

Alma Mater Studiorum Università di Bologna

**DOTTORATO DI RICERCA
MECCANICA DELLE STRUTTURE**

XX CICLO

Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,
delle Acque, del Rilevamento, del Territorio

Settore Scientifico Disciplinare di Afferenza: **ICAR/09 – Tecnica delle Costruzioni**

SULLA PROGETTAZIONE IN ZONA SISMICA DI STRUTTURE DOTATE DI DISSIPATORI FLUIDO-VISCOSI: PROPOSTA DI UNA METODOLOGIA

Tesi presentata da:

Dott. Ing.
ALBERTO DELLAVALLE

Coordinatore Dottorato:

Chiar.mo Prof. Ing.
ERASMO VIOLA

Relatore:

Chiar.mo Prof. Ing.
PIER PAOLO DIOTALLEVI

INDICE

CAPITOLO 1 – DISSIPATORI FLUIDO VISCOSI	1
1.1 Caratteristiche Tecniche.....	2
1.2 Riferimenti nei Codici Internazionali.....	4
1.3 Indagini Sperimentali e Modellazione Analitica del Comportamento.....	5
1.4 Applicazioni.....	11
CAPITOLO 2 – METODOLOGIE DI CALCOLO PRESENTI IN LETTERATURA	18
2.1 Equazione del moto “esplicita”.....	19
2.2 Criteri di Equivalenza.....	23
2.2.1 <i>Equivalenza della Energia Dissipata</i>	23
2.2.2 <i>Equivalenza della Potenza Dissipata</i>	24
2.2.3 <i>Confronto dei Criteri di Equivalenza</i>	25
2.2.4 <i>Grado di Approssimazione Criteri di Equivalenza</i>	26
2.3 Equazione del moto “implicita”.....	43
2.4 Analisi della Risposta per Forzante Qualsiasi.....	46
CAPITOLO 3 – METODOLOGIA DI CALCOLO PROPOSTA	52
3.1 Indice del Dissipatore, ϵ	53
3.2 Analisi della Risposta in funzione di ϵ	55
3.2.1 <i>Fattore di Amplificazione</i>	55
3.2.2 <i>Taglio alla Base</i>	59
3.2.3 <i>Velocità Effettiva</i>	72
3.3 Stima dell’Indice di Smorzamento Equivalente.....	77

3.4 Dissipatore Lineare VS Dissipatore Non-Lineare.....	92
3.5 Studio della Risposta per Accelerogrammi Reali.....	102
CAPITOLO 4 – SISTEMI A PIU’ GRADI DI LIBERTA’	112
4.1 Metodo Iterativo.....	113
4.2 Metodo Diretto.....	118
4.3 Validazione dei Metodi.....	121
4.3.1 <i>Presentazione dei Casi di Studio</i>	121
4.3.2 <i>Analisi dei Telai Muniti di Dissipatori Non-Lineari</i>	125
4.3.3 <i>Applicazione del Metodo Iterativo per la Stima di ξ_{sd}</i> ..	125
4.3.4 <i>Applicazione del Metodo Diretto per la Stima di ξ_{sd}</i> ...	126
4.3.5 <i>Analisi dei Risultati</i>	128
4.4 Spettri di ξ_{sd} per codici internazionali.....	133
BIBLIOGRAFIA	139
APPENDICE A – SOLUZIONE NUMERICA DELL’EQUAZIONE DEL MOTO CARATTERISTICA DI UN SISTEMA INDEFINITAMENTE ELASTICO LINEARE MUNITO DI UN DISSIPATORE FLUIDO-VISCOSO A COMPORTAMENTO NON LINEARE: 4 METODOLOGIE A CONFRONTO.	
APPENDICE B – DIMOSTRAZIONE DELLA LINEARE DIPENDENZA DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA AD UN GRADO DI LIBERTA’ ELASTICO-LINEARE DOTATO DI DISSIPATORE VISCOSO NON-LINEARE ALLA AMPIEZZA DELLA FORZANTE.	

CAPITOLO 1

DISSIPATORI FLUIDO-VISCOSI

In questo capitolo verranno descritti i dissipatori fluido-viscosi.

In un primo paragrafo verranno illustrate le caratteristiche tecniche dei dispositivi, il loro funzionamento, l'evoluzione della tecnologia di cui sono dotati.

Nel secondo paragrafo riporteremo le definizioni e le linee guida per la progettazione di questi dispositivi contenute in alcuni codici internazionali

Nel terzo paragrafo riporteremo i risultati di alcune indagini sperimentali condotte sulla risposta di tali dispositivi ad azioni esterne. A tal fine proporremo anche delle schede tecniche che vengono allegate ai dispositivi attualmente disponibili sul mercato. Nel terzo paragrafo illustreremo, inoltre, i modelli analitici proposti da vari autori, in grado di descrivere in modo efficace il comportamento fisico dei dissipatori fluido-viscosi.

Nell'ultimo paragrafo proporremo alcuni casi di applicazione di tali dispositivi su strutture esistenti e su strutture di nuova costruzione. Mostreremo anche dei casi in cui l'applicazione di tali dispositivi si è rivelata efficace per scopi che esulano dalla riduzione delle azioni sismiche agenti sulle strutture.

FLUID-VISCOUS DAMPERS

In this chapter the fluid-viscous dampers are introduced.

The first section is focused on the technical characteristics of these devices, their mechanical behavior and the latest evolution of the technology whose they are equipped.

In the second section we report the definitions and the guide lines about the design of these devices included in some international codes.

In the third section the results of some experimental tests carried out by some authors on the response of these devices to external forces are discussed. On this purpose we report some technical schedules that are usually enclosed to the devices now available on the international market. In the third section we show also some analytic models proposed by various authors, which are able to describe efficiently the physical behavior of the fluid-viscous dampers.

In the last section we propose some cases of application of these devices on existing structures and on new-construction structures. We show also some cases in

which these devices have been revealed good for aims that lies outside the reduction of seismic actions on the structures.

1.1 Caratteristiche Tecniche

Nel presente paragrafo ci occuperemo di descrivere le caratteristiche dissipatori viscosi, intendendo in questo caso dei dispositivi la cui risposta sia in fase con la velocità della forzante.

I dissipatori viscosi sono realizzati, in genere, mediante apparecchiature oleodinamiche costituite da un pistone in movimento in un cilindro riempito di un fluido (Constantinou et al., 1993b), di solito un olio siliconico, eventualmente in pressione (Tsopeles e Constantinou, 1994; Pekcan et al., 1995). La testa del pistone suddivide il cilindro in due camere comunicanti attraverso degli orifici opportunamente progettati per forma, dimensioni e numero. Per la presenza del braccio del pistone il fluido subisce una compressione nel passaggio da una camera all'altra, manifestando un comportamento non puramente viscoso, ma più propriamente viscoelastico. Ciò determina una riduzione dell'efficienza dissipativa del dispositivo, evitabile mediante l'utilizzo di un apposito sistema, costituito da una camera di accumulo e da una valvola di controllo, in modo da rendere nulla la forza di richiamo del fluido per frequenze inferiori ad un assegnato limite (frequenza di "cut-off"). L'esistenza di questa frequenza limite consente di incrementare la capacità dissipativa, nonché la rigidità in corrispondenza dei soli modi superiori, il cui contributo viene così ad essere praticamente eliminato. Per comprendere meglio questo comportamento possiamo riferirci alla figura 1.1 nella quale è riportata la sezione tipica di un dissipatore fluido-viscoso.

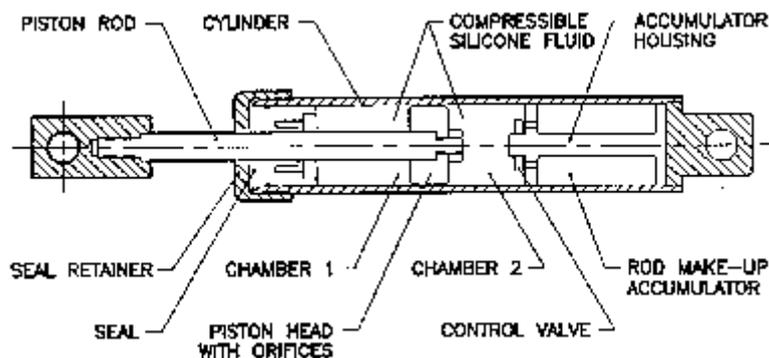


Fig 1.1 Sezione di un dissipatore fluido-viscoso.

Se ipotizziamo un movimento del pistone da destra verso sinistra, il fluido ad alta

viscosità (ad esempio olio silconico) scorre dalla camera 2 (*Chamber 2*) alla camera 1 (*Chamber 1*). In questo modo si crea una differenza di pressione tra le 2 camere. Necessariamente la forza opposta dal dispositivo al moto del pistone sarà proporzionale a tale differenza di pressione.

Se si considera il pistone posizionato all'estremità sinistra (pos. A) del cilindro, avremo la camera 1 con volume nullo e la camera 2 con volume massimo. Nella posizione opposta, con il pistone cioè posizionato all'estrema destra (pos. B) avremo la camera 1 con volume massimo e la camera 2 con volume nullo. Ma per la presenza del braccio del pistone (*Piston Rod*) il volume massimo della camera 1 (pos. B) risulta inferiore a quello massimo della camera 2 (pos. A): quindi mano a mano che il pistone si muove da destra verso sinistra il volume totale occupato dal fluido tende a ridursi. Tale riduzione di volume del fluido, che è comprimibile, produce una forza di richiamo che di fatto ha una natura elastica: infatti la forza di richiamo aumenta proporzionalmente al diminuire del volume del fluido e in ultima analisi la forza di richiamo aumenta in modo proporzionale all'avanzare del pistone. Per eliminare la forza di richiamo viene realizzata una camera di accumulo (*Accumulator*) dotata di una valvola che incrementa il volume della camera 2 (e quindi anche il volume totale del fluido) di una quantità pari al volume del braccio del pistone che si trova all'interno del cilindro. La valvola può essere attivata per un assegnato valore della velocità di movimento del pistone e quindi per una assegnata frequenza (frequenza di "cut-off"). Di solito si preferisce attivare la camera di accumulo per frequenze uguali o inferiori a quelle del primo modo di vibrare, (per cui si dovrebbe regolare il funzionamento del dissipatore anche in base a tale dato) in quanto potrebbe essere desiderabile conferire al dispositivo un comportamento visco-elastico per i modi superiori, il cui contributo viene, così, ad essere notevolmente ridotto.

Una schematica rappresentazione di un tale dissipatore è riportata nella fig. 1.2a.

E' possibile anche realizzare dei dispositivi privi di frequenza di cut-off, per cui il comportamento risulta indefinitamente viscoso. Si può ad esempio impiegare un pistone il cui braccio si sviluppi per tutta la lunghezza del dissipatore, evitando così la compressione del fluido (Marioni et al. 1997).

E' possibile anche realizzare dei dispositivi dotati di rientramento: nel caso di fluido in pressione si sviluppa una forza di precarico che impedisce il movimento del pistone fino al raggiungimento di un fissato livello dello sforzo applicato; una volta rimosso il carico esterno, il dispositivo tende verso la configurazione corrispondente

alla pressione inizialmente imposta al fluido. In tal modo si impedisce al dispositivo di entrare in funzione per azioni di modesta entità e, al contempo, si ottiene un effetto di “ricentramento” della struttura in cui è inserito.

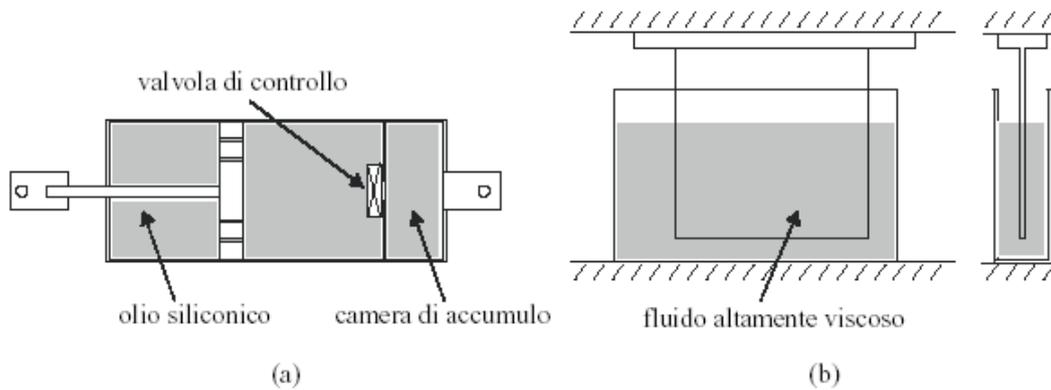


Fig 1.2 Soluzioni tipiche per dissipatori viscosi: (a) dispositivo oleodinamico; (b) parete viscosa.

Una differente tipologia di dissipatori viscosi (Arima et al., 1988) è quella basata sulla deformazione di un fluido altamente viscoso, disposto in un contenitore al cui interno è forzata a muoversi una piastra di acciaio (fig. 1.2b). Per l'efficienza del dispositivo, inseribile nelle maglie di un telaio e tale da agire sugli spostamenti d'interpiano (Miyazaki e Mitsusaka, 1992), si richiedono grandi volumi di fluido, che presentano, però, una forte dipendenza dalla temperatura ambiente e dalla frequenza di carico.

Le estremità del dissipatore viscoso sono solitamente dotate di due snodi sferici, che assicurano il perfetto allineamento fra pistone e cilindro, indipendentemente dalle inevitabili imprecisioni di posa. I dissipatori sono completati dalle carpenterie di ancoraggio alla struttura.

1.2 Riferimenti nei codici internazionali

I codici internazionali usualmente tendono a fornire una classificazione dei dispositivi per la dissipazione dell'energia sismica. In questo paragrafo vedremo in quali classi vengono inseriti i dissipatori fluido-viscosi nei principali codici internazionali.

FEMA 450

Il capitolo 15 delle Fema 450, pubblicate nel 2003, è intitolato “*Structures with Damping Systems*”. In questo capitolo vengono forniti tutti gli strumenti per la progettazione di edifici dotati di sistemi di dissipazione dell'energia sismica. Nel

paragrafo 15.1.2 vengono riportate le “*Definitions*”; i dissipatori fluido-viscosi vengono inseriti nella classe dei “*Velocity-dependent Damping Devices*” e la definizione è la seguente:

“The force-displacement relation for a velocity-dependent damping device is primarily a function of the relative velocity between each end of the device, and may also be a function of the relative displacement between each end of the device.”

Il codice americano utilizza quale criterio di classificazione la modalità di risposta del dispositivo ad un forzante esterna.

EUROCODICE8

L’Eurocodice 8 non contiene alcun capitolo riguardante i dissipatori fluido-viscosi e quindi non procede ad alcuna classificazione.

NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI (D.M. 14 GENNAIO 2008)

Le Norme Tecniche per le Costruzioni non contengono alcun capitolo relativo ai dissipatori sismici.

OPCM 3431

Riportiamo anche le indicazioni contenute dall’Ordinanza 3431, sebbene questo codice non sia attualmente vigente in Italia e probabilmente sarà sostituito dalla Norme Tecniche per le Costruzioni, in quanto contiene un brevissimo accenno ai dissipatori sismici. Infatti all’interno del capitolo 10 intitolato “*Edifici con Isolamento Sismico*”, al paragrafo 10.4.4 vengono introdotti i “*Dispositivi Ausiliari con Comportamento Viscoso*”. In questo paragrafo vengono descritti come segue:

“I dispositivi ausiliari a comportamento viscoso trasmettono, in generale, soltanto azioni orizzontali ed hanno rigidità trascurabile rispetto alle azioni verticali. Essi sono caratterizzati da un valore della forza proporzionale a V^α , e pertanto non contribuiscono alla rigidità del sistema.”

In questo caso viene messo in evidenza sia il fatto che la forza sia proporzionale alla velocità, sia il fatto che questi dispositivi possono considerarsi in relazione alla traslazione orizzontale a rigidità nulla. Il paragrafo 10.4.4. contiene anche indicazioni sulle modalità di progettazione di tali dispositivi.

1.3 Indagini Sperimentali e Modellazione Analitica del Comportamento

In questo paragrafo riportiamo i risultati di analisi condotte nel 1993 da Constantinou e Symans su dissipatori fluido-viscosi. Il comportamento di tali dispositivi è regolato modificando la forma e la disposizione degli orifizi posti sulla testa del pistone. Nella figura che segue riportiamo una schematizzazione del dispositivo impiegato nelle prove.

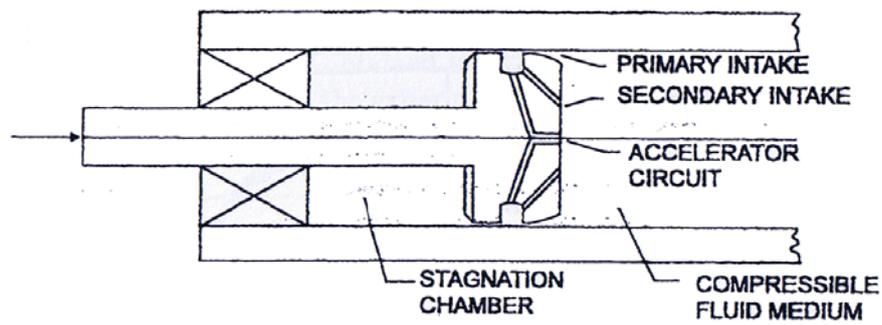


Fig 1.3 Schema del dispositivo utilizzato da Constantinou e Symans.

Nelle figure che seguono riportiamo i cicli Forza-Spostamento ottenuti sottoponendo il dispositivo di Figura 1.3 a forzanti armoniche di ampiezza costante ma di frequenze differenti (1 Hz, 2Hz, 4Hz), per due diverse temperature (23°C, 47°C).

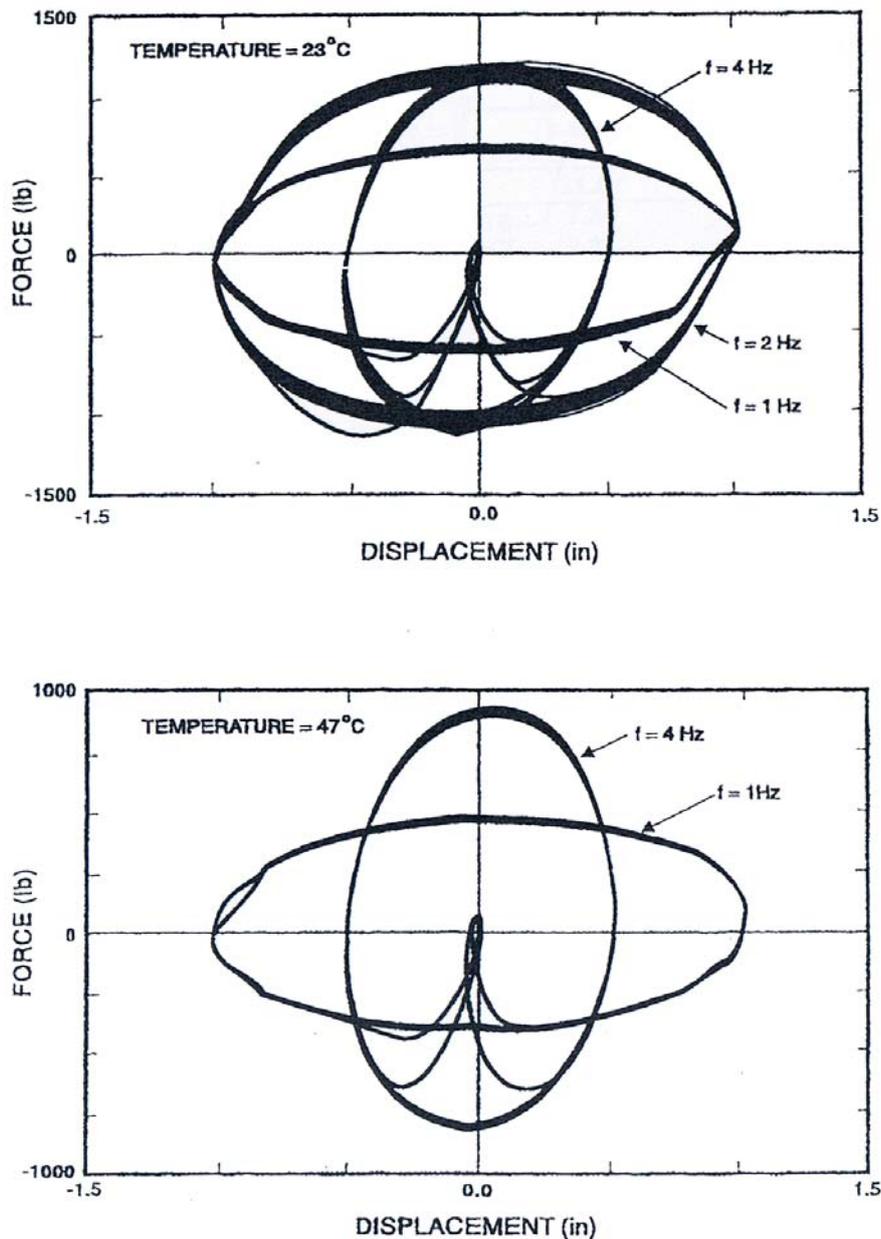


Fig 1.4 Cicli Forza-Spostamenti.

La Figura 1.4 mostra come i cicli forza-spostamento siano praticamente indipendenti dalla temperatura alla quale è stata effettuata la prova. Per modellare analiticamente il comportamento del dispositivo può essere il modello classico di Maxwell, in quanto questo riesce a simulare la dipendenza dalla frequenza. In termini analitici si può scrivere:

$$(1.1) \quad P(t) + \lambda \frac{dP(t)}{dt} = C_0 \frac{dx(t)}{dt}$$

Dove λ è il tempo di rilassamento e C_0 è il coefficiente di smorzamento per

frequenza nulla. Gli autori hanno individuato i valori di λ e di C_0 che meglio riuscissero a riprodurre i valori di rigidezza (*storage stiffness*, K_1), di coefficiente di smorzamento (C) e di differenza di fase (*Phase Angle*) ottenuti dalle prove sperimentali. Nelle figure che seguono riportiamo i risultati.

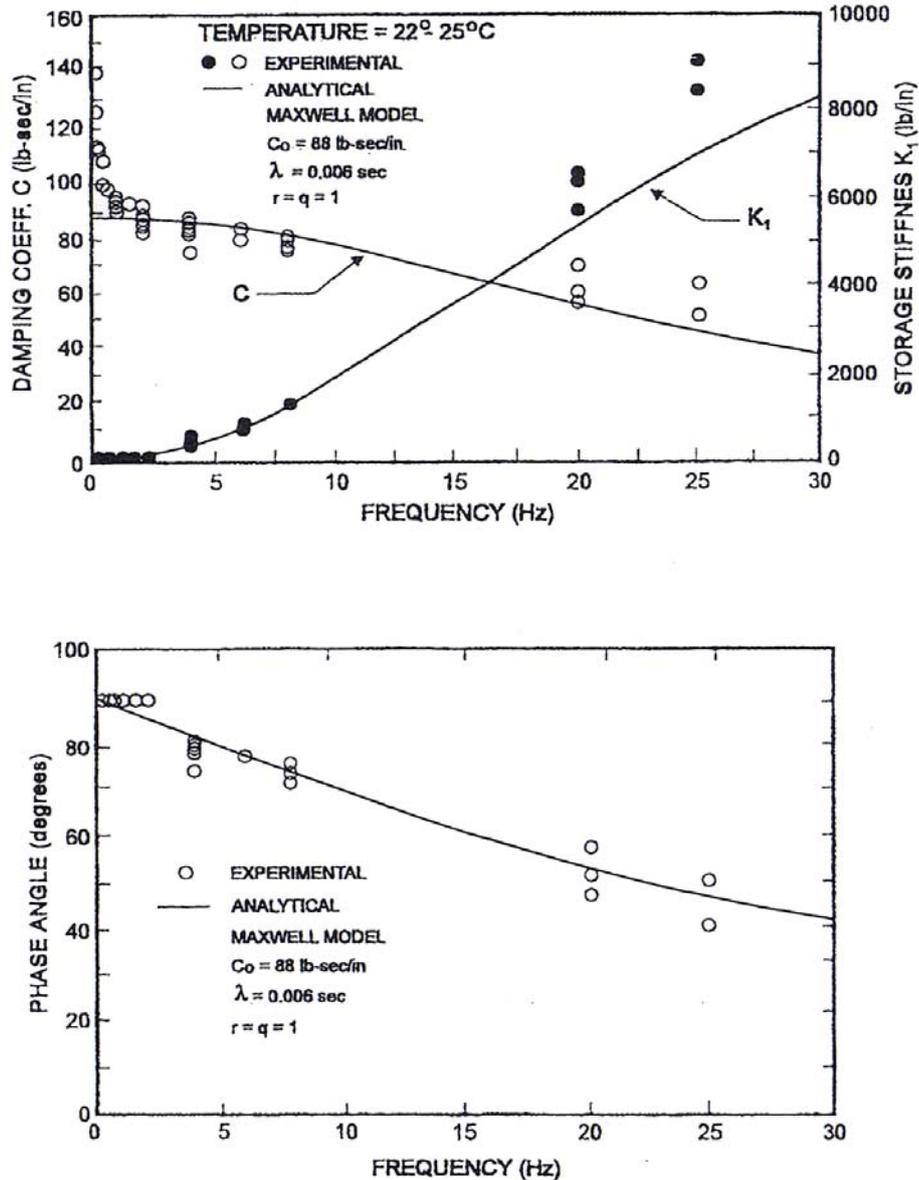


Fig 1.5 Stima della rigidezza, del coefficiente di smorzamento e della differenza di fase attraverso il modello di Maxwell, sulla base dei risultati sperimentali.

Gli autori hanno individuato i seguenti valori:

- $\lambda = 0.006\text{sec}$
- $C_0 = 88\text{lb}\cdot\text{sec}/\text{in}$

Tali risultati evidenziano che il valore del tempo di rilassamento è piuttosto basso

e quindi può essere individuata una frequenza di *cut-off* (pari a circa 4Hz), al disotto della quale l'equazione (1.1) può essere semplificata trascurando il secondo termine al primo membro e ottenere:

$$(1.2) \quad P(t) = C_0 \frac{dx(t)}{dt}$$

Quindi la risposta del dispositivo risulta essere dipendente in modo lineare della velocità. Tale risultato permette di ottenere una notevole semplificazione nella analisi strutturali.

Utilizzando dei dispositivi, il cui comportamento può essere descritto dalla (1.2), ci si rende immediatamente conto che valori elevati della velocità conducono ad un dimensionamento eccessivo dei dispositivi in quanto la forza assorbita aumenta in modo direttamente proporzionale. Pertanto vennero apportate delle modifiche al sistema di passaggio del fluido siliconico da una camera all'altra per ottenere un comportamento che può essere modellato analiticamente dalla seguente espressione.

$$(1.3) \quad P(t) = C_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}) |\dot{x}|^\alpha$$

L'esponente α , per gli scopi appena illustrati, viene generalmente posto minore di 1.00. L'espressione (1.3) presenta una carattere più generale della (1.2) e pertanto nel proseguo del nostro lavoro verrà utilizzata tale espressione.

In conclusione a questo paragrafo vogliamo soltanto accennare al fatto che nel corso di questi anni sono stati proposti altri tipi di dispositivi che rientrano comunque nella categoria dei dissipatori fluido-viscosi, ma che presentano un comportamento più complesso di quello espresso dalla (1.3), in quanto il fluido siliconico viene pressurizzato per incrementare la rigidità e lo smorzamento. Tali dispositivi manifestano un comportamento piuttosto rigido fino al raggiungimento del valore di precarico, oltre tale valore il fluido inizia a fluire da una camera all'altra. Tali dispositivi presentano una capacità di ricentrimento e pertanto vengono impiegati quando sono accoppiati a isolatori sismici. Di seguito riportiamo lo schema di un dispositivo di questo tipo proposto da Peckan et.al. nel 1995.

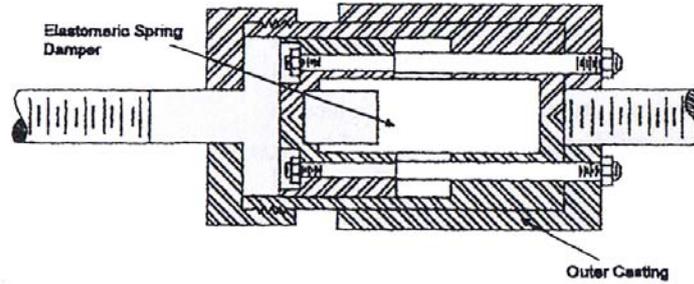


Fig 1.6 Dissipatore fluido-viscoso con ricentramento proposto da Peckan et al. nel 1995

Di seguito riportiamo i cicli forza-spostamento ottenuti sperimentalmente per diversi valori della frequenza della forzante.

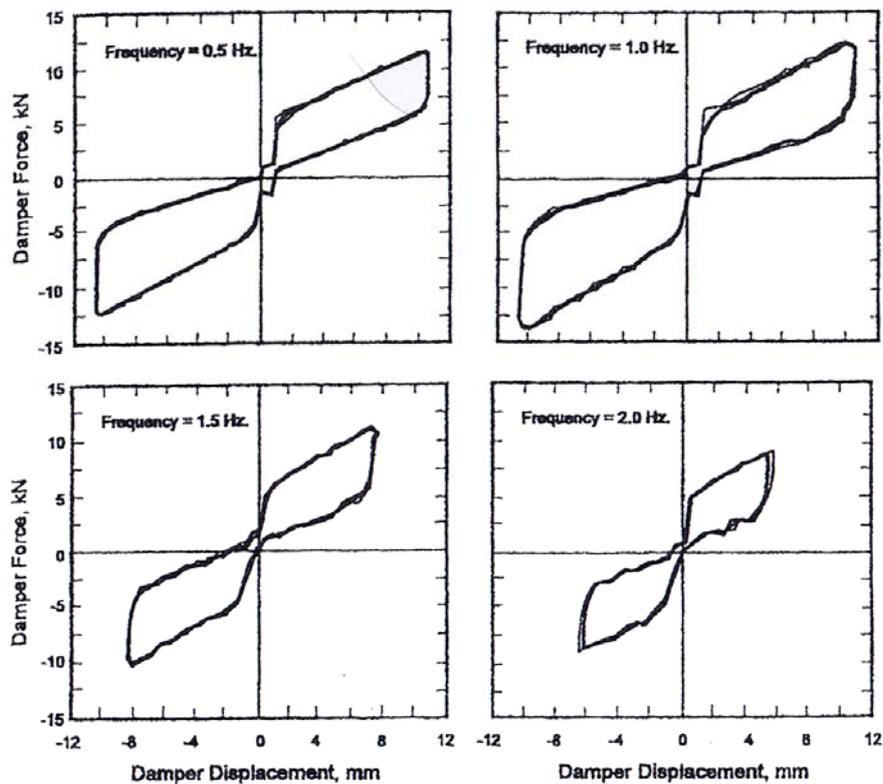


Fig 1.7 Cicli Forza-Spostamento per il dissipatore fluido-viscoso con ricentramento proposto da Peckan et al. nel 1995

Tali dispositivi presentano un minor capacità dissipativa (si veda la figura 1.4), ma il ramo di scarico si chiude sempre all'origine degli assi (ricentramento). Peckan ha proposto un modello analitico capace di simulare il comportamento evidenziato nella figura 1.7. Dispositivi di questo tipo sono stati proposti anche da Tsopeles e Constantinou nel 1994.

1.4 Applicazioni

La tecnologia usata nei dissipatori fluidodinamici è nota da circa un secolo. Veniva largamente utilizzata nell'industria militare: cannoni nella Prima Guerra Mondiale, sospensioni di autocarri nella Seconda Guerra Mondiale, fino alle applicazioni nella industria missilistica e degli aerei ad alta tecnologia (Stealth). La fine della guerra fredda fece sì che parte della produzione militare fosse convertita in commerciale (Taylor Devices, inc.), così si cominciò ad applicare nell'ingegneria civile per la protezione di edifici a elevata vibrazioni. In questo paragrafo vedremo alcune recenti applicazioni di questi dispositivi.

Iniziamo questa carrellata con l'intervento di recupero di un edificio storico. Parliamo del Hotel Woodland, a Woodland, California. In figura 1.8 riportiamo una immagine dell'edificio.



Figura 1.8 Hotel Woodland

L'edificio è stato costruito nel 1928 ed è composto di 5 piani a bassa resistenza.

In questo edificio sono stati applicati 16 dissipatori fluidodinamici della Taylor Device, inc. disposti come un controvento a "K". In figura 1.9 riportiamo una immagine della configurazione tipo dei dissipatori.



Figura 1.9 Dissipatori utilizzati nel recupero dell'Hotel Woodland

Molto interessante è l'intervento realizzato al New Pacific Northwest Baseball Park, nel nuovo stadio del baseball di Seattle (figura 1.10).

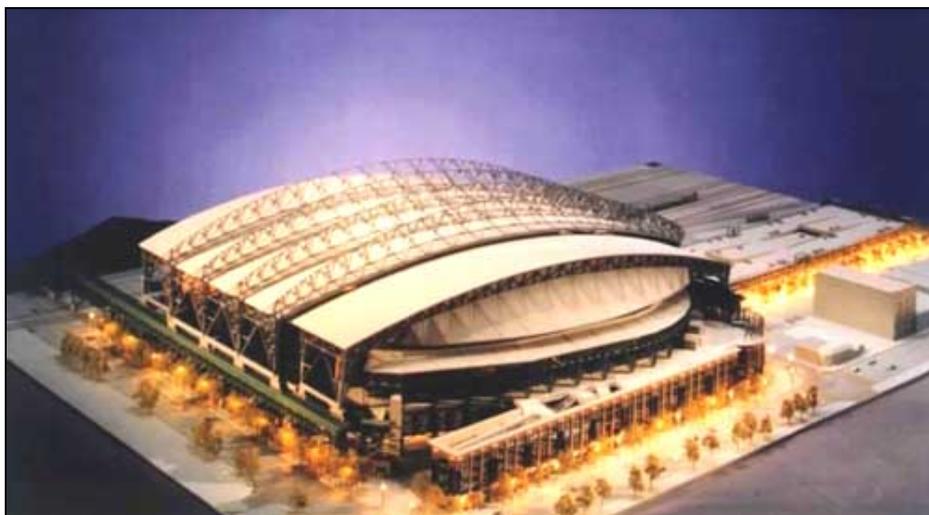


Figura 1.10 Plastico del nuovo stadio del baseball di Seattle

La soluzione tecnica adottata per questo edificio è molto interessante: sono stati installati 8 dissipatori fluidodinamici per garantire la copertura per sismi di intensità pari al grado 8.5 della scala Richter. I dissipatori hanno dimensioni notevolissime come mostrato in figura 1.11 e sono capaci di sopportare carichi di punta fino a 450t.



Figura 1.11 Dissipatori fluidodinamica usati nel nuovo stadio del baseball di Seattle

I dissipatori sono stati posizionati al posto di aste della reticolare della copertura, come mostrato in figura 1.12 a,b,c. A detta dei progettisti questo intervento ha permesso di risparmiare fino a 5 milioni di dollari.



Figura 1.12a. Montaggio dissipatori copertura del nuovo stadio del baseball di Seattle

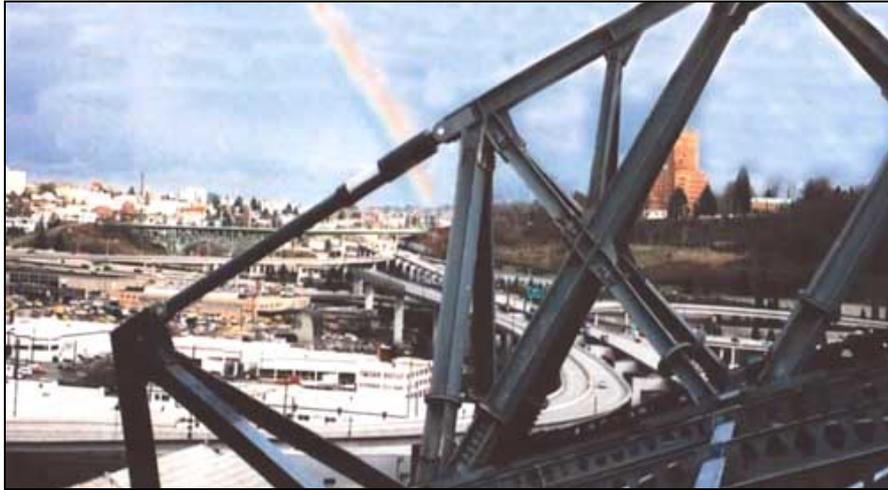


Figura 1.12a. Montaggio dissipatori copertura del nuovo stadio del baseball di Seattle



Figura 1.12a. Montaggio dissipatori copertura del nuovo stadio del baseball di Seattle

Grande interesse a livello internazionale è stato suscitato dalla vicenda del Millennium Bridge di Londra. Questa passerella pedonale collega la City e in particolare la Saint Paul Cathedral, con la Modern Tate Gallery, posti su sponde opposte del Tamigi. In figura 1.13 viene proposta una immagine della passerella.

La passerella è stata inaugurata nel 1999 e faceva parte di una serie di realizzazioni che il City Council di Londra aveva finanziato in occasione del nuovo Millennio. Fin dai primi periodi si riscontrarono eccessive deformazioni della passerella. Approfonditi studi mostrarono che la passerella entrava in risonanza con la frequenza del passo dei pedoni che lo attraversavano. Dopo alcune ipotesi di recupero venne deciso di installare dei dissipatori fluidodinamici. In figura 1.14 viene mostrata lo schema dei dissipatori installati.



Figura 1.13 Millenium Bridge di Londra

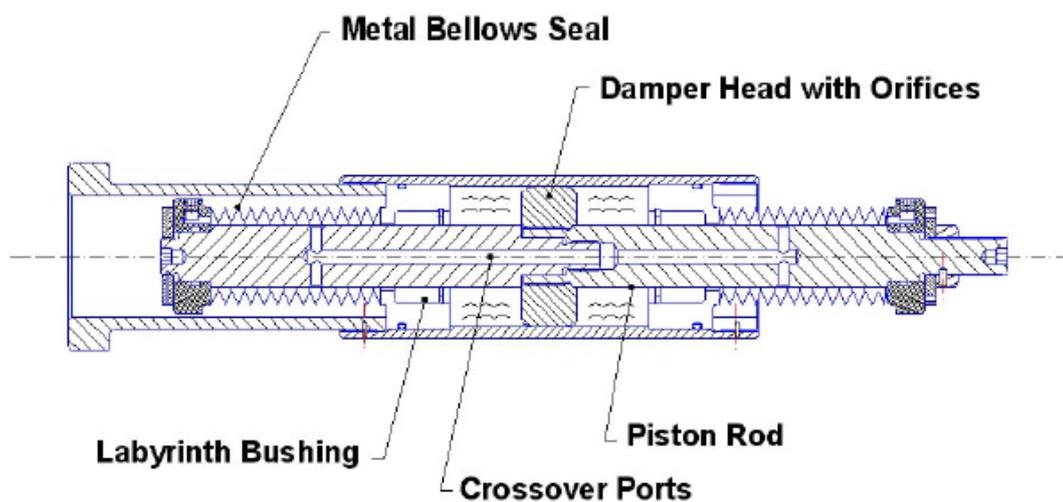


Figura 1.14 Schema grafico dei dissipatori utilizzati.

I dissipatori sono stati posizionati in tre differenti locazioni: in posizione verticale all'attacco della passerella (figura 1.15a), in posizione orizzontale sulla ali (figura 1.15b) e in posizione di controvento sotto l'impalcato (figura 1.15c).



Figura 1.15a Dissipatori in posizione verticale all'attacco della passerella.



Figura 1.15b Dissipatori in posizione orizzontale sulle ali della passerella



Figura 1.15c Dissipatori disposti come controvento sotto impalcato della passerella

Furono condotti tre tipi di test sulla passerella. Inizialmente è stato condotto un test che ha coinvolto 700 persone: ad ogni pedone era concesso un metro quadro di spazio e varie prove sono state fatte variando la composizione dei gruppi che attraversavano la passerella, la velocità di percorrenza. Non sono state notate anomalie. Il secondo test fu involontario: tra il 27 e il 28 gennaio del 2002 una grossa tempesta di vento colpì Londra con raffiche fino a 120km/h; ancora una volta non si riscontrarono anomalie. Il terzo test fu condotto il 30 gennaio del 2002 e coinvolse 2000 persone. Alle 6 del mattino la folla fu fatta passare in modo controllato sulla passerella: l'intero gruppo fu fatta attraversare a tre diverse velocità e infine fu fatto attraversare in modo casuale. I risultati furono soddisfacenti: l'accelerazione di picco è passata da 0.25g a 0.006g, la risposta fu ridotta di 40 volte su tutti i modi di vibrare, non si è riscontrata alcuna risonanza in nessun modo di vibrare,

CAPITOLO 2

METODOLOGIE DI CALCOLO PRESENTI IN LETTERATURA

In questo capitolo saranno riportate le metodologie di calcolo più diffuse, presenti in letteratura, per strutture dotate di dissipatori fluido-viscosi. Inizialmente sarà studiata la risoluzione del problema nel caso esso sia sottoposto a forzante armonica, successivamente nel caso di forzante qualsiasi.

Nel primo paragrafo verranno presentate le equazioni del moto del problema di un sistema ad un grado di libertà indefinitamente elastico lineare dotato di un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare sottoposto ad una forzante armonica. Questa problema differenziale si presenta analiticamente piuttosto complesso ed esso non è risolvibile in forma chiusa. Pertanto alcuni autori hanno proposto dei metodi di risoluzione approssimati. I metodi più diffusi sono basati su principi di equivalenza tra il dispositivo a comportamento non-lineare e un dispositivo equivalente a comportamento lineare. Operando in questo modo è possibile definire un indice di smorzamento equivalente e il problema diviene lineare; la sua risoluzione ricade tra quelle già note della dinamica strutturale.

Nel paragrafo successivo presenteremo due tecniche di linearizzazione proposte da alcuni autori in letteratura: il principio di equivalenza basato sull'energia dissipata nei due dispositivi e il principio di equivalenza basato sulla potenza dissipata nei due dispositivi. Questi due tecniche saranno messe a confronto, studiando la risposta di sistemi ad un grado di libertà sottoposti a forzante armonica.

L'introduzione dell'indice di smorzamento equivalente permette di scrivere l'equazione del moto del problema non-lineare in termini impliciti, dividendo, come usualmente si fa, ambo i membri per la massa. Operando in questo modo si riduce il numero delle variabili, definendo il termine relativo alla frequenza. L'equazione scritta in questi termini presenta due importanti proprietà: la dipendenza lineare della risposta dalla ampiezza della forzante e la dipendenza della risposta dal rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale e non dai loro valori assoluti.

Tutti i risultati fin qui esposti saranno nell'ultimo paragrafo estesi per forzante qualsiasi.

DESIGN METHODS PROPOSED IN LITERATURE

In this chapter the more widespread design methods proposed in literature for

structures equipped by fluid-viscous dampers are introduced. In the first part the response of sdf systems in the case of harmonic external force is studied, in the last part the response in the case of random external force is discussed.

In the first section the equations of motion in the case of an elastic-linear sdf system equipped with a non-linear fluid-viscous damper undergoing a harmonic force are introduced. This differential problem is analytically quite complex and it's not possible to be solved in a closed form. Therefore some authors have proposed approximate solution methods. The more widespread methods are based on equivalence principles between a non-linear device and an equivalent linear one. Operating in this way it is possible to define an equivalent damping ratio and the problem becomes linear; the solution of the equivalent problem is well-known.

In the following section two techniques of linearization, proposed by some authors in literature, are described: the first technique is based on the equivalence of the energy dissipated by the two devices and the second one is based on the equivalence of power consumption. After that we compare these two techniques by studying the response of a sdf system undergoing a harmonic force.

By introducing the equivalent damping ratio we can write the equation of motion of the non-linear differential problem in an implicit form, by dividing, as usual, for the mass of the system. In this way, we get a reduction of the number of variables, by introducing the natural frequency of the system. The equation of motion written in this form has two important properties: the response is linear dependent on the amplitude of the external force and the response is dependent on the ratio of the frequency of the external harmonic force and the natural frequency of the system only, and not on their single values.

All these considerations, in the last section, are extended to the case of a random external force.

2.1 Equazioni del moto “esplicita”

Nel presente paragrafo ci occuperemo di scrivere le equazioni del moto di un sistema ad un grado di libertà indefinitamente elastico dotato di un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare, sottoposto ad una forzante esterna applicata al piede.

Indichiamo con m la massa del sistema (la massa del dissipatore è di solito

trascurabile), con c il coefficiente di smorzamento interno del sistema, con k la rigidità del sistema (abbiamo visto che per le frequenze principali del sistema il dissipatore può essere considerato a rigidità nulla), con c_α , il coefficiente di proporzionalità della forza dissipata nel dissipatore e con α , l'esponente della velocità nel termine relativo alla forza dissipata nel dissipatore. Se ipotizziamo la forzante come una accelerazione applicata al piede, indicata con $\ddot{u}_g(t)$, l'equazione del moto sarà la seguente:

$$(2.1) \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + c_\alpha \operatorname{sgn}(\dot{u})|\dot{u}|^\alpha = -m\ddot{u}_g(t)$$

Dove u è il grado di libertà del problema e rappresenta lo spostamento della massa m rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il “piede” del sistema oggetto di studio. Il termine $\omega = \sqrt{k/m}$, viene definito frequenza naturale del sistema. L'equazione (2.1) presuppone che il dissipatore agisca direttamente sulla massa m e che sia disposto lungo la direzione dello spostamento u . Definiamo la scrittura (2.1) dell'equazione del moto “esplicita”, in quanto tutte le variabili sono riportate in forma diretta.

L'equazione del moto (2.1) non può essere risolta in forma chiusa nemmeno nel caso in cui il termine relativo alla forzante sia di tipo armonico. Pertanto la risoluzione può avvenire soltanto attraverso metodi numerici. In letteratura sono state proposte varie tecniche di integrazione dell'equazione (2.1), si veda ad esempio *Terenzi, “Dynamics of Sdof Systems with Nonlinear Viscous Damping”, Journal of Engineering Mechanics, 1999*. In appendice A riportiamo le analisi svolte utilizzando 4 diversi metodi di integrazione, al fine di individuare il metodo che fosse in grado di individuare la risposta del sistema con sufficiente accuratezza ed elevata velocità. Dal confronto si è optata di utilizzare per tutte le analisi effettuate in questo lavoro il Metodo di Eulero Modificato. Per i dettagli si rimando all'appendice A.

Se adesso specializziamo la (2.1) nel caso di forzante armonica sarà possibile scrivere:

$$(2.2) \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku + c_\alpha \operatorname{sgn}(\dot{u})|\dot{u}|^\alpha = -m\ddot{u}_{g,0} \sin(\Omega t)$$

Dove con $\ddot{u}_{g,0}$ abbiamo indicato l'ampiezza della forzante e con Ω la frequenza

della forzante. Mostreremo che la risposta del sistema $u(t)$ del problema riportato in (2.2), a causa del termine non lineare relativo al dissipatore, dipende in modo non lineare dell'ampiezza della forzante e dal suo contenuto in frequenza.

E' stata risolta per via numerica l'equazione (2.2) per valori del rapporto c_0/m pari a 0.50, 1.00, 2.00 e dell'esponente α pari a 0.20, 0.50, 0.70, 1.00, variando il valore della frequenza della forzante, ma mantenendo inalterato il rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale del sistema, per un valore fissato dell'indice di smorzamento interno pari al 5%. L'ampiezza della forzante è stata posta pari a 0.25g. La risposta viene identificata da un termine adimensionale, denominato fattore di amplificazione, che risulta essere pari al rapporto tra l'ampiezza massima della risposta u_0 e il valore di u nel caso in cui sia applicata staticamente una forza alla massa m di intensità pari all'ampiezza della forzante. Riportiamo l'andamento del fattore di amplificazione al variare del periodo della forzante, definito come $T_0=2\pi/\Omega$, per rapporti tra le frequenze pari a 2.00, 1.00 e 0.50.

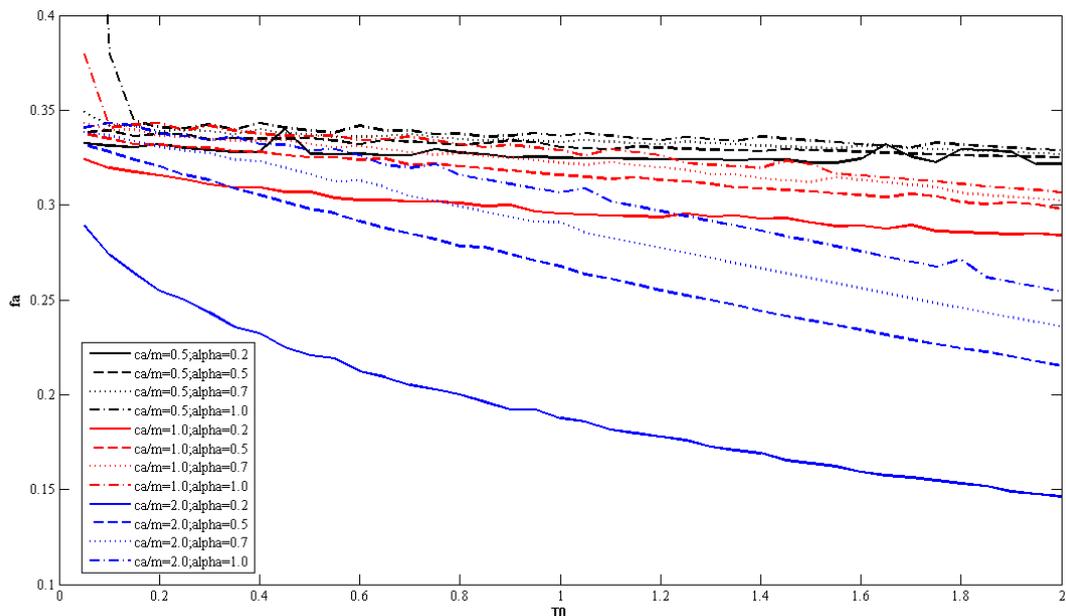


Figura 2.1. Andamento del fattore di amplificazione, dedotto dalla risoluzione dell'equazione del moto in forma esplicita, per $\Omega/\omega=2.00$

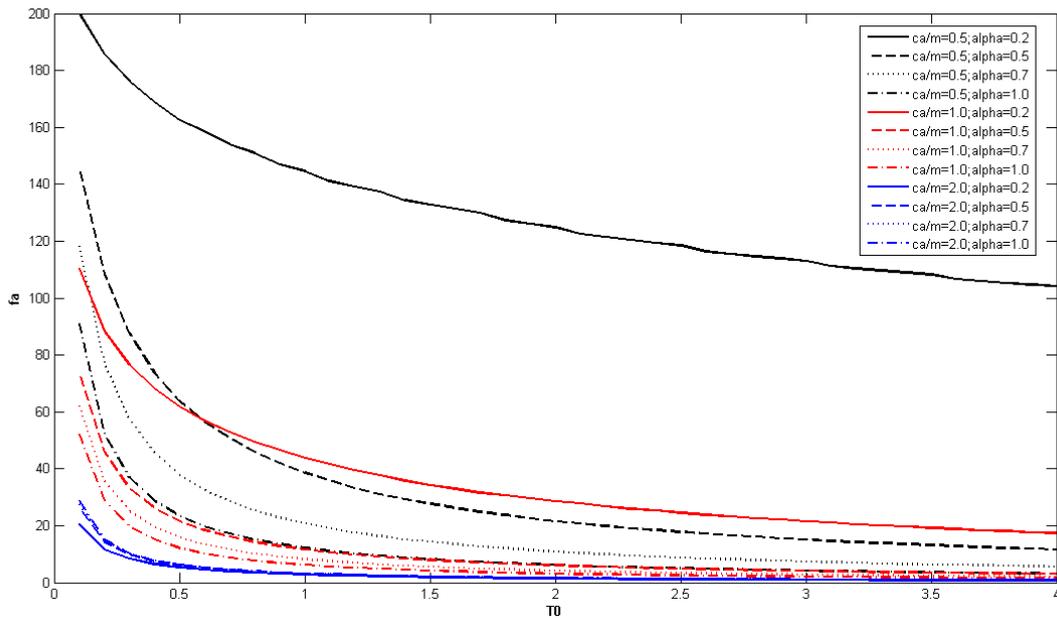


Figura 2.2. Andamento del fattore di amplificazione, dedotto dalla risoluzione dell'equazione del moto in forma esplicita, per $\Omega/\omega=1.00$

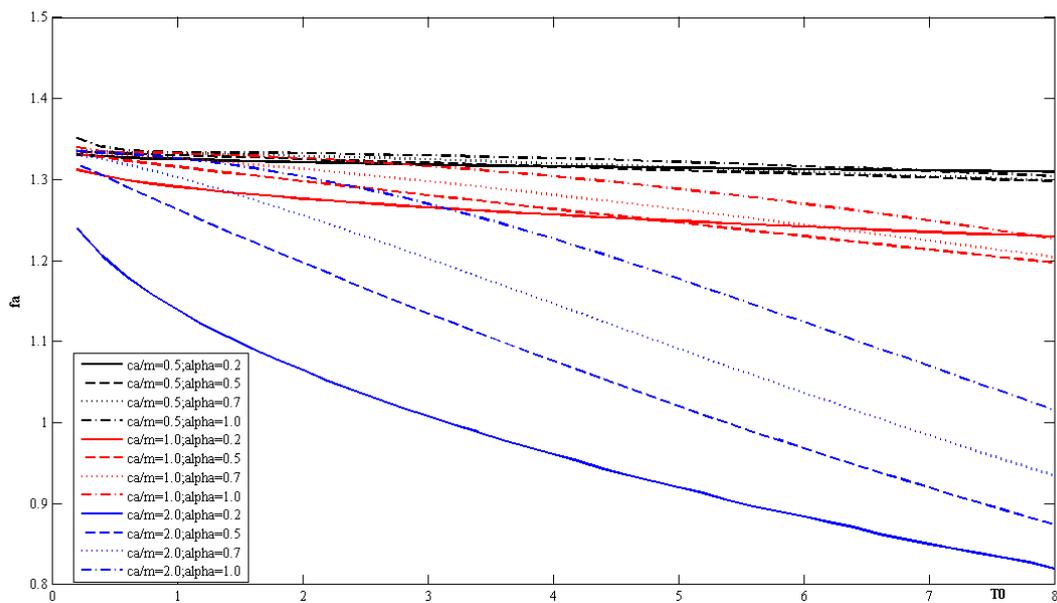


Figura 2.3. Andamento del fattore di amplificazione, dedotto dalla risoluzione dell'equazione del moto in forma esplicita, per $\Omega/\omega=0.50$

Si desidera evidenziare che anche la risposta per $\alpha=1.00$, risulta essere influenzata dalla frequenza della forzante, per valori fissati della frequenza naturale, sebbene il problema sia lineare. Questo accade anche nella formulazione classica, in quanto l'indice di smorzamento contiene la frequenza naturale: al variare di questa varia anche il valore dell'indice di smorzamento e quindi il valore del fattore di amplificazione.

2.2 Criteri di Equivalenza

Il problema della valutazione della risposta, così come è stato esposto nella sua forma integrale nelle equazioni del moto (2.1) e (2.2), presenta una notevole complessità. Alcuni autori hanno suggerito di valutare la risposta in modo approssimato, sostituendo il termine relativo al dissipatore, fortemente non lineare, con un termine lineare, di modo che il problema potesse essere risolto secondo le formulazioni classiche della dinamica strutturale. Formalmente quello che si desidera fare è sostituire il dissipatore non-lineare con un dissipatore a comportamento lineare equivalente. Sono state proposte diverse metodologie per identificare i parametri caratteristici del dissipatore equivalente. Di seguito riportiamo le due metodologie più diffuse.

2.2.1 Equivalenza della Energia Dissipata

Il criterio di equivalenza che descriviamo in questo capitolo prevede di individuare i parametri caratteristici del dissipatore equivalente attraverso l'uguaglianza delle energie dissipate nei due dispositivi sottoposti ad una medesima storia di spostamenti armonica, in un ciclo a regime e in condizioni di risonanza. Quest'ultima condizione si rivela necessaria nel caso in cui la forzante sia di natura qualsiasi, per cui non è possibile individuare la frequenza della forzante, mentre è possibile individuare la frequenza naturale del sistema. Questo fatto porta ad una approssimazione, anche se occorre evidenziare che gli effetti maggiori della dissipazione si hanno per forzanti che hanno un contenuto in frequenza prossimo a quello naturale del sistema e quindi tale approssimazione risulta essere lecita. Questo criterio di equivalenza è stato adottato da autori quali *Constantinou* e *Chopra*, ed è largamente il più diffuso, tanto che è stato inserito nei codici americani.

