dei vincoli ai nodi.

I vincoli che vengono attribuiti ai nodi di una struttura possono riguardare uno o più dei possibili movimenti del nodo stesso. Un nodo presenta generalmente sei gradi di libertà, ovvero sei diverse possibilità di movimento: tre traslazioni e tre rotazioni nel sistema di riferimento globale. Vincolare una di queste componenti significa uguagliarla a zero. E' ovvio che, se fossero vincolati tutti i nodi non esisterebbe nessun problema matematico da risolvere. Se invece i vincoli sono insufficienti o mal posti il problema può diventare irrisolvibile o inutile. Esso diventa irrisolvibile quando sono presenti delle zone della struttura che possono muoversi senza che insorgano sforzi; diventa invece inutile quando i vincoli sono stati posizionati in modo da non interpretare correttamente il modello strutturale. Quest'ultima situazione è sicuramente quella più temibile in quanto si possono ottenere dei risultati completamente errati, a volte, senza neppure rendersene conto.

5. Attribuzione delle condizione di carico.

I carichi applicati alla struttura si dividono principalmente in carichi concentrati e in carichi distribuiti a seconda che le forze e le coppie siano applicate ai nodi della struttura o a punti interni agli elementi finiti, o posti sul loro contorno.

Un particolare tipo di azione è il carico termico, che può in generale essere nodale o distribuito. Sono azioni anche gli spostamenti imposti (ad esempio i cedimenti vincolari).

Ad ogni condizione di carico applicato viene fatto corrispondere un vettore delle forze nodali che rappresenta il termine noto del sistema di equazioni generato per risolvere la struttura. Pertanto, tutte le azioni, attraverso opportuni procedimenti, dovranno essere trasformate in forze o coppie nodali, ad eccezione degli spostamenti imposti: in quest'ultimo caso gli spostamenti invece di essere imposti nulli dovranno essere uguagliati al valore assegnato.

6. Soluzione ed interpretazione dei risultati.

Dopo aver convenientemente descritto la geometria del problema, le leggi di equilibrio, le equazioni del moto e le relazioni costitutive dei materiali si possono risolvere le equazioni differenziali associate nel sistema di riferimento globale. In particolare, il sistema di equazioni definito per tutta la struttura deve essere tale da rendere continui gli spostamenti e gli sforzi nel passaggio da un elemento ad un altro, in equilibrio gli sforzi interni e soddisfatte le condizioni al contorno. Infine, la fase di controllo dei risultati deve garantire che la soluzione ottenuta rispetti e sia compatibile con le caratteristiche del problema analizzato e che non siano stati commessi errori.

3.1.2 Proprietà del metodo

Si consideri una sottile lamina piana soggetta ad un sistema di forze agenti nello stesso piano (x, y) della lamina ed uniformemente distribuite lungo lo spessore. E' noto dalla teoria che, in un problema di stato piano di sforzo gli unici sforzi non nulli sono quelli paralleli al piano medio della lamina e non esistono sforzi normali e tangenziali perpendicolari al piano stesso.

In altre parole, i vettori delle deformazioni e degli sforzi incogniti saranno definiti dalle seguenti relazioni:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3-1.2-1)$$

mentre il vettore degli spostamenti incogniti dalla relazione:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.1.2-2)$$

E' possibile esprimere i legami fra gli spostamenti e le deformazioni attraverso l'equazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.1.2-3)$$

dove la matrice rettangolare \mathbf{C} è una matrice di operatori.

L'analisi degli sforzi e delle deformazioni di un solido può essere affrontata con diverse teorie che descrivono il comportamento del materiale sotto l'azione delle forze applicate. La teoria che generalmente viene adottata è la teoria della elasticità lineare.

Nei materiali elastici lineari è possibile esprimere la relazione che lega le deformazioni agli sforzi attraverso la legge di Hooke generalizzata:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1.2-4)$$

dove, la matrice quadrata \mathbf{D} è chiamata matrice di rigidità dei materiali. Tale matrice può essere espressa in funzione del modulo di Young, E , e del rapporto di Poisson, ν , come:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.1.2-5)$$

Volendo applicare il metodo agli elementi finiti per risolvere il problema supponiamo, ad esempio, di suddividere la lamina in m elementi triangolari: ognuno degli elementi è quindi definito dai nodi (i, j, k) collegati da tre lati. Sia \mathbf{u} lo spostamento in un qualsiasi punto dell'elemento, e $\hat{\mathbf{u}}$ una sua approssimazione definita come:

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} \sum N_i \mathbf{a}_i^e = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i^e \\ \mathbf{a}_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \quad (3.1.2-6)$$

dove le componenti di \mathbf{N} sono le funzioni di forma mentre le componenti di \mathbf{a}^e sono gli spostamenti ai nodi dell'elemento e . Se l'equazione (3.1.2-2) esprime gli spostamenti orizzontali e verticali di un punto qualsiasi allora gli spostamenti corrispondenti al nodo i -esimo saranno espressi da:

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{Bmatrix} \quad (3.1.2-7)$$

Le funzioni di forma N_i, N_j, N_k , che descrivono il campo dei spostamenti nell'elemento, sulla base dei dati di geometria, di caratteristiche meccaniche, di carico, di distorsione specificati per l'elemento, devono essere tali da soddisfare le seguenti proprietà:

$$N_i(x_i, y_i) = 1 \quad N_i(x_j, y_j) = N_i(x_k, y_k) = 0 \quad (3.1.2-8)$$

e, nel caso che le componenti dello spostamento siano interpolate nello stesso modo:

$$N_i = N_i * 1 \quad (3.1.2-9)$$

Le equazioni (3.1.2-8) assicurano la validità della relazione (3.1.2-6) e sono di fatto delle condizioni di congruenza: esse garantiscono che il campo di spostamenti rispetti gli spostamenti nei nodi.

Se gli spostamenti sono noti si può determinare la deformazione in ogni punto dell'elemento. In base all'equazione (3.1.2-3) è possibile esprimere, in forma matriciale, la relazione di compatibilità tra la deformazione e lo spostamento come:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{N} \mathbf{a}^e = \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad (3.1.2-10)$$

dove, la matrice rettangolare $\mathbf{B} = \mathbf{CN}$ è una matrice di funzioni note.

In base alla relazione costitutiva del materiale, cioè la relazione fra sforzo e deformazione (3.1.2-4) è possibile esprimere gli sforzi in funzione delle sole incognite spostamenti nodali \mathbf{a}^e :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBa}^e \quad (3.1.2-11)$$

La matrice quadrata e simmetrica \mathbf{D} è composta da numeri perfettamente calcolabili note che siano le caratteristiche del materiale e la geometria della struttura.

E' possibile notare come spostamenti, deformazioni e sforzi all'interno dell'elemento finito siano espressi mediante funzioni e coefficienti noti e spostamenti nodali incogniti: noti quest'ultimi è possibile conoscere il comportamento all'interno dell'elemento finito.

La situazione di equilibrio di un elemento finito può essere studiata applicando diversi approcci, uno dei quali è il metodo energetico. In quest'ultimo caso l'equilibrio (relazione fra sforzo e forze applicate) viene raggiunto ricercando la stazionarietà dell'energia potenziale totale (principio dei lavori virtuali).

L'energia di deformazione all'interno di un elemento finito, per un materiale elastico lineare ed isotropo, a causa delle deformazioni che esso ha subito può essere espressa dalla seguente relazione:

$$Z = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (3.1.2-12)$$

Il volume V indicato nella relazione (3.1.2-12) può essere un tratto di volume oppure un tratto di superficie o di linea, a seconda del tipo di problema che deve essere studiato.

Sostituendo le equazioni (3.1.2-10) e (3.1.2-11) nella relazione (3.1.2-12) si ottiene:

$$Z = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \left(\int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{a}^e \quad (3.1.2-13)$$

L'integrale contenuto nella relazione (3.1.2-13) è l'integrale di una matrice quadrata che presenta lo stesso ordine del vettore \mathbf{a}^e . L'integrale di una matrice non è altro che una matrice avente come componenti gli integrali dei singoli termini. In questo caso, la matrice quadrata è simmetrica:

$$\mathbf{K}^e = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (3.1.2-14)$$

rappresenta la matrice di rigidità dell'elemento finito. Sostituendo la relazione (3.1.2-14) nell'equazione (3.1.2-13) si ottiene:

$$Z = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e \quad (3.1.2-15)$$

Consideriamo ora il lavoro svolto dai carichi applicati. I carichi possono essere divisi in azioni applicate note (\mathbf{b} e \mathbf{p}) e in azioni incognite (\mathbf{s}). In particolare, \mathbf{b} e \mathbf{p} rappresentano rispettivamente le forze di volume (gravità) e di superficie (pressione) applicate mentre, le seconde, le reazioni che l'elemento finito considerato scambia con gli elementi finiti adiacenti.

Il lavoro svolto dalle prime due azioni, considerando che le funzioni spostamento possono essere espresse mediante la relazione (3.1.2-6), può essere espressa come:

$$\begin{aligned} W_p &= \mathbf{a}^{eT} \left(\int \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \right) + \mathbf{a}^{eT} \left(\int \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS \right) = \\ &\mathbf{a}^{eT} \left[\left(\int \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV \right) + \left(\int \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS \right) \right] = \mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (3.1.2-16) \end{aligned}$$

dove \mathbf{f}^e prende il nome di vettore delle forze nodali equivalenti in quanto le forze in esso contenute in realtà non esistono. Esse sono forze fittizie che però hanno agli effetti del lavoro gli stessi effetti che

avrebbero le forze di volume e di superficie pesate dai corrispondenti spostamenti.

Applicando lo stesso ragionamento anche alle forze reattive (\mathbf{s}) si ricava:

$$W_r = \mathbf{a}^{eT} (\int \mathbf{N}^T \mathbf{s} dS) = \mathbf{a}^{eT} \mathbf{r}^e \quad (3.1.2-17)$$

Le forze nodali \mathbf{r}^e , a differenza delle \mathbf{f}^e , sono completamente incognite.

L'energia potenziale totale, ricordando che $\Pi = Z - W$, è espressa come:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e - \mathbf{a}^{eT} \mathbf{r}^e \quad (3.1.2-18)$$

L'equilibrio viene quindi assicurato se la variazione dell'energia potenziale totale del sistema è stazionaria per le variazioni degli spostamenti considerate.

E' possibile esprimere la variazione di energia potenziale totale dalla relazione:

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \frac{1}{2} \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \delta \mathbf{a}^e - \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e - \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{r}^e \quad (3.1.2-19)$$

dove, il secondo termine, data la simmetria di \mathbf{K}^e e il fatto che la trasposta di un numero è ancora lo stesso numero, assume la forma $\frac{1}{2} \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e$. Pertanto, la relazione (3.1.2-19) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{f}^e - \delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{r}^e = \\ &= \delta \mathbf{a}^{eT} (\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e - \mathbf{r}^e) \end{aligned} \quad (3.1.2-20)$$

Poiché $\delta \Pi$ deve essere nulla per qualunque $\delta \mathbf{a}^e$ allora, deve essere verificata la relazione fondamentale:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e - \mathbf{r}^e = \mathbf{0} \quad (3.1.2-21)$$

Ovvero, esplicitandola rispetto ad \mathbf{r}^e :

$$\mathbf{r}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{f}^e \quad (3.1.2-22)$$

La relazione (3.1.2-22) corrisponde di fatto ad aver imposto l'equilibrio in un certo numero di punti: i nodi. Questo equilibrio nei nodi media in senso energetico l'equilibrio dell'intero elemento finito.

Le equazioni descritte fino a questo momento si riferiscono ad un singolo elemento nel proprio sistema di riferimento locale che difficilmente coinciderà con il sistema globale adottato per definire il comportamento dell'intero solido. Gli elementi possono quindi essere orientati in modo diverso tra loro e rispetto al sistema complessivo così come gli spostamenti dei singoli nodi che lo compongono.

Questo problema, in generale, può essere risolto esprimendo il legame fra gli spostamenti nodali globali $\bar{\mathbf{a}}^{eg}$ e gli spostamenti nodali locali $\bar{\mathbf{a}}^e = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N\}^T$, con N numero dei nodi dell'elemento. Tale legame è definito dalla seguente relazione:

$$\mathbf{a}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{a}^{eg} \quad (3.1.2-23)$$

dove \mathbf{T}^e rappresenta la matrice di trasformazione per l'elemento e fra il suo sistema locale e quello globale dell'intero solido.

Tenendo conto della relazione (3.1.2-23) è possibile esprimere tutte le grandezze in funzione degli spostamenti nodali riferiti al sistema di coordinate globale. Di seguito vengono definite le nuove grandezze che rappresentano l'estensione al sistema di riferimento globale di quanto già visto per il sistema di riferimento locale e i relativi risultati.

Matrice di rigidezza nel sistema globale \mathbf{K}^{eg} :

$$\mathbf{K}^{eg} = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \quad (3.1.2-24)$$

Forze nodali equivalenti nel sistema di riferimento globale \mathbf{f}^{eg} :

$$\mathbf{f}^{eg} = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{f}^e \quad (3.1.2-25)$$

Reazioni nodali equivalenti nel sistema di riferimento globale \mathbf{r}^{eg} :

$$\mathbf{r}^{eg} = \mathbf{r}^{eT} \mathbf{r}^e \quad (3.1.2-26)$$

Energia di deformazione:

$$Z = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{egT} \mathbf{K}^{eg} \mathbf{a}^{eg} \quad (3.1.2-27)$$

Lavoro dei carichi applicati:

$$W_p = \mathbf{a}^{egT} \mathbf{f}^{eg} \quad (3.1.2-28)$$

Lavoro delle forze reattive:

$$W_r = \mathbf{a}^{egT} \mathbf{r}^{eg} \quad (3.1.2-29)$$

Infine, l'equazione di equilibrio per l'elemento:

$$\mathbf{r}^{eg} = \mathbf{K}^{eg} \mathbf{a}^{eg} - \mathbf{f}^{eg} \quad (3.1.2-30)$$

I risultati riportati sono in funzione degli spostamenti nodali riferiti al sistema di riferimento globale e non a quello locale.

Fino a questo momento è stato descritto il comportamento interno ad un singolo elemento senza che vi fosse coerenza con quello degli altri elementi e quindi della struttura nel suo complesso. Questo ovviamente non è corretto nel momento in cui deve essere studiato il comportamento di tutta la struttura in quanto le forze che agiscono su di un elemento finito sono in parte comunicate dagli elementi limitrofi. Pertanto, si rende necessario ricercare i valori di

spostamento che contemporaneamente mettono in equilibrio tutti gli elementi finiti fra loro e l'insieme dei carichi applicati.

Prima di studiare l'equilibrio dell'intera struttura occorre chiarire come si possa passare dal vettore degli spostamenti nodali dell'elemento, al vettore degli spostamenti nodali della struttura.

Analogamente alla definizione della relazione (3.1.2-23) è possibile definire una opportuna matrice rettangolare Λ^e che permetta di trasformare il vettore degli spostamenti dell'elemento e , \mathbf{a}^{eg} (nel sistema globale) nel vettore degli spostamenti nodali dell'intera struttura \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \Lambda^e \mathbf{a}^{eg} \quad (3.1.2-31)$$

La relazione (3.1.2-31) indica che gli spostamenti dei nodi degli elementi sono precisi spostamenti dei nodi della struttura alla quale gli elementi appartengono.

Così come è possibile definire una matrice che permetta di passare dall'elemento alla struttura è anche possibile definire una matrice che permetta di passare dalla struttura all'elemento, ovvero una matrice rettangolare Γ^e tale che:

$$\mathbf{a}^{eg} = \Gamma^e \mathbf{a} \quad (3.1.2-32)$$

Le due matrici Λ^e , Γ^e dovranno soddisfare le seguenti relazioni:

$$\Gamma^e \Lambda^e = \mathbf{I} \quad \Lambda^e \Gamma^e = \mathbf{I} \quad (3.1.2-33)$$

$$\Gamma^e = \Lambda^{eT} \quad \Lambda^e = \Gamma^{eT} \quad (3.1.2-34)$$

Vediamo ora come è possibile definire l'equilibrio dell'intera struttura.

L'energia potenziale totale del singolo elemento finito nel sistema di riferimento globale può essere definita come:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^{egT} \mathbf{K}^{eg} \mathbf{a}^{eg} - \mathbf{a}^{egT} \mathbf{f}^{eg} - \mathbf{a}^{egT} \mathbf{r}^{eg} \quad (3.1.2-35)$$

Introducendo la relazione (3.1.2-32) nell'equazione (3.1.2-35) è possibile ottenere l'energia potenziale totale dell'elemento in funzione del vettore degli spostamenti nodali della struttura:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{K}^{eg} \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{f}^{eg} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{r}^{eg} \quad (3.1.2-36)$$

e, ricordando la seconda relazione della (3.1.2-34), è possibile scrivere:

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{K}^{eg} \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{f}^{eg} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{r}^{eg} \quad (3.1.2-37)$$

Sommando tutti i contributi degli elementi che compongono la struttura è possibile definire l'energia potenziale totale della struttura come:

$$\Pi^e = \sum \left(\frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{K}^{eg} \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{f}^{eg} - \mathbf{a}^T \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{r}^{eg} \right) \quad (3.1.2-38)$$

La relazione (3.1.2-38), considerando che l'ultimo termine della sommatoria deve essere nullo in quanto il lavoro compiuto dalle forze reattive interne è globalmente pari a zero, può essere riscritta come:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T (\sum \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{K}^{eg} \mathbf{\Gamma}^e) \mathbf{a} - \mathbf{a}^T (\sum \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{f}^{eg}) \quad (3.1.2-39)$$

Definendo $\mathbf{K} = \sum \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{K}^{eg} \mathbf{\Gamma}^e$ e $\mathbf{f} = \sum \mathbf{\Lambda}^e \mathbf{f}^{eg}$, l'equazione (3.1.2-39) assume la forma:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{f} \quad (3.1.2-40)$$

La condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale, definita dalla relazione:

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{a}^T(\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f}) \quad (3.1.2-41)$$

deve essere verificata per ogni possibile $\delta\mathbf{a}$, compatibilmente con i vincoli imposti. Ne segue:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.1.2-42)$$

dove, la matrice di rigidità globale \mathbf{K} agisce come matrice dei coefficienti, il vettore \mathbf{f} come vettore dei termini noti, mentre il vettore \mathbf{a} è il vettore delle incognite. Trovare il vettore \mathbf{a} vuol dire trovare quella configurazione della struttura tale per cui una variazione infinitesima di configurazione eseguita a partire da quella trovata comporta una variazione prima nulla dell'energia potenziale totale Π . L'energia di deformazione Z della struttura aumenta, ma questa variazione è esattamente compensata dal lavoro dei carichi W . Pertanto, non vi può essere energia cinetica e neppure movimento altrimenti la struttura non sarebbe in equilibrio.

3.2 Modello agli elementi finiti realizzato per il radiotelescopio di Medicina

L'analisi strutturale, per via numerica, del telescopio di Medicina è stata realizzata mediante il *software* Ansys 9.0.

Al fine di facilitare la realizzazione del modello numerico gli elementi strutturali sono stati suddivisi in gruppi. Tale suddivisione è stata fatta con riferimento alla particolare funzione strutturale dei vari elementi ed alle diverse tipologie utilizzate nella modellazione. In particolare, si sono considerati 46 gruppi di elementi finiti per un

totale di circa 2400. Nella tabella 3.2-1, per ogni gruppo vengono riportati:

- il tipo di elemento finito utilizzato (Figura 3.2-1);
- il numero di elementi che costituiscono il gruppo;
- la zona di struttura modellata da tale gruppo.

Numero Gruppo	Tipo Elemento	Numero elementi	Zona modellata
1	<i>Truss</i>	4	Ruote
2	<i>Beam</i>	4	Sostegno ruote
3	<i>Beam</i>	37	Travi impalcato base alidada
4	<i>Truss</i>	4	Ralla azimut
5	<i>Beam</i>	31	Travi impalcato quota elevazione
6	<i>Beam</i>	35	Travi impalcato quota supporti
7-8-9	<i>Beam</i>	14-12-2	Telaio alidada considerato in diverse sezioni
10	<i>Truss</i>	136	Paraboloide: anelli, corrente inferiore
11	<i>Truss</i>	64	Paraboloide: superficie inferiore, steccature
12	<i>Beam</i>	72	Paraboloide: superficie superiore, anelli interni
13	<i>Truss</i>	192	Paraboloide: superficie superiore, anelli
14	<i>Truss</i>	88	Paraboloide: superficie superiore, steccature
15	<i>Truss</i>	240	Paraboloide: diagonali anelli
16	<i>Truss</i>	96	Paraboloide: correnti superiori centine
17	<i>Truss</i>	96	Paraboloide: correnti inferiori centine
18	<i>Truss</i>	104	Paraboloide: montanti centine
19	<i>Truss</i>	96	Paraboloide: montanti centine
20	<i>Truss</i>	96	Paraboloide: false centine
21	<i>Beam</i>	34	Paraboloide: telai A74
22	<i>Truss</i>	8	<i>Center hub</i> : correnti inferiori
23	<i>Truss</i>	12	<i>Center hub</i> : correnti superiori
24	<i>Truss</i>	28	<i>Center hub</i> : correnti inferiori
25	<i>Truss</i>	28	<i>Center hub</i> : correnti superiori
26	<i>Truss</i>	24	<i>Center hub</i> : diagonali
27	<i>Beam</i>	44	<i>Center hub</i> : montanti
28	<i>Truss</i>	54	<i>Center hub</i> e paraboloide: diagonali
29	<i>Truss</i>	70	Contrappesi: tralici di sostegno
30	<i>Truss</i>	20	Contrappesi: elementi di sostegno
31	<i>Beam</i>	108	<i>Center hub</i>

32	<i>Truss</i>	32	<i>Center hub</i>
33	<i>Shell</i>	162	Ruota di elevazione
34	<i>Beam</i>	114	Ruota di elevazione: irrigidimenti
35	<i>Beam</i>	12	Telai A62
36	<i>Truss</i>	9	Ruota di elevazione: steccature
37	<i>Beam</i>	28	Sostegno subriflettore
38	<i>Beam</i>	30	Sostegno subriflettore
39	<i>Beam</i>	24	Supporti di elevazione
40	<i>Beam</i>	12	Supporti di elevazione
41	<i>Truss</i>	2	Motoriduttori di azimut
42	<i>Beam</i>	2	Sostegno riduttori elevazione
43	<i>Truss</i>	2	Motoriduttori di elevazione
44	<i>Truss</i>	10	Subriflettore e ricevitori
45	<i>Boundary</i>	92	Rigidezze torsionali
46	<i>Boundary</i>	21	Vincoli a terra

Tabella 3.2-1: Gruppi, tipi e numeri di elementi utilizzati nella modellazione del radiotelescopio VLBI di Medicina.

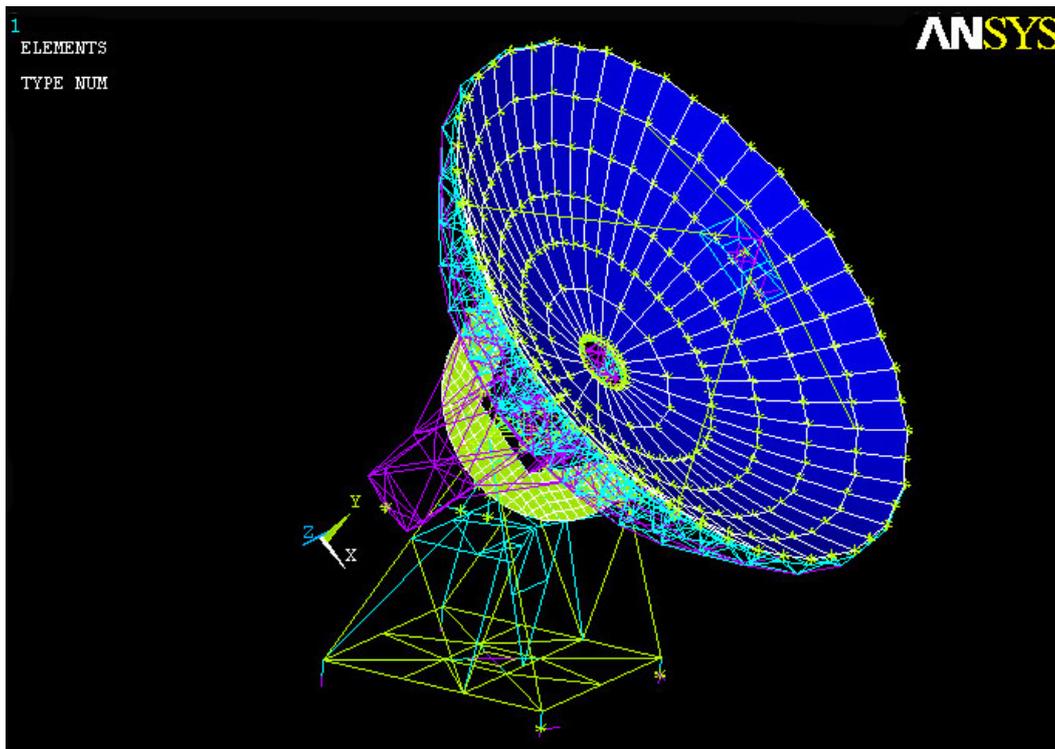


Figura 3.2-1: FEM del telescopio di Medicina alla elevazione di 45°: rappresentazione degli *elements type* utilizzati nel modello suddivisi in classi di colori.

La geometria degli elementi finiti utilizzati per la modellazione del radiotelescopio di Medicina viene riportata nella figura 3.2-1.

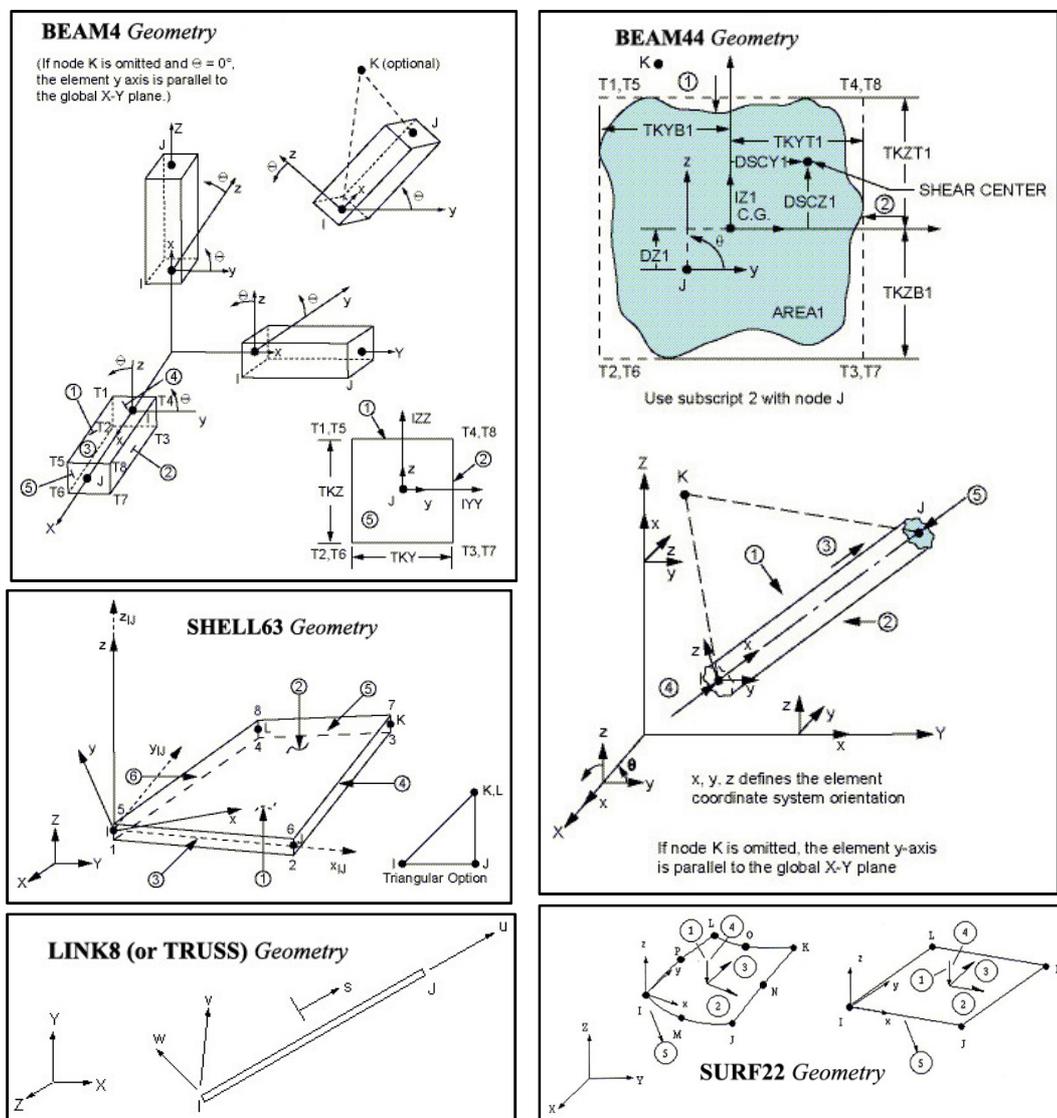


Figura 3.2-1: Caratteristiche geometriche degli elementi finiti utilizzati nella modellazione del telescopio di Medicina.

Il sistema di riferimento (Figura 3.2-2) assunto per la realizzazione dei diversi modelli strutturali presenta:

- l'origine posta in corrispondenza del centro della ralla azimutale, alla quota di contatto ruote-rotai;
- l'asse Y parallelo ed equiverso all'asse verticale dell'antenna;

- l'asse Z parallelo all'asse di elevazione della struttura;
- l'asse X completa la terna cartesiana destrorsa.

