Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

DOTTORATO DI RICERCA IN

MATEMATICA

Ciclo XXVII

Settore Concorsuale di afferenza: A01/A1

Settore Scientifico disciplinare: MAT/04

L'effetto "età della Terra". Contratto didattico e principi regolativi dell'azione degli studenti in matematica.

Presentata da: **Dott.ssa Federica Ferretti**

Coordinatore Dottorato **Relatore**

Prof.ssa Giovanna Citti Prof. Giorgio Bolondi

Esame finale anno 2015

Composizione grafica a cura dell'Autore

Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos'è sapere (...) abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione.

(Clanché, 1994).

Indice

Ad Alessandro,
compagno di vita che crede in me e
che mi dà la forza per andare avanti,
ogni giorno.

Introduzione

Questa ricerca ha la sua lontana origine nella sperimentazione condotta per la tesi specialistica in matematica, durante la quale sono emerse evidenze di contratto didattico anche in studenti che possiedono una conoscenza della matematica più avanzata e formalizzata rispetto alla maggior parte dei casi presenti in letteratura.

All'interno di questo problema molto generale- *come si può manifestare il contratto didattico in studenti "grandi", alle prese con matematica più avanzata*- questa tesi ha poi quindi preso le mosse dall'analisi di un fenomeno didattico osservato in due valutazioni standardizzate dell'apprendimento in matematica, effettuate in Italia sugli studenti della classi seconde delle scuole secondarie di secondo grado. Il fenomeno oggetto d'indagine è stato classificato inizialmente dai ricercatori, in maniera generica, con le categorie del contratto didattico. La prima fase di questa ricerca ha cercato di chiarire come e in che misura quanto rilevato fosse effettivamente riconducibile alle categorie del contratto didattico e, a livello quantitativo, cercare di misurare quanto questo effetto sia effettivamente diffuso e radicato. Successivamente, mediante un'analisi di tipo qualitativo, si è cercato di comprendere le caratteristiche e le dinamiche della manifestazione del fenomeno e di interpretare le cause che determinano l'atteggiamento degli studenti.

La struttura della tesi è la seguente. Il primo capitolo riporta la problematica didattica da cui è nata la ricerca, le caratteristiche tecniche del contesto della rilevazione standardizzata e descrive il fenomeno osservato, con un'analisi dei risultati delle domande della valutazione standardizzata, dal punto di vista statistico e misuratorio e riporta infine le prime interpretazioni che sono state date di questo fenomeno. Viene analizzata un'altra situazione in cui si osservano evidenze del medesimo comportamento degli allievi e vengono riportate le prime interpretazioni della situazione tramite principalmente il costrutto di didattica della matematica del contratto didattico nel senso di Brousseau. Viene proposta una definizione dell'*effetto* osservato e del *principio regolativo* che lo determina.

Nel secondo capitolo viene presentata la letteratura scientifica relativa ai principali costrutti teorici utilizzati per l'interpretazione dei dati emersi dall'analisi quantitativa e delle interviste effettuate. In dettaglio, le negoziazioni che avvengono tra insegnante e allievo, all'interno della classe, e tra l'allievo e il contesto istituzionale generale vengono analizzate in termini di gioco didattico, contratto didattico, costume didattico e norme sociomatematiche. Vengono esplicitate le caratteristiche di ognuno di questi costrutti e le relazioni che intercorrono tra essi, mettendo in luce come ognuno di essi possa avere delle valenze specifiche per poter interpretare il fenomeno in questione sono più aspetti di vista. Il fenomeno si è presentato in una valutazione standardizzata, di cui vengono presentate le principali caratteristiche. Alla luce dei costrutti analizzati vengono riformulate le domande di ricerca, esplicitando gli obiettivi di indagine.

Nel terzo capitolo viene illustrata la metodologia di indagine e vengono presentate le caratteristiche della sperimentazione implementata per rispondere alle domande di ricerca; in particolare, si descrive lo strumento di rilevazione e come sia stato costruito per cercare di eliminare eventuali effetti di disturbo o distorsioni, e di verificare se lo stesso fenomeno era osservabile in altri livelli scolastici, su altri contenuti, in consegne coinvolgenti altri registri semiotici. L'impianto metodologico è suddiviso principalmente in due fasi: somministrazione di questionari e interviste (a gruppi di studenti che hanno partecipato all'indagine, e individuali).