Occorre inizialmente calcolare l'energia dissipata da un dissipatore non lineare sottoposto ad una storia di spostamenti armonica del tipo:

$$(2.3) \quad u(t) = u_0 \sin(\Omega t)$$

Dove Ω è la frequenza della forzante. L'energia dissipata in ciclo, E_D , a regime nel dissipatore sarà pari a:

$$(2.4) \quad E_D = \oint f_D du = \int_0^{2\pi} f_D \dot{u} dt = \int_0^{2\pi} c_\alpha |\dot{u}|^{1+\alpha} dt$$

L'integrale proposto in (2.4) è stato risolto da Symans e Constantinou nel 1999. La soluzione è la seguente:

$$(2.5) \quad E_D = \pi\beta c_\alpha \Omega^\alpha u_0^{1+\alpha}$$

Dove β è pari a:

$$(2.6) \quad \beta = \frac{2^{2+\alpha} \Gamma^2(1 + \alpha/2)}{\pi \Gamma(2 + \alpha)}$$

E dove Γ è la funzione gamma. Il coefficiente β ha valore unitario per $\alpha=1.00$ ed è stato tabulato nei codici americani, in funzione dell'esponente α , in quanto dipende solo da quest'ultimo.

Allo stesso modo è possibile procedere per un dissipatore lineare, il cui parametro caratteristico risulta essere il coefficiente di smorzamento c_l , e ottenere:

$$(2.7) \quad E_D = \pi c_l \Omega u_0^2$$

Uguagliando la (2.5) alla (2.7) si ottiene il coefficiente di smorzamento c_l del dissipatore lineare equivalente. Questo sarà pari a

$$(2.8) \quad c_l = c_\alpha \frac{\beta}{(\Omega u_0)^{1-\alpha}}$$

Si desidera sottolineare che la (2.8) diviene $c_\alpha = c_l$ per α pari a 1.00, come era lecito attendersi.

2.2.2 Equivalenza della Potenza Dissipata

Altri autori, quali Peckan, sostengono che sia più corretto realizzare l'equivalenza in termini di potenza dissipata, in quanto il dispositivo ha una risposta che è funzione della velocità e non degli spostamenti. La potenza dissipata da un dissipatore non lineare sottoposto ad una storia di spostamenti armonica del tipo riportato in (2.3) è del tipo:

$$(2.9) \quad P_D = \oint f_D d\dot{u} = 2 \int_0^{u_0} c_\alpha |\dot{u}|^\alpha d\dot{u} = \frac{2}{1+\alpha} c_\alpha \dot{u}_0^{1+\alpha}$$

Allo stesso modo è possibile procedere per un dissipatore lineare e ottenere:

$$(2.10) \quad P_D = \oint f_D d\dot{u} = 2 \int_0^{u_0} c_1 \dot{u} d\dot{u} = c_1 \dot{u}_0^2$$

Uguagliando la (2.7) alla (2.8) ottengo lo smorzamento c_1 , del dissipatore lineare equivalente. Questo sarà pari a

$$(2.11) \quad c_1 = c_\alpha \frac{2}{1+\alpha} \frac{1}{u_0^{1-\alpha}}$$

2.2.3 Confronto dei Criteri di Equivalenza

I due criteri di equivalenza producono dei risultati diversi. Nel presente paragrafo ci occuperemo di analizzare le differenze. In sostanza si può osservare che i due criteri conducono ad individuare due dissipatori lineari equivalenti caratterizzati da due diversi valori dell'indice di smorzamento ξ_{sd} , espresso come $c_1/2m\omega$.

Dal momento che $\dot{u}_0 = \Omega u_0$, posso scrivere l'indice di smorzamento del dissipatore equivalente, indicando con ω , la frequenza naturale del sistema, secondo i due criteri appena descritti, utilizzando la (2.8) e la (2.11), come segue:

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_{sd,E} = \kappa_E \frac{1}{2m\omega} \frac{c_\alpha}{(\Omega u_0)^{1-\alpha}} \\ \xi_{sd,P} = \kappa_P \frac{1}{2m\omega} \frac{c_\alpha}{(\Omega u_0)^{1-\alpha}} \\ \kappa_E = \beta \\ \kappa_P = \frac{2}{1+\alpha} \end{array} \right.$$

Dalla (2.12) si vede che i due valori dell'indice di smorzamento differiscono solo per i coefficienti κ_E e κ_P , i quali dipendono soltanto dall'esponente α . Nella figura che segue si riportano gli andamenti di tali coefficienti.

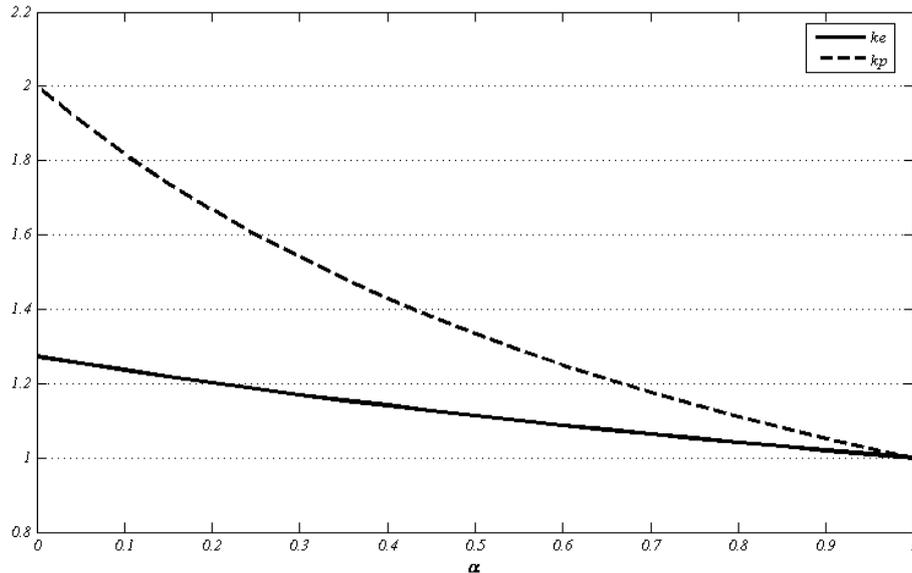


Figura 2.4 Coefficienti κ per Equivalenza Energetica e in Potenza

Nella figura 2.4 si vede come l'approccio in termini di potenza tenda a sovrastimare l'indice di smorzamento del dissipatore lineare equivalente, soprattutto per valori di α prossimi a 0 (comportamento di un dispositivo ad attrito): circa il 17% per $\alpha=0.50$, circa il 28% per $\alpha=0.20$.

Occorre sottolineare che usualmente il dimensionamento dei dissipatori non-lineari viene effettuato sostituendo nella equazione del moto un dissipatore lineare equivalente. Così operando si giunge ad una formulazione per la quale i risultati sono noti, ma occorre prestare molta attenzione nella scelta della metodologia di equivalenza, in quanto questa può incidere fortemente sull'indice di smorzamento del sistema.

In linea generale si può affermare che l'approccio energetico sia più attendibile nella valutazione degli spostamenti del sistema, mentre l'approccio in termini di potenza risulti più affidabile quando si desidera valutare la velocità relativa effettiva tra i nodi di estremità del dispositivo e quindi quando si desidera dimensionare correttamente il dispositivo stesso.

2.2.4 Grado di Approssimazione dei Criteri di Equivalenza

In questo paragrafo si desidera procedere ad un confronto critico tra la risposta di un sistema elastico-lineare ad un grado di libertà dotato di un dissipatore non-lineare e la risposta dello stesso sistema dotato di un dissipatore lineare in grado di dissipare la stessa quantità di energia in ciclo di spostamenti indotti di tipo armonico (approccio

energetico).

Il punto di partenza per le considerazioni che seguiranno sarà l'articolo di Chopra pubblicato nel 2002 sulla rivista *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, dal titolo “*Earthquake Response of Elastic SDF Systems with non-linear fluid viscous dampers*”.

La forza che i due dissipatori di confronto devono sopportare risulta essere pari a:

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{D, \alpha < 1} = c_{\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^{\alpha} \\ f_{D, \alpha = 1} = c_1 \dot{u} \end{array} \right\}$$

Per cui ricordando la (2.8) è possibile scrivere il rapporto tra la forza nel dissipatore non-lineare al tempo t , $f_D(t)$, e la forza massima nel dissipatore lineare equivalente, $f_{D0(\alpha=1)}$, pari a $c_1 \dot{u}_0$, nel modo seguente:

$$(2.14) \quad \frac{f_D(t)}{f_{D0(\alpha=1)}} = \frac{c_{\alpha}}{c_1 \dot{u}_0} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^{\alpha} = \frac{(\Omega u_0)^{1-\alpha}}{\beta_{\alpha}} \frac{1}{\dot{u}_0} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^{\alpha}$$

Il rapporto espresso in (2.14) viene riportato in figura 2.5 in funzione del rapporto u/u_0 , per una storia di spostamenti indotti del tipo $u(t) = u_0 \sin(\Omega t)$.

Le curve rappresentate in figura 2.5 sono state tracciate per $\alpha = 0, 0.50, 1.00$. Le curve sottendono tutte la medesima area: infatti tale superficie risulta essere pari all'energia dissipata nei dispositivi per uno stesso ciclo di spostamenti e siccome tutti i dispositivi sono equivalenti, in termini energetici, al medesimo dispositivo lineare, dissipano necessariamente la stessa energia per un ciclo a regime.

Per $\alpha = 0$ il dispositivo assume il comportamento di un dispositivo ad attrito.

Per $\alpha = 1$, la curva risulta essere una circonferenza.

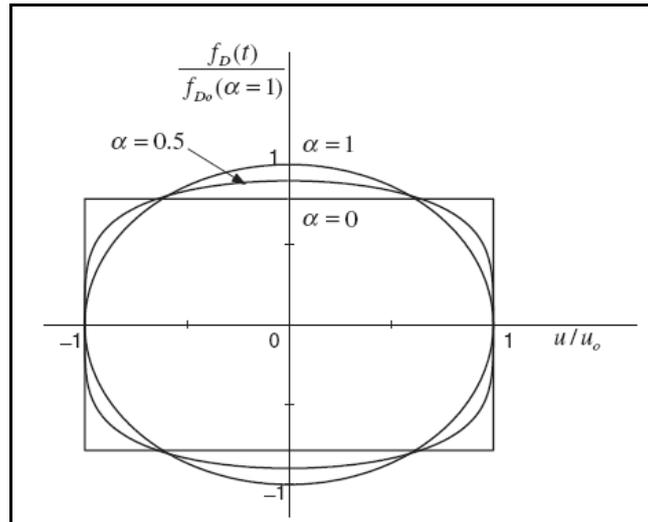


Figura 2.5

Dalla figura si evince che la forza nel dissipatore non-lineare per valori bassi del rapporto u/u_0 risulta essere inferiore a quella nel dissipatore lineare equivalente, mentre per valori prossimi all'unità del valore u/u_0 risulta essere superiore.

Risulta a questo punto interessante valutare l'andamento del rapporto dei valori di picco delle forze nei due dissipatori di confronto, non-lineare e lineare. La massima forza nel dissipatore non lineare vale $c_\alpha \dot{u}_0^\alpha$, e quindi ricordando la (2.14) si può scrivere come segue:

$$(2.15) \quad \frac{f_{D0(\alpha < 1)}}{f_{D0(\alpha = 1)}} = \frac{1}{\beta_\alpha} \left(\frac{\Omega u_0}{\dot{u}_0} \right)^{1-\alpha}$$

Risulta evidente che la (2.15) diviene pari a $1/\beta_\alpha$ per una storia di spostamenti indotti pari a $u(t) = u_0 \sin(\Omega t)$ in quanto si ha $\Omega u_0 = \dot{u}_0$. In questo caso il rapporto (2.15) è funzione solo di α e vale 0.90 per $\alpha=0.50$, $\pi/4$ per $\alpha=0.00$. Si può quindi affermare che la forza nel dissipatore, a parità di spostamenti indotti, decresce al diminuire di α .

Nel caso in cui si volesse studiare l'andamento della (2.15) per una storia di spostamenti qualsiasi l'autore suggerisce di operare sostituendo nella (2.15) il valore della frequenza naturale del sistema ω al posto della frequenza sollecitante Ω . Si afferma che questo passaggio risulti lecito in quanto la risposta del sistema è più sensibile per storie di spostamenti con frequenze prossime a quelle naturali del sistema; questa affermazione sottende, però, che l'approccio energetico di equivalenza (il quale ha significato soltanto per una storia di spostamenti indotti di tipo armonico) espresso in condizioni di risonanza abbia una validità generale anche per storie di spostamenti di

qualsiasi tipo. Quindi in caso di storie di spostamenti qualsiasi la (2.15) diviene:

$$(2.16) \quad \frac{f_{D0(\alpha < 1)}}{f_{D0(\alpha = 1)}} = \frac{1}{\beta_\alpha} \left(\frac{V}{\dot{u}_0} \right)^{1-\alpha}$$

Dove $V = \omega u_0$, rappresenta la pseudo-velocità spettrale per il sistema ad un grado di libertà. Nella figura 2.6 si riporta l'andamento della (2.14).

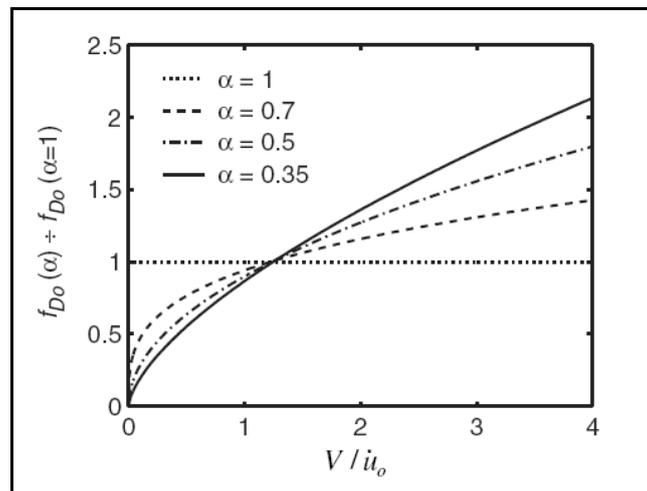


Figura 2.6

Dalla figura 2.6 si evince che esiste un valore del rapporto V/\dot{u}_0 , nell'intorno del quale, indipendentemente dal valore di α , il rapporto tra la forza di picco nel dissipatore non-lineare e la forza di picco nel dissipatore lineare assume il valore unitario. Per valori inferiori di tale rapporto V/\dot{u}_0 , la forza nel dissipatore cresce al crescere di α , per valori superiori la forza nel dissipatore cresce al diminuire di α . Per ricavare tale valore basta porre la (2.16) pari a 1 e risolvere per V/\dot{u}_0 . Operando in questo modo si ottiene $V/\dot{u}_0 = \beta_\alpha^{1/(1-\alpha)}$, che vale 1.23 per $\alpha=0.70$, 1.24 per $\alpha=0.50$, 1.25 per $\alpha=0.35$. Si fa notare inoltre che nel caso di forzante armonica, con frequenza pari alla frequenza naturale del sistema il rapporto V/\dot{u}_0 vale 1 e quindi il rapporto tra la massima forza nel dissipatore non-lineare e la forza massima nel dissipatore lineare equivalente è pari a $1/\beta_\alpha$ e quindi sempre minore di 1, ricordando la (2.6).

Questo risultato potrebbe essere utilizzato anche in ottica progettuale: V dipende dalle caratteristiche del sistema e dalla massima velocità di risposta del sistema; una

volta nota la velocità massima del sistema \dot{u}_0 (ad esempio stabilendo un valore dell'indice di smorzamento che permetta alla struttura di raggiungere determinate performance), posso ricavare il rapporto V/\dot{u}_0 , valutare se sia superiore o inferiore a $\beta_\alpha^{1/(1-\alpha)}$ e quindi stabilire se sia più conveniente utilizzare un dissipatore lineare oppure un dissipatore non-lineare.

Ci si potrebbe a questo punto chiedere se operando secondo un approccio di equivalenza in termini di potenza, si giunga agli stessi risultati. Evidentemente no. Però l'impostazione generale non muta e quindi neppure l'andamento dei risultati. Si possono riscrivere la (2.14), (2.15), (2.16) come segue:

$$(2.17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_D(t)}{f_{D0(\alpha=1)}} = (\Omega u_0)^{1-\alpha} \frac{1+\alpha}{2} \frac{1}{\dot{u}_0} \text{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha \\ \frac{f_{D0(\alpha<1)}}{f_{D0(\alpha=1)}} = \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{\Omega u_0}{\dot{u}_0} \right)^{1-\alpha} \\ \frac{f_{D0(\alpha<1)}}{f_{D0(\alpha=1)}} = \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{V}{\dot{u}_0} \right)^{1-\alpha} \end{array} \right.$$

Quindi il valore del rapporto V/\dot{u}_0 per cui la forza nel dissipatore non-lineare uguaglia la forza nel dissipatore lineare vale $(2/1+\alpha)^{1/(1-\alpha)}$. Questo vale 1.72 per $\alpha=0.70$, 1.78 per $\alpha=0.50$ e 1.83 per $\alpha=0.35$. Con l'approccio in termini di potenza si vede che il punto di uguaglianza delle forze è spostato verso valori più bassi della velocità massima \dot{u}_0 , a parità di caratteristiche del sistema. Rimane comunque il fatto che il punto di uguaglianza è pressochè indipendente dal valore di a .

A titolo esemplificativo dei concetti appena esposti riportiamo i risultati di un sistema costituito da un oscillatore semplice e da un dissipatore non-lineare.

L'oscillatore sarà dotato delle seguenti caratteristiche:

$$- m = 1000\text{kg}; k = 1000\text{N/m}; c = 100\text{N}\cdot\text{sec/m}.$$

Per cui avremo i seguenti valori dei parametri caratteristici per l'oscillatore semplice:

$$- \omega = 1\text{sec}^{-1}; \xi_0 = 0.05.$$

Per quanto concerne il dissipatore avremo i seguenti valori caratteristici:

$$- \alpha = 0.20; c_{\alpha} = 400N*(\text{sec/m})^{0.20}.$$

Per quanto riguarda i valori caratteristici del dissipatore avremo, ricordando le (2.12):

$$- \kappa_E = 1.2014; \kappa_P = 1.6667.$$

Si sottolinea che per stimare il parametro adimensionale di riferimento per il dissipatore lineare equivalente (coefficiente di smorzamento, c_l), occorre conoscere la risposta. Per questo motivo verrà risolta, inizialmente, l'equazione del moto in forma esplicita per il sistema dotato di dissipatore non-lineare; verrà, successivamente, stimato il valore del coefficiente di smorzamento secondo i due approcci, energetico e in termini di potenza, secondariamente verrà risolta l'equazione del moto del sistema dotato del dissipatore lineare equivalente. Il sistema sarà sottoposto ad una forzante di tipo armonico la cui frequenza sarà modulata in modo che il rapporto con la frequenza naturale del sistema valga 0.50, 1.00, 2.00 e la cui ampiezza, in termini di accelerazione, sarà pari a 0.25g.

Nelle tabelle che seguono riportiamo i risultati, con la notazione che segue: ξ_{sd} , indice di smorzamento equivalente, u_{0_ex} , spostamento massimo sistema con dissipatore non lineare, $u_{0_approx.}$, spostamento massimo sistema con dissipatore lineare equivalente, v_{0_ex} , velocità massima sistema con dissipatore non lineare, $v_{0_approx.}$, velocità massima sistema con dissipatore lineare equivalente, E_u , errore percentuale nella stima dello spostamento, E_v , errore percentuale nella stima della velocità.

CASO 1	$\Omega/\omega = 1.00$						
METODO	ξ_{sd} (%)	u_{0_ex} (m)	$u_{0_approx.}$ (m)	v_{0_ex} (m/sec)	$v_{0_approx.}$ (m/sec)	E_u (%)	E_v (%)
ENERGETICO	2.59	16.18	16.18	16.17	16.19	0.00	0.12
POTENZA	3.60		14.29		14.30	11.62	11.20

Tabella 2.1

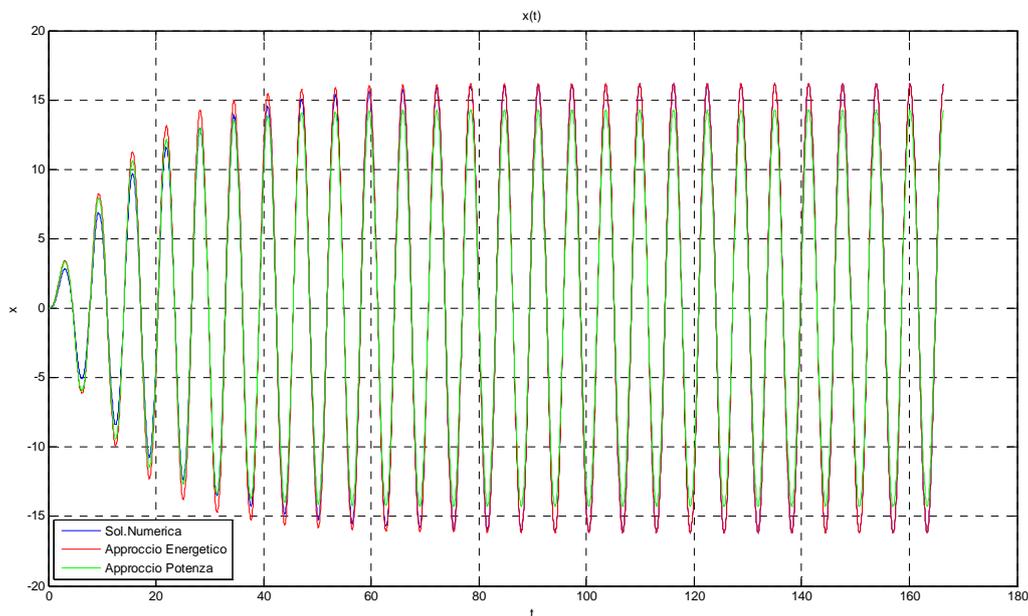
CASO 2	$\Omega/\omega = 0.50$						
METODO	ξ_{sd} (%)	u_{0_ex} (m)	$u_{0_approx.}$ (m)	v_{0_ex} (m/sec)	$v_{0_approx.}$ (m/sec)	E_u (%)	E_v (%)
ENERGETICO	9.67	3.119	3.157	1.64	1.579	1.22	3.72
POTENZA	13.42		3.115		1.558	0.13	5.00

Tabella 2.2

CASO 3	$\Omega/\omega = 2.00$						
METODO	ξ_{sd} (%)	u_{0_ex} (m)	$u_{0_approx.}$ (m)	v_{0_ex} (m/sec)	$v_{0_approx.}$ (m/sec)	E_u (%)	E_v (%)
ENERGETICO	29.03	0.789	0.755	1.580	1.511	4.31	4.37
POTENZA	40.27		0.712		1.425	9.76	9.81

Tabella 2.3

Nelle figure che seguono riportiamo gli andamenti della risposta in termini di spostamenti e di velocità per i 3 casi esaminati.

Figura 2.7. Andamento degli Spostamenti per $\Omega/\omega = 1.00$

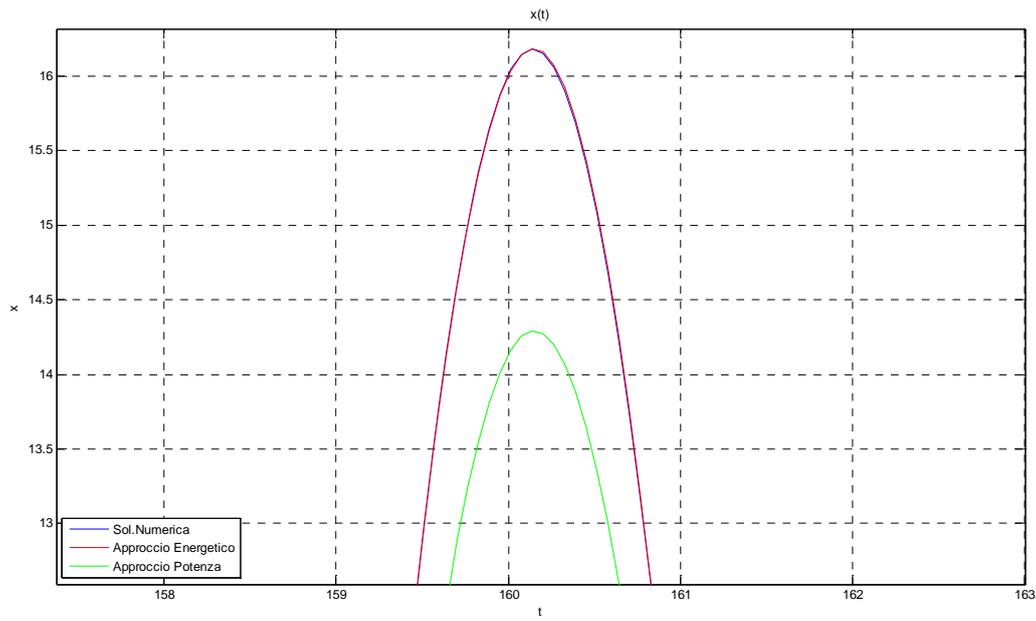


Figura 2.8. Zoom dell'andamento degli spostamenti per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega=1.00$

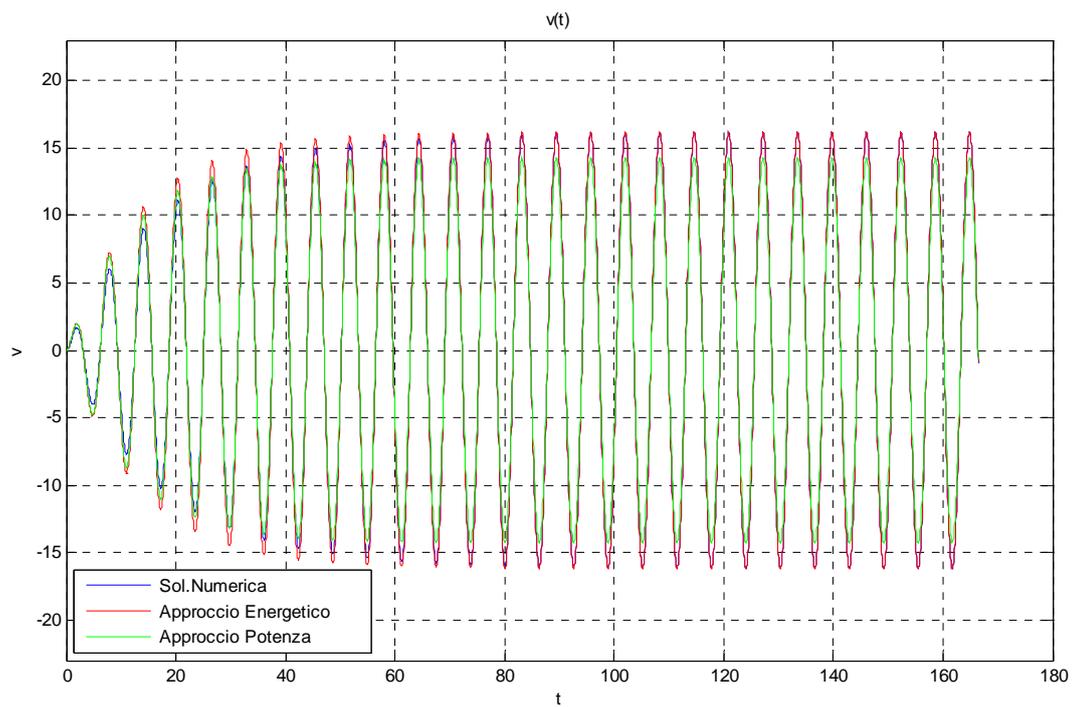


Figura 2.9. Andamento della Velocità per $\Omega/\omega=1.00$

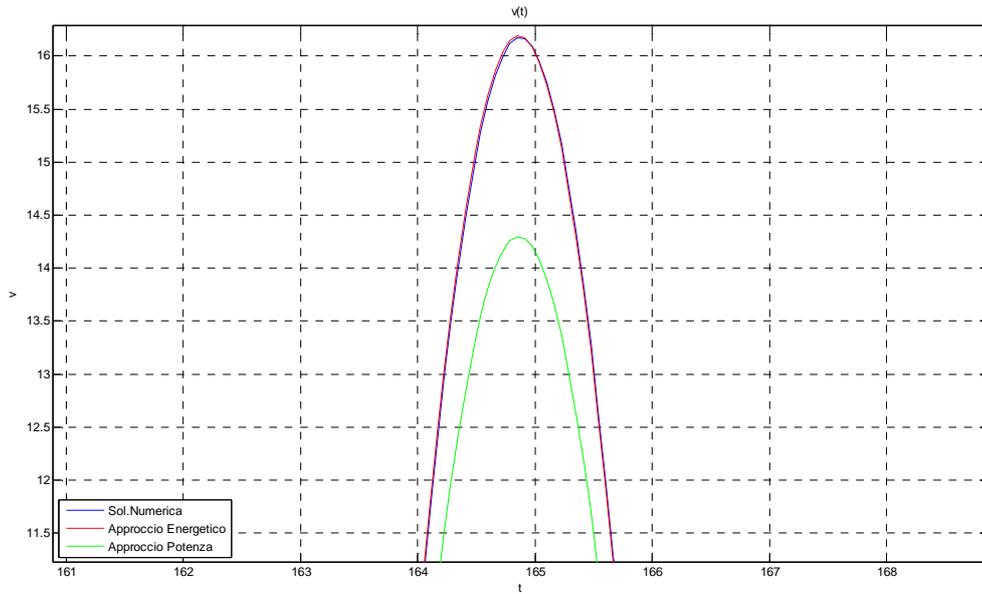


Figura 2.10. Zoom dell'andamento della velocità per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega = 1.00$

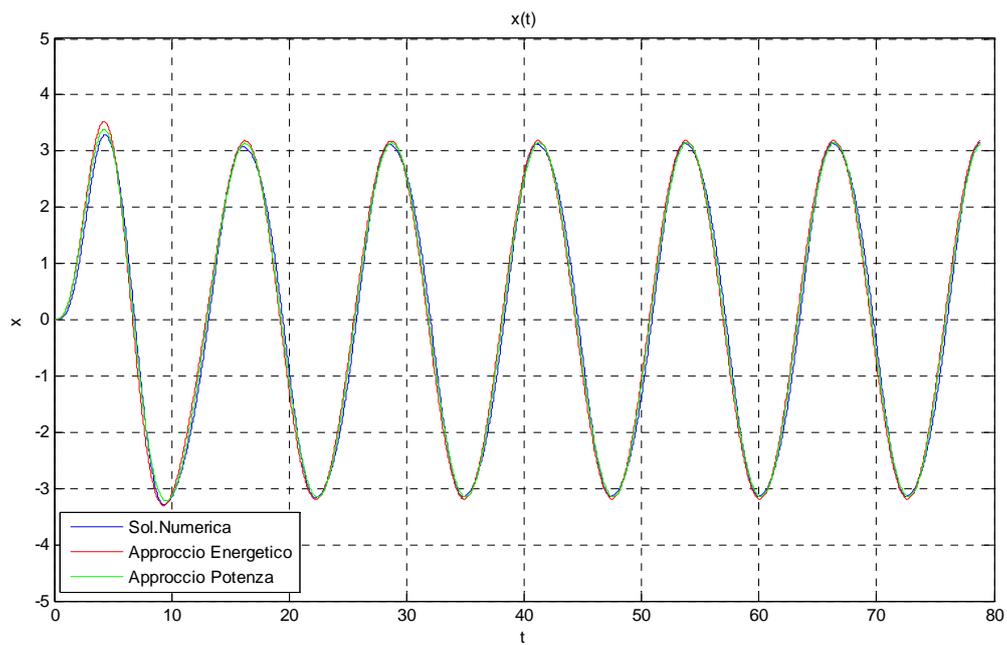


Figura 2.11. Andamento degli Spostamenti per $\Omega/\omega = 0.50$

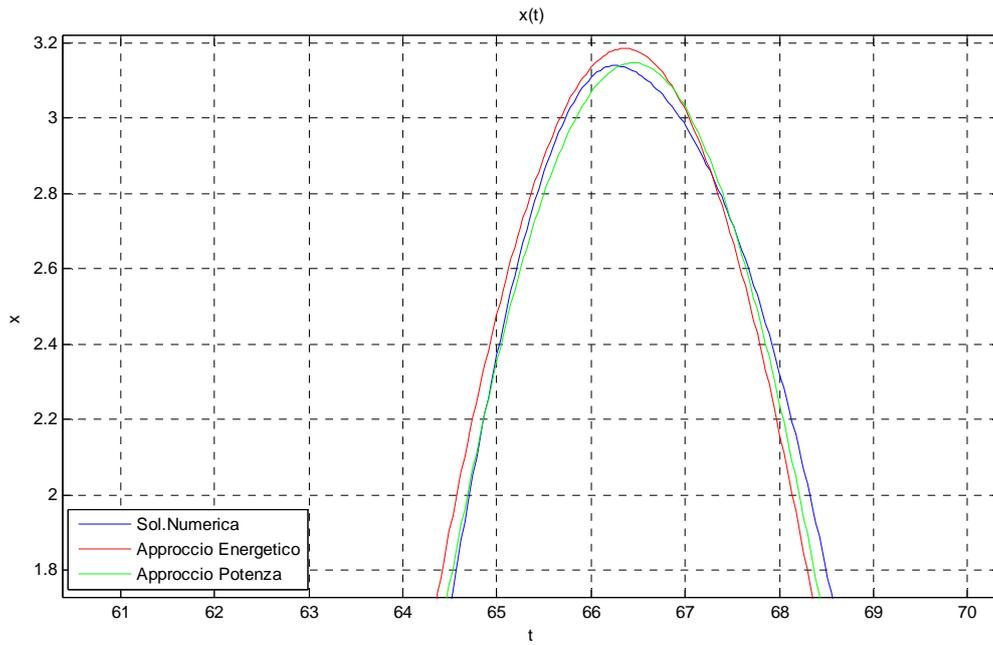


Figura 2.12. Zoom dell'andamento degli spostamenti per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega=0.50$

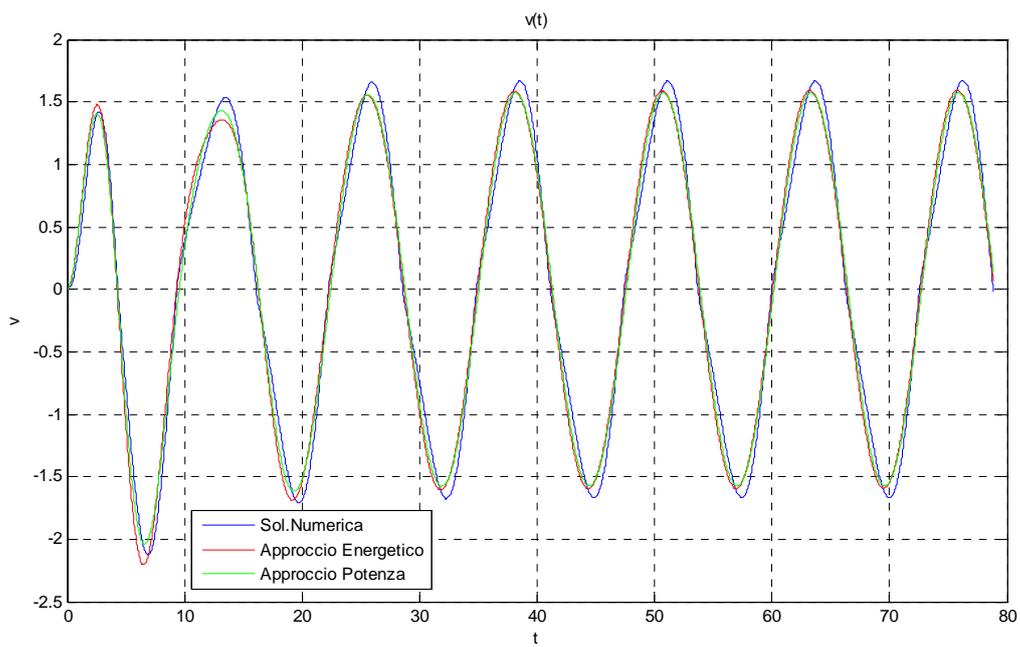


Figura 2.13. Andamento della Velocità per $\Omega/\omega=0.50$

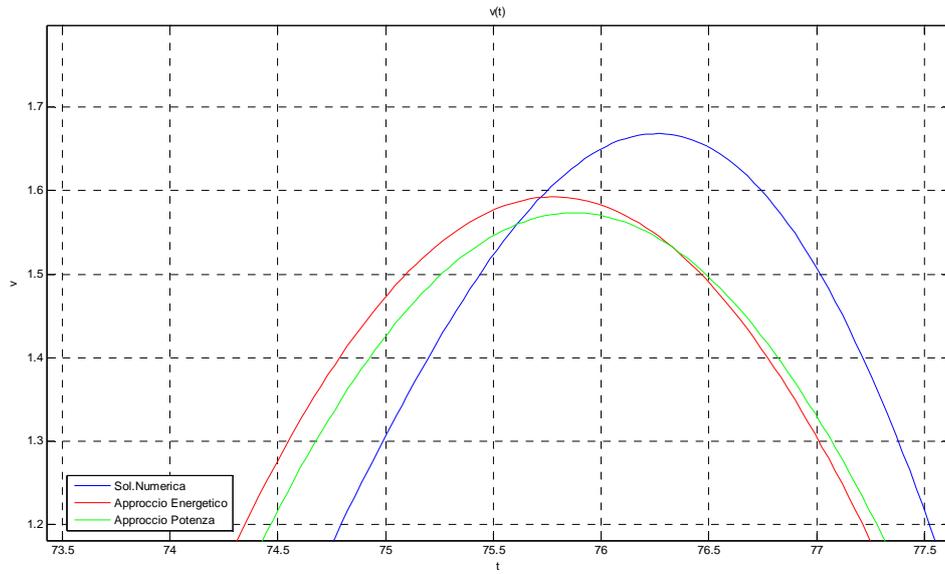


Figura 2.14. Zoom dell'andamento della velocità per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega = 0.50$

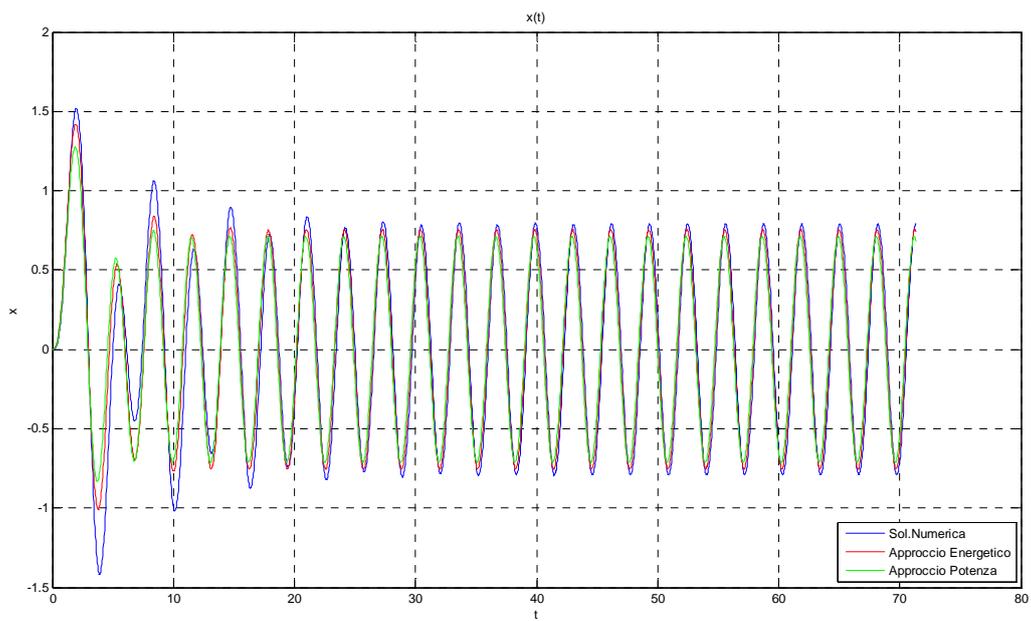


Figura 2.15. Andamento degli Spostamenti per $\Omega/\omega = 2.00$

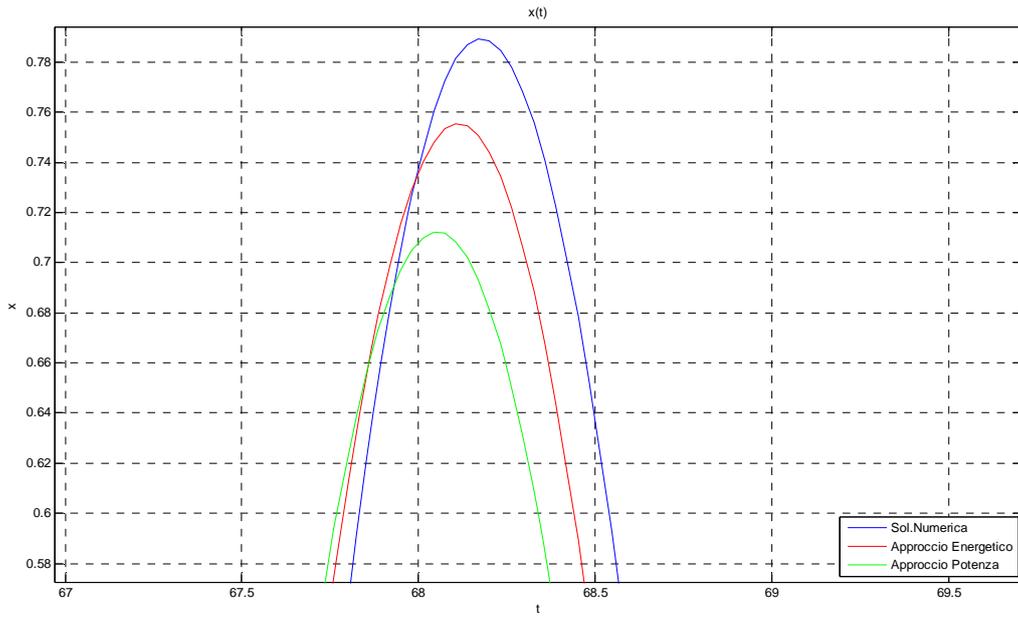


Figura 2.16. Zoom dell'andamento degli spostamenti per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega = 2.00$

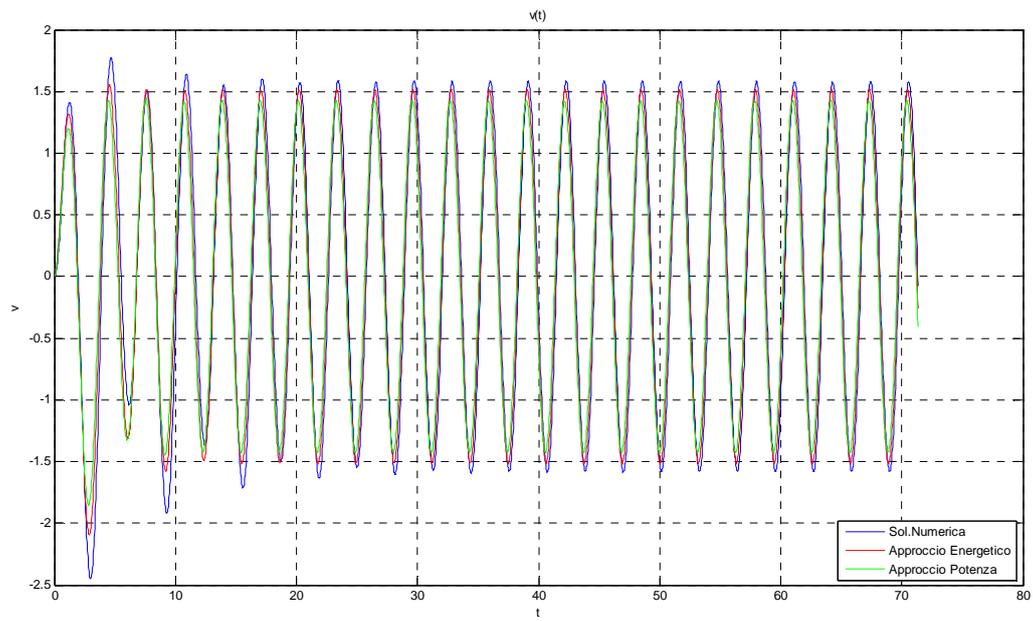


Figura 2.17. Andamento della Velocità per $\Omega/\omega = 0.50$

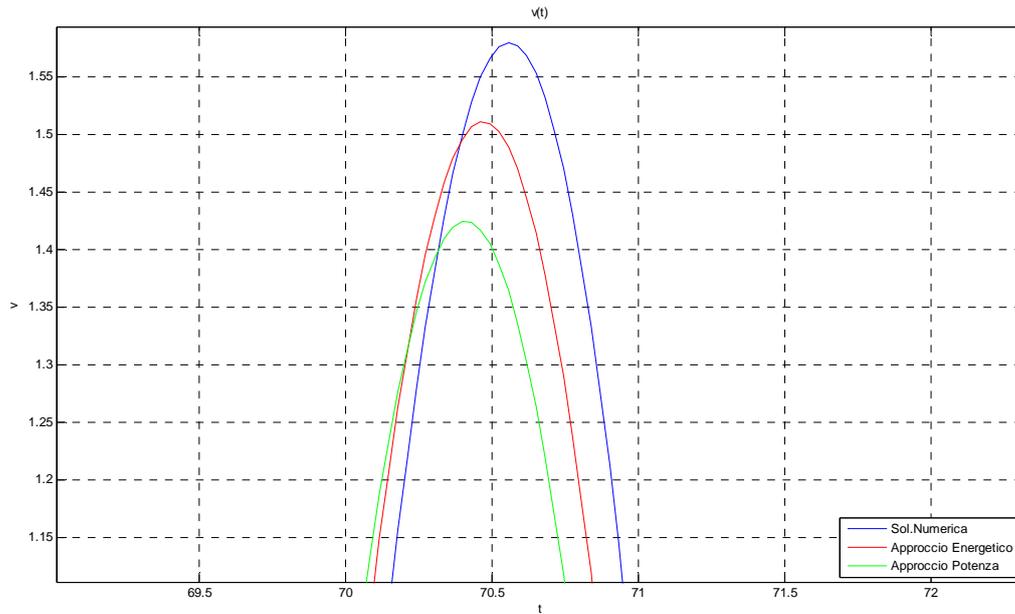


Figura 2.18. Zoom dell'andamento della velocità per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega=2.00$

Sulla base dei risultati ottenuti è possibile argomentare quanto segue:

I sistemi dotati di dissipatori lineari equivalenti riescono a riprodurre la risposta del rispettivo sistema dotato di dissipatore non-lineare in modo molto soddisfacente in prossimità della condizione di risonanza e in modo meno accurato per frequenze più distanti dalla condizione di risonanza. (errori del 10%).

In linea generale l'approccio di equivalenza energetica riesce a simulare meglio la risposta del sistema dotato di dissipatore non-lineare. In condizioni di risonanza riproduce esattamente la risposta. Il metodo energetico stima meglio anche la velocità di picco. In definitiva l'approccio in termini di potenza tende a sovrastimare l'indice di smorzamento, producendo una risposta troppo attenuata.

La risposta del sistema dotato di dissipatore lineare equivalente risulta essere in ritardo di fase rispetto alla risposta del sistema dotato di dissipatore non-lineare (vedi zoom), in tutte le analisi svolte, a parte la condizione di risonanza.

Per frequenze elevate della forzante ($\Omega/\omega=2.00$) entrambi i sistemi lineari equivalenti sottostimano la risposta del sistema dotato di dissipatore non lineare nella fase transitoria (errori del 41%). Inoltre è possibile osservare come i sistemi equivalenti giungano ad una condizione di regime più velocemente.

Si evidenzia come l'indice di smorzamento equivalente sia, implicitamente, funzione della frequenza della forzante: infatti tutte le analisi sono state condotte a parità di caratteristiche sia del sistema sia del dissipatore non-lineare sia dell'intensità

della forzante, l'unico parametro variabile risultava essere la frequenza della forzante. Dalle analisi si vede che l'indice di smorzamento equivalente varia tra il 10% e il 40%. In realtà questo fatto non deve stupire in quanto l'indice di smorzamento equivalente risulta essere funzione dello spostamento massimo a regime e quindi del rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale.

Infine, dal momento che la bontà della soluzione fornita dai metodi di equivalenza lineare tende a ridursi mano a mano che ci si allontana dalla condizione di risonanza abbiamo condotto una ulteriore analisi per un rapporto $\Omega/\omega = 4.00$. Si sottolinea che in questo caso per riprodurre dei valori dell'indice di smorzamento paragonabili a quelli delle analisi appena descritte, si è dovuto, a parità di α , ridurre il valore di c_α fino a $100N^*(\text{sec}/\text{m})^{0.20}$. Questo concetto diviene chiaro se si osserva la (2.12): l'indice di smorzamento equivalente risulta essere funzione del rapporto $c_\alpha/u_0^{(1-\alpha)}$, per cui, dal momento che per $\Omega/\omega = 4.00$ u_0 diviene molto piccolo, per mantenere il valore dell'indice di smorzamento nello stesso ordine di grandezza devo ridurre anche c_α . Operando in questo modo abbiamo ottenuto $\xi_{\text{sd},E} = 25.62\%$ e $\xi_{\text{sd},P} = 35.55\%$. Di seguito riportiamo i risultati.

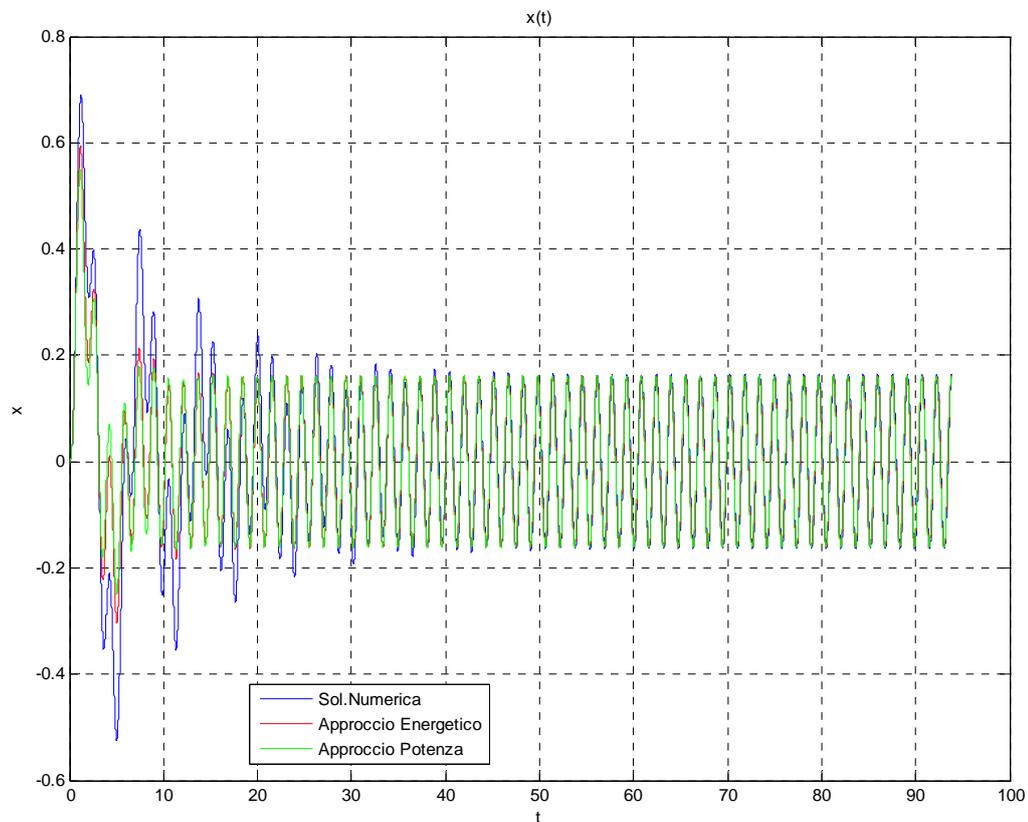


Figura 2.19. Andamento degli Spostamenti per $\Omega/\omega = 4.00$

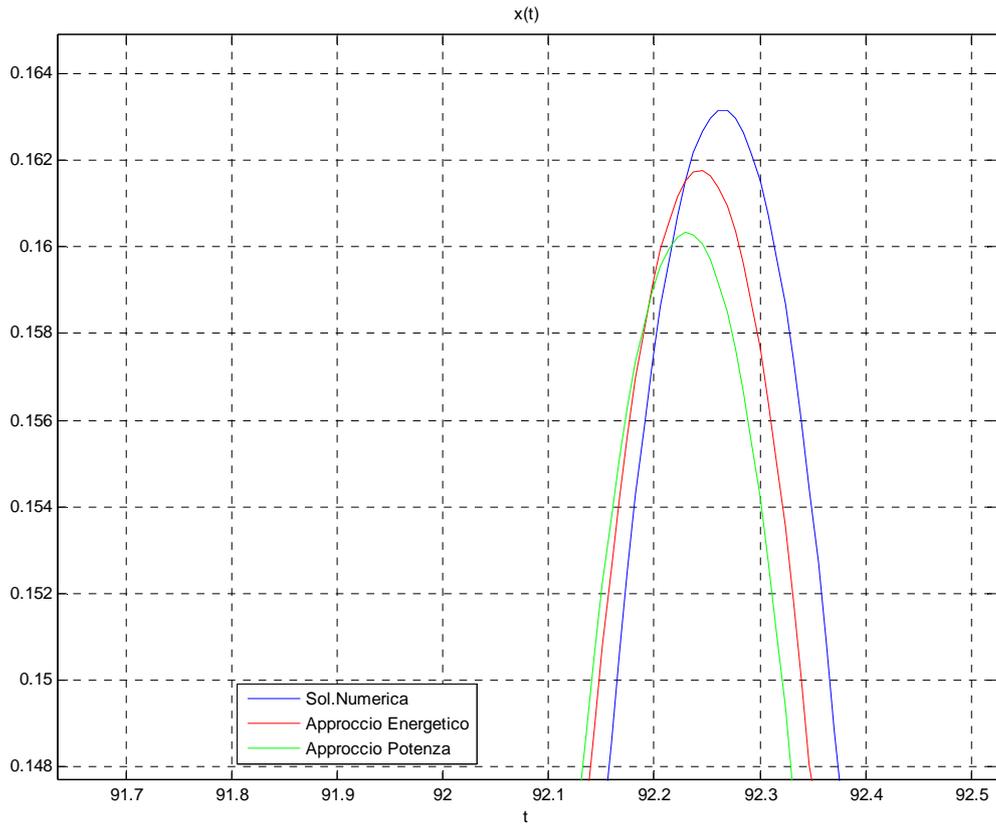


Figura 2.20. Zoom dell'andamento degli spostamenti per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega = 4.00$

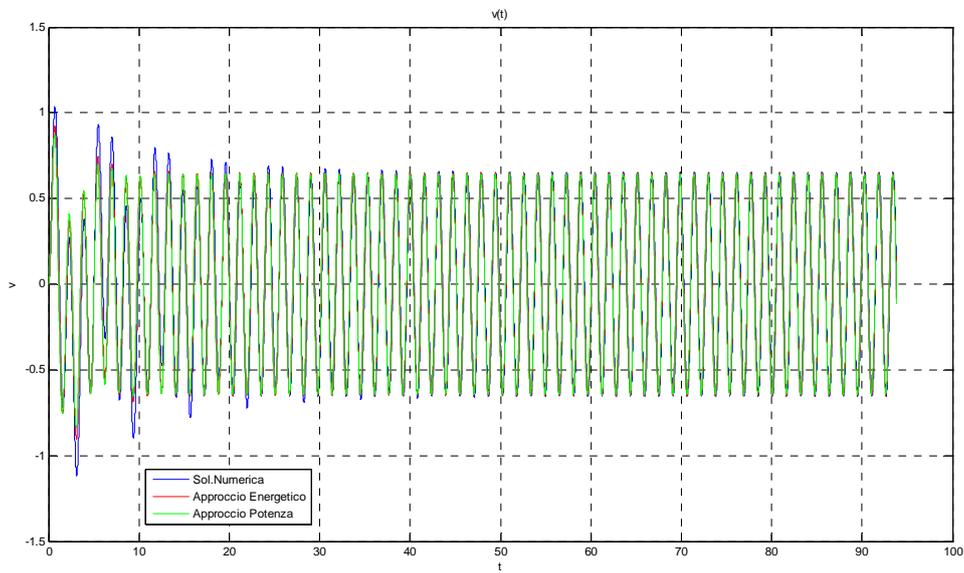


Figura 2.21. Andamento della Velocità per $\Omega/\omega = 4.00$

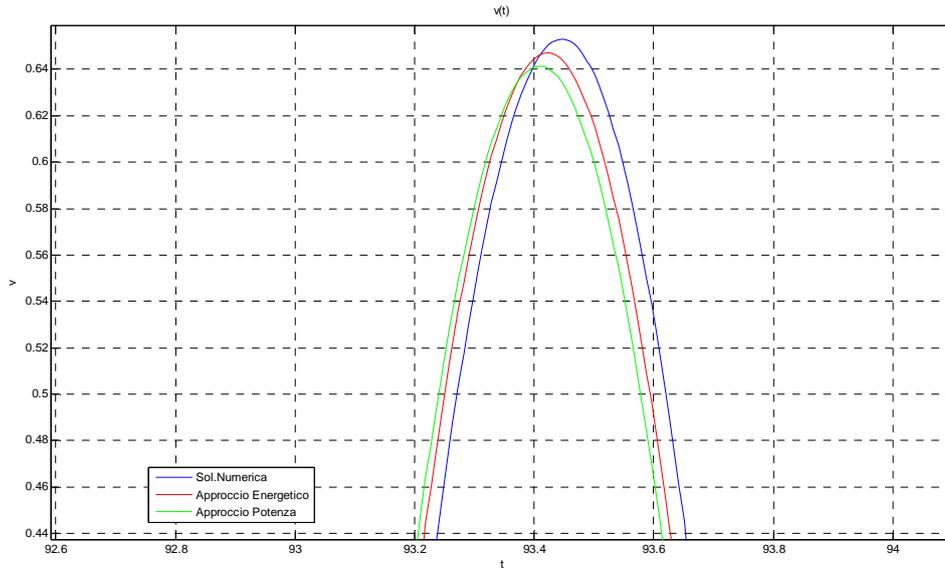


Figura 2.22. Zoom dell'andamento della velocità per un massimo relativo a regime per $\Omega/\omega = 4.00$

In questa ulteriore analisi si vede come le considerazioni svolte per rapporti di Ω/ω più bassi risultino ancora valide. Si evidenzia una grossa differenza, in transitorio tra la risposta stimata dai sistemi dotati di dissipatori lineari equivalenti rispetto a quello reale.