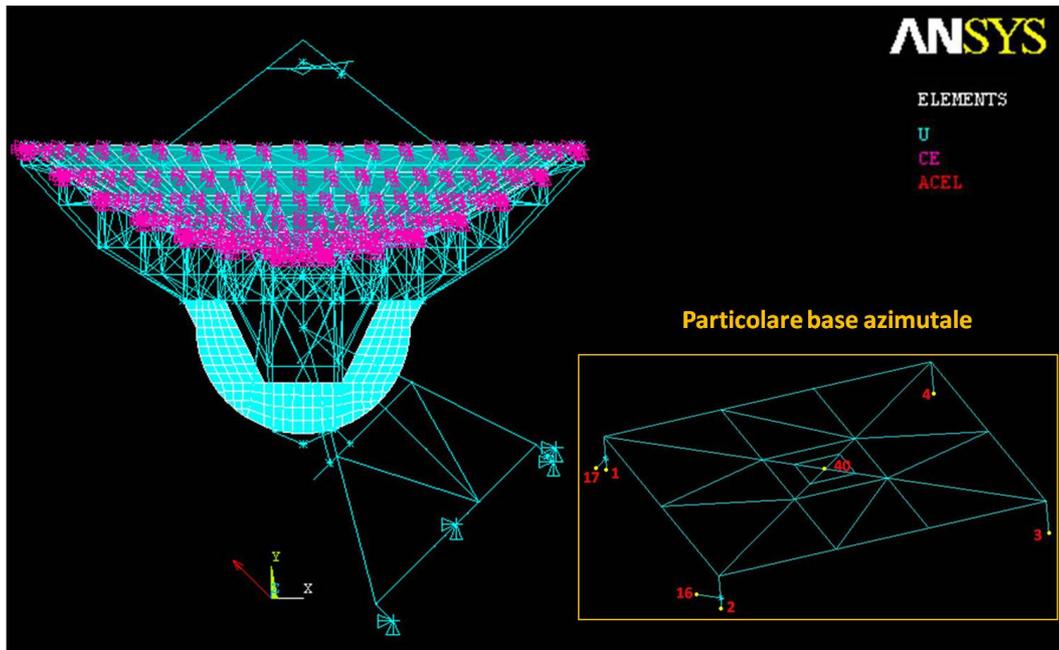


Figura 3.2-2: FEM del telescopio di Medicina alla elevazione di 90° : rappresentazione del sistema di riferimento, delle condizioni di carico (gravità) e dei vincoli utilizzati.

Le analisi sono state eseguite su sei modelli numerici corrispondenti ai seguenti valori dell'angolo di elevazione (15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90°). Per una maggiore semplicità dei modelli, e per facilitare il *post-processing* dei risultati, tali modelli sono stati ottenuti mantenendo fisso il paraboloide e ruotando l'alidada rispetto ad esso. Ovviamente anche la gravità, quando presente, è stata opportunamente ruotata. Ne consegue pertanto che, per combinare gli spostamenti ottenuti da due diversi modelli, relativi a diversi valori dell'angolo di elevazione, basta eseguire le opportune somme algebriche per i nodi appartenenti alla struttura del paraboloide, mentre per i nodi appartenenti all'alidada è necessario prima eseguire le opportune proiezioni degli spostamenti nodali in un sistema di riferimento solidale con l'alidada stessa, poi combinare tali spostamenti.

Le condizioni di carico sono riconducibili essenzialmente al peso proprio delle membrature strutturali. I pesi propri gravanti sull'antenna, per i diversi valori dell'angolo di elevazione, sono stati modellati essenzialmente mediante tre diverse modalità:

- I pesi propri degli elementi strutturali vengono automaticamente descritti al codice di calcolo specificando la densità del materiale e l'area della sezione (o lo spessore per elementi tipo SHELL);
- I pesi propri di alcuni elementi non strutturali e di rinforzi locali sono stati computati incrementando, mediante un opportuno coefficiente moltiplicativo, le densità degli elementi strutturali direttamente gravati da tali carichi. Ad esempio, nei gruppi di elementi relativi alle colonne dell'alidada la densità è stata incrementata del 10% per tenere conto il peso dei giunti, dei piatti di coprigiunto, dei bulloni;
- I rimanenti pesi gravanti sulla struttura sono stati applicati ai nodi della struttura stessa come carichi concentrati. Essi sono:
 - Il peso dei pannelli, distribuito in funzione dell'area di influenza dei nodi del paraboloide;
 - Il peso dei supporti dei pannelli;
 - Il peso degli elementi vincolati alle aste che realizzano il quadrupode di sostegno del subriflettore;
 - Il peso dei piatti e dei tondi pieni attaccati ai montanti interni del paraboloide;
 - Il peso delle pareti della *vertex room* e degli strumenti in essa contenuti;
 - Il peso del ricevitore e della relativa movimentazione;
 - Il peso del subriflettore, dei cuscinetti di elevazione e dei motori.

Nella tabella 3.2-2 sono riportati i carichi applicati, distinti secondo le principali voci.

Zona	Carichi concentrati (kN)	Carichi distribuiti (kN)	Totale dei carichi (kN)
Subriflettore	7.85	-	7.85
Supporti del subriflettore	20.21	47.23	67.44
Pannelli+supporti	108.72	-	108.72
Struttura del paraboloide	115.16	494.65	609.81
Ruota di elevazione, steccature e cremagliera	-	143.43	143.43
Contrappesi	573.17	-	573.17
Cuscinetti di elevazione	18.00	-	18.00
Struttura di sostegno dei contrappesi	-	93.51	93.51
Motori elevazione	44.50	-	44.50
Struttura alidada	-	798.20	798.20
Motori di azimut	93.40	-	93.40
Ricevitore, movimentazione	3.70	-	3.70
Totale	984.71	1577.02	2561.7

Tabella 3.2-1: Carichi applicati (kN) ai modelli numerici del telescopio di Medicina.

Dalla figura 3.2-2 è possibile osservare la forza di gravità (*ACEL*) diretta secondo l'asse Y del sistema di riferimento e le condizioni di vincolo imposte per la risoluzione del modello strutturale. In particolare, in corrispondenza dei nodi (1, 2, 3, 4, 16, 17, 40) appartenenti al piano azimutale ruotabile sono state applicate delle cerniere (*U*, triangoli di colore ciano nella figura 3.2-2), consentendo così solo le rotazioni e impedendo tutti gli spostamenti (u_x , u_y , u_z), mentre per rappresentare i legami fra i nodi dei pannelli e i corrispondenti della trave reticolare sottostante (*CE*, triangoli di colore magenta nella figura 3.2-2) è stata introdotta la seguente equazione lineare di vincolo:

$$CE = C_1 * Lab_1(Nodo 1) + C_2 * Lab_2(Nodo 2) + C_3 * Lab_3(Nodo 3) + \dots \quad 3.2-1$$

dove C_i , Lab_i rappresentano rispettivamente i coefficienti e i gradi di libertà considerati per il nodo i -esimo.

Il comando CE (*Constraint Equations*) impone una rigidità torsionale ai nodi collegati dall'equazione in modo che non si vengano a creare delle forze interne in seguito al movimento rigido. L'eventuale generazione di forze interne indicherebbe un errore nella formulazione dell'equazione.

In seguito a piccole dissimmetrie nelle travature dei piani di servizio, sotto carichi simmetrici, l'alidada introduce lievi dissimmetrie nei risultati.

Si veda, ad esempio, l'output dell'elaborazione Ansys per il modello strutturale alla elevazione di 90° riportato in Appendice A. Si considerino in particolare gli spostamenti dei nodi riportati in tabella 3.2-2.

Nodo	Spostamento u_x (cm)	Spostamento u_y (cm)	Spostamento u_z (cm)
1102	0.17326	-0.48702	-0.48370E-01
1150	0.17349	-0.48621	0.49613E-01
1126	0.19706	-0.29266	0.7279E-03
1174	0.14309	-0.62842	0.50966E-03

Tabella 3.2-2: Spostamenti dei nodi 1102, 1150, 1126 e 1174 posti sul paraboloide.

E' possibile notare come, per i nodi 1102 e 1150 (Figura 3.2-3) gli spostamenti rispettano la simmetria geometrica e di carico mentre questo non è più valido per i nodi 1126 e 1174. Le variazioni negli spostamenti dei nodi 1126 e 1174 possono essere spiegate dal fatto che il piano contenente l'asse di elevazione non è un piano di simmetria; infatti la ruota di elevazione e le steccature dal paraboloide su tale ruota non sono simmetriche rispetto a questo piano.

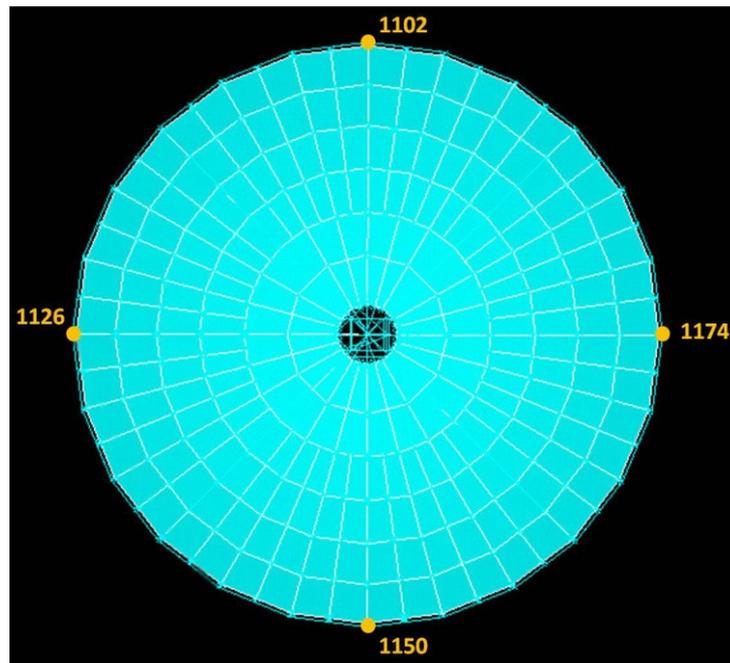


Figura 3.2-3: Disposizione dei nodi 1102, 1126, 1150 e 1174 all'interno del paraboloide.

4.

ANALISI E CONFRONTI FRA LE DIVERSE METODOLOGIE

4.1 *Post-processing* dei dati *laser* e relativi risultati

La fase di *post-processing* dei dati ricavati da un'indagine *laser* ha inizio solitamente, come detto nel paragrafo 2.1.2, con l'eliminazione degli *outliers* dal dato primario. In ogni scansione, quindi, sono stati individuati e rimossi manualmente tutti quei punti che non appartengono alla superficie del riflettore primario ma che, viste le caratteristiche strutturali dell'oggetto stesso sono stati misurati durante il rilievo *laser*. In questo caso ci si riferisce al fatto che i pannelli che rivestono la superficie interna del paraboloide presentano fra di loro un gioco che ha causato l'acquisizione anche di punti del terreno o della struttura reticolare sottostante.

Le nuvole così ripulite (Figura 4.1-1) sono state prima allineate (Figura 4.1-2), usando come punti comuni i sei target sferici presenti in entrambe le scansioni, e quindi unite (Figura 4.1-3) in modo da ottenere un'unica superficie; una per ogni elevazione studiata, in un sistema di riferimento solidale allo strumento.

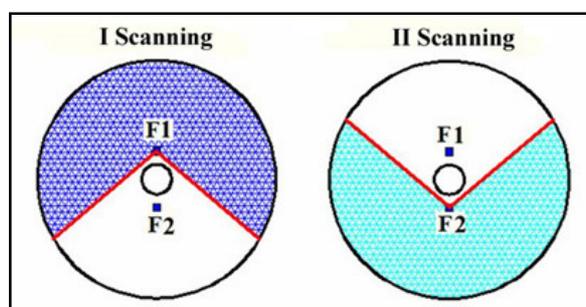


Figura 4.1-1: Esempio delle due nuvole di punti scansionate dai supporti F1 e F2 per le 6 differenti elevazioni del radiotelescopio VLBI.

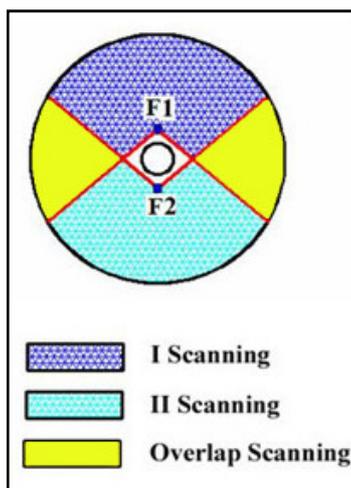


Figura 4.1-2: Esempio di due nuvole di punti allineate: l'area in giallo identifica la superficie dello specchio primario che è stato scansionato da entrambi i supporti F1 e F2; le sfere sono posizionate, in gruppi di tre, nei due settori.

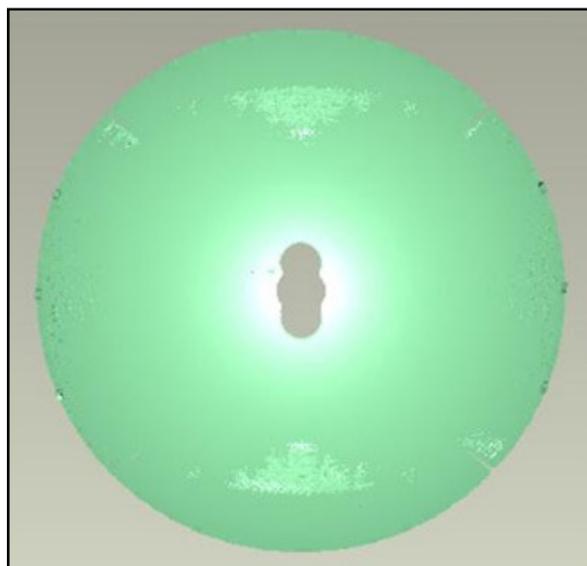


Figura 4.1-3: Superficie dello specchio primario ottenuta, usando circa 1.500.000 punti, dopo la fase di *merge*.

Le maggiori difficoltà incontrate durante il *post-processing* dei dati *laser* sono legate alla fase di allineamento delle nuvole, rilevate dai supporti F1 e F2, per una stessa elevazione; non è stato possibile operare in modalità completamente automatica durante la fase di allineamento e questo ha richiesto l'intervento dell'operatore che con

appositi accorgimenti è riuscito a migliorare l'allineamento stesso delle nuvole ma lasciando ancora evidenti le zone di sovrapposizione delle stesse. Il fatto poi, che si operava su di una struttura di colore omogeneo, con superficie regolare e simmetrica per rotazione non ha permesso di individuare con successo punti naturali da poter impiegare nella fase di registrazione delle nuvole al fine di migliorare il prodotto finale.

Per determinare le deformazioni dello specchio primario indotte dalla gravità al variare della elevazione dei radiotelescopi è necessario confrontare fra loro le differenti scansioni all'interno dello stesso sistema di riferimento.

Come detto in precedenza, il rilievo *laser* ha fornito nuvole di punti, rappresentanti le parabole scansionate, in un sistema di riferimento solidale allo strumento e pertanto decentrato rispetto al vertice del paraboloide teorico rappresentato dalla formula (1.2-1).

Questo ha richiesto la scrittura di un codice in *Fortran90* (vedi paragrafo 4.1.1) che ha permesso di stimare per ognuna delle nuvole *laser* i parametri che definiscono la superficie parabolica che meglio approssima il *dish* deformato. In particolare, il paraboloide di *best-fit* è stato stimato attraverso sei parametri:

- tre traslazioni, necessarie per posizionare l'origine del sistema *laser* nel vertice del paraboloide teorico;
- due rotazioni, necessarie per eliminare qualunque disallineamento fra l'asse di rotazione del paraboloide e l'asse generale del sistema *laser*;
- la distanza focale del paraboloide di *best-fit*.

Le variazioni della distanza focale, nel passaggio da un valore di elevazione ad un altro, definiscono il primo termine dell'equazione (1.2.3-1). Le osservazioni *laser* del riflettore primario delle antenne VLBI di Medicina e di Noto a differenti elevazioni possono quindi essere utilizzate per ricercare dei campioni di deformazione

gravitazionale del *dish* e definire un modello di elevazione che esprima la variazione della lunghezza focale.

I sei parametri compensati sono stati utilizzati per stimare a posteriori i residui che hanno permesso di definire la matrice di varianza e covarianza; i termini di tale matrice sono stati impiegati nel calcolo dei coefficienti di correlazione fra i vari parametri.

I residui sono stati analizzati ed utilizzati per la selezione di un insieme migliore di dati sui quali l'analisi è stata ripetuta.

Le traslazioni e gli angoli di rotazione stimati dal codice sono stati usati per rototraslare le corrispondenti nuvole *laser* in un sistema di riferimento comune, avente origine nel vertice del paraboloide e asse z coincidente con il suo asse di rotazione. In tale sistema sono state confrontate le scansioni *laser* effettuate alle varie elevazioni.

E' necessario evidenziare il fatto che durante tutte le sessioni *laser*, la superficie attiva del radiotelescopio di Noto è stata disattivata. Questo ha permesso il confronto diretto fra le deformazioni ricavate per le due antenne oggetto di studio: deformazioni che sono riportate nelle figure 4.1-4, 4.1-5, 4.1-6. Tali figure mostrano le differenze, valutate per l'antenna VLBI di Medicina e di Noto, ottenute sottraendo la scansione a 90° rispettivamente da quelle di 15°, 30°, 45°.

A causa di problemi emersi durante le scansioni del riflettore primario di Noto alle elevazioni di 75° e 60°, realizzate dal supporto F2, non è stato possibile ricavare le corrispondenti superfici complete del *dish*. Pertanto, nelle figure 4.1-7, 4.1-8 sono riportati i confronti ottenuti fra la scansione a 90° e quelle rispettivamente di 60° e 75° per il solo radiotelescopio di Medicina.

Dalla figura 4.1-4, in particolare, è possibile notare come, dal punto di vista qualitativo, la configurazione delle deformazioni dei due telescopi è molto simile: in generale, la gravità provoca una chiusura interna del *dish* al diminuire della elevazione. Le deformazioni sono circa simmetriche lungo l'asse di elevazione (porzione azzurra nella figura 4.1.4) mentre la chiusura tende a diminuire nella parte inferiore

della antenna (porzione verde nella figura 4.1.4). Quest'ultimo fenomeno è particolarmente evidente per il radiotelescopio di Medicina, come si può facilmente notare guardando la scala dei colori della figura 4.1.4: le deformazioni calcolate per la parte superiore del *dish* superano il valore di 1 cm; questo non è il caso di Noto, dove le differenze calcolate per la stessa area sono inferiori al cm. Le differenze fra le superfici dello specchio primario a 15° e 90° sono comprese nell'intervallo (-3mm ÷ 5mm) per il 68% di punti scansionati a Medicina e circa il 75% di punti rilevati a Noto; i punti che presentano una deformazione superiore a 1 cm a Medicina sono circa il doppio di quelli di Noto essendo rispettivamente, 15.5% e 8.9%. Il fatto che per il radiotelescopio di Noto si siano ottenute delle deformazioni minori rispetto a quelle di Medicina è forse possibile associarlo ad una maggiore rigidità del *dish* di Noto dovuta alla presenza della superficie attiva (Figura 1.2-5).

Infine, vale la pena notare come sia ancora visibile, in entrambe le immagini della figura 4.1-4, la zona di sovrapposizione ottenuta dall'unione delle due nuvole di punti ricavate rispettivamente dai supporti F1 e F2; questo problema è presente in tutte le scansioni realizzate alle elevazioni studiate e di conseguenza, in tutti i confronti effettuati e sottolinea le difficoltà connesse all'unione di differenti scansioni di un oggetto regolare come il paraboloide di rotazione. La possibilità di indagare l'intera superficie del *dish* attraverso un unico stazionamento permetterebbe di rimuovere completamente il problema e renderebbe più semplice la fase di *post-processing*.

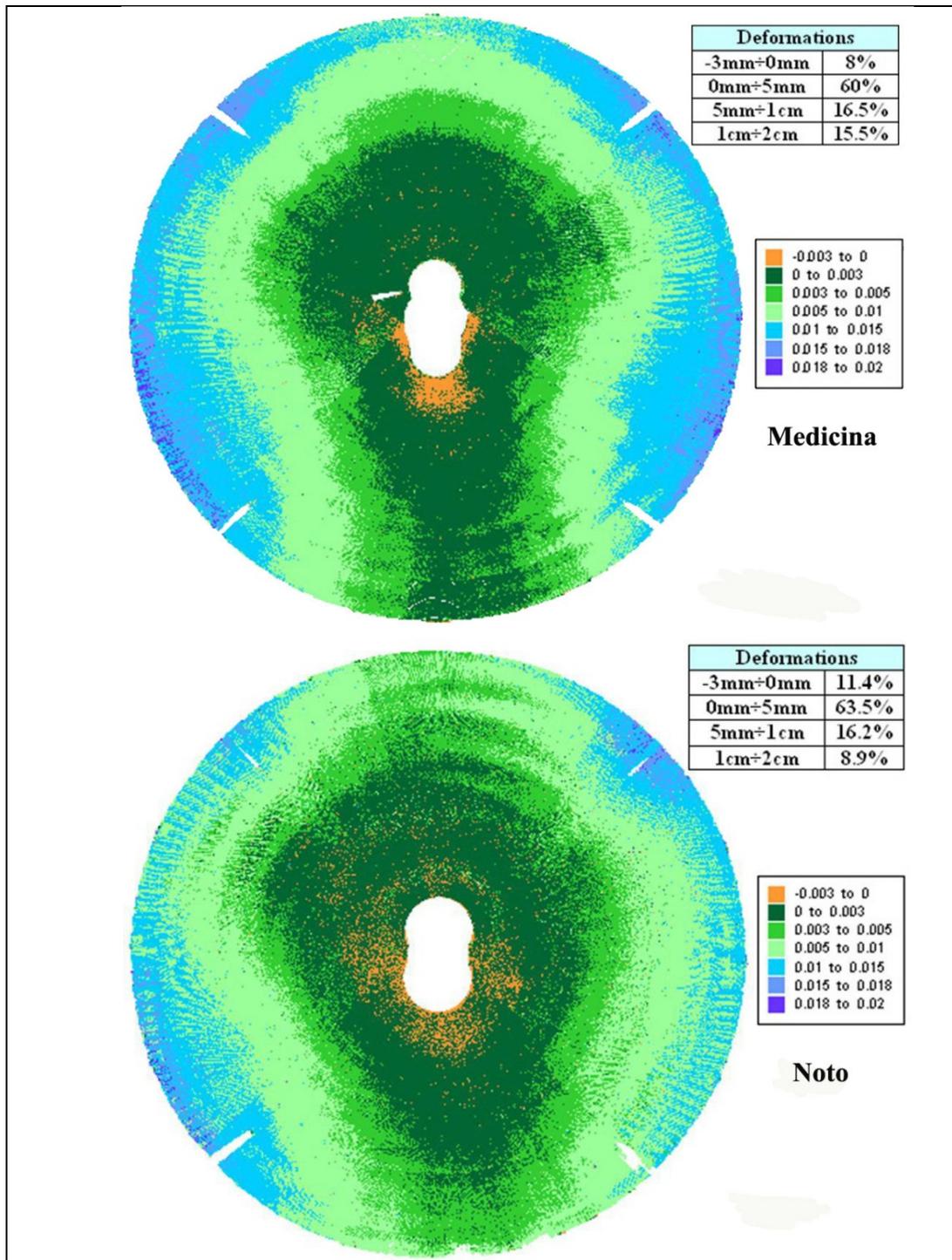


Figura 4.1-4: Deformazione relativa del *dish* fra le scansioni a 15° e 90°.

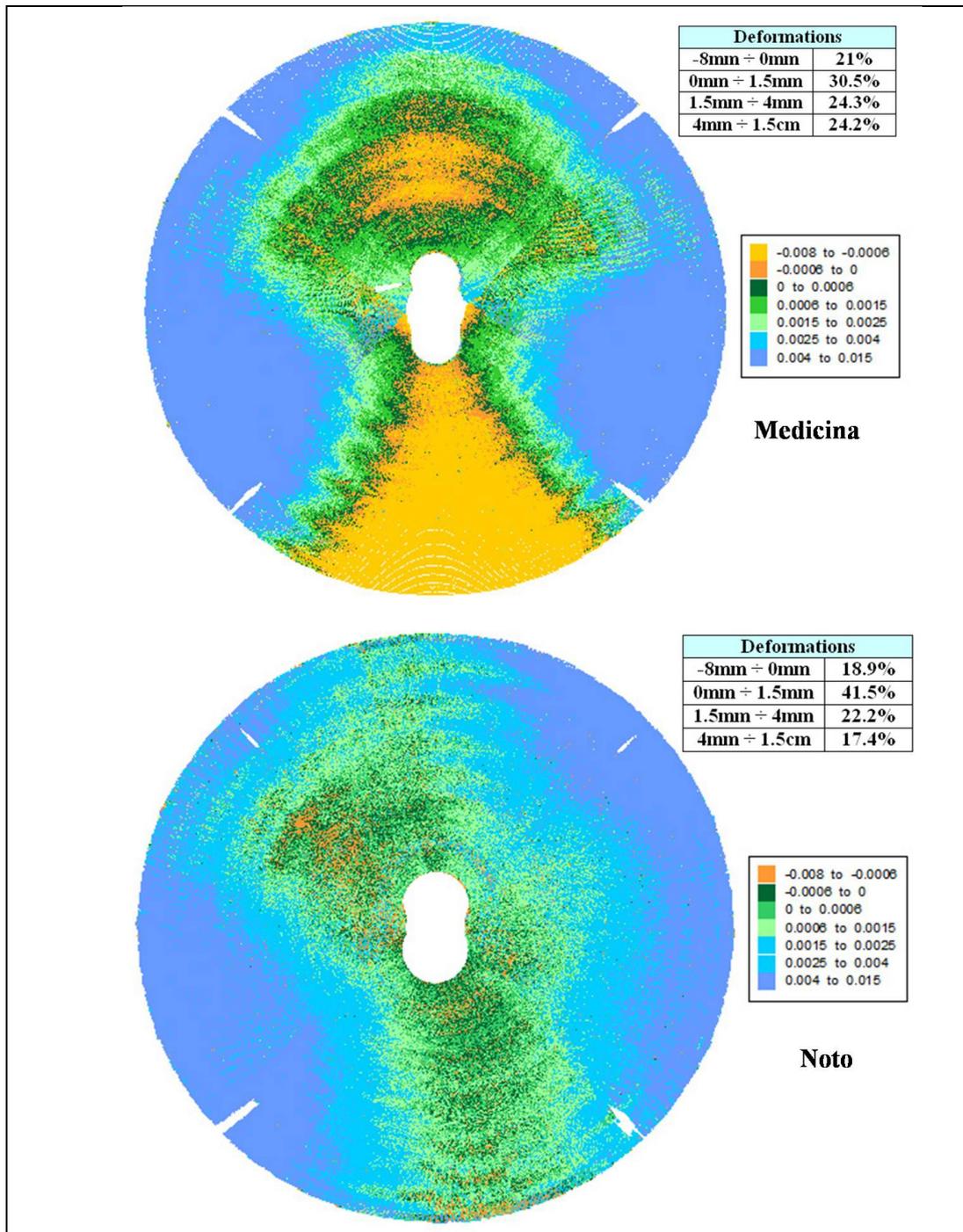


Figura 4.1-5: Deformazione relativa del *dish* fra le scansioni a 30° e 90°.

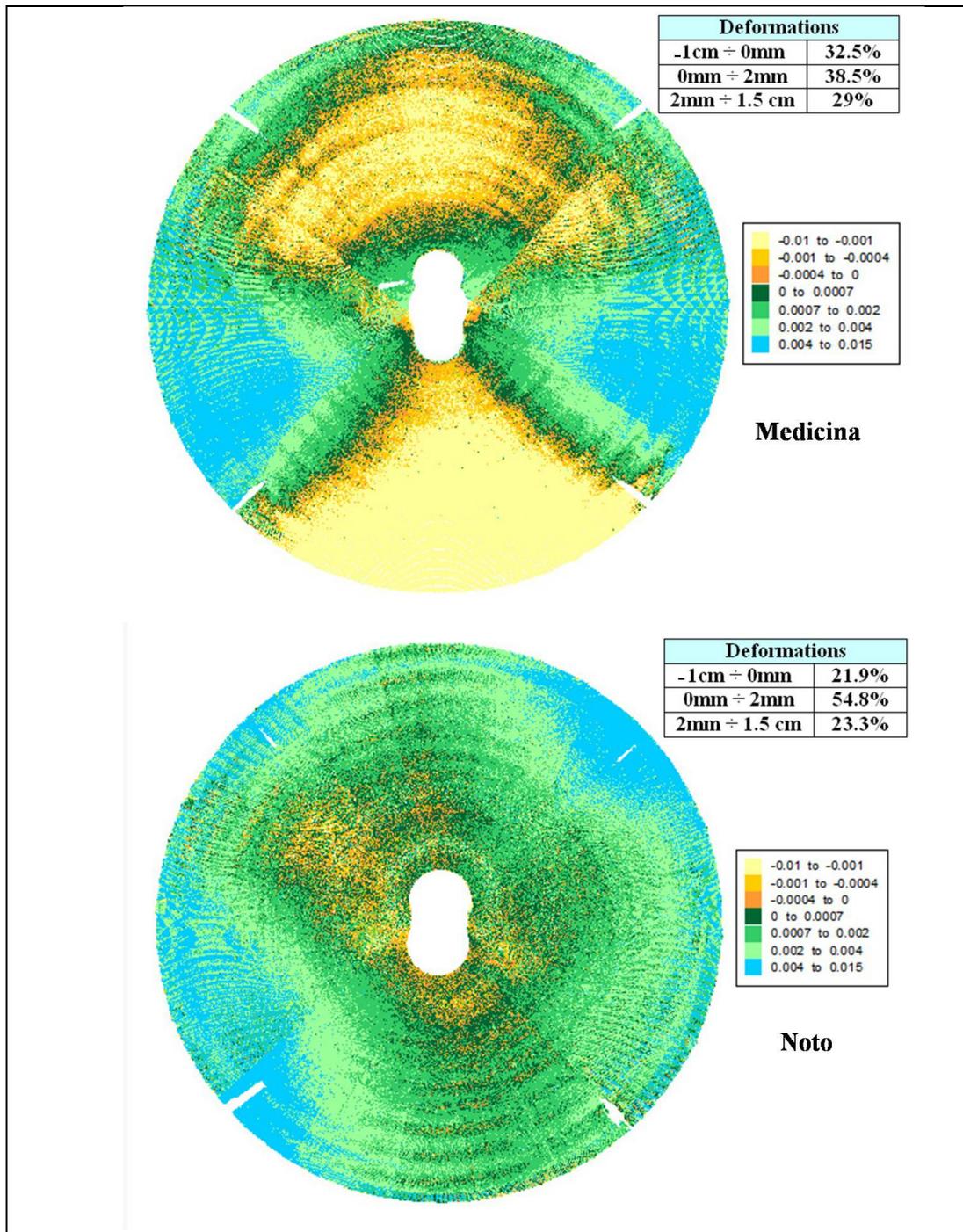


Figura 4.1-6: Deformazione relativa del *dish* fra le scansioni a 45° e 90°.