Il quarto capitolo riporta i risultati dei questionari e delle interviste (sia individuali che di gruppo), e le interpretazioni di questi risultati.

Nell'ultimo capitolo vengono messe in luce alcune implicazioni didattiche e problemi aperti per possibili ricerche future.

.

Capitolo primo
Il fenomeno osservato nelle valutazioni standardizzate

1.1. Inquadramento della ricerca

Il punto di partenza di questa tesi è un fenomeno didattico che è stato osservato in due valutazioni standardizzate nazionali dell'apprendimento in matematica, effettuate in Italia sugli studenti del livello scolastico 10 (secondo anno della scuola secondaria di II° grado). Il risultato, abbastanza sorprendente, è stato immediatamente classificato dagli insegnanti e dagli osservatori, in maniera generica, con le categorie del contratto didattico: presenta infatti alcune analogie con il famosissimo effetto "età del capitano" (Baruk, 1985; D'Amore et al, 2010). In primissima approssimazione, il comportamento degli allievi sembra indicare che essi hanno difficoltà ad accettare, in una problema di matematica, che la risposta alla consegna coincida con uno dei dati forniti nel testo.

Questo pone tuttavia diverse questioni per le quali è necessario un approfondimento. La prima questione è di chiarire se e come quanto osservato è effettivamente riconducibile all'idea di contratto didattico. La seconda è di comprendere le caratteristiche e le dinamiche di manifestazione del fenomeno, e di proporre quindi una analisi anche qualitativa dello stesso, complementare all'indiscutibile dato quantitativo. Un altro problema infine è di capire quanto sia diffuso e radicato questo effetto.

L'idea di contratto didattico, nella sua formulazione originale e nella maggior parte degli sviluppi teorici e applicativi che ha avuto in questi trent'anni, si propone in una ottica interazionista e interpersonale (Sarrazy, 1995) e coinvolge i tre attori coinvolti durante l'attività matematica: l'insegnante, l'allievo e il sapere in gioco. Il fenomeno osservato, come peraltro anche molti altri fenomeni che vengono ricondotti all'effetto "età del capitano", si manifesta invece come un comportamento caratteristico che, generato da situazioni d'aula, rimane proprio del rapporto tra l'allievo e la disciplina, vissuto nella prassi della istituzione scolastica.

Si è quindi in presenza di manifestazioni diverse dello stesso comportamento, diversi *avatars* dello stesso fenomeno, con caratteristiche che ne permettono l'interpretazione attraverso diversi costrutti, a seconda del livello di generalità in cui lo si rileva.

Ci sono diversi approcci teorici che, da lenti differenti, possono aiutare a mettere a fuoco il fenomeno osservato. Un primo punto di vista è l'approccio classico ai problemi legati al contratto didattico, nel momento in cui si osserva il risultato "sublimato" dell'interazione docente-allievo:

> L'intervento del professore modifica le condizioni di funzionamento del sapere, condizioni che fanno parte anche di ciò che l'allievo deve apprendere. L'oggetto finale dell'apprendimento è che l'allievo possa far funzionare il sapere in situazioni nelle quali l'insegnante non è presente (Brousseau 1988, p.322).

Per far questo si possono utilizzare il quadro delineato da D'Amore, Font e Godino (2007) e la prospettiva socio-culturale di

Bagni e D'Amore (2005). In particolare, sembra necessario fissare il significato di diversi termini (seguendo D'Amore, 2008) - entrati in modo talvolta disordinato nell'uso comune - che verranno utilizzati nel corso dell'analisi, come "effetto", "clausola", "situazione" di contratto.