A questo punto potrebbe risultare interessante valutare le risposte su un range più ampio di frequenze, utilizzando dei parametri di sintesi. Il Chopra nel suo articolo riporta una analisi nella quale si considerano due parametri: il fattore di amplificazione degli spostamenti (R_d) e il taglio complessivo alla base normalizzato in rapporto alla ampiezza della forzante (TR). Viene riportato l'andamento dei parametri appena descritti in funzione del rapporto Ω/ω , variabile tra 0 e 2, mettendo a confronto il valore dei parametri per un sistema dotato di dissipatore non-lineare e di un sistema dotato di un dissipatore lineare equivalente. In questo caso viene utilizzato il metodo di equivalenza energetica, imponendo che i due dissipatori abbiano un medesimo indice di smorzamento ζ_{sd} . Di seguito si riportano i risultati.

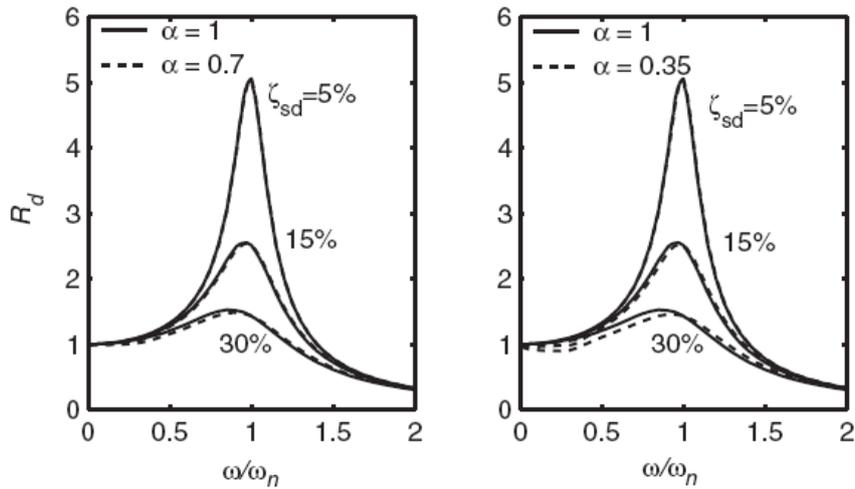


Figura 2.23. Fattore di amplificazione per sistema con dissipatore non-lineare e con dissipatore lineare equivalente.

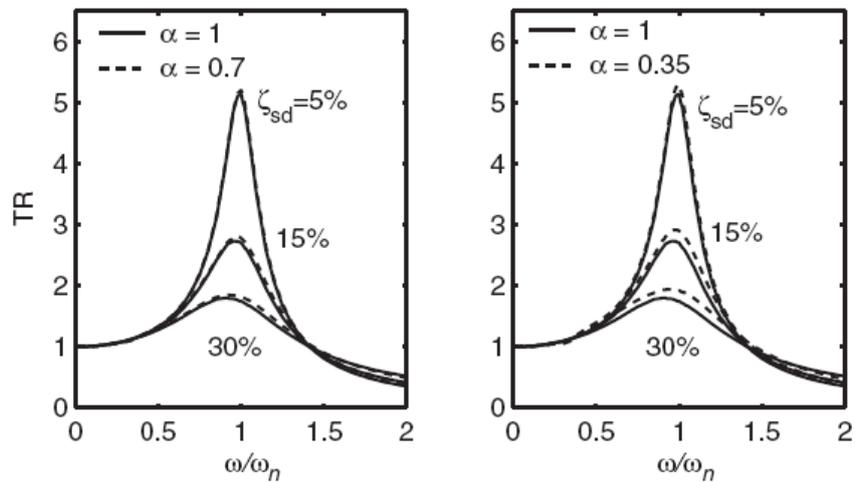


Figura 2.24. Taglio alla base per sistema con dissipatore non-lineare e con dissipatore lineare equivalente.

Il fattore di amplificazione risulta poco influenzato dalla non-linearità del dissipatore. Risulta influenzato in modo percepibile solo per elevati valori dell'indice di smorzamento e per bassi valori di α , per i quali si evidenzia uno slittamento del picco delle curve relative a sistemi dotati di dissipatori non-lineari verso la condizione di risonanza. Tale fenomeno incide solo marginalmente sui valori di picco.

Per quanto riguarda il taglio alla base, questo risulta essere più influenzato dalla non-linearità rispetto al fattore di amplificazione. Infatti per bassi valori di α e per elevati valori dell'indice di smorzamento si registrano apprezzabili incrementi rispetto al sistema lineare equivalente. Altresì si evidenzia, al contempo, una riduzione della

forza nel dissipatore.

Le metodologie fin qui esposte, sebbene siano in grado di riprodurre in modo piuttosto soddisfacente la risposta del sistema non lineare presentano un limite evidente: non sono in grado di fornire alcuna informazione sulla risposta di un sistema elastico lineare quando questo venga dotato di un dissipatore non lineare di caratteristiche note. Infatti, ricordando le (2.12), si può osservare che nell'espressione dell'indice di smorzamento equivalente, una volta definiti i parametri caratteristici del dissipatore (c_α, α), permane un ulteriore termine incognito, lo spostamento massimo.

Il Chopra nel suo articolo suggerisce di implementare un procedimento iterativo nel quale ad ogni passo viene aggiornato il valore dello spostamento massimo e conseguentemente il valore dell'indice di smorzamento ad esso associato: partendo dallo spostamento del sistema con indice di smorzamento pari all'indice di smorzamento interno viene valutato lo spostamento massimo del sistema; per tale spostamento, utilizzando le (2.12), viene stimato un nuovo valore dell'indice di smorzamento; viene calcolata la risposta per il valore dell'indice di smorzamento calcolato e individuato un nuovo spostamento massimo; il processo termina quando due spostamenti massimi calcolati a due step successivi differiscono di una quantità piccola.

2.3 Equazione del moto “implicita”

L'equazione del moto riportata in (2.1) descrive il problema di un sistema indefinitamente lineare ad un grado di libertà dotato di un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare. Nei precedenti paragrafi abbiamo messo in evidenza che la risposta presenta delle dipendenze non-lineari dai parametri contenuti nell'equazione del moto scritta secondo la formulazione che abbiamo definito “esplicita” della (2.1).

In realtà, anche nei problemi classici di dinamica delle strutture, si preferisce utilizzare una scrittura diversa della (2.1), nella quale siano introdotti dei parametri di sintesi caratteristici sia del sistema. Questa differente scrittura si desidera che mantenga inalterato il significato fisico del problema e che sia riferita ad un numero minore di parametri, rispetto ai quali la risposta presenti delle dipendenze più “spendibili” da un punto di vista analitico.

Solitamente ambo i membri della equazione del moto del problema classico della dinamica delle strutture vengono divisi per la massa del sistema e vengono definiti dei nuovi parametri caratteristici: l'indice di smorzamento, ξ , e la frequenza

naturale del sistema, ω . Questa nuova scrittura l'abbiamo definita "implicita". In questo modo si ottiene una riduzione delle incognite: nella formulazione esplicita avevamo la massa, m , la rigidità, k , e il coefficiente di smorzamento, c ; nella formulazione implicita abbiamo l'indice di smorzamento, ξ , e la frequenza naturale del sistema, ω .

Proviamo ora a fare qualcosa di analogo con l'equazione (2.2), nella quale la forzante esterna è tipo armonico. Dividendo ambo i membri per la massa, m , ricordando le (2.12), introduciamo l'indice di smorzamento equivalente, ξ_{sd} , e infine otteniamo:

$$(2.18) \quad \ddot{u} + 2\xi_0\omega\dot{u} + 2\xi_{sd}\omega\kappa^{-1}(\Omega u_0)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u})|\dot{u}|^\alpha + \omega^2 u = -\ddot{u}_{g,0} \sin(\Omega t)$$

Dove si è mantenuta la stessa notazione utilizzata in precedenza. Il termine κ risulta variabile in base all'approccio che si decide di scegliere, energetico oppure in termini di potenza dissipata.

E' stato dimostrato da Chopra che la risposta della equazione (2.18), che è equivalente alla (2.2), soltanto riscritta introducendo parametri diversi, a differenza della (2.2) dipende in modo lineare dalla ampiezza della forzante. La dimostrazione di tale asserto è contenuta nell' Appendice B. Inoltre indagini numeriche, da noi svolte hanno messo in evidenza come il fattore di amplificazione, derivato dalla integrazione numerica della (2.18), sia indipendente anche dalla frequenza della forzante. Questi risultati permettono una notevole semplificazione nell'approccio del problema. Le indagini numeriche svolte risultano essere analoghe a quelle condotte al paragrafo 2.1.

E' stata risolta per via numerica un'equazione del tipo della (2.18) per valori dell'indice di smorzamento equivalente del dissipatore pari al 5%, al 15% e al 40%, variando l'esponente α e il rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale del sistema nei range già descritti. Riportiamo di seguito i risultati.

Questi risultati, ottenuti per via numerica dimostrano l'assunto per cui il fattore di amplificazione risulta essere indipendente dalla frequenza della forzante, se l'equazione del moto viene scritta in forma implicita.

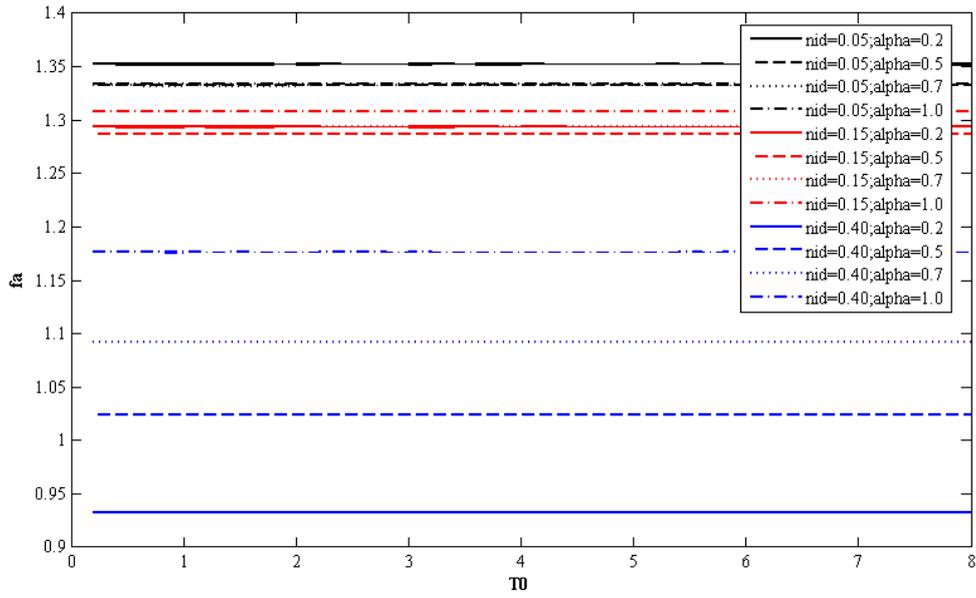


Figura 2.25. Andamento del fattore di amplificazione, dedotto dalla risoluzione dell'equazione del moto in forma implicita, per $\Omega/\omega = 0.50$

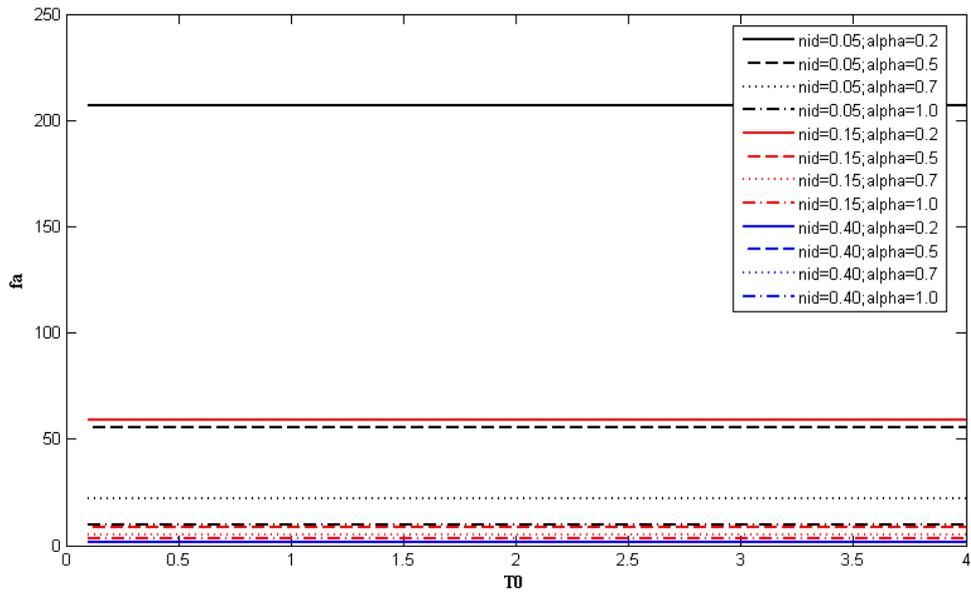


Figura 2.26. Andamento del fattore di amplificazione, dedotto dalla risoluzione dell'equazione del moto in forma implicita, per $\Omega/\omega = 1.00$

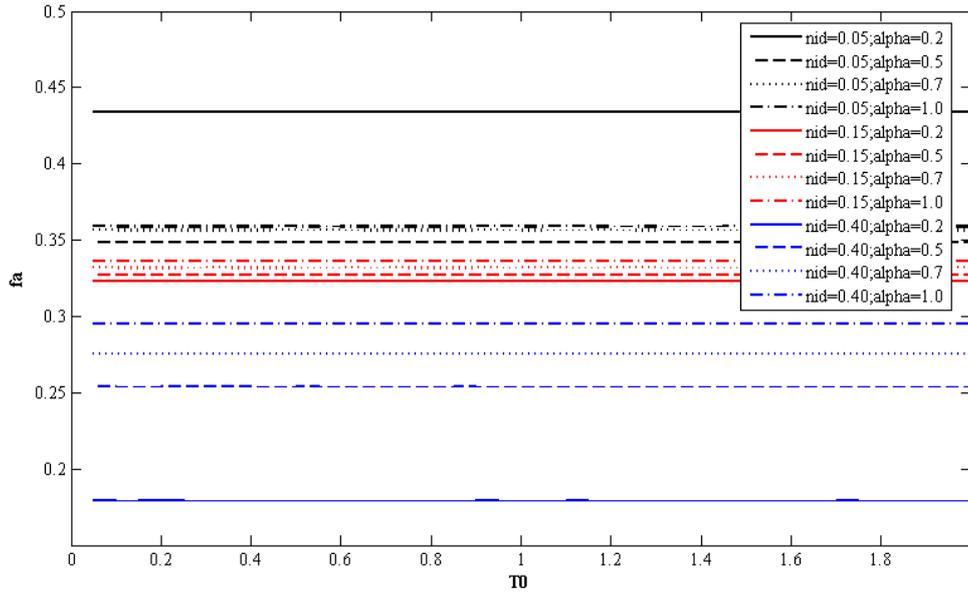


Figura 2.27. Andamento del fattore di amplificazione, dedotto dalla risoluzione dell'equazione del moto in forma implicita, per $\Omega/\omega=2.00$

2.4 Analisi della risposta per forzante qualsiasi

In questo paragrafo riportiamo alcuni risultati significativi, reperibili in letteratura riguardo la risposta di un sistema ad un grado di libertà indefinitamente elastico-lineare dotato di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare.

In particolare riportiamo in sintesi i risultati più significativi ottenuti da Chopra e Lin nel 2002. Nella figura che segue riportiamo gli accelerogrammi analizzati da due autori nel loro articolo.

Excitation	Earthquake	Station	PGA (g)	PGV (cm/s)	PGD (cm)
LMSR01	Loma Prieta	Agnews State Hospital	0.172	25.9	12.6
LMSR02	Loma Prieta	Capitola	0.443	29.2	5.5
LMSR03	Loma Prieta	Gilroy Array #3	0.367	44.6	19.3
LMSR04	Loma Prieta	Gilroy Array #4	0.212	37.8	10.1
LMSR05	Loma Prieta	Gilroy Array #7	0.226	16.4	2.5
LMSR06	Loma Prieta	Hollister City Hall	0.247	38.5	17.7
LMSR07	Loma Prieta	Hollister Diff Array	0.279	35.6	13.0
LMSR08	Loma Prieta	Sunnyvale Colton Ave	0.207	37.3	19.1
LMSR09	Northridge	Canoga Park—Topanga Canyon	0.420	60.7	20.3
LMSR10	Northridge	LA—Faring Rd	0.273	15.8	3.3
LMSR11	Northridge	LA—Fletcher	0.240	26.2	3.6
LMSR12	Northridge	Glendale — Los Palmas	0.206	7.4	1.7
LMSR13	Northridge	Hollywood Storage FF	0.231	18.2	4.8
LMSR14	Northridge	LA Crescenta—New York	0.159	11.3	3.0
LMSR15	Northridge	Northridge—Saticoy	0.368	28.9	8.4
LMSR16	San Fernando	LA Hollywood Stor Lot	0.174	14.8	6.3
LMSR17	Superstition Hills	BRW	0.156	13.9	5.3
LMSR18	Superstition Hills	El Centro Imp Co Center	0.358	46.3	17.6
LMSR19	Superstition Hills	PLC	0.186	20.6	5.4
LMSR20	Superstition Hills	Westmoreland Fire station	0.172	23.5	13.1

Figura 2.28. Accelerogrammi analizzati da Lin e Chopra nel 2002

Le grandezze rappresentative della risposta prese in esame da due autori sono:

- 1) Lo spostamento massimo, u_0 (*peak deformation*);
- 2) La massima forza nel dissipatore, f_{D0} (*peak damper force*);
- 3) La massima accelerazione della massa, \ddot{u}_0 (*peak acceleration of the mass*);
- 4) Il massimo taglio alla base, f_{T0} (*peak value of the force transmitted to the foundation*);
- 5) La massima velocità relative, \dot{u}_0 (*peak value of relative velocity*).

Riportiamo di seguito la risposta all'accelerogramma LMSR02 nel dominio del tempo, espressa in termini di spostamenti, velocità relativa, accelerazione totale e forza assorbita dal dissipatore, per un sistema ad un grado di libertà caratterizzato da un periodo naturale (T_n) pari ad 1sec e da un indice di smorzamento interno (ξ_0) munito di dissipatori fluido viscosi non-lineari capaci di realizzare un indice di smorzamento equivalente (ξ_{sd}) pari al 15%, ma aventi esponenti α pari a 1.00, 0.50, 0.35.

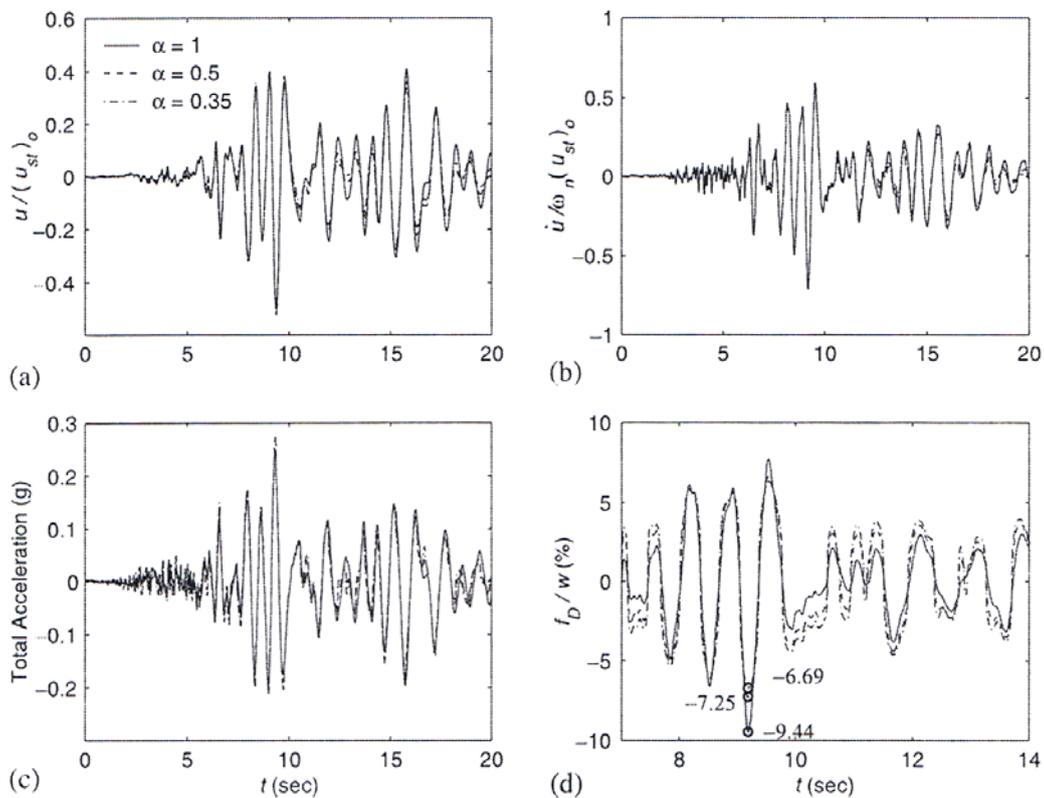


Figura 2.29. Risposta nel dominio del tempo ad accelerogramma LMSR02 per sistemi muniti di dissipatori aventi diverso esponente α , ma medesimo indice di smorzamento ($\xi_{sd}=15\%$)

Di seguito invece riportiamo gli spettri espressi in termini di spostamenti, velocità relativa e accelerazione totale per valori di ξ_{sd} pari a 0%, 5%, 15%, 30% e per valori di α pari a 1.00, 0.70, 0.50, 0.35.

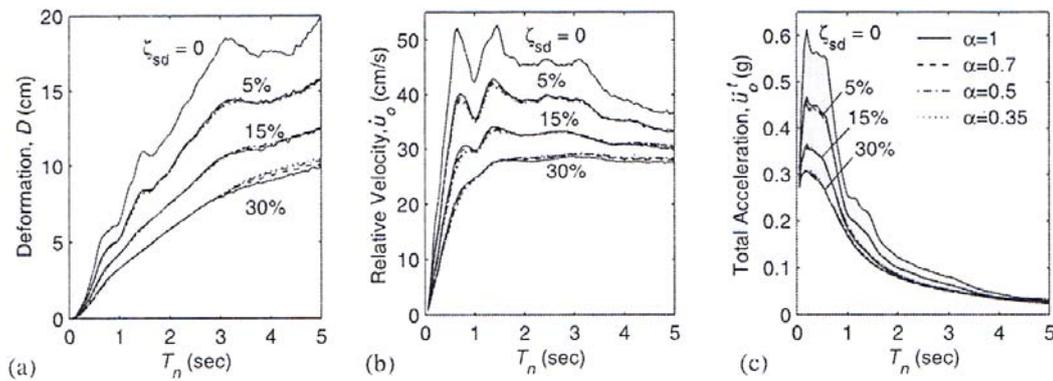


Figura 2.30. Spettri per accelerogramma LMSR02 per vari valori dell' esponente α e dell' indice di smorzamento (ξ_{sd})

Nella figura che segue riportiamo il rapporto tra le ordinate spettrali ottenute per $\alpha=0.35$ e per $\alpha=1.00$, relative agli spostamenti, alla velocità relativa e all'accelerazione totale per un valore dell'indice di smorzamento equivalente pari al 30%.

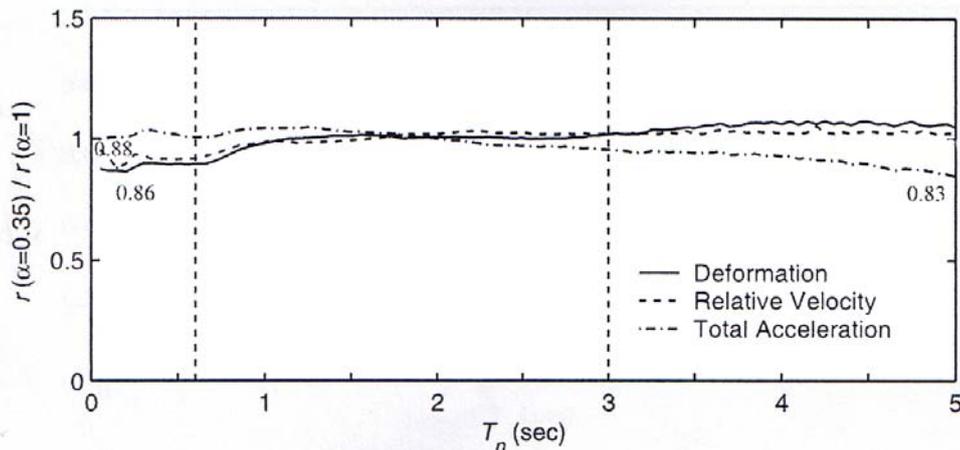


Figura 2.31. Rapporto tra ordinate spettrali ottenute per $\alpha=0.35$ e per $\alpha=1.00$, avendo fissato il valore dell'indice di smorzamento equivalente al 30%.

Di seguito riportiamo il rapporto tra le ordinate spettrali riferite agli spostamenti massimi di un sistema privo di dissipatori ($\xi_{sd}=0.00$) e del medesimo sistema dotato di dissipatori ($\xi_{sd}\neq 0.00$) per diversi valori dell'esponente α (Figura 2.32 (a)). In Figura 2.32 (a) riportiamo invece il rapporto delle ordinate spettrali riferite agli spostamenti massimi,

alla velocità relativa e alla accelerazione totale per un sistema dotato di dissipatori con indice di smorzamento equivalente pari a 30% ed esponente α pari a 0.35 e per lo stesso sistema privo di dissipatori

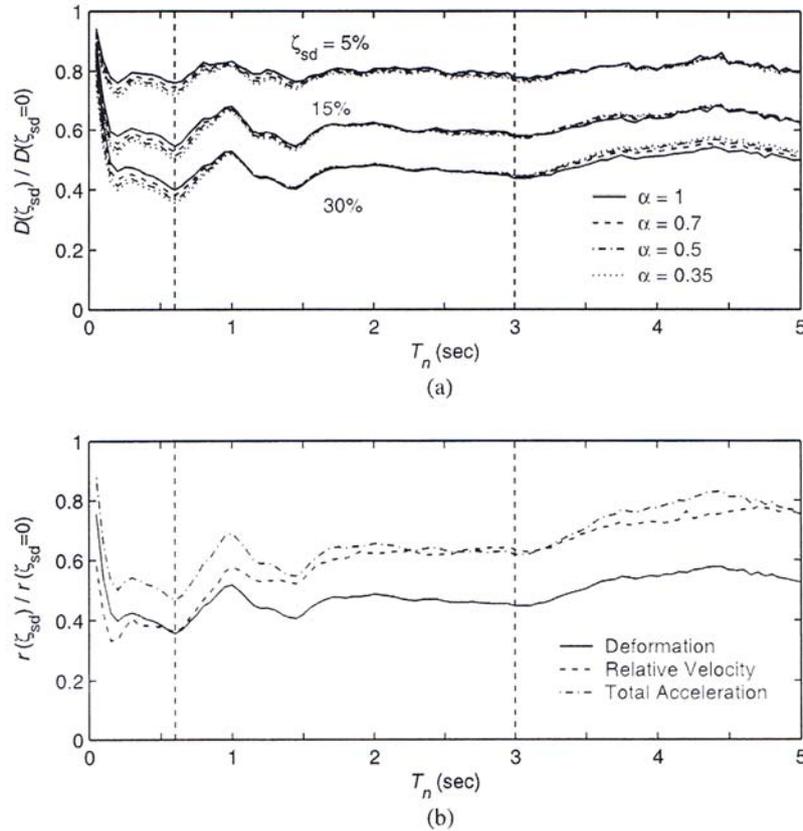


Figura 2.32(a). Rapporto tra ordinate spettrali degli spostamenti massimi per un sistema privo di dissipatori e per il medesimo sistema dotato di dissipatori con indice di smorzamento pari a 5%, 15%, 30% ed esponente $\alpha=0.35, 0.50, 0.7, 1.00$.

Figura 2.32(b). Rapporto tra ordinate spettrali degli spostamenti massimi, della velocità relativa e della accelerazione totale per un sistema privo di dissipatori e per il medesimo sistema dotato di dissipatori con indice di smorzamento pari al 30% ed esponente $\alpha=0.35$.

Per quanto riguarda la forza nel dissipatore riportiamo in Figura 2.33 (a) lo spettro normalizzato rispetto al peso del sistema (w) per valori dell'indice di smorzamento pari a 5%, 15%, 30% e per valori di α pari a 0.35, 0.50, 0.70, 1.00. In Figura 2.33 (b) e in Figura 2.33 (b), analogamente a quanto fatto in precedenza, riportiamo gli andamenti del rapporto tra la forza nel dissipatore per un sistema caratterizzato da un valore dell'esponente α qualsiasi e per un sistema caratterizzato da un esponente α unitario, nel primo caso tenendo fisso il valore dell'indice di smorzamento e variando α , nel secondo caso invece avendo fissato α e variando l'indice di smorzamento equivalente.

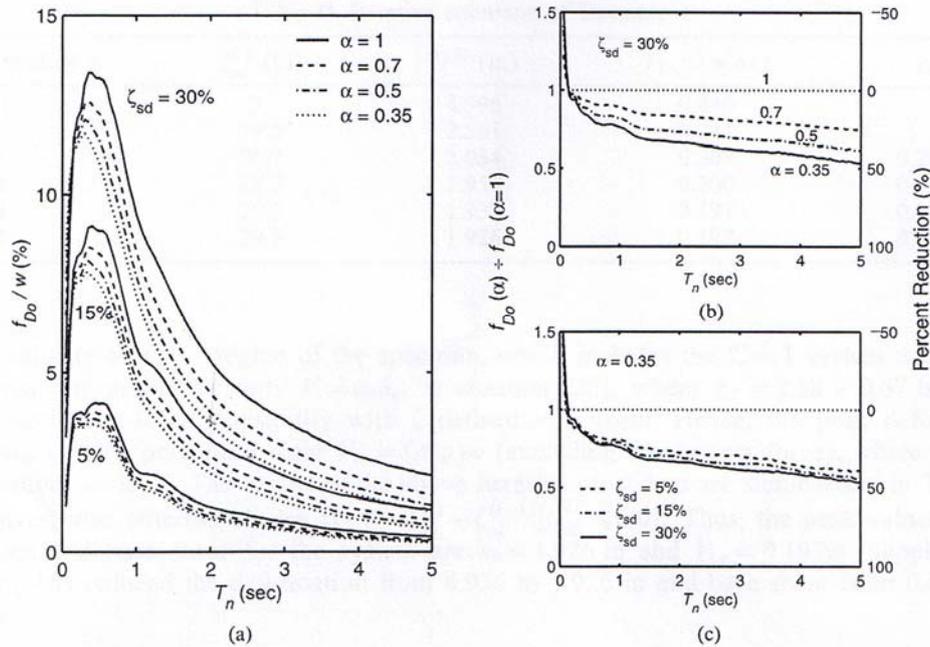


Figura 2.33(a). Spettro della forza assorbita dal dissipatore per indice di smorzamento pari a 5%, 15%, 30% ed esponente $\alpha=0.35, 0.50, 0.7, 1.00$.

Figura 2.33(b) (c). Rapporto tra la forza nel dissipatore per un sistema caratterizzato da un valore dell'esponente α qualsiasi e per un sistema caratterizzato da un esponente α unitario

Dai grafici presentati in precedenza è possibile dedurre quanto segue:

- La non-linearità del dissipatore, caratterizzata dall'esponente α , a parità dell'indice di smorzamento equivalente, influenza in modo lieve lo spostamento, la velocità e l'accelerazione di picco del sistema, ma influenza in modo importante la forza nel dissipatore, soprattutto in prossimità dei valori di picco della risposta. (Figura 2.29).
- La non linearità del dissipatore influenza in modo significativo gli spettri di risposta per valori di α piccoli e per valori alti del periodo naturale del sistema. (Figura 2.30).
- La riduzione della risposta è essenzialmente non influenzata dalla non-linearità del dissipatore nella regione dello spettro definita *velocity-sensitive region* (caratterizzata da periodi naturali prossimi ad 1sec), mentre è solo debolmente influenzata nelle regioni dello spettro definite *acceleration-sensitive region* (periodi naturali bassi) e *displacement-sensitive region* (periodi naturali alti). (Figura 2.32).
- In particolare si registrano scostamenti della risposta del sistema dotato di dissipatori non-lineari rispetto alla risposta di un sistema lineare equivalente fino al

12-14% nella *acceleration-sensitive region* e scostamenti fino al 17% nella *displacement-sensitive region*. (Figura 2.31).

- La forza nel dissipatore è maggiore quanto maggiore è l'indice di smorzamento equivalente; la forza nel dissipatore si riduce per dissipatori non-lineari a parità di ξ_{sd} ; inoltre la percentuale di riduzione della forza nel dissipatore è essenzialmente indipendente dall'indice di smorzamento equivalente (Figura 2.33).

CAPITOLO 3

METODOLOGIA DI CALCOLO PROPOSTA

In questo capitolo saranno esposte le basi teoriche della metodologia proposta.

L'esigenza di proporre una nuova metodologia di calcolo per strutture dotate di dissipatori fluido-viscosi nasce dalla constatazione che i metodi presenti in letteratura sono generalmente di tipo iterativo, in quanto grandezze caratteristiche della risposta influenzano il valore di alcuni parametri presenti nell'equazione del moto (ad esempio l'indice di smorzamento equivalente).

Nel primo paragrafo viene introdotto un nuovo parametro adimensionale ε , la cui definizione è derivata dalla definizione dell'indice di smorzamento equivalente. L'equazione del moto implicita viene poi riscritta in termini di ε . L'equazione del moto scritta in questi termini non contiene al suo interno alcun parametro funzione della risposta; pertanto noto il valore di ε la risposta può essere stimata in modo diretto.

Nel secondo paragrafo viene studiato come il parametro ε influisce su alcune grandezze caratteristiche della risposta: spostamento, velocità e taglio alla base.

L'equazione del moto analizzata fino a questo momento contiene al suo interno la non-linearità del comportamento dei dissipatori. Per giungere ad una formulazione lineare del problema che sia risolvibile con i metodi usuali della dinamica delle strutture, come fatto in precedenza per i metodi iterativi introducendo l'indice di smorzamento equivalente, viene mostrato come sia possibile effettuare una stima diretta dell'indice di smorzamento equivalente noto ε . Operando in questo modo una volta individuato il valore di ε risulta possibile stimare l'indice di smorzamento equivalente e procedere ad una analisi di tipo classico.

Nell'ultima parte del capitolo verrà mostrato come l'indice ε possa essere assunto a parametro di riferimento per la valutazione della convenienza di dissipatori non-lineari rispetto a dissipatori lineari in base alla tipologia di azione forzante e alle caratteristiche del sistema.

DESIGN METHOD PROPOSED

In this chapter the theoretical basis of the design method proposed are introduced.

The need to propose a new design method for structures equipped with fluid-viscous dampers arises from the observation that the methods reported in literature are

always iterative, because the response affects some parameters included in the equation of motion (such as the equivalent damping ratio).

In the first section the dimensionless parameter ε is introduced. This parameter has been obtained from the definition of equivalent damping ratio. The implicit form of the equation of motion is written by introducing the parameter ε , instead of the equivalent damping ratio. This new implicit equation of motions has not any terms affected by the response, so that once ε is known the response can be evaluated directly.

In the second section it is discussed how the parameter ε affects some characteristics of the response: drift, velocity and base shear.

All the results described till this point have been obtained by keeping the non-linearity of the behavior of the dampers. In order to get a linear formulation of the problem, that is possible to solve by using the well-known methods of the dynamics of structures, as we did before for the iterative methods by introducing the equivalent damping ratio, it is shown how the equivalent damping ratio can be evaluated from knowing the value of ε . Operating in this way, once the parameter ε is known, it is quite easy to estimate the equivalent damping ratio and to proceed with a classic linear analysis.

In the last section it is shown how the parameter ε could be taken as reference for the evaluation of the convenience of using non-linear dampers instead of linear ones on the basis of the type of external force and the characteristics of the system.

3.1 Indice del Dissipatore, ε

L'idea che risiede alla base della metodologia, che si intende proporre per lo studio della risposta di un sistema indefinitamente elastico-lineare dotato di un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare, è quella di introdurre, nell'equazione del moto che governa il problema, dei parametri che possano essere stimati a prescindere dalla conoscenza della risposta stessa ed in ultima analisi che possano essere stimati in modo diretto senza ricorrere a procedure iterative.

Se considero una forzante di tipo armonico $\ddot{u}_g(t) = a_0 \sin(\Omega t)$, il termine relativo al dissipatore, che compare nella (2.18), può essere riscritto introducendo il fattore di amplificazione fa_d , che per definizione risulta essere pari a $u_0/(a_0/\omega^2)$, come segue:

$$(3.1) \quad 2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} (\Omega u_0)^{1-\alpha} = 2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} \left(\Omega \frac{a_0}{\omega^2} f a_d \right)^{1-\alpha} = 2\xi_{sd} \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} \kappa^{-1} a_0^{1-\alpha} f a_d^{1-\alpha}$$

Per cui la (2.18) può essere riscritta come segue:

$$(3.2) \quad \ddot{u} + 2\xi_0 \omega \dot{u} + 2\xi_{sd} \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} \kappa^{-1} a_0^{1-\alpha} f a_d^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha + \omega^2 u = -a_0 \sin(\Omega t)$$

Proviamo ora a riscrivere la (3.2) in modo che non compaia più nell'equazione il termine $f a_d$. Infatti al pari dello spostamento massimo u_0 , anche $f a_d$ è noto una volta che sia nota la risposta del sistema. Dal momento che vale $f a_d = u_0 / (a_0 / \omega^2)$, la (3.2) può essere riscritta come segue

$$(3.3) \quad \xi_{sd} = \kappa \frac{1}{2m\omega} \frac{c_\alpha}{(\Omega u_0)^{1-\alpha}} = \kappa \frac{c_\alpha}{2m} \frac{(\Omega u_0)^{\alpha-1}}{\omega} = \kappa \frac{c_\alpha}{2m} \frac{\left(\Omega f a_d \frac{a_0}{\omega^2} \right)^{\alpha-1}}{\omega} =$$

$$= \kappa \frac{c_\alpha}{2m} \frac{\omega^{1-2\alpha}}{\Omega^{1-\alpha}} (f a_d a_0)^{\alpha-1}$$

Quindi introducendo il parametro adimensionale ε , denominato “*indice del dissipatore*” (*damper index*) come segue:

$$(3.4) \quad \varepsilon = \kappa \frac{c_\alpha}{2m} \frac{\omega^{1-2\alpha}}{\Omega^{1-\alpha}} (a_0)^{\alpha-1}$$

L'espressione dell'indice di smorzamento può essere scritta come segue:

$$(3.5) \quad \xi_{sd} = \varepsilon (f a_d)^{\alpha-1}$$

Si fa notare che se $\alpha = 1.00$, l'indice del dissipatore coincide con l'indice di smorzamento. Introducendo la (3.5) nella (3.2) ottengo la seguente espressione dell'equazione del moto:

$$(3.6) \quad \ddot{u} + 2\xi_0 \omega \dot{u} + 2\varepsilon \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} \kappa^{-1} a_0^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha + \omega^2 u = -a_0 \sin(\Omega t)$$

Nell'equazione (3.6), non compaiono più i termini relativi alla risposta (u_0 oppure fa_d) per cui una volta note le caratteristiche del sistema e le caratteristiche della forzante, la risposta può essere conosciuta senza ricorrere a procedimenti iterativi. L'equazione (3.6) presenta il vantaggio di mantenere il suo carattere generale: infatti la risposta può essere parametrizzata in funzione di ε , α , ω/Ω e ξ_0 . Inoltre la (3.6) conserva tutte le proprietà della (2.18), come ad esempio la lineare dipendenza della risposta con l'ampiezza della forzante.

3.2 Analisi della risposta in funzione di ε

In questo paragrafo desideriamo analizzare la risposta di una sistema indefinitamente elastico lineare dotato di un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non lineare in funzione dei parametri caratteristici introdotti nell'equazione (3.6) ed in particolare dell'indice del dissipatore ε .

3.2.1 FATTORE DI AMPLIFICAZIONE

Nel precedente paragrafo abbiamo visto che l'equazione (3.6) presenta una risposta direttamente proporzionale all'ampiezza della forzante. Per questo motivo risulta essere efficace, ai fini dell'analisi della risposta del sistema, un parametro di sintesi quale il fattore di amplificazione.

Riportiamo di seguito gli andamenti del fattore di amplificazione, determinato per via numerica integrando la (3.6), per ε pari a 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, per α pari a 0.80, 0.50, 0.30.

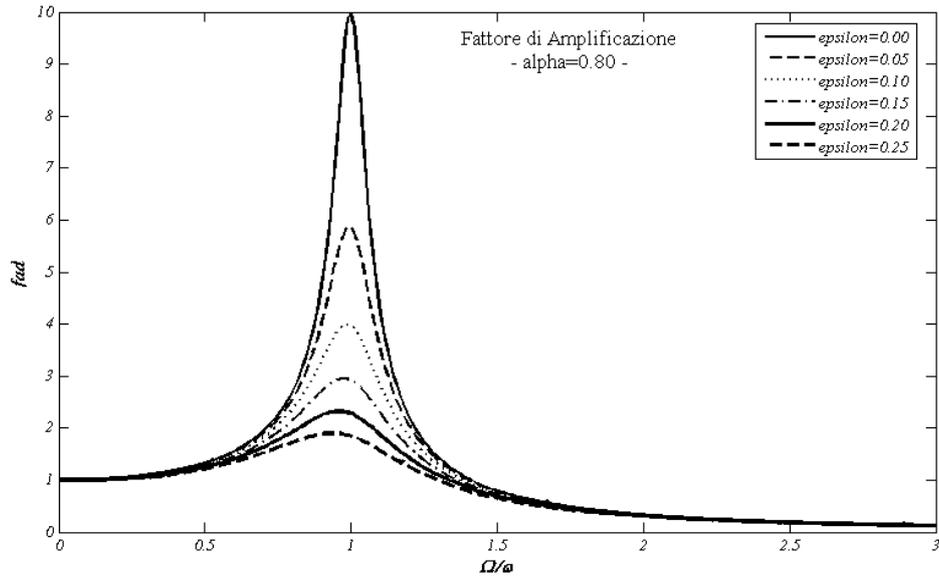


Figura 3.1. Andamento del fattore di amplificazione, per $\alpha=0.80$, in funzione dell'indice ϵ

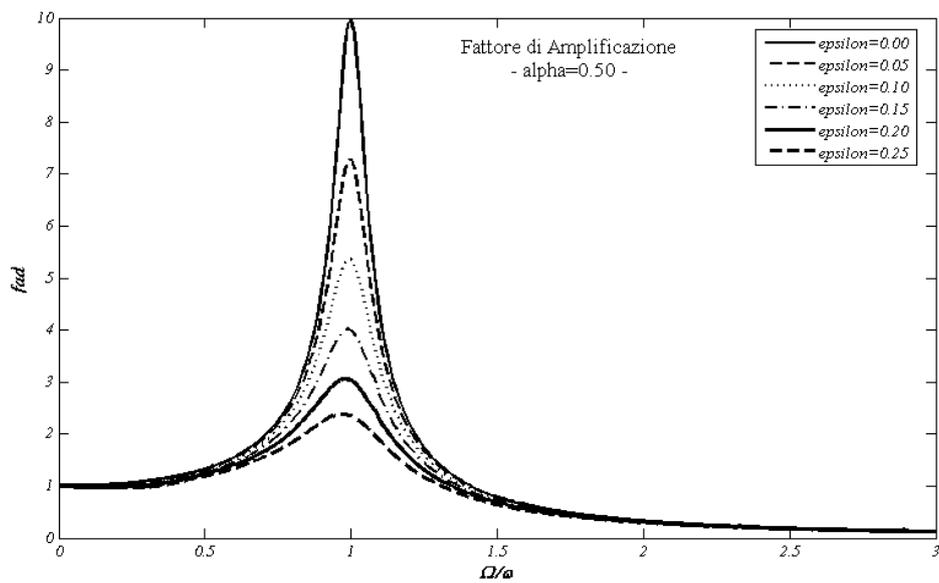


Figura 3.2. Andamento del fattore di amplificazione, per $\alpha=0.50$, in funzione dell'indice ϵ

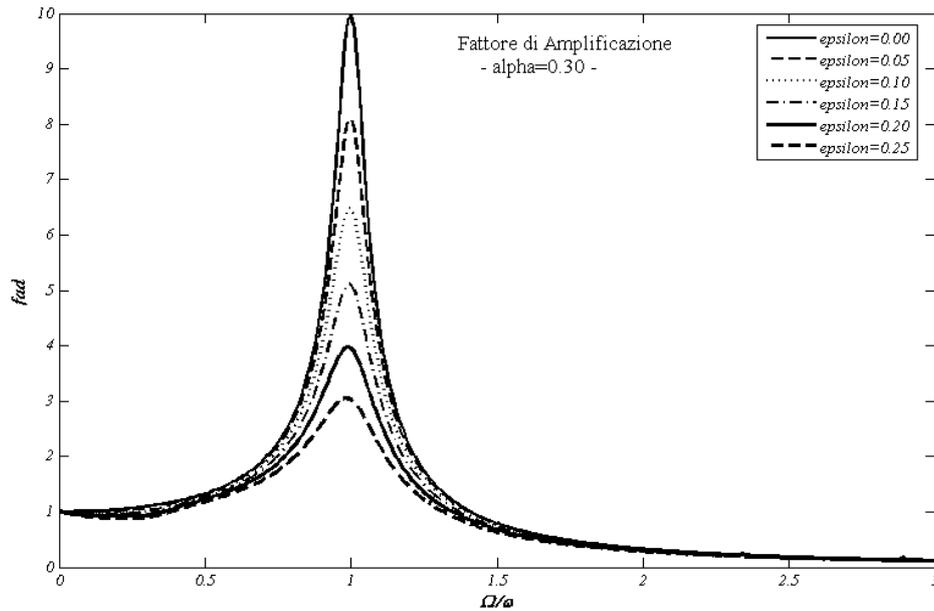


Figura 3.3. Andamento del fattore di amplificazione, per $\alpha=0.30$, in funzione dell'indice ϵ

Possiamo fare le seguenti osservazioni:

- Il fattore di amplificazione presenta degli andamenti, in funzione di ϵ , simili a quelli che si registrano quando il fattore di amplificazione viene espresso in funzione dell'indice di smorzamento.
- Valori di α più prossimi all'unità producono una attenuazione della risposta più importante di quella che si ha per valori di α inferiori, a parità di ϵ .
- Quanto accade nel caso lineare per valori elevati dell'indice di smorzamento, si ripete qui: infatti valori elevati di ϵ spostano dalla condizione di risonanza verso periodi più bassi i valori di picco della risposta. Questo fatto si attenua molto per valori di α piccoli.

A questo punto potrebbe essere interessante vedere, in analogia con quanto fatto da Chopra nel suo articolo, cosa accade al fattore di amplificazione per valori di ϵ costanti (0.05, 0.15, 0.25) per diversi valori di α : 0.30, 0.50, 0.80, 1.00.

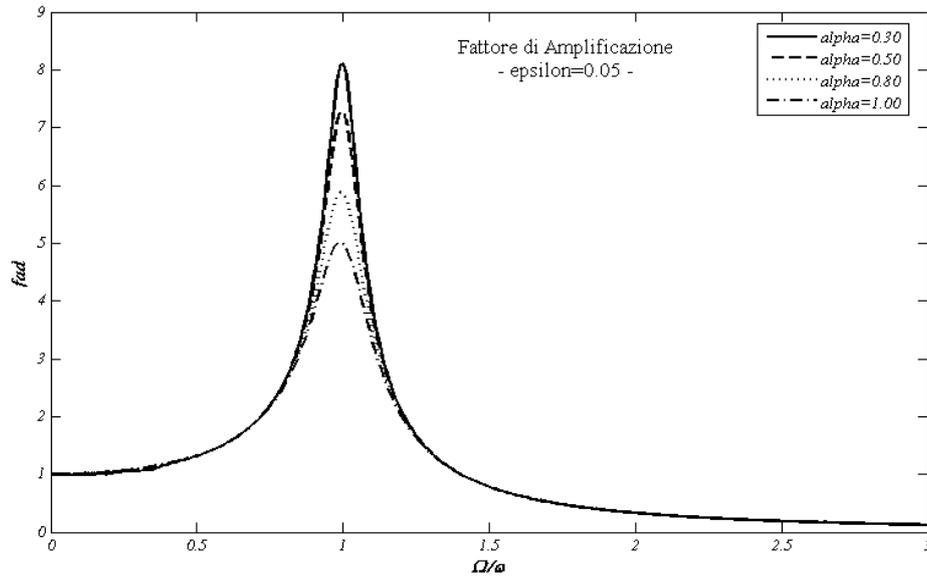


Figura 3.4. Andamento del fattore di amplificazione per $\epsilon=0.05$, in funzione dell'esponente α

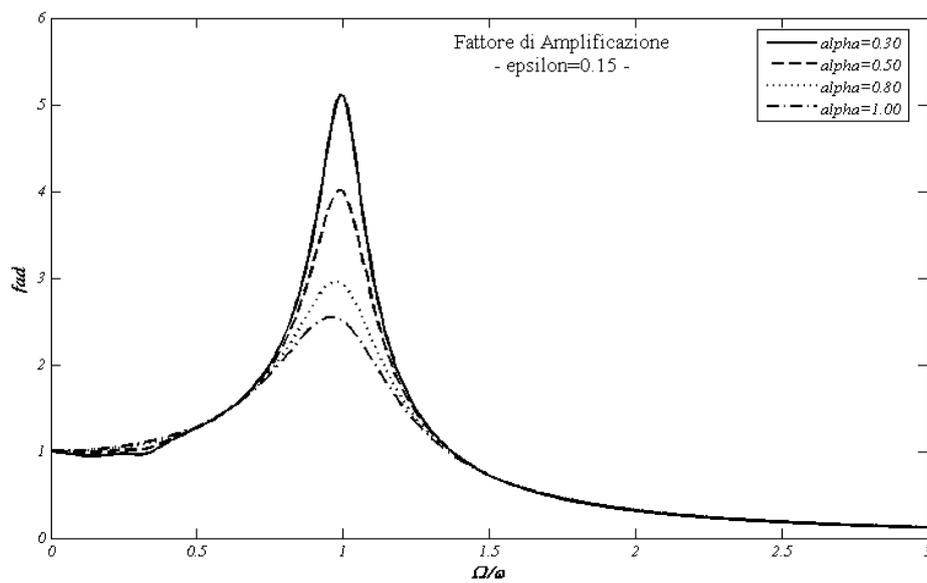


Figura 3.5. Andamento del fattore di amplificazione per $\epsilon=0.15$, in funzione dell'esponente α

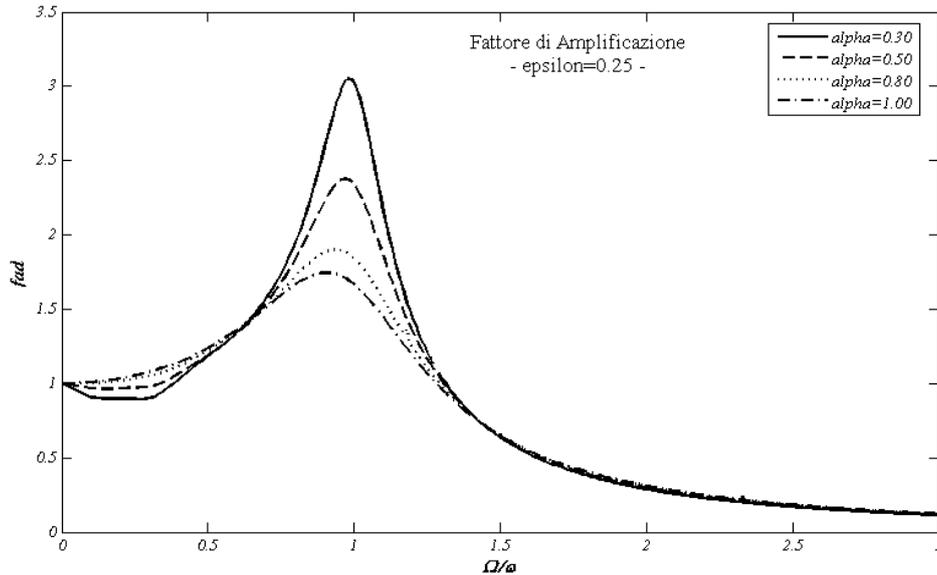


Figura 3.6. Andamento del fattore di amplificazione per $\varepsilon=0.25$, in funzione dell'esponente α

Possiamo fare le seguenti osservazioni:

- Il fattore di amplificazione, a parità di ε , risulta essere molto influenzato dal valore dell'esponente α . Si vuole mettere in evidenza che, per sistemi caratterizzati dal medesimo indice di smorzamento equivalente, il fattore di amplificazione non risulta essere così dipendente dall'esponente α . Si vedano ad esempio i risultati che abbiamo riportato nel capitolo 2, tratti da un articolo di Chopra, in cui tale risultato veniva portato come giustificazione alla possibilità di studiare la risposta, sostituendo il dissipatore a comportamento non-lineare con uno smorzatore lineare equivalente.

- Si evidenzia in tutti i casi analizzati un diverso comportamento per valori del rapporto Ω/ω inferiori a 0.60 e superiori a 1.50, per cui in corrispondenza della condizione di risonanza per valori di α decrescenti il fattore di amplificazione aumenta, mentre per valori esterni all'intervallo $0.60 \div 1.50$ per valori di α decrescenti il fattore di amplificazione aumenta. Questo fatto risulta essere più evidente per valori di ε maggiori.

- Il valore dell'esponente α influenza in modo molto poco apprezzabile il valore del fattore di amplificazione per valori del rapporto Ω/ω fuori dall'intervallo $0.60 \div 1.50$.

3.2.2 TAGLIO ALLA BASE

Si desidera a questo analizzare l'andamento del taglio alla base. Il quesito al quale si vuole rispondere è il seguente: l'inserimento di un dissipatore fluido viscoso in un sistema indefinitamente elastico lineare produce una migrazione di forze dal sistema verso il dissipatore mano a mano che si incrementano le dimensioni di quest'ultimo; occorre anche però notare che sia le forze elastiche (che competono all'oscillatore) sia le forze dissipate nel dissipatore devono essere "scaricate a terra", in una possibile fondazione, se ipotizzassi di studiare il comportamento di un telaio; infatti in questo caso sia le forze elastiche, sia le forze dissipate contribuiscono al taglio alla base (NOTA: nel caso di oscillatore semplicemente smorzato le forze dissipate non contribuivano al taglio alla base in quanto di natura interna e quindi il taglio alla base si componeva solo del contributo della forza elastica); quindi l'inserimento del dissipatore in un sistema indefinitamente elastico lineare come incide sul taglio alla base?

E' chiaro che si registrasse soltanto una semplice migrazione di forze, a parità di intensità della forzante esterna, il valore del taglio alla base resterebbe invariato. In realtà questo fatto si verificherebbe nel caso in cui, ad esempio in un telaio, inserissi una diagonale di controvento di tipo classico, in cui non si ha dissipazione di energia; mentre nel caso di un dissipatore viscoso parte della energia di input si dissipa nel permettere il passaggio del liquido ad alta viscosità da una camera all'altra del dispositivo.

Proviamo ora quantificare i temi appena illustrati.

Nel caso di oscillatore munito di dissipatore, il taglio alla base può essere espresso, istante per istante, come:

$$(3.7) \quad T_B(t) = F_k(t) + F_D(t)$$

Dove $F_k(t)$ è la forza elastica, $F_D(t)$ è la forza assorbita dal dissipatore.

Se il sistema è sottoposto ad una forzante del tipo $a(t) = a_0 \sin(\Omega t)$, la risposta, a regime, sarà del tipo:

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = X \sin(\Omega t - \phi) \\ \dot{x}(t) = X\Omega \cos(\Omega t - \phi) \end{array} \right\}$$

Possiamo esprimere i valori di picco della forza elastica e della forza assorbita nel dissipatore come segue:

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{k,\max} = XK \\ F_{D,\max} = c_\alpha (X\Omega)^\alpha \end{array} \right\}$$

Dove K è la rigidità dell'oscillatore.