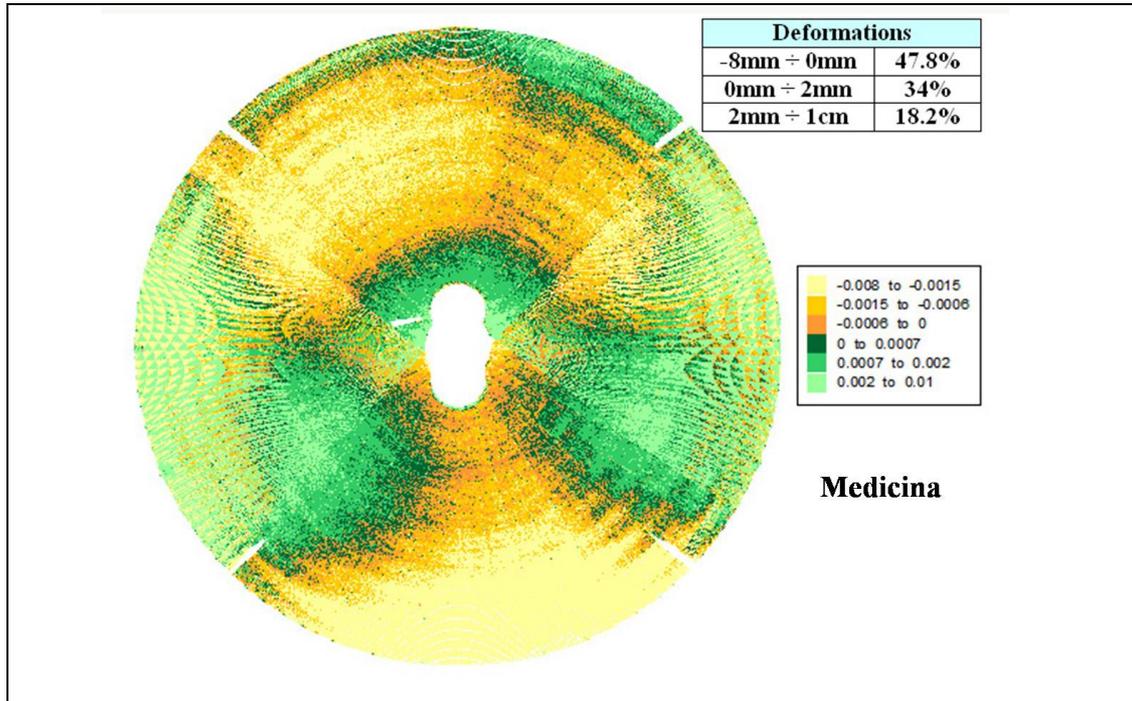


Figura 4.1-7: Deformazione relativa del *dish* di Medicina fra le scansioni a 60° e 90°.

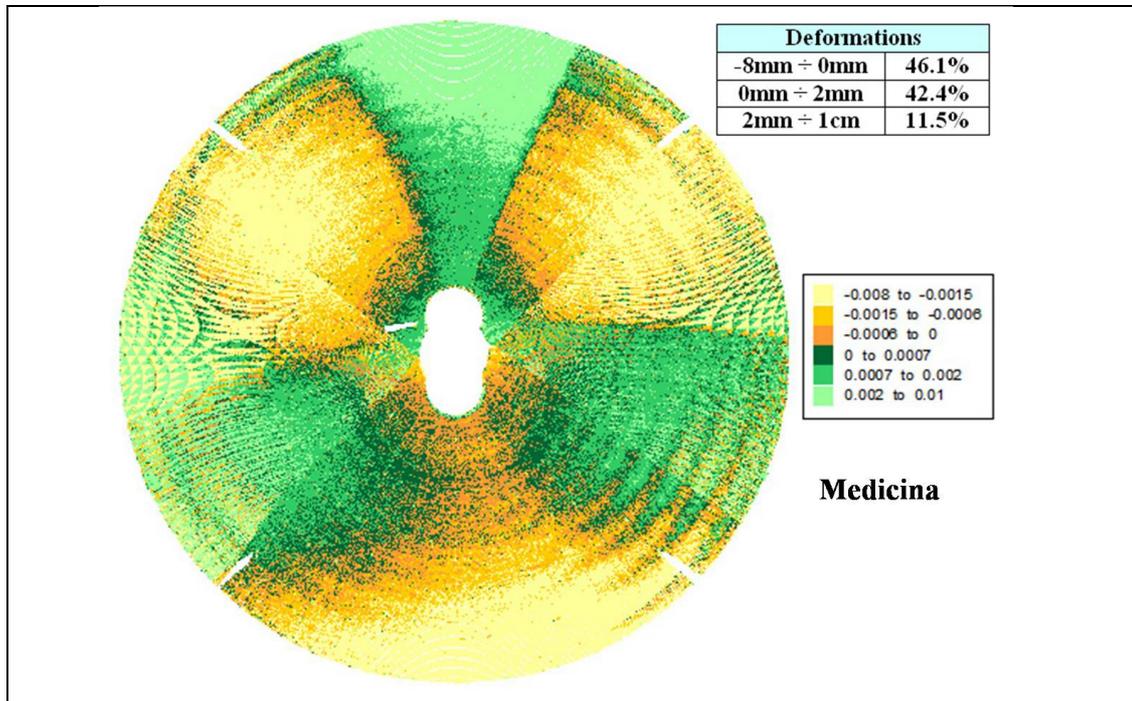


Figura 4.1-8: Deformazione relativa del *dish* di Medicina fra le scansioni a 75° e 90°.

La relazione fra la morfologia del riflettore primario e l'elevazione assunta dal radiotelescopio VLBI è confermata dalle variazioni della distanza focale di *best-fit* (Figura 4.1-7): la distanza focale tende a diminuire con l'elevazione, suggerendo una chiusura della superficie del paraboloide alle più basse elevazioni.

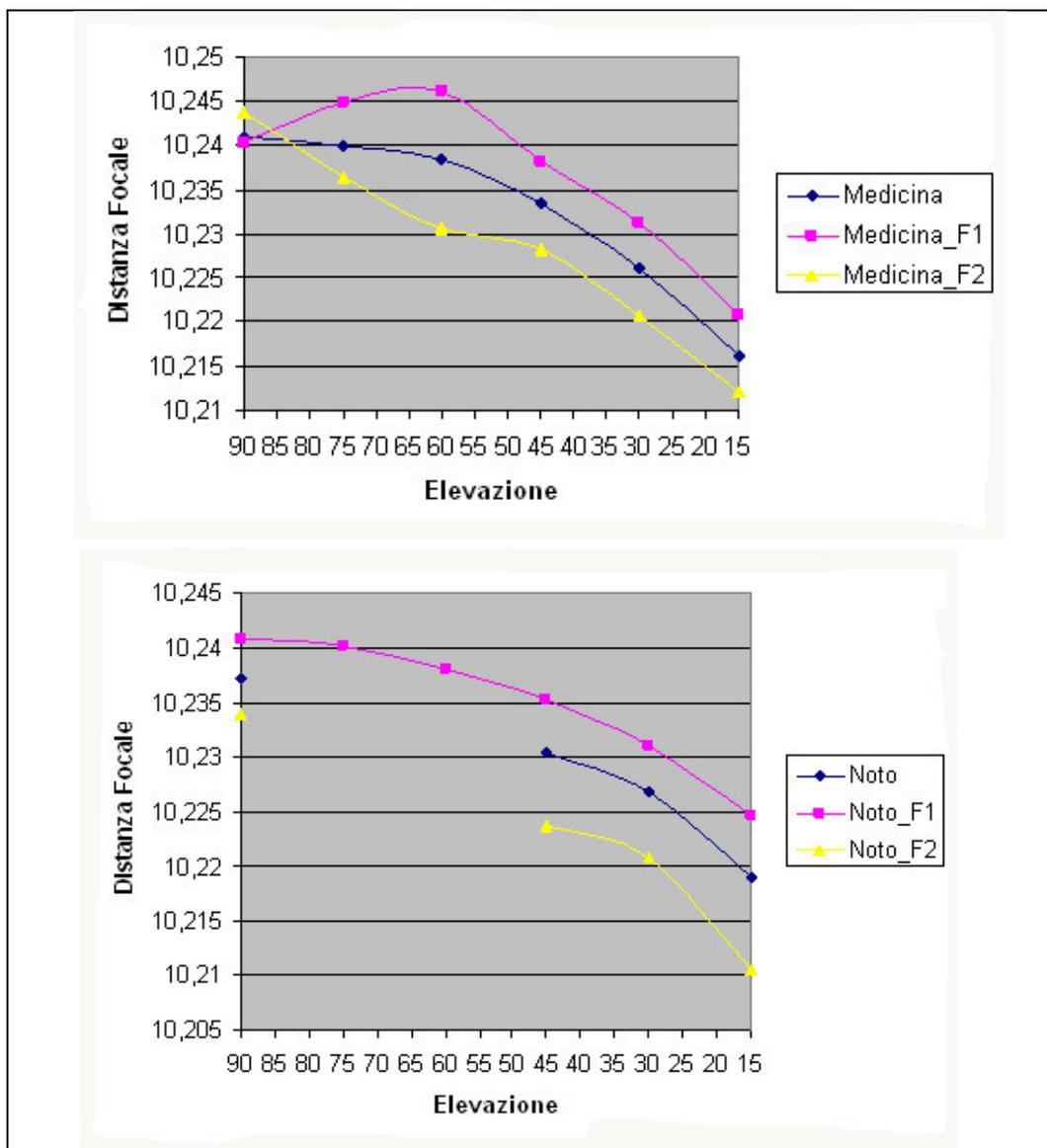


Figura 4.1-7: Valori della distanza focale stimati (m) a differenti elevazioni (°) applicando il codice di *best.fit* alle nuvole *laser*; ogni grafico contiene tre valori che corrispondono ai dati acquisiti da F1, F2 e alla loro unione. A causa di problemi sorti a Noto durante le scansioni realizzate dal supporto F2 non è stata possibile la stima delle distanze focali di *best-fit* alle elevazioni di 60° e 75°.

Anche in questo caso il comportamento dei due telescopi è molto simile sia in segno che in valore.

A causa della mancanza, come già detto, delle nuvole di punti del telescopio di Noto realizzate dal supporto F2 alle elevazioni di 60° e 75°, la procedura di *best-fit* è stata applicata in maniera completa ai soli dati acquisiti da F1.

Le distanze focali di *best-fit* stimate per entrambi i telescopi sono riportati nella tabella 4.1-1.

Elevazione (°)	Distanza Focale del Paraboloide di <i>Best-Fit</i> (m)	
	Medicina	Noto
90	10.2411±0.0001	10.2373±0.0001
75	10.2398±0.0001	-
60	10.2383±0.0001	-
45	10.2334±0.0001	10.2304±0.0001
30	10.2262±0.0001	10.2268±0.0001
15	10.2162±0.0001	10.2190±0.0001

Tabella 4.1-1: Variazione della distanza focale di *best-fit* in funzione della elevazione. La variazione del telescopio di Noto manca dei valori corrispondenti alle elevazioni di 60° e 75°: alcune difficoltà sono sorte durante le scansioni effettuate dal supporto F2.

I valori della distanza focale di *best-fit* confermano una maggiore rigidità del telescopio di Noto: le variazioni delle distanze focali a Noto non superano gli 1.9 cm mentre la variazione massima determinata per Medicina è circa 2.5 cm.

Gli scarti quadratici medi associati alla stima delle distanze focali di *best-fit* risultano sottostimati. La ridondanza delle osservazioni, infatti, in relazione ai soli 6 parametri stimati ha provocato un abbattimento del loro valore. Di conseguenza gli scarti quadratici medi associati ai parametri stimati non hanno un significato fisico e pertanto si può solo parlare di una precisione formale.

Nella tabella 4.1-2 viene riportato un confronto fra la distanza focale teorica dei due telescopi $f_T = 10.259\text{m}$ e i valori contenuti nella tabella 4.1-2. Il valore di f_T è sempre più elevato del corrispondente

valore di *best-fit* e le differenze variano in un range di $+(1.79\div 4.28)$ cm e di $+(2.17\div 4.01)$ cm rispettivamente per il telescopio di Medicina e di Noto. Queste differenze centimetriche conducono inevitabilmente a delle riflessioni soprattutto quando si pensa che, una tecnica, come quella VLBI, vanta soluzioni al millimetro.

Distanza Focale Teorica (m)	Elevazione (°)	Differenze fra la Distanza Focale Teorica e Distanza di <i>Best-Fit</i> (m)	
		Medicina	Noto
10.259	90	0.0179	0.0217
	75	0.0192	-
	60	0.0207	-
	45	0.0256	0.0286
	30	0.0328	0.0322
	15	0.0428	0.0401

Tabella 4.1-2: Differenze fra la distanza focale teorica e le distanze di *best-fit* per i radiotelescopi di Medicina e di Noto.

Al fine di valutare l'influenza della fase di allineamento sul processo di stima dei parametri, le due scansioni sono state utilizzate separatamente nel processo di *best-fit*: per ogni scansione (da F1 e F2) sono state stimate tre traslazioni e due rotazioni mentre è stata imposta unica la distanza focale. In totale, sono stati stimati undici parametri per ogni posizione di elevazione; i valori della distanza focale non sono risultati significativamente differenti dai corrispondenti valori ottenuti utilizzando il procedimento iniziale e pertanto non vengono riportati.

In assenza di deformazioni dello specchio primario il fronte d'onda in arrivo da una radiosorgente si riflette in uno stesso fuoco (Figura 4.1-8): i cammini ottici di tutti i punti appartenenti al paraboloide colpiti dall'onda elettromagnetica sono uguali.

A causa della gravità il paraboloide risulta però deformato (paragrafo 4.1) così come la lunghezza focale, la posizione del ricevitore e del vertice.

Al fine di calcolare i diversi cammini ottici percorsi dell'onda elettromagnetica che arriva al paraboloide è stato considerato un piano posizionato ad una distanza di 20 m dal vertice $(0, 0, 0)$ del riflettore primario. Per ognuno dei punti del *dish* acquisiti dal rilievo *laser* è stato calcolato il cammino ottico come somma delle lunghezze a e b (Figura 4.1.8).

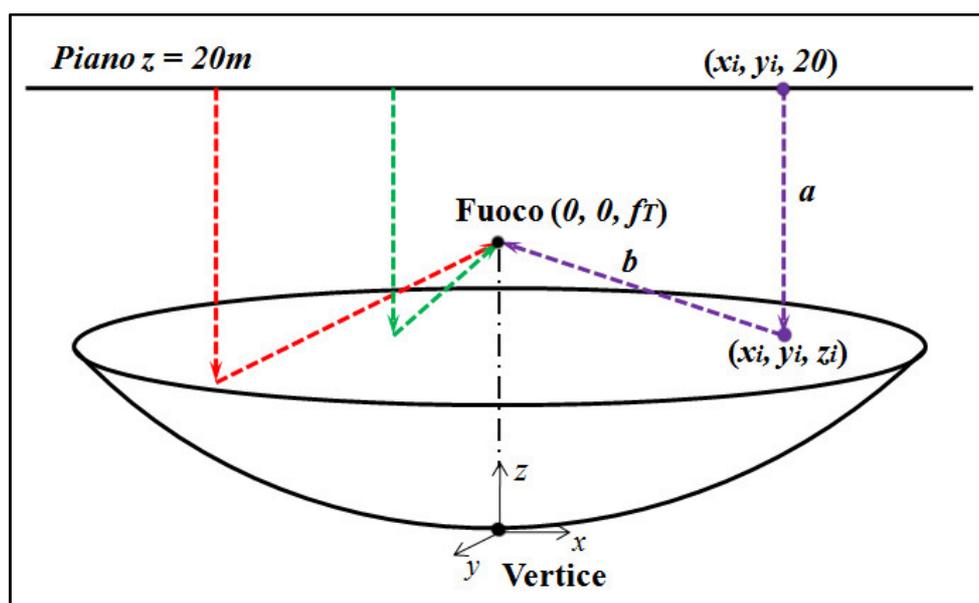


Figura 4.1-8: Schema utilizzato per il calcolo dei cammini ottici dei punti acquisiti dal rilievo *laser*. Tutti i cammini sono stati calcolati come somma dei percorsi a e b rispetto ad un piano posto a $z = 20\text{ m}$.

Le medie non normalizzate (M_n) dei cammini ottici di tutti i punti, a tutte le elevazioni studiate, sono riportate nelle tabelle 4.1-3 e 4.1-4 rispettivamente per il radiotelescopio di Medicina e di Noto.

I punti acquisiti dal rilievo *laser*, a causa della forma stessa del paraboloide, non presentano una distribuzione omogenea per unità di superficie: tale distribuzione, infatti, presenterà la massima densità in corrispondenza della zona più vicina al vertice del riflettore primario fino a diventare meno densa procedendo verso la superficie esterna del paraboloide. Al fine di normalizzare i cammini ottici ottenuti sia per il radiotelescopio di Medicina che per quello di Noto, il paraboloide di

entrambi i telescopi è stato suddiviso in venti porzioni piane avente la stessa area e per ognuna di esse sono state calcolate le medie dei cammini ottici di tutti i punti appartenenti a tali aree e la media (M) dei venti cammini ottici ottenuti. I risultati sono riportati nelle tabelle 4.1-3 e 4.1-4.

Nelle stesse tabelle sono riportate le differenze dei valori M_n e M per ogni elevazione. Il valore della media non normalizzata è sempre più elevato del corrispondente valore “M” e le differenze variano in un range di $+(7.40 \div 4.26)$ mm e di $+(7.98 \div 4.74)$ mm rispettivamente per i telescopi di Medicina e di Noto.

Le variazioni delle medie dei cammini ottici “M” a Noto non superano gli 8.08 mm mentre la variazione massima determinata per Medicina è di 1.03 cm.

Medicina	15°	30°	45°	60°	75°	90°
A1	30.26065	30.26038	30.26060	30.26107	30.26160	30.26226
A2	30.25522	30.25582	30.25628	30.25653	30.25680	30.25726
A3	30.25187	30.25361	30.25475	30.25543	30.25562	30.25581
A4	30.24777	30.24995	30.25133	30.25206	30.25211	30.25216
A5	30.24777	30.24850	30.25031	30.25138	30.25142	30.25133
A6	30.24397	30.24748	30.24970	30.25099	30.25104	30.25088
A7	30.24171	30.24556	30.24798	30.24933	30.24935	30.24915
A8	30.23994	30.24442	30.24725	30.24891	30.24896	30.24865
A9	30.23925	30.24426	30.24750	30.24945	30.24954	30.24920
A10	30.23758	30.24294	30.24635	30.24842	30.24851	30.24813
A11	30.23607	30.24165	30.24523	30.24736	30.24737	30.24697
A12	30.23572	30.24171	30.24564	30.24803	30.24812	30.24774
A13	30.23507	30.24153	30.24581	30.24842	30.24859	30.24809
A14	30.23388	30.24063	30.24498	30.24775	30.24783	30.24738
A15	30.23249	30.23935	30.24380	30.24662	30.24673	30.24638
A16	30.23183	30.23889	30.24355	30.24640	30.24648	30.24595
A17	30.23145	30.23885	30.24374	30.24683	30.24689	30.24634
A18	30.23026	30.23786	30.24293	30.24616	30.24627	30.24579
A19	30.22845	30.23568	30.24109	30.24472	30.24543	30.24590
A20	30.22920	30.23577	30.24069	30.24464	30.24720	30.25013
Media (M)	30.23951	30.24424	30.24747	30.24952	30.24979	30.24978
Media (Mn)	30.24691	30.24978	30.25185	30.25324	30.25368	30.25403
Differenza (Mn-M)	0.00740	0.00554	0.00438	0.00372	0.00389	0.00426

Tabella 4.1-3: Radiotelescopio di Medicina: media dei cammini dei punti *laser* calcolati in 20 porzioni piane (“A”) aventi la stessa area, media normalizzata (M) e non (M_n) e relative differenze. I cammini ottici calcolati a tutte le elevazioni sono riportati in metri.

Noto	15°	30°	45°	90°
A1	30.25933	30.25960	30.25992	30.26033
A2	30.25628	30.25689	30.25723	30.25762
A3	30.25263	30.25377	30.25425	30.25520
A4	30.24966	30.25117	30.25171	30.25289
A5	30.24737	30.24933	30.25006	30.25167
A6	30.24481	30.24716	30.24807	30.25010
A7	30.24278	30.24540	30.24640	30.24860
A8	30.24118	30.24426	30.24537	30.24795
A9	30.23995	30.24332	30.24470	30.24773
A10	30.23861	30.24222	30.24364	30.24693
A11	30.23753	30.24145	30.24291	30.24644
A12	30.23669	30.24104	30.24268	30.24646
A13	30.23599	30.24053	30.24227	30.24649
A14	30.23513	30.23974	30.24175	30.24617
A15	30.23424	30.23914	30.24100	30.24554
A16	30.23357	30.23870	30.24049	30.24526
A17	30.23243	30.23782	30.23989	30.24482
A18	30.23139	30.23693	30.23912	30.24420
A19	30.23205	30.23761	30.23999	30.24485
A20	30.23139	30.23719	30.24037	30.24531
Media (M)	30.24065	30.24416	30.24559	30.24873
Media (Mn)	30.24863	30.25070	30.25165	30.25346
Differenza (Mn-M)	0.00798	0.00654	0.00606	0.00474

Tabella 4.1-4: Radiotelescopio di Noto: media dei cammini dei punti *laser* calcolati in 20 porzioni piane (“A”) aventi la stessa area, media normalizzata (M) e non (M_n) e relative differenze. I cammini ottici calcolati a tutte le elevazioni sono riportati in metri. A causa di problemi sorti a Noto durante le scansioni realizzate dal supporto F2 non è stato possibile calcolare i cammini ottici per le scansioni realizzate alle elevazioni di 60° e 75°.

Infine, nella Figura 4.1-9 sono rappresentati gli andamenti dei cammini sia per il radiotelescopio di Medicina che di Noto.

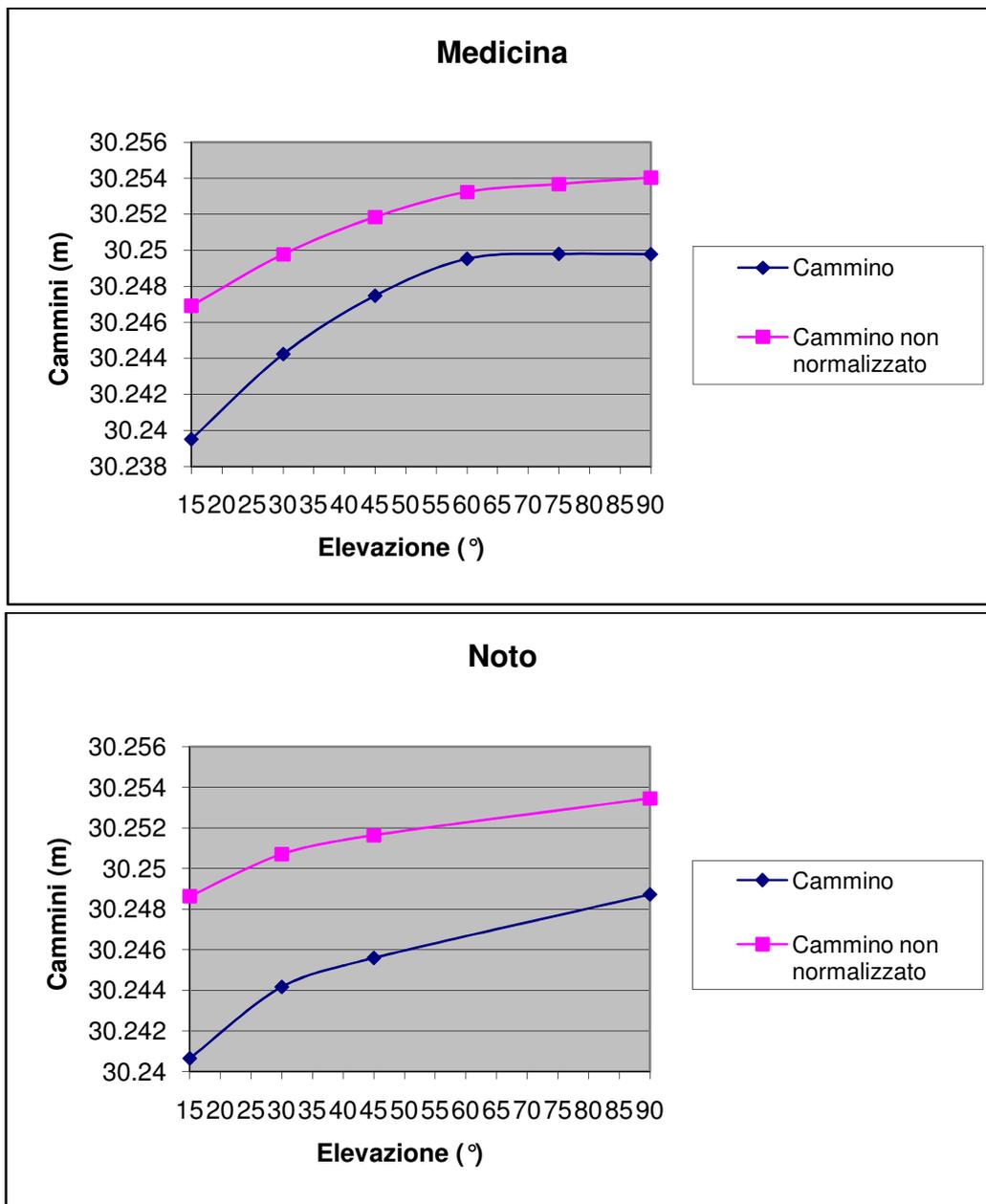


Figura 4.1-9: Radiotelescopio di Medicina e di Noto: andamento dei cammini ottici calcolati dalle nuvole *laser* alle differenti elevazioni

4.1.1 Codice realizzato in *Fortran 90* per la stima del paraboloide di *best-fit*

Il codice di *best-fit* è stato realizzato a partire dall'equazione di un paraboloide teorico non centrato di equazione:

$$(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2 - 4f(Z' - Z) = 0 \quad (4.1.1-1)$$

dove:

X , Y , Z rappresentano le traslazioni fra il vertice (0,0,0) del paraboloide teorico (equazione 1.2-1) e il sistema intrinseco del *laser* rispetto al quale sono fornite le nuvole di punti acquisite;

X' , Y' , Z' rappresentano le coordinate ruotate dei punti $X(i)$, $Y(i)$, $Z(i)$ acquisiti dal sistema *laser*. La trasformazione di rotazione, in forma matriciale, per ognuna delle nuvole di punti è rappresentata da:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -dK & d\Phi \\ dK & 1 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(i) \\ Y(i) \\ Z(i) \end{pmatrix} \quad (4.1.1-2)$$

La matrice di rotazione è stata ricavata considerando la rotazione Ω intorno all'asse X come rotazione primaria, la rotazione Φ intorno ad Y come rotazione secondaria e la rotazione K intorno ad Z come rotazione terziaria:

$$R = R_\Omega R_\Phi R_K \quad (4.1.1-3)$$

La rotazione K intorno all'asse Z è stata trascurata in quanto la superficie dello specchio primario risulta essere simmetrica per rotazione attorno all'asse stesso. Pertanto, le rotazioni dei punti *laser* sono espresse dalle equazioni seguenti:

$$\begin{cases} X' = X(i) + Z(i)d\Phi \\ Y' = Y(i) - Z(i)d\Omega \\ Z' = -X(i)d\Phi + Y(i)d\Omega + Z(i) \end{cases} \quad (4.1.1-3)$$

Sostituendo le (4.1.1-3) nell'espressione (4.1.1-1) si ricava l'equazione:

$$[X(i) + Z(i)d\Phi - X]^2 + [Y(i) - Z(i)d\Omega - Y]^2 + -4f[-X(i)d\Phi + Y(i)d\Omega + Z(i) - Z] = 0 \quad (4.1.1-4)$$

dove le incognite del problema sono rappresentate dalle tre traslazioni (X , Y , Z) necessarie per posizionare l'origine del sistema *laser* nel vertice del paraboloide teorico, dalle due rotazioni ($d\Omega$, $d\Phi$) necessarie per eliminare qualunque disallineamento fra l'asse di rotazione del paraboloide e l'asse generale del sistema *laser* e dalla distanza focale del paraboloide di *best-fit*.

Introducendo per le sei incognite dei valori approssimati con relative correzioni:

$$\begin{cases} X = X_a + \delta x \\ Y = Y_a + \delta y \\ Z = Z_a + \delta z \\ f = f_a + \delta f \\ d\Phi = d\Phi_a + \delta\Phi \\ d\Omega = d\Omega_a + \delta\Omega \end{cases} \quad (4.1.1-5)$$

e linearizzando l'equazione (4.1.1-4), si ottiene:

$$\begin{aligned} & 2[X(i) + Z(i)d\Phi_a - X_a]\delta x + 2[Y(i) - Z(i)d\Omega_a - Y_a]\delta y - \\ & 4f_a \delta z + 4[-X(i)d\Phi_a + Y(i)d\Omega_a + Z(i) - Z_a]\delta f - 2\{Z(i)[X(i) + \\ & Z(i)d\Phi_a - X_a] + 2X(i)f_a\}\delta\Phi + 2\{Z(i)[Y(i) - Z(i)d\Omega_a - Y_a] + \\ & 2Y(i)f_a\}\delta\Omega = [X(i) + Z(i)d\Phi_a - X_a]^2 + [Y(i) - Z(i)d\Omega_a - Y_a]^2 - \\ & 4f_a[-X(i)d\Phi_a + Y(i)d\Omega_a + Z(i) - Z_a] \quad (4.1.1-6) \end{aligned}$$

Il sistema lineare (4.1.1-6) può essere espresso, sfruttando il noto modello funzionale della compensazione, come:

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{X} = \mathbf{f} + \mathbf{v} \quad (4.1.1-7)$$

dove:

\mathbf{A} = matrice disegno (mx6);

$\delta\mathbf{X}$ = vettore delle incognite (6x1);

\mathbf{f} = vettore dei termini noti (mx1);

\mathbf{v} = vettore dei residui (mx1);

m = numero di osservazioni acquisite dal laser scanner.

La soluzione del modello (4.1.1-7) è definita dall'equazione seguente:

$$\delta\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{f}) \quad (4.1.1-8)$$

Sostituendo le correzioni ricavate dall'equazione (4.1.1-8) nelle espressioni (4.1.1-5) si ottengono le stime dei parametri incogniti.

Come detto nel paragrafo 4.1, le traslazioni e le rotazioni stimate sono state utilizzate per rototraslare tutte le nuvole laser nello stesso sistema di riferimento dove sono state confrontate.

I parametri compensati sono stati sostituiti nell'equazione (4.1.1-7) per stimare a posteriori i residui (\mathbf{v}_p); quest'ultimi, sfruttando il principio dei minimi quadrati, sono stati utilizzati per definire la matrice di varianza e covarianza e associare così, una precisione ai parametri compensati:

$$\Sigma = \frac{\mathbf{v}_p^T \mathbf{v}_p}{m-n} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \quad (4.1.1-9)$$

Le varianze e le covarianze sono state poi utilizzate per stimare i coefficienti di correlazione fra i vari parametri.

Indicando con σ_X , σ_Y gli scarti quadratici medi di due variabili generiche e con σ_{XY} la loro covarianza, il coefficiente di correlazione fra le due variabili X e Y può essere calcolato dalla seguente relazione:

$$C_{\text{cor}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.1.1-10)$$

Di seguito viene riportato un diagramma di flusso per descrivere brevemente la struttura del codice di *best-fit* (Figura 4.1.1-1).