Il fenomeno può essere visto anche come un *coutume* del microsistema classe (Balacheff, 1988), nel momento in cui c'è qualcosa che viene discusso, condiviso ed eventualmente accettato esplicitamente dagli allievi, in situazioni di attività, lavori o interviste di gruppo (come quelle che sono state effettuate nel corso della sperimentazione) che poi rimane a livello personale (come mostrano le interviste di gruppo e individuali analizzate in seguito).

L'effetto è stato peraltro osservato nel contesto di una valutazione standardizzata, e lo studio sperimentale è stato costruito svincolando, per quanto possibile, gli allievi dal contesto didattico specifico. Si è rilevata così la persistenza del fenomeno in un contesto istituzionale allargato. Un contributo fondamentale alla comprensione di questa "metamorfosi" degli effetti di contratto, e di questo nuovo *avatar* del fenomeno, viene quindi dalle teorie dei sistemi sociali, seguendo un approccio analogo a quello di Sierpinska, Bobos e Knipping (2008), che utilizzano la strumentazione (in termini di *norms* e *rules*) sviluppata da Ostrom (2005). Appare infatti necessario considerare le caratteristiche della noosfera e in particolare il ruolo delle regole e delle norme nell'istituzione in cui avviene l'interazione tra allievo, docente e matematica. Come vedremo dettagliatamente in seguito, una possibile clausola soggiacente all'effetto osservato appare come una norma sociomatematica (nel senso di Yackel e Cobb, 1996) unilaterale e distorta.

L'ultimo *avatar* del fenomeno, a livello di generalità, si ha quando la clausola è diventata una norma interiorizzata, con una propria autonomia e solidità, che regola il rapporto dell'allievo con la matematica stessa. Si è quindi realizzato uno *switching* dal lato "allievo-docente" (sul quale si posizionano alcuni effetti di contratto didattico - basti pensare all'*effetto Topaze* o all'*effetto Jourdain* (D'Amore et al, 2010)- del triangolo di Chevallard (Chevallard, 1985), al lato "allievo-sapere" dello stesso triangolo.

Da tutti questi punti di vista, l'effetto osservato (denominato "età della Terra") si presta ad essere un buon caso per lo studio del problema generale della "trasformazione in norma" delle situazioni di contratto didattico.

1.2. Le valutazioni standardizzate

Questa ricerca nasce da evidenze presenti nei risultati di alcune domande proposte nelle valutazioni standardizzate nazionali per la matematica. La procedure di analisi e restituzione dei risultati effettuate dall'INVALSI offrono la possibilità di guardare tali risultati con una lente molto potente, e suggeriscono (come nel nostro caso) domande precise riguardo ai macro-fenomeni di comportamento degli studenti di fronte a una consegna matematica, e in definitiva riguardo alle caratteristiche del loro apprendimento e in particolare alle dinamiche e alle cause delle loro difficoltà.

1.2.1. Le Prove INVALSI

L'INVALSI è l'Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e di Formazione italiano e ha diversi obiettivi e diverse mansioni; tra gli altri, quello di condurre *verifiche periodiche e sistematiche sugli apprendimenti degli studenti*. Queste verifiche, le cosiddette *Prove INVALSI*, mettono spesso in luce fenomeni "di sistema" nel comportamento degli studenti. Riteniamo quindi necessario una breve premessa sulle caratteristiche matematiche generali delle prove ed esporre brevemente le caratteristiche tecniche di analisi e restituzione dei risultati.

Ogni anno l'INVALSI, attraverso il sistema delle Rilevazioni Nazionali, ha il compito di valutare gli apprendimenti degli studenti in italiano e in matematica attraverso la preparazione e somministrazione di prove specifiche disciplinari.

Le prove vengono somministrate in tutti gli ordini scolastici italiani e le classi in cui avviene la somministrazione, ad oggi, sono la II^a e la V^a della Scuola Primaria, la III^a della Scuola Secondaria di Primo Grado e la II^a della Scuola Secondaria di Secondo Grado. In fase di avanzata sperimentazione è la prova per il V anno della Scuola Secondaria di Secondo Grado.