Attraverso l'utilizzo dell'indice del dissipatore è possibile pervenire ad una espressione chiusa della forza nel dissipatore. La forza assorbita nel dissipatore sarà massima, quando risulta essere massima la velocità relativa tra le due sezioni di estremità del dispositivo; per stimare tale velocità possiamo ipotizzare una estremità fissa e per quanto riguarda l'altra estremità ipotizzare una velocità di picco pari a $V=X*\Omega$, dove X è lo spostamento massimo e Ω è la frequenza della forzante. Tale assunzione risulta essere lecita per la condizione a regime in cui la frequenza di oscillazione risulta essere pari a quella della forzante e i valori di picco della velocità stazionari. Ricordando che $fa_d = \frac{X}{a_0} \omega^2$, è possibile scriverla velocità di picco come:

$$(3.10) \quad V = X\Omega = \frac{fa_d a_0}{\omega^2} \Omega = \frac{a_0}{\omega} fa_d \frac{\Omega}{\omega} = \frac{a_0}{\omega} fa_d f$$

Con f abbiamo indicato il rapporto tra le frequenze. Ricordando la (3.4), è possibile esprimere c_α come segue:

$$(3.11) \quad c_\alpha = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} a_0^{1-\alpha} = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} f^{1-\alpha} \omega^\alpha a_0^{1-\alpha}$$

Per cui a questo punto è possibile scrivere la forza massima assorbita dal dissipatore come segue:

$$(3.12) \quad F_{D,\max} = c_\alpha V^\alpha = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} f^{1-\alpha} \omega^\alpha a_0^{1-\alpha} \left(\frac{a_0}{\omega} fa_d f \right)^\alpha = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} f (fa_d)^\alpha a_0$$

Si può anche osservare che essendo $\varepsilon = \xi_{sd}(fa_d)^{1-\alpha}$ è possibile riscrivere la (3.12) in termini dell'indice di smorzamento equivalente come segue:

$$(3.13) \quad F_{D,\max} = 2 \frac{\xi_{sd}}{\kappa} ffa_d(ma_0)$$

A questo punto occorre fare la seguente osservazione: la forza elastica e la forza assorbita nel dissipatore sono in opposizione di fase, quando l'una è massima, l'altra è nulla; i valori massimi non sono coincidenti e quindi può risultare interessante vedere in che rapporto stanno i valori massimi. E' possibile scrivere il valore della massima forza assorbita nel dissipatore, nell'ipotesi di valutare l'indice di smorzamento equivalente attraverso l'equivalenza espressa in termini di energia dissipata, per cui $\kappa=\beta$, come segue:

$$(3.13) \quad F_{D,\max} = 2 \frac{\xi_{sd}}{\beta} \frac{\Omega}{\omega} \frac{X}{a_0} \omega^2 ma_0 = 2 \frac{\xi_{sd}}{\beta} \frac{\Omega}{\omega} \frac{X}{a_0} \frac{K}{m} ma_0 = 2 \frac{\xi_{sd}}{\beta} \frac{\Omega}{\omega} F_{k,\max}$$

Se ci poniamo in condizione di risonanza avremo che la (3.13) diviene:

$$(3.14) \quad F_{D,\max} = 2 \frac{\xi_{sd}}{\beta} F_{k,\max}$$

Le (3.13), (3.14) mostrano che per elevati valori dell'indice di smorzamento equivalente, ξ_{sd} , e per elevati valori del rapporto Ω/ω , la forza massima assorbita dai dissipatori può essere anche maggiore di quella elastica assorbita dall'oscillatore. E' da notare inoltre che a parità di altri fattori, per valori di α decrescenti, β aumenta (può variare infatti da 1.00 per $\alpha=1.00$, a 1.30 per $\alpha=0.00$) e quindi in definitiva la forza assorbita nel dissipatore diminuisce. Si possono pertanto verificare tre casi:

1) Siamo in presenza di un basso indice di smorzamento equivalente, quindi la forza elastica risulta predominante rispetto a quella assorbita nel dissipatore, e pertanto il taglio alla base può essere approssimato con la forza elastica. Nella pratica usuale, in presenza del solo smorzamento interno si procede per questa via.

2) Siamo in presenza di un alto indice di smorzamento equivalente, quindi la forza assorbita nel dissipatore risulta predominante rispetto a quella elastica, e pertanto il taglio alla base può essere approssimato con la forza assorbita dal dissipatore.

3) Siamo in presenza di un indice di smorzamento equivalente, per il quale

la forza assorbita nel dissipatore e la forza elastica risultano paragonabili, pertanto il taglio alla base deve essere calcolato.

Riportiamo di seguito delle analisi numeriche che illustrano questi fatti.

I dati della forzante sono i seguenti: $a_0 = 0.25m/sec^2$; $\Omega = 1sec^{-1}$. Per l'oscillatore è stato considerato uno smorzamento interno pari al 5%.

CASO 1

Dati: $\omega = 1sec^{-1}$; $\varepsilon = 0.05$; $\alpha = 0.80$.

Riportiamo dapprima l'andamento degli spostamenti e delle velocità in funzione del tempo. L'analisi è stata arrestata quando il sistema è giunto a regime.

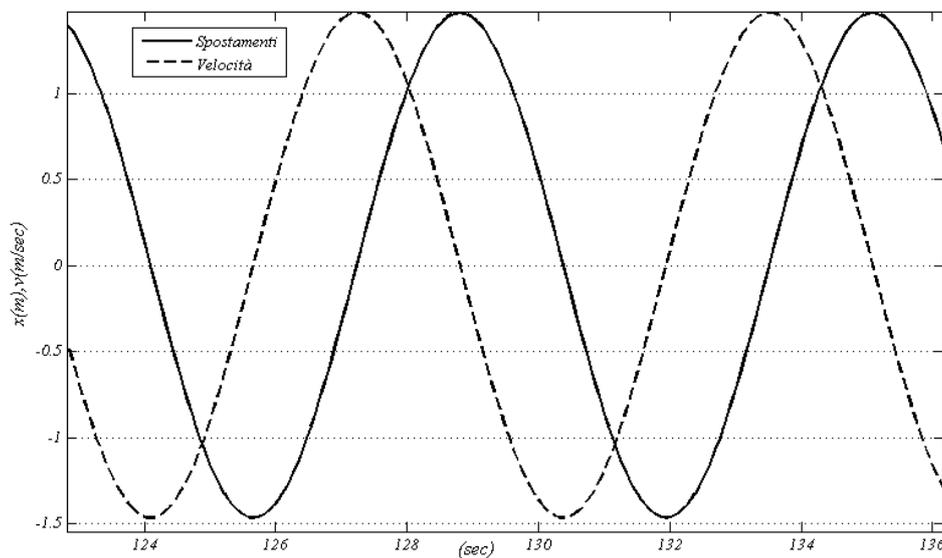


Figura 3.7. Andamento nel tempo di spostamenti e velocità. Caso 1.

Riportiamo ora l'andamento della forza elastica, della forza assorbita nel dissipatore e del taglio alla base, normalizzati nei confronti della massa, in funzione del tempo. L'analisi è stata arrestata quando il sistema è giunto a regime.

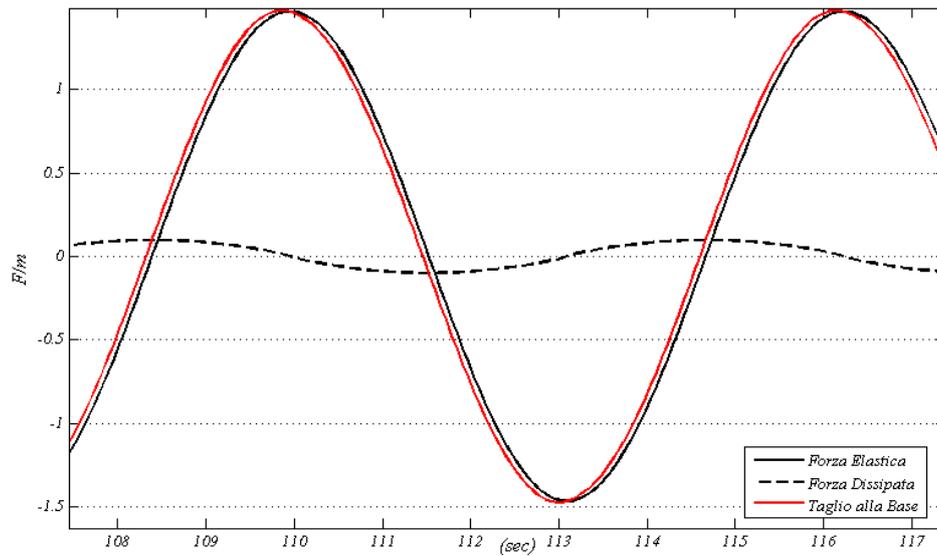


Figura 3.8. Andamento nel tempo Forza Elastica, Forza Dissipata e Taglio alla Base. Caso 1.

Riportiamo infine l'andamento del taglio alla base e della forza elastica in funzione dello spostamento per un ciclo a regime.

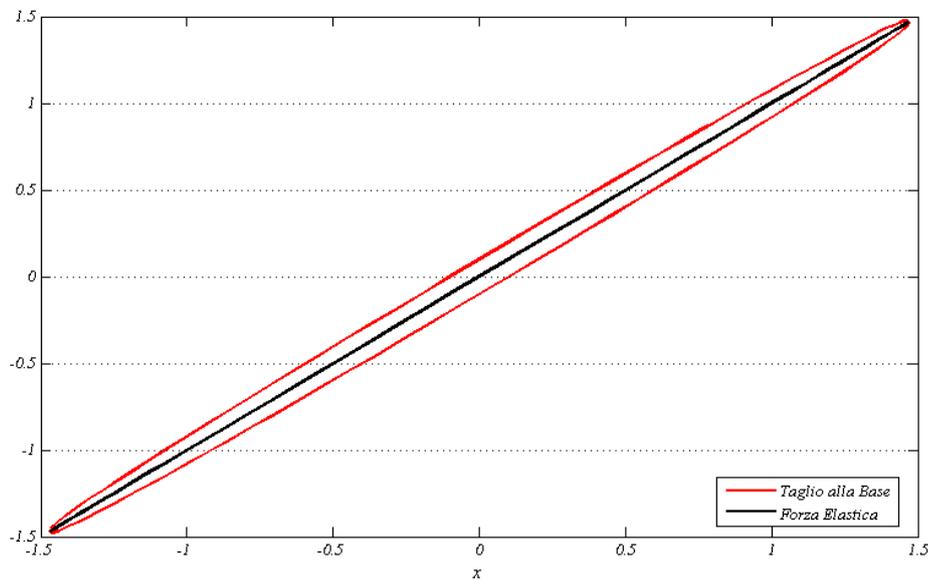


Figura 3.9. Taglio alla Base e Forza Elastica in funzione degli spostamenti per ciclo a regime Caso 1.

CASO 2

Dati: $\omega = 0.2 \text{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 0.40$; $\alpha = 0.80$.

Riportiamo dapprima l'andamento degli spostamenti e delle velocità in funzione del tempo. L'analisi è stata arrestata quando il sistema è giunto a regime.

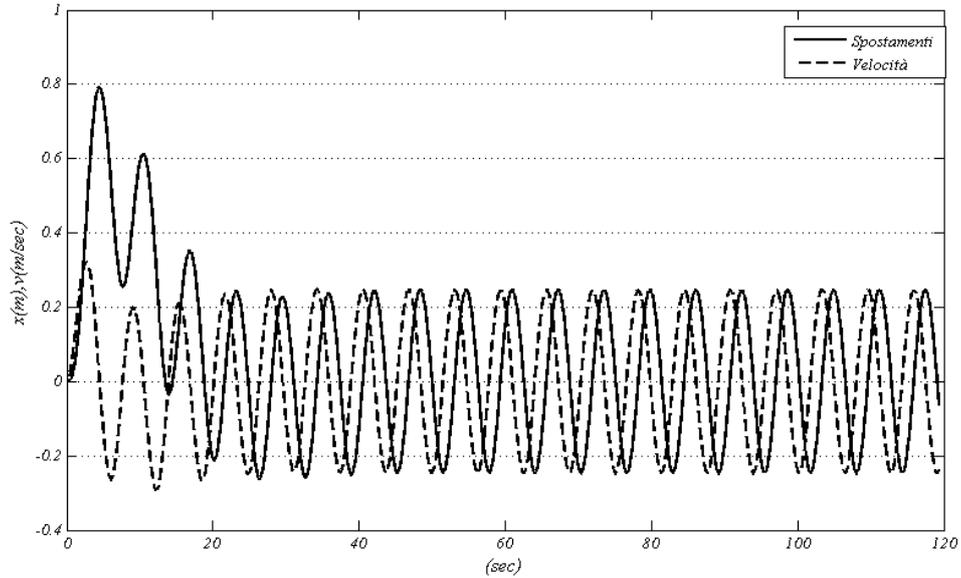


Figura 3.10. Andamento nel tempo di spostamenti e velocità. Caso 2.

Riportiamo ora l'andamento della forza elastica, della forza assorbita nel dissipatore e del taglio alla base, normalizzati nei confronti della massa, in funzione del tempo. L'analisi è stata arrestata quando il sistema è giunto a regime.

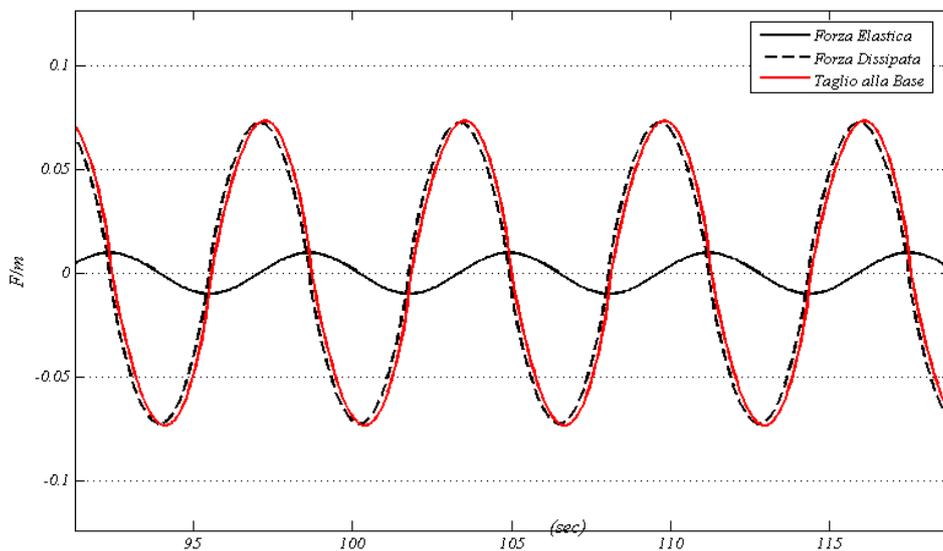


Figura 3.11. Andamento nel tempo Forza Elastica, Forza Dissipata e Taglio alla Base. Caso 2.

Riportiamo infine l'andamento del taglio alla base in funzione dello spostamento per un ciclo a regime. In verde è stato evidenziato l'andamento della forza

elastica.

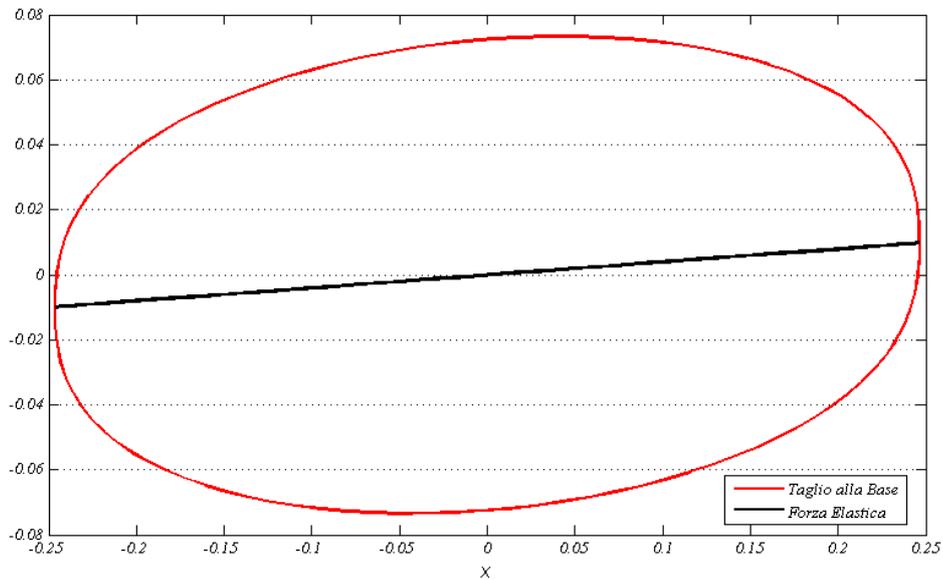


Figura 3.12. Taglio alla Base e Forza Elastica in funzione degli spostamenti per ciclo a regime Caso 2.

CASO 3

Dati: $\omega = 1 \text{sec}^{-1}$; $\varepsilon = 0.50$; $\alpha = 0.80$.

Riportiamo dapprima l'andamento degli spostamenti e delle velocità in funzione del tempo. L'analisi è stata arrestata quando il sistema è giunto a regime.

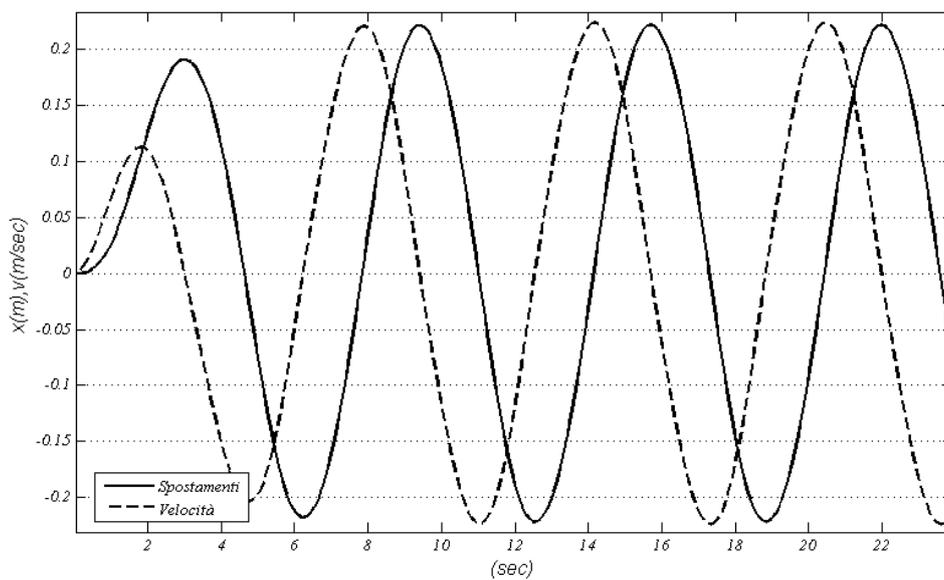


Figura 3.13. Andamento nel tempo di spostamenti e velocità. Caso 3.

Riportiamo ora l'andamento della forza elastica, della forza assorbita nel dissipatore e del taglio alla base, normalizzati nei confronti della massa, in funzione del tempo. L'analisi è stata arrestata quando il sistema è giunto a regime.

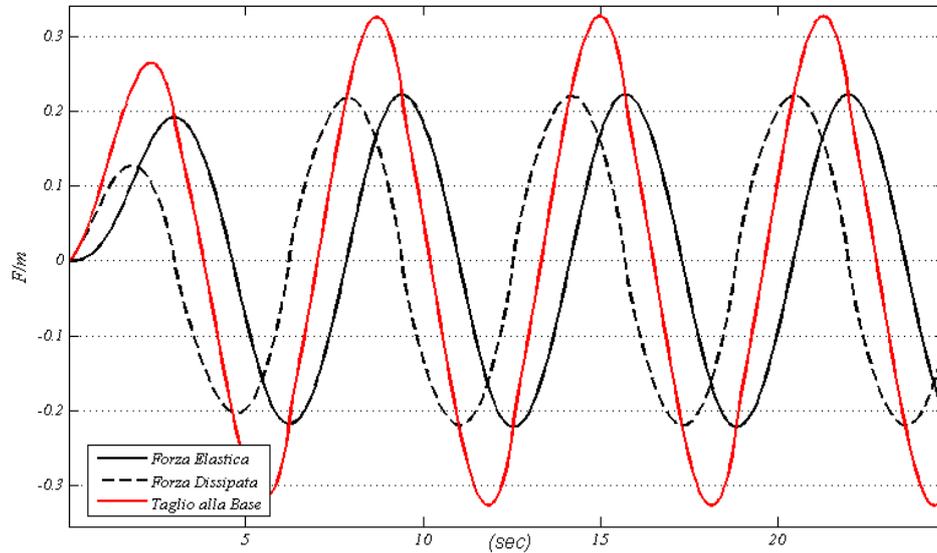


Figura 3.14. Andamento nel tempo Forza Elastica, Forza Dissipata e Taglio alla Base. Caso 3.

Riportiamo infine l'andamento del taglio alla base in funzione dello spostamento per un ciclo a regime. In verde è stato evidenziato l'andamento della forza elastica.

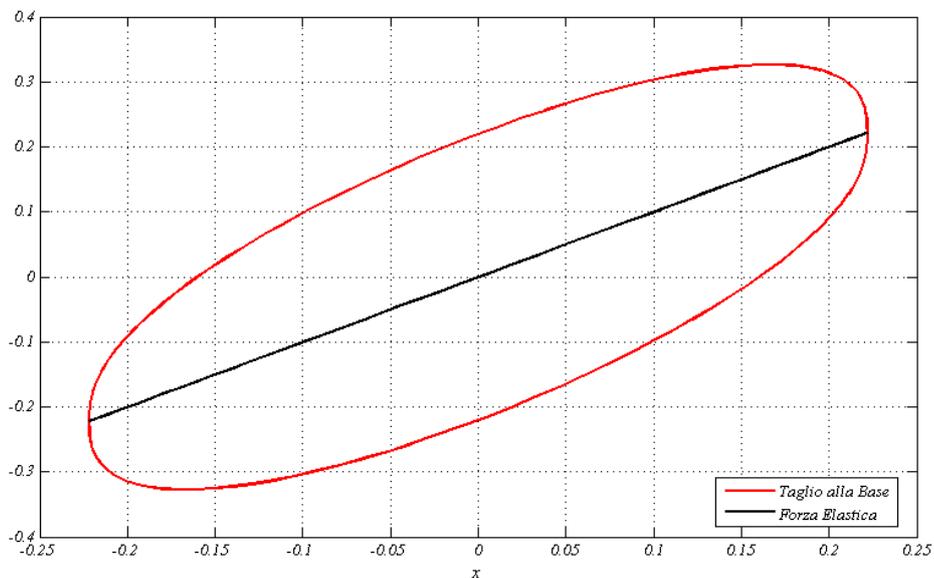


Figura 3.15. Taglio alla Base e Forza Elastica in funzione degli spostamenti per ciclo a regime Caso 3.

Alla luce di questi ragionamenti risulta evidente la motivazione per cui la normativa americana richieda la verifica del fabbricato dotato dissipatori per tre diversi stati:

- 1) Spostamento Massimo: situazione in cui si massimizza la forza elastica. Questo stato risulta, generalmente lo stato più gravoso per la struttura.
- 2) Velocità Massima: situazione in cui si massimizza la forza assorbita nel dissipatore. Questo stato risulta, generalmente lo stato più gravoso per il sistema di dissipatori.
- 3) Accelerazione Massima: situazione in cui si massimizza il taglio alla base. Per la determinazione delle azioni in questo stato viene proposta una procedura semplificata.

L'intento che ci prefissiamo ora è quello di poter quantificare il valore del taglio alla base nel caso più generale (caso 3), dal quale i casi più specifici possono essere dedotti come casi limite. La presente trattazione ripercorre, nella prima parte, l'approccio dell'articolo di Ramirez et al. intitolato "*Evaluation of simplified methods of analysis of yielding structures with damping systems*" pubblicato su *Earthquake Spectra* nel 2002.

Si considera di sottoporre il sistema, composto da un oscillatore semplicemente smorzato indefinitamente elastico-lineare e da un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare disposti in parallelo, ad una storia di spostamenti del tipo $u(t)=X\cos(\Omega t)$, per cui la velocità può essere espressa come $v(t)=-X\Omega\sin(\Omega t)$. Si consideri un intervallo di tempo compreso tra 0 e π/Ω . In questo intervallo il termine della velocità si mantiene sempre negativo. Scriviamo ora le espressioni delle forze che interessano la nostra trattazione: forza elastica (F_K), forza dissipata (F_D) e taglio alla base (T_B).

$$(3.15) \quad \left. \begin{aligned} F_K(t) &= ku(t) = kX \cos(\Omega t) \\ F_D(t) &= C_\alpha |\dot{u}(t)|^\alpha \text{sign}(\dot{u}(t)) = -C_\alpha X^\alpha \Omega^\alpha \sin^\alpha(\Omega t) \\ T_B(t) &= kX \cos(\Omega t) - C_\alpha X^\alpha \Omega^\alpha \sin^\alpha(\Omega t) \end{aligned} \right\}$$

Per come è stato impostato il problema risulta evidente che il taglio alla base dovrà assumere il suo valore di massimo relativo in un istante t^* compreso

nell'intervallo $[0, \pi/\Omega]$. Per cui è possibile identificare una differenza di fase tra l'istante in cui è massima la forza elastica e l'istante in cui è massimo il taglio alla base. Tale differenza di fase viene indicata con δ e vale

$$(3.16) \quad \delta = \pi / \Omega - t^*$$

Possiamo a questo punto derivare l'espressione del taglio alla base contenuta in (3.15), e ricavare una relazione che rappresenti una condizione di massimo relativo. Riportiamo di seguito le espressioni dei termini derivati.

$$(3.17) \quad \left. \begin{aligned} \frac{dF_K}{dt} &= -kX \sin(\Omega t) \\ \frac{dF_D}{dt} &= -C_\alpha \alpha X^\alpha \Omega^{\alpha+1} \cos(\Omega t) \sin^{\alpha-1}(\Omega t) \\ \frac{dT_B}{dt} &= -kX \sin(\Omega t) - C_\alpha \alpha X^\alpha \Omega^{\alpha+1} \cos(\Omega t) \sin^{\alpha-1}(\Omega t) \end{aligned} \right\}$$

Ricordando la (3.4) è possibile riscrivere il termine C_α in funzione di ε , come segue.

$$(3.18) \quad C_\alpha = 2m \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} (a_0)^{1-\alpha}$$

E quindi imponendo che la terza delle (3.17) si annulli nell'istante t^* , si ottiene infine:

$$(3.19) \quad \operatorname{tg}(\Omega t^*) \sin^{1-\alpha}(\Omega t^*) = -2\alpha \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{f}{fa_d^{1-\alpha}}$$

Dove fa_d è il fattore di amplificazione, f è il rapporto tra le frequenze. La relazione (3.19) non può essere risolta in forma chiusa, può essere solo risolta per via numerica.

Riportiamo di seguito l'andamento del taglio alla base normalizzato al valore $F_0 = m^* a_0$, (linea nera), per diversi valori del parametro ε e per un valore di α pari a

0.50. In rosso riportiamo l'andamento dei valori di picco della forza dissipata normalizzata (come dedotta dalla (3.13)). Si rammenta che l'andamento dei valori di picco della forza elastica normalizzata è pari a quello del fattore di amplificazione.

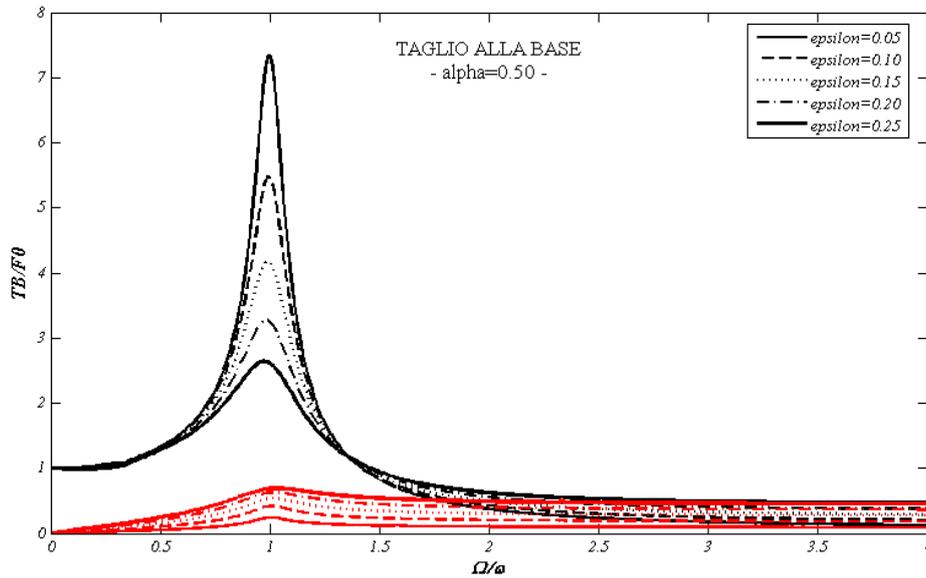


Figura 3.16. Taglio alla Base e Forza Dissipata al variare di ε per $\alpha=0.50$

Nella figura che segue riportiamo l'andamento del taglio alla base normalizzato per $\varepsilon=0.15$ e per differenti valori di α .

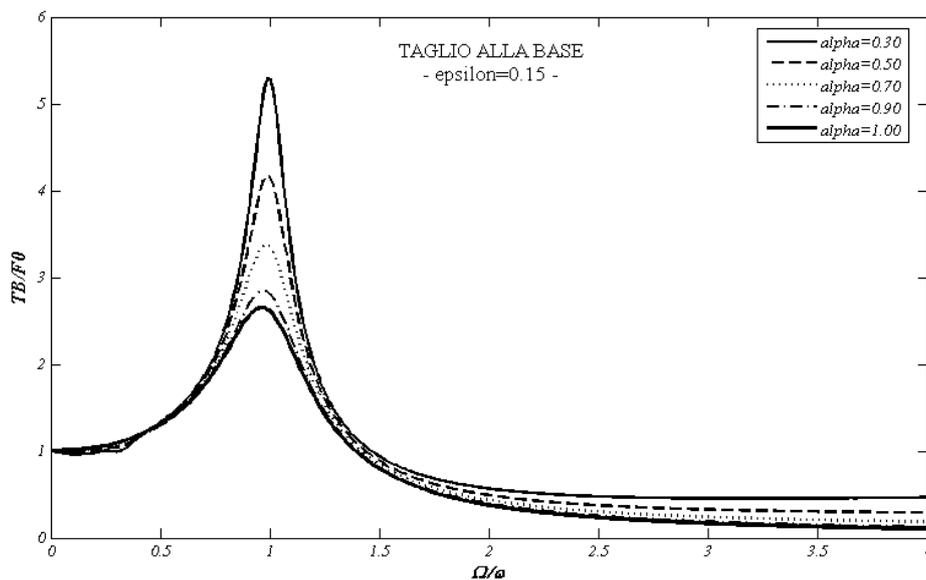


Figura 3.17. Taglio alla Base al variare di α per $\varepsilon=0.15$

Analogamente con quanto fatto per l'andamento del taglio alla base riportiamo

l'andamento della differenza di fase tra l'istante di massimo taglio alla base e il momento di massimo spostamento, inizialmente per differenti valori di ε avendo fissato α pari a 0.50, successivamente per differenti valori di α avendo fissato ε pari a 0.15.

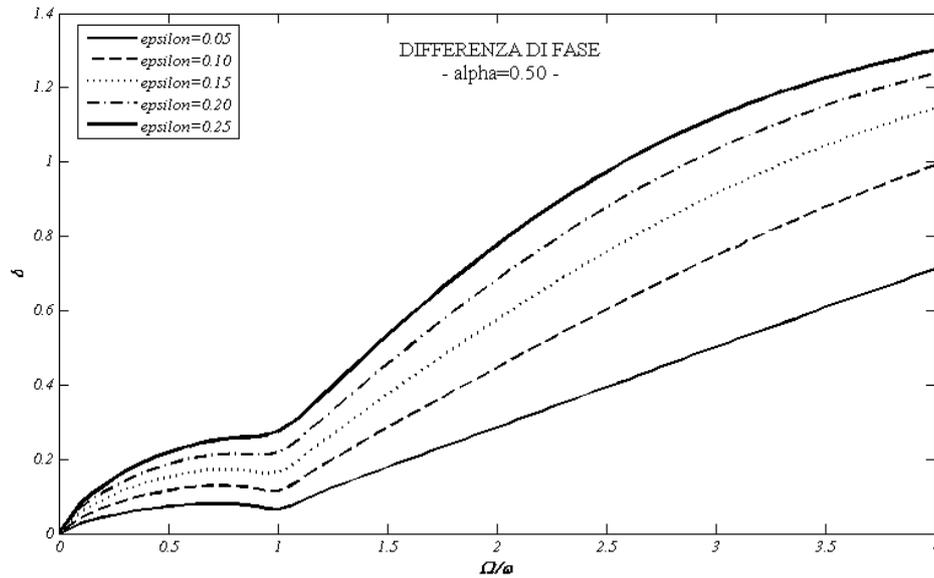


Figura 3.18. Differenza di Fase tra Taglio alla Base e Spostamenti al variare di ε per $\alpha = 0.50$

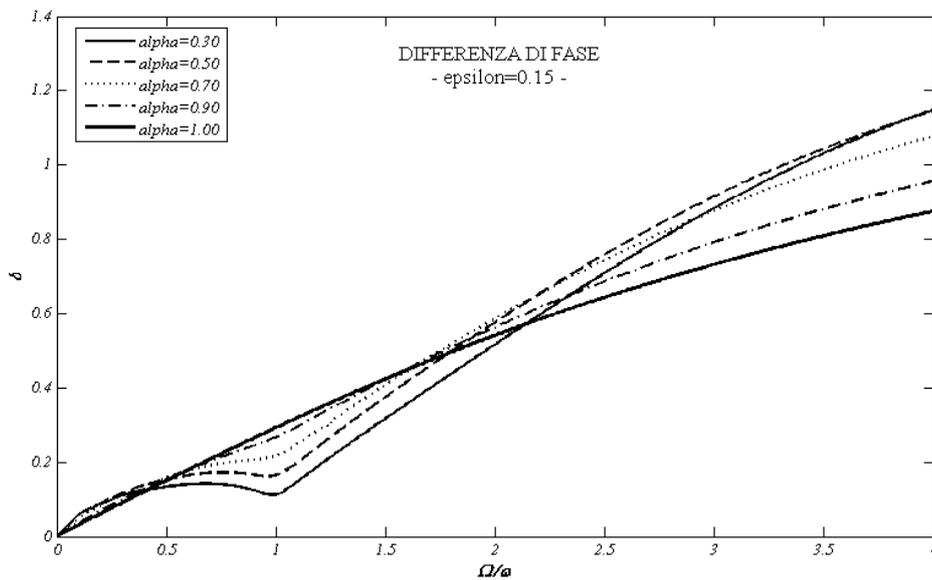


Figura 3.19. Differenza di Fase tra Taglio alla Base e Spostamenti al variare di α per $\varepsilon = 0.15$

Si possono notare alcuni fatti:

- La forza elastica e il taglio alla base tendono a coincidere per valori bassi di f , mentre la forza dissipata tende a 0 per bassi valori di f .

- Per valori di α crescenti il taglio alla base diminuisce in corrispondenza dei valori di risonanza, mentre l'andamento si inverte per valori elevati di f .
- Per valori elevati di f il valore del taglio alla base tende a quello della forza dissipata, mentre per valori prossimi alla risonanza si avvicina maggiormente alla forza elastica.
- La differenza di fase aumenta, su tutto lo spettro, all'aumentare del valore del parametro ε .
- Per valori elevati di f la differenza di fase aumenta, quindi il taglio alla base si approssima ad una posizione maggiormente in fase con la forza dissipata. Per valori elevati di f , il peso della forza dissipata aumenta, come già evidenziato.
- Per valori bassi di f la differenza di fase tende a 0 e quindi il valore del taglio alla base tende a coincidere con il valore della forza elastica.

3.2.3 VELOCITÀ EFFETTIVA

Nelle precedenti analisi è stata assunta la velocità di picco V pari a $\Omega * u_0$, nel caso in cui la forzante sia di tipo armonico e abbia una frequenza pari a Ω . In realtà tale assunzione risulta lecita nel caso in cui lo smorzatore abbia un comportamento lineare, mentre diviene piuttosto grossolana in certi intervalli dello spettro del rapporto tra le frequenze nel caso in cui vengano utilizzati dei dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare. Questo fatto risulta facilmente comprensibile se vengono analizzate le equazioni del moto riferite ai due problemi. Se considero il problema di un oscillatore semplice, dotato di smorzatore lineare sottoposto ad una forzante armonica l'equazione del moto risulta essere la seguente:

$$(3.20) \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -a_0 \sin(\Omega t)$$

Tale equazione differenziale risulta essere lineare, quindi la sua soluzione sarà la somma di un integrale particolare e dell'integrale della equazione differenziale complementare. E' noto che l'integrale dell'equazione complementare abbia un andamento esponenziale che tende ad esaurirsi nel tempo, pertanto in condizioni di regime, la risposta coinciderà soltanto con l'integrale particolare, che è del tipo:

$$(3.21) \quad u(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$$

Dove A e B sono costanti, facilmente determinabili sostituendo la (3.21) nella (3.20). Quello, però, che interessa maggiormente è che la risposta presenta, a regime, una frequenza pari alla frequenza della forzante. Pertanto l'assunzione di porre la velocità di picco pari alla pseudo velocità risulta assolutamente lecita.

Nel caso invece in cui allo smorzatore lineare venga sostituito un dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare l'equazione del moto risulta essere la seguente:

$$(3.22) \quad \ddot{u} + 2\xi_0 \omega \dot{u} + 2\xi_{sd} \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} \kappa^{-1} a_0^{1-\alpha} f a_d^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha + \omega^2 u = -a_0 \sin(\Omega t)$$

Si desidera evidenziare che in questo caso non è più possibile individuare la risposta come somma dell'integrale particolare e dell'integrale dell'equazione complementare in quanto l'equazione differenziale non è più lineare. Pertanto non è più possibile affermare che la risposta a regime sia coincidente con l'integrale particolare e che la frequenza della risposta a regime risulti molto prossima alla frequenza della forzante. L'assunzione, quindi di far coincidere la velocità di picco con la pseudo-velocità risulta non essere più lecita. Vedremo, che in realtà tale assunzione risulterà essere accettabile per un ampio intervallo dello spettro del rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale del sistema. A tal proposito sono state condotte delle analisi per differenti valori di α (0.80, 0.50, 0.30) sull'andamento del rapporto tra la velocità di picco (V) e la pseudo-velocità ($\Omega * u_0$) in funzione del rapporto delle frequenze e dell'indice del dissipatore, ε . Di seguito riportiamo i risultati.

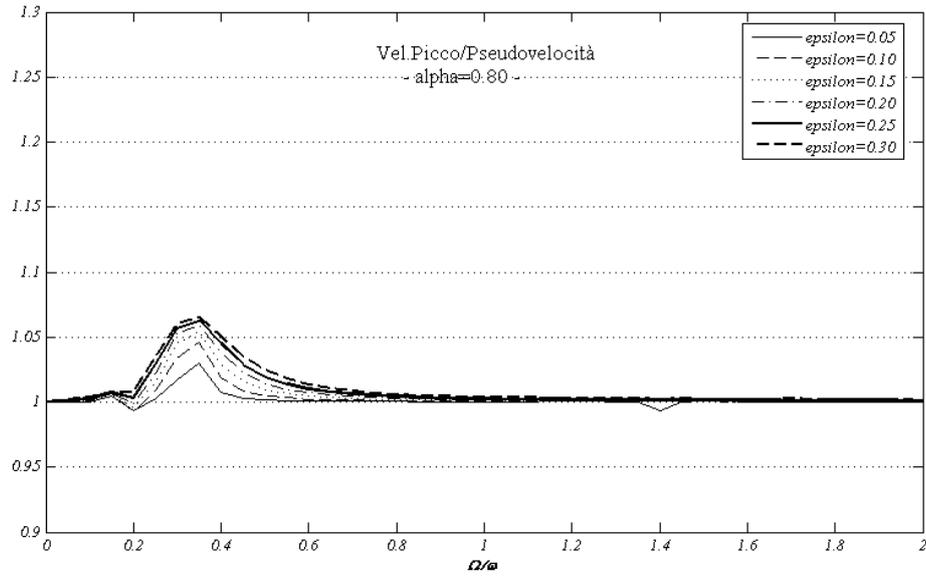


Figura 3.20. Rapporto tra la Velocità di Picco e la Pseudo-velocità per $\alpha=0.80$

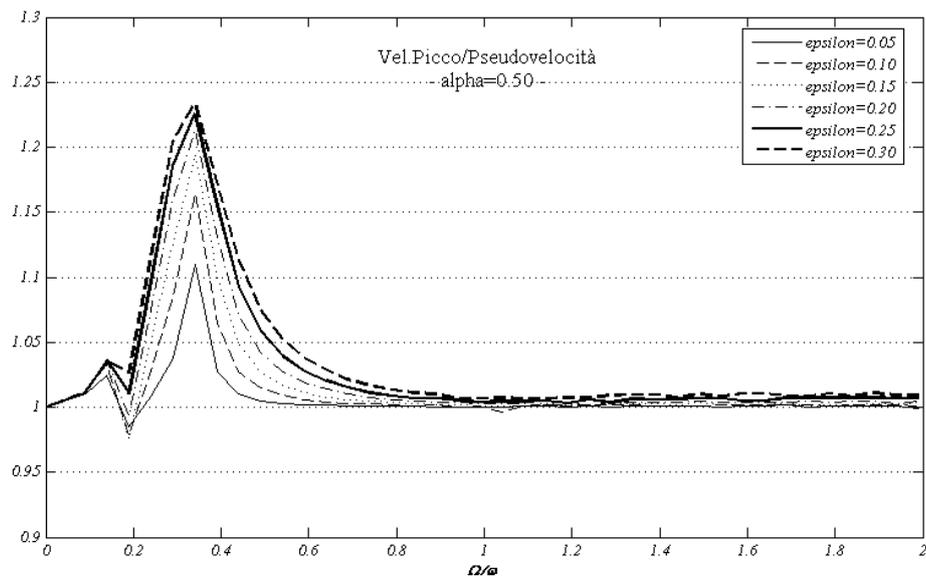


Figura 3.21. Rapporto tra la Velocità di Picco e la Pseudo-velocità per $\alpha=0.50$

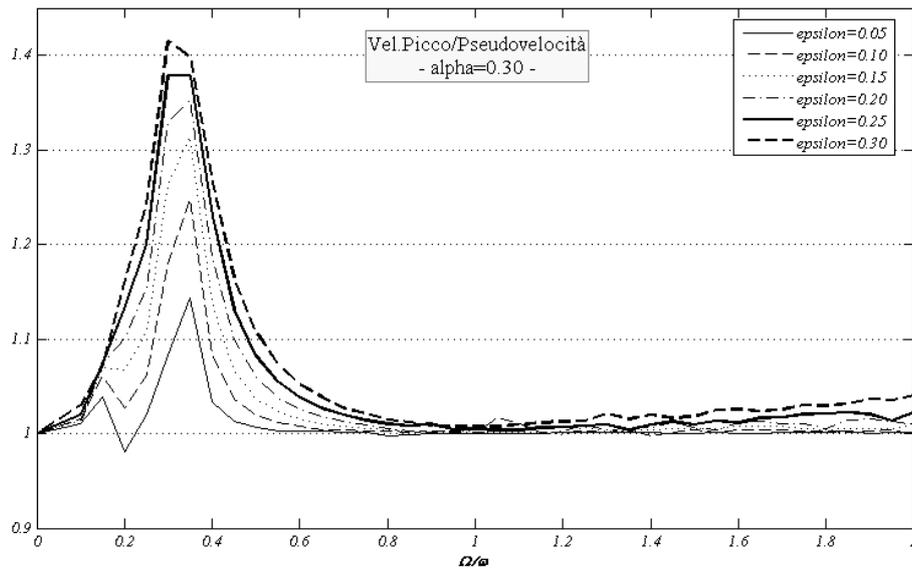


Figura 3.22. Rapporto tra la Velocità di Picco e la Pseudo-velocità per $\alpha=0.30$

I grafici appena mostrati evidenziano che l'ipotesi di risposta armonica risulta lecita, su tutto lo spettro di rapporti tra le frequenze considerato, per valori dell'esponente α prossimi all'unità: in particolare non si notano apprezzabili scostamenti dal comportamento puramente armonico in prossimità della risonanza mentre si registrano importanti scostamenti per valori del rapporto delle frequenze pari a 0.30 (anche per valori di α pari a 0.80) e per valori maggiori di 1.50 (solo per $\alpha=0.30$). Inoltre mano a mano che il valore di ε cresce aumenta che lo scostamento dal comportamento puramente armonico a parità di α .

A questo punto potremmo porci la seguente domanda: Cosa accade nel caso in cui il sistema sia sottoposto ad una forzante qualsiasi? Peckan, Mander, Chen nell'articolo "*Fundamental considerations for the design of non-linear viscous dampers*", pubblicato nel 1999 su *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* hanno pubblicato uno studio approfondito della risposta in termini di velocità nel caso in cui siano applicati degli accelerogrammi reali a sistemi fortemente smorzati. Viene mostrato che la velocità di picco si discosta dalla pseudo velocità-in maniera sensibile per gli intervalli estremi dello spettro (bassi periodi ed elevati periodi). Riportiamo di seguito una sintesi della trattazione ed alcuni risultati significativi.

Il valore di picco della risposta in termini di spostamenti, di un sistema ad un grado di libertà sottoposto ad una forzante qualsiasi $p(t)$ con indice di smorzamento pari a ξ , può essere scritta attraverso l'integrale di Duhamel come segue:

$$(3.23) \quad S_d = \left| \frac{1}{\omega_d} \int_0^t p(\tau) \sin(\omega_d(t-\tau)) \exp(-\xi\omega(t-\tau)) d\tau \right|_{\max}$$

Con $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$. Per valori consueti di ξ , si può porre $\omega_d \approx \omega$. La velocità di picco sarà pari alla derivata della (3.23). Riportiamo per semplicità l'espressione della velocità di picco considerando nullo l'indice di smorzamento (in questo modo trascuriamo il termine esponenziale).

$$(3.24) \quad V = \left| \int_0^t p(\tau) \cos(\omega(t-\tau)) d\tau \right|_{\max}$$

Se procedo analogamente a quanto appena fatto per scrivere l'espressione della pseudo velocità ottengo:

$$(3.25) \quad S_v = \omega S_d = \left| \int_0^t p(\tau) \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \right|_{\max}$$

La (3.25) differisce dalla (3.24) e questo dimostra come la velocità di picco non coincida formalmente con la pseudo-velocità. Gli autori mostrano che i due valori differiscono in modo significativo per elevati valori dell'indice di smorzamento e strutture con elevato periodo o con periodo molto basso. Gli autori propongono una relazione per passare dalla pseudo-velocità (grandezza facilmente computabile) alla velocità di picco. Riportiamo di seguito i risultati ottenuti considerando 36 accelerogrammi e diversi livelli di smorzamento.

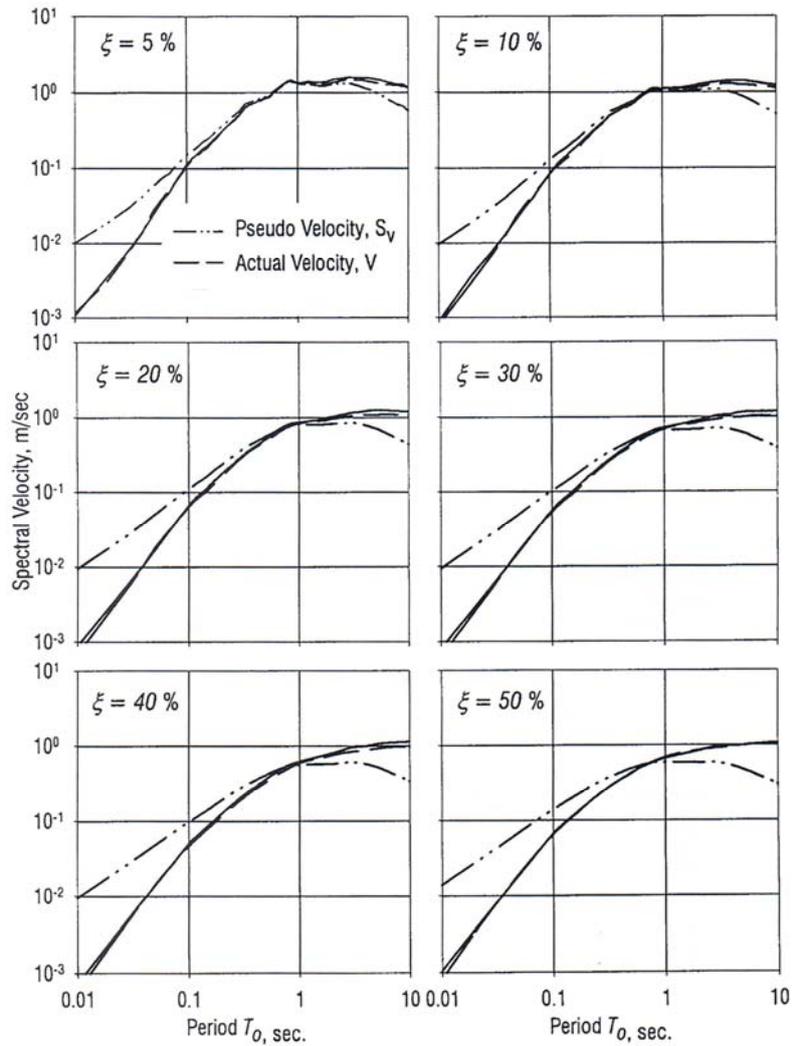


Figura 3.23. Velocità di Picco e la Pseudo-velocità per 36 accelerogrammi

3.3 Stima dell'indice di smorzamento equivalente

Si vuole a questo punto individuare una relazione che leghi in modo diretto i parametri ε e ξ_{sd} . Infatti nella (3.5) compare ancora il fattore di amplificazione e la stima di ξ_{sd} comporterebbe un processo di tipo iterativo.

Analogamente con quanto è stato fatto a proposito del fattore di amplificazione e del taglio alla base riportiamo gli andamenti dell'indice di smorzamento equivalente ξ_{sd} al variare di ε e di α .

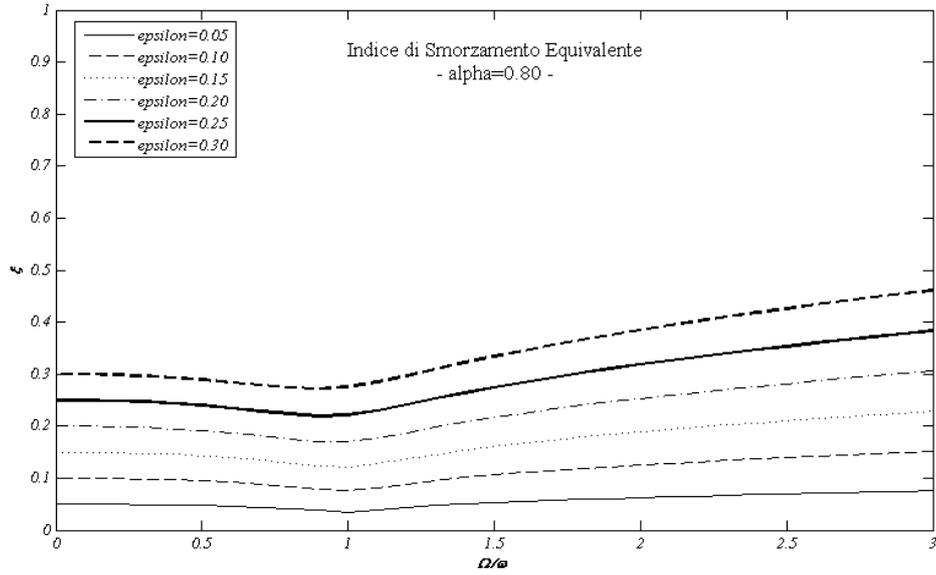


Figura 3.24. Indice di Smorzamento Equivalente al variare di ϵ , per $\alpha=0.80$

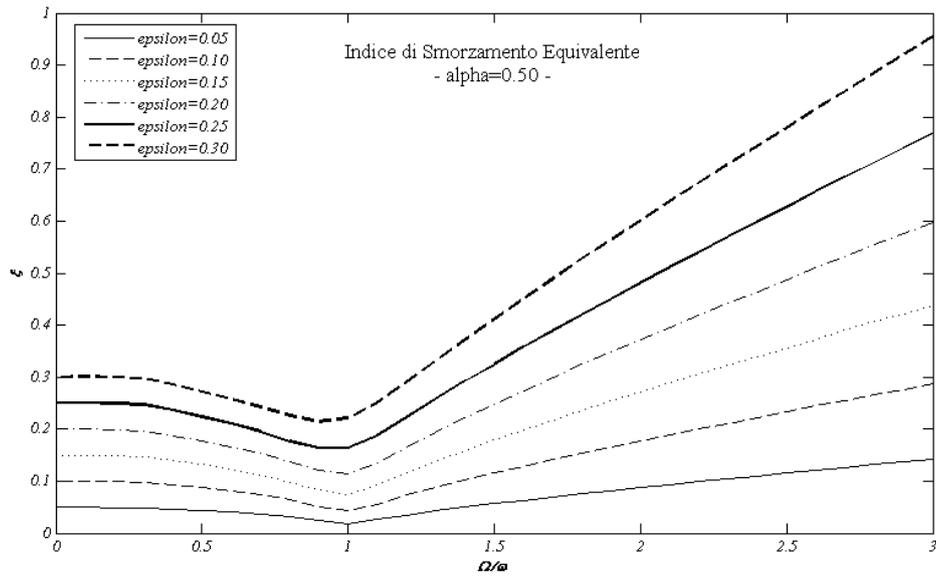


Figura 3.25. Indice di Smorzamento Equivalente al variare di ϵ , per $\alpha=0.50$

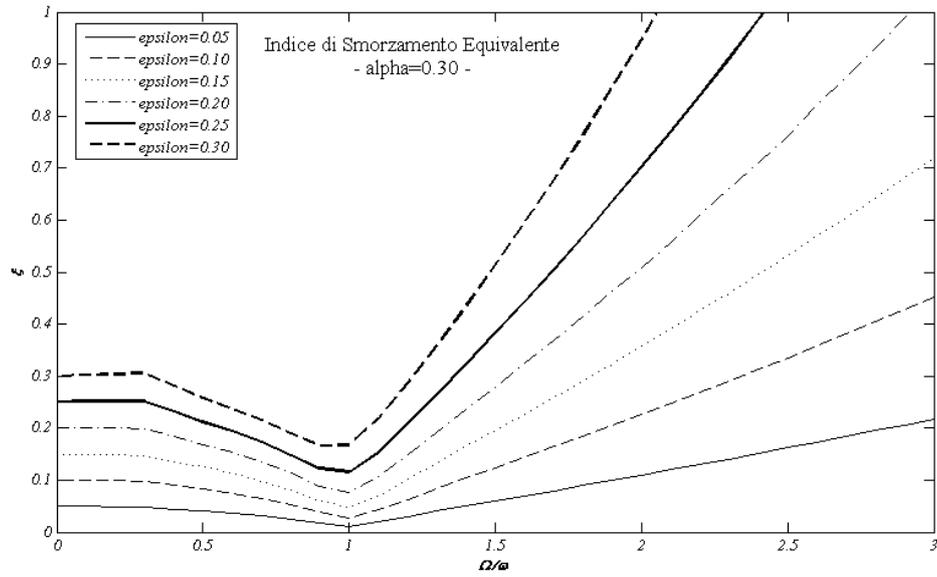


Figura 3.26. Indice di Smorzamento Equivalente al variare di ϵ , per $\alpha=0.30$

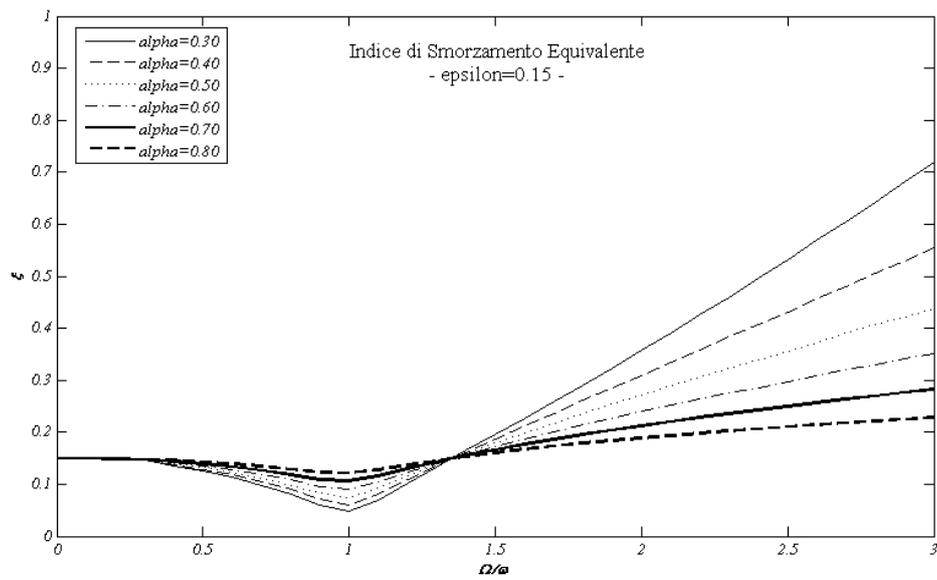


Figura 3.27. Indice di Smorzamento Equivalente al variare di α , per $\epsilon=0.15$

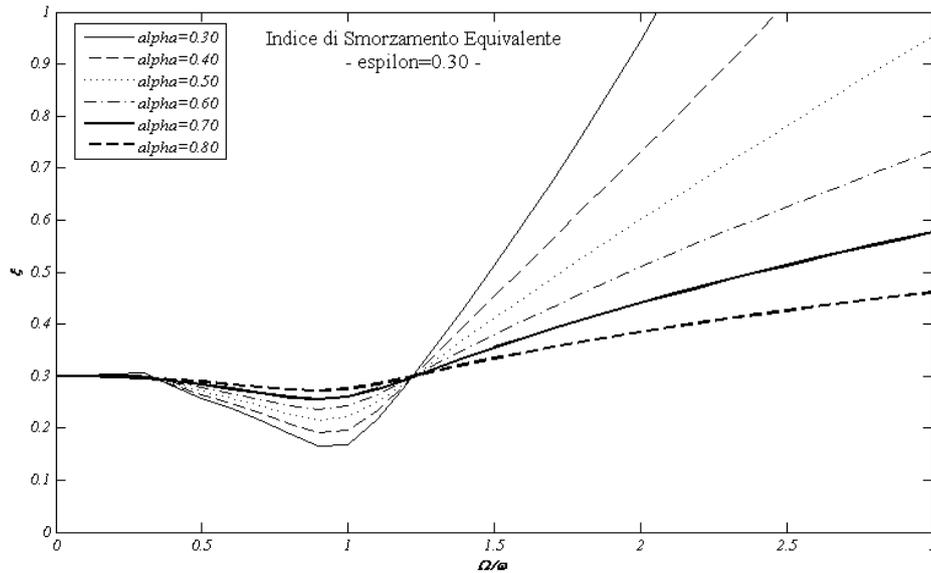


Figura 3.28. Indice di Smorzamento Equivalente al variare di α , per $\varepsilon=0.30$

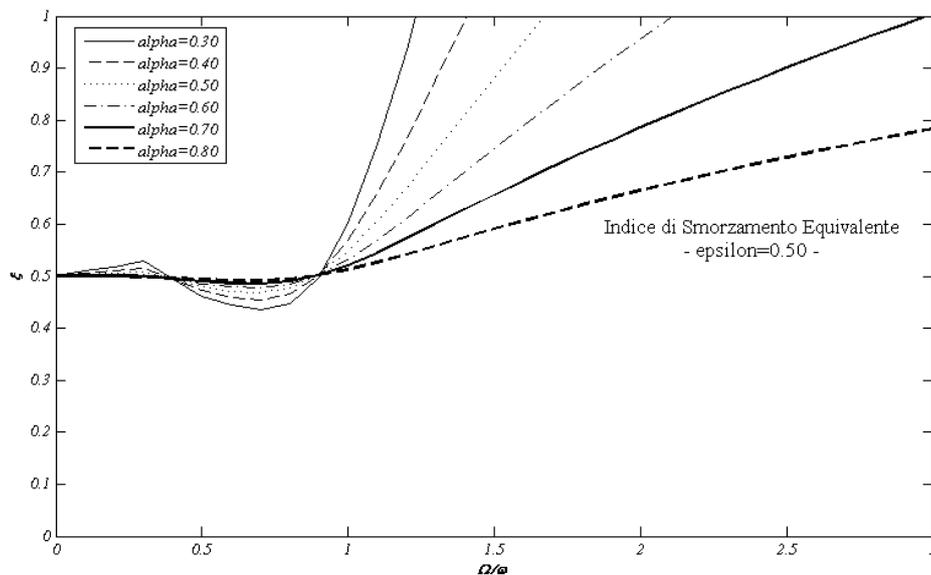


Figura 3.29. Indice di Smorzamento Equivalente al variare di α , per $\varepsilon=0.50$

Le figure (3.24), (3.25), (3.26) mostrano che a parità di α , l'indice di smorzamento equivalente, ξ_{sd} , su tutto lo spettro del rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale del sistema cresce all'aumentare di ε . Si desidera evidenziare che per $\Omega/\omega=0.00$ i due parametri coincidono. Si vede inoltre che per tutti i valori di α indagati l'andamento dell'indice di smorzamento equivalente, ξ_{sd} , può presentarsi un primo tratto costante, un secondo tratto decrescente fino a valori dello spettro prossimi a quelli di risonanza, e un ultimo tratto crescente. Tale andamento suggerisce la possibilità di approssimare le curve con delle spezzate, come vedremo in seguito.