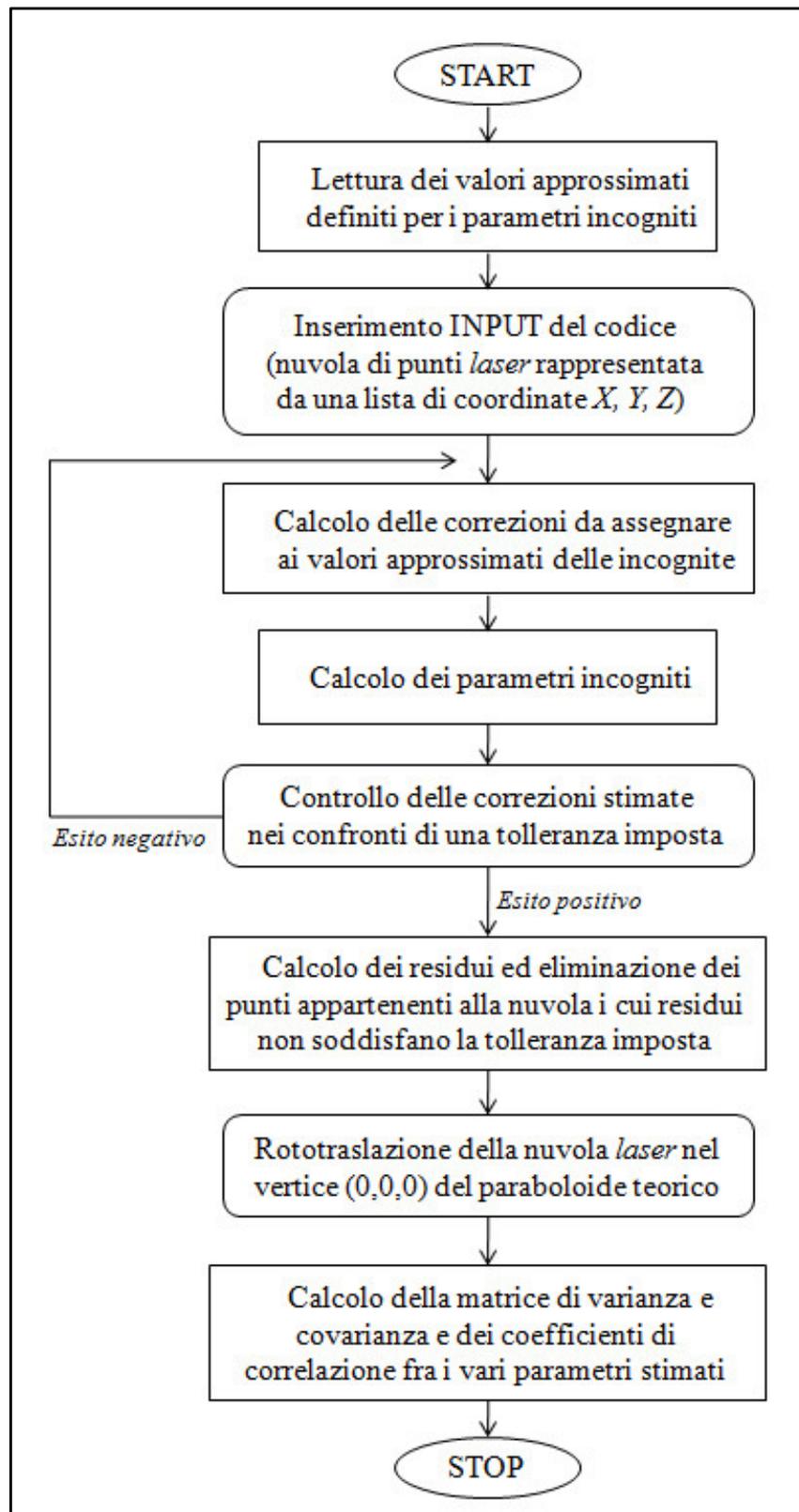


Figura 4.1.1-1: Diagramma di flusso del codice di *best-fit*.

4.2 Post-processing dei dati topografici e relativi risultati

Gli angoli e le distanze che sono stati acquisiti mediante la rete realizzata internamente allo specchio primario (Figura 4-2-1) sono stati compensati insieme alle osservazioni realizzate dalla rete locale di controllo a terra, utilizzando il *software* “STAR*NET” (Sawyer 2001).

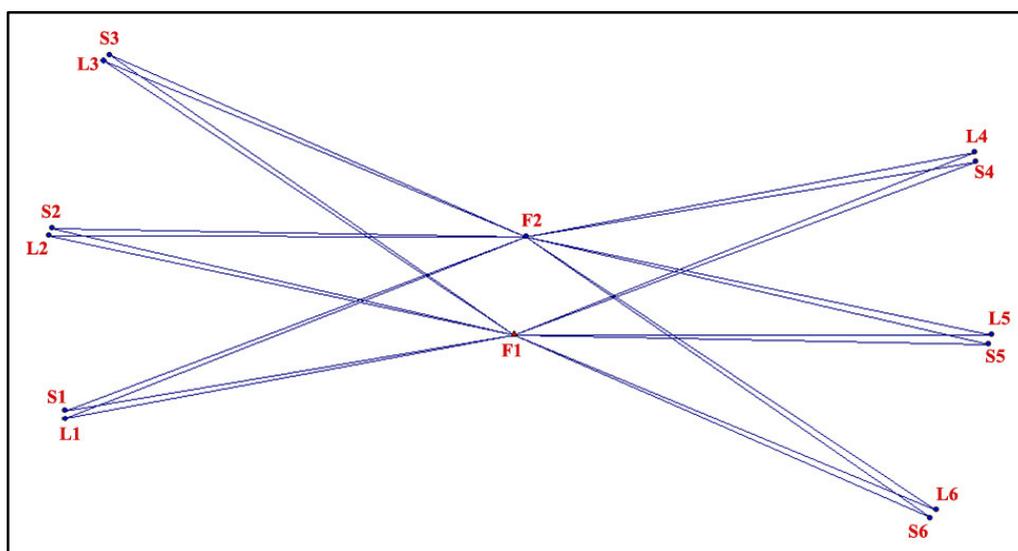


Figura 4.2-1: Schema delle osservazioni realizzate con le due stazioni totali posizionate sui supporti F1 e F2 verso le sei coppie di *targets*.

Nella figura 4.2-2 viene rappresentata la rete realizzata presso l’osservatorio di Medicina e le corrispondenti osservazioni.

In particolare, i prismi osservati dalla rete interna al paraboloide, posizionando l’antenna a 90°, e dalla rete a terra sono stati utilizzati per inserire la rete rappresentata dalla figura 4.2-1 all’interno della rete di figura 4.2-2.

Le osservazioni topografiche effettuate all’interno dell’antenna hanno permesso la stima delle coordinate, alla elevazione di 90°, della coppia di *targets* ancorati al bordo del paraboloide. La rete topografica di controllo a terra ha fornito, invece, le coordinate dei sei prismi

retroreflettenti alle differenti elevazione assunte dal telescopio VLBI (90° , 75° , 60° , 45° , 30° , 15°).

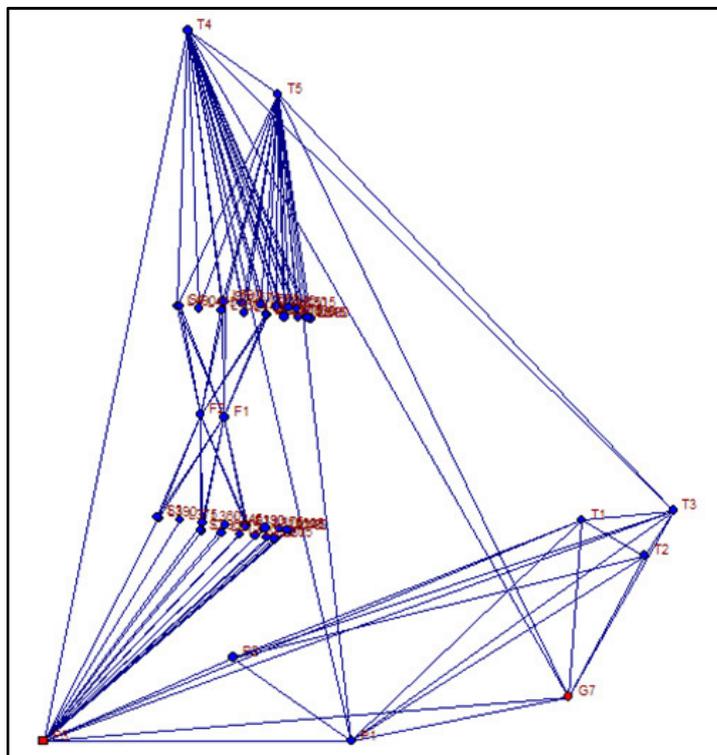


Figura 4.2-2: Rete locale di controllo a terra rappresentata insieme ai supporti F1 e F2 posizionati all'interno del *dish* e ai prismi retroreflettenti osservati a sei differenti elevazioni.

Successivamente è stato possibile stimare le coordinate dei centri delle sfere, alle diverse elevazioni, mediante una trasformazione conforme i cui parametri sono stati calcolati mediante la conoscenza delle coordinate dei prismi sia nel sistema di riferimento interno all'antenna, sia in quello esterno fornito dalla rete topografica locale.

Tutto questo è stato fatto nell'ipotesi che le variazioni di posizione relative tra ciascun prisma e la sfera solidale ad esso, indotte dalla rotazione dell'antenna, siano trascurabili. Questa ipotesi è stata ritenuta lecita in quanto i prismi e le sfere sono stati collocati ad una breve distanza fra loro e risultano entrambi fissati ad uno stesso pannello metallico del rivestimento dell'antenna.

Le coordinate dei centri delle sfere, alle diverse elevazioni, sono state anche stimate dal programma di post-elaborazione dei dati *laser* e pertanto è stato possibile realizzare una seconda trasformazione conforme ed inserire le scansioni dello specchio primario delle antenne VLBI nel sistema di riferimento topocentrico esterno (Figura 4.2-3). Questo ha permesso un collegamento diretto fra la superficie deformata del *dish* e la rete locale di controllo a terra

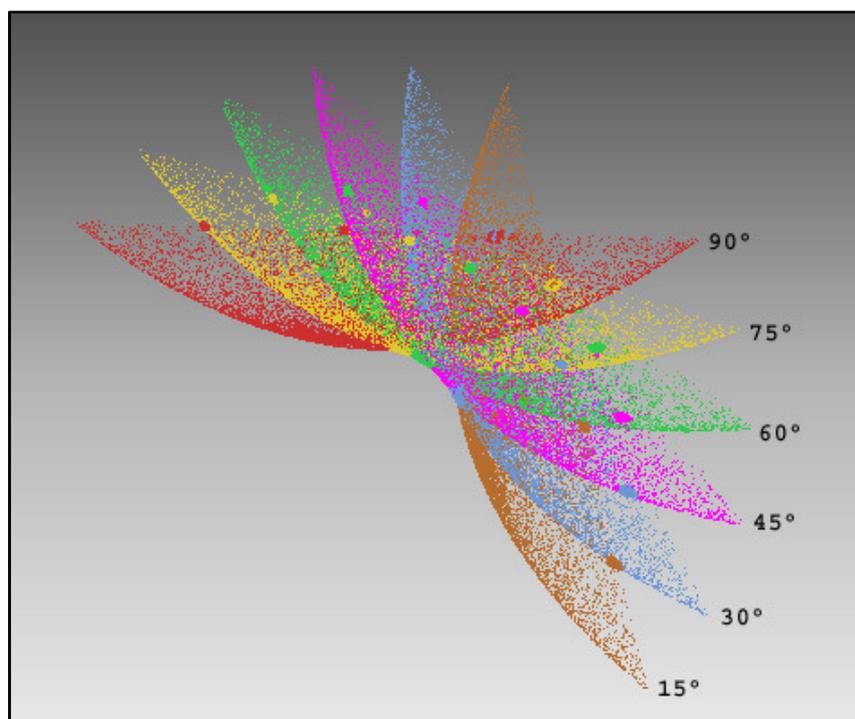


Figura 4.2-3: Scansioni dello specchio primario di Medicina inserite nel sistema topografico esterno.

Infine, vale la pena sottolineare che da un confronto diretto fra le coordinate dei centri delle sfere a 90° stimate dai due diversi approcci osservativi (*laser scanner* e *total stations*) è emersa una differenza statisticamente significativa. Questa differenza, tenendo conto dei cambiamenti di temperatura durante le indagini e dei suoi effetti sulla struttura del telescopio, può essere associata ad un fattore di scala pari a (1.00038 ± 0.00010) sicuramente imputabile ai dispositivi elettronici interni al sistema *laser*. Tale fattore risulta molto

superiore della precisione nominale del *laser scanner* utilizzato per i rilievi.

Il vertice del paraboloide e il suo moto relativo sono molto importanti anche per indagare la variazione del cammino del segnale.

La traiettoria del vertice all'interno del sistema topocentrico può essere facilmente ricavata attraverso trasformazioni basate sulle coordinate delle sfere (Figura 4.2-3).

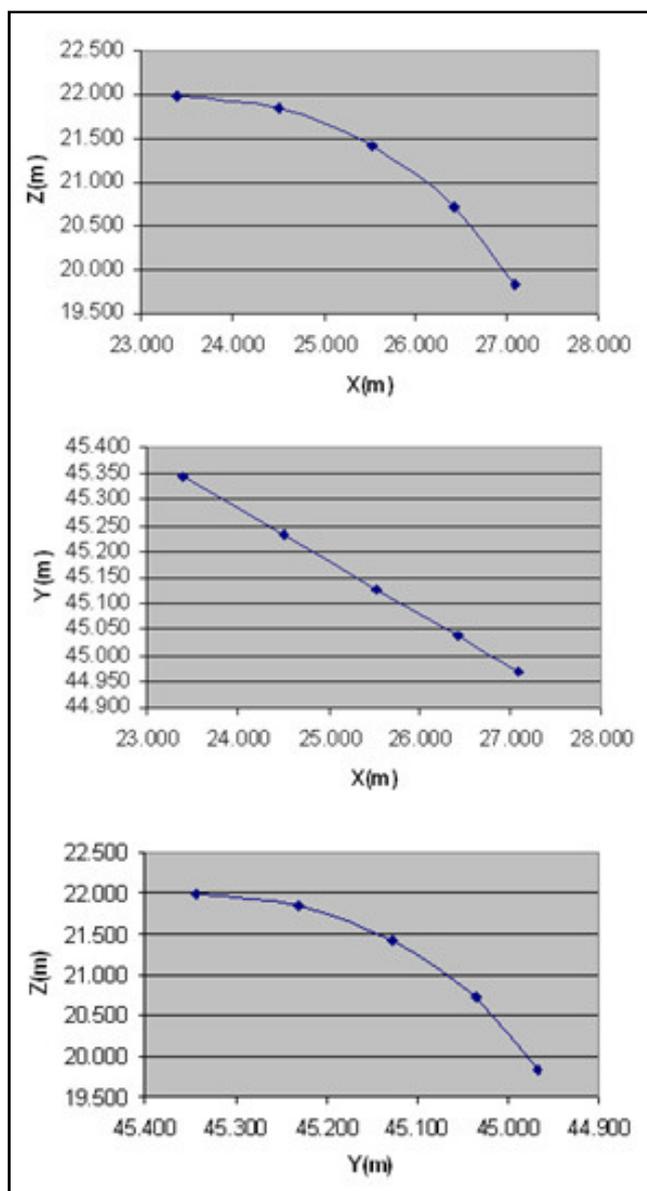


Figura 4.2-3: Traiettoria del vertici dei differenti paraboloidi di *best-fit* nel sistema di riferimento topocentrico.

Il vertice descrive un arco di cerchio, il cui centro è, in linea di principio, un punto che appartiene all'asse di elevazione del telescopio. Il moto relativo del vertice potrebbe essere individuato dalle variazioni radiali della traiettoria circolare del vertice. Purtroppo, la precisione formale associata alle coordinate del vertice non è sufficientemente elevata da consentire un affidabile calcolo dell'entità degli spostamenti; questo è dovuto principalmente alle diverse trasformazioni applicate ai *set* di dati acquisite dal *laser*.

Inoltre, la posizione dell'asse di elevazione deve essere stimata con un'elevata precisione in modo da garantire la sua stabilità e per assicurare che la sua posizione nello spazio non sia influenzata dalla deformazione del *dish*. Questo aspetto è strettamente correlato alla strategia di osservazione che viene adottata per definire e stimare gli assi di rotazione del telescopio e richiede una specifica indagine, simile a quella effettuata per stimare le *local ties*.

4.3 Deformazioni gravitazionali del riflettore primario dei telescopi VLBI: *laser scanning* e FEM a confronto

Le deformazioni ricavate dal confronto di scansioni *laser* (paragrafo 4.1) non sono direttamente confrontabile con quelle ottenute dal modello agli elementi finiti: quest'ultime, infatti, sono proprie di ogni elevazione considerata. Per ovviare a questo problema è stato calcolato il paraboloide teorico dall'equazione (1.2.1), utilizzando il valore nominale della lunghezza focale, che è stato quindi sottratto alle scansioni *laser*. I risultati così ottenuti sono stati confrontati con quelli ricavati dal modello agli elementi finiti (Figure 4.3-1, 4.3-2, 4.3-3, 4.3-4, 4.3-5, 4.3-6), utilizzando gli stessi *range* di deformazione: le nuvole *laser* presentano deformazioni più elevate rispetto a quelle ricavate dal modello strutturale.

Il comportamento qualitativo non è il medesimo: è possibile notare come il modello agli elementi finiti metta in luce un comportamento non simmetrico del *dish* nel passaggio dalla elevazione di 15° a quella di 90° che, come detto nel paragrafo 3.2, è legato alle dissimmetrie nelle travature dei piani di servizio. Tale andamento non viene però confermato dalle nuvole *laser*. Tale comportamento può essere forse imputabile al diverso sistema di riferimento utilizzato nei due approcci e alle condizioni di vincolo introdotte per l'analisi agli elementi finiti.

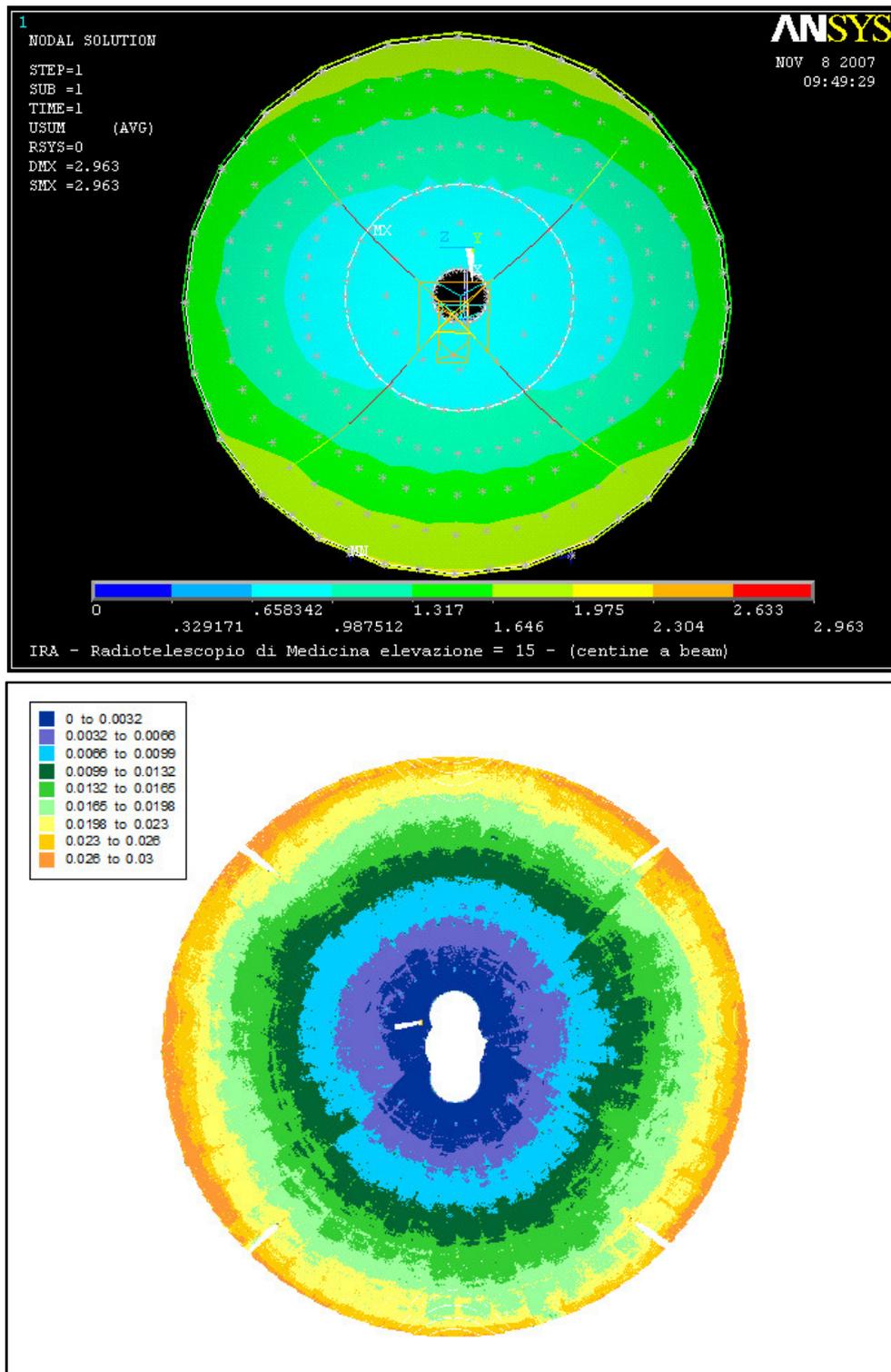


Figura 4.3-1: Confronto fra le deformazione del *dish* del radiotelescopio di Medicina ottenute dal FEM e dal rilievo *laser* alla elevazione di 15°.

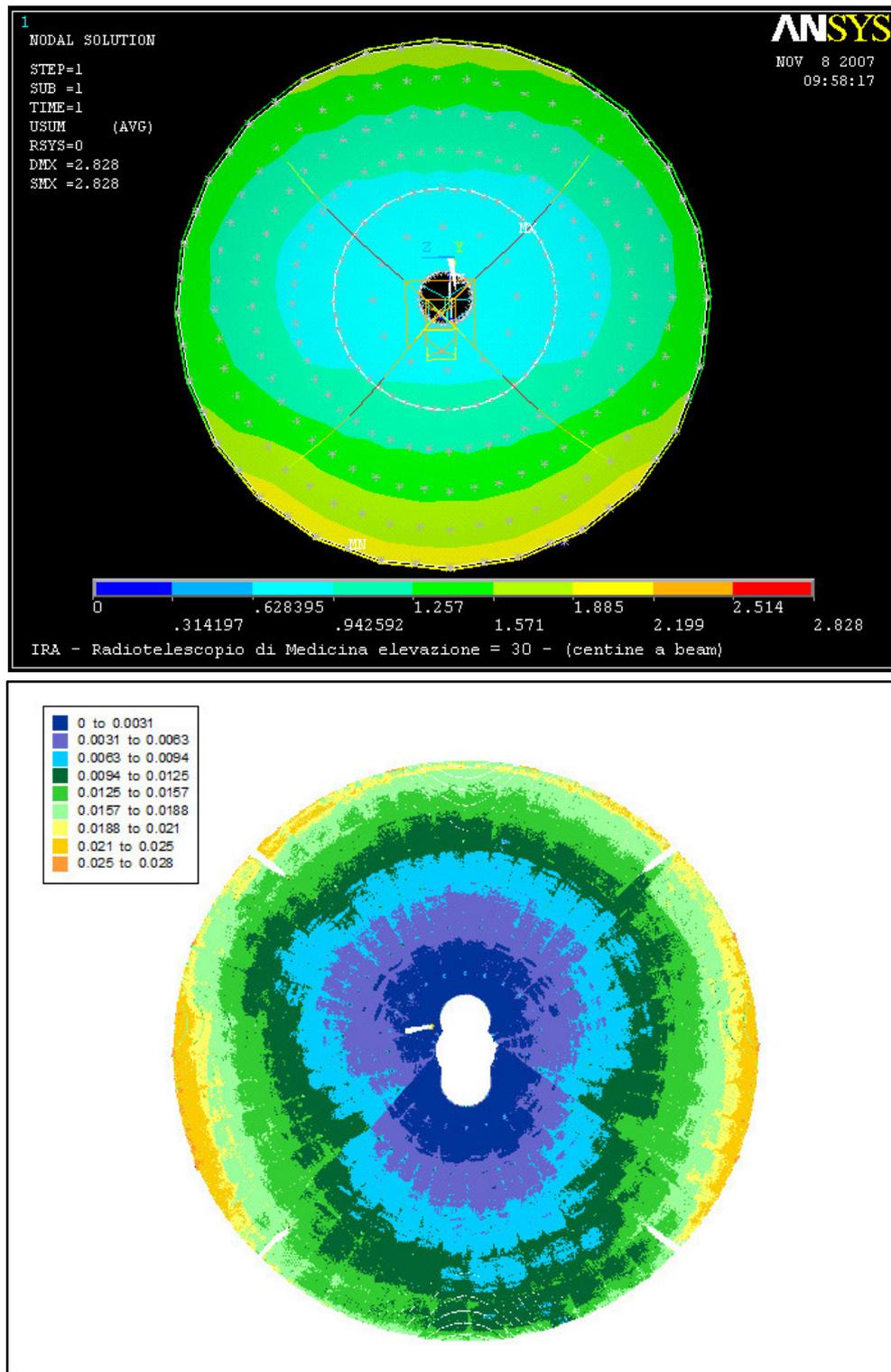


Figura 4.3-2: Confronto fra le deformazione del *dish* del radiotelescopio di Medicina ottenute dal FEM e dal rilievo *laser* alla elevazione di 30°.

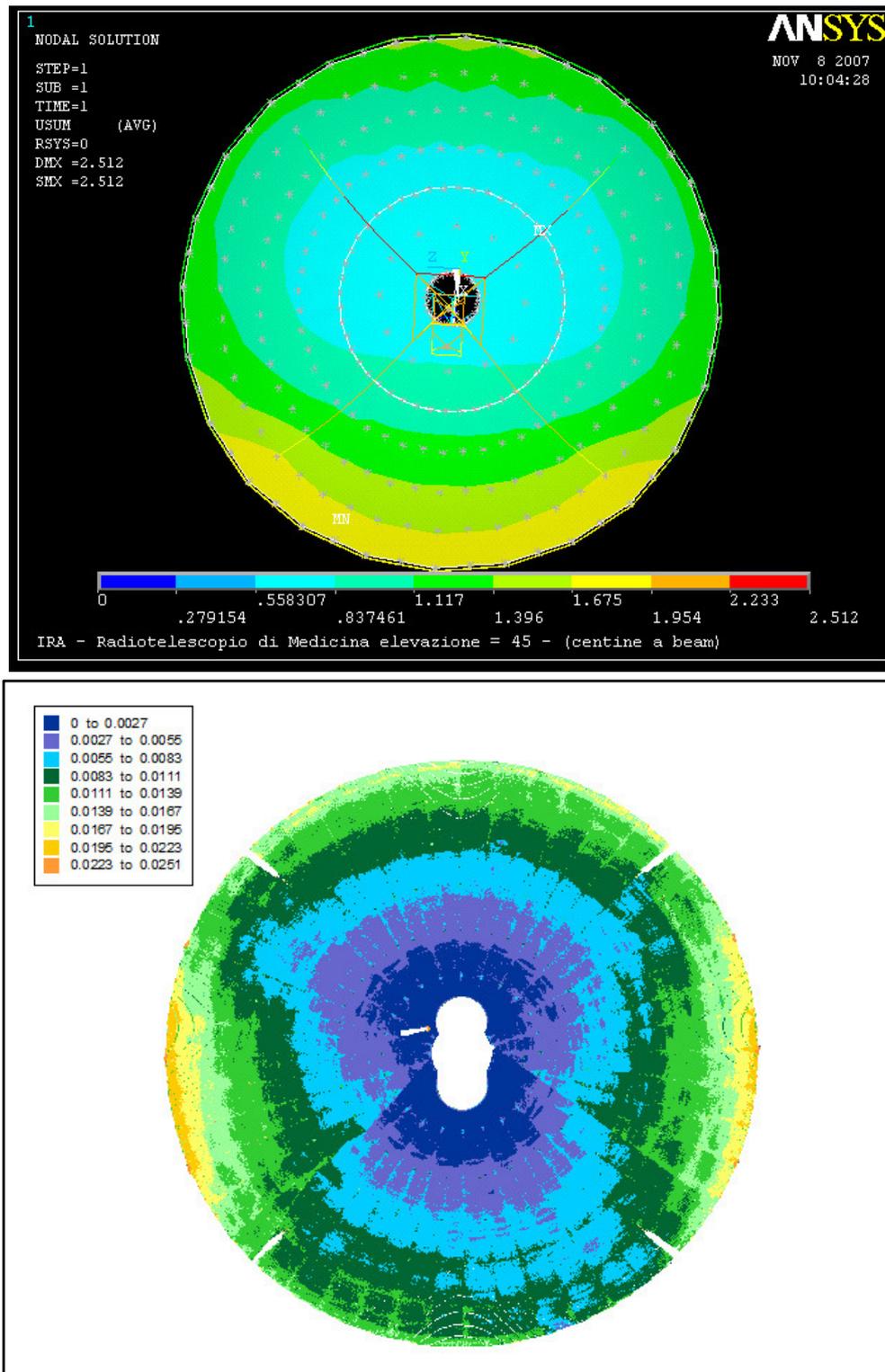


Figura 4.3-3: Confronto fra le deformazione del *dish* del radiotelescopio di Medicina ottenute dal FEM e dal rilievo *laser* alla elevazione di 45°.