La costruzione delle prove è frutto del lavoro di insegnanti di matematica (attualmente circa 150) ed esperti con formazioni diverse tra loro (disciplinari, statistiche, pedagogiche, ..); richiede tempistiche piuttosto lunghe (circa 18 mesi, a causa della necessità di testare le prove un anno prima della loro somministrazione, nello stesso livello scolastico) durante le quali si effettuano analisi qualitative ex ante la costruzione e somministrazione (field trial) dei pre-test, e quantitativa e qualitative ex post. Infine avviene la messa a punto e la somministrazione delle prove definitive con conseguente raccolta, analisi e restituzione alle scuole dei dati.

1.2.2. Gli strumenti statistici di analisi e restituzione dei dati

All'interno delle valutazioni standardizzate, gli aspetti misuratori rivestono un ruolo cruciale e trovano nel metodo statistico una loro fondatezza scientifica.[1] Analogamente a quanto avviene in altre rilevazioni nazionali e internazionali quantitative sugli apprendimenti, l'INVALSI utilizza metodi e tecniche statistiche validate

[1] Si veda ad esempio: Fallocci, N., Gnaldi, M., Matteucci, M., Mignani, S., (2010), Working paper n.09/2010: "La Validazione Statistica di test standardizzati di profitto: principali aspetti di metodo e due casi di studio sulla valutazione degli apprendimenti nella scuola primaria", INVALSI.

all'interno della letteratura del settore. Attraverso le caratteristiche psicometriche degli item si analizzano le risposte degli studenti cercando di identificare eventuali item la cui funzione misuratoria non funziona correttamente. Quantificando il numero di alunni che rispondono correttamente o omettono le risposte e quanti alunni scelgono ciascun distrattore si cerca di misurare la difficoltà dell'item, caratterizzare le opzioni più o meno scelte e discriminare gli alunni secondo il loro livello di abilità rispetto la prova. La difficoltà di una prova viene anzitutto valutata basandosi su premesse teoriche e sul giudizio degli esperti. In secondo luogo tramite l'analisi statistica e le teoria classiche dei test, l'Item Response Theory (IRT) e la Rasch Analysis[2], che considerando le percentuale di risposte corrette fornite dagli studenti non solo effettuano valutazioni sulla difficoltà di una prova, ma ne misurano anche la coerenza e l'adeguatezza generale.

Fondamentalmente, il modello utilizzato (modello di Rasch) permette di ordinare sulla stessa scala la difficoltà degli item di una prova (misurata attraverso la percentuale di studenti che rispondono correttamente) e l'abilità degli studenti (misurata attraverso il numero di risposte corrette).

[2] Per un approfondimento teorico e metodologico delle teorie dei test *Item Response Theory* e *Rasch Analysis* si veda, ad esempio, Barbaranelli C., Natali E, *I test psicologici: teorie e modelli psicometrici*, Carrocci Editore, Roma, 2005.

[3] Il Rapporto Tecnico delle Rilevazioni Nazionali degli apprendimenti 2013-14 si trova al seguente link:
http://www.invalsi.it/areaprove/rapporti/Rapporto_tecnico_Rilevazioni_Nazion

Come si legge nel Rapporto Tecnico delle Rilevazioni Nazionali degli apprendimenti 2013-14[3]:

La possibilità di ordinare sullo stesso *continuum* sia la difficoltà degli item sia l'abilità degli studenti è molto importante dal punto di vista interpretativo poiché consente di comprendere quali e quanti sono gli allievi che mostrano livelli di apprendimento superiori o inferiori alla difficoltà di una determinata domanda o di un insieme di quesiti, e per conseguenza di comprendere ciò che questi allievi conoscono e sono in grado di fare. Risulta quindi evidente la grande potenzialità di questa metodologia anche dal punto di vista didattico e per la promozione di azioni volte al miglioramento che possono essere realizzate dalle singole scuole.

Nei modelli IRT è possibile rappresentare ciascun item tramite una *curva caratteristica* che esprime l'idea della difficoltà intesa come un indice di posizione (INVALSI, 2014).