Le figure (3.27), (3.28), (3.29) mostrano che anche le orinate dell'indice di smorzamento equivalente, per valori costanti di ε , risultano molto influenzate dal valore dell'esponente α . In particolare si evidenziano tre intervalli dello spettro caratterizzati da diversi comportamenti: un prima zona dello spettro identificabili con valori del rapporto tra le frequenze inferiori a 0.40 in cui per valori decrescenti di α , a parità di ε , si registrano valori crescenti di ξ_{sd} ; una seconda zona compresa tra 0.40 e un valore che oscilla tra 0.9 e 1.40 (in funzione del valore di α considerato) in cui a valori decrescenti di α si registrano valori decrescenti di ξ_{sd} ; una terza zona per tutti gli altri valori in cui si ripresenta il comportamento descritto per la prima zona. Si può quindi affermare che in corrispondenza della risonanza, o meglio delle ascisse spettrali per cui massimo è il valore dell'indice di smorzamento, dissipatori fortemente non-lineari, a parità di ε , siano in grado di dissipare una minor quantità di energia, essendo caratterizzati da un valore più basso dell'indice di smorzamento equivalente.

A questo punto si desidera proporre una relazione approssimata che metta in relazione l'indice di smorzamento ξ_{sd} e il parametro ε . Nelle figure (3.24), (3.25), (3.26) mostrano che sia possibile identificare tale relazione utilizzando una spezzata che prevede un primo tratto a valori costanti fino a una ascissa spettrale pari a 0.30, un secondo tratto decrescente fino alla risonanza e un terzo tratto crescente.

Lo stimatore dell'indice di smorzamento può essere scritto nella forma che segue:

$$(3.26) \quad \begin{cases} \frac{\Omega}{\omega} \leq 0.30 & \Rightarrow \xi_{sd} = \varepsilon \\ 0.30 \leq \frac{\Omega}{\omega} \leq 1.00 & \Rightarrow \xi_{sd} = \varepsilon - k_1 \left(\frac{\Omega}{\omega} - 0.30 \right) \\ \frac{\Omega}{\omega} \geq 1.00 & \Rightarrow \xi_{sd} = \varepsilon - 0.70k_1 + k_2 \left(\frac{\Omega}{\omega} - 1.00 \right) \end{cases}$$

Lo stimatore per come è stato scritto presenta soltanto due parametri incogniti k_1 e k_2 , che rappresentano la pendenza delle rette degli ultimi due tratti. Si vuole sottolineare che come evidenziano i risultati ottenuti, i due parametri saranno funzione sia di ε che di α .

I valori di k_1 e k_2 possono essere calcolati in modo piuttosto semplici con il metodo della regressione lineare.

Si desidera mettere in evidenza un fatto. Il valore di ξ_{sd} , che abbiamo stimato nelle analisi fin qui svolte e che è stato riportato nelle figure precedenti, è stato ricavato utilizzando la (3.5), una volta ricavato il fattore di amplificazione (fa_d), dalla integrazione numerica della (3.6); nella (3.6) compare il termine ξ_0 , e quindi il valore di fa_d e conseguentemente il valore di ξ_{sd} sono funzione di ξ_0 , che è stato posto, come usualmente si fa, pari al 5%; è chiaro che per valori diversi si possono ottenere diversi valori di ξ_{sd} .

Riportiamo di seguito i valori ricavati per k_1 e k_2 , in funzione di α e ε , con α variabile tra 0.15 e 0.90 ed ε variabile tra 0.05 e 0.30.

k_1		ε					
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
α	0,15	0,0578	0,1129	0,1638	0,2089	0,2454	0,2690
	0,30	0,0516	0,0991	0,1411	0,1752	0,1986	0,2079
	0,45	0,0438	0,0825	0,1143	0,1374	0,1502	0,1509
	0,60	0,0344	0,0629	0,0844	0,0983	0,1040	0,1011
	0,75	0,0231	0,0407	0,0529	0,0597	0,0615	0,0584
	0,90	0,0098	0,0167	0,0210	0,0231	0,0233	0,0217
k_2		ε					
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
α	0,15	0,1350	0,2910	0,5057	0,8709	1,6439	3,1647
	0,30	0,0990	0,2037	0,3210	0,4603	0,6367	0,8732
	0,45	0,0708	0,1420	0,2146	0,2906	0,3717	0,4600
	0,60	0,0479	0,0938	0,1380	0,1809	0,2229	0,2644
	0,75	0,0282	0,0540	0,0777	0,0995	0,1197	0,1386
	0,90	0,0107	0,0201	0,0283	0,0356	0,0421	0,0480

Tabella 3.1 Valori di k_1 e k_2

Nelle figure che seguono riportiamo gli andamenti di k_1 e k_2 in funzione di ε per diversi valori di α .

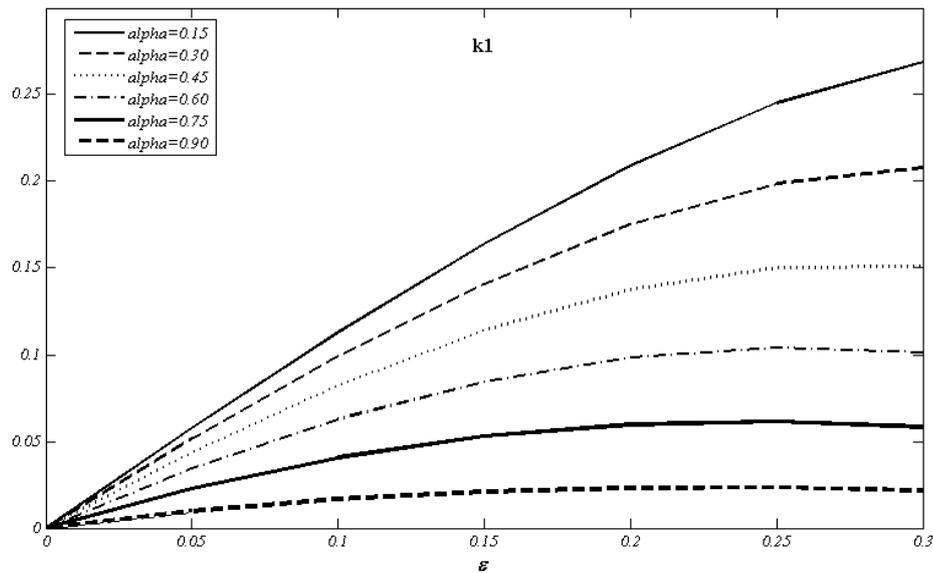


Figura 3.30. Andamento di k_1 in funzione di α ed ε

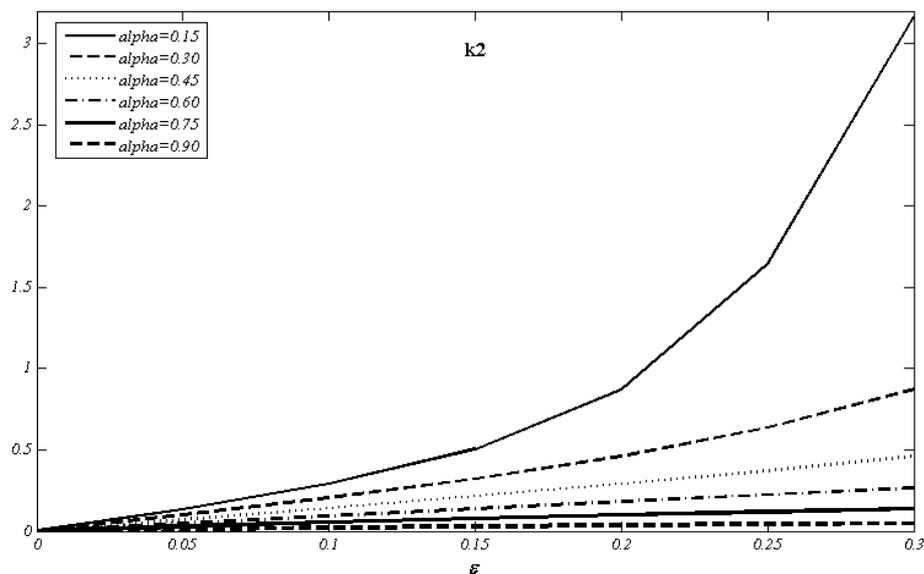


Figura 3.31. Andamento di k_2 in funzione di α ed ε

Nelle figure che seguono riportiamo i risultati delle analisi condotte confrontando i valori ricavati dall'integrazione numerica della (3.6) con quelli dedotti dalla applicazione della (3.26).

- **$\alpha = 0.30$**

Riportiamo innanzitutto l'andamento dell'indice di smorzamento equivalente dedotto per via numerica (linee continue colorate per ogni valore di ε) e

dedotto per via approssimata, applicando i coefficienti k_1 e k_2 precedentemente illustrati (tondi di colore corrispondente).

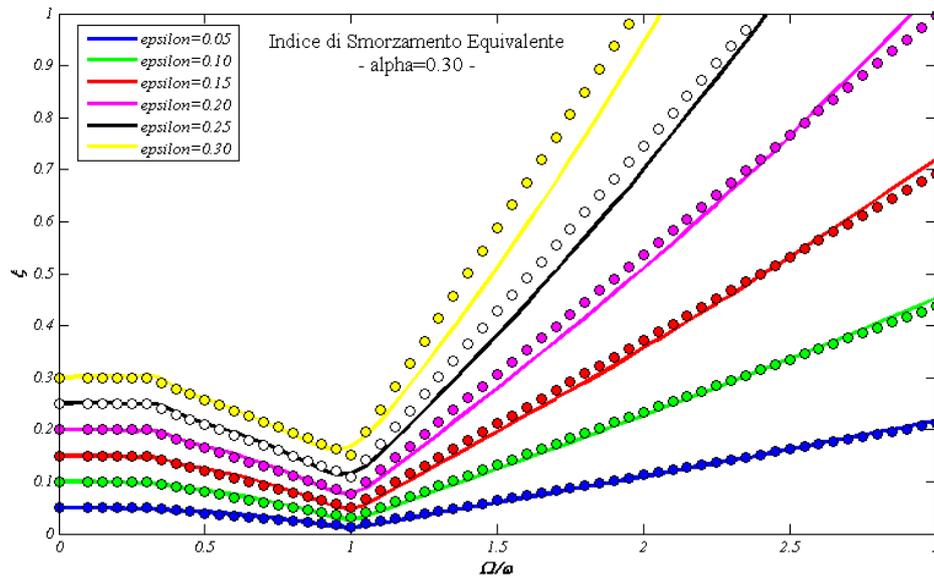


Figura 3.32. Andamento di ξ_{sd} in funzione di ε per $\alpha=0.30$

Nella figura sono riportati gli andamenti interrompendo il grafico per valori delle ordinate pari a 1.00, in quanto nelle applicazioni ingegneristiche valori superiori sono privi di significato. Nel range di rapporti tra le frequenze che abbiamo scelto, il valore dell'indice di smorzamento supera il limite imposto per valori elevati di ε e per valori bassi di α ($\alpha=0.30$ in questo grafico). Si desidera sottolineare, inoltre, che l'andamento dell'indice di smorzamento equivalente per rapporti delle frequenze superiori all'unità presenta un andamento fortemente non-lineare.

Il metodo della regressione lineare “lavora” su tutto il range di rapporti di frequenze considerati e quindi anche in quelle zone in cui il valore dell'indice di smorzamento è superiore all'unità. Operando in questo modo, a causa dell'andamento non-lineare della curva, si hanno forti scostamenti tra i valori approssimati e valori calcolati per via numerica proprio per quei valori del rapporto tra le frequenze per cui l'indice di smorzamento è inferiore a 1.00, come mostra la figura che segue, la quale riporta l'andamento dell'errore percentuale.

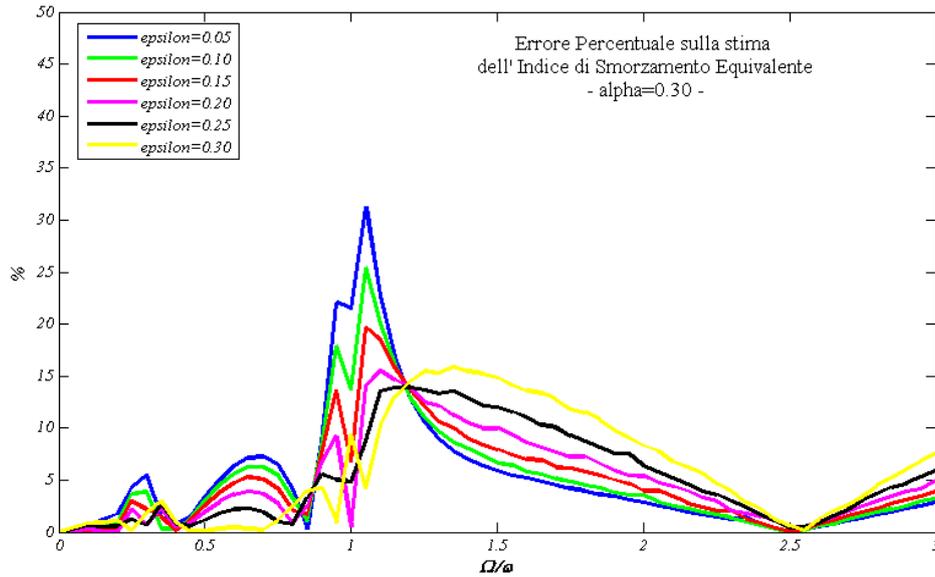


Figura 3.33. Andamento di dell'errore percentuale sulla stima di ξ_{sd} in funzione di ϵ per $\alpha=0.30$

Per ovviare a questo inconveniente abbiamo fatto lavorare la regressione lineare solo su quei range di frequenze per cui l'indice di smorzamento si mantiene inferiore all'unità.

Nelle figure che seguono riportiamo i risultati ottenuti.

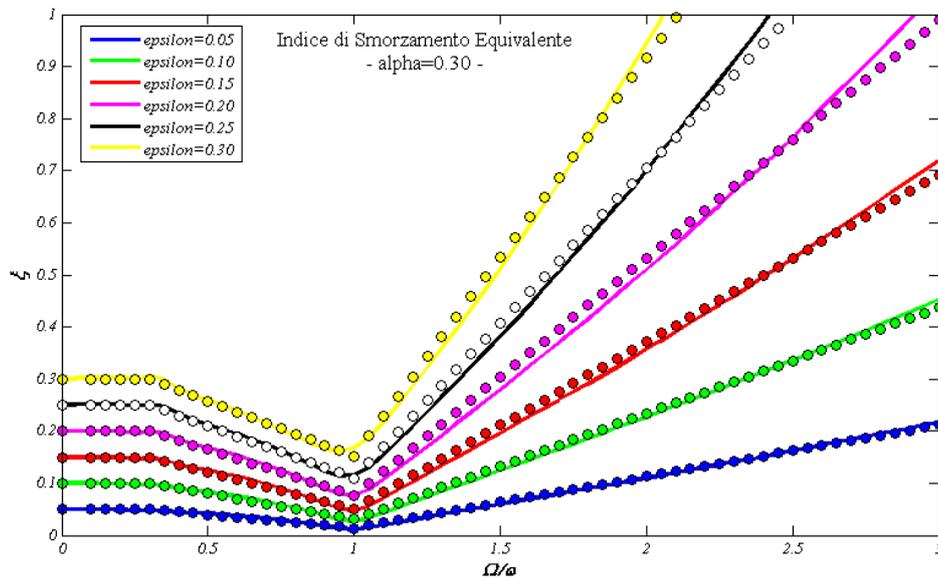


Figura 3.34. Andamento di ξ_{sd} in funzione di ϵ per $\alpha=0.30$

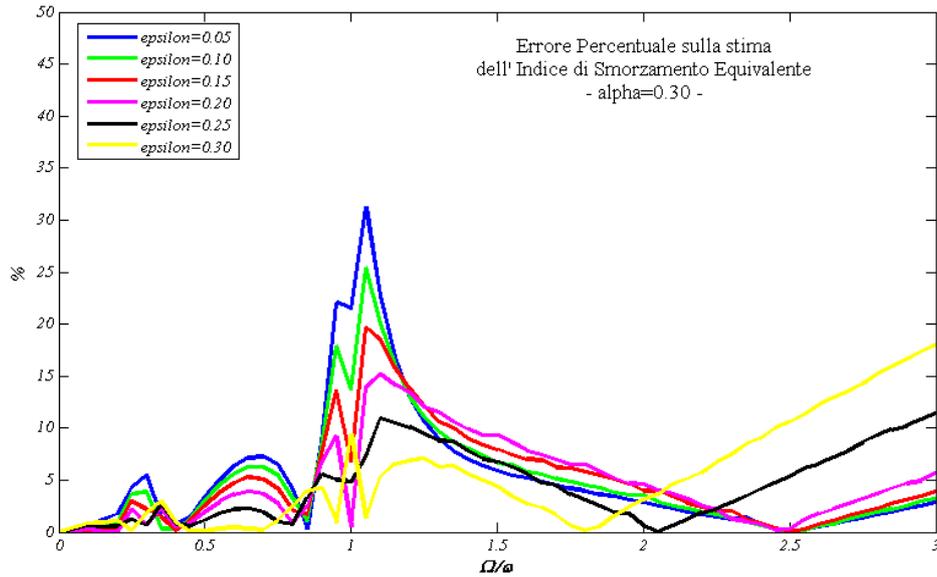


Figura 3.35. Errore percentuale sulla stima di ξ_{sd} in funzione di ε per $\alpha=0.30$

In questo modo siamo riusciti ad ottenere una stima accettabile su uno spettro più ampio di valori di ε e di α . E' chiaro che operando in questo modo abbiamo dovuto modificare i valori di k_2 per valori di α piccoli (<0.45) Riportiamo di seguito i risultati.

$k_2\text{-lim}$		ε					
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
α	0,15	0,1350	0,2910	0,4694	0,6409	0,8851	1,1503
	0,30	0,0990	0,2037	0,3210	0,4563	0,5962	0,7585
	0,45	0,0708	0,1420	0,2146	0,2906	0,3717	0,4616
	0,60	idem	idem	idem	idem	idem	idem
	0,75	idem	idem	idem	idem	idem	idem
	0,90	idem	idem	idem	idem	idem	idem

Tabella 3.2 Valori di k_2 con limitazione

Nel grafico che segue riportiamo gli andamenti di k_2 nelle due situazioni, con limitazione (linee rosse) e senza limitazione.

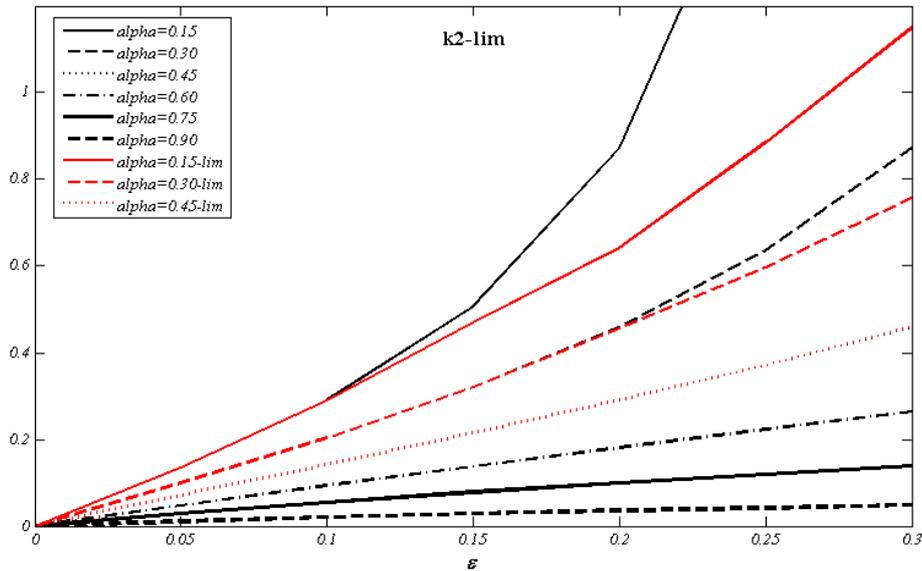


Figura 3.36. Andamento di k_2 con limitazione in funzione di α ed ε

Nelle analisi che seguono faremo sempre riferimento ai valori di k_2 calcolati con limitazione.

Riportiamo di seguito la stima del fattore di amplificazione, dell'indice di smorzamento equivalente e dei relativi errori percentuale.

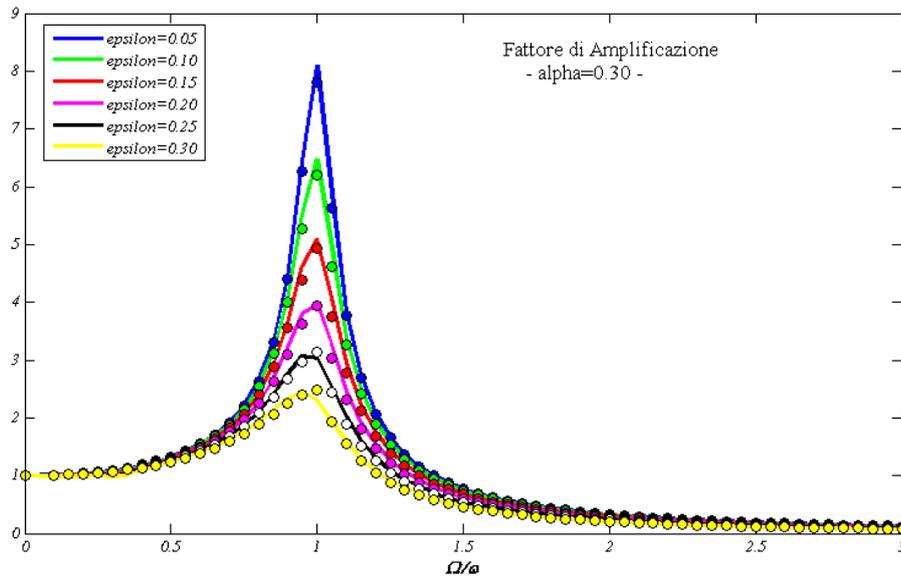


Figura 3.37. Andamento del fattore di amplificazione in funzione di ε per $\alpha=0.30$

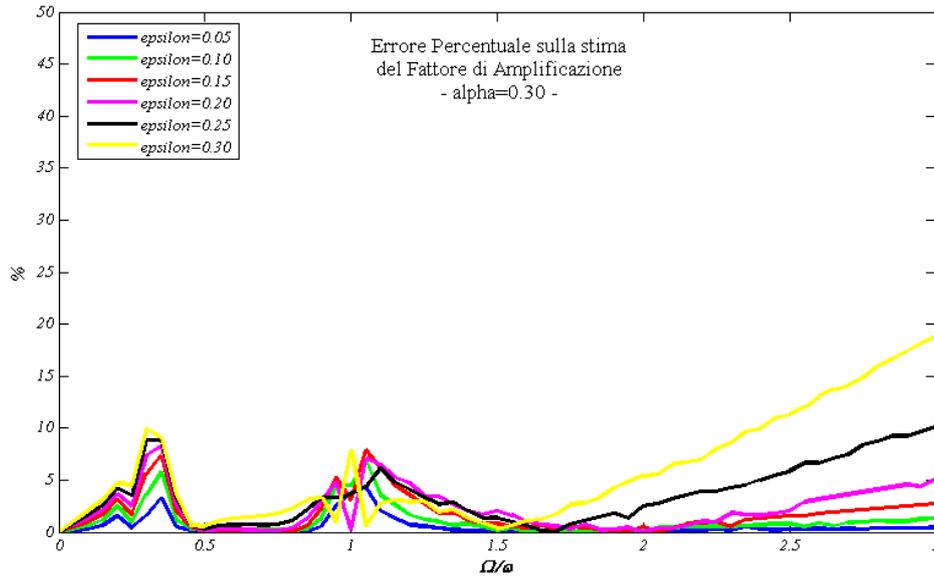


Figura 3.38. Errore percentuale sulla stima del fattore di amplificazione in funzione di ε per $\alpha=0.30$

- $\alpha = 0.50$

Analogamente a quanto fatto in precedenza riportiamo l'andamento del fattore di amplificazione, dell'indice di smorzamento equivalente e dei relativi errori percentuali dei valori stimati rispetto ai valori calcolati. Nelle figure che seguono manterremo la stessa notazione usata in precedenza.

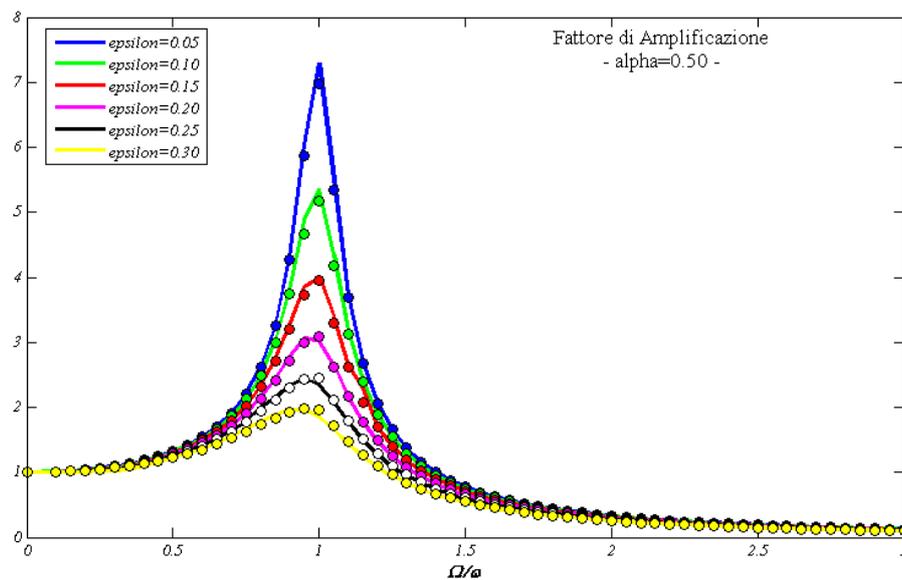


Figura 3.39. Andamento del fattore di amplificazione in funzione di ε per $\alpha=0.50$

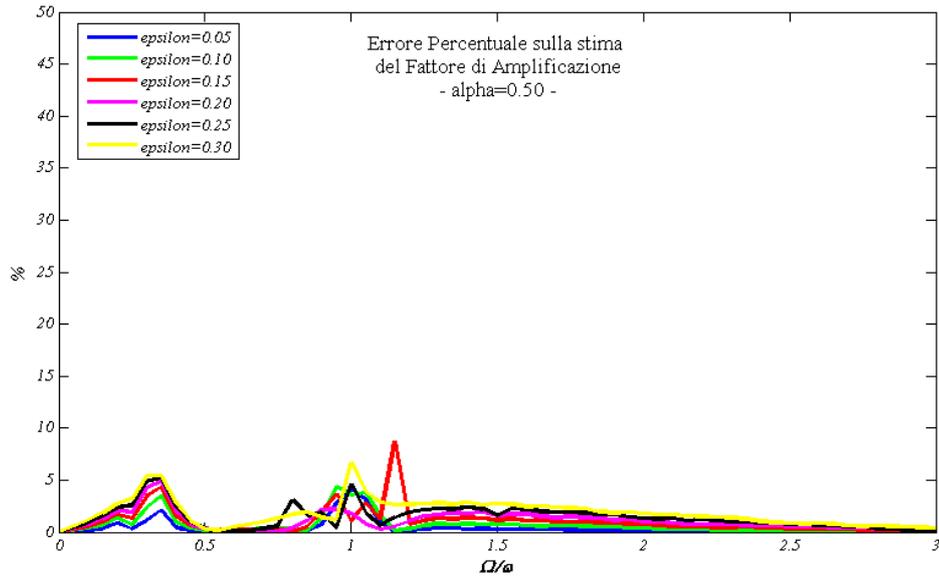


Figura 3.40. Errore percentuale sulla stima del fattore di amplificazione in funzione di ε per $\alpha=0.50$

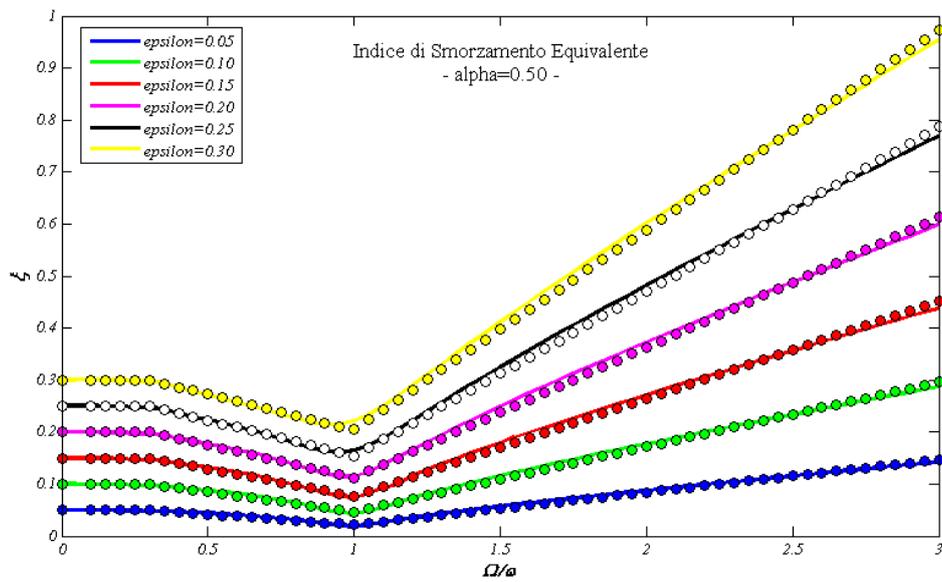


Figura 3.41. Andamento di ξ_{sd} in funzione di ε per $\alpha=0.50$

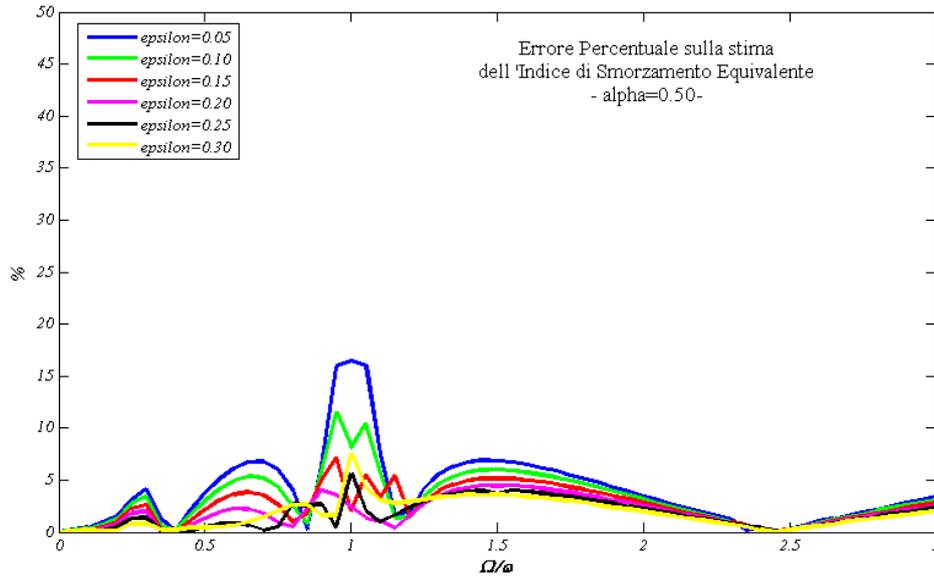


Figura 3.42. Errore percentuale sulla stima di ξ_{sd} in funzione di ε per $\alpha=0.50$

- $\alpha = 0.80$

Analogamente a quanto fatto in precedenza riportiamo l'andamento del fattore di amplificazione, dell'indice di smorzamento equivalente e dei relativi errori percentuali dei valori stimati rispetto ai valori calcolati. Nelle figure che seguono manterremo la stessa notazione usata in precedenza.

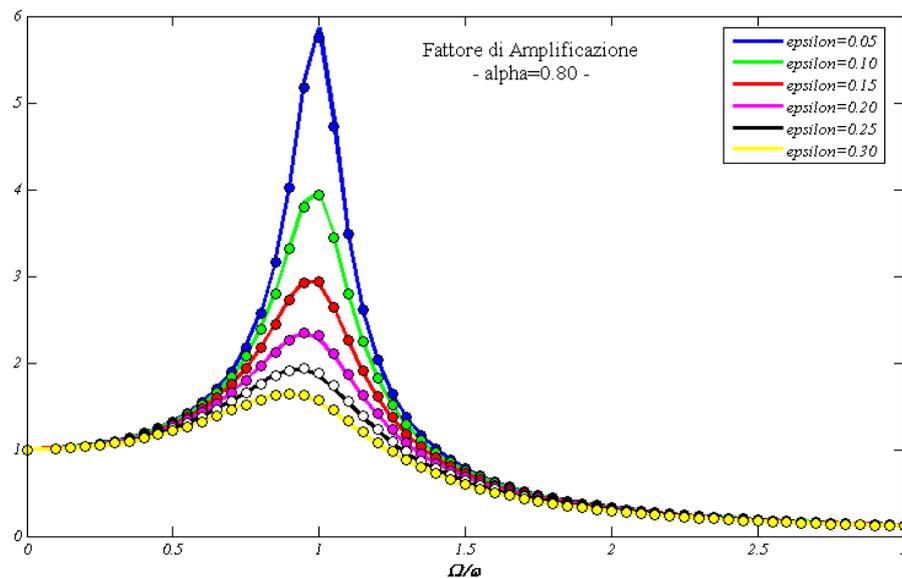


Figura 3.43. Andamento del fattore di amplificazione in funzione di ε per $\alpha=0.80$

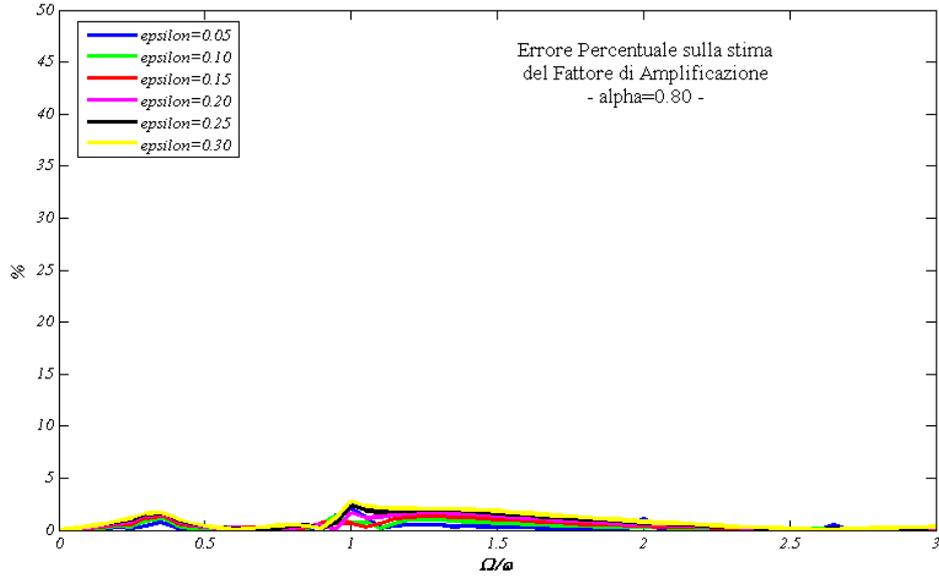


Figura 3.44. Errore percentuale sulla stima del fattore di amplificazione in funzione di ε per $\alpha=0.80$

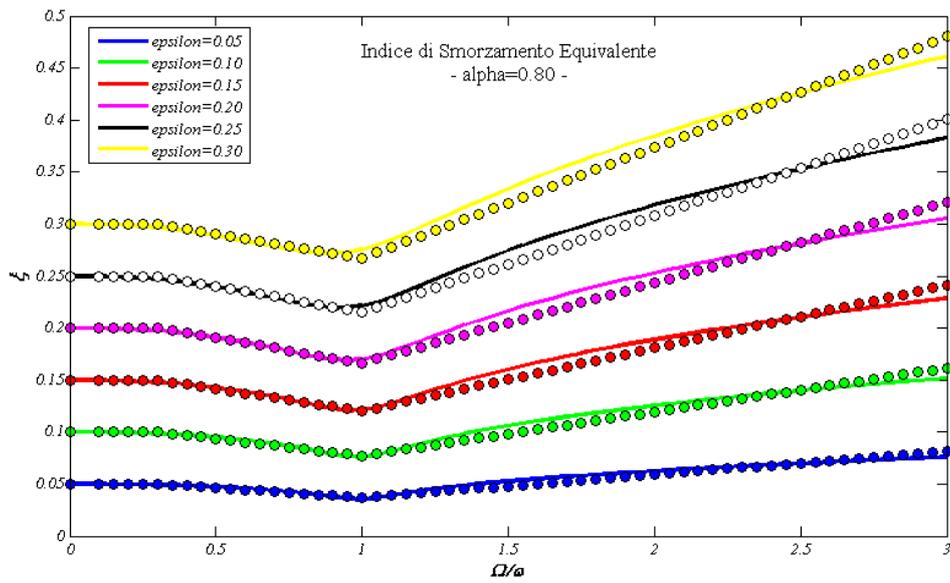


Figura 3.45. Andamento di ζ_{sd} in funzione di ε per $\alpha=0.80$

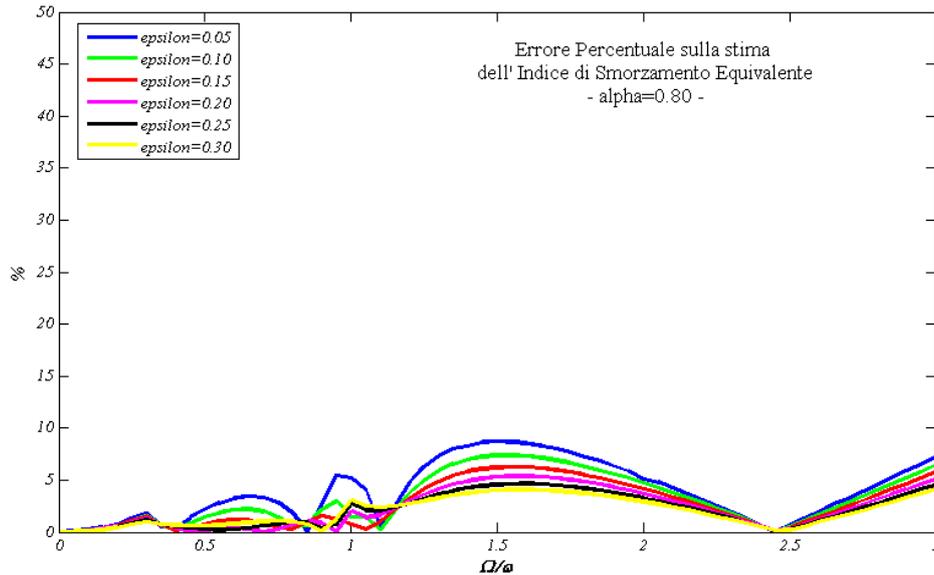


Figura 3.46. Errore percentuale sulla stima di ξ_{sd} in funzione di ε per $\alpha=0.80$

In conclusione si può affermare che la metodologia proposta per stimare in modo diretto l'indice di smorzamento equivalente riesce ad approssimare in modo soddisfacente la risposta del sistema (fattore di amplificazione) per tutto lo spettro indagato e tale approssimazione, come era lecito attendersi, migliora mano a mano che si riduce la non-linearità (valori di α prossimi all'unità). Si desidera evidenziare che il valore del fattore di amplificazione stimato, è stato valutato secondo la formulazione classica del problema lineare in cui è stato assunto un indice di smorzamento totale pari alla somma dell'indice di smorzamento interno ($\xi_0=5\%$) e dell'indice di smorzamento equivalente stimato. Questa procedura, che di fatto trasforma il problema non-lineare in un problema lineare, conduce ad un errore, anche se al posto del valore stimato dell'indice di smorzamento venisse utilizzato il valore esatto dell'indice di smorzamento.

3.4 Dissipatore lineare Vs Dissipatore Non-Lineare

L'indice del dissipatore ε può essere utilizzato anche ai fini di una valutazione economica nel caso in cui si debba decidere se risulti più conveniente utilizzare un dissipatore lineare ($\alpha=1.00$) oppure un dissipatore non-lineare ($\alpha<1.00$).

Inoltre è stato già mostrato che sistemi ad un grado di libertà indefinitamente elastici lineari a parità di ε , presentano una risposta che fortemente influenzata dal valore dell'esponente α (fattore di amplificazione, taglio alla base, velocità effettiva).

La logica seguita quindi è stata la seguente: evidentemente per ottenere una certa riduzione della risposta risulterà più conveniente il dissipatore con ε minore. A tal fine ricordiamo che ε è funzione della frequenza naturale dell'oscillatore, quindi in un certo range di frequenze risulterà più conveniente il dissipatore lineare, mentre per un altro range risulterà più conveniente il dissipatore non lineare.

Al fine di individuare tali intervalli abbiamo imposto un certo livello di riduzione del valore del fattore di amplificazione in corrispondenza della risonanza. Abbiamo poi ricavato il valore dell'indice di smorzamento necessario ad ottenere tale riduzione per ogni ascissa dello spettro rappresentato dal rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza naturale. Il valore dell'indice di smorzamento può essere ricavato agevolmente dalla espressione classica del fattore di amplificazione, imponendo un valore al fattore di amplificazione e risolvendo l'equazione, la cui unica incognita risulta essere l'indice di smorzamento. L'espressione utilizzata è la seguente:

$$(3.27) \quad \xi_{sd} = \frac{\omega}{2\Omega} \sqrt{\frac{1}{fa_d^2} - \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2} - \xi_0$$

Dove ξ_0 è l'indice di smorzamento interno posto pari al 5%.

Abbiamo ricavato le seguenti curve imponendo, ad ogni valore di del rapporto Ω/ω , al fattore di amplificazione un valore pari all'80%, 60%, 40%, 20%, 10% del valore del fattore di amplificazione per ξ_{sd} nullo.

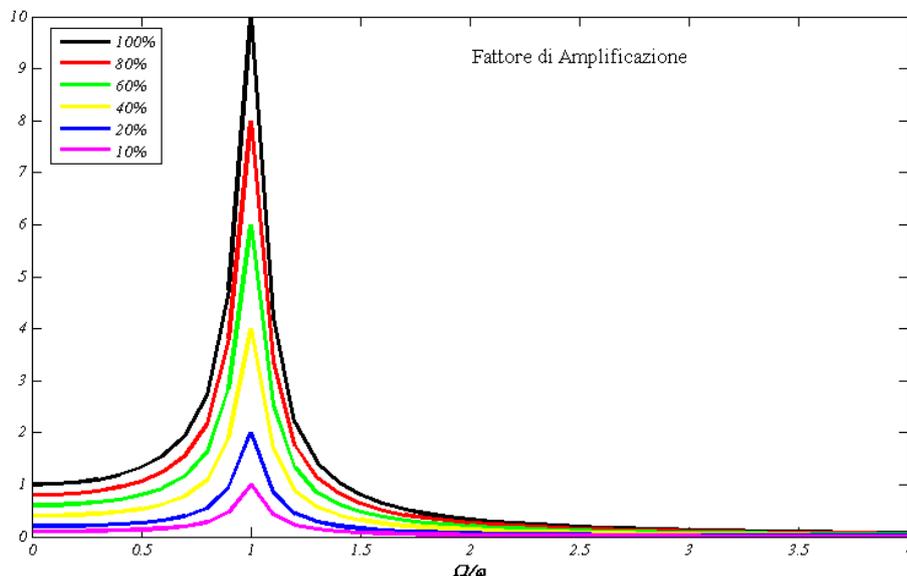


Figura 3.47. Fattore di Amplificazione per assegnati livelli di riduzione della risposta

Attraverso la (3.27) abbiamo ricavato il valore di ξ_{sd} corrispondente. A questo punto noto l'andamento del fattore di amplificazione, noto ξ_{sd} , imposto un valore di α arbitrario possiamo ricavare ε dalla (3.5). Riportiamo i risultati. Si fa notare che l'asse dell'ordinate è stato limitato a valori di ε minori dell'unità, in quanto valori superiori risulterebbero privi di significato.

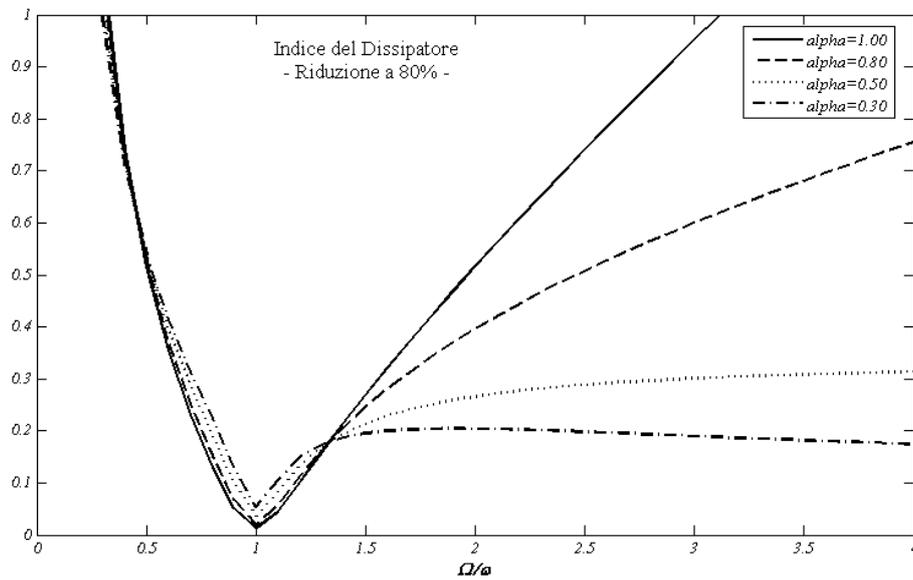


Figura 3.48. Indice del dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'80%

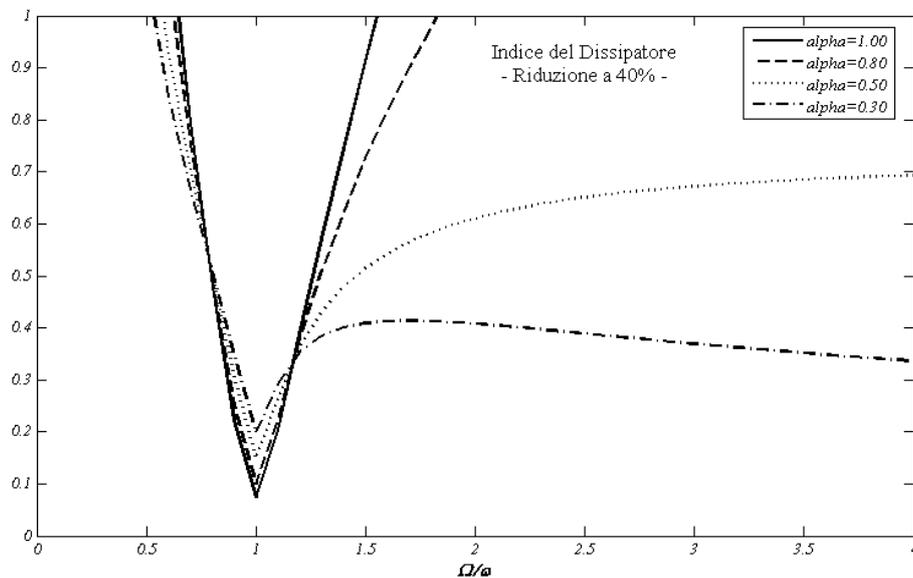


Figura 3.49. Indice del dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'40%

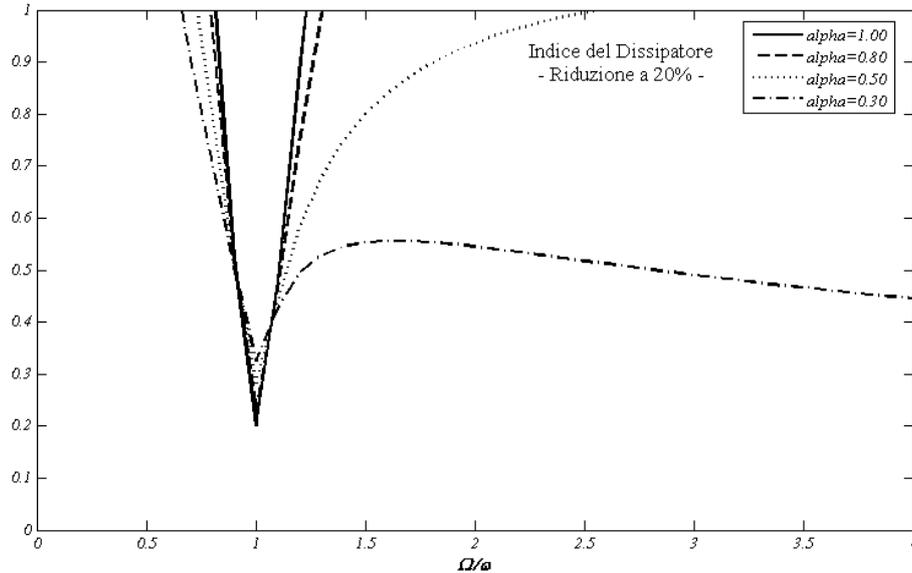


Figura 3.50. Indice del dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'20%

Dalle curve si possono ricavare le seguenti indicazioni progettuali:

- Per ogni valore di α , in corrispondenza della risonanza si ha un massimo effetto dei dissipatori (infatti per valori di ε molto bassi si registrano le medesime riduzioni della risposta). Questo fatto risulta essere piuttosto intuitivo in quanto in corrispondenza della risonanza si hanno i maggiori spostamenti e le maggiori velocità e quindi viene amplificata la possibilità dei dispositivi di dissipare energia.

- E' possibile identificare tre zone dello spettro di Ω/ω nelle quali si registrano diversi comportamenti: nella prima zona dissipatori a comportamento lineare ($\alpha=1.00$) mostrano un peggior comportamento in quanto per ridurre la risposta di una quantità fissata necessitano di ε superiori; nella seconda zona il comportamento è esattamente inverso; nella terza zona ritroviamo i risultati descritti per la prima zona.

I grafici riportati mostrano che per valori lontani dalla condizione di risonanza, per ottenere analoghe riduzione della risposta occorrono dei valori di ε molto elevati, spesso privi di significato. In realtà in queste zone la risposta risulta intrinsecamente ridotta e quindi solitamente non risultano necessarie riduzioni della risposta pari a quelle richieste in corrispondenza della risonanza, condizione per la quale ci è sembrato opportuno approfondire le analisi.. Tra l'altro, quando si deve realizzare una analisi spettrale, per cui la frequenza della forzante è incognita, ci si riferisce soltanto alla frequenza naturale, ponendosi implicitamente nella condizione di risonanza.

A tal scopo abbiamo ricavato il valore dell'indice di smorzamento equivalente che garantisce, in corrispondenza della risonanza, desiderati valori di riduzione della risposta. Abbiamo poi tracciato gli andamenti del fattore di amplificazione, mantenendo tale valore dell'indice di smorzamento costante. Di seguito riportiamo le curve.

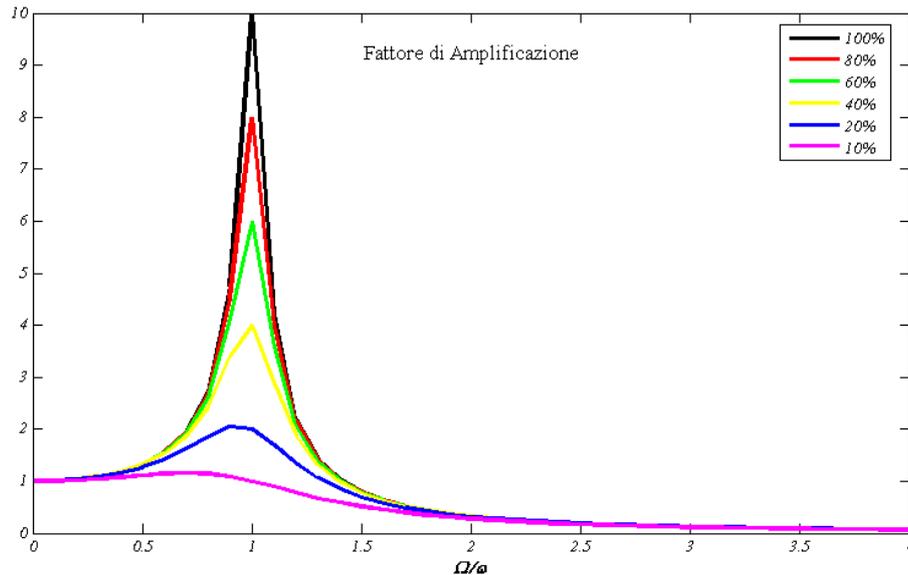


Figura 3.51. Fattore di Amplificazione per assegnati livelli di riduzione della risposta

I valori dell'indice di smorzamento per le suddette curve sono i seguenti:

Rid.	0,80	0,60	0,40	0,20	0,10
ξ_{sd}	0,0125	0,0333	0,0750	0,2000	0,4500

Tabella 3.3 Valori di ξ_{sd} per determinati livelli di riduzione della risposta in risonanza

A questo punto noto l'andamento del fattore di amplificazione, noto ξ_{sd} , imposto un valore di α arbitrario posso ricavare ε dalla (3.5). Riportiamo i risultati.