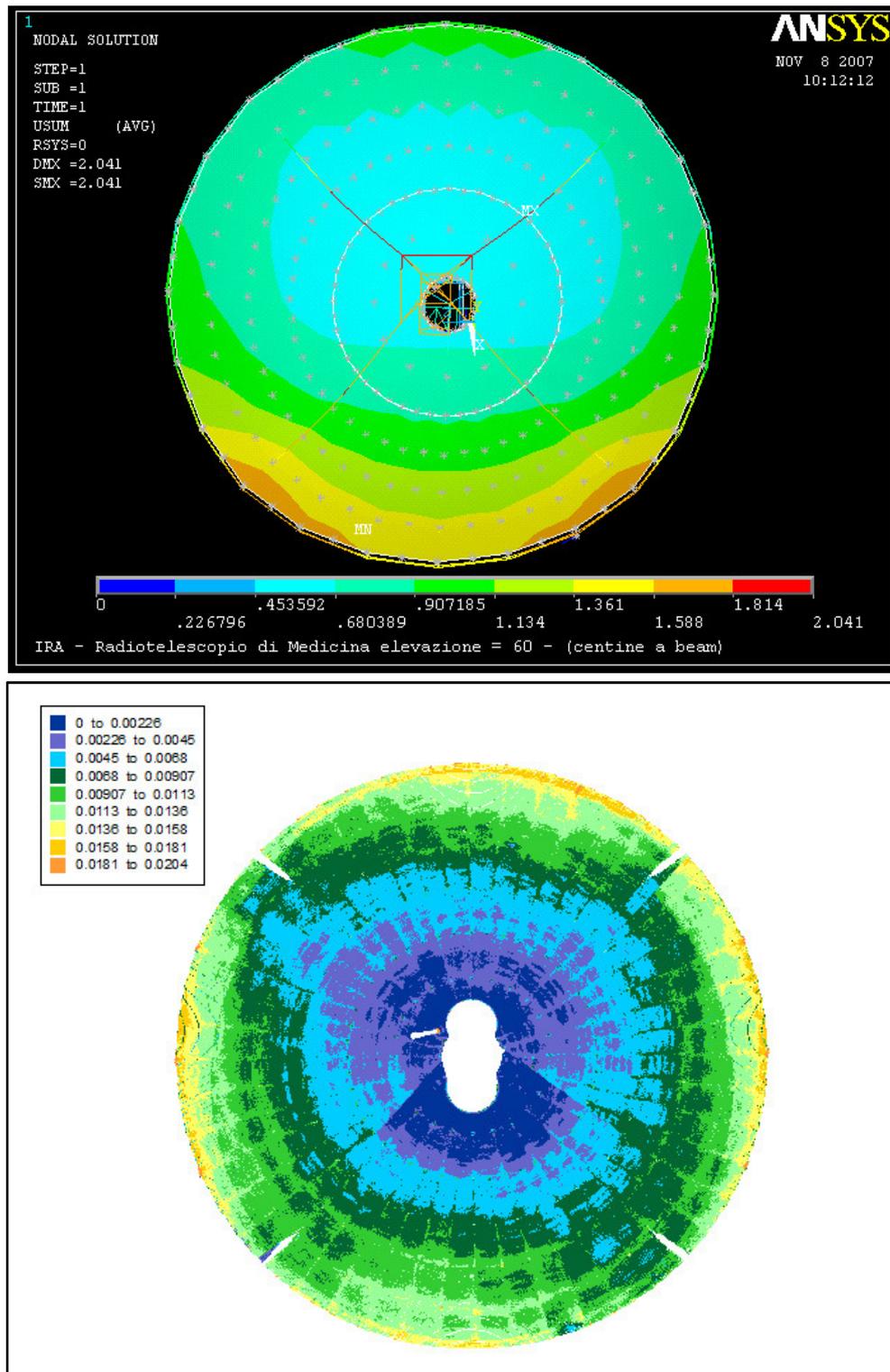


Figura 4.3-4: Confronto fra le deformazione del *dish* del radiotelescopio di Medicina ottenute dal FEM e dal rilievo *laser* alla elevazione di 60°.

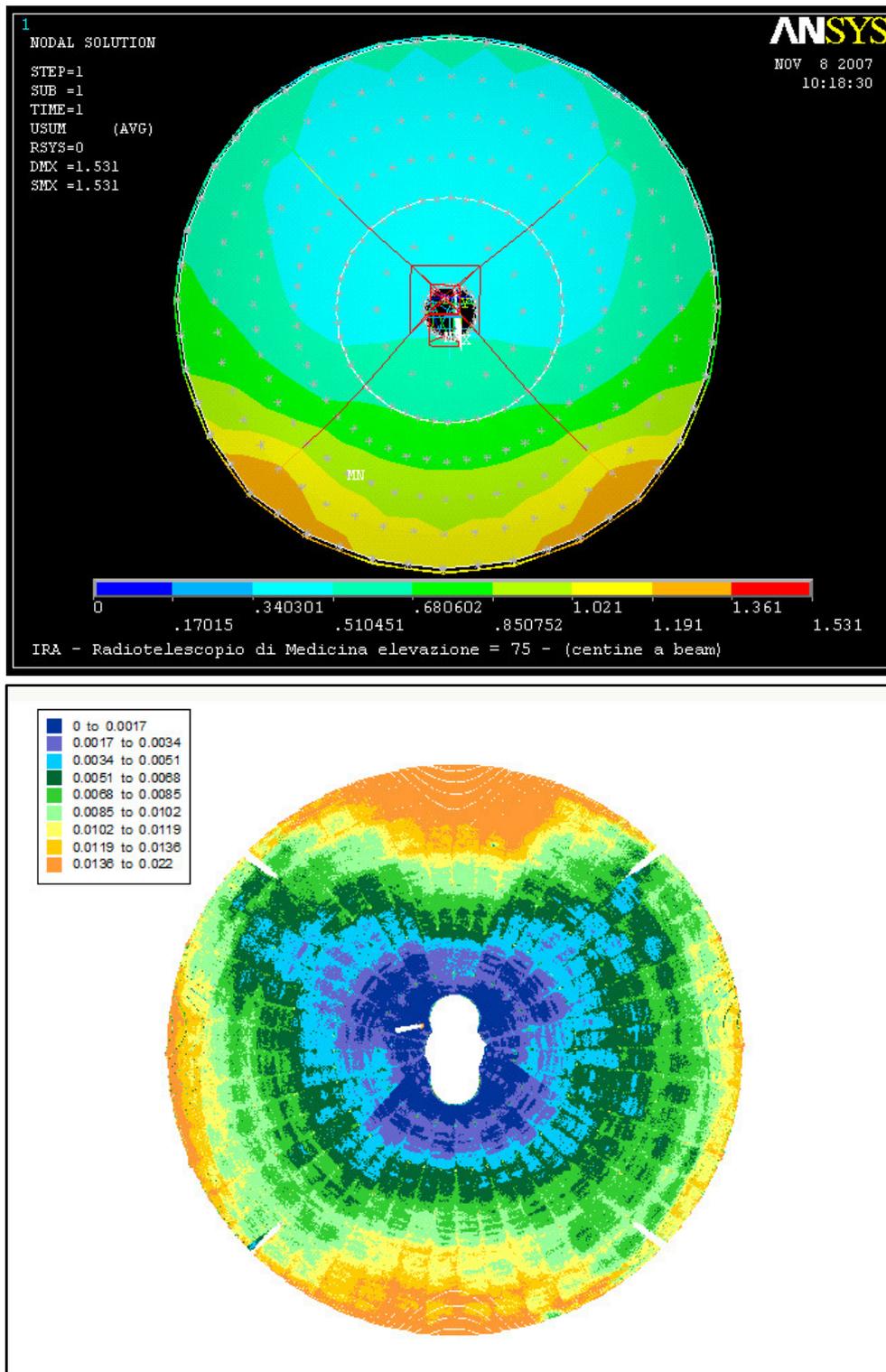


Figura 4.3-5: Confronto fra le deformazione del *dish* del radiotelescopio di Medicina ottenute dal FEM e dal rilievo *laser* alla elevazione di 75°.

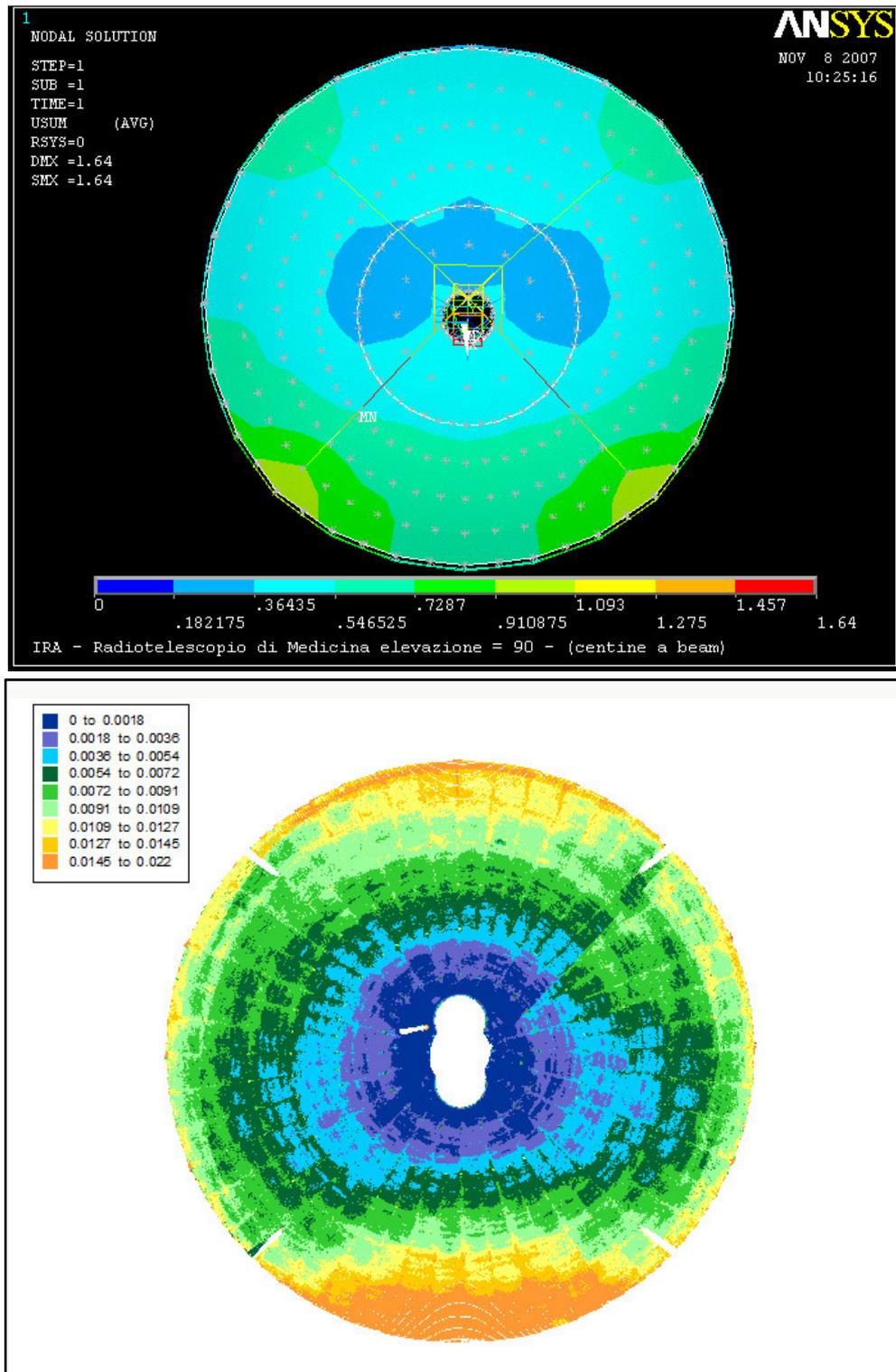


Figura 4.3-6: Confronto fra le deformazione del dish del radiotelescopio di Medicina ottenute dal FEM e dal rilievo laser alla elevazione di 90°.

4.4 Deformazioni gravitazionali del quadrupode dei telescopi VLBI: osservazioni topografiche e FEM a confronto

Le osservazioni topografiche relative ai *targets*, R1, R2, R3, posizionati in corrispondenza del quadrupode (Figura 2.4-4), con lo scopo di valutare le sue deformazioni gravitazionali, sono state utilizzate in studi sperimentali (Abbondanza 2007) che hanno permesso di stimare la distanza dei tre prismi retroriflettenti nei confronti della posizione dell'asse di elevazione di *best-fit*. Fra tali distanze è stata individuata quella di minor valore che è stata sottratta a tutte le altre. I risultati così ottenuti, alle diverse elevazioni studiate, sono riportati nella tabella 4.4-1.

Elevazione (°)	Distanze dei tre <i>targets</i> dalla posizione dell'asse di elevazione di <i>best-fit</i> (mm)		
	R3	R2	R1
90	0	0	0
80	8.00E-04	5.30E-04	1.54E-03
70	1.76E-04	1.04E-03	3.80E-03
60	6.4E-04	1.99E-03	5.16E-03
50	1.52E-03	3.25E-03	6.33E-03
40	3.05E-03	3.84E-03	9.76E-03
30	3.71E-03	5.86E-03	1.11E-03
20	4.60E-03	7.26E-03	1.29E-02
10	6.64E-03	9.18E-03	1.48E-02
5	7.64E-03	1.03E-02	1.61E-02

Tabella 4.4-1: Distanze dei prismi retroriflettenti posizionati in corrispondenza del quadrupode rispetto alla stima di un centro di rotazione, il più indeformato possibile, alle diverse elevazioni studiate. Le distanze riportate sono state ottenute sottraendo a tutti i valori la distanze più piccola stimata a 90°.

Dalla tabella 4.4-1 si può osservare come, al diminuire della elevazione del telescopio VLBI, tutti i prismi retroriflettenti tendono ad allontanarsi dalla loro posizione iniziale, in maniera non identica fra di loro ma in funzione della loro posizione sul quadrupode. Inoltre, da un confronto differenziale è possibile notare come il *target* R1 tenda ad allontanarsi, R3 ad avvicinarsi mentre R2 a rimanere più o meno nella stessa posizione inderformata.

Tale comportamento è stato confermato anche dal modello agli elementi finiti dell'antenna VLBI di Medicina; le configurazioni deformate del telescopio a differenti elevazioni sono riportate nella figura 4.4-2.

Nel modello matematico del radiotelescopio VLBI utilizzato per l'analisi agli elementi finiti sono stati individuati tre nodi, tali da riprodurre il più fedelmente possibile la reale posizione dei *targets* sul quadrupode, e dal punto "E" della Figura 4.4-3 (rappresentante la posizione dell'asse di elevazione) è stata calcolata la loro distanza nella configurazione deformata; a tali distanze è stato sottratto il valore più piccolo calcolato: i risultati ottenuti sono riportati nella tabella 4.4-2.

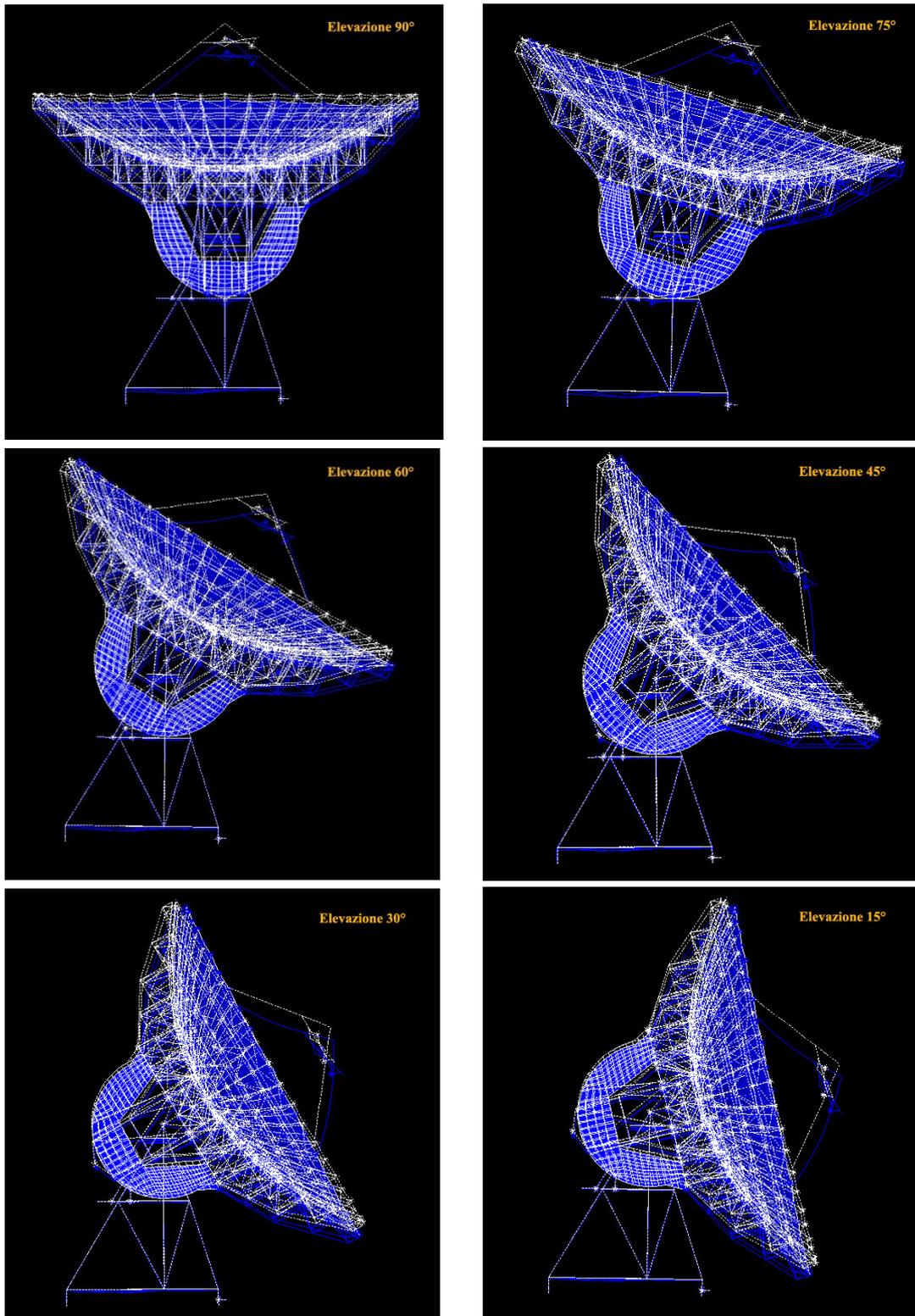


Figura 4.4-2: Configurazioni deformate del modello strutturale del telescopio VLBI ricavate dal FEM a differenti elevazioni.

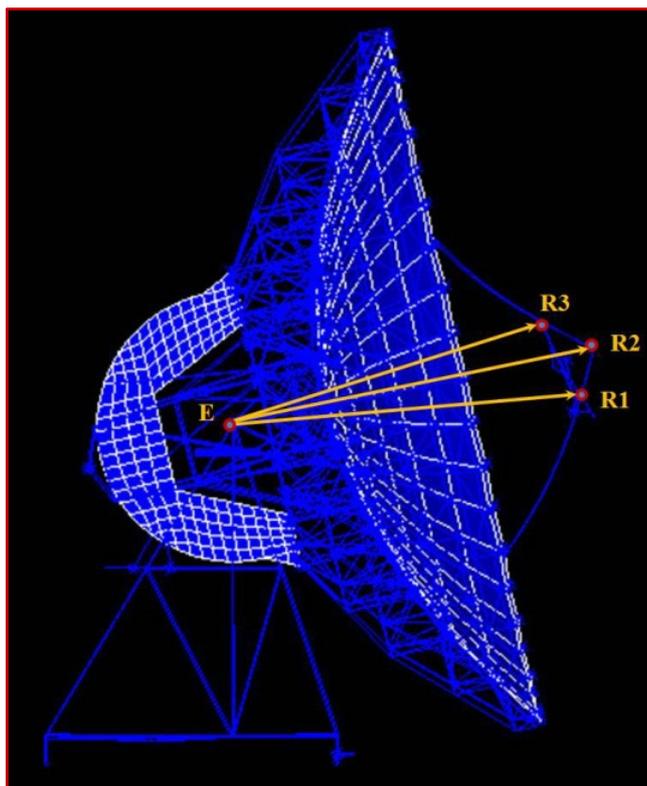


Figura 4.4-3: Esempio di configurazione deformata del telescopio VLBI: i punti R1, R2, R3 cercano di riprodurre la reale posizione dei *targets* posizionati sul quadrupode. Dal punto E, in corrispondenza dell'asse di elevazione, sono state calcolate le distanze dei punti R1, R2, R3.

Elevazione (°)	Distanze (mm)		
	R3-E	R2-E	R1-E
90	0	0	0
75	0.5495	0.3385	1.2075
60	0.4063	1.3328	3.0331
45	0.3665	2.9085	5.3964
30	1.7030	4.9556	8.1421
15	3.5265	7.3322	11.0643

Tabella 4.4-2: Distanze fra i punti R1, R2, R3 e il punto E rappresentanti rispettivamente i prismi sul quadrupode e l'asse di elevazione. Tali distanze sono state calcolate nelle configurazioni deformate del modello agli elementi finiti dell'antenna VLBI di Medicina alle differenti elevazioni. Le distanze riportate sono state ottenute sottraendo a tutti i valori la distanze più piccola che è risultata quella calcolata a 90°.

La posizione del punto E è stata definita come media delle posizioni dei cuscinetti di rotazione (nodi 201-202 nella figura 4-4-4) non esistendo nel modello FEM, un nodo che lo potesse direttamente identificare.

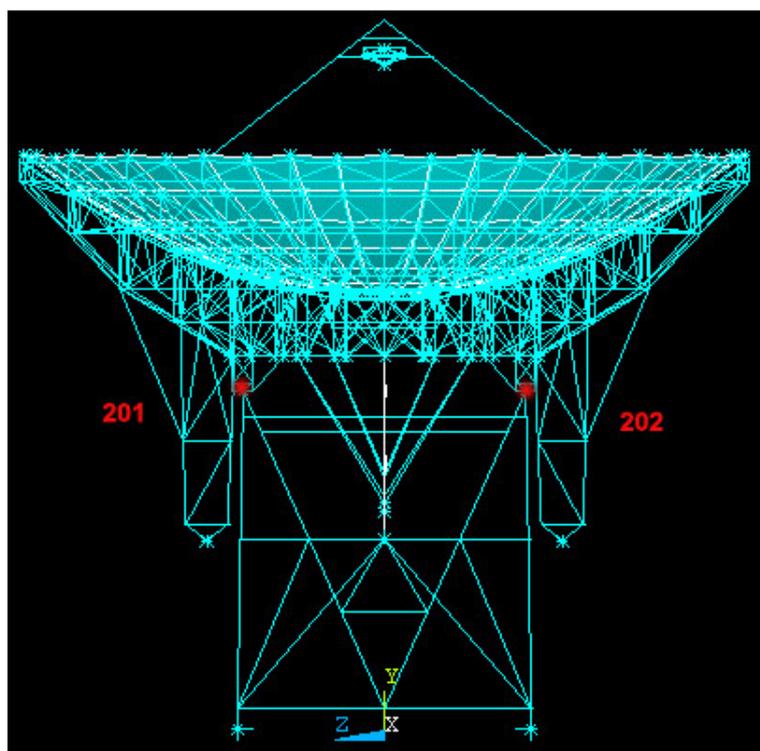


Figura 4.4-4: Posizione dei nodi 201, 202 che hanno permesso di definire il punto “E” rappresentante l’asse di elevazione.

I grafici riportati nella figura 4.4-5 mettono a confronto le distanze ricavate sperimentalmente dalla topografia (Tabella 4.4-1) con quelle ottenute dal modello agli elementi finiti (Tabella 4.4-2).

Dall’analisi dei grafici (Figura 4.4-5) emerge una congruenza, non solo qualitativa, fra i due differenti approcci; topografia e FEM. Questo è particolarmente evidente per la posizione del *target* R2. Le piccole differenze riscontrate per i prismi R1 e R3 per la medesima elevazione sono da imputare sicuramente ad errori di posizionamento nel modello agli elementi finiti dei 2 nodi rappresentanti i prismi retroriflettenti.

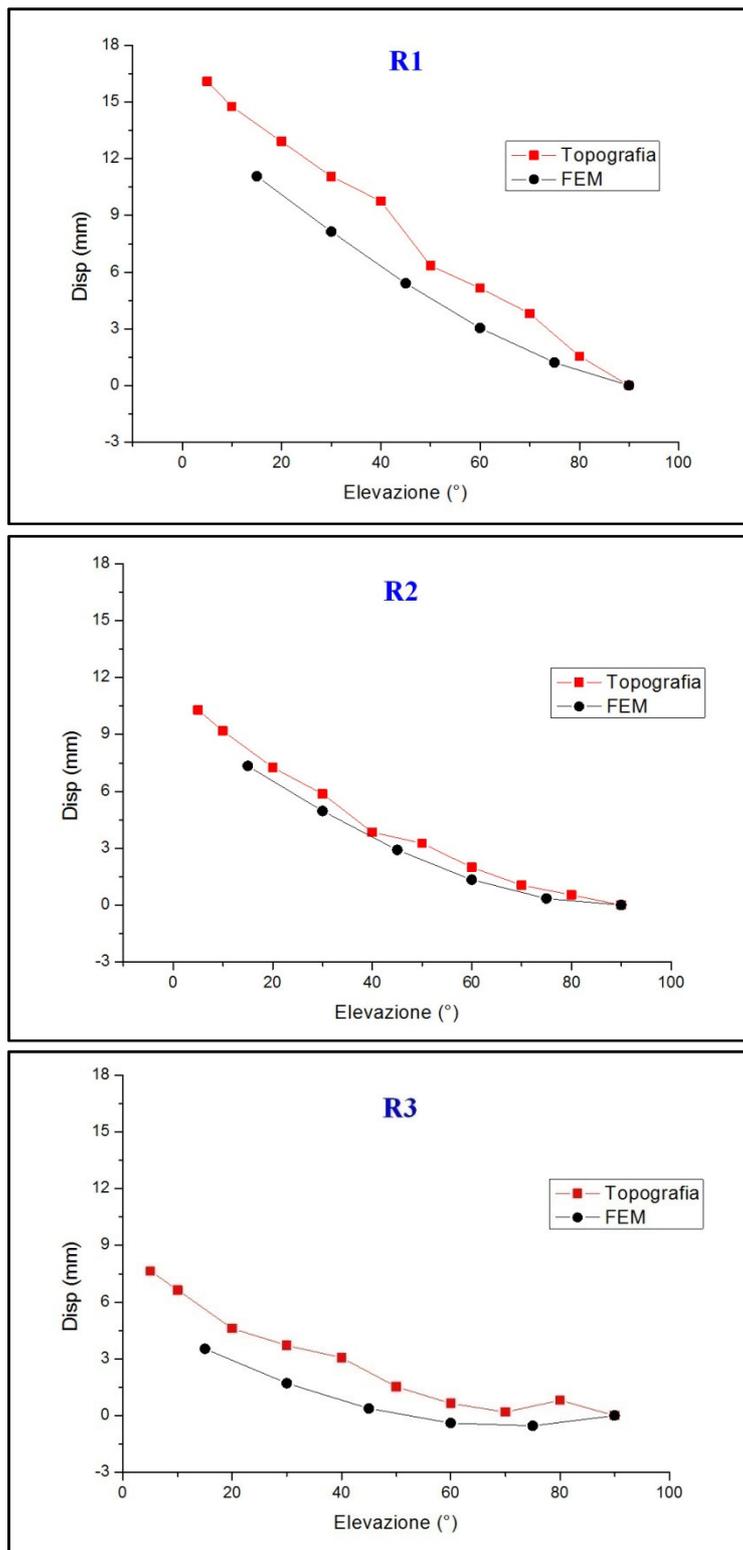


Figura 4.4-5: Confronto fra le posizioni dei targets R1, R2, R3 ricavate dalla topografia e dal modello agli elementi finiti.

CONCLUSIONI

Le antenne VLBI di Medicina e di Noto sono state indagate con la stessa strategia con l'obiettivo di studiare le deformazioni gravitazionali dello specchio primario: diversi metodi di rilevamento terrestre sono stati utilizzati al fine di convalidare i risultati e per ricavare il maggior numero di informazioni possibili circa la forma del *dish* e la sua posizione nello spazio.

Il rilievo *laser scanner* rappresenta un metodo innovativo per monitorare le deformazioni gravitazionali che interessano una componente strutturale importante dei telescopi VLBI: lo specchio primario. Le deformazioni possono essere studiate sia qualitativamente che quantitativamente: è possibile monitorate con un elevato dettaglio tutta la superficie del paraboloide e le deformazioni possono essere determinate a differenti elevazioni.

L'indagine *laser* è stata realizzata a sei diverse elevazioni dei telescopi VLBI ottenendo, per entrambi, dei modelli di deformazione coerenti. La risposta delle due strutture alla gravità è molto simile; piccole differenze possono essere evidenziate in termini di valori di deformazioni. L'antenna VLBI di Noto presenta un comportamento più rigido della superficie dello specchio primario rispetto a quello di Medicina; tale effetto è molto probabilmente imputabile alla presenza della superficie attiva ovvero di attuatori elettromeccanici posizionati al di sotto dei pannelli che rivestono la superficie interna del paraboloide. Dal punto di vista qualitativo, le due strutture reagiscono alla gravità con una chiusura interna, passando dalla elevazione di 90° a quella di 15°. Questo comportamento non è perfettamente simmetrico lungo tutto il bordo del paraboloide: la parte inferiore del *dish* presenta una chiusura più debole rispetto alla parte superiore.

Le relative deformazioni della superficie sono state quantificate combinando fra loro le scansioni ottenute alle diverse elevazioni. Le

differenze maggiori si riscontrano sottraendo la scansione a 90° a quella di 15° : il 9% dei punti a Noto e il 16% a Medicina presentano una differenza compresa fra $(1\div 2)$ cm.

Le lunghezze focali e le loro variazioni sono state stimate utilizzando per entrambi i telescopi una procedura di *best-fit* realizzata *ad hoc* ed applicata alle nuvole *laser*. Anche in questo caso, le variazioni sono molto simili sia in segno che in valore. La chiusura interna dei *dish* provoca una diminuzione delle lunghezze focali, con una variazione finale di circa 2 cm per entrambi i telescopi. La differenza tra il valore nominale della lunghezza focale (la stessa per entrambi i telescopi) e le lunghezze focali di *best-fit* alle diverse elevazioni è stata calcolata: le lunghezze focali sperimentali sono più piccole per ogni posizione del *dish* e le differenze variano da 2 cm allo zenit fino a 4 centimetri a 15° .

Volendo considerare l'influenza delle deformazioni occorre precisare che, se, da un lato, il rilievo *laser* permette di quantificare in modo efficiente uno dei tre termini dell'equazione (1.2.3-1), quello relativo alle variazioni della lunghezza focale, dall'altro non permette di stimare le variazioni di posizione del vertice e dei ricevitori al variare dell'elevazione del telescopio che dovranno essere stimati utilizzando dei metodi alternativi.

Un tentativo per monitorare la posizione del vertice è stato realizzato in un sistema di riferimento topocentrico definito localmente mediante trilaterazione e triangolazione. Sei prismi retro-direttivi sono stati appositamente installati sul bordo esterno del *dish* e sono stati osservati da una coppia di *total stations* dalla rete di controllo a terra. I *targets* sono stati utilizzati come punti comuni per stimare i parametri di trasformazione fra le sei elevazioni dei telescopi studiate: tali parametri sono stati applicati alle coordinate dei centri dei *targets* sferici utilizzati per il posizionamento delle nuvole *laser* al fine di inserire il paraboloide di *best-fit* all'interno del sistema topocentrico e poter così monitorare la traiettoria seguita dalla superficie riflettente dello specchio primario durante la sua rotazione

in elevazione. Purtroppo, il numero relativamente elevato di passaggi necessari per realizzare la trasformazione tra sistema di riferimento interno al *dish* a sistema topografico locale ha portato ad una inevitabile propagazione delle incertezze, degradando la significatività degli spostamenti ottenuti per il vertice del paraboloide. In ultima analisi viene discussa l'applicazione di un modello agli elementi finiti per la determinazione dello stato tensionale e deformativo associato al radiotelescopio di Medicina. L'approccio a tale modello matematico è stato dettato dal tentativo di valutare la variazione di forma dello specchio primario e le deformazioni del quadrupode; quest'ultime in relazione alla variazione dei ricevitori geodetici S/X posizionati in fuoco primario.