1.2.3. La curva caratteristica di un item

Le domande della prova Invalsi sono state costruite e analizzate, come le domande delle valutazioni internazionali sugli apprendimenti in matematica IEA-TIMSS e OCSE-Pisa, utilizzando l'Item Response Theory (IRT). Questo approccio permette di specificare la relazione tra le caratteristiche delle singole domande (e della prova nel suo complesso) e le capacità individuali dei soggetti (e il comportamento complessivo della popolazione).

[3] Il Rapporto Tecnico delle Rilevazioni Nazionali degli apprendimenti 2013-14 si trova al seguente link:
http://www.invalsi.it/areaprove/rapporti/Rapporto_tecnico_Rilevazioni_Nazionali_2014.pdf

Questo approccio definisce un modello con il quale è possibile prevedere a livello probabilistico la risposta del singolo soggetto a uno specifico item, in funzione della sua abilità misurata dalla prova nel suo complesso. Questa funzione è la *curva caratteristica dell'item*.

L'approccio del modello, che porta alla costruzione per ogni item della curva caratteristica, comprende due azioni fondamentali: la calibrazione (cioè la stima delle proprietà misuratorie delle domande) e lo scoring (cioè la stima delle abilità degli individui).
La capacità misuratoria di ciascun item è analizzata mediante un modello statistico che stabilisce la coerenza di ciascuna opzione di risposta rispetto all'oggetto (il costrutto) specifico di valutazione, nonché rispetto alla difficoltà del quesito e al livello di abilità dei rispondenti. In questo quadro, un elemento fondamentale è la capacità discriminatoria del quesito, cioè la capacità del quesito di distinguere gli allievi in funzione della loro abilità complessiva.

Le assunzioni fondamentali alla base del modello utilizzato dalle valutazioni standardizzate sono l'unidimensionalità dell'abilità latente misurata e l'indipendenza locale degli item.

Per ogni domanda, il modello restituisce una relazione tra le risposte (cioè il risultato) e i parametri della domanda (difficoltà, discriminatività). In particolare, la relazione ipotizzata dal modello è una regressione di tipo logistico, rappresentata da una curva logistica. La probabilità di rispondere correttamente ad un item viene spiegata in funzione del livello di abilità del soggetto e dai parametri della domanda, attraverso una curva logistica detta Item Characteristic Curve.

La difficoltà dell'item è il punto della scala di abilità in cui la probabilità di risposta corretta è uguale a 0.5, mentre la variabile de*l latent trait* è definita dal punteggio complessivo del test, e in presenza di prove tra di loro ancorate è indipendente dalla difficoltà della prova specifica che viene somministrata. In questo senso, i risultati delle valutazioni standardizzate permettono di misurare sulla stessa scala studenti di coorti diverse che effettuano prove diverse in anni diversi.

Tecnicamente, la costruzione avviene nel seguente modo. In generale, i modelli di regressione logistica cercano di spiegare la probabilità di accadimento di un evento (in questo caso, la probabilità di risposta corretta ad un item) in funzione di una insieme di variabili esplicative. La variabile dipendente Y considerata in questi modelli è *dicotomica*: nel nostro caso, alla modalità di risposta corretta all'item j-esimo viene assegnato il valore 1 e ai casi restanti il valore 0.

$$\mathrm{Y_j} = \begin{cases} 0 & \textit{risposta errata} \\ 1 & \textit{risposta corretta} \end{cases}$$

Nel modello la stima della variabile dipendente Y_j è ottenuta da una combinazione delle variabili esplicative X_i:

$$Y_j = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n + \varepsilon$$

$$Y_j = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

Nell'*Item Response Theory* la relazione tra la variabile indipendente e le variabili esplicativi è di tipo probabilistico e viene quindi utilizzata una trasformazione mediante una funzione logistica. La probabilità dell'evento "risposta corretta all'item Y_j" viene quindi fornita da una funzione del tipo

$$\lambda = P(Y_j = 1 | X) = \frac{\exp(\alpha + \beta X)}{1 + \exp(\alpha + \beta X)}$$