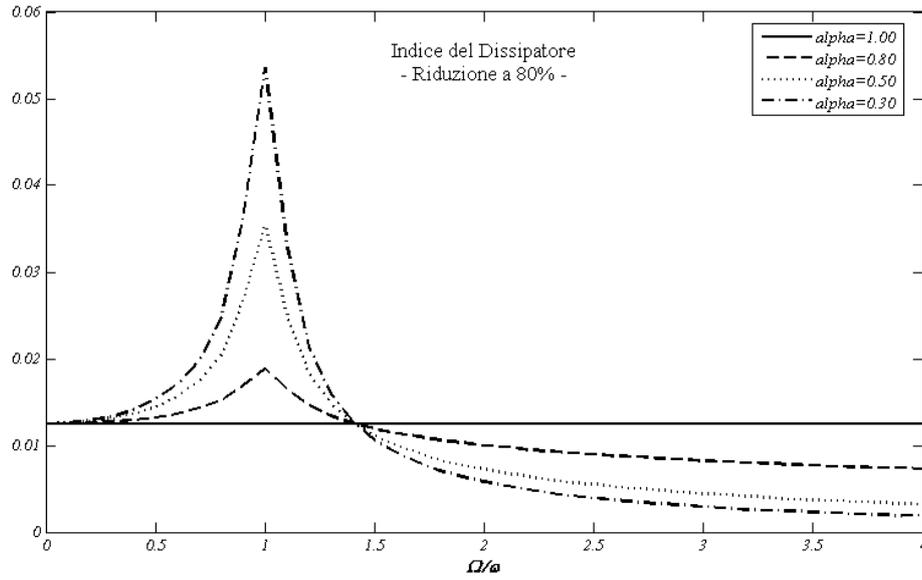


Figura 3.52. Indice del dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'80%

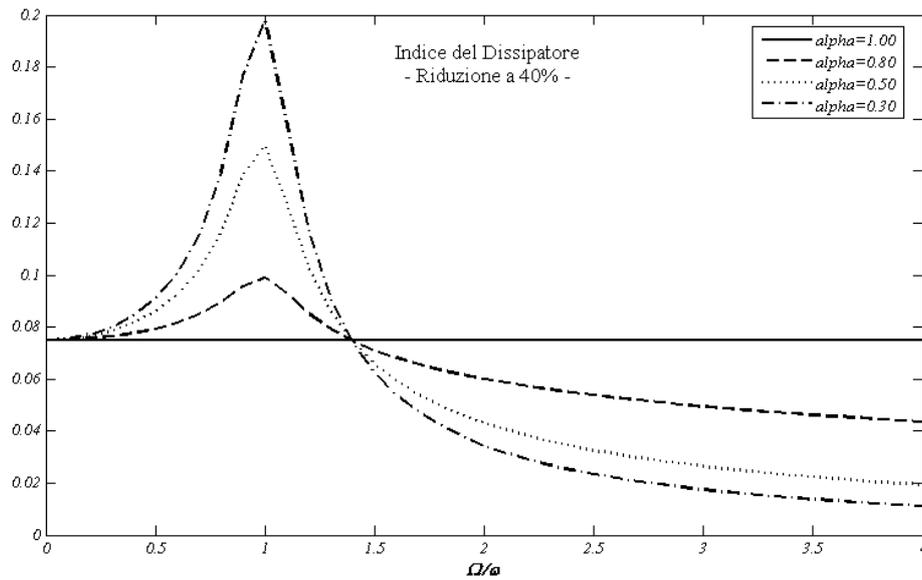


Figura 3.53. Indice del dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'40%

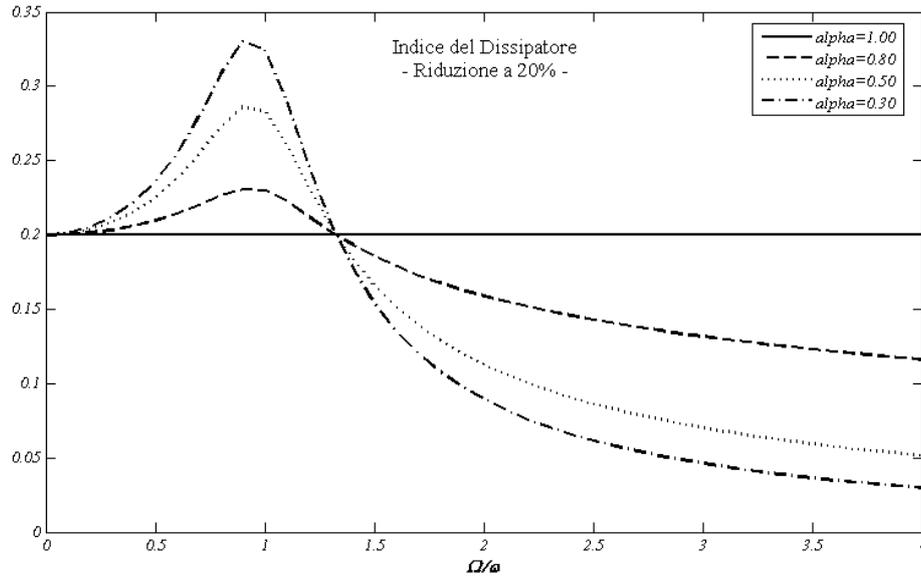


Figura 3.54. Indice del dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'20%

Risulta possibile individuare una inversione di tendenza per $\Omega/\omega \approx 1.47$. Nel proseguo faremo riferimento a queste curve.

Al fine di valutare compiutamente la convenienza di una tipologia di dissipatori rispetto ad un'altra occorre valutare anche la massima forza che viene assorbita dai dissipatori. Attraverso l'utilizzo dell'indice del dissipatore è possibile pervenire ad una espressione chiusa della forza nel dissipatore. La forza assorbita nel dissipatore sarà massima, quando risulta essere massima la velocità relativa tra le due sezioni di estremità del dispositivo; per stimare tale velocità possiamo ipotizzare una estremità fissa e per quanto riguarda l'altra estremità ipotizzare una velocità di picco pari a $V = \Omega * u_0$, dove u_0 è lo spostamento massimo e Ω è la frequenza della forzante. La validità di tale assunzione è già stata discussa precedentemente. Ricordando che

$fa_d = \frac{u_0}{a_0} \omega^2$, è possibile scrivere la velocità di picco come:

$$(3.28) \quad V = u_0 \Omega = \frac{fa_d a_0}{\omega^2} \Omega = \frac{a_0}{\omega} fa_d \frac{\Omega}{\omega} = \frac{a_0}{\omega} fa_d f$$

Dove si è posto $\Omega/\omega = f$. Ricordando la (3.4), è possibile esprimere c_α come segue:

$$(3.29) \quad c_\alpha = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} \frac{\Omega^{1-\alpha}}{\omega^{1-2\alpha}} a_0^{1-\alpha} = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} f^{1-\alpha} \omega^\alpha a_0^{1-\alpha}$$

Per cui a questo punto è possibile scrivere la forza assorbita dal dissipatore come segue:

$$(3.30) \quad F_D = c_\alpha V^\alpha = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} f^{1-\alpha} \omega^\alpha a_0^{1-\alpha} \left(\frac{a_0}{\omega} f a_d f \right)^\alpha = \varepsilon \frac{2m}{\kappa} f f a_d^\alpha a_0$$

Possiamo normalizzare questo risultato nei confronti della ampiezza della forzante F_0 , pari a ma_0 e ottenere infine:

$$(3.31) \quad \frac{F_D}{F_0} = 2 \frac{\varepsilon}{\kappa} f f a_d^\alpha$$

Si può anche osservare che essendo $\varepsilon = \xi_{sd} * f a_d^{1-\alpha}$ è possibile riscrivere la (3.31) in termini dell'indice di smorzamento equivalente come segue:

$$(3.32) \quad \frac{F_D}{F_0} = 2 \frac{\xi_{sd}}{\kappa} f f a_d$$

La (3.32) ci permette di fare la seguente considerazione: con riferimento gli andamenti del fattore di amplificazione riportati nella tabella (3.3), quando fissiamo un certo livello di riduzione della risposta identifichiamo un valore costante di ξ_{sd} su tutto lo spettro considerato e quindi nella (3.32) l'unico termine che risulta essere funzione dell'esponente α è il termine κ ; il termine κ presenta una ridotta variabilità con il variare di α (vale 1.00 per $\alpha=1.00$, 1.17 per $\alpha=0.30$), e soprattutto è indipendente dal rapporto Ω/ω . Pertanto ci si aspetta che su tutto lo spettro dissipatori lineari siano sottoposti ad una maggiore forza (il termine κ è a denominatore). A tal scopo riportiamo di seguito gli andamenti della forza nel dissipatore normalizzata rispetto al valore di picco della forzante esterna, ottenuti imponendo una riduzione del fattore di amplificazione, in condizioni di risonanza, pari all'80%, 40%, 20% del valore del fattore di amplificazione per un oscillatore privo di dissipatori.

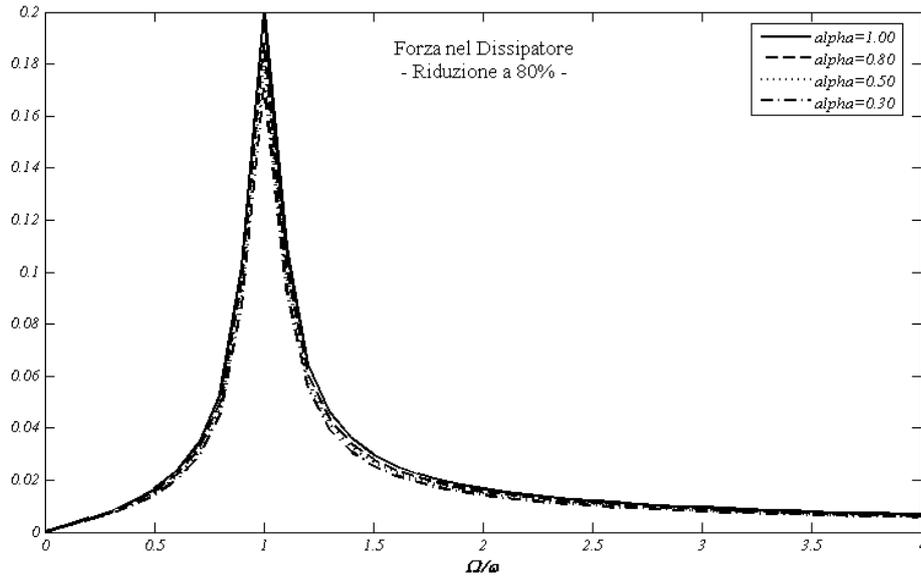


Figura 3.55. Forza nel Dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'80%

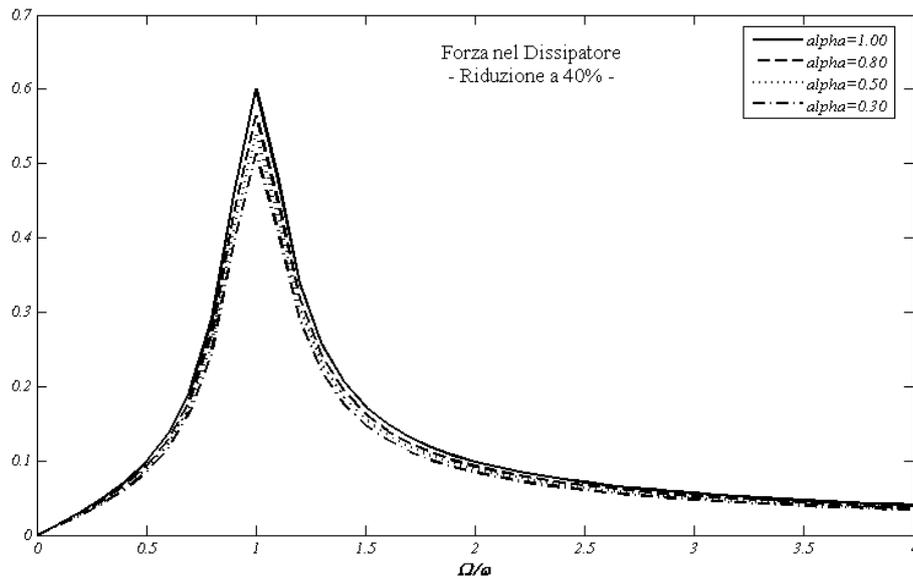


Figura 3.56. Forza nel Dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'40%

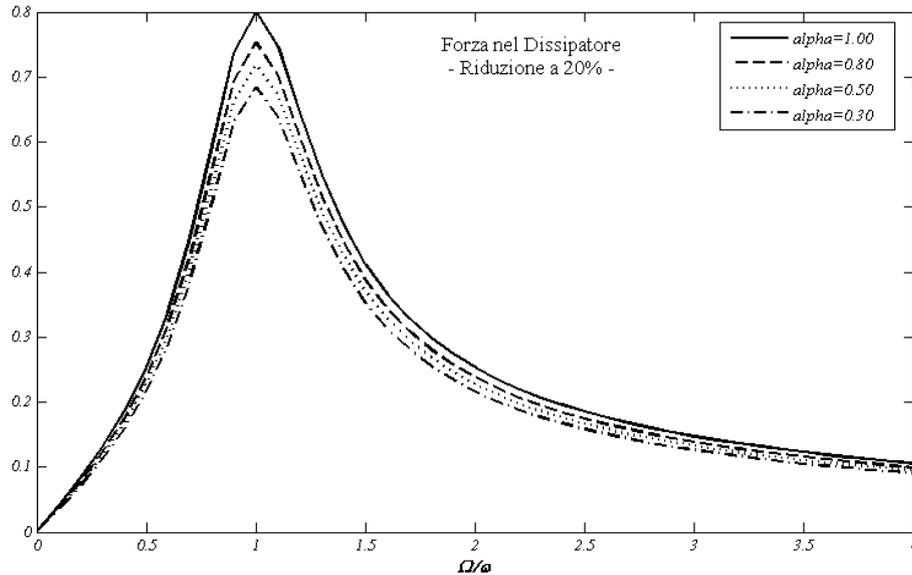


Figura 3.57. Forza nel Dissipatore al variare di α per un livello di riduzione della risposta pari all'20%

I grafici mostrano che su tutto lo spettro delle frequenze considerate la forza nel dissipatore si riduce per valori di α decrescenti. Quindi nella scelta della tipologia del dissipatore più adatto a raggiungere una desiderata riduzione della risposta, occorre considerare che una volta individuati c_α e α , il dissipatore deve essere in grado di sopportare determinati livelli di sollecitazione. E' chiaro che la capacità di sopportare elevati livelli di sollecitazione produca una aumento dei costi e una tecnologia più avanzata : se ad esempio ci poniamo in condizione di risonanza sembrerebbe opportuno scegliere un dissipatore a comportamento lineare, in quanto riesce a ridurre la risposta ad un prestabilito livello per valori di ε più bassi; altresì questa tipologia di dissipatore è anche quella che subisce le sollecitazioni maggiori, che in alcuni sono talmente elevate da propendere al fine per un dissipatore a comportamento non-lineare.

Occorre sottolineare che la variazione di forza nei dissipatori, per differenti valori dell'esponente α , non varia in modo così evidente: il valore massimo è del 15%.

Dai grafici è possibile notare anche un altro fatto: mano a mano che cresce la richiesta di riduzione della risposta cresce anche, percentualmente, la quota parte di forza impressa che viene assorbita dai dissipatori. Questo fatto non meraviglia affatto, in quanto è evidente che al crescere della richiesta di riduzione di forze agenti sulla struttura si dovrà verificare una "migrazione" di forze dalla struttura verso il sistema dissipativo.

3.5 Studio della Risposta per Accelerogrammi Reali

In questo paragrafo lo studio della risposta, valutata in funzione dei parametri ε ed α , sarà effettuato nel caso in cui la struttura dotata di dissipatori sia sottoposta ad accelerogrammi reali.

A tal fine sono stati presi in considerazione 3 gruppi di 7 accelerogrammi, per un totale di 21 accelerogrammi, proposti dall'Istituto Reluis (<http://www.reluis.unina.it>) al fine di effettuare delle analisi strutturali dinamiche non-lineari secondo quanto prescritto dall'OPCM 3431. Ogni gruppo di accelerogrammi risulta essere spettro compatibile con gli spettri elastici forniti dal OPCM 3431 per ognuna delle 3 forme spettrali individuate dalle differenti categorie del suolo: Categoria A, Categorie B-C-E, Categoria D. Tutti gli accelerogrammi sono stati scalati per una accelerazione di picco al suolo pari a 0.25g. Gli accelerogrammi sono stati selezionati tra gli accelerogrammi registrati da *European Strong-motion Database – ESD* (<http://www.isesd.cv.ic.ac.uk>).

Nella tabella seguente riportiamo i gruppi di accelerogrammi.

Cat. A	Cat. B-C-E	Cat. D
0055x	0181y	0042x
0182y	0187x	0439x
0198x	0196x	1226y
0198y	0291y	1560y
0200x	0530x	1703y
0290x	0535y	5488x
1231y	1253x	6959x

Tabella 3.4 Gruppi di Accelerogrammi

Riportiamo di seguito gli spettri elastici delle pseudo accelerazioni.

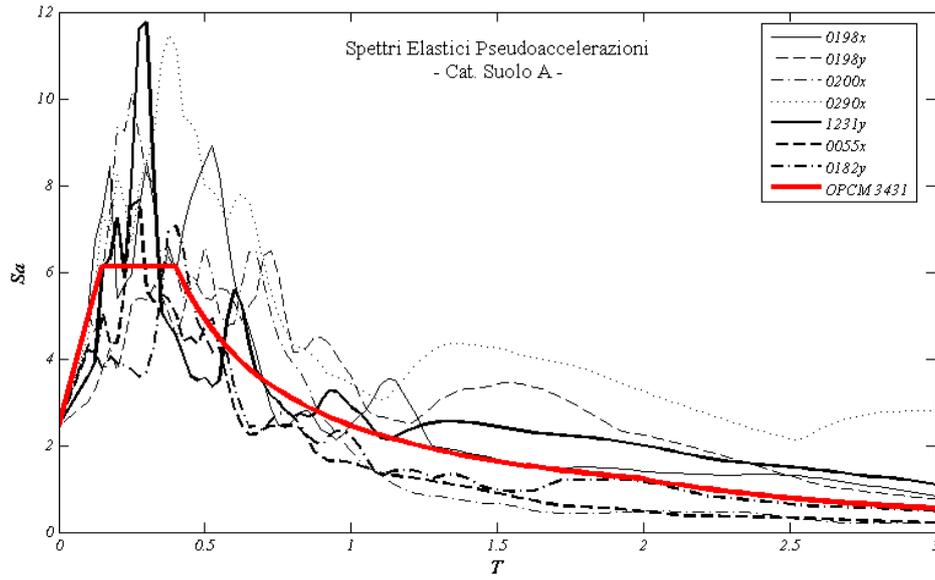


Figura 3.58. Spettri Elastici Pseudoaccelerazioni Categoria Suolo A

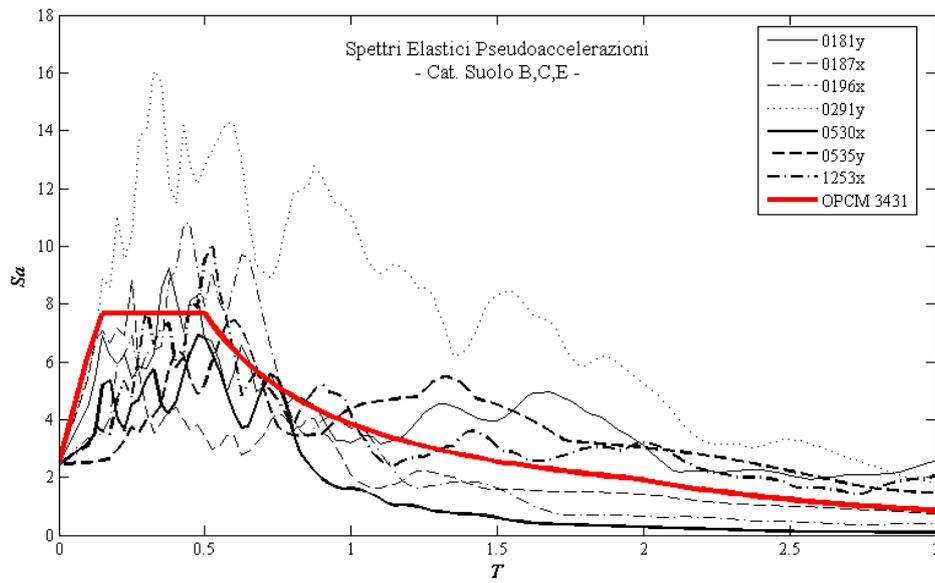


Figura 3.59. Spettri Elastici Pseudoaccelerazioni Categoria Suolo B-C-E

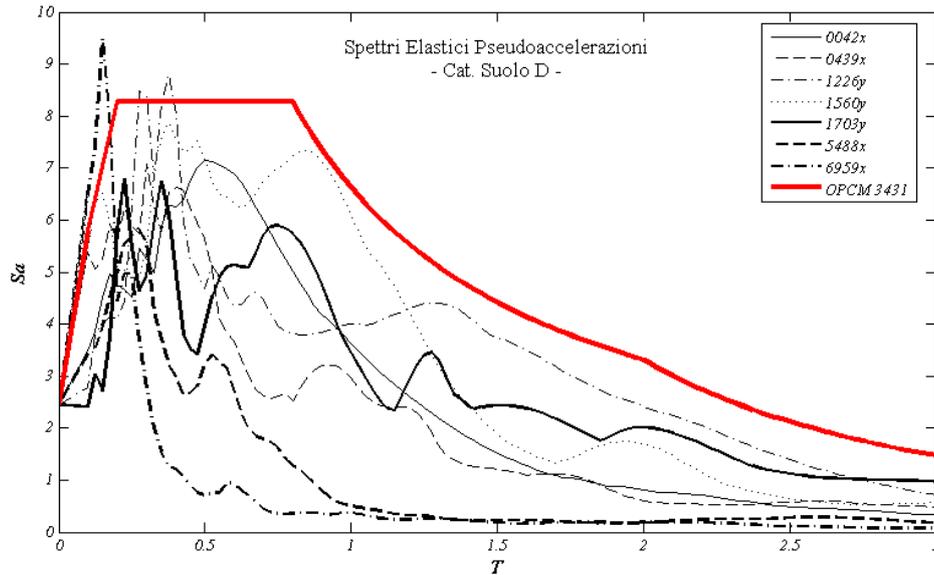


Figura 3.60 Spettri Elastici Pseudoaccelerazioni Categoria Suolo D

Riportiamo di seguito gli andamenti dell'indice di smorzamento equivalente al variare di ε per differenti valori dell'esponente α . I grafici riportano in ordinata il rapporto tra l'indice ε e l'indice di smorzamento equivalente ξ_{sd} , in ascissa il periodo proprio della struttura. Gli accelerogrammi sono identificati dal tipo di linea (continua, tratteggiata...), mentre ad ogni colore è associata un differente valore di ε . Con una linea tratteggiata più spessa viene rappresentata la regressione lineare dei vari andamenti, per ogni valore di ε : tali andamenti sono stati indicati con il termine "Spettro".

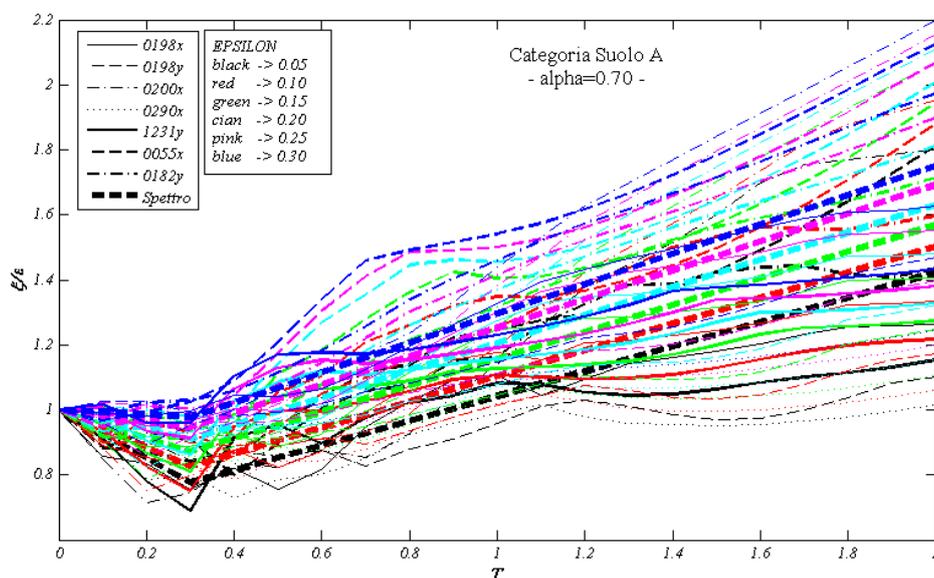


Figura 3.61 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria A ed esponente $\alpha=0.70$

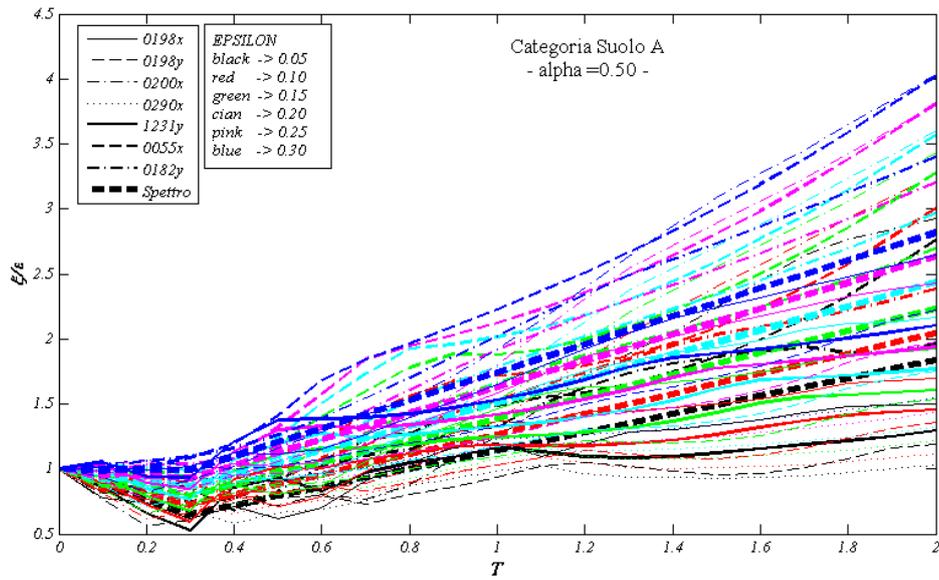


Figura 3.62 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria A ed esponente $\alpha=0.50$

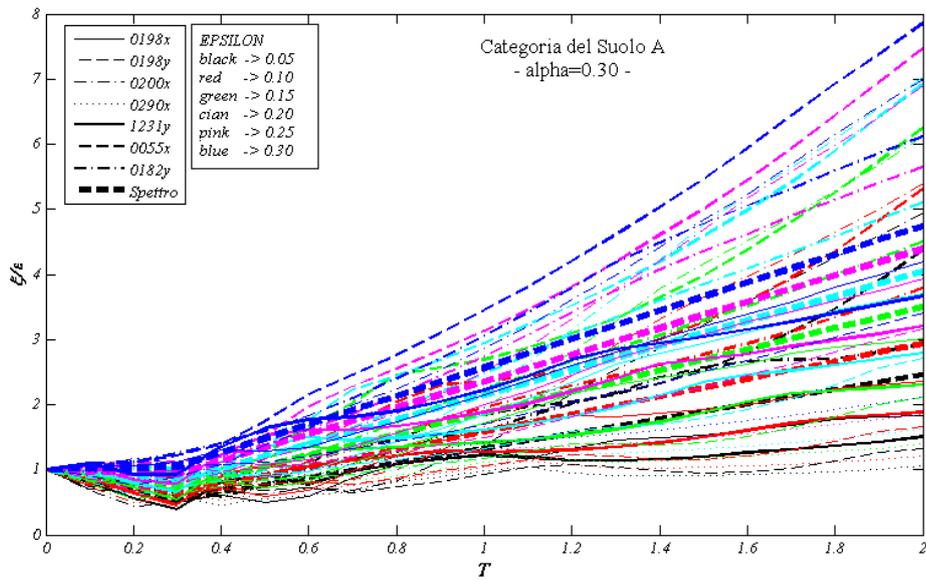


Figura 3.63 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria A ed esponente $\alpha=0.30$

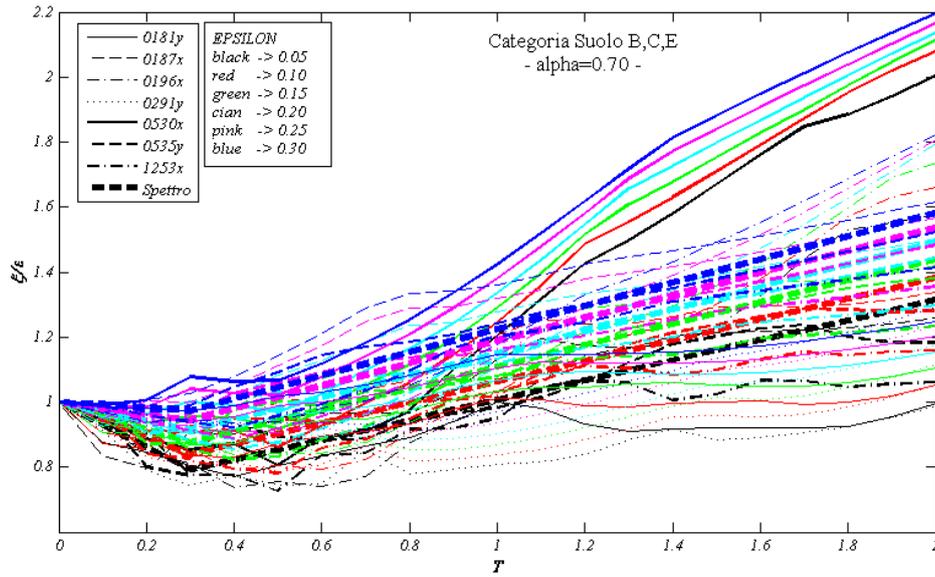


Figura 3.64 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria B,C,E ed esponente $\alpha=0.70$

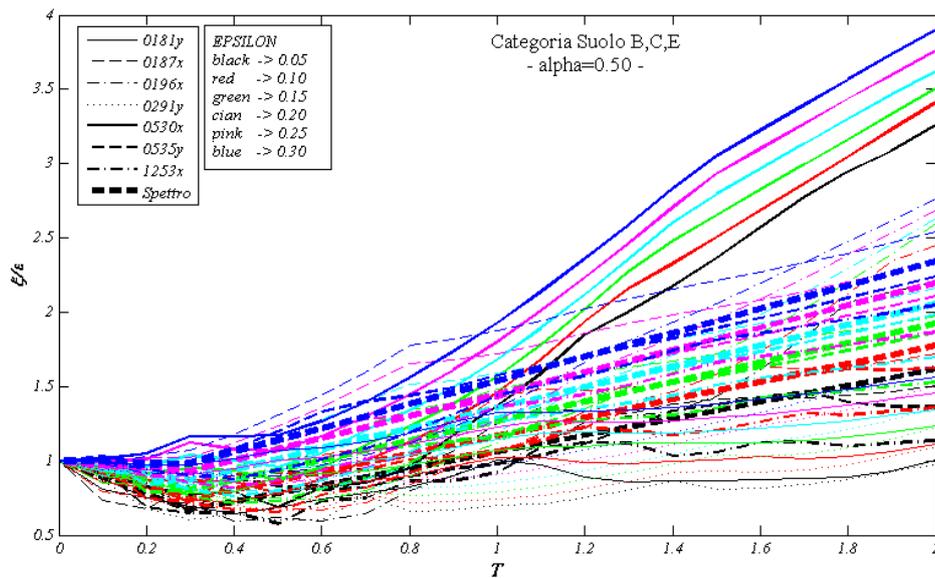


Figura 3.65 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria B,C,E ed esponente $\alpha=0.50$

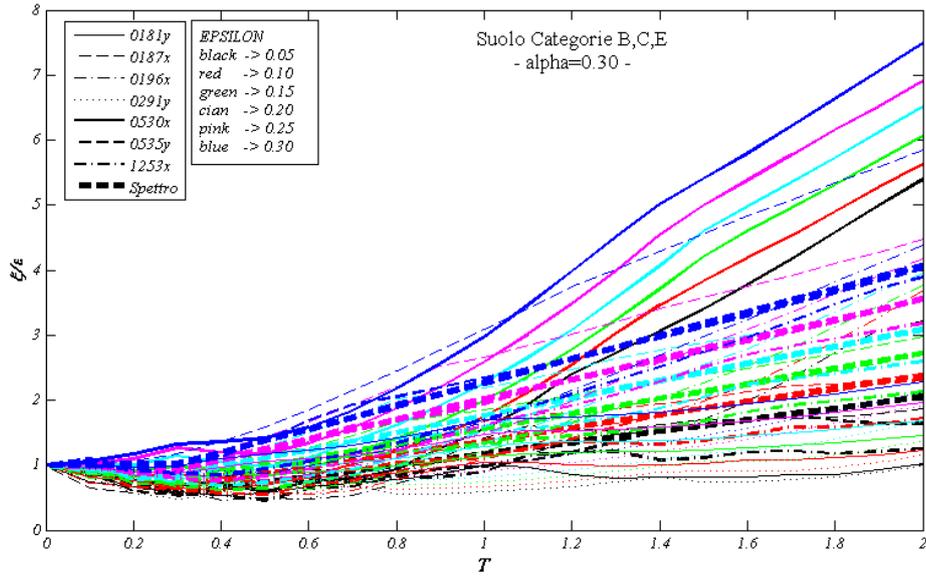


Figura 3.66 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria B,C,E ed esponente $\alpha=0.30$

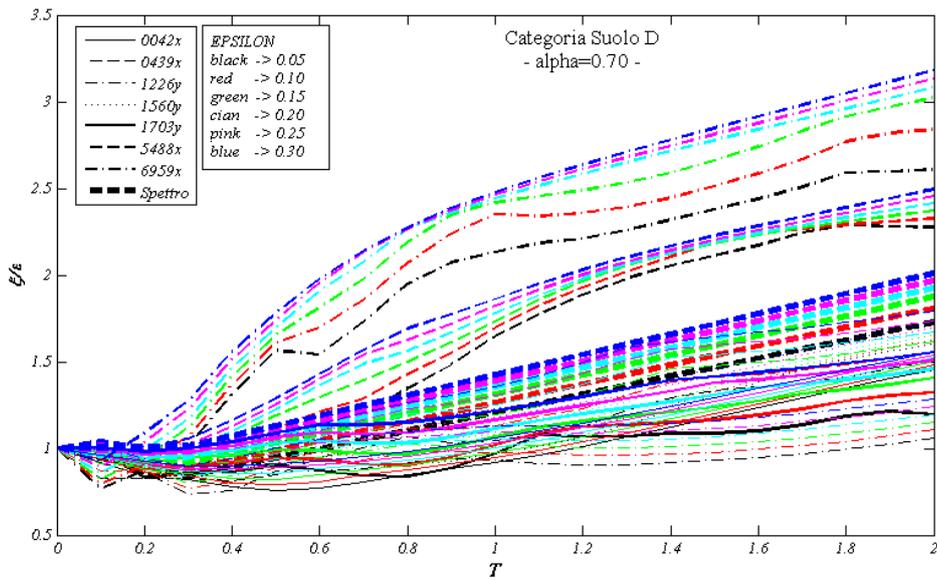


Figura 3.67 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria D ed esponente $\alpha=0.70$

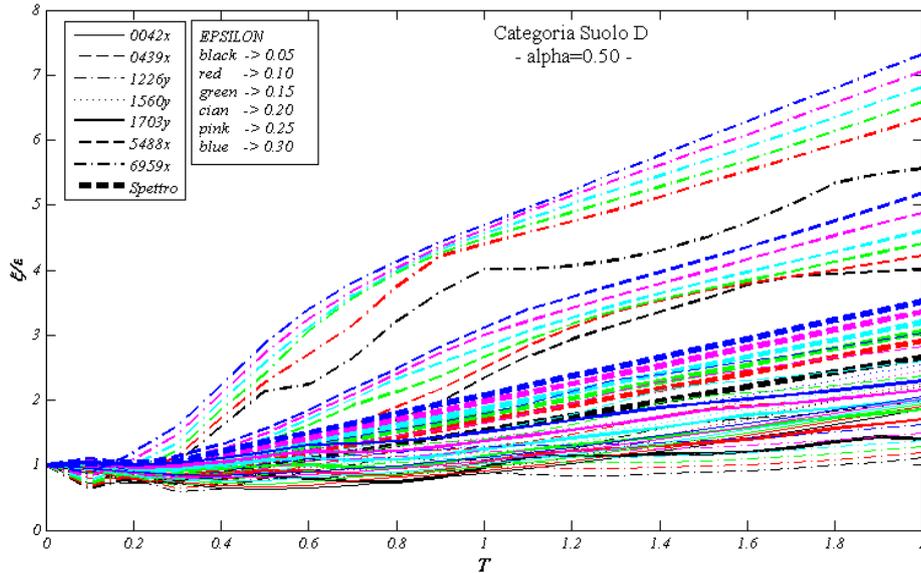


Figura 3.68 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria D ed esponente $\alpha=0.50$

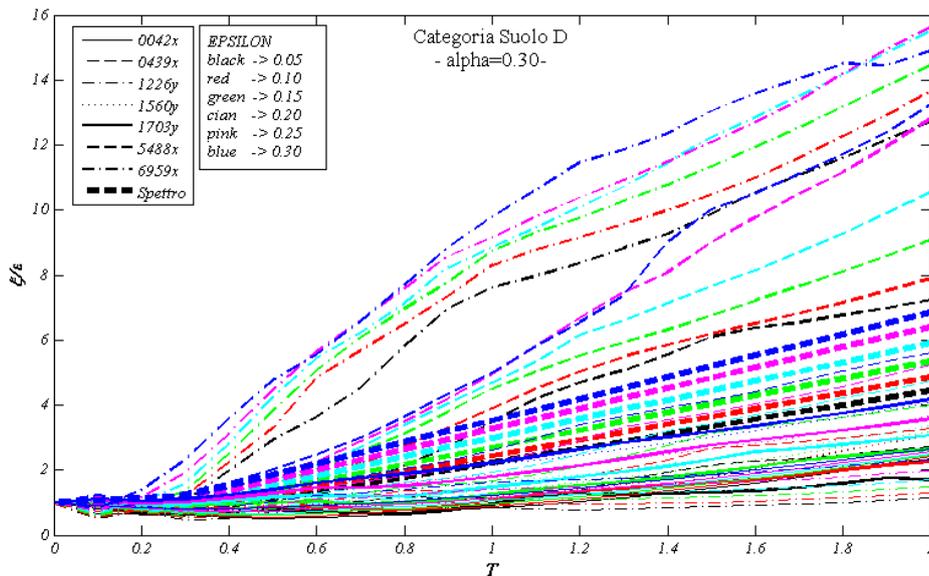


Figura 3.69 Indice di Smorzamento Equivalente per suolo di Categoria D ed esponente $\alpha=0.30$

Le regressioni lineari, in accordo con quanto fatto per il caso di forzante armonica, sono state realizzate ipotizzando degli andamenti caratterizzati da una spezzata che presenta un primo tratto decrescente fino ad un periodo di 0.30 sec, e un secondo tratto crescente per periodi superiori. Anche in questo sarebbe stato possibile individuare i valori dei coefficienti k_1 e k_2 della pendenza dei 2 tratti. In realtà per giungere ad una stima accettabile di tali coefficienti sarebbe stato necessario procedere ad analizzare un numero molto superiore di accelerogrammi in quanto da come si può

evincere dalle figure si registra una certa dispersione dei risultati. Inoltre tale operazione si sarebbe dovuta ripetere per ogni forma spettrale proposta nei vari codici internazionali. In realtà si mostrerà nel prossimo capitolo che è possibile creare degli spettri di ξ_{sd} in funzione di ε ed α a partire dagli spettri elastici forniti dai vari codici internazionali.

Si registrano comunque nelle figure presentate degli andamenti che ricalcano quelli individuati per forzante armonica.

A questo punto desideriamo approfondire un aspetto che risulterà utile quando parleremo di sistemi a più gradi di libertà. Solitamente, nella progettazione di strutture dotate di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non lineare, il primo obiettivo che ci si prefigge è quello di stimare con buona accuratezza il valore dell'indice di smorzamento equivalente. Infatti una volta individuato tale valore il problema può essere ricondotto ad un problema lineare equivalente, ampiamente studiato in letteratura. Il passaggio dal problema non-lineare al problema lineare equivalente porta con sé necessariamente un grado di approssimazione che abbiamo già discusso, nel caso di forzante armonica, nel capitolo 2. In questa sede vogliamo analizzare tale grado di approssimazione nel caso di accelerogrammi reali.

E' stato considerato l'accelerogramma di El Centro scalato ad una PGA di 0.25g. E' stata valutata la risposta in termini di spostamenti per sistemi elastici lineari ad un grado di libertà caratterizzati da un periodo naturale compreso tra 0sec e 3sec, con smorzamento interno pari al 5%, privi di dissipatori. Successivamente abbiamo fissato la quota parte di riduzione della risposta desiderata attraverso l'ausilio del coefficiente η , così definito:

$$(3.33) \quad \eta = \frac{Val.Obiiettivo}{Val.Iniziale}$$

Dove con *Val.Obiiettivo* abbiamo inteso il valore desiderato della risposta e con *Val.Iniziale* abbiamo inteso il valore della risposta in assenza di dissipatori. Abbiamo determinato, per ogni valore del periodo naturale del sistema, il valore dell'indice di smorzamento equivalente che, inserito nell'equazione non-lineare (2.18), fosse in grado di riprodurre il valore prefissato della risposta. Attraverso la (3.5) abbiamo individuato il valore di ε corrispondente e abbiamo risolto l'equazione non-lineare (3.6). Infine abbiamo risolto il problema lineare in cui l'indice di smorzamento totale è stato posto

pari alla somma dell'indice di smorzamento interno e dell'indice di smorzamento equivalente. A questo punto abbiamo messo a confronto la risposta calcolata attraverso la (2.18), indicata con “*csi*”, la risposta calcolata attraverso la (3.6), indicata con “*epsilon*”, e la risposta del problema lineare, indicata con “*lineare*”. Riportiamo di seguito i risultati per $\eta=0.50$ ed $\alpha=0.50$.

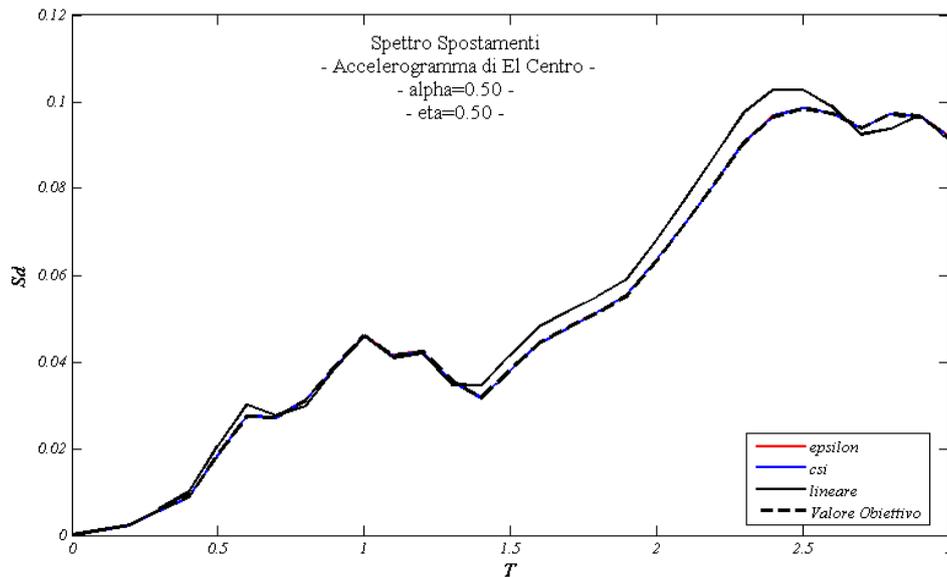


Figura 3.70 Spettri degli Spostamenti per accelerogramma di El Centro, $\eta=0.50$, $\alpha=0.50$

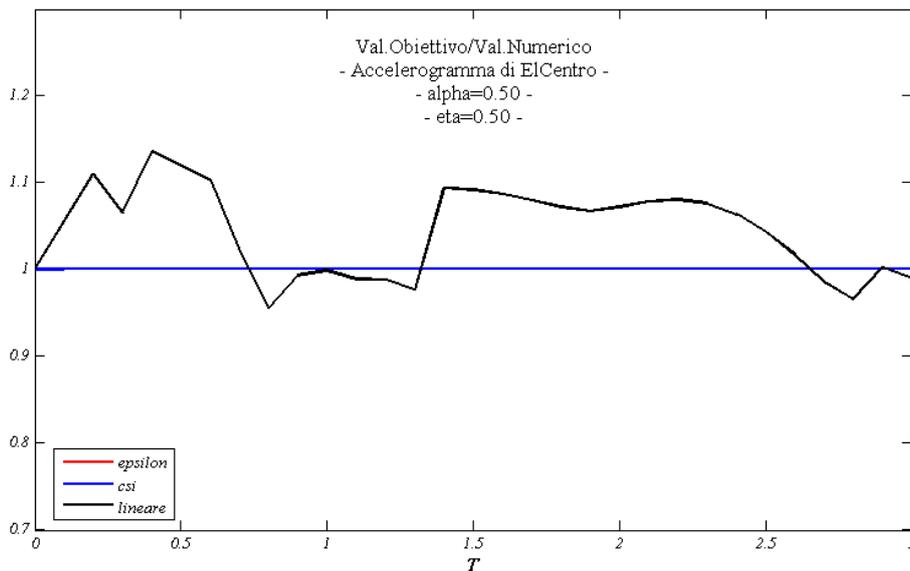


Figura 3.71 Val.Obiettivo/Val.Numerico per accelerogramma di El Centro, $\eta=0.50$, $\alpha=0.50$

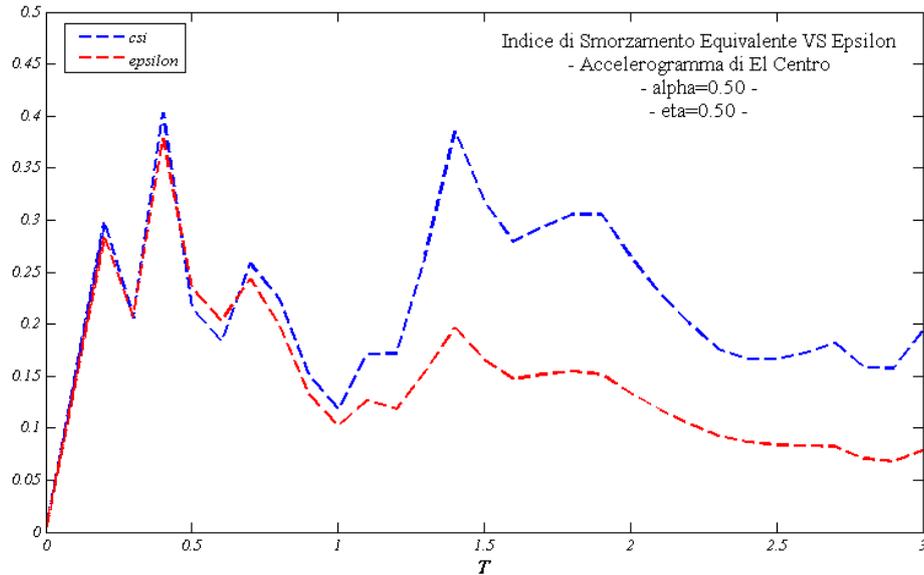


Figura 3.72 Spettro di ε e ξ_{sd} per accelerogramma di El Centro, $\eta=0.50$, $\alpha=0.50$

Dai grafici si può vedere chiaramente che sia la risposta valutata a partire da ξ_{sd} utilizzando la (2.18), sia la risposta valutata a partire da ε utilizzando la (3.6) risultano essere coincidenti con il valore obiettivo. Dalla figura (3.71) si può notare che esistono zone dello spettro in cui la risposta del problema lineare risulta molto vicina al valore obiettivo ($T \approx 1\text{sec}$, $T \approx 2.8\text{sec}$), mentre in altre zone si discosta dal valore obiettivo anche in modo apprezzabile (per $T \approx 0.5\text{sec}$ si registra un errore del 13.5%, per $T \approx 1.5\text{sec}$ si registra un errore del 9.5%). Questi risultati mostrano che se io procedo ad una stima rigorosa dell'indice di smorzamento equivalente, in certe zone dello spettro, risolvere il problema lineare equivalente invece del problema non-lineare originario, porta ad una quota di errore anche superiore al 10%.

CAPITOLO 4

SISTEMI A PIU' GRADI DI LIBERTA'

In questo capitolo vengono presentati i metodi di verifica e di progetto per un sistema elastico-lineare a più gradi di libertà dotato di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare. Si è già visto che, nel caso di un sistema ad un grado di libertà, per individuare la risposta della struttura occorre produrre una stima affidabile dell'indice di smorzamento equivalente (ξ_{sd}) ipotizzando il comportamento della struttura indefinitamente elastico-lineare. Si desidera brevemente accennare che sono già stati definiti in letteratura dei coefficienti correttivi da applicare a ξ_{sd} , per tener conto del comportamento non-lineare del sistema; tali coefficienti sono generalmente funzione della duttilità del sistema calcolata in termini di spostamenti, ma la loro trattazione esula dagli scopi della presente tesi e quindi non verrà approfondita ulteriormente.

In letteratura viene proposta solitamente un procedimento che si base sull'equivalenza energetica: tale procedura, sebbene abbia una solida base concettuale, deve necessariamente includere dei processi iterativi in quanto nella espressione di ξ_{sd} è contenuta una componente della risposta. Questa procedura è stata proposta primariamente da *Ramirez, Constantinou et.al* nel 2000. Questa procedura verrà esposta nel primo paragrafo e sarà denominata *Metodo Iterativo*.

Seguendo le indicazioni riportate nei paragrafi precedenti a proposito di sistemi ad un grado di libertà, verrà proposta una procedura per la stima del parametro ε nel caso di sistemi a più gradi di libertà. Operando in questo modo la stima dell'indice di smorzamento equivalente ξ_{sd} può essere fatta direttamente senza ricorrere a processi iterativi. Questa procedura è stata denominata *Metodo Diretto* e sarà presentata nel secondo paragrafo.

Nel terzo paragrafo i due metodi saranno studiati attraverso 4 casi di studio nei quali due tipologie di telai saranno sottoposte ad accelerogrammi reali: la risposta del sistema utilizzando i due metodi sarà messa a confronto con la risposta numerica calcolata utilizzando il software SAP2000 NL, prodotto da CSI.

Nell'ultimo paragrafo sarà proposta una procedura per creare degli spettri dell'indice di smorzamento equivalente ξ_{sd} in funzione del parametro ε e del periodo naturale del sistema per valori di α prefissati, a partire dagli spettri di risposta elastici forniti da un qualsiasi codice internazionale.

MULTI-DEGREE OF FREEDOM SYSTEMS

In this chapter the design methods of a elastic-linear mdf system equipped with non-linear fluid-viscous dampers are introduced.

It has already been shown that, in the sdf systems, the response of the structure can be evaluated through the estimation of the equivalent damping ratio (ξ_{sd}) assuming the behavior of the structure elastic-linear. We would to mention that some adjusting coefficients, to be applied to the equivalent damping ratio in order to consider the actual behavior of the structure (that is non-linear), have already been proposed in literature; such coefficients are usually expressed in terms of ductility, but their treatment is over the aims of this thesis and we does not go into further.

The method usually proposed in literature is based on energy equivalence: even though this procedure has solid theoretical basis, it must necessary include some iterative process, because the expression of the equivalent damping ratio contains a term of the response. This procedure has been introduced primarily by Ramirez, Constantinou et al. in 2000. This procedure is reported in the first section and it is defined “Iterative Method”.

Following the guide lines about sdf systems reported in the previous chapters, it is introduced a procedure for the assessment of the parameter ε in the case of mdf systems. Operating in this way the evaluation of the equivalent damping ratio (ξ_{sd}) can be done directly without implementing iterative processes. This procedure is defined “Direct Method” and it is reported in the second section.

In the third section the two methods are analyzed by studying 4 cases of two moment-resisting steel frames undergoing real accelerogramms: the response of the system calculated by using the two methods is compared with the numerical response obtained from the software called SAP2000-NL, CSI product.

In the last section a procedure to create spectra of the equivalent damping ratio, affected by the parameter ε and the natural period of the system for a fixed value of exponent α , starting from the elastic-response spectra provided by any international code, is introduced.

4.1 Metodo Iterativo

In questo paragrafo ci occuperemo di descrivere in modo dettagliato la procedura

proposta da *Ramirez, Constantinou et.al* per la stima dell'indice di smorzamento equivalente ξ_{sd} nel caso di sistema a più gradi di libertà indefinitamente elastico-lineare dotato di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare.

Inizialmente faremo una breve descrizione di due parametri necessari alla definizione del metodo.

La legge comportamentale del j-esimo dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare inserito nel sistema a più gradi di libertà di riferimento sarà del tipo:

$$(4.1) \quad F_{Dj} = C_{Nj} |\dot{u}_{Dj}|^{\alpha_j} \operatorname{sgn}(\dot{u}_{Dj})$$

Dove il termine u_{dj} rappresenta lo spostamento relativo tra gli estremi del dispositivo. E' possibile esprimere u_{dj} in funzione dello spostamento di interpiano del livello r-esimo (si ipotizza che a tale livello sia inserito il dissipatore j-esimo), definito Δ_{rj} . Tale relazione può essere scritta come segue:

$$(4.2) \quad u_{Dj} = f_j \Delta_{rj}$$

Dove il termine f_j è definito *displacement magnification factor*. Tale coefficiente varia al variare della disposizione dei dispositivi all'interno del sistema a più gradi di libertà di riferimento. Nella figura 4.1 riportiamo alcuni casi tipici e il relativo valore del *displacement magnification factor*.

Al fine di riproporre in modo adeguato il metodo iterativo, si è deciso di riportare la stessa notazione riportata nella pubblicazione di *Ramirez, Constantinou et.al* del 2000. A tal fine il coefficiente β relativo al comportamento non-lineare del dissipatore, che abbiamo introdotto nel caso di sistema ad un grado di libertà, per risolvere l'integrale dell'energia dissipata nel dispositivo per un ciclo di carico, viene sostituito dal coefficiente λ . I due coefficienti hanno medesimo significato fisico, sono pertanto funzione del solo esponente α e tra loro sussiste la seguente relazione:

$$(4.2) \quad \lambda = \pi\beta$$

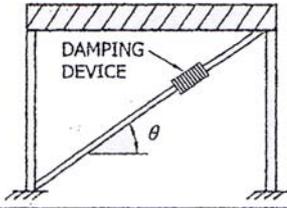
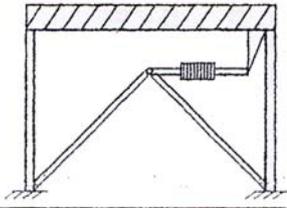
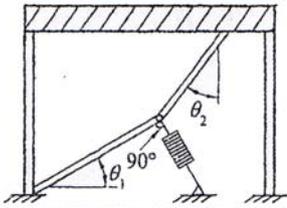
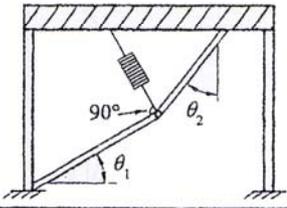
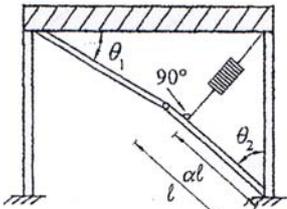
	CONFIGURATION	DISPLACEMENT AMPLIFICATION FACTOR
Diagonal		$f = \cos \theta$
Chevron		$f = 1.00$
Lower Toggle		$f = \frac{\sin \theta_2}{\cos(\theta_1 + \theta_2)}$
Upper Toggle		$f = \frac{\sin \theta_2}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + \sin \theta_1$
Reverse Toggle		$f = \frac{\alpha \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} - \cos \theta_2$

Fig 4.1 Displacement magnification factor

Il metodo iterativo si base sulla formulazione proposta da *Clough et. Penzien, 1975*, per la stima dell'indice di smorzamento nel caso di forzante armonica. La formulazione è la seguente:

$$(4.3) \quad \xi = \frac{W_D}{4\pi W_S}$$

Dove W_D è l'energia dissipata in un ciclo a regime, mentre W_S è l'energia elastica. Nel caso di forzante qualsiasi ci si pone usualmente in condizioni di risonanza, perché la risposta del sistema è particolarmente influenzata dal valore dell'indice di smorzamento per questo rapporto tra le frequenze.