I risultati ricavati dal modello agli elementi finiti sono stati confrontati con quelli ricavati dal rilievo *laser* e dal rilievo topografico relativo al quadrupode con lo scopo di definire una possibile congruenza fra le differenti metodologie utilizzate per l'analisi deformativa delle antenne VLBI di Medicina e di Noto.

Risultati soddisfacenti sono stati ricavati sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo relativamente alle variazioni di posizione dei ricevitori nel passaggio dalla elevazione di 90° dell'antenna a quella di 15°. Le piccole differenze riscontrate fra il FEM e la topografia, per la medesima elevazione, sono sicuramente imputabili ad errori di posizionamento nel modello agli elementi finiti dei nodi rappresentanti i prismi retroriflettenti osservati dalla coppia di *total stations*.

Il confronto fra il rilievo *laser* e il FEM ha invece evidenziato un differente comportamento qualitativo. Le deformazioni gravitazionali dello specchio primario calcolate con il modello agli elementi finiti presentano un comportamento non simmetrico nel passaggio dalla elevazione di 15° a quella di 90° dell'antenna VLBI: tale comportamento non è stato confermato dal rilievo *laser* che invece evidenzia deformazioni perfettamente simmetriche. I due diversi

andamenti sono forse imputabili ad approssimazioni non perfettamente aderenti alla realtà fisica introdotte per il FEM.

Un aspetto sicuramente da approfondire è quello relativo all'analisi agli elementi finiti allo scopo di individuare gli schemi strutturali e statici più appropriati da assegnare al modello fisico in esame ed i tipi di elementi finiti più idonei allo sviluppo del calcolo al fine di non ridurre l'affidabilità e la qualità dell'analisi e, naturalmente, dei risultati.

Appare evidente come un approccio integrato fra diverse tecniche può portare ad una maggiore accuratezza e leggibilità dei prodotti finali permettendo di ottenere delle informazioni complementari e, se possibile, ridondanti, sulle quali poter effettuare delle verifiche incrociate.

Il rilievo *laser scanner* si è dimostrato un metodo efficiente per monitorare le deformazioni del riflettore primario. La stessa metodologia potrebbe essere utilizzata per creare dei modelli di correzione, dipendenti dalla elevazione, per verificare l'efficienza della superficie attiva. Un simile approccio potrebbe essere particolarmente utile sia per le osservazioni geodetiche che astronomiche dal momento che la precisione della superficie attiva influisce notevolmente, alle alte frequenze, sulle prestazioni dei telescopi VLBI in termini di guadagno d'antenna, di coerenza del segnale e di efficienza.

BIBLIOGRAFIA

Abbondanza C. (2007). *Local ties, eccentricity vectors and combination of geodetic reference frames: a critical investigation applied to the co-located observatory of Medicina*. Tesi di Dottorato, Università di Bologna, Italia.

Altamimi Z., Sillard P., Boucher C. (2002). *ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for Earth science applications*. J. Geophys. Res., 107(B10), 2214, doi:10.1029/2001JB000561.

Altamimi Z., Boucher C., Willis P. (2005). *ITRF2005: Terrestrial reference frame requirements within GGOS perspective*. Journal of Geodynamics, 40, 363-374, DOI: 10.1016/j.jog.2005.06.002.

Altamimi Z., Collilieux X., Legrand J., Garayt B., Boucher C. (2007). *ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of station positions and Earth Orientation Parameters*. J. Geophys. Res., 112, B09401, DOI: 10.1029/2007JB004949.

Blais F. (2003). *A Review of 20 Years of Range Sensor Development*. Videometrics VII, Sabry F. El-Hakim, Armin Gruen, James S. Walton, Editors, Proc. of SPIE-IS&T Electronic Imaging, SPIE Vol. 5013.

Boehler W., Heinz G., Marbs A. (2001). *The potential of non contact close range laser scanners for cultural heritage recording*. Proc. CIPA WG6 Int. Symposium, Potsdam.

Boehler W., Marbs A. (2002). *3D Scanning instruments*. Proc. of the CIPA WG6 Int. Workshop on scanning for cultural heritage recording. <http://www.isprs.org/commission5/workshop/>.

Boehler W., Bordas Vincent M., Marbs A. (2003). *Investigating laser scanner accuracy*. Proc. of CIPA XIX International Symposium, Antalya, Turkey, pp 696-702.

Besl P.J., McKay N.D. (1992). *A method for registration of 3-d shapes*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 14(2), 239-256.

Bornaz L. (2006). *Principi di funzionamento e tecniche di acquisizione*. Pubblicato nel volume F. Crosilla, S. Dequal. Laser scanning terrestre (pp. 1-18). ISBN 88-85137-19-9. Udine: CISM (Itlay).

Boucher C., Altamimi Z., Sillard P. (1999). *The 1997 International Terrestrial Reference Frame (ITRF97)*. IERS Tech. Note 27, Obs. de Paris, Paris.

Carter W. E., Rogers A. E. E., Counselman C. C. III, Shapiro I. I. (1980). *Comparison of Geodetic and Radio Interferometric Measurements of the Haystack-Westford Base Line Vector*. J. Geophys. Res., vol. 85, pp. 2685-2687.

Cesari F. (1997). *Codici di calcolo per l'analisi di strutture spaziali*. Pitagora Editrice, 2^{ed}.

Clark T., Thomsen P. (1988). *Deformations in VLBI Antennas*. Nasa Technical Memorandum 100696.

Comincioli V. (1991). *Calcolo numerico*. Mc Graw-Hill.

Corradi dell'Acqua L. (1992). *Le teorie strutturali ed il metodo degli elementi finiti*. Mc Graw-Hill.

Feissel-Vernier M., Ma C., Gontier A. M., Barache C. (2006). *Analysis strategy issues for the maintenance of the ICRF axis*. *Astron Astrophys* 452:1107.

Froehlich C., Mettenleiter M. (2004). *Terrestrial Laser Scanning- New Perspective in 3D Survey*. Proceedings of the ISPRS working group VIII/2.

Fontanella F., Pasquali A. (1992). *Analisi numerica*. Ed. Pitagora, Bologna.

Greve A., Bremer M., Peñalver J., Raffin P., Morris D. (2005). *Improvement of the IRAM 30-m Telescope From Temperature Measurements and Finite-Element Calculations*. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 53, no. 2, February 2005 851.

IERS (2005). In: Richter B., Dick W.R., Schwegmann W. (eds). *Proceedings of the IERS workshop on site co-location. IERS technical note no. 33*, international Earth rotation and reference systems service, Central Bureau, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 148 pp.

Johnston G., Dawson J. (2004). *The 2002 Mount Pleasant (Hobart) radio telescope local tie survey*. *Geoscience Australi record* 2004/21, 21 pp. <http://www.ga.gov.au/geodesy/reports/localities/>.

Johnston G., Dawson J., Naebkhil S. (2004). *The 2003 Mount Stromlo local tie survey*. *Geoscience Australi record* 2004/20, 26 pp. <http://www.ga.gov.au/geodesy/reports/localities/>.

Kruegel M., Thaller D., Tesmer V., Rothacher M., Angermann D., Schmid R. (2007). *Tropospheric parameters: combination studies based on homogeneous VLBI and GPS data*. *Journal of Geodesy* 81(6–8):515-527 edited by Springer, DOI: 10.1007/s00190-006-0127-8.

Lichti D., Stewart M. P., Tsakiri M., Snow A. J. (2000). *Calibration and testing of terrestrial laser scanner*. *Int. Arch. of Photogrammetry and RS*, Vol. XXXIII, Part B5, pp. 485-492.

Ma C. (1978). *Very long baseline interferometry applied to polar motion, relativity and geodesy*. Tech, Memo 79582, NASA Greenbelt, MD.

Ma C. (2004). *Refinement of the ICRF*. In: Vandenberg N, Baver KD (eds) *Proc IVS 2004 general meeting*, NASA/CP-2004-212255, pp 337–340.

Mathews P. M., Herring T. A., Buffett B. A. (2002). *Modeling of nutation and precession: new nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior*. *J. Geophys. Res.*, 107(B4), DOI:10.1029/2001JB000390.

Nothnagel A., Pilhatsch M., Haas R. (1995). *Investigations of Thermal Height Changes of Geodetic VLBI Telescopes*. *Proceedings of the Tenth Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry*, Matera, Italy; 121–133.

Olmi L., Grueff G. (2006). *SRT: design and technical specifications*. *Mem. S.A.It. Suppl.* Vol. 10, 19. *Science with the Sardinia Radio Telescope*, Bologna, May 10-11, 2005 Editors: Jan Brand, Karl-Heinz Mack, and Isabella Prandoni.

Orfei A., Morsiani M., Zacchiroli G., Maccaferri G., Roda J., Fiocchi F. (2004). *An active Surface for Large Reflector Antennas*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 46, 4, 11–19.

Pieraccini M., Guidi G., Atzeni C. (2001). *3D digitizing of cultural heritage*. Journal of Cultural Heritage 2, pp. 63–70 edited by SAS.

Rinaudo F. (2003). *La tecnica laser scanning: applicazioni architettoniche e urbanistiche*. Pubblicato nel volume F. Crosilla, R. Galletto. La tecnica del laser scanning: teoria e applicazioni (pp. 135-154). ISBN 88-85137-27-x. Udine: CISM (Italy).

Roggero M. (2006). *Segmentazione di dati laser ed analisi orientata agli oggetti*. Pubblicato nel volume F. Crosilla, S. Dequal. Laser scanning terrestre (pp. 111-142). ISBN 88-85137-19-9. Udine: CISM (Italy).

Rugarli P. (2003). *Calcolo strutturale con gli elementi finiti*. EPC Libri, ISBN 88-8184-295-5.

Sarti P., Angermann D. (2005). *Terrestrial data analysis and SINEX generation*. Proc. IERS Workshop on site co-location. Matera, Italy, 23-24 October 2003. Edited by Bernd Richter, Wolfgang Schwegmann and Wolfgang R. Dick. (IERS Tech. Note 33) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2005, 118-127, ISBN 3-89888-793-6.

Sarti P., Sillard P., Vittuari L. (2004). *Surveying co-located space-geodetic instruments for ITRF computation*. Journal of Geodesy 78 (3): 210-222 edited by Springer, DOI:10.1007/s00190-004-0387-0.

Sarti P., Vittuari L. (2004). *La realizzazione e le potenzialità delle co-localizzazioni di alta precisione negli osservatori geodetici italiani*. Boll. Soc. It. Fotogrammetria e Topografia, 3, pp. 129-138.

Sawyer R. (2001). *STAR*NET-PRO V6 least squares survey network adjustment*. Program reference manual. Oakland, CA.

Schlueter W., Behrend D. (2007). *The International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (IVS): current capabilities and future prospects*. Journal of Geodesy 81 (6-8): 379-387 edited by Springer Berlin/Heidelberg, DOI 10.1007/s00190-006-0131-z.

Setti G. (2006). *Synthetic history of the SRT project*. Mem. S.A.It. Suppl. Vol. 10, 15. Science with the Sardinia Radio Telescope, Bologna, May 10-11, 2005 Editors: Jan Brand, Karl-Heinz Mack, and Isabella Prandoni.

Sovers O., Fanselow J., Jacobs C. (1998). Astrometry and geodesy with radio interferometry: experiments, models, results. *Rev Mod Phys* 70(4):1393-1454.

Titov O. (2007). *Effect of the selection of reference radio sources on geodetic estimates from VLBI observations*. Journal of Geodesy 81(6-8):455-468 edited by Springer, DOI 10.1007/s00190-007-0145-1.

Thaller D., Kruegel M., Rothacher M., Tesmer V., Schmid R., Angermann D. (2007). *Combined Earth orientation parameters based on homogeneous and continuous VLBI and GPS data*. Journal of Geodesy 81(6-8):529-541 edited by Springer, DOI: 10.1007/s00190-006-0115-z.

Thompson A. R., Moran J. M., Swenson G. W. (2001). *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, 2nd Edition. John Wiley & Sons.

Wresnik J., Haas R., Boehm J., Schuh H. (2007). *Modeling thermal deformation of VLBI antennas with a new temperature model*. Journal of Geodesy 81 (6-8): 423-431 edited by Springer Berlin/Heidelberg, DOI 10.1007/s00190-006-0120-2.

Yemez Y. and Wetherilt C. J. (2007). *A volumetric fusion technique for surface reconstruction from silhouettes and range data*. Computer Vision and Image Understanding 105, pp. 30–41.

Zerbini S., Negusini M., Romagnoli C., Domenichini F., Richter B., Simon D., Domenichini F. (2002). *Multi parameter continuous observations to detect ground deformation and to study environmental variability impacts*. Global and Planetary Change, 34, NOS. 1-2, 37-58.

APPENDICE A
NODAL SOLUTION:
OUTPUT DELL'ELABORAZIONE ANSYS
PER IL MODELLO MATEMATICO ALLA
ELEVAZIONE DI 90°

```
PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP=   1   SUBSTEP=   1
TIME=       1.0000   LOAD CASE=   0
```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11	0.51512E-01	-0.60275E-02	0.42744E-01	0.67208E-01
12	0.51604E-01	-0.60375E-02	0.42837E-01	0.67338E-01
13	-0.73017E-01	-0.37528E-02	-0.60889E-01	0.95148E-01
14	-0.72832E-01	-0.37520E-02	0.61331E-01	0.95290E-01
16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
21	0.25536E-01	-0.10878E-01	-0.27378E-02	0.27892E-01
22	0.25537E-01	-0.10897E-01	0.26281E-02	0.27888E-01
23	-0.28487E-01	-0.69501E-02	-0.16383E-02	0.29369E-01
24	-0.28362E-01	-0.69488E-02	0.20972E-02	0.29276E-01
25	0.32973E-03	-0.20345	-0.58160E-04	0.20345
26	0.69257E-02	-0.16339	-0.66753E-02	0.16367
27	0.12293E-02	-0.21727	-0.23160E-02	0.21728
28	0.12878E-02	-0.21684	0.21965E-02	0.21686
29	0.69572E-02	-0.16298	0.65496E-02	0.16326
30	-0.86853E-02	-0.18347	-0.22858E-02	0.18369
31	-0.16763E-02	-0.47321	-0.20715E-02	0.47322
32	-0.16508E-02	-0.47309	0.21579E-02	0.47310
33	-0.86124E-02	-0.18315	0.23744E-02	0.18337
34	-0.65715E-03	-0.28692	0.22310E-03	0.28692
40	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
41	0.31745E-03	-0.28675	0.34707E-03	0.28675
42	0.29925E-03	-0.28704	-0.38762E-03	0.28704
43	-0.42453E-03	-0.48909	-0.34154E-03	0.48909
44	-0.40633E-03	-0.48895	0.38208E-03	0.48895
45	0.11874E-02	-0.20898	-0.67439E-04	0.20899
101	0.28449E-01	-0.13963	0.11319E-01	0.14294
102	0.28589E-01	-0.13982	-0.11928E-01	0.14321
103	0.39905E-01	-0.13847	0.54251E-02	0.14420
104	0.39720E-01	-0.13804	-0.23283E-02	0.14366
105	0.34010E-01	-0.15315	-0.46769E-03	0.15688
106	0.34185E-01	-0.15345	0.21619E-02	0.15722
107	0.48227E-01	-0.20520	0.47188E-02	0.21085

```
***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****
LOAD STEP=   1   SUBSTEP=   1
```

TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
108	0.51331E-01-0.20422		-0.42765E-02	0.21062
109	0.48189E-01-0.19811		-0.45085E-02	0.20394
110	0.51243E-01-0.19899		0.49807E-02	0.20554
111	0.57546E-01-0.11403		-0.20434E-02	0.12775
112	0.48727E-01-0.12504		0.52407E-02	0.13430
113	0.64902E-01-0.22071		-0.72779E-03	0.23006
114	0.64723E-01-0.22103		-0.11542E-03	0.23031
115	0.64882E-01-0.21052		-0.42295E-03	0.22030
116	0.65275E-01-0.19110		-0.21335E-03	0.20194
117	0.66332E-01-0.13627		0.27741E-03	0.15156
118	0.66865E-01-0.10734		0.46914E-03	0.12647
119	0.66845E-01-0.93125E-01		0.55565E-03	0.11463
120	0.66845E-01-0.60096E-01		0.75924E-03	0.89891E-01
121	0.11359	-0.13638	0.11053E-03	0.17749
122	0.15881	-0.14703	0.24881E-03	0.21642
151	0.56806E-01-0.20336		0.22652E-02	0.21115
152	0.57053E-01-0.20335		-0.35530E-03	0.21121
153	0.57200E-01-0.20542		0.11971E-03	0.21324
154	0.56952E-01-0.20465		0.23122E-02	0.21244
155	0.56806E-01-0.20313		0.34907E-02	0.21095
156	0.57054E-01-0.20334		-0.16907E-02	0.21120
157	0.56858E-01-0.20320		0.36643E-02	0.21104
158	0.57106E-01-0.20352		-0.18259E-02	0.21138
159	0.56952E-01-0.20344		0.37905E-02	0.21130
160	0.57200E-01-0.20393		-0.18298E-02	0.21181
161	0.56434E-01-0.39535		0.20608E-02	0.39936
162	0.56784E-01-0.30236		-0.22765E-03	0.30765
163	0.56922E-01-0.39608		0.21285E-02	0.40016
164	0.57265E-01-0.30478		0.22808E-03	0.31011
165	0.57890E-01-0.78210		0.14230E-02	0.78424
166	0.57797E-01-0.74589		0.12640E-02	0.74813
167	0.57835E-01-0.74760		0.14620E-02	0.74983
168	0.57708E-01-0.77252		0.99691E-03	0.77467
169	0.57723E-01-0.77485		0.12402E-02	0.77700
170	0.57821E-01-0.67104		0.46127E-03	0.67353
171	0.57838E-01-0.67487		0.79625E-03	0.67735
201	0.61110E-01-0.21492		0.21071E-01	0.22443

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
202	0.61038E-01-0.21524		-0.19329E-01	0.22456
203	0.61401E-01-0.20865		0.83239E-02	0.21765
204	0.62320E-01-0.20904		-0.67598E-02	0.21824
205	0.27878E-01-0.20533		0.23692E-02	0.20723
206	0.29628E-01-0.20634		-0.19443E-02	0.20847
207	0.75968E-01-0.34008		0.88311E-03	0.34846
208	0.85105E-01-0.46719		0.79935E-03	0.47488
209	0.65298E-01-0.33907		0.92426E-03	0.34530
210	0.65842E-01-0.46622		0.83798E-03	0.47085
211	0.64538E-01-0.35776		0.90937E-03	0.36353
212	0.66778E-01-0.43778		0.85703E-03	0.44284
213	0.34696E-01-0.34406		0.10019E-02	0.34581
214	0.33123E-01-0.45403		0.92274E-03	0.45524
215	0.34656E-01-0.37217		0.98327E-03	0.37378
216	0.33375E-01-0.41948		0.94947E-03	0.42080
217	0.81131E-02-0.37245		0.10440E-02	0.37254

218	0.64210E-02-0.41941	0.10077E-02	0.41946
219	0.33975E-01-0.39615	0.96768E-03	0.39761
220	0.28951E-02-0.39629	0.10366E-02	0.39630
221	0.76568E-01-0.34846	0.87409E-03	0.35677
222	0.76416E-01-0.34624	0.87634E-03	0.35458
223	0.76268E-01-0.34398	0.87860E-03	0.35233
224	0.76116E-01-0.34184	0.88085E-03	0.35021
225	0.72800E-01-0.35306	0.88435E-03	0.36049
226	0.68813E-01-0.35539	0.89688E-03	0.36199
227	0.64582E-01-0.35366	0.91234E-03	0.35951
228	0.64679E-01-0.34975	0.91530E-03	0.35568
229	0.64836E-01-0.34600	0.91828E-03	0.35203
230	0.65040E-01-0.34242	0.92126E-03	0.34855
231	0.73054E-01-0.33996	0.89684E-03	0.34772
232	0.69465E-01-0.33960	0.91056E-03	0.34664
233	0.59784E-01-0.36021	0.92227E-03	0.36514
234	0.54890E-01-0.36260	0.93502E-03	0.36673
235	0.49913E-01-0.36494	0.94756E-03	0.36834
236	0.44899E-01-0.36726	0.95982E-03	0.36999
237	0.39947E-01-0.36957	0.97174E-03	0.37172
238	0.34662E-01-0.36588	0.98713E-03	0.36752

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
239	0.34619E-01-0.36037	0.99089E-03	0.36203	
240	0.34638E-01-0.35496	0.99458E-03	0.35665	
241	0.34668E-01-0.34952	0.99825E-03	0.35124	
242	0.34560E-01-0.37828	0.97959E-03	0.37985	
243	0.34394E-01-0.38429	0.97578E-03	0.38583	
244	0.34191E-01-0.39025	0.97181E-03	0.39175	
245	0.28088E-01-0.37226	0.99861E-03	0.37332	
246	0.21548E-01-0.37228	0.10138E-02	0.37290	
247	0.14892E-01-0.37239	0.10289E-02	0.37269	
248	0.60033E-01-0.33831	0.93898E-03	0.34360	
249	0.54850E-01-0.33829	0.95320E-03	0.34271	
250	0.49656E-01-0.33886	0.96672E-03	0.34248	
251	0.44460E-01-0.33997	0.97940E-03	0.34287	
252	0.39469E-01-0.34180	0.99116E-03	0.34408	
253	0.59152E-02-0.37831	0.10444E-02	0.37836	
254	0.43272E-02-0.38426	0.10433E-02	0.38429	
255	0.33250E-02-0.39027	0.10407E-02	0.39029	
256	0.84308E-01-0.44951	0.80868E-03	0.45735	
257	0.84524E-01-0.45377	0.80634E-03	0.46158	
258	0.84725E-01-0.45801	0.80402E-03	0.46579	
259	0.84921E-01-0.46240	0.80168E-03	0.47013	
260	0.78305E-01-0.44291	0.82635E-03	0.44978	
261	0.72428E-01-0.44035	0.84170E-03	0.44627	
262	0.66701E-01-0.44313	0.85319E-03	0.44812	
263	0.66565E-01-0.44866	0.84936E-03	0.45357	
264	0.66364E-01-0.45435	0.84554E-03	0.45917	
265	0.66122E-01-0.46019	0.84175E-03	0.46491	
266	0.77984E-01-0.46708	0.81229E-03	0.47355	
267	0.71598E-01-0.46674	0.82518E-03	0.47220	
268	0.61215E-01-0.43507	0.87289E-03	0.43936	
269	0.55723E-01-0.43223	0.88863E-03	0.43581	
270	0.50268E-01-0.42927	0.90421E-03	0.43220	
271	0.44790E-01-0.42618	0.91958E-03	0.42853	
272	0.39254E-01-0.42295	0.93468E-03	0.42477	
273	0.33384E-01-0.42673	0.94416E-03	0.42804	
274	0.33313E-01-0.43369	0.93881E-03	0.43497	
275	0.33232E-01-0.44055	0.93344E-03	0.44180	

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
276	0.33165E-01-0.44733		0.92808E-03	0.44856
277	0.33452E-01-0.41348		0.95429E-03	0.41483
278	0.33586E-01-0.40778		0.95893E-03	0.40916
279	0.33767E-01-0.40198		0.96339E-03	0.40340
280	0.25490E-01-0.41910		0.96669E-03	0.41988
281	0.19914E-01-0.41930		0.97871E-03	0.41977
282	0.12951E-01-0.41912		0.99356E-03	0.41932
283	0.60225E-01-0.46502		0.85201E-03	0.46891
284	0.54534E-01-0.46360		0.86622E-03	0.46680
285	0.48957E-01-0.46181		0.88050E-03	0.46440
286	0.43551E-01-0.45958		0.89473E-03	0.46164
287	0.38248E-01-0.45705		0.90883E-03	0.45865
288	0.48195E-02-0.41383		0.10166E-02	0.41386
289	0.36762E-02-0.40813		0.10245E-02	0.40815
290	0.30201E-02-0.40225		0.10312E-02	0.40227
291	0.29329E-01-0.34727		0.10134E-02	0.34851
292	0.24319E-01-0.35102		0.10232E-02	0.35186
293	0.19716E-01-0.35527		0.10312E-02	0.35582
294	0.15528E-01-0.36002		0.10373E-02	0.36035
295	0.13899E-01-0.36221		0.10392E-02	0.36248
296	0.27240E-01-0.44972		0.93898E-03	0.45055
297	0.21792E-01-0.44473		0.95458E-03	0.44526
298	0.16876E-01-0.43908		0.96939E-03	0.43941
299	0.12611E-01-0.43287		0.98326E-03	0.43306
301	0.90530E-02-0.42616		0.99605E-03	0.42625
302	0.27303E-01-0.42649		0.95727E-03	0.42737
303	0.21231E-01-0.42630		0.97023E-03	0.42683
304	0.15189E-01-0.42627		0.98311E-03	0.42654
305	0.29569E-01-0.36454		0.10002E-02	0.36574
306	0.24348E-01-0.36387		0.10131E-02	0.36468
307	0.19168E-01-0.36280		0.10261E-02	0.36331
310	0.71393E-01-0.47008		0.82336E-03	0.47547
311	0.77565E-01-0.47462		0.80881E-03	0.48092
314	0.69622E-01-0.33811		0.91218E-03	0.34521
315	0.73375E-01-0.33775		0.90017E-03	0.34562
316	0.72862E-01-0.35001		0.88684E-03	0.35752
317	0.72836E-01-0.34730		0.88933E-03	0.35485

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
318	0.72825E-01-0.34465		0.89183E-03	0.35226
319	0.72890E-01-0.34216		0.89433E-03	0.34984
320	0.68822E-01-0.35187		0.89960E-03	0.35854
321	0.68915E-01-0.34849		0.90234E-03	0.35524
322	0.69030E-01-0.34533		0.90508E-03	0.35216
323	0.69206E-01-0.34235		0.90781E-03	0.34928
324	0.59803E-01-0.35556		0.92557E-03	0.36056
325	0.59869E-01-0.35111		0.92886E-03	0.35618
326	0.59961E-01-0.34680		0.93218E-03	0.35195
327	0.60060E-01-0.34261		0.93553E-03	0.34784
328	0.54863E-01-0.35755		0.93859E-03	0.36173
329	0.54874E-01-0.35264		0.94215E-03	0.35689

330	0.54903E-01-0.34786	0.94572E-03	0.35216
331	0.54901E-01-0.34311	0.94936E-03	0.34748
332	0.49841E-01-0.35959	0.95135E-03	0.36303
333	0.49796E-01-0.35435	0.95510E-03	0.35784
334	0.49764E-01-0.34921	0.95884E-03	0.35274
335	0.49728E-01-0.34407	0.96266E-03	0.34764
336	0.44795E-01-0.36168	0.96376E-03	0.36445
337	0.44704E-01-0.35622	0.96762E-03	0.35902
338	0.44637E-01-0.35086	0.97145E-03	0.35369
339	0.44569E-01-0.34551	0.97532E-03	0.34837
340	0.39733E-01-0.36381	0.97573E-03	0.36598
341	0.39634E-01-0.35824	0.97961E-03	0.36043
342	0.39582E-01-0.35278	0.98342E-03	0.35499
343	0.39532E-01-0.34733	0.98722E-03	0.34957
344	0.26212E-01-0.39615	0.98484E-03	0.39702
345	0.26479E-01-0.39022	0.98897E-03	0.39112
346	0.26885E-01-0.38424	0.99267E-03	0.38519
347	0.27424E-01-0.37822	0.99590E-03	0.37922
348	0.18437E-01-0.39618	0.10019E-02	0.39661
349	0.18777E-01-0.39022	0.10060E-02	0.39067
350	0.19407E-01-0.38423	0.10095E-02	0.38472
351	0.20329E-01-0.37825	0.10121E-02	0.37880
352	0.10661E-01-0.39623	0.10191E-02	0.39637
353	0.11060E-01-0.39024	0.10232E-02	0.39040
354	0.11893E-01-0.38425	0.10262E-02	0.38443

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
355	0.13172E-01-0.37827		0.10282E-02	0.37850
356	0.27372E-01-0.43309		0.95196E-03	0.43396
357	0.27436E-01-0.43960		0.94664E-03	0.44045
358	0.27506E-01-0.44602		0.94135E-03	0.44687
359	0.21413E-01-0.43254		0.96497E-03	0.43307
360	0.21598E-01-0.43866		0.95974E-03	0.43919
361	0.78207E-01-0.44724		0.82352E-03	0.45403
362	0.72392E-01-0.44526		0.83837E-03	0.45111
363	0.78223E-01-0.45197		0.82070E-03	0.45869
364	0.72260E-01-0.45029		0.83506E-03	0.45605
365	0.78231E-01-0.45679		0.81789E-03	0.46344
366	0.72110E-01-0.45557		0.83175E-03	0.46124
367	0.78161E-01-0.46178		0.81508E-03	0.46835
368	0.71897E-01-0.46104		0.82845E-03	0.46661
369	0.61030E-01-0.44084		0.86865E-03	0.44504
370	0.55485E-01-0.43838		0.88405E-03	0.44188
371	0.49991E-01-0.43574		0.89938E-03	0.43860
372	0.44509E-01-0.43292		0.91455E-03	0.43521
373	0.38984E-01-0.42992		0.92950E-03	0.43168
374	0.60807E-01-0.44679		0.86443E-03	0.45090
375	0.55208E-01-0.44466		0.87950E-03	0.44807
376	0.49693E-01-0.44229		0.89456E-03	0.44507
377	0.44218E-01-0.43967		0.90952E-03	0.44189
378	0.38759E-01-0.43681		0.92431E-03	0.43852
379	0.60560E-01-0.45286		0.86023E-03	0.45689
380	0.54927E-01-0.45102		0.87498E-03	0.45435
381	0.49404E-01-0.44887		0.88977E-03	0.45158
382	0.43949E-01-0.44641		0.90452E-03	0.44857
383	0.38555E-01-0.44364		0.91911E-03	0.44531
384	0.60320E-01-0.45902		0.85606E-03	0.46296
385	0.54696E-01-0.45737		0.87052E-03	0.46063
386	0.49150E-01-0.45539		0.88505E-03	0.45804
387	0.43718E-01-0.45310		0.89955E-03	0.45520

```

388 0.38385E-01-0.45041      0.91393E-03 0.45204
389 0.25761E-01-0.40202      0.98101E-03 0.40285
390 0.18381E-01-0.40207      0.99710E-03 0.40249
391 0.10624E-01-0.40216      0.10141E-02 0.40231

```

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
392	0.25475E-01-0.40781		0.97674E-03	0.40861
393	0.18604E-01-0.40790		0.99162E-03	0.40833
394	0.10994E-01-0.40800		0.10082E-02	0.40814
395	0.25378E-01-0.41360		0.97198E-03	0.41438
396	0.19104E-01-0.41357		0.98549E-03	0.41402
397	0.11770E-01-0.41373		0.10013E-02	0.41389
398	0.29500E-01-0.35026		0.10107E-02	0.35151
399	0.29495E-01-0.35511		0.10072E-02	0.35634
400	0.29507E-01-0.35999		0.10037E-02	0.36120
401	0.24322E-01-0.35530		0.10198E-02	0.35614
402	0.10642	-0.36978	0.24877E-01	0.38559
403	0.24347E-01-0.35952		0.10164E-02	0.36034
405	0.16798E-01-0.43423		0.97334E-03	0.43456
406	0.10583	-0.36527	0.21841E-01	0.38092
407	0.19435E-01-0.35911		0.10286E-02	0.35963
408	0.64821E-01-0.22505		-0.79667E-03	0.23420
409	0.64860E-01-0.22475		0.25188E-02	0.23394
410	0.10273	-0.36177	0.14735E-01	0.37636
412	0.61514E-01-0.22303		-0.19667E-01	0.23219
413	0.61545E-01-0.22273		0.21409E-01	0.23206
414	0.97028E-01-0.35777		0.74928E-02	0.37077
415	0.60682E-01-0.20958		0.20987E-01	0.21920
416	0.60570E-01-0.20991		-0.19245E-01	0.21932
418	0.90942E-01-0.35464		0.29126E-02	0.36613
420	0.64035E-01-0.21057		-0.21985E-02	0.22011
421	0.64144E-01-0.21025		0.39206E-02	0.21985
422	0.86120E-01-0.35177		0.98645E-03	0.36216
423	0.60884E-01-0.21179		0.21056E-01	0.22137
424	0.60791E-01-0.21211		-0.19314E-01	0.22150
426	0.84161E-01-0.35132		0.78280E-03	0.36126
427	0.61336E-01-0.21841		0.21130E-01	0.22784
428	0.61286E-01-0.21872		-0.19388E-01	0.22797
430	0.86125E-01-0.35172		0.57846E-03	0.36211
434	0.90952E-01-0.35454		-0.13500E-02	0.36602
438	0.97045E-01-0.35760		-0.59353E-02	0.37058
442	0.10274	-0.36167	-0.13181E-01	0.37621
446	0.10585	-0.36518	-0.20287E-01	0.38075

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
450	0.10643	-0.36969	-0.23326E-01	0.38541
454	0.10700	-0.37627	-0.20174E-01	0.39171
458	0.11007	-0.38245	-0.13081E-01	0.39819
462	0.11566	-0.38582	-0.59353E-02	0.40283
466	0.12164	-0.38861	-0.13891E-02	0.40720
470	0.12637	-0.38926	0.53424E-03	0.40926
474	0.12826	-0.39024	0.76183E-03	0.41078
478	0.12637	-0.38931	0.98985E-03	0.40931

482	0.12164	-0.38873	0.29142E-02	0.40732
486	0.11565	-0.38601	0.74608E-02	0.40303
490	0.11006	-0.38256	0.14611E-01	0.39835
494	0.10699	-0.37636	0.21715E-01	0.39187
501	0.78327E-01	-0.36150	0.19485E-01	0.37040
502	0.10719	-0.35883	0.27000E-01	0.37548
503	0.80922E-01	-0.35165	0.10357E-01	0.36099
504	0.92630E-01	-0.34154	0.91582E-02	0.35400
505	0.76763E-01	-0.34913	0.85691E-03	0.35747
506	0.84444E-01	-0.34835	0.78850E-03	0.35844
507	0.80949E-01	-0.35153	-0.86437E-02	0.36084
508	0.92657E-01	-0.34142	-0.75798E-02	0.35385
509	0.78353E-01	-0.36138	-0.17805E-01	0.37021
510	0.10722	-0.35871	-0.25454E-01	0.37526
511	0.75759E-01	-0.40131	-0.84494E-02	0.40848
512	0.12142	-0.39069	-0.75731E-02	0.40919
513	0.82881E-01	-0.41150	0.82491E-03	0.41977
514	0.13049	-0.40265	0.75792E-03	0.42326
515	0.75733E-01	-0.40142	0.10099E-01	0.40863
516	0.12139	-0.39080	0.90902E-02	0.40933
521	0.77852E-01	-0.23108	0.23018E-01	0.24493
523	0.81574E-01	-0.25598	0.26852E-01	0.27000
525	0.74151E-01	-0.23260	0.26951E-01	0.24562
531	0.77925E-01	-0.23079	-0.21338E-01	0.24452
533	0.81646E-01	-0.25570	-0.25188E-01	0.26960
535	0.74222E-01	-0.23228	-0.25255E-01	0.24516
536	0.77871E-01	-0.21247	-0.23441E-01	0.22750
537	0.77782E-01	-0.21280	0.25122E-01	0.22796
541	-0.12109E-01	-0.47305	0.37239	0.60216

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
542	-0.12015E-01	-0.47265	-0.37030	0.60055
543	0.28615E-02	-0.40645	0.34824	0.53523
544	0.29693E-02	-0.40600	-0.34616	0.53355
545	-0.10512E-01	-0.44505	0.34808	0.56510
546	-0.10404E-01	-0.44461	-0.34605	0.56351
547	0.40553E-01	-0.38983	0.18255	0.43236
548	0.40667E-01	-0.38938	-0.18065	0.43117
549	0.36971E-01	-0.41580	0.18323	0.45588
550	0.37085E-01	-0.41536	-0.18136	0.45474
551	0.33407E-01	-0.43417	0.18237	0.47210
552	0.33521E-01	-0.43372	-0.18053	0.47099
553	0.35933E-02	-0.34315	0.34519	0.48675
554	0.36756E-02	-0.34280	-0.34311	0.48503
555	-0.11083E-01	-0.38176	0.34503	0.51470
556	-0.11000E-01	-0.38142	-0.34300	0.51308
557	0.38440E-01	-0.31984	0.18408	0.37103
558	0.38524E-01	-0.31949	-0.18219	0.36980
559	0.37039E-01	-0.33511	0.18330	0.38376
560	0.37123E-01	-0.33477	-0.18143	0.38258
561	0.35646E-01	-0.35846	0.18393	0.40447
562	0.35731E-01	-0.35812	-0.18209	0.40334
563	0.92804E-01	-0.36064	0.19312E-01	0.37289
564	0.79404E-01	-0.34876	0.82274E-03	0.35769
565	0.92831E-01	-0.36052	-0.17698E-01	0.37270
566	0.11152	-0.40662	0.79182E-03	0.42164
567	0.92718E-01	-0.36800	0.19307E-01	0.38000
568	0.79404E-01	-0.34983	0.81639E-03	0.35873
569	0.92736E-01	-0.36791	-0.17693E-01	0.37983
570	0.11152	-0.38887	0.79460E-03	0.40454

```

571  0.91336E-01-0.35132    -0.36954E-03  0.36300
572  0.91353E-01-0.35123     0.20027E-02  0.36292
573  0.94035E-01-0.38886     0.21251E-02  0.40008
574  0.94017E-01-0.38895    -0.53537E-03  0.40015
575  0.77734E-01-0.36800     0.19434E-01  0.37662
576  0.76764E-01-0.34992     0.85288E-03  0.35824
577  0.77751E-01-0.36791    -0.17753E-01  0.37645
578  0.82827E-01-0.38860     0.83047E-03  0.39733

```

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
579	0.81747E-01-0.35256		0.46265E-02	0.36194
580	0.81765E-01-0.35247		-0.29208E-02	0.36184
581	0.73926E-01-0.39010		-0.21519E-02	0.39705
582	0.73910E-01-0.39019		0.38126E-02	0.39715
583	0.10570	-0.35193	-0.10257E-02	0.36746
584	0.10571	-0.35184	0.25862E-02	0.36738
585	0.10961	-0.38946	0.17422E-02	0.40459
586	0.10958	-0.38954	-0.22412E-03	0.40466
601	0.77932E-01-0.29668		0.20413E-01	0.30742
602	0.11049	-0.27341	0.23992E-01	0.29587
603	0.94174E-01-0.27124		0.31226E-01	0.28882
604	0.94235E-01-0.27100		-0.29616E-01	0.28844
606	0.98665E-01-0.29971		0.17509E-01	0.31602
607	0.82902E-01-0.26020		0.20808E-01	0.27388
608	0.82993E-01-0.25987		-0.19161E-01	0.27347
609	0.84885E-01-0.34547		0.16650E-01	0.35614
610	0.85508E-01-0.33203		0.60723E-02	0.34292
611	0.10515	-0.29889	0.20419E-01	0.31750
612	0.10524	-0.29856	-0.18842E-01	0.31712
614	0.84241E-01-0.34600		0.93243E-03	0.35611
617	0.85483E-01-0.34220		0.96114E-02	0.35285
618	0.86754E-01-0.34517		-0.42669E-03	0.35590
622	0.85811E-01-0.34955		0.21617E-03	0.35993
625	0.76739E-01-0.35053		0.87184E-03	0.35884
626	0.84629E-01-0.34575		0.79495E-03	0.35596
630	0.85825E-01-0.34949		0.13708E-02	0.35988
633	0.85511E-01-0.34209		-0.78749E-02	0.35270
634	0.86781E-01-0.34505		0.20107E-02	0.35580
638	0.84278E-01-0.34584		0.64073E-03	0.35597
641	0.84933E-01-0.34527		-0.14936E-01	0.35587
642	0.85557E-01-0.33183		-0.45103E-02	0.34271
646	0.98718E-01-0.29950		-0.15962E-01	0.31575
649	0.77986E-01-0.29644		-0.18733E-01	0.30710
650	0.11055	-0.27318	-0.22459E-01	0.29555
651	0.11906	-0.68701E-01	0.77248E-03	0.13746
654	0.12228	-0.32373	-0.16006E-01	0.34642
657	0.70846E-01-0.39381		-0.14821E-01	0.40041

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=      0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
658	0.13534	-0.38018	-0.45823E-02	0.40358
662	0.13662	-0.41150	0.60507E-03	0.43358
665	0.71622E-01-0.42534		-0.84063E-02	0.43141
666	0.13413	-0.42781	0.20259E-02	0.44835

670	0.13509	-0.43828	0.13510E-02	0.45862
673	0.84058E-01	-0.44514	0.81101E-03	0.45301
674	0.13627	-0.44056	0.73505E-03	0.46116
678	0.13507	-0.43833	0.12318E-03	0.45867
681	0.71595E-01	-0.42545	0.10034E-01	0.43155
682	0.13410	-0.42793	-0.54777E-03	0.44845
686	0.13658	-0.41165	0.88399E-03	0.43372
689	0.70798E-01	-0.39401	0.16470E-01	0.40066
690	0.13529	-0.38038	0.60827E-02	0.40377
694	0.12223	-0.32394	0.17522E-01	0.34668
701	0.77772E-01	-0.24644	0.25655E-01	0.25969
702	0.11705	-0.27295	0.11046E-01	0.29720
703	0.75612E-01	-0.22343	0.26065E-01	0.23732
704	0.10539	-0.27858	0.15911E-01	0.29827
705	0.77734E-01	-0.29115	0.26756E-01	0.30253
706	0.92580E-01	-0.28553	0.12138E-01	0.30041
708	0.89017E-01	-0.30672	0.74485E-02	0.31946
709	0.89371E-01	-0.32273	0.97730E-02	0.33502
710	0.85520E-01	-0.32390	0.29235E-02	0.33501
712	0.77672E-01	-0.33787	-0.37657E-02	0.34671
713	0.98072E-01	-0.35604	0.12220E-01	0.36950
714	0.77154E-01	-0.34290	-0.90141E-03	0.35148
716	0.67823E-01	-0.35433	-0.10116E-01	0.36090
717	0.93206E-01	-0.35607	0.56276E-02	0.36811
718	0.77295E-01	-0.36152	-0.48996E-02	0.36972
720	0.79491E-01	-0.36437	-0.42028E-02	0.37296
721	0.84565E-01	-0.36445	0.24977E-02	0.37414
722	0.84775E-01	-0.35606	-0.22263E-02	0.36602
724	0.84495E-01	-0.35463	-0.77032E-03	0.36456
725	0.75803E-01	-0.33812	0.88829E-03	0.34651
726	0.85053E-01	-0.34701	0.79570E-03	0.35728
728	0.84506E-01	-0.35459	0.23602E-02	0.36453
729	0.84588E-01	-0.36436	-0.72427E-03	0.37405

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
730	0.84798E-01	-0.35596	0.38146E-02	0.36594
732	0.79524E-01	-0.36424	0.57872E-02	0.37286
733	0.93251E-01	-0.35589	-0.38629E-02	0.36793
734	0.77339E-01	-0.36134	0.64804E-02	0.36958
736	0.67876E-01	-0.35412	0.11690E-01	0.36075
737	0.98135E-01	-0.35579	-0.10470E-01	0.36923
738	0.77217E-01	-0.34265	0.24688E-02	0.35125
740	0.77742E-01	-0.33759	0.53257E-02	0.34647
741	0.89450E-01	-0.32243	-0.80429E-02	0.33470
742	0.85599E-01	-0.32359	-0.13746E-02	0.33473
744	0.89099E-01	-0.30640	-0.59080E-02	0.31915
745	0.77822E-01	-0.29082	-0.25047E-01	0.30209
746	0.92669E-01	-0.28519	-0.10613E-01	0.30006
747	0.75702E-01	-0.22311	-0.24368E-01	0.23686
748	0.10548	-0.27824	-0.14397E-01	0.29791
749	0.77864E-01	-0.24610	-0.23974E-01	0.25923
750	0.11715	-0.27261	-0.95444E-02	0.29687
751	0.80037E-01	-0.24719	-0.24290E-01	0.26096
752	0.12883	-0.29752	-0.14285E-01	0.32453
753	0.77971E-01	-0.32949	-0.24954E-01	0.33951
754	0.14165	-0.32373	-0.10396E-01	0.35352
756	0.14518	-0.36273	-0.55690E-02	0.39075
757	0.66746E-01	-0.39648	-0.83560E-02	0.40215
758	0.14862	-0.39762	-0.98766E-03	0.42449
760	0.15653	-0.42659	0.59303E-02	0.45444

761	0.58376E-01	-0.46004	-0.11098E-01	0.46387
762	0.15690	-0.44663	0.30252E-02	0.47339
764	0.16618	-0.46922	0.12212E-01	0.49793
765	0.64093E-01	-0.48198	-0.43758E-02	0.48624
766	0.15664	-0.48740	0.69562E-02	0.51200
768	0.15433	-0.49673	0.62183E-02	0.52019
769	0.74028E-01	-0.50340	-0.75552E-03	0.50882
770	0.14891	-0.49485	0.41907E-02	0.51678
772	0.14902	-0.49502	0.24866E-02	0.51697
773	0.85205E-01	-0.47999	0.79429E-03	0.48750
774	0.14852	-0.48925	0.70337E-03	0.51129
776	0.14900	-0.49507	-0.10783E-02	0.51700

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
777	0.74006E-01	-0.50349	0.23471E-02	0.50891
778	0.14888	-0.49494	-0.27808E-02	0.51685
780	0.15430	-0.49686	-0.48038E-02	0.52028
781	0.64049E-01	-0.48215	0.59752E-02	0.48642
782	0.15660	-0.48757	-0.55371E-02	0.51213
784	0.16613	-0.46943	-0.10786E-01	0.49807
785	0.58313E-01	-0.46029	0.12711E-01	0.46414
786	0.15684	-0.44687	-0.15913E-02	0.47359
788	0.15646	-0.42686	-0.44869E-02	0.45466
789	0.66668E-01	-0.39678	0.99871E-02	0.40246
790	0.14854	-0.39791	0.24410E-02	0.42474
792	0.14510	-0.36305	0.70339E-02	0.39103
793	0.77884E-01	-0.32982	0.26606E-01	0.33993
794	0.14156	-0.32406	0.11873E-01	0.35383
795	0.79948E-01	-0.24753	0.25954E-01	0.26141
796	0.12874	-0.29785	0.15774E-01	0.32487
797	0.94057E-01	-0.25422	0.17061E-01	0.27160
798	0.94149E-01	-0.25388	-0.15451E-01	0.27121
801	0.94614E-01	-0.35391	0.17891E-01	0.36678
802	0.12766	-0.37801	-0.33821E-01	0.40042
804	0.11594	-0.36036	-0.17321E-01	0.37894
805	0.10328	-0.36954	0.25454E-01	0.38454
806	0.10776	-0.37616	-0.20572E-01	0.39183
808	0.10027	-0.35631	-0.18258E-01	0.37060
809	0.99017E-01	-0.34273	0.11573E-01	0.35693
810	0.91111E-01	-0.36602	-0.21447E-01	0.37780
812	0.79354E-01	-0.36168	-0.17602E-01	0.37070
813	0.11129	-0.38387	0.14770E-01	0.39995
814	0.61673E-01	-0.39625	-0.34251E-01	0.40248
816	0.64710E-01	-0.38595	-0.27973E-01	0.39234
817	0.89782E-01	-0.38907	-0.17428E-02	0.39930
818	0.71101E-01	-0.40089	-0.18441E-01	0.40756
820	0.73475E-01	-0.38681	-0.13515E-01	0.39396
821	0.93385E-01	-0.38154	0.24485E-02	0.39281
822	0.88250E-01	-0.39033	-0.49638E-02	0.40021
824	0.75902E-01	-0.37719	-0.40153E-02	0.38477
825	0.74805E-01	-0.37051	0.86487E-03	0.37799

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
------	----	----	----	------

826	0.84767E-01-0.38340	0.78695E-03	0.39266
828	0.75918E-01-0.37713	0.55891E-02	0.38473
829	0.93417E-01-0.38142	-0.72259E-03	0.39269
830	0.88281E-01-0.39020	0.65339E-02	0.40012
832	0.73521E-01-0.38663	0.15081E-01	0.39385
833	0.89843E-01-0.38883	0.34567E-02	0.39909
834	0.71161E-01-0.40065	0.20000E-01	0.40741
836	0.64783E-01-0.38566	0.29525E-01	0.39218
837	0.11138 -0.38353	-0.13076E-01	0.39959
838	0.61762E-01-0.39591	0.35791E-01	0.40229
840	0.79451E-01-0.36131	0.19136E-01	0.37043
841	0.99126E-01-0.34232	-0.99045E-02	0.35652
842	0.91224E-01-0.36562	0.22960E-01	0.37752
844	0.10039 -0.35587	0.19765E-01	0.37029
845	0.10340 -0.36908	-0.23816E-01	0.38403
846	0.10789 -0.37571	0.22055E-01	0.39151
848	0.11606 -0.35990	0.18792E-01	0.37862
849	0.94741E-01-0.35345	-0.16287E-01	0.36629
850	0.12779 -0.37755	0.35273E-01	0.40014
852	0.13870 -0.38615	0.18956E-01	0.41074
853	0.86099E-01-0.42158	-0.23777E-01	0.43094
854	0.14772 -0.42827	0.22591E-01	0.45360
856	0.15435 -0.43276	0.20314E-01	0.45991
857	0.90377E-01-0.44354	-0.10073E-01	0.45277
858	0.16451 -0.46691	0.24105E-01	0.49563
860	0.17522 -0.48292	0.20149E-01	0.51412
861	0.78117E-01-0.52551	-0.13475E-01	0.53146
862	0.19378 -0.53807	0.37142E-01	0.57310
864	0.18934 -0.54241	0.30581E-01	0.57533
865	0.10023 -0.56038	0.36402E-02	0.56928
866	0.18388 -0.57232	0.21122E-01	0.60151
868	0.18035 -0.56699	0.15980E-01	0.59520
869	0.97304E-01-0.57040	-0.86840E-03	0.57864
870	0.16620 -0.57936	0.71085E-02	0.60277
872	0.17768 -0.56866	0.58677E-02	0.59581
873	0.11707 -0.56462	0.73875E-03	0.57663
874	0.17004 -0.57806	0.66213E-03	0.60255

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
876	0.17767	-0.56873	-0.45394E-02	0.59585
877	0.97272E-01-0.57052		0.23497E-02	0.57875
878	0.16616	-0.57948	-0.57801E-02	0.60286
880	0.18031	-0.56717	-0.14643E-01	0.59532
881	0.10017	-0.56061	-0.21467E-02	0.56949
882	0.18382	-0.57255	-0.19782E-01	0.60166
884	0.18927	-0.54269	-0.29228E-01	0.57549
885	0.78029E-01-0.52584		0.14988E-01	0.53181
886	0.19369	-0.53840	-0.35781E-01	0.57330
888	0.17512	-0.48329	-0.18773E-01	0.51438
889	0.90269E-01-0.44394		0.11611E-01	0.45318
890	0.16440	-0.46731	-0.22718E-01	0.49591
892	0.15423	-0.43318	-0.18910E-01	0.46021
893	0.85978E-01-0.42203		0.25346E-01	0.43144
894	0.14760	-0.42872	-0.21173E-01	0.45391
896	0.13857	-0.38661	-0.17518E-01	0.41107
901	0.11092	-0.46080	-0.86633E-02	0.47405
902	0.14110	-0.46064	-0.61884E-01	0.48573
904	0.12817	-0.44420	-0.61294E-01	0.46636
905	0.11421	-0.42809	-0.13974E-02	0.44307
906	0.11763	-0.43187	-0.30958E-01	0.44868

908	0.91489E-01	-0.43093	-0.55269E-01	0.44399
909	0.11118	-0.43406	-0.13547E-01	0.44828
910	0.81066E-01	-0.44052	-0.45042E-01	0.45018
912	0.51043E-01	-0.45912	-0.63480E-01	0.46629
913	0.98809E-01	-0.47886	-0.17385E-01	0.48925
914	0.30576E-01	-0.49713	-0.87708E-01	0.50574
916	0.42626E-01	-0.46563	-0.80338E-01	0.47442
917	0.85846E-01	-0.44422	-0.11152E-01	0.45258
918	0.73785E-01	-0.44937	-0.49545E-01	0.45807
920	0.65009E-01	-0.42701	-0.45867E-01	0.43435
921	0.89512E-01	-0.40384	-0.95464E-03	0.41364
922	0.10623	-0.40628	-0.19727E-01	0.42040
924	0.68372E-01	-0.39503	-0.15183E-01	0.40119
925	0.72650E-01	-0.38283	0.84442E-03	0.38967
926	0.10636	-0.38558	0.77401E-03	0.39998
928	0.68392E-01	-0.39495	0.16731E-01	0.40118

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
929	0.89553E-01	-0.40368	0.26382E-02	0.41351
930	0.10627	-0.40613	0.21270E-01	0.42034
932	0.65068E-01	-0.42678	0.47404E-01	0.43431
933	0.85924E-01	-0.44392	0.12820E-01	0.45234
934	0.73862E-01	-0.44907	0.51072E-01	0.45796
936	0.42718E-01	-0.46526	0.81855E-01	0.47434
937	0.98924E-01	-0.47843	0.19027E-01	0.48892
938	0.30692E-01	-0.49669	0.89202E-01	0.50557
940	0.51155E-01	-0.45866	0.64983E-01	0.46605
941	0.11132	-0.43355	0.15159E-01	0.44787
942	0.81206E-01	-0.44003	0.46505E-01	0.44987
944	0.91630E-01	-0.43038	0.56737E-01	0.44367
945	0.11437	-0.42753	0.29676E-02	0.44257
946	0.11779	-0.43132	0.32385E-01	0.44828
948	0.12833	-0.44362	0.62709E-01	0.46604
949	0.11108	-0.46022	0.10192E-01	0.47354
950	0.14127	-0.46006	0.63276E-01	0.48540
952	0.15312	-0.47693	0.62950E-01	0.50484
953	0.10786	-0.49412	0.31953E-02	0.50576
954	0.16478	-0.49795	0.33246E-01	0.52556
956	0.18973	-0.52797	0.57561E-01	0.56397
957	0.11118	-0.56195	0.15282E-01	0.57305
958	0.20142	-0.56850	0.48324E-01	0.60506
960	0.22991	-0.61307	0.66578E-01	0.65813
961	0.12391	-0.65849	0.18679E-01	0.67031
962	0.25168	-0.67763	0.91711E-01	0.72865
964	0.23714	-0.66358	0.83457E-01	0.70960
965	0.13696	-0.66021	0.11996E-01	0.67438
966	0.20708	-0.66543	0.52728E-01	0.69890
968	0.21405	-0.65367	0.48674E-01	0.68955
969	0.13299	-0.64127	0.18188E-02	0.65491
970	0.17339	-0.64373	0.22001E-01	0.66704
972	0.21024	-0.63571	0.17087E-01	0.66979
973	0.15067	-0.62712	0.68341E-03	0.64497
974	0.17345	-0.62995	0.61471E-03	0.65339
976	0.21022	-0.63579	-0.15852E-01	0.66983
977	0.13295	-0.64142	-0.44654E-03	0.65505

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
978	0.17335	-0.64388	-0.20766E-01	0.66713
980	0.21399	-0.65389	-0.47429E-01	0.68965
981	0.13688	-0.66051	-0.10608E-01	0.67462
982	0.20700	-0.66572	-0.51477E-01	0.69906
984	0.23704	-0.66393	-0.82191E-01	0.70975
985	0.12380	-0.65890	-0.17265E-01	0.67066
986	0.25157	-0.67804	-0.90435E-01	0.72884
988	0.22978	-0.61352	-0.65282E-01	0.65839
989	0.11104	-0.56246	-0.13835E-01	0.57348
990	0.20128	-0.56901	-0.47013E-01	0.60539
992	0.18958	-0.52850	-0.56228E-01	0.56429
993	0.10771	-0.49468	-0.17088E-02	0.50627
994	0.16463	-0.49852	-0.31896E-01	0.52596
996	0.15296	-0.47750	-0.61576E-01	0.50517
1001	0.13768	-0.49597	-0.51420E-01	0.51729
1002	0.15655	-0.49494	-0.60250E-01	0.52259
1003	0.13108	-0.48592	-0.53768E-01	0.50616
1004	0.13789	-0.48523	-0.87433E-01	0.51197
1005	0.12862	-0.45902	-0.33147E-01	0.47785
1006	0.12702	-0.45878	-0.30509E-01	0.47702
1008	0.83661E-01	-0.48510	-0.87598E-01	0.49999
1009	0.10669	-0.49979	-0.59657E-01	0.51452
1010	0.74010E-01	-0.49971	-0.63819E-01	0.50918
1012	0.12879E-01	-0.57160	-0.12033	0.58427
1013	0.36302E-01	-0.60809	-0.10456	0.61808
1014	-0.15437E-01	-0.62022	-0.15932	0.64054
1016	0.11385E-01	-0.56970	-0.14346	0.58759
1017	0.69179E-01	-0.49137	-0.39549E-01	0.49779
1018	0.79931E-01	-0.49122	-0.81465E-01	0.50431
1020	0.60316E-01	-0.45309	-0.75795E-01	0.46333
1021	0.10256	-0.39665	-0.97069E-02	0.40981
1022	0.13570	-0.39622	-0.31310E-01	0.41998
1024	0.76769E-01	-0.38325	-0.23517E-01	0.39157
1025	0.10230	-0.35733	0.79539E-03	0.37168
1026	0.14441	-0.35684	0.75203E-03	0.38495
1028	0.76792E-01	-0.38316	0.25022E-01	0.39158
1029	0.10261	-0.39647	0.11292E-01	0.40969

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1030	0.13574	-0.39604	0.32808E-01	0.41994
1032	0.60385E-01	-0.45282	0.77288E-01	0.46332
1033	0.69271E-01	-0.49101	0.41115E-01	0.49757
1034	0.80021E-01	-0.49086	0.82944E-01	0.50421
1036	0.11495E-01	-0.56926	0.14493	0.58753
1037	0.36439E-01	-0.60758	0.10609	0.61785
1038	-0.15309E-01	-0.61971	0.16077	0.64041
1040	0.13017E-01	-0.57104	0.12177	0.58402
1041	0.10686	-0.49918	0.61151E-01	0.51414
1042	0.74181E-01	-0.49910	0.65215E-01	0.50877
1044	0.83826E-01	-0.48445	0.89011E-01	0.49964
1045	0.12881	-0.45834	0.34598E-01	0.47735
1046	0.12721	-0.45810	0.31864E-01	0.47650
1047	0.13127	-0.48523	0.55196E-01	0.50570
1048	0.13807	-0.48454	0.88783E-01	0.51159
1049	0.13787	-0.49527	0.52826E-01	0.51681
1050	0.15674	-0.49424	0.61570E-01	0.52214

1051	0.14457	-0.52537	0.55732E-01	0.54774
1052	0.17363	-0.52468	0.89226E-01	0.55982
1053	0.14704	-0.53861	0.35488E-01	0.55945
1054	0.18642	-0.53839	0.33200E-01	0.57071
1056	0.22797	-0.60211	0.90437E-01	0.65014
1057	0.16941	-0.65407	0.62775E-01	0.67856
1058	0.23975	-0.65398	0.67861E-01	0.69984
1060	0.29887	-0.75769	0.12443	0.82395
1061	0.24085	-0.82524	0.10810	0.86644
1062	0.32869	-0.83759	0.16407	0.91461
1064	0.29863	-0.80812	0.14757	0.87408
1065	0.20630	-0.75030	0.41060E-01	0.77923
1066	0.23117	-0.75015	0.85115E-01	0.78956
1068	0.24795	-0.72423	0.78770E-01	0.76954
1069	0.17125	-0.68019	0.10648E-01	0.70150
1070	0.17326	-0.67976	0.33568E-01	0.70230
1072	0.23038	-0.67044	0.25337E-01	0.70937
1073	0.17155	-0.64880	0.60627E-03	0.67110
1074	0.16434	-0.64832	0.56370E-03	0.66883
1076	0.23035	-0.67053	-0.24203E-01	0.70941