Il metodo iterativo, nel caso di sistema a più gradi di libertà, riesce a stimare i valori delle energie, e conseguentemente dell'indice di smorzamento per ogni modo di vibrare. A tal proposito si ipotizza il sistema a più gradi di libertà sottoposto alla seguente storia di spostamenti $\{u\}$, armonica e proporzionale alla deformata modale m-esima.

$$(4.4) \quad \{u\} = D_{roof} \{\phi\}_m \sin\left(\frac{2\pi * t}{T_m}\right)$$

Dove D_{roof} è lo spostamento dell'ultimo livello, T_m è il periodo del modo di vibrare m-esimo della struttura senza dissipatori, $\{\Phi\}_m$ è la deformata modale del modo di vibrare m-esimo della struttura senza dissipatori, normalizzata in modo che assuma valore unitario il grado di libertà associato allo spostamento dell'ultimo livello.

Ricordando le notazioni appena riportate e specificando la storia di spostamenti per il primo modo di vibrare è possibile calcolare l'energia dissipata nei dissipatori per un ciclo a regime come segue:

$$(4.5) \quad W_D = \sum_j \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^{\alpha_j} C_{Nj} \lambda_j (D_{roof} f_j \phi_{rj})^{1+\alpha_j}$$

La sommatoria in j deve essere estesa sul numero totale dei dissipatori. Il termine ϕ_{rj} è pari alla differenza tra l'ordinata modale del grado di libertà j e il grado di libertà $(j-1)$. Nel nostro caso vale:

$$(4.6) \quad \phi_{rj} = \phi_{j,1} - \phi_{(j-1),1}$$

L'energia elastica può essere stimata come segue:

$$(4.7) \quad W_s = \frac{2\pi^2}{T_1^2} \sum_i \left(\frac{w_i}{g} \right) D_{roof}^2 \phi_{i,1}^2$$

Dove la sommatoria in i deve essere estesa a tutti i gradi di libertà del sistema. Il termine w_i/g rappresenta la massa associata ad ogni grado di libertà.

In base alla (4.5) e (4.7) l'indice di smorzamento equivalente associato al primo modo di vibrare può essere espresso come segue:

$$(4.8) \quad \xi_{sd,1} = \frac{\sum_j (2\pi)^{\alpha_j} T_1^{2-\alpha_j} \lambda_j C_{Nj} f_j^{1+\alpha_j} D_{roof}^{\alpha_j-1} \phi_{rj}^{1+\alpha_j}}{8\pi^3 \sum_i \left(\frac{w_i}{g} \right) \phi_{i,1}^2}$$

Si desidera evidenziare che nella (4.8) è presente il termine D_{roof} . Quindi a rigore per conoscere il valore di $\xi_{sd,1}$ occorre conoscere già la risposta del sistema; per questo motivo tale metodo deve ricorrere a procedure iterative per la stima di $\xi_{sd,1}$. Inoltre nel caso di dissipatori a comportamento lineare ($\alpha_j=1$; $\lambda_j=\pi$), il termine D_{roof} si annulla e il procedimento può essere esteso anche ai modi di vibrare superiori; ciò non può essere fatto per dissipatori a comportamento non lineare. Per superare questo inconveniente ci si può rifare ad una interpretazione fisica della risposta associata modi di vibrare superiori formulata da *Seleemah et Constantinou, 1997*. Secondo tale interpretazione la risposta dei modi di vibrare superiori può essere vista come una risposta caratterizzata da ampiezze ridotte, alte frequenze, centrata attorno alla risposta del primo modo di vibrare. Sulla scorta di tale interpretazione ad ogni dispositivo può essere associato un coefficiente di smorzamento efficace $C_{eff,j}$, di modo che il comportamento del dispositivo in un intorno del primo modo di vibrare possa essere considerato lineare. La figura 4.2 mostra come sia possibile valutare $C_{eff,j}$ pari alla pendenza della curva caratteristica del dispositivo forza-velocità in corrispondenza della velocità associata al primo modo di vibrare.

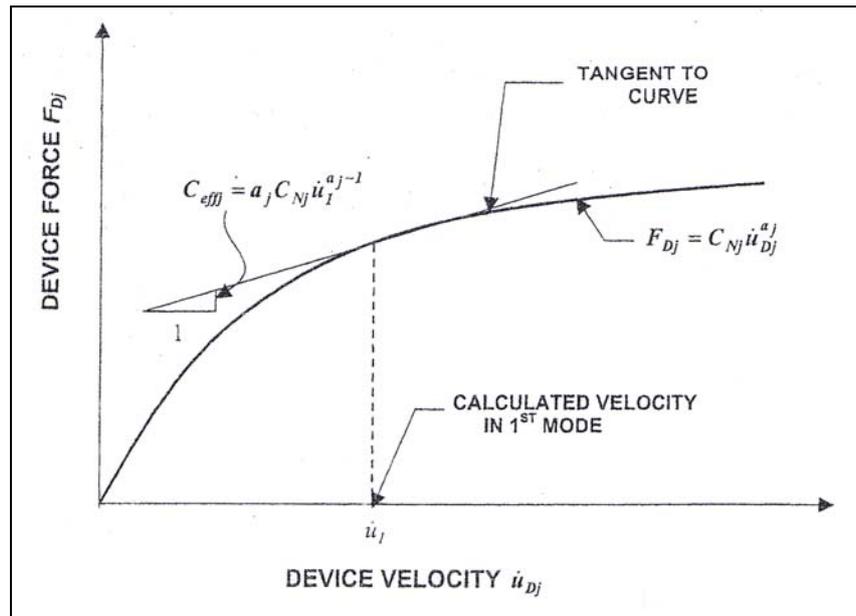


Fig 4.2 Coefficiente di Smorzamento Efficace

In termine analitici esso avrà la seguente espressione:

$$(4.9) \quad C_{eff,j} = \alpha_j C_{Nj} \dot{u}_1^{\alpha_j - 1}$$

Operando in questi termini il problema diviene lineare e si può stimare $\xi_{sd,m}$ associato al modo di vibrare m -esimo utilizzando la (4.8) in cui C_{Nj} deve essere sostituito da $C_{eff,j}$.

4.2 Metodo Diretto

Il metodo diretto che viene illustrato in questo paragrafo, sulla scorta dei risultati ottenuti per sistemi ad un grado di libertà, prevede la valutazione per il primo modo di vibrare del parametro ε per sistemi a più gradi di libertà. Si desidera ricordare in questa sede che per sistemi ad un grado di libertà dotati di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare, una volta noto ε , è nota anche la risposta del sistema per qualsiasi forzante. Quindi è possibile tracciare degli spettri dei parametri caratteristici della risposta in funzione di ε , compreso l'indice di smorzamento equivalente. Dal momento che l'analisi modale di fatto può essere ricondotta allo studio di numero di problemi ad un grado di libertà pari a al numero di gradi di libertà del sistema, una volta noto il valore di ε associato ad un modo di vibrare è possibile attraverso gli spettri

di cui sopra risalire al valore dell'indice di smorzamento equivalente associato.

Per risolvere il problema della stima di ε associato al primo modo di vibrare, per un sistema indefinitamente elastico-lineare a più gradi di libertà dotato di dissipatori a comportamento non lineare con medesimo valore dell'esponente α , occorre partire dalla definizione:

$$(4.10) \quad \varepsilon_1 = \xi_{sd,1} (fa_{D,1})^{1-\alpha}$$

Dove $\xi_{sd,1}$ è riportato nella (4.8), ε_1 è il parametro ε associato al primo modo di vibrare; l'unico termine da ricavare nella (4.10) è il fattore di amplificazione associato al primo modo di vibrare espresso in termini di spostamento dell'ultimo livello, $fa_{D,1}$.

Per fare ciò scriviamo l'equazione del moto associata al primo modo di vibrare:

$$(4.11) \quad \ddot{q}_1(t) + 2\xi_{sd,1}\omega_1\dot{q}_1(t) + \omega_1^2q_1(t) = \Gamma_1a(t)$$

Dove Γ_1 è il fattore di partecipazione del primo modo, $a(t)$ è l'accelerogramma agente alla base della struttura, avente ampiezza massima pari ad a_0 , ω_1 è la frequenza propria del primo modo di vibrare e $q_1(t)$ è la coordinata modale associata al primo modo di vibrare. Se definiamo $q_{0,1}$ il valore massimo di $q_1(t)$ è possibile definire il fattore di amplificazione associato al primo modo di vibrare come segue:

$$(4.12) \quad fa_{D,1} = \frac{q_{0,1}}{\Gamma_1 a_0} \omega_1^2$$

Il valore massimo dell'ordinata del grado di libertà dello spostamento all'ultimo livello $D_{roof,1}$, associato al primo modo di vibrare può essere espresso come segue:

$$(4.13) \quad D_{roof,1} = q_{0,1} \times \phi_{1,roof}$$

Se normalizziamo i modi di vibrare come fatto in precedenza, avremo $\phi_{1,roof}$ pari ad 1. Occorre inoltre fare la seguente precisazione: l'espressione (4.8) dell'indice di smorzamento equivalente è stata dedotta a partire dalla storia di spostamenti riportata in (4.4), quindi avente un frequenza pari alla frequenza del primo modo. La coordinata

modale $q_1(t)$ dovrà necessariamente essere pari a:

$$(4.14) \quad q_1(t) = D_{roof} \sin\left(\frac{2\pi * t}{T_1}\right)$$

In base a tali considerazioni risulta immediato che debba essere $D_{roof,1} = D_{roof}$. E' intuitiva questa conclusione anche riferendosi alla definizione di modo di vibrare: se il sistema a più gradi di libertà è sottoposto a spostamenti proporzionali al primo modo di vibrare è naturale che tutta la risposta debba essere associata al primo modo di vibrare.

A rigore però la (4.11) rappresenta l'equazione del moto associata al primo modo di vibrare nel caso in cui sia applicato una accelerogramma al piede pari ad $a(t)$. Quindi implicitamente occorre intendere $a(t)$ come quell'accelerogramma applicato al piede che produce nella struttura spostamenti del tipo riportati in (4.4). Dal momento che la risposta è di tipo armonico, anche $a(t)$ sarà di tipo armonico e per la risoluzione dell'integrale relativo alla energia dissipata nei dissipatori, dovrà avere frequenza pari alla frequenza del primo modo. E per quel che riguarda l'ampiezza, a_0 ? Dal momento che nella (4.4), per gli spostamenti all'ultimo livello, viene riportato lo spostamento massimo nel caso in cui venga applicato l'accelerogramma reale di riferimento, nei confronti del quale si desidera calcolare l'indice di smorzamento equivalente, risulta corretto porre $a_0 = PGA$, dove con PGA si intende il valore di picco dell'accelerogramma reale di riferimento al suolo (*Peak Ground Acceleration*).

In base a tali considerazioni il fattore di amplificazione associato al primo modo di vibrare, relativamente allo spostamento dell'ultimo livello, sarà pari a:

$$(4.15) \quad fa_{D,1} = \frac{D_{roof}}{\Gamma_1(PGA)} \omega_1^2$$

Se a questo punto riscriviamo la (4.10) ricordando le (4.8) e (4.15) otteniamo infine:

$$(4.16) \quad \varepsilon_1 = \frac{T_1^\alpha}{(2\pi)^{1+\alpha}} \frac{\lambda}{(\Gamma_1 PGA)^{1-\alpha}} \frac{\sum_j C_{Nj} f_j^{1+\alpha_j} \phi_{rj}^{1+\alpha_j}}{\sum_i \left(\frac{w_i}{g}\right) \phi_{i,1}^2}$$

Nella (4.16) non appare alcun termine relativo alla risposta del sistema e quindi il

valore di ε può essere stimato direttamente, una volta note le caratteristiche del sistema.

A questo punto una volta determinato il valore di ε attraverso la (4.16) diviene immediato attraverso opportuni spettri individuare il relativo valore di ξ_{sd} . Per quanto riguarda la stima di ξ_{sd} per i modi superiori si può far riferimento alla procedura già vista per il metodo iterativo.

4.3 Validazione dei Metodi

Al fine di verificare l'affidabilità dei metodi appena descritto abbiamo analizzato 4 casi di studio, dei quali è stata calcolata per via numerica la risposta ad accelerogrammi reali. Tale risultato "esatto", che può essere assunto come risultato di riferimento è stato successivamente messo a confronto con i risultati derivati dalla applicazione dei metodi "approssimati" di cui al paragrafo 4.1 e 4.2.

4.3.1 PRESENTAZIONE DEI CASI DI STUDIO

In figura 4.3 riportiamo lo schema di un telaio denominato 3S-80, già analizzato da Ramirez, Constantinou *et al* nella loro pubblicazione del 2000.

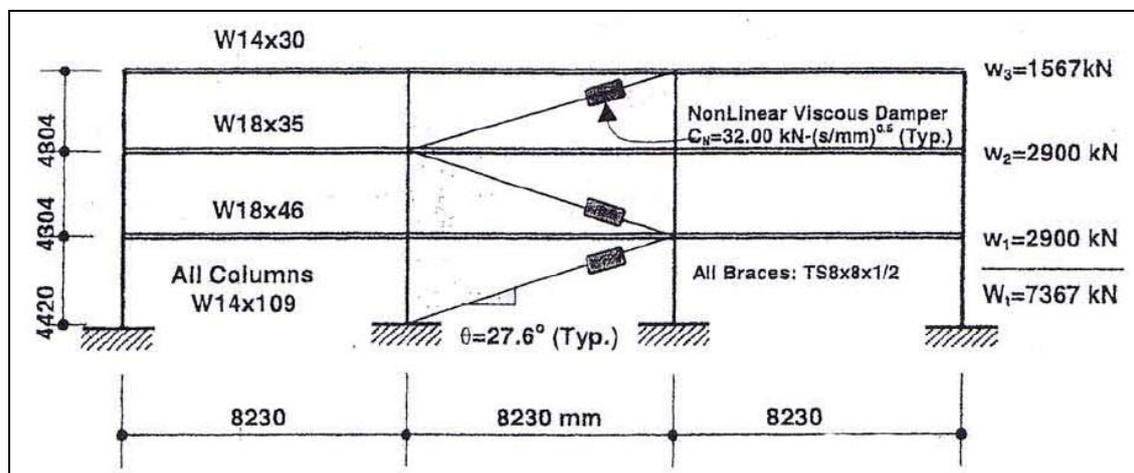


Fig 4.3 Telaio 3S-80

Il periodo proprio associato al primo modo di vibrare per il telaio 3S-80 è risultato essere pari a 1.68sec. Al fine di valutare la risposta di un telaio con periodo proprio associato al primo modo di vibrare diverso, è stato studiato anche un telaio denominato 3S-80_1, che presenta le seguenti differenze rispetto al telaio 3S-80: - masse ai piani ridotte, - coefficienti di smorzamento dei dissipatori ridotti. Le masse sono state ridotte

di un fattore pari $0.3543=(1/1.68)^2$, in modo che il telaio 3S-80_1 abbia un periodo proprio del primo modo di vibrare pari a 1.00sec e in modo che le deformate modali (Φ_i) e i coefficienti di partecipazione (Γ_i) non risultino alterati; i coefficienti di smorzamento sono stati ridotti di un fattore pari a 0.25 in modo da ottenere valori dell'indice di smorzamento equivalente pari a circa un quarto di quelli ottenuti per il telaio 3S-80. Il valore dell'esponente della velocità è stato tenuto pari a 0.50 per tutti i dispositivi in entrambi i telai. Nella tabella 4.1 riportiamo le caratteristiche del telaio 3S-80_1.

LIVELLO	MASSA (kN)	C_{Nj} (kN/(sec/mm) ^{0.5})
1	1028	8.00
2	1028	8.00
3	555	8.00

Tabella 4.1 Telaio 3S-80_1

Il valore del coefficiente λ introdotto al paragrafo 4.1, per un valore di $\alpha=0.50$, risulta essere pari a 3.4960.

Le analisi modali dei due telai sono state condotte con l'ausilio del software SAP 2000 NL, prodotto da CSI; nella tabella 4.2 riportiamo i periodi propri dei tre modi per entrambi i telai.

	3S-80	3S-80_1
T_1 (sec)	1.6868	1.000
T_2 (sec)	0.5388	0.3194
T_3 (sec)	0.2873	0.1710

Tabella 4.2 Periodi Modi di Vibrare telai 3S-80 e 3S-80_1

In figura 4.4 riportiamo le deformate modali comuni ad entrambi i telai e i rispettivi valori dei fattori di partecipazione. In tabella 4.3 riportiamo i valori delle deformate modali normalizzate in modo che l'ordinata dell'ultimo livello sia unitaria (Φ_i) e i valori differenziali (Φ_{ri}) in valore assoluto, per tutti i modi di vibrare.

LIVELLO	Φ_{i1}	Φ_{ri1}	Φ_{i2}	Φ_{ri2}	Φ_{i3}	Φ_{ri3}
1	0.2735	0.2735	-0.7488	0.7488	1.7221	1.7221
2	0.6731	0.3996	-0.4985	0.2502	-1.5026	3.2247
3	1.0000	0.3269	1.0000	1.4985	1.0000	2.5026

Tabella 4.3 Deformate Modali Normalizzate

La risposta dei due telai è studiata nei confronti di due accelerogrammi reali scalati ad un valore di PGA pari a 0.25g. I due accelerogrammi utilizzati sono El-Centro e Newhall. In figura 4.5 e 4.6 riportiamo gli accelerogrammi.

Sono stati esaminati 4 casi di studio che vengono riepilogati nella tabella 4.4.

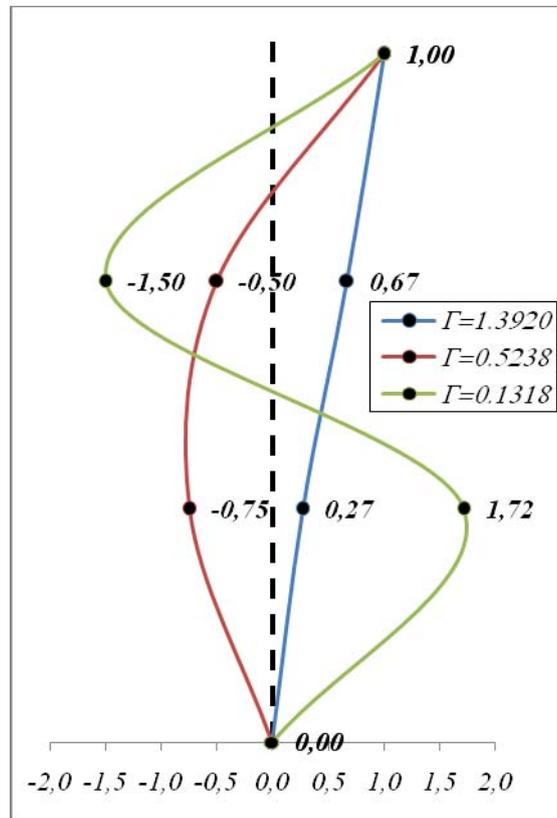


Fig 4.4 Deformate Modali e Fattori di Partecipazione (Γ)

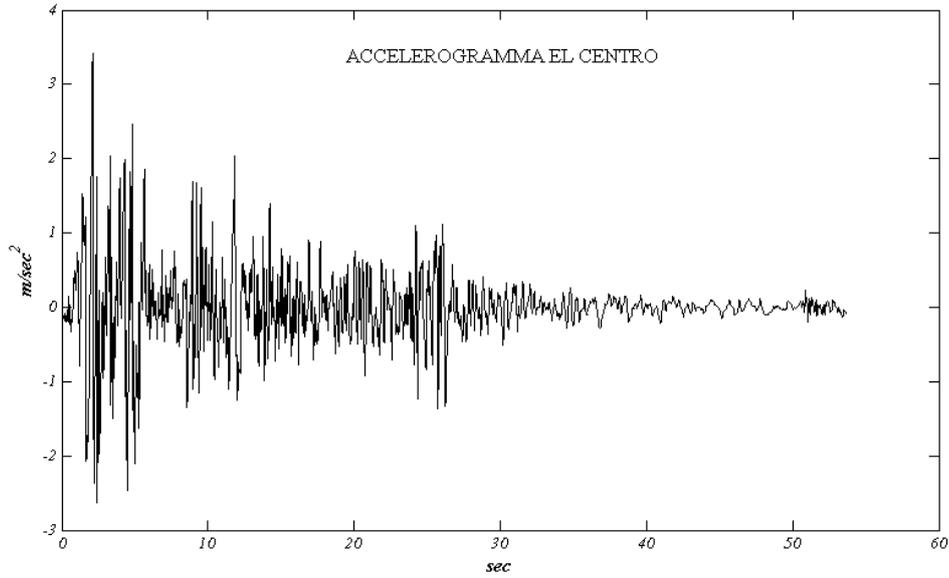


Figura 4.5 Accelerogramma El Centro

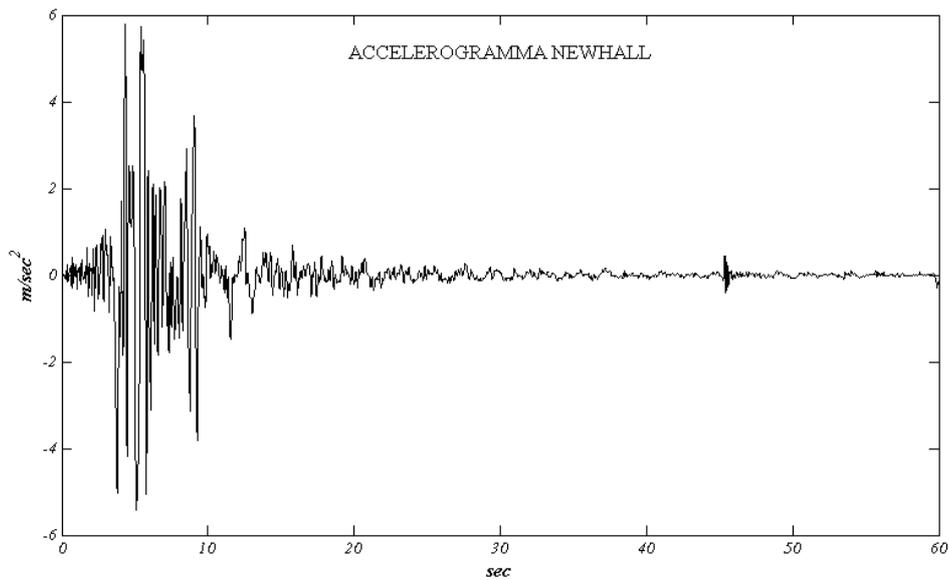


Figura 4.6 Accelerogramma Newhall

	TELAIO	ACCELEROGRAMMA
CASO 1	3S-80	El Centro
CASO 2	3S-80_1	El Centro
CASO 3	3S-80	Newhall
CASO 4	3S-80_1	Newhall

Tabella 4.4 Casi di Studio

4.3.2 ANALISI DEI TELAI MUNITI DI DISSIPATORI A COMPORTAMENTO NON-LINEARE

La risposta dei due telai presentati muniti di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non lineare è stata calcolata per via numerica utilizzando il software SAP2000 NL, prodotto da CSI, utilizzando una metodologia di integrazione nel dominio del tempo proposta da Wilson e denominata *FNA (Fast Non-linear Analysis)*. Tale metodologia presenta un ridotto onere computazionale e una notevole velocità di risoluzione in quanto concentra la non-linearità del problema in porzioni della struttura definite: nel nostro caso la non-linearità è concentrata tutta nei dispositivi dissipativi. In tutte le analisi lo smorzamento interno è stato posto pari al 5%.

4.3.3 APPLICAZIONE METODO ITERATIVO PER LA STIMA DI ξ_{sd}

Il metodo iterativo descritto al paragrafo 4.1 viene qui applicato con riferimento ai telai 3S-80 e 3S-80_1 e gli accelerogrammi di El Centro e Newhall scalati ad una PGA=0.25g. Riportiamo in modo esteso il procedimento in riferimento al caso di studio N.1. Per gli altri casi di studio riportiamo solo i risultati finali.

Il valore dello spostamento all'ultimo livello è stato posto inizialmente pari al valore dello spostamento all'ultimo livello del telaio 3S-80 privo di dissipatori nel caso in cui questo sia sottoposto all'accelerogramma di El Centro scalato ad una PGA di 0.25g ($D_{roof,0}$) e ipotizzando uno smorzamento interno (ξ_0) pari al 5%. Noto questo valore iniziale è stato valutato l'indice di smorzamento equivalente per il primo modo di vibrare ($\xi_{sd,0}$) attraverso la (4.8). La risposta del telaio è stata nuovamente calcolata aggiornando il valore dell'indice di smorzamento totale a $\xi_0 + \xi_{sd,0}$. E' stato individuato quindi un nuovo valore dello spostamento all'ultimo livello ($D_{roof,1}$) e conseguentemente è stato aggiornato il valore dell'indice di smorzamento equivalente ($\xi_{sd,1}$). La procedura continua fino a che la differenza tra due passi successivi del valore dello spostamento all'ultimo livello non sia inferiore ad un valore prestabilito. Riportiamo in figura 4.7 lo schema della procedura iterativa per il caso di studio in esame.

In figura 4.8 riportiamo invece i valori della risposta relativamente al primo modo di vibrare in termini di spostamenti assoluti di piano (u_i), spostamenti di interpiano (u_{ri}), velocità relative di piano (v_i), velocità agli estremi dei dissipatori (v_{Dj}) e sulla base di tali risultati il calcolo dei coefficienti di smorzamento efficace per i modi superiori e i rispettivi valori degli indici di smorzamento equivalenti associati.

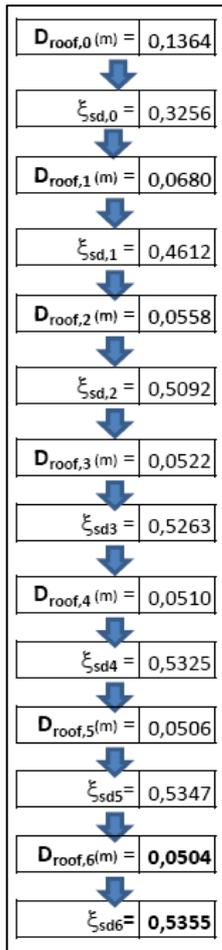


Figura 4.7 Schema procedimento iterativo.

Risultati 1° Modo				
LIVELLO	u_i (m)	u_{ri} (m)	v_i (m/sec)	v_{Dj} (m/sec)
1	0,0138	0,0138	0,0514	0,0453
2	0,0340	0,0202	0,0751	0,0665
3	0,0504	0,0165	0,0614	0,0544

2° MODO	LIVELLO	ϕ_{i2}	ϕ_{rj}	Ceff _{rj} (N/(m/sec))
	1	-0,7488	0,7488	2533450,8177
	2	-0,4985	0,2502	2083873,5515
	3	1,0000	1,4985	2303894,0371
T_2 (sec) =		0,5388	→	$\xi_{sd,2}$ = 0,5661

3° MODO	LIVELLO	ϕ_{i3}	ϕ_{rj}	Ceff _{rj} (N/(m/sec))
	1	1,7221	1,7221	2533450,8177
	2	-1,5026	3,2247	2083873,5515
	3	1,0000	2,5026	2303894,0371
T_3 (sec) =		0,2873	→	$\xi_{sd,3}$ = 0,4586

Figura 4.8 Coefficiente di Smorzamento Efficace per modi superiori.

La procedura è giunta a convergenza dopo 6 passi. Si desidera sottolineare che ad ogni passo abbiamo dovuto procedere al calcolo della risposta nel dominio del tempo di un telaio a 3 gdl indefinitamente elastico-lineare con un valore elevato dell'indice di smorzamento. Tali elaborazioni sono state effettuate con l'ausilio del software SAP 2000NL, prodotto da CSI. Al termine della procedura iterativa è stata poi valutata la risposta del sistema associando ad ogni modo di vibrare il rispettivo valore dell'indice di smorzamento equivalente.

4.3.4 APPLICAZIONE METODO DIRETTO PER LA STIMA DI ξ_{sd}

Il metodo diretto descritto nel paragrafo 4.2 prevede inizialmente di stimare il valore del parametro ε associato al primo modo di vibrare. A tal fine applichiamo, per il caso di studio 1, la (4.16). In figura 4.9 riportiamo la procedura per la valutazione di ε .

1°MODO		ACCELEROGRAMMA EL CENTRO (PGA=0.25g)					
LIVELLO	w _i (N)	φ _{il}	φ _{rl}	B (m)	H (m)	f _j	C _{Nj} (N/(m/sec) ^α)
1	2,900E+06	0,2735	0,2735	8,2300	4,4200	0,8810	1011928,8513
2	2,900E+06	0,6731	0,3996	8,2300	4,3040	0,8861	1011928,8513
3	1,567E+06	1,0000	0,3269	8,2300	4,3040	0,8861	1011928,8513

T ₁ (sec) =	1,6868
α =	0,5000
λ =	3,4960
PGA (m/sec ²) =	2,4525
Γ _l =	1,3920
ε ₁ =	0,2424

Fig 4.9 Schema per il calcolo di ε

Per la valutazione di $\xi_{sd,1}$ occorre realizzare degli spettri di risposta. In realtà questa procedura risulta essere molto semplice: infatti noto ε , è possibile individuare la risposta di un sistema indefinitamente elastico-lineare ad un grado di libertà munito di dissipatore fluido-viscoso a comportamento non-lineare per qualsiasi valore del periodo naturale del sistema; nota la risposta attraverso la (4.10) è possibile ricavare $\xi_{sd,1}$. In figura 4.10 riportiamo gli spettri di $\xi_{sd,1}$ per l'accelerogramma di El Centro per $\alpha=0.50$, per diversi valori di ε . In verde viene riportato lo spettro per $\varepsilon=0.2424$ e l'ordinata per $T_1=1.6868$ è stata messa in evidenza con un cerchio colorato.

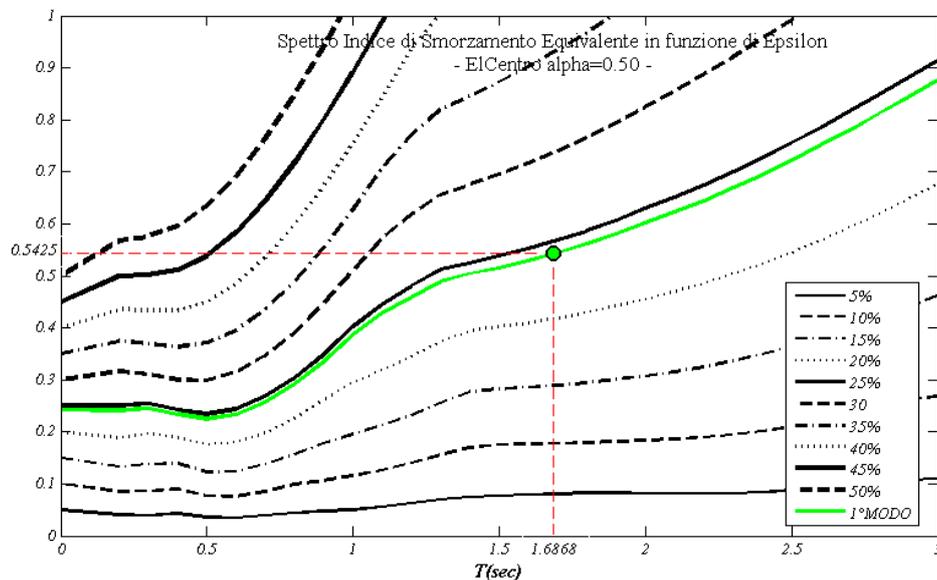


Fig 4.10 Spettri di ξ_{sd} per il caso 1

Attraverso l'uso degli spettri riportati in figura 4.10 è stato possibile stimare il valore di $\xi_{sd,1}$ in modo diretto senza la necessità di implementare procedure iterative. Per il caso 1 è stato stimato un valore di $\xi_{sd,1}$ pari a 0.5425. Il valore trovato risulta essere molto prossimo a quello individuato con il metodo iterativo, pertanto non si ritiene necessario procedere alla stima degli indici di smorzamento equivalente dei modi superiori, in quanto del tutto prossimi a quelli già stimati con il metodo iterativo.

4.3.5 ANALISI DEI RISULTATI

Riportiamo nella tabella 4.5 i valori stimati per l'indice di smorzamento equivalente associato al primo modo di vibrare per i 4 casi di studio analizzati, attraverso l'uso del metodo iterativo e del metodo diretto.

	Metodo ITERATIVO	Metodo DIRETTO	Differenziale
CASO 1	0.5355	0.5425	1.31%
CASO 2	0.1631	0.1645	0.86%
CASO 3	0.4096	0.4005	2.22%
CASO 4	0.1056	0.1076	1.89%

Tabella 4.5 Valori stimati di $\xi_{sd,1}$ con metodo iterativo e con metodo diretto

La tabella 4.5 mostra come i due metodi producano una stima molto prossima dell'indice di smorzamento equivalente per il primo modo di vibrare (differenziale massimo del 2.22%). Dalla tabella 4.5 si può notare anche che a parità di ampiezza massima dell'accelerazione di picco al suolo (0.25g) la forma dell'accelerogramma incide sul valore di picco della risposta e quindi sul valore dell'indice di smorzamento equivalente.

A questo punto attraverso l'ausilio del software di calcolo SAP 2000NL, prodotto da CSI, i quattro casi di studio sono stati risolti seguendo 3 diversi approcci così denominati:

1. Soluzione Numerica: secondo la procedura esposta al paragrafo 4.3.2;
2. Csi: la risposta è stata calcolata stimando per ogni modo di vibrare l'indice di smorzamento equivalente secondo il metodo iterativo;
3. Epsilon: la risposta è stata calcolata stimando per ogni modo di vibrare l'indice di smorzamento equivalente secondo il metodo diretto.

Per quanto concerne gli ultimi due metodi i valori dell'indice di smorzamento per i modi superiori sono stati considerati identici in quanto la procedura esposta in precedenza prevede una linearizzazione del problema a partire dalla risposta del primo modo, che per i due metodi è risultata essere pressoché identica.

Nelle figure che seguono riportiamo l'andamento nel tempo dello spostamento dell'ultimo livello (D_{roof}).

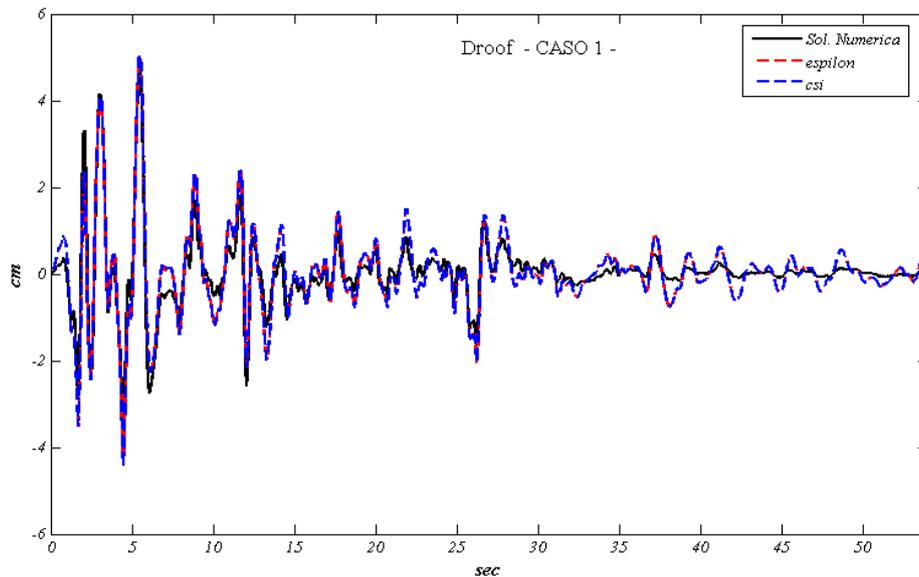


Fig 4.11 D_{roof} per il caso 1 secondo i tre metodi analizzati

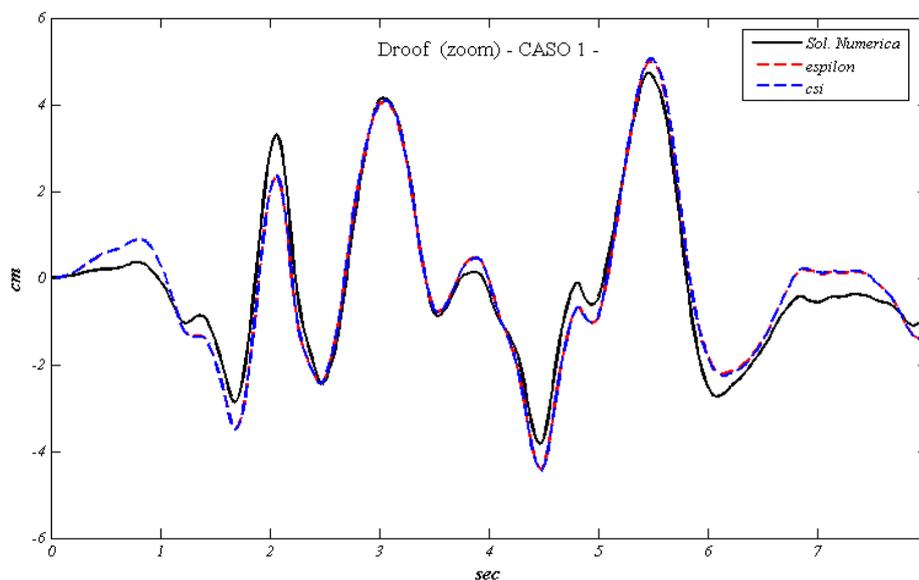


Fig 4.12. Andamento di D_{roof} per il caso 1 nell'intervallo in cui si registrano i valori massimi

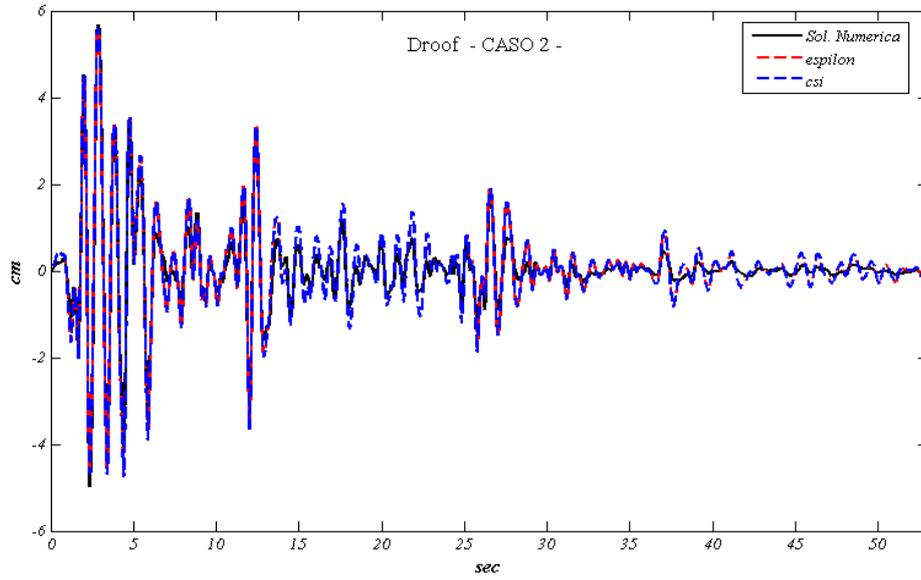


Fig 4.13 D_{roof} per il caso 2 secondo i tre metodi analizzati

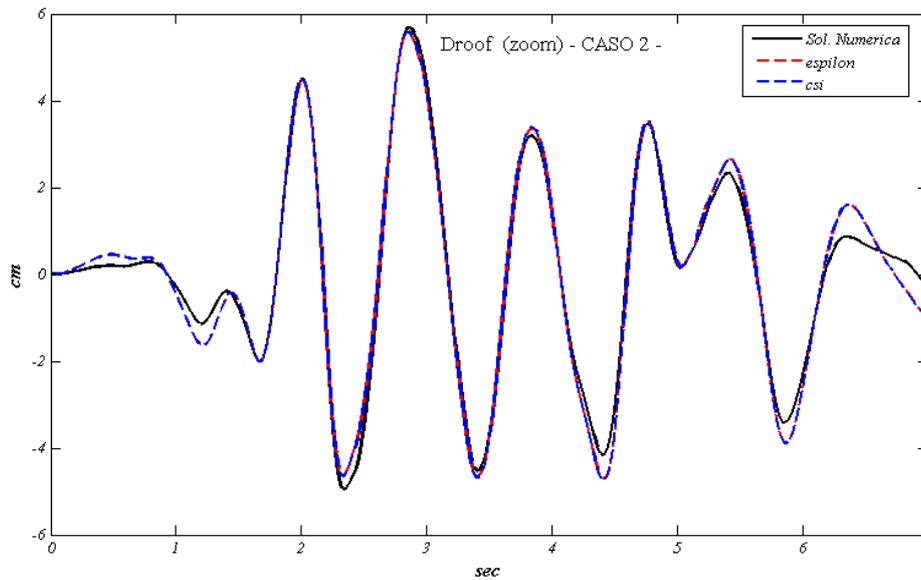


Fig 4.14. Andamento di D_{roof} per il caso 2 nell'intervallo in cui si registrano i valori massimi

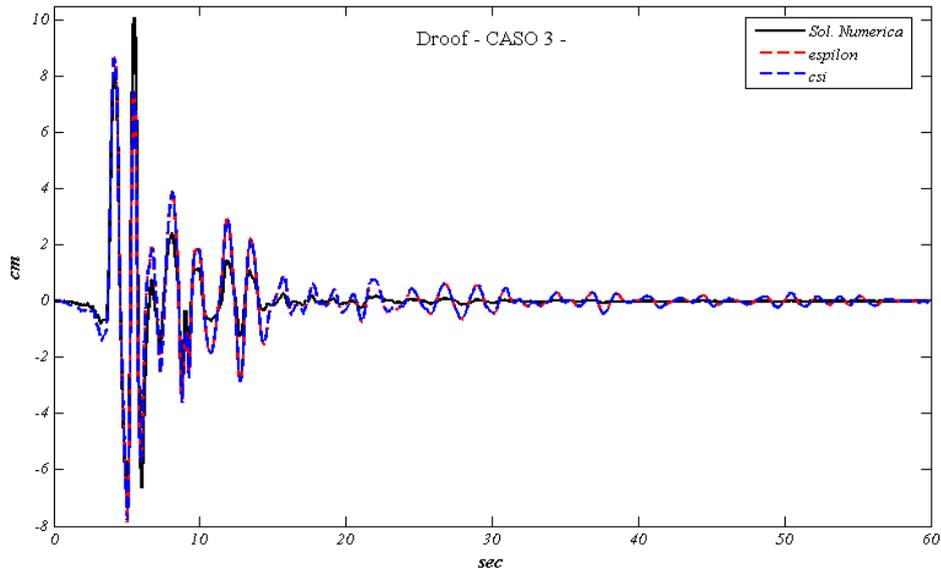


Fig 4.15 D_{roof} per il caso 3 secondo i tre metodi analizzati

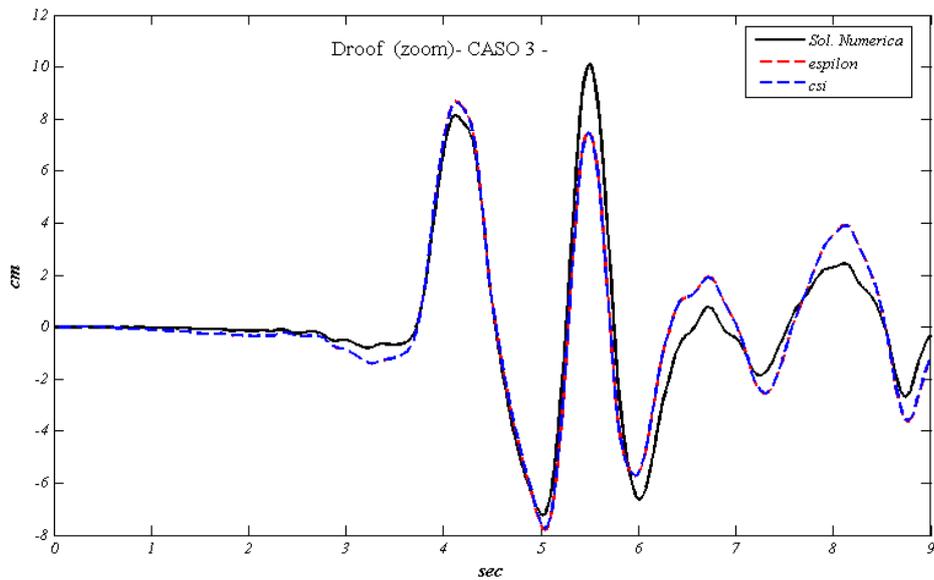


Fig 4.16. Andamento di D_{roof} per il caso 3 nell'intervallo in cui si registrano i valori massimi

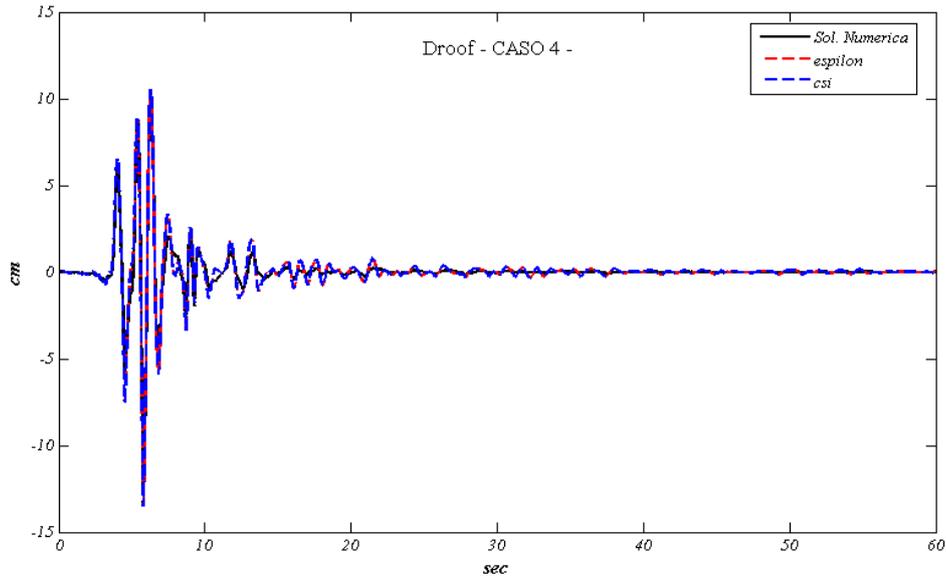


Fig 4.17 D_{roof} per il caso 4 secondo i tre metodi analizzati

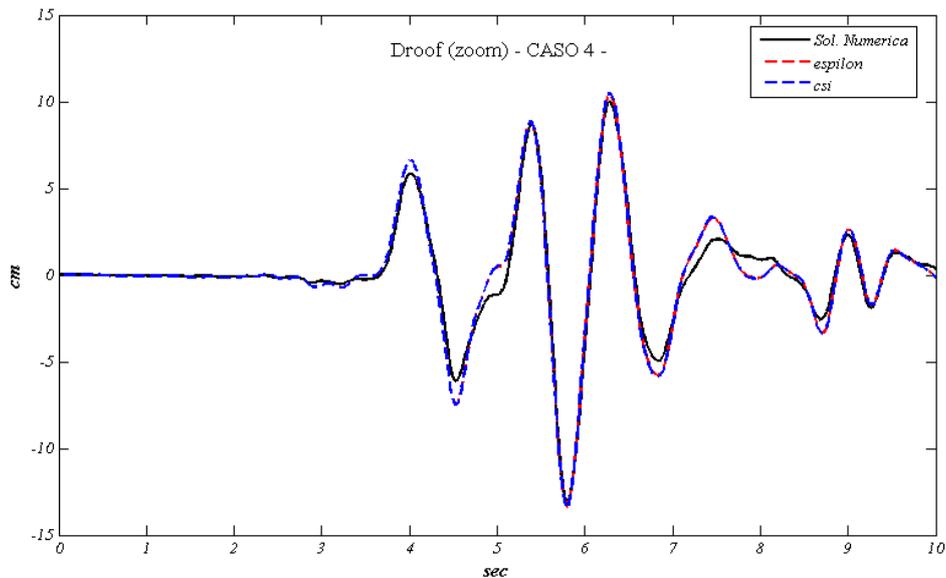


Fig 4.18. Andamento di D_{roof} per il caso 4 nell'intervallo in cui si registrano i valori massimi

Nella tabella 4.6 riportiamo in sintesi i risultati.

La tabella 4.6 mostra che i metodi approssimati riescono a stimare meglio la risposta “esatta”, calcolata per via numerica, per il caso 2 e per il caso 4, per i casi, cioè, relativi al telaio 3S-80_1, avente periodo del primo modo pari a 1sec. In realtà a bene vedere l'errore totale che si commette non deve essere imputato integralmente ai metodi approssimati, in quanto una quota parte di errore, molto prossima a quella riportate in tabella 4.6, deve essere attribuita alla linearizzazione del problema che

viene fatta quando si desidera risolvere il problema attraverso una analisi modale di tipo classico nella quale viene individuato un valore dell'indice di smorzamento per ogni modo di vibrare. Questo aspetto era già stata analizzato nel paragrafo 3.5, al quale si rimanda per ulteriori approfondimenti.

Metodo	max D _{roof} (mm)			Errore (%)	
	Sol. Numerica	Csi	Epsilon	Csi	Epsilon
CASO 1	47.2780	50.5483	49.9261	6.9183	5.6023
CASO 2	56.7627	55.8673	55.6251	1.5775	2.0041
CASO 3	101.0035	86.1975	86.6950	14.6590	14.1664
CASO 4	132.5149	134.5471	133.8828	1.5336	1.0323

Tabella 4.6 Riepilogo risultati 4 casi di studio

4.4 Spettri di ξ_{sd} per Codici Internazionali

Nel paragrafo 4.3.4 è stato messo in evidenza come sia indispensabile ai fini della stima dell'indice di smorzamento equivalente conoscere gli spettri di ξ_{sd} in funzione di ε , per valori di α fissati. Nell'esempio proposto è stato ricavato lo spettro per $\alpha=0.50$, per l'accelerogramma di El Centro per un sistema ad un grado di libertà indefinitamente elastico-lineare. E' stato già discusso come sia piuttosto facile costruire tali spettri nel caso in cui sia nota la forzante. Solitamente, quando ci si appropria al progetto o alla verifica di sistemi dotati di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare, non è possibile conoscere l'accelerogramma del sisma che investirà la struttura e quindi si fa riferimento agli spettri che vengono forniti dai codici internazionali. La domanda che ci poniamo a questo punto è la seguente: è possibile individuare degli spettri dell'indice di smorzamento equivalente in funzione di ε e α , a partire dagli spettri forniti dai codici internazionali? Nel presente paragrafo ci occuperemo di mostrare che ciò è possibile con riferimento agli spettri forniti nel D.M. 14/01/2008 "Norme Tecniche per le Costruzioni", attualmente vigenti in Italia, ma restando ben inteso che tale procedura è estendibile a qualsiasi codice internazionale.

In primo luogo occorre riscrivere la relazione (4.10) usando grandezze spettrali. Se denominiamo $S_d(T)$, lo spettro degli spostamenti, $S_a(T)$, lo spettro delle pseudo-accelerazioni, per cui vale $S_a(T) = S_d(T)\omega^2$, possiamo scrivere:

$$(4.17) \quad \varepsilon = \xi_{sd} (fa_D)^{1-\alpha} = \xi_{sd} \left(\frac{S_d(T)}{PGA} \omega^2 \right)^{1-\alpha} = \xi_{sd} \left(\frac{S_d(T)}{PGA} \right)^{1-\alpha} = \xi_{sd} (\bar{S}_a(T))^{1-\alpha}$$

Dove con $\bar{S}_a(T)$ abbiamo indicato lo spettro delle pseudo-accelerazioni normalizzato rispetto alla PGA. Occorre sottolineare che $\bar{S}_a(T)$ è l'ordinata spettrale calcolata per un indice di smorzamento totale pari a $\xi = \xi_0 + \xi_{sd}$, dove ξ_0 è l'indice di smorzamento interno usualmente pari al 5%. A rigore avremmo dovuto scrivere $\bar{S}_a(T, \xi, \alpha)$, in quanto la risposta è funzione anche dell'esponente α , ricordando l'equazione del moto implicita (2.18). Quando si utilizzano gli spettri forniti dai codici internazionali si assume di fatto che α abbia valore unitario. Quindi a rigore si può osservare che $\bar{S}_a(T, \xi, \alpha) \neq \bar{S}_a(T, \xi, \alpha = 1)$ e pertanto la relazione (4.17) risulterebbe non propriamente corretta. Si è visto, però, nel paragrafo 2.4 che la non linearità del comportamento del dissipatore influisce in modo molto lieve sulla risposta espressa in termini di spostamenti e quindi l'approssimazione presente nella relazione (4.17) è assolutamente lecita. Mentre la non linearità del comportamento del dissipatore incide in molto più significativo se esprimo la risposta in funzione di ε , come è stato descritto al paragrafo 3.2.1. Tale dipendenza viene resa esplicita nella (4.17).

Si desidera a questo punto mettere in evidenza un altro aspetto particolarmente significativo del metodo appena illustrato per la determinazione dell'indice di smorzamento equivalente. Infatti nelle espressioni dedotte dalla letteratura scientifica, tale parametro risulta essere dipendente dal massimo spostamento che il sistema raggiunge, se sottoposto ad un determinato evento sismico, oppure, in un contesto di analisi spettrale, dallo spettro degli spostamenti (S_d). Infatti è stato dimostrato che l'indice di smorzamento equivalente, a parità di altri fattori, è funzione di $(S_d)^{\alpha-1}$. Dal momento, poi, che lo spettro degli spostamenti è necessariamente funzione della accelerazione di picco al suolo, a parità di forma dell'accelerogramma, per tracciare gli spettri dell'indice di smorzamento equivalente, occorrerebbe realizzare delle analisi per diversi valori della accelerazione di picco al suolo e per ogni valore verrebbe individuato uno spettro.

Il metodo che abbiamo proposto supera questo inconveniente in quanto lo spettro dell'indice di smorzamento viene tracciato a partire da ε . Infatti, dal momento che l'equazione del moto viene risolta in modo implicito, è già stato detto che sussiste

una diretta proporzionalità tra S_d e a_0 . Pertanto nella (4.17) il rapporto S_d/PGA risulta essere costante a parità di T, α, ε , per qualsiasi valore di PGA . Quindi questo metodo per la determinazione di ξ_{sd} non prevede la dipendenza di ξ_{sd} da PGA , con il vantaggio di poter determinare un unico spettro dell'indice di smorzamento equivalente.

A questo punto sorge una domanda: come è possibile che una grandezza che è funzione di un'altra grandezza, ad un certo punto perda questa dipendenza? La risposta risiede nel fatto che il termine PGA è già contenuto in ε e quindi al variare di PGA , per ε fissato, sono gli altri termini che si adeguano, e visto che i termini relativi al sistema resistente, come il periodo proprio, sono determinati, si dovranno adeguare solo i termini relativi al sistema di dissipazione. In altri termini al variare di PGA il sistema di dissipazione si dovrà adeguare per raggiungere un determinato valore di ε e in ultima analisi si dovrà adeguare per mantenere un certo livello di dissipazione energetica.

In pratica si può infine affermare che fissati α ed ε , abbiamo già individuato una precisa capacità del sistema di dissipatori di dissipare energia, indipendentemente dalla forzante esterna.

I codici internazionali generalmente propongono una formulazione di $\bar{S}_a(T)$ in funzione dell'indice di smorzamento totale. Con riferimento alle Norme Tecniche per le Costruzioni, vigenti in Italia, viene introdotto un coefficiente η che viene applicato all'ordinata dello spettro normalizzato delle pseudo-accelerazioni per un indice di smorzamento totale pari all'indice di smorzamento interno, $\bar{S}_{a,5\%}(T)$. In termini analitici avremo, esprimendo gli indici di smorzamento in percentuale:

$$(4.18) \quad \begin{cases} \eta = \sqrt{10/(5 + \xi)} \\ \bar{S}_a(T) = \eta \bar{S}_{a,5\%}(T) \end{cases}$$

Chiaramente se $\xi = \xi_0$, $\eta = 1$, per valori di ξ crescenti l'ordinata spettrale si riduce. In figura 4.19 riportiamo gli spettri di $\bar{S}_a(T)$ in funzione di ξ_{sd} per un terreno di categoria A.