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1077	0.17120	-0.68037	-0.94292E-02	0.70165
1078	0.17321	-0.67994	-0.32434E-01	0.70241
1080	0.24788	-0.72450	-0.77622E-01	0.76965
1081	0.20621	-0.75065	-0.39822E-01	0.77948
1082	0.23108	-0.75050	-0.83962E-01	0.78974
1084	0.29852	-0.80854	-0.14640	0.87423
1085	0.24072	-0.82574	-0.10683	0.86672
1086	0.32856	-0.83808	-0.16288	0.91480
1088	0.29872	-0.75824	-0.12322	0.82422
1089	0.16925	-0.65467	-0.61467E-01	0.67898
1090	0.23958	-0.65459	-0.66637E-01	0.70023
1092	0.22779	-0.60275	-0.89185E-01	0.65050
1093	0.14686	-0.53929	-0.34132E-01	0.55997
1094	0.18623	-0.53906	-0.31928E-01	0.57121
1095	0.14438	-0.52605	-0.54351E-01	0.54821
1096	0.17345	-0.52536	-0.87925E-01	0.56020
1101	0.16302	-0.48719	-0.48531E-01	0.51603
1102	0.17326	-0.48702	-0.48370E-01	0.51918
1103	0.14999	-0.49825	-0.62545E-01	0.52408
1104	0.15095	-0.49780	-0.97868E-01	0.52931
1105	0.14492	-0.45205	-0.28905E-01	0.47559
1106	0.14342	-0.45180	-0.22086E-01	0.47453
1108	0.89607E-01	-0.50869	-0.10803	0.52770
1109	0.10276	-0.52593	-0.84794E-01	0.54255
1110	0.81971E-01	-0.52578	-0.82795E-01	0.53853
1112	0.57265E-02	-0.62694	-0.16413	0.64809
1113	0.45460E-02	-0.65287	-0.16633	0.67374
1114	-0.16140E-01	-0.65313	-0.19134	0.68077
1116	-0.37433E-02	-0.61845	-0.18032	0.64421
1117	0.77184E-01	-0.50287	-0.72633E-01	0.51392
1118	0.87651E-01	-0.50281	-0.10155	0.52039
1120	0.67932E-01	-0.45295	-0.93620E-01	0.46748
1121	0.15169	-0.35299	-0.19291E-01	0.38468
1122	0.17563	-0.35280	-0.35827E-01	0.39572
1124	0.10634	-0.34273	-0.27289E-01	0.35989
1125	0.16885	-0.29288	0.75117E-03	0.33807
1126	0.19706	-0.29266	0.72791E-03	0.35282

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1128	0.10637	-0.34263	0.28747E-01	0.35991
1129	0.15174	-0.35278	0.20786E-01	0.38459
1130	0.17569	-0.35259	0.37276E-01	0.39569
1132	0.68011E-01	-0.45264	0.95064E-01	0.46748
1133	0.77288E-01	-0.50246	0.74107E-01	0.51374
1134	0.87754E-01	-0.50240	0.10298	0.52030
1136	-0.36192E-02	-0.61796	0.18174	0.64414
1137	0.46934E-02	-0.65229	0.16777	0.67353
1138	-0.15997E-01	-0.65255	0.19274	0.68061
1140	0.58844E-02	-0.62629	0.16552	0.64782
1141	0.10296	-0.52521	0.86170E-01	0.54210
1142	0.82171E-01	-0.52505	0.84118E-01	0.53806
1144	0.89804E-01	-0.50793	0.10937	0.52727
1145	0.14514	-0.45125	0.30233E-01	0.47498
1146	0.14365	-0.45100	0.23362E-01	0.47390
1147	0.15021	-0.49745	0.63853E-01	0.52354
1148	0.15117	-0.49700	0.99141E-01	0.52886
1149	0.16324	-0.48638	0.49819E-01	0.51546
1150	0.17349	-0.48621	0.49613E-01	0.51862
1151	0.17640	-0.54413	0.64779E-01	0.57566
1152	0.19363	-0.54368	0.99904E-01	0.58571
1153	0.18158	-0.54458	0.31944E-01	0.57494
1154	0.20355	-0.54432	0.25327E-01	0.58169
1156	0.25520	-0.64462	0.11164	0.70223
1157	0.22440	-0.70490	0.89149E-01	0.74511
1158	0.26544	-0.70475	0.87783E-01	0.75818
1160	0.33881	-0.84156	0.16856	0.92273
1161	0.32233	-0.90240	0.16996	0.97320
1162	0.36240	-0.90266	0.19566	0.99218
1164	0.34652	-0.89302	0.18383	0.97538
1165	0.24797	-0.80203	0.74798E-01	0.84282
1166	0.25672	-0.80198	0.10491	0.84857
1168	0.27253	-0.76585	0.96183E-01	0.81856
1169	0.17046	-0.67994	0.20336E-01	0.70128
1170	0.16534	-0.67975	0.37688E-01	0.70058
1172	0.23204	-0.67358	0.28832E-01	0.71302
1173	0.15263	-0.62865	0.53261E-03	0.64692

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1174	0.14309	-0.62842	0.50966E-03	0.64450
1176	0.23201	-0.67369	-0.27804E-01	0.71306
1177	0.17040	-0.68015	-0.19263E-01	0.70144
1178	0.16528	-0.67996	-0.36661E-01	0.70072
1180	0.27245	-0.76615	-0.95140E-01	0.81870
1181	0.24786	-0.80244	-0.73703E-01	0.84307
1182	0.25661	-0.80238	-0.10386	0.84879
1184	0.34639	-0.89351	-0.18276	0.97557
1185	0.32217	-0.90297	-0.16883	0.97348
1186	0.36225	-0.90323	-0.19457	0.99243
1188	0.33864	-0.84220	-0.16744	0.92304
1189	0.22420	-0.70559	-0.87971E-01	0.74556
1190	0.26525	-0.70544	-0.86650E-01	0.75863

1192	0.25500	-0.64535	-0.11047	0.70264
1193	0.18136	-0.54536	-0.30711E-01	0.57554
1194	0.20333	-0.54510	-0.24139E-01	0.58229
1195	0.17618	-0.54492	-0.63517E-01	0.57620
1196	0.19341	-0.54447	-0.98683E-01	0.58617
1201	0.13740	-1.0643	-0.10087E-03	1.0732
1202	0.13738	-1.0644	0.11196E-02	1.0733
1203	0.13639	-1.3523	-0.12010E-01	1.3592
1204	0.13637	-1.3524	0.12997E-01	1.3593
1210	0.13345	-1.1347	0.50626E-03	1.1425
1211	0.13310	-1.1347	-0.25607E-03	1.1425
1212	0.13310	-1.1347	0.12686E-02	1.1425
1215	0.12807	-1.1350	-0.10803E-02	1.1422
1216	0.12806	-1.1350	0.20955E-02	1.1422
1217	0.12891	-1.1454	-0.41175E-03	1.1527
1218	0.12890	-1.1455	0.14248E-02	1.1527
1219	0.13051	-1.1656	0.10614E-02	1.1729
1220	0.13050	-1.1657	-0.52456E-04	1.1729
1221	0.13243	-1.1891	0.20720E-02	1.1964
1222	0.13240	-1.1891	-0.10699E-02	1.1965
1223	0.13355	-1.2034	0.22180E-02	1.2108
1224	0.13355	-1.2034	-0.12161E-02	1.2108
1225	0.13581	-1.2315	0.15366E-02	1.2390
1226	0.13580	-1.2315	-0.54043E-03	1.2390

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1227	0.13875	-1.2679	-0.82547E-03	1.2755
1228	0.13874	-1.2679	0.18150E-02	1.2755
1229	0.13983	-1.2814	-0.19688E-02	1.2891
1230	0.13982	-1.2815	0.29562E-02	1.2891
1231	0.15141	-1.3628	-0.71140E-02	1.3712
1232	0.15140	-1.3629	0.80906E-02	1.3713
1233	0.16693	-1.4722	-0.68403E-02	1.4817
1234	0.16692	-1.4723	0.78057E-02	1.4817
1235	0.18141	-1.5742	-0.26259E-02	1.5846
1236	0.18136	-1.5743	0.35800E-02	1.5847
1237	0.18883	-1.6262	0.12802E-03	1.6372
1238	0.18882	-1.6263	0.82248E-03	1.6372
1239	0.19221	-1.6276	0.30263E-03	1.6389
1240	0.19220	-1.6277	0.64787E-03	1.6390
1241	0.19331	-1.6281	0.47525E-03	1.6396
1243	0.13203	-1.1350	-0.10272E-02	1.1426
1244	0.13202	-1.1350	0.20397E-02	1.1427
1245	0.12835	-1.2987	-0.33898E-03	1.3050
1246	0.12834	-1.2988	0.13304E-02	1.3051
1253	0.13516	-1.2910	-0.45100E-03	1.2980
1254	0.13515	-1.2910	0.14398E-02	1.2981
1255	0.13451	-1.2943	0.49438E-03	1.3013
1265	0.15829	-1.2094	0.49229E-03	1.2197
1266	0.45668E-01	-1.5167	0.49866E-03	1.5174
1270	0.10203	-1.2117	0.51071E-03	1.2160
1402	0.26977E-01-0.75541		0.10026	0.76251
1403	0.66358E-01-0.88168		0.44194E-01	0.88528
1404	0.97337E-01-0.98317		-0.73875E-03	0.98798
1405	0.11709	-1.0512	-0.30519E-01	1.0582
1406	0.12551	-1.0841	-0.43836E-01	1.0922
1407	0.12515	-1.0867	-0.42052E-01	1.0947
1408	0.12127	-1.0707	-0.29223E-01	1.0780
1409	0.12181	-1.0549	-0.12096E-01	1.0619
1412	0.26871E-01-0.75588		-0.98866E-01	0.76279

```

1413  0.66271E-01-0.88210      -0.42855E-01  0.88563
1414  0.97264E-01-0.98354      0.20263E-02  0.98834
1415  0.111703      -1.0516      0.31759E-01  1.0585

```

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1416	0.12546	-1.0844	0.45029E-01	1.0925
1417	0.12511	-1.0869	0.43201E-01	1.0949
1418	0.12124	-1.0709	0.30328E-01	1.0782
1419	0.12179	-1.0550	0.13158E-01	1.0621
1422	0.25309	-1.0224	0.98060E-01	1.0578
1423	0.18095	-1.1979	0.35855E-01	1.2120
1424	0.12063	-1.3442	-0.15175E-01	1.3497
1425	0.77812E-01	-1.4483	-0.50326E-01	1.4513
1426	0.55462E-01	-1.5038	-0.67604E-01	1.5064
1427	0.53883E-01	-1.5113	-0.67694E-01	1.5138
1428	0.70682E-01	-1.4781	-0.53968E-01	1.4807
1429	0.10077	-1.4181	-0.32491E-01	1.4220
1432	0.25297	-1.0229	-0.96897E-01	1.0581
1433	0.18085	-1.1983	-0.34712E-01	1.2124
1434	0.12055	-1.3446	0.16299E-01	1.3501
1435	0.77740E-01	-1.4486	0.51430E-01	1.4516
1436	0.55404E-01	-1.5041	0.68686E-01	1.5067
1437	0.53837E-01	-1.5116	0.68755E-01	1.5141
1438	0.70648E-01	-1.4783	0.55005E-01	1.4810
1439	0.10075	-1.4182	0.33504E-01	1.4222
1441	0.18402	-1.1217	0.15469E-02	1.1367
1442	0.18401	-1.1217	-0.57799E-03	1.1367
1443	0.18312	-1.2783	0.28652E-05	1.2913
1444	0.18312	-1.2783	0.95127E-03	1.2914
1450	0.24455	-1.1998	0.46024E-03	1.2245
2402	0.11037	-0.37019	0.30066E-01	0.38746
2406	0.10895	-0.36548	0.23821E-01	0.38212
2410	0.10396	-0.36167	0.12549E-01	0.37653
2414	0.10017	-0.35796	0.77403E-02	0.37179
2418	0.92502E-01	-0.35470	0.17689E-02	0.36657
2422	0.92548E-01	-0.35228	0.16798E-02	0.36423
2426	0.85795E-01	-0.35145	0.76539E-03	0.36177
2430	0.92518E-01	-0.35223	-0.14476E-03	0.36417
2434	0.92489E-01	-0.35460	-0.24187E-03	0.36646
2438	0.10042	-0.35782	-0.64195E-02	0.37170
2442	0.10395	-0.36156	-0.10896E-01	0.37636
2446	0.10896	-0.36539	-0.22211E-01	0.38194

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000      LOAD CASE=      0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
2450	0.11039	-0.37010	-0.28531E-01	0.38727
2454	0.11202	-0.37618	-0.20350E-01	0.39304
2458	0.11714	-0.38186	-0.86354E-02	0.39952
2462	0.11859	-0.38570	-0.67888E-02	0.40358
2466	0.12730	-0.38816	0.54465E-04	0.40850
2470	0.12592	-0.38931	-0.37052E-03	0.40917
2474	0.13417	-0.38977	0.74293E-03	0.41222
2478	0.12588	-0.38937	0.18628E-02	0.40921
2482	0.12726	-0.38828	0.14325E-02	0.40861

2486	0.11887	-0.38586	0.80277E-02	0.40383
2490	0.11710	-0.38198	0.10295E-01	0.39966
2494	0.11199	-0.37628	0.21973E-01	0.39320
2602	0.11404	-0.27405	0.26963E-01	0.29805
2606	0.86980E-01	-0.30045	0.24320E-01	0.31373
2610	0.82297E-01	-0.33251	0.10529E-01	0.34271
2614	0.84161E-01	-0.34634	0.33212E-02	0.35644
2618	0.88672E-01	-0.34563	0.58787E-03	0.35683
2622	0.88831E-01	-0.35022	0.14124E-02	0.36132
2626	0.89168E-01	-0.34672	0.78613E-03	0.35801
2630	0.88844E-01	-0.35017	0.15659E-03	0.36126
2634	0.88698E-01	-0.34552	0.97847E-03	0.35672
2638	0.84197E-01	-0.34619	-0.17655E-02	0.35628
2642	0.82344E-01	-0.33231	-0.89838E-02	0.34248
2646	0.87032E-01	-0.30024	-0.22790E-01	0.31343
2650	0.11410	-0.27382	-0.25448E-01	0.29773
2654	0.14103	-0.32408	-0.22803E-01	0.35417
2658	0.14559	-0.37990	-0.90029E-02	0.40694
2662	0.14365	-0.41080	-0.16893E-02	0.43520
2666	0.13913	-0.42698	0.10808E-02	0.44908
2670	0.13885	-0.43758	0.20185E-03	0.45908
2674	0.13836	-0.44011	0.72729E-03	0.46135
2678	0.13884	-0.43764	0.12565E-02	0.45913
2682	0.13910	-0.42709	0.38170E-03	0.44918
2686	0.14361	-0.41095	0.31626E-02	0.43534
2690	0.14554	-0.38010	0.10487E-01	0.40714
2694	0.14097	-0.32430	0.24303E-01	0.35445
2702	0.12063	-0.27100	0.51409E-02	0.29668

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
2704	0.10031	-0.27438	0.36504E-02	0.29216
2706	0.87407E-01	-0.28369	0.77687E-02	0.29695
2708	0.77759E-01	-0.30398	0.30523E-02	0.31378
2710	0.78338E-01	-0.32270	0.28896E-02	0.33209
2712	0.72354E-01	-0.33650	-0.49749E-02	0.34423
2714	0.71597E-01	-0.34129	-0.22429E-02	0.34873
2716	0.60550E-01	-0.35238	-0.10421E-01	0.35769
2718	0.73065E-01	-0.36008	-0.63143E-02	0.36747
2720	0.75154E-01	-0.36260	-0.79024E-02	0.37039
2722	0.84959E-01	-0.35596	-0.40634E-02	0.36598
2724	0.78940E-01	-0.35271	-0.35066E-02	0.36146
2726	0.85064E-01	-0.34702	0.78656E-03	0.35729
2728	0.78951E-01	-0.35267	0.50790E-02	0.36143
2730	0.84981E-01	-0.35587	0.56333E-02	0.36592
2732	0.75187E-01	-0.36246	0.94694E-02	0.37030
2734	0.73109E-01	-0.35990	0.78774E-02	0.36734
2736	0.60602E-01	-0.35217	0.11979E-01	0.35755
2738	0.71656E-01	-0.34105	0.37916E-02	0.34851
2740	0.72419E-01	-0.33622	0.65233E-02	0.34399
2742	0.78416E-01	-0.32240	-0.13581E-02	0.33180
2744	0.77839E-01	-0.30366	-0.15212E-02	0.31348
2746	0.87495E-01	-0.28336	-0.62618E-02	0.29663
2748	0.10040	-0.27404	-0.21518E-02	0.29187
2750	0.12073	-0.27066	-0.36554E-02	0.29639
2752	0.14070	-0.29304	-0.20471E-02	0.32507
2754	0.15396	-0.32130	-0.60564E-02	0.35633
2756	0.16315	-0.35915	-0.11475E-02	0.39447
2758	0.16290	-0.39522	-0.86369E-03	0.42748
2760	0.16852	-0.42386	0.72424E-02	0.45619
2762	0.16958	-0.44330	0.45838E-02	0.47465

```

2764 0.17999   -0.46554    0.12691E-01 0.49928
2766 0.16779   -0.48394    0.86010E-02 0.51227
2768 0.16515   -0.49295    0.10209E-01 0.51998
2770 0.15558   -0.49254    0.62737E-02 0.51657
2772 0.16110   -0.49097    0.55549E-02 0.51675
2774 0.15513   -0.48706    0.69582E-03 0.51117
2776 0.16109   -0.49101   -0.41609E-02 0.51678

```

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=    0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
2778	0.15555	-0.49263	-0.48790E-02	0.51663
2780	0.16512	-0.49308	-0.88087E-02	0.52007
2782	0.16774	-0.48411	-0.71972E-02	0.51240
2784	0.17994	-0.46574	-0.11279E-01	0.49942
2786	0.16952	-0.44354	-0.31653E-02	0.47484
2788	0.16845	-0.42413	-0.58135E-02	0.45639
2790	0.16282	-0.39552	0.23017E-02	0.42772
2792	0.16307	-0.35945	0.25977E-02	0.39472
2794	0.15387	-0.32162	0.75177E-02	0.35662
2796	0.14061	-0.29337	0.35210E-02	0.32535
2802	0.13074	-0.37299	-0.45009E-01	0.39779
2804	0.11475	-0.36112	-0.15436E-01	0.37923
2806	0.10534	-0.37289	-0.27481E-01	0.38845
2808	0.10302	-0.35829	-0.14564E-01	0.37309
2810	0.86113E-01	-0.36340	-0.25299E-01	0.37432
2812	0.79120E-01	-0.36402	-0.10789E-01	0.37268
2814	0.54328E-01	-0.39273	-0.37970E-01	0.39829
2816	0.68687E-01	-0.38860	-0.23373E-01	0.39532
2818	0.67481E-01	-0.39914	-0.19992E-01	0.40529
2820	0.81622E-01	-0.39065	-0.10663E-01	0.39923
2822	0.86770E-01	-0.38953	-0.62700E-02	0.39913
2824	0.85774E-01	-0.38157	-0.35203E-02	0.39111
2826	0.84412E-01	-0.38324	0.77877E-03	0.39243
2828	0.85790E-01	-0.38151	0.50765E-02	0.39107
2830	0.86801E-01	-0.38941	0.78238E-02	0.39905
2832	0.81667E-01	-0.39047	0.12212E-01	0.39911
2834	0.67541E-01	-0.39890	0.21534E-01	0.40515
2836	0.68764E-01	-0.38832	0.24913E-01	0.39515
2838	0.54359E-01	-0.39240	0.39428E-01	0.39811
2840	0.79245E-01	-0.36366	0.12316E-01	0.37240
2842	0.86204E-01	-0.36300	0.26793E-01	0.37405
2844	0.10312	-0.35787	0.16034E-01	0.37278
2846	0.10544	-0.37244	0.28946E-01	0.38816
2848	0.11487	-0.36067	0.16892E-01	0.37890
2850	0.13087	-0.37253	0.46447E-01	0.39757
2852	0.14646	-0.38653	0.17079E-01	0.41370
2854	0.15634	-0.42426	0.29541E-01	0.45311

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=    0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
2856	0.15819	-0.43360	0.16666E-01	0.46186
2858	0.17571	-0.46285	0.28079E-01	0.49588
2860	0.18192	-0.48346	0.13479E-01	0.51673
2862	0.20703	-0.53271	0.40771E-01	0.57298
2864	0.19172	-0.54276	0.26208E-01	0.57622

2866	0.19348	-0.56819	0.22892E-01	0.60067
2868	0.17852	-0.56819	0.13347E-01	0.59573
2870	0.17359	-0.57598	0.86174E-02	0.60163
2872	0.17415	-0.57024	0.55085E-02	0.59627
2874	0.17635	-0.57523	0.65591E-03	0.60166
2876	0.17414	-0.57030	-0.41932E-02	0.59631
2878	0.17356	-0.57610	-0.73014E-02	0.60172
2880	0.17848	-0.56837	-0.12024E-01	0.59585
2882	0.19342	-0.56842	-0.21564E-01	0.60082
2884	0.19165	-0.54304	-0.24869E-01	0.57640
2886	0.20694	-0.53304	-0.39424E-01	0.57316
2888	0.18182	-0.48382	-0.12116E-01	0.51700
2890	0.17560	-0.46325	-0.26706E-01	0.49613
2892	0.15807	-0.43402	-0.15276E-01	0.46216
2894	0.15622	-0.42470	-0.28137E-01	0.45339
2896	0.14633	-0.38698	-0.15657E-01	0.41402
2902	0.14404	-0.45878	-0.65196E-01	0.48526
2904	0.13163	-0.44759	-0.55626E-01	0.46985
2906	0.11824	-0.43151	-0.31783E-01	0.44855
2908	0.93098E-01	-0.43418	-0.49640E-01	0.44682
2910	0.76233E-01	-0.43832	-0.46762E-01	0.44735
2912	0.47351E-01	-0.45890	-0.61140E-01	0.46537
2914	0.17114E-01	-0.48673	-0.10036	0.49726
2916	0.45451E-01	-0.46637	-0.81830E-01	0.47567
2918	0.73804E-01	-0.44836	-0.53166E-01	0.45749
2920	0.75080E-01	-0.43238	-0.45034E-01	0.44116
2922	0.11036	-0.40828	-0.21486E-01	0.42347
2924	0.81986E-01	-0.40259	-0.15015E-01	0.41112
2926	0.11187	-0.38868	0.76621E-03	0.40446
2928	0.82006E-01	-0.40251	0.16547E-01	0.41111
2930	0.11040	-0.40812	0.23013E-01	0.42342
2932	0.75138E-01	-0.43216	0.46556E-01	0.44111

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
2934	0.73880E-01	-0.44806	0.54677E-01	0.45739
2936	0.45551E-01	-0.46601	0.83343E-01	0.47559
2938	0.16802E-01	-0.48627	0.10145	0.49703
2940	0.46488E-01	-0.45842	0.61934E-01	0.46492
2942	0.76274E-01	-0.43787	0.48080E-01	0.44705
2944	0.93063E-01	-0.43361	0.51075E-01	0.44642
2946	0.11799	-0.43099	0.33038E-01	0.44807
2948	0.13182	-0.44702	0.57030E-01	0.46953
2950	0.14419	-0.45820	0.66574E-01	0.48495
2952	0.15579	-0.47985	0.57314E-01	0.50776
2954	0.17047	-0.49673	0.33972E-01	0.52626
2956	0.19448	-0.52981	0.52032E-01	0.56677
2958	0.21221	-0.56460	0.50086E-01	0.60524
2960	0.24087	-0.61058	0.63778E-01	0.65946
2962	0.27312	-0.66349	0.10574	0.72526
2964	0.24036	-0.66150	0.85357E-01	0.70898
2966	0.21265	-0.66159	0.56716E-01	0.69723
2968	0.20984	-0.65595	0.48187E-01	0.69038
2970	0.17478	-0.64268	0.24006E-01	0.66646
2972	0.20247	-0.64001	0.17071E-01	0.67149
2974	0.17347	-0.62994	0.60908E-03	0.65339
2976	0.20245	-0.64009	-0.15849E-01	0.67153
2978	0.17474	-0.64283	-0.22782E-01	0.66655
2980	0.20978	-0.65617	-0.46954E-01	0.69049
2982	0.21257	-0.66187	-0.55476E-01	0.69738
2984	0.24027	-0.66185	-0.84103E-01	0.70912

```

2986 0.27301 -0.66390 -0.10448 0.72540
2988 0.24075 -0.61103 -0.62495E-01 0.65971
2990 0.21208 -0.56510 -0.48788E-01 0.60555
2992 0.19434 -0.53033 -0.50712E-01 0.56709
2994 0.17031 -0.49728 -0.32636E-01 0.52665
2996 0.15564 -0.48042 -0.55955E-01 0.50809
3002 0.15938 -0.49696 -0.57245E-01 0.52502
3004 0.14282 -0.49264 -0.76893E-01 0.51866
3006 0.12660 -0.46106 -0.26902E-01 0.47888
3008 0.81790E-01-0.49057 -0.77963E-01 0.50341
3010 0.67248E-01-0.49950 -0.60274E-01 0.50760

```

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=    0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
3012	0.44289E-03	-0.57314	-0.10787	0.58320
3014	0.37641E-02	-0.63852	-0.14009	0.65372
3016	0.22612E-01	-0.57173	-0.15310	0.59230
3018	0.85241E-01	-0.49209	-0.88078E-01	0.50713
3020	0.74235E-01	-0.46065	-0.79793E-01	0.47337
3022	0.14438	-0.40122	-0.35001E-01	0.42784
3024	0.93472E-01	-0.39417	-0.25072E-01	0.40588
3026	0.15421	-0.36344	0.74450E-03	0.39481
3028	0.93495E-01	-0.39408	0.26561E-01	0.40589
3030	0.14442	-0.40104	0.36484E-01	0.42781
3032	0.74303E-01	-0.46039	0.81271E-01	0.47337
3034	0.85329E-01	-0.49174	0.89542E-01	0.50706
3036	0.22720E-01	-0.57130	0.15455	0.59227
3038	0.38839E-02	-0.63802	0.14151	0.65354
3040	0.60546E-03	-0.57259	0.10931	0.58293
3042	0.67405E-01	-0.49889	0.61655E-01	0.50718
3044	0.81922E-01	-0.48993	0.79333E-01	0.50303
3046	0.12673	-0.46038	0.28231E-01	0.47834
3048	0.14301	-0.49196	0.78229E-01	0.51826
3050	0.15957	-0.49627	0.58552E-01	0.52457
3052	0.17484	-0.53154	0.78700E-01	0.56506
3054	0.19255	-0.53964	0.29634E-01	0.57373
3056	0.23605	-0.60596	0.80851E-01	0.65532
3058	0.25213	-0.65181	0.64444E-01	0.70184
3060	0.31747	-0.75675	0.11193	0.82824
3062	0.30353	-0.86248	0.13695	0.92453
3064	0.29264	-0.80695	0.15826	0.87284
3066	0.23108	-0.74782	0.92192E-01	0.78812
3068	0.23965	-0.72820	0.83310E-01	0.77113
3070	0.16978	-0.68132	0.37593E-01	0.70317
3072	0.21933	-0.67760	0.27121E-01	0.71273
3074	0.15975	-0.65142	0.55859E-03	0.67072
3076	0.21930	-0.67769	-0.25997E-01	0.71277
3078	0.16973	-0.68150	-0.36470E-01	0.70327
3080	0.23957	-0.72846	-0.82175E-01	0.77123
3082	0.23098	-0.74817	-0.91050E-01	0.78829
3084	0.29253	-0.80737	-0.15710	0.87298

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

```

LOAD STEP=      1  SUBSTEP=      1
TIME=      1.0000  LOAD CASE=    0

```

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
3086	0.30340	-0.86297	-0.13578	0.92477

3088	0.31733	-0.75729	-0.11074	0.82852
3090	0.25197	-0.65240	-0.63231E-01	0.70222
3092	0.23587	-0.60659	-0.79612E-01	0.65568
3094	0.19237	-0.54030	-0.28374E-01	0.57423
3096	0.17465	-0.53222	-0.77413E-01	0.56547
3102	0.17615	-0.49075	-0.43571E-01	0.52323
3104	0.15505	-0.50350	-0.90949E-01	0.53463
3106	0.14260	-0.45664	-0.15405E-01	0.47864
3108	0.95242E-01	-0.53798	-0.69203E-01	0.55071
3110	0.74139E-01	-0.52738	-0.75889E-01	0.53795
3112	0.11961E-01	-0.65387	-0.12484	0.66579
3114	-0.21529E-01	-0.64705	-0.19702	0.67672
3116	0.35051E-01	-0.64601	-0.17210	0.66946
3118	0.96138E-01	-0.50519	-0.11012	0.52591
3120	0.11144	-0.48451	-0.91553E-01	0.50552
3122	0.18734	-0.36048	-0.41321E-01	0.40834
3124	0.15283	-0.37828	-0.26784E-01	0.40887
3126	0.20955	-0.30236	0.71999E-03	0.36787
3128	0.15286	-0.37818	0.28224E-01	0.40888
3130	0.18739	-0.36027	0.42754E-01	0.40833
3132	0.11151	-0.48421	0.92980E-01	0.50551
3134	0.96240E-01	-0.50478	0.11154	0.52584
3136	0.35173E-01	-0.64552	0.17351	0.66936
3138	-0.21394E-01	-0.64648	0.19840	0.67657
3140	0.12104E-01	-0.65322	0.12621	0.66541
3142	0.74337E-01	-0.52667	0.77194E-01	0.53746
3144	0.95455E-01	-0.53722	0.70538E-01	0.55018
3146	0.14283	-0.45585	0.16669E-01	0.47800
3148	0.15527	-0.50270	0.92209E-01	0.53416
3150	0.17638	-0.48995	0.44800E-01	0.52266
3152	0.19569	-0.54879	0.92944E-01	0.59000
3154	0.21013	-0.54798	0.18692E-01	0.58719
3156	0.25573	-0.67204	0.72881E-01	0.72274
3158	0.27894	-0.70404	0.81041E-01	0.76161
3160	0.33825	-0.86569	0.12951	0.93840
3162	0.37590	-0.89210	0.20140	0.98878

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
 TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN GLOBAL COORDINATES

NODE	UX	UY	UZ	USUM
3164	0.31305	-0.91709	0.17612	0.98492
3166	0.25347	-0.80062	0.11403	0.84749
3168	0.23451	-0.79331	0.94787E-01	0.83266
3170	0.15885	-0.68344	0.43585E-01	0.70301
3172	0.19114	-0.70484	0.28616E-01	0.73086
3174	0.13581	-0.63407	0.50477E-03	0.64845
3176	0.19111	-0.70495	-0.27598E-01	0.73091
3178	0.15879	-0.68364	-0.42568E-01	0.70313
3180	0.23443	-0.79361	-0.93755E-01	0.83281
3182	0.25336	-0.80102	-0.11299	0.84770
3184	0.31292	-0.91757	-0.17506	0.98514
3186	0.37574	-0.89266	-0.20032	0.98902
3188	0.33808	-0.86631	-0.12841	0.93877
3190	0.27875	-0.70473	-0.79919E-01	0.76206
3192	0.25553	-0.67277	-0.71727E-01	0.72323
3194	0.20992	-0.54875	-0.17515E-01	0.58779
3196	0.19547	-0.54957	-0.91736E-01	0.59046

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	3162	1241	541	1241
VALUE	0.37590	-1.6281	0.37239	1.6396