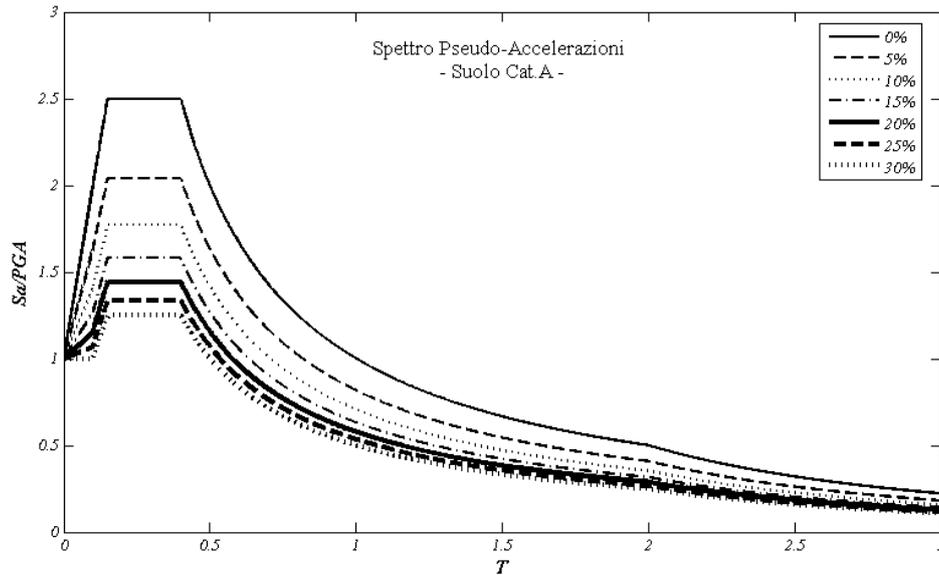


Fig 4.19 Spettri delle pseudo-accelerazioni in funzione di ξ_{sd}

Con riferimento alla (4.17) e alla (4.18) è possibile tracciare degli spettri di ε per valori di ξ_{sd} e di α fissati. In figura 4.20 riportiamo lo spettro di ε per $\alpha=0.50$, per diversi valori di ξ_{sd} , con riferimento ad un suolo di categoria A.

In figura 4.21 riportiamo la procedura adottata per ottenere gli spettri di ξ_{sd} in funzione di ε a partire dagli spettri di ε . Con riferimento alla figura 4.21 abbiamo tracciato una retta per ε costante pari a 0.20. Questa retta incontra la curva spettrale tracciata per $\xi_{sd}=15\%$ nei punti 1, 2, la curva spettrale tracciata per $\xi_{sd}=20\%$ nel punto 3, la curva spettrale tracciata per $\xi_{sd}=25\%$ nel punto 4, la curva spettrale tracciata per $\xi_{sd}=30\%$ nel punto 5. Ad ogni punto corrisponde un periodo: T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 . Operando in questo modo è possibile identificare 5 punti dello spettro di ξ_{sd} tracciato per $\alpha=0.50$ e $\varepsilon=0.20$. Nel nostro caso saranno: $(T_1;15\%)$, $(T_2;15\%)$, $(T_3;20\%)$, $(T_4;25\%)$, $(T_5;30\%)$. Di solito si desidera ottenere più punti al fine di avere un definizione migliore della curva; a tal scopo occorre individuare più punti di intersezione tra la retta a ε costante e le curve spettrali a ξ_{sd} costante, tracciando un numero elevato di curve spettrali a ξ_{sd} costante. In figura 4.22 riportiamo lo spettro di ξ_{sd} per diversi valori di ε per $\alpha=0.50$.

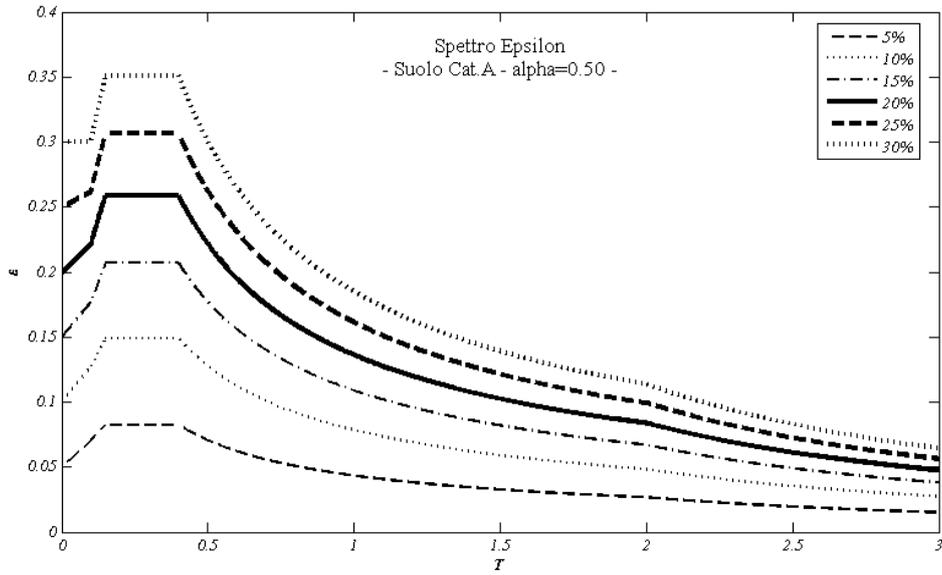


Fig 4.20 Spettri di ε in funzione di ξ_{sd}

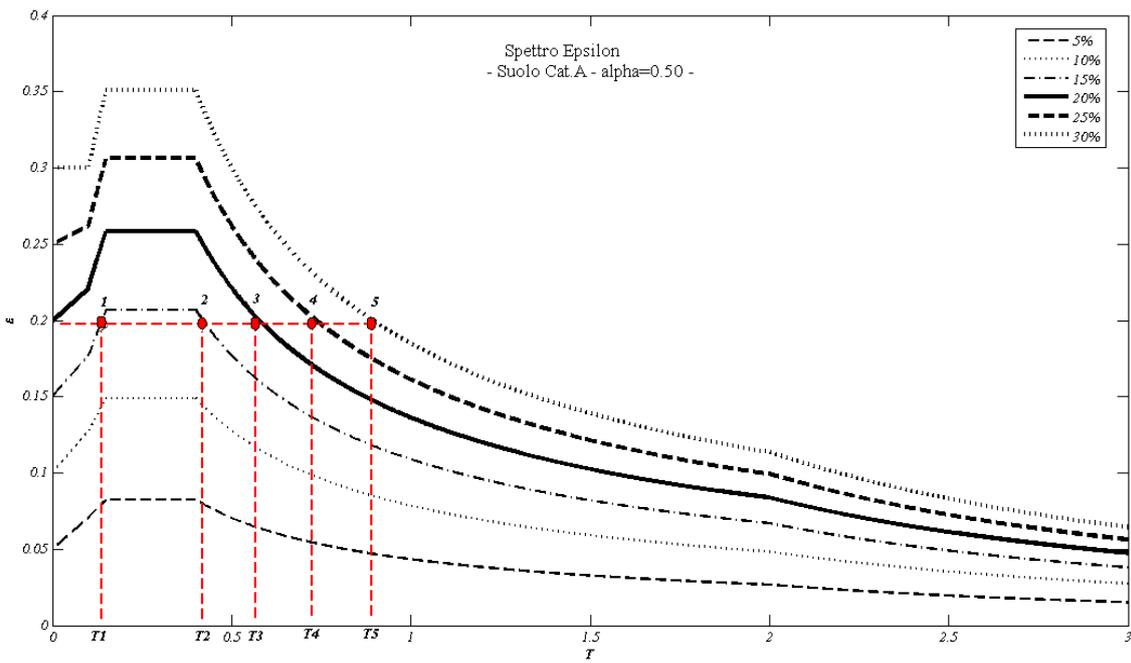


Fig 4.21 Procedura per la costruzione degli spettri di ξ_{sd} a partire dagli spettri di ε

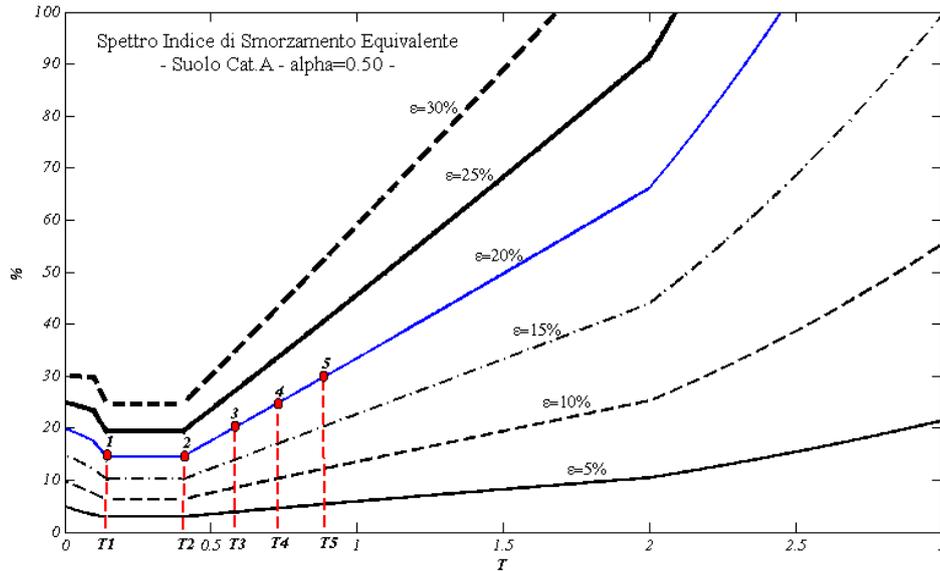


Fig 4.22 Spettri di ξ_{sd} in funzione di ε

La procedura illustrata per tracciare gli spettri di ξ_{sd} in funzione di ε può essere implementata per qualsiasi spettro elastico delle pseudo-accelerazioni che preveda dei coefficienti correttivi nel caso di smorzamento elevato (ad esempio η nel caso della normativa italiana). Dal momento che gli spettri riportati nei codici internazionali forniscono tali coefficienti, la procedura può essere applicata a tutti questi casi.

Riportiamo infine una sintesi degli step necessari per l'applicazione della procedura proposta in questo lavoro (basata sul metodo diretto esposto al paragrafo 4.2) ad una struttura dotata di dissipatori fluido-viscosi a comportamento non-lineare, una volta che sia stata svolta l'analisi modale della struttura priva di dissipatori:

1. Stima del parametro ε associato al primo modo di vibrare con l'uso della formula (4.16);
2. Stima dell'indice di smorzamento equivalente associato al primo modo di vibrare attraverso l'uso degli spettri del tipo riportati in figura 4.22;
3. Stima della risposta associata al primo modo di vibrare con gli spettri del tipo riportati in figura 4.19;
4. Stima dei coefficienti di smorzamento efficaci per i modi di vibrare superiori attraverso l'uso della formula (4.9);
5. Stima della risposta totale, considerando anche i modi superiori attraverso l'uso degli spettri riportati in figura 4.19.

BIBLIOGRAFIA

- UANG CHIA-MING, BERTERO VITELMO, *Use of Energy as a Design Criterion in Earthquakes-Resistant Design*, Report No. UCB/EERC – 88/18, 1988
- DE LUCA A., SERINO G., *L'Approccio Energetico nella progettazione sismica*, Ingegneria Sismica, Anno V, N.3, 1988
- DE LUCA A., SERINO G., *Nuovi sistemi strutturali per la difesa dal rischio sismico*, Ingegneria Sismica, Anno VI, N.1, 1989
- M.C.CONSTANTINOU, T.T.SOONG, G.F.DARGUSH, *Passive Energy Dissipation Systems for Structural Design and Retrofit*, MCEER Monograph no.1, Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, Buffalo, 1998
- T.T.SOONG, G.F.DARGUSH, *Passive Energy Dissipation Systems in structural engineering*, John Wiley & Sons, Chichester, England 1997
- FORNI M., *Recenti Applicazioni e Ricerche delle Tecnologie Antisismiche Innovative in Italia*, GLISnews, 1999
- MAZZA F., VULCANO A., *Controllo Passivo attraverso Controventi Dissipativi*, Rapporto del Progetto di Ricerca "Protezione Sismica dell'Edilizia Esistente e di Nuova Edificazione Attraverso Sistemi Innovativi" finanziato dal Ministero dell'Università e della Ricerca scientifica e Tecnologica, 2000.
- M.C.CONSTANTINOU, M.D.SYMANS, P.TSOPELAS, D.P.TAYLOR, *Fluid Viscous Dampers in Applications of Seismic Energy Dissipation and Seismic Isolation*, Proc. ATC 17-1 on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Active Control, 2, p.581-591, 1993
- M.C.CONSTANTINOU, M.D.SYMANS, *Seismic Response of Structures with Supplemental Damping*, Struct. Design Tall Bldgs., p.77-92, 1993

-
- M.C.CONSTANTINOU, M.D.SYMANS, *Experimental Study of Seismic Response of Buildings with Supplemental Fluid Dampers*, Struct. Design Tall Bldgs., p.93-132, 1993
- N. MAKRIS, M.C.CONSTANTINOU, *Viscous Dampers: Testing, Modeling and Application in Vibration and Seismic Isolation*, Technical Report NCEER-90-0028, National Center for Earthquake Engineering Research, Buffalo, NY, 1990
- N. MAKRIS, M.C.CONSTANTINOU, G.F.DARGUSH, *Analytical Model of Viscoelastic Fluid Dampers*, J. Struct. Engrg., ASCE, 119(11), p.3310-3325, 1993
- N. MAKRIS, G.F.DARGUSH, M.C.CONSTANTINOU, *Dynamic Analysis of Viscoelastic Fluid Dampers*, J. Engrg. Mech., ASCE, 121(10), p.1114-1121, 1995
- G PECKAN, J.B.MANDER, S.S.CHEN, *The Seismic Response of a 1:3 Scale Model R.C. Structures with Elastomeric Spring Dampers*, Earthquake Spectra, 11(2), p.249-267, 1995
- D.P.TAYLOR, M.C.CONSTANTINOU, *Fluid Viscous Dampers for Applications of Seismic Energy Dissipation and Seismic Isolation*, Proceedings of the Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, 1996
- D.P.TAYLOR, *Damper Retrofit of the London Millennium Footbridge – a Case Study in Biodynamic Design*, Taylor Devices, Inc., 2002
- RAMIREZ O.M., CONSTANTINOU M.C., et al., *Development and Evaluation of Simplified Procedures for Analysis and Design of Buildings with Passive Energy Dissipation Systems*, Technical Report MCEER - 00 – 0010, Buffalo, 2000.
- HANSON R.D., EERI M., *Supplemental Damping for Improved Seismic Performance*, Earthquake Spectra, Vol. 9, No. 3, 1993.
- HWANG J.S., *Seismic Design of Structures with Viscous Dampers*, International Training Programs for Seismic Design of Building Structures, hosted by NCEER, 2001.
-

-
- LIN W.H., CHOPRA A.K., *Earthquake Response of Elastic SDF Systems with Non-Linear Fluid Viscous Dampers*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 31, p.1623-1642, 2002.
- PECKAN G., MANDER J.B., CHEN S.S., *Fundamental Considerations for the Design of Non-Linear Viscous Dampers*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 28, p.1405-1425, 1999.
- RAMIREZ O.M., CONSTANTINOU M.C., et al., *Evaluation of Simplified Methods of Analysis of Yielding Structures with Damping Systems*, Earthquake Spectra, 18(3), p.501-530, 2002
- RAMIREZ O.M., CONSTANTINOU M.C., et al., *Elastic and Inelastic Seismic Response of Buildings with Damping Systems*, Earthquake Spectra, 18(3), p.531-547, 2002
- RAMIREZ O.M., CONSTANTINOU M.C., et al., *Validation of the 2000 NEHRP Provisions' Equivalent Lateral Force and Modal Analysis Procedures for Buildings with Damping Systems*, Earthquake Spectra, 19(4), p.981-999, 2003
- WHITTAKER A.S., CONSTANTINOU M.C., et al., *Equivalent Lateral Force and Modal Analysis Procedures of the 2000 NEHRP Provisions for Buildings with Damping Systems*, Earthquake Spectra, 19(4), p.959-980, 2003
- KIM J., CHOI H., MIN K.W., *Performance-Based Design of Added Viscous Dampers using Capacity Spectrum Method*, Journal of Earthquake Engineering, 7(1), p.1-24, 2003
- UETANI K., TSUJI M., TAKEWAKI I., *Application of an Optimum Design Method to Practical Building Frames with Viscous Dampers and Hysteretic Dampers*, Engineering Structures, 25, p.579-592, 2003
- LEE S.H., MIN K.W., HWANG J.S., KIM J., *Evaluation of Equivalent Damping Ratio of a Structures with Added dampers*, Engineering Structures, 26, p.335-346, 2004

-
- HWANG J.S., YI S.L., HO S.Y. *Equivalent Damping Ratios of Structures with Supplemental Viscous Dampers*, Engineering Structures, 26, p.346-365, 2004
- SADEK F., MOHRAZ B., RILEY M.A. *Linear Procedures for Structures with Velocity-Dependent Dampers*, Journal of Structural Engineering, 126 (8), p.887-895, 2000
- SINGH M.P., VERMA N.P., MORESCHI L.M. *Seismic Analysis and Design with Maxwell Dampers*, Journal of Engineering Mechanics, 129 (3), p.273-282, 2003
- MARTINEZ-RODRIGO M., ROMERO M.L., *An Optimum Retrofit Strategy for Moment Resisting Frames with Non-Linear Viscous Dampers for Seismic Applications*, Engineering Structures, 25, p.913-925, 2003
- MIYAMOTO H.K., SINGH J.P., *Performance of Structures with Passive Energy Dissipators*, Earthquake Spectra, 18(1), p.105-119, 2002
- LIN Y.Y., TSAI M.H., CHANG K.C., *On the Discussion of the Damping Reduction Factors in the Constant Acceleration Region for ATC-40 and FEMA-273*, Earthquake Spectra, 19(4), p.1001-1006, 2003
- CHOPRA A.K., *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Third Edition*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2003.
- CLOUGH R.W., J.PENZIEN, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- AA.VV., *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance, Draft no.1, May 2000*, Comité Européen de Normalisation, Brussels, 2000
- AA.VV., *Nehrp Recommended Provisions for Seismic Regulations for New Buildings and Other Structures (FEMA 450)*, Building Seismic Safety Council National Institute of Building Sciences Washington, D.C., 2004

AA.VV., *Ordinanza Presidente del Consiglio dei Ministri N.3431, Ulteriori modifiche ed integrazioni all'ordinanza del Presidente del Consiglio dei Ministri n.324 del 20 Marzo 2003, recante "Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica, 2005*

AA.VV., *D.M. 14 Gennaio 2008, Norme Tecniche per le Costruzioni, 2008*

KWON Y.W., BANG H., *The Finite Element Method Using MatLab*, CRC Press, New York, 1997.

SITI INTERNET: <http://peer.berkeley.edu>.

<http://www.taylordevices.com>

<http://www.alga.it>

<http://www.fipindustriale.it>

APPENDICE A

SOLUZIONE NUMERICA DELL'EQUAZIONE DEL MOTO CARATTERISTICA DI UN SISTEMA INDEFINITAMENTE ELASTICO LINEARE MUNITO DI UN DISSIPATORE FLUIDO-VISCOSO A COMPORTAMENTO NON LINEARE: 4 METODOLOGIE A CONFRONTO.

Come già discusso nel capitolo 2 e nel capitolo 3, l'equazione del moto di un sistema indefinitamente elastico lineare, con indice di smorzamento interno pari al 5%, munito di un dissipatore fluido viscoso a comportamento non-lineare può essere risolto soltanto per via numerica. In questa appendice risolveremo l'equazione caratteristica del problema (3.6) secondo 4 differenti metodologie, note le caratteristiche del dissipatore α ed ε ed ipotizzando una forzante armonica. Le metodologie utilizzate sono le seguenti:

- Metodo Eulero Modificato;
- Metodo proposto da Terenzi (1999);
- Metodo ricavato da funzione ODE45 sviluppata in ambiente MatLab;
- Metodo di Newmark (Accelerazione Media).

Di seguito riportiamo in forma sintetica l'algoritmo di risoluzione che ogni metodologia implementa utilizzando la seguente notazione comune: Δt è l'intervallo temporale di integrazione, l'indice k si riferisce all'intervallo temporale, l'indice i si riferisce alle iterazioni all'interno di ogni intervallo temporale, l'indice n indica il numero totale di iterazioni all'interno del k -esimo intervallo temporale, con p indichiamo la forzante esterna. L'equazione caratteristica del problema espressa al k -esimo istante di tempo, ipotizzando nullo lo smorzamento interno può essere scritta come segue:

$$(A.1) \quad m\ddot{u}_k + c \operatorname{sgn}(\dot{u}_k) |\dot{u}_k|^\alpha + ku_k = p_k$$

METODO PROPOSTO DA TERENZI (1999)

Tale metodo è stato proposto da Terenzi in un suo articolo intitolato “*Dynamics of SDOF Systems with Non-Linear Viscous Damping*” pubblicato nel 1999 sulla rivista *Journal of Engineering Mechanics*. L'algoritmo riesce a stimare lo spostamento (u_{k+1}), la velocità (\dot{u}_{k+1}) e l'accelerazione (\ddot{u}_{k+1}) al tempo $k+1$, noti lo spostamento (u_k), la

velocità (\dot{u}_k) e l'accelerazione (\ddot{u}_k) al tempo k . Si procede ad una prima stima delle grandezze come segue

$$(A.2) \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \Delta t \dot{u}_k + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{u}_k \\ \dot{u}_{k+1}^1 &= \dot{u}_k + \ddot{u}_k \Delta t \\ \ddot{u}_{k+1}^1 &= m^{-1} \left[p_{k+1} - c \operatorname{sgn}(\dot{u}_{k+1}^1) |\dot{u}_{k+1}^1|^\alpha - k u_{k+1} \right] \end{aligned}$$

Successivamente il metodo prevede di implementare un processo iterativo per giungere ad una miglior stima di \dot{u}_{k+1} e \ddot{u}_{k+1} , attraverso un controllo delle accelerazioni. Riportiamo tale passaggio in termini iterativi.

$$(A.3) \quad i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{u}_{k+1}^{i+1} = \dot{u}_k + \frac{1}{2} (\ddot{u}_k + \ddot{u}_{k+1}^i) \Delta t \\ \ddot{u}_{k+1}^{i+1} = m^{-1} \left[p_{k+1} - c \operatorname{sgn}(\dot{u}_{k+1}^{i+1}) |\dot{u}_{k+1}^{i+1}|^\alpha - k u_{k+1} \right] \\ \varepsilon^{i+1} = |\ddot{u}_{k+1}^{i+1} - \ddot{u}_{k+1}^i| \end{cases}$$

Il procedimento iterativo si arresta quando $\varepsilon^{i+1} < \varepsilon$. Generalmente l'errore ε ammissibile si pone pari a 0.001. Il procedimento giunge a convergenza molto rapidamente, può essere implementato in modo piuttosto semplice in un codice di calcolo e inoltre permette un controllo ad ogni *step* dei valori delle grandezze da stimare (questa caratteristica diviene essenziale quando si desidera arrestare le analisi al giungere a regime della risposta).

METODO EULERO MODIFICATO

Il metodo di Eulero Modificato risulta essere molto simile al metodo proposto da Terenzi, ma a differenza di questo non prevede dei processi iterativi all'interno del singolo *step* temporale. Si procede inizialmente ad una prima stima delle grandezze come segue:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \dot{u}_{k+1}^1 &= \dot{u}_k + \Delta t m^{-1} \left[p_k - c \operatorname{sgn}(\dot{u}_k) |\dot{u}_k|^\alpha - k u_k \right] \\ u_{k+1}^1 &= u_k + \Delta t \dot{u}_k \end{aligned}$$

Successivamente si giunge alla stima finale delle grandezze come segue:

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \dot{u}_{k+1}^2 &= \dot{u}_k + \frac{1}{2} \Delta t m^{-1} \left\{ \left[p_k - c \operatorname{sgn}(\dot{u}_k) |\dot{u}_k|^\alpha - k u_k \right] + \left[p_{k+1} - c \operatorname{sgn}(\dot{u}_{k+1}^1) |\dot{u}_{k+1}^1|^\alpha - k u_{k+1}^1 \right] \right\} \\ u_{k+1}^2 &= u_k + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{u}_k + \dot{u}_{k+1}^2) \end{aligned}$$

Il procedimento di Eulero Modificato presenta gli stessi vantaggi del metodo proposto da Terenzi, ma in definitiva risulta giungere a convergenza più velocemente in quanto non prevede processi iterativi all'interno del singolo *step* temporale.

METODO DI NEWMARK

Il metodo di Newmark è un metodo classico della risoluzione di equazioni differenziali nel dominio del tempo. Esso presenta un buon comportamento per equazioni lineari, ma diviene piuttosto pesante nel caso di equazioni fortemente non-lineari. Le assunzioni fatte da Newmark sono le seguenti:

$$(A.6) \quad \begin{aligned} \dot{u}_{k+1} &= \dot{u}_k + [(1-\gamma)\ddot{u}_k + \gamma\ddot{u}_{k+1}] \Delta t \\ u_{k+1} &= u_k + \dot{u}_k \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}_k + \beta \ddot{u}_{k+1} \right] \Delta t^2 \end{aligned}$$

Nel nostro caso abbiamo posto $\gamma=0.50$ e $\beta=0.25$. Sostituendo le (A.6) nella (A.1), valutata al tempo $k+1$, ottengo un'equazione fortemente non-lineare la cui unica incognita risulta essere \ddot{u}_{k+1} . Quindi ad ogni *step* devo risolvere tale equazione, ottenere \ddot{u}_{k+1} e infine attraverso le (A.6) ricavo gli altri termini incogniti. La soluzione della equazione fortemente non-lineare risultante si presenta computazionalmente onerosa, per cui si ha una convergenza più lenta rispetto ai metodi illustrati in precedenza.

METODO FUNZIONE ODE45 (sviluppata in una sub-routine del software MATLAB)

Il software Matlab, prodotto dalla The MathWorks Inc., propone alcune sub-routine per la risoluzione delle equazioni differenziali nel dominio del tempo. Per le nostre analisi si è scelto di utilizzare una funzione denominata ODE45 che è basata

sulla formula di Runge e Kutta. Come i precedenti è un solutore *one-step*, in quanto per stimare la risposta ad un determinata *step* necessita solo della conoscenza della risposta allo *step* precedente. La funzione riceve in input oltre ai dati caratteristici della forzante e del sistema, anche l'intervallo temporale totale di integrazione. Tale aspetto è risultato piuttosto limitante quando si desidera interrompere le analisi al raggiungimento dello stato di regime nel caso di forzante armonica.

Al fine di testare i 4 metodi illustrati abbiamo proceduto a risolvere l'equazione del moto (3.6) per un problema fortemente non-lineare in 3 zone limite dello spettro, rappresentato in questo caso dal rapporto tra la frequenza della forzante e la frequenza propria del sistema: $\Omega/\omega=3.00, 1.00, 0.30$.

CASO1: $\Omega=3\text{sec}^{-1}$, $\omega=1\text{sec}^{-1}$, $\alpha=0.30$, $\varepsilon=0.50$.

Riportiamo i grafici della risposta del sistema, a regime, in termini di spostamenti e di velocità.

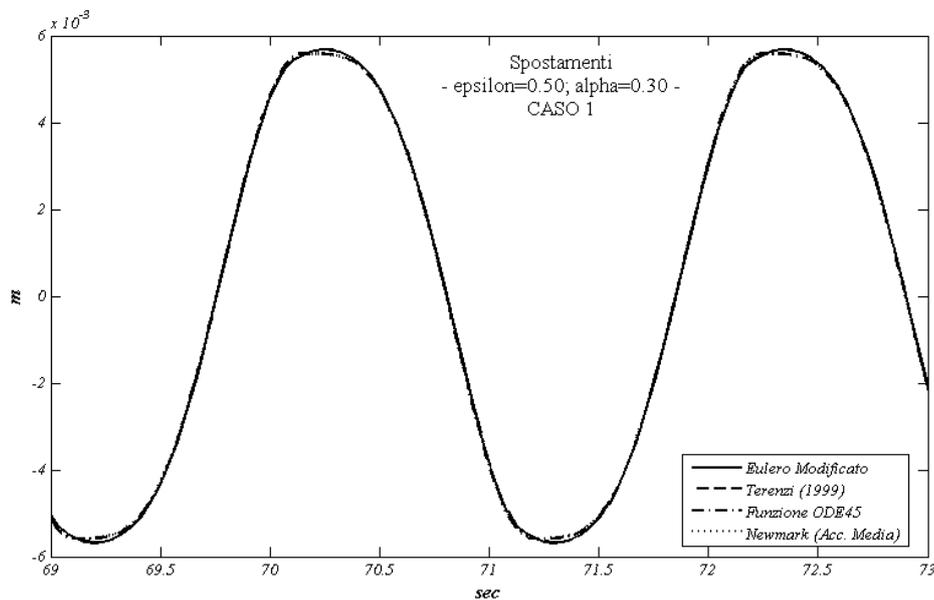


Fig A.1 Spostamenti a regime CASO 1

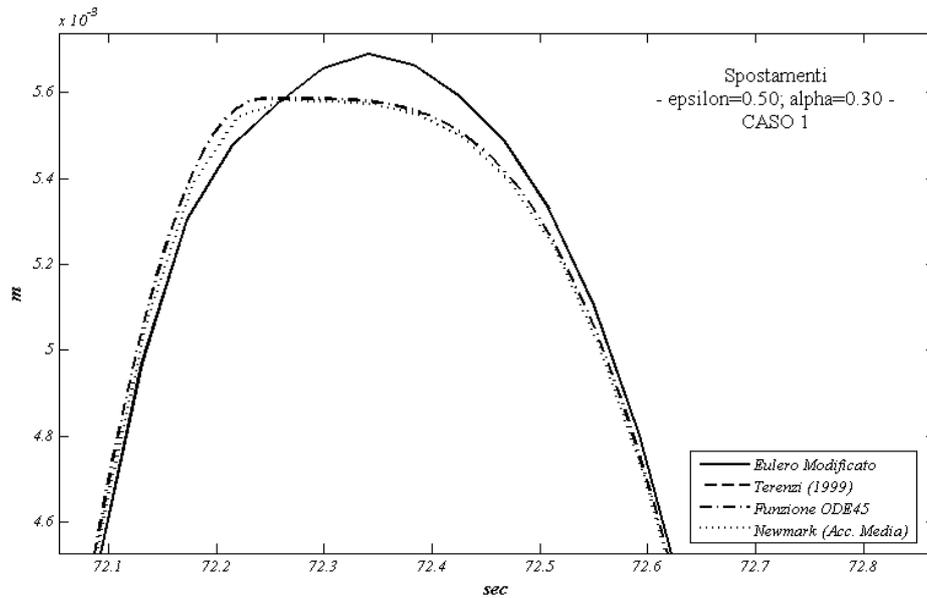


Fig A.2 Zoom Spostamenti massimi a regime CASO 1

Questi grafici mostrano che anche in caso di forte non-linearità nel comportamento del dissipatore, i valori massimi degli spostamenti a regime risultano molto prossimi. Tale situazione viene evidenziata anche nel transitorio. Questo risultato avvale la bontà della scelta del Metodo di Eulero Modificato che tra i metodi esaminati è quello che converge più velocemente e che ci permette di studiare più agevolmente la risposta a regime. Analizziamo la risposta in termini di velocità.

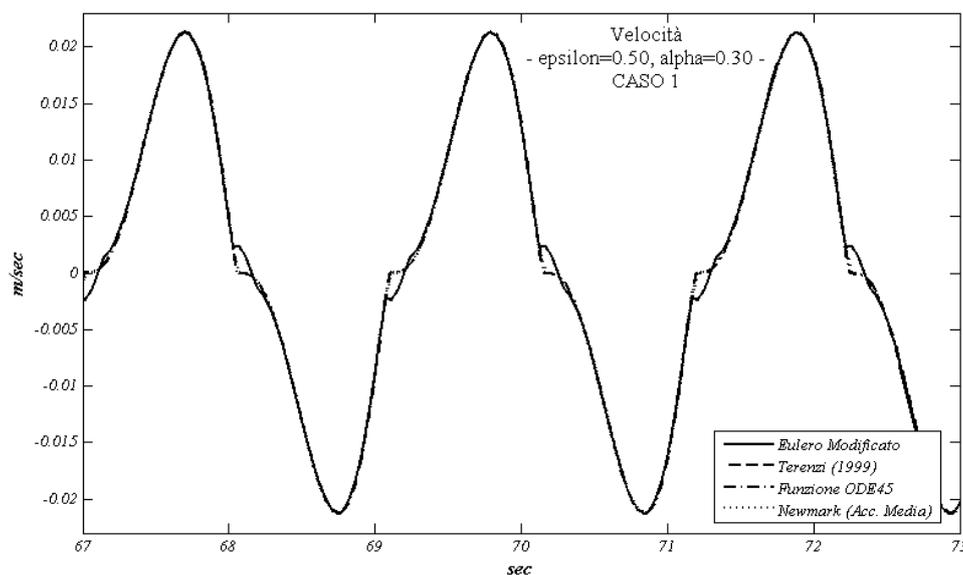


Fig A.3 Velocità a regime CASO 1

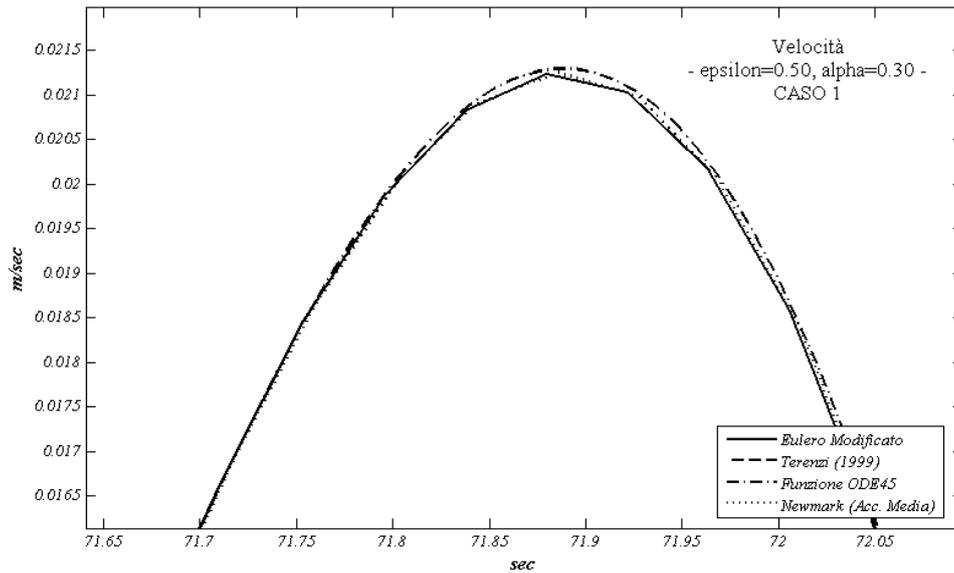


Fig A.4 Zoom Velocità massima a regime CASO 1

I grafici riportati mostrano come ancora una volta i valori massimi riprodotti dai 4 metodi analizzati siano assolutamente paragonabili. Tutti i metodi analizzati mettono in evidenza una cuspidè in prossimità del cambiamento di segno della velocità.

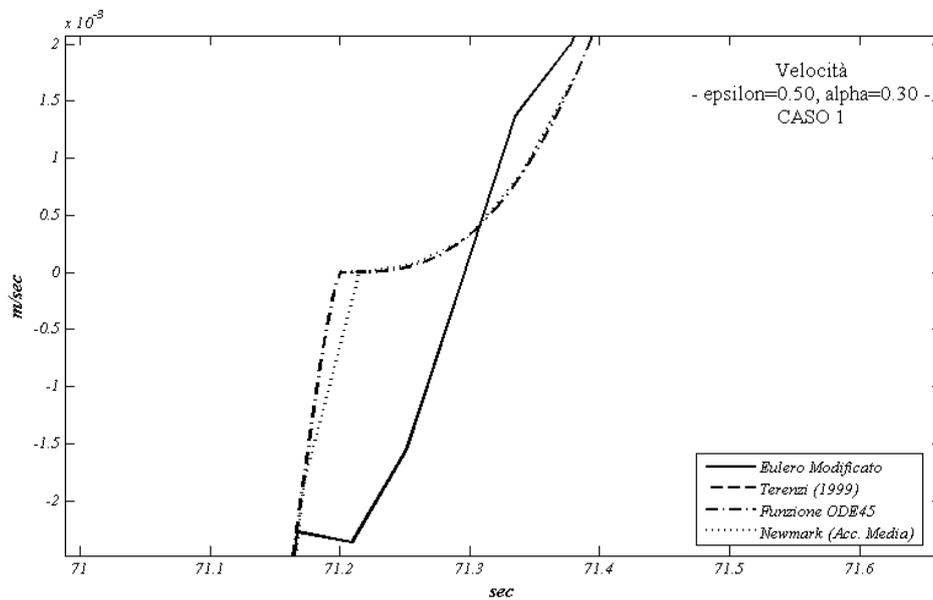


Fig A.5 Zoom Velocità in prossimità Valore Nullo a regime CASO 1

CASO2: $\Omega=1.0\text{sec}^{-1}$, $\omega=1\text{sec}^{-1}$, $\alpha=0.30$, $\varepsilon=0.50$.

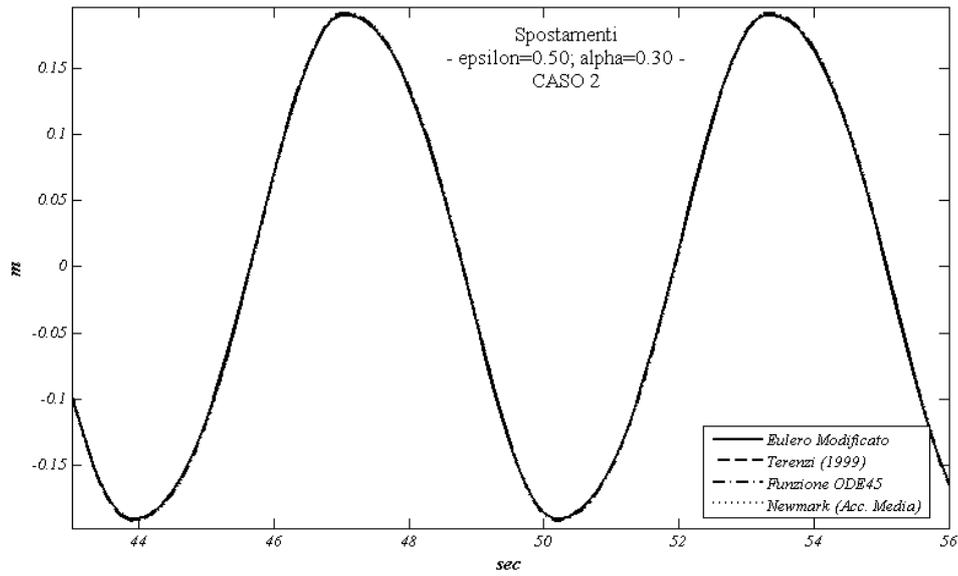


Fig A.6 Spostamenti a regime CASO 2

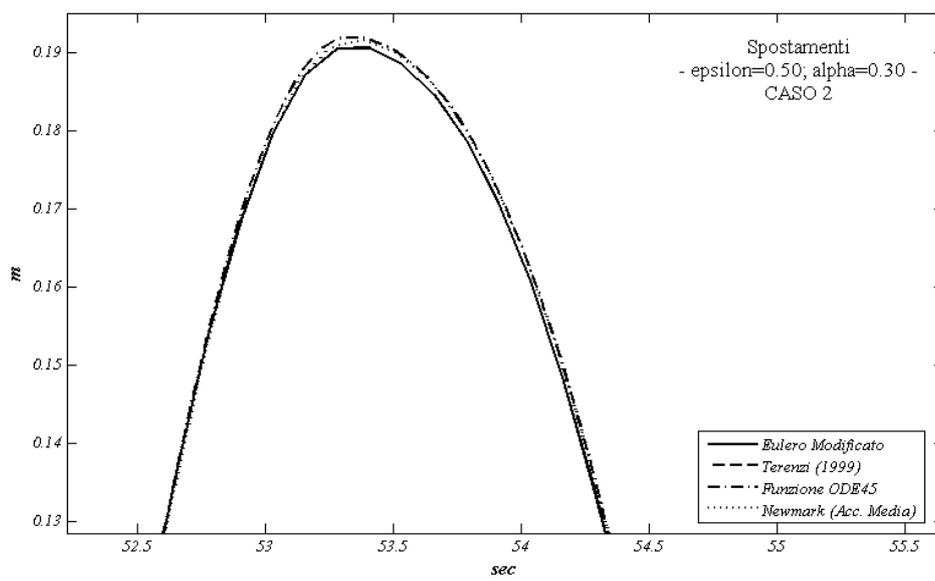


Fig A.7 Zoom Spostamenti massimi a regime CASO 2

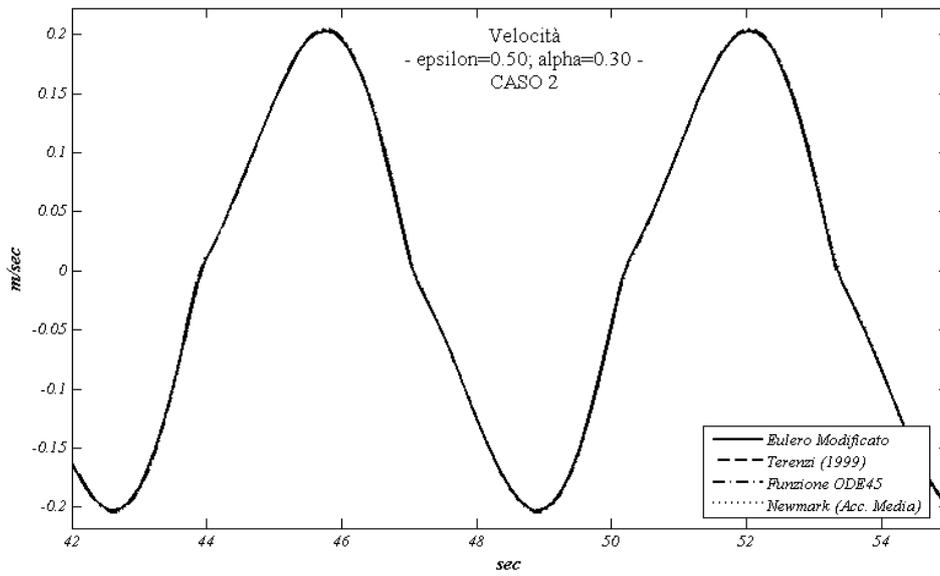


Fig A.8 Velocità a regime CASO 2

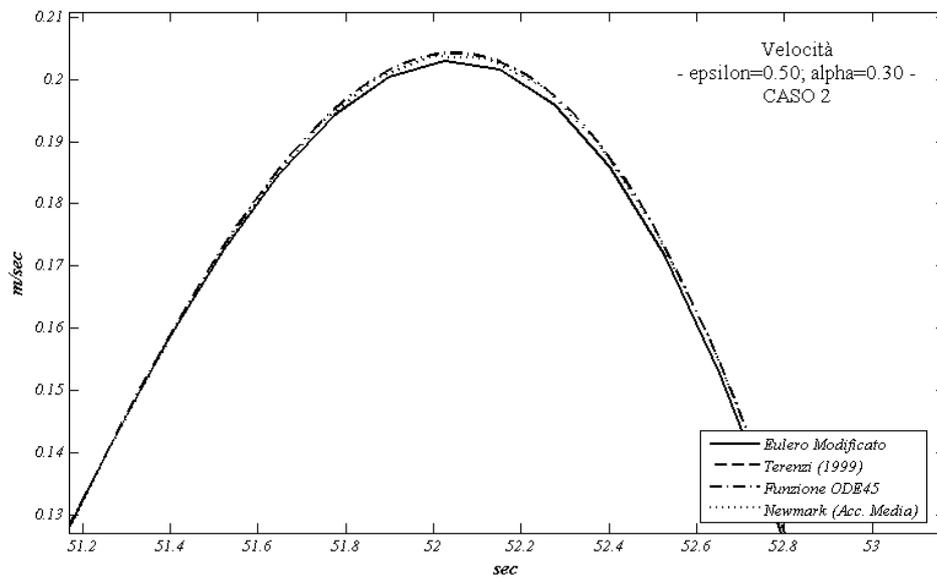


Fig A.9 Zoom Velocità massima a regime CASO 2

CASO3: $\Omega=0.3\text{sec}^{-1}$, $\omega=1\text{ sec}^{-1}$, $\alpha=0.30$, $\varepsilon=0.50$.

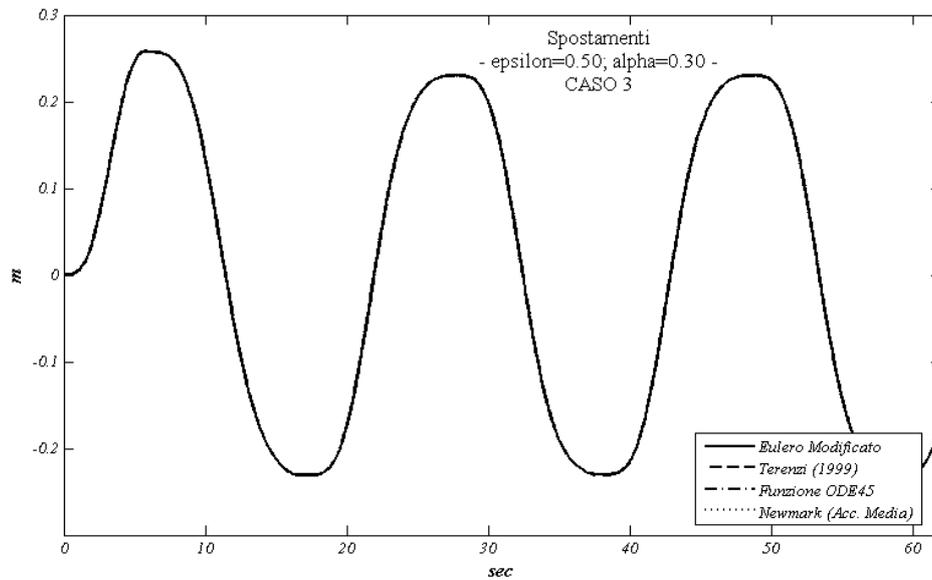


Fig A.10 Spostamenti a regime CASO 3

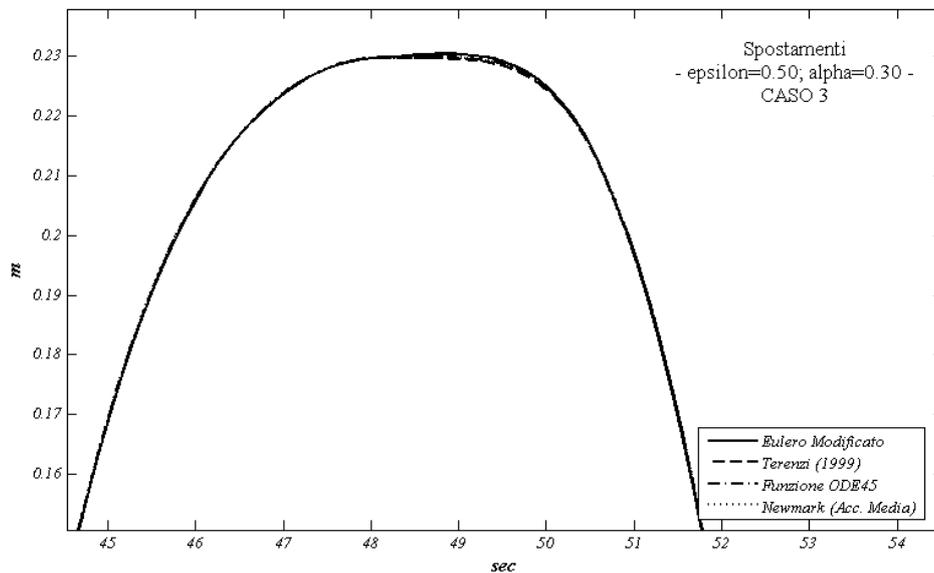


Fig A.11 Zoom Spostamenti massimi a regime CASO 3

I grafici mostrano ancora una volta un buon accordo tra i risultati. Riportiamo di seguito l'andamento della velocità.

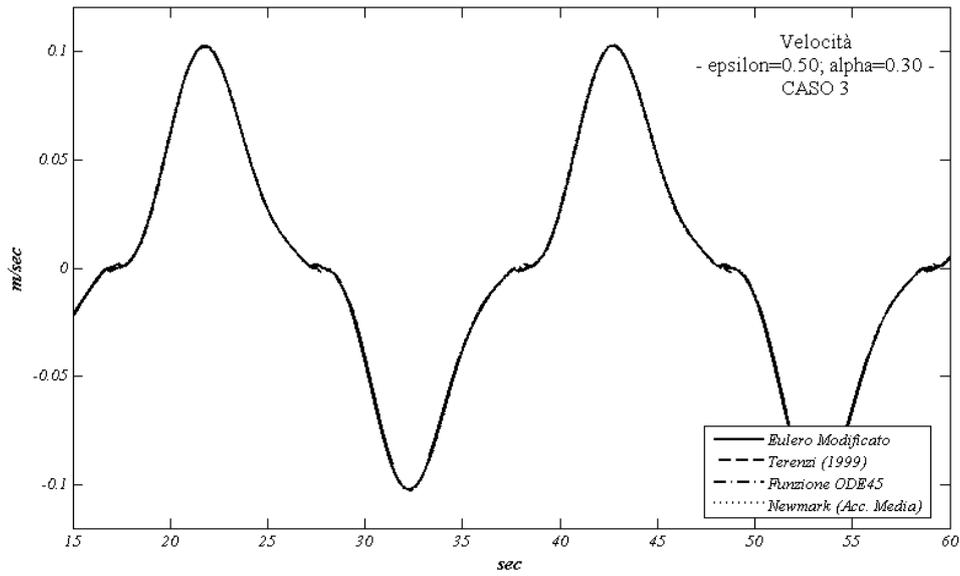


Fig A.12 Velocità a regime CASO 3

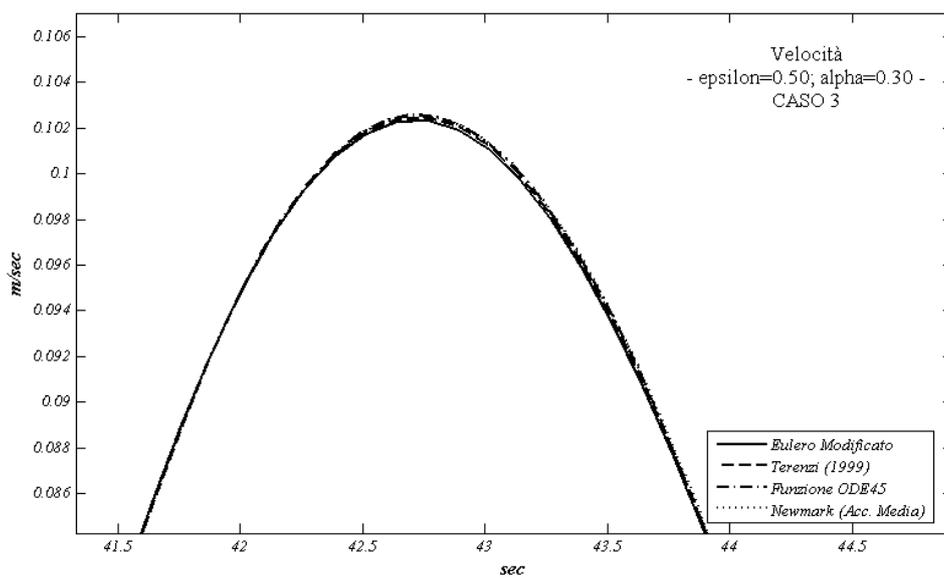


Fig A.13 Zoom Velocità massima a regime CASO 2

Anche in questo caso si evidenzia il medesimo comportamento evidenziato nel caso 1 in prossimità del valore nullo della velocità.

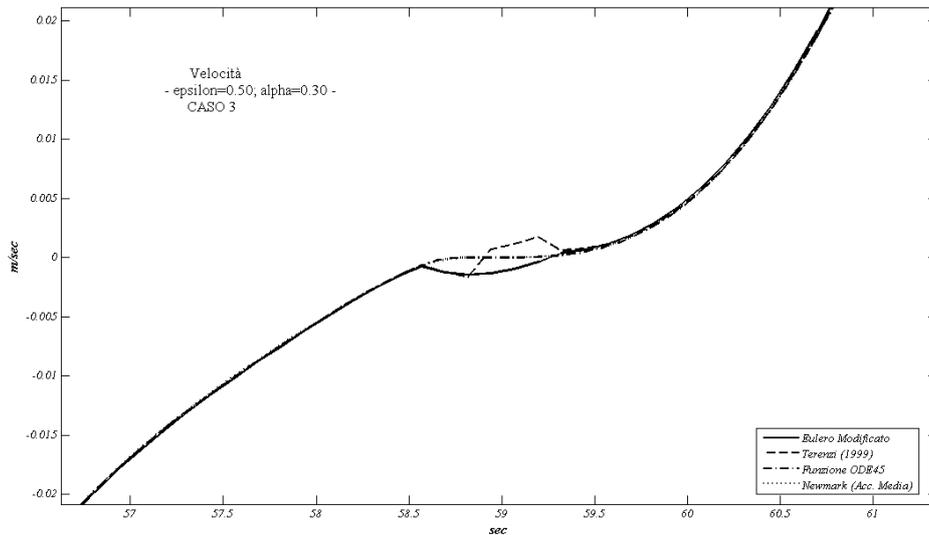


Fig A.13 Zoom Velocità in prossimità Valore Nullo a regime CASO 3

In conclusione è possibile affermare che tutti i metodi analizzati riproducono in modo molto simile la risposta e che quindi la scelta effettuata nella tesi di adottare il Metodo di Eulero Modificato, per la risoluzione numerica dell'equazione del moto, risulta assolutamente lecita. Inoltre nel caso di problema lineare tutti i metodi analizzati riproducono la medesima risposta, e che questa risulta essere esattamente coincidente con quella derivata dalla risoluzione in forma chiusa dell'equazione del moto caratteristica.

APPENDICE B

DIMOSTRAZIONE DELLA LINEARE DIPENDENZA DELLA RISPOSTA DI UN SISTEMA AD UN GRADO DI LIBERTA' ELASTICO-LINEARE DOTATO DI DISSIPATORE VISCOSO NON-LINEARE ALLA AMPIEZZA DELLA FORZANTE.

In termini analitici si tratta di dimostrare che la soluzione dell' equazione (2.18) dipende linearmente dall'ampiezza della forzante. Procediamo per passi successivi:

1. Riscriviamo l'equazione (2.18) per una forzante qualsiasi:

$$(B.1) \quad \ddot{u} + 2\xi_0 \omega \dot{u} + 2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} (\omega u_0)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha + \omega^2 u = -\ddot{u}_g(t)$$

E' possibile pensare la forzante in questo modo: $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_0 g(t)$, dove \ddot{u}_0 è l'ampiezza della forzante e $g(t)$ è una funzione nel dominio del tempo che presenta un valore massimo pari ad 1.00 (in valore assoluto).

2. Introduzione di una nuova variabile. Possiamo introdurre una nuova variabile come segue:

$$(B.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \frac{u}{u_{ST}} = \frac{u}{\ddot{u}_0} \omega^2 \\ \dot{\bar{u}} = \frac{\dot{u}}{u_{ST}} = \frac{\dot{u}}{\ddot{u}_0} \omega^2 \end{array} \right.$$

Con u_{ST} si intende lo spostamento del sistema, se a questo venisse applicata in modo statico la forzante con la sua ampiezza massima.

3. Equazione del moto nella nuova variabile. Per riscrivere l'equazione del moto (B.1), in funzione della la nuova variabile, devo dividere ambo i membri della (B.1) per u_{ST} , ricordando che $u_{ST} > 0$ e che $\operatorname{sgn}(\dot{u}) = \operatorname{sgn}(\dot{\bar{u}})$. In questa operazione l'unico termine che necessita di una analisi più puntuale è quello relativo al dissipatore che può essere riscritto come segue:

$$(B.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} (\omega u_0)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha}{u_{ST}} = \frac{2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} (\omega u_0)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{u}) |\dot{u}|^\alpha}{u_{ST}^{1-\alpha} u_{ST}^\alpha} = \\ & = 2\xi_{sd} \kappa^{-1} \omega^{2-\alpha} \left(\frac{u_0}{u_{ST}} \right)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}\left(\frac{\dot{u}}{u_{ST}}\right) \left| \frac{\dot{u}}{u_{ST}} \right|^\alpha = 2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} (\omega \bar{u}_0)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{\bar{u}}) |\dot{\bar{u}}|^\alpha \end{aligned} \right\}$$

Pertanto è possibile riscrivere la (2.1*) come segue:

$$(B.4) \quad \ddot{\bar{u}} + 2\xi_0 \omega \dot{\bar{u}} + 2\xi_{sd} \omega \kappa^{-1} (\omega \bar{u}_0)^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(\dot{\bar{u}}) |\dot{\bar{u}}|^\alpha + \omega^2 \bar{u} = -\omega^2 g(t)$$

Il primo membro della (B.4) presenta la stessa forma e gli stessi coefficienti moltiplicativi della (B.1). L'equazione (B.4) differisce dalla (B.1) solo per la nuova variabile incognita introdotta e per la quantità al secondo membro. La (B.4) mette in evidenza che la nuova variabile \bar{u} sia indipendente da \ddot{u}_0 , in quanto questo termine non compare più. Ricordando la (B.2), si vede che se l'ampiezza della forzante \ddot{u}_0 raddoppia, mantenendo inalterata la frequenza naturale del sistema ω , affinché il valore di \bar{u} rimanga costante deve necessariamente raddoppiare il valore di u . Si conclude che la variabile u della (B.1) deve essere linearmente dipendente da \ddot{u}_0 .