Nel modello logistico di Rasch, utilizzato dall'indagine OCSE-Pisa e dall'INVALSI, il parametro fondamentale considerato (oltre all'*abilità* del soggetto, denotata con θ) è la *difficoltà* dell'item, denotata con *b*, definita come

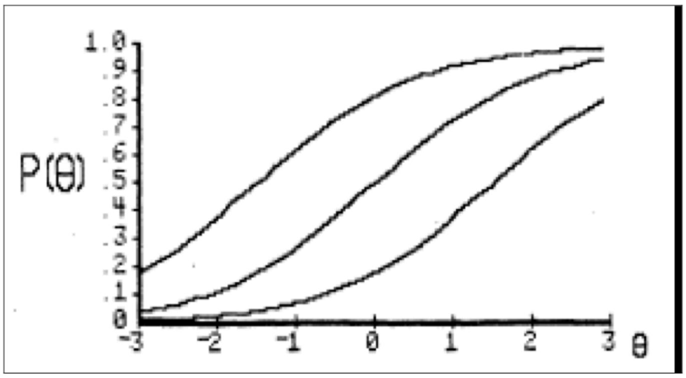
b = livello di abilità necessario perché il soggetto abbia il 50% di probabilità di rispondere correttamente alla domanda.

Dall'equazione generale si ricava dunque il modello logistico ad un parametro utilizzato nelle valutazioni standardizzate dell'apprendimento in matematica:

$$\lambda = \frac{\exp(\theta - b)}{1 + \exp(\theta - b)}$$

Si può osservare a questo punto che l'altra grande indagine internazionale sugli apprendimenti in matematica, l'IEA-TIMSS, utilizza un modello a tre parametri in cui è presente anche il parametro **a** della discriminatività (cioè la capacità di un item di discriminare tra individui con diversi livelli), e il *guessing*, **c**, un parametro che tiene conto della possibilità che soggetti con abilità bassa possano rispondere correttamente tirando a indovinare

Per esemplificare la lettura di una curva caratteristica verrà analizzata la figura seguente (Fig. 2) che mostra la curva di tre item caratterizzati dal medesimo potere di discriminazione, ma con differenti livelli di difficoltà.



Abilità

Fig. 2: Curva caratteristica di tre item con lo stesso potere discriminante ma con difficoltà differente (INVALSI, 2014, p.50)

La curva più a sinistra rappresenta un item "facile", in cui anche soggetti di abilità bassa hanno una probabilità abbastanza alta di rispondere correttamente; la curva al centro rappresenta un item di media difficoltà e la curva a destra rappresenta un item difficile: la probabilità di fornire la risposta esatta è bassa per quasi tutti i livelli della scala di abilità e aumenta solo in corrispondenza di livelli molto alti di abilità. I tre item hanno peraltro tutti lo stesso potere discriminante.

In questi tre item, il 50% di probabilità di rispondere correttamente corrisponde a livelli di abilità diversi.

La capacità discriminante di un item è data, nel grafico, dalla tangente di flesso della curva; quanto maggiore è l'inclinazione, tanto maggiore sarà la capacità dell'item di discriminare tra soggetti con diversa abilità.

La figura 3 rappresenta curve caratteristiche di item con lo stesso livello di difficoltà, ma diverso potere discriminante.

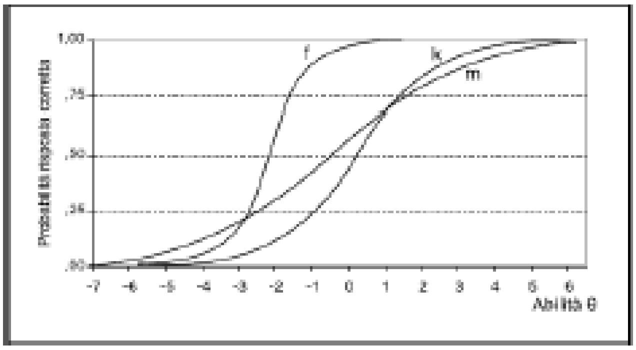


Fig. 3: Curva caratteristica di tre item con lo stesso livello di difficoltà ma con differente potere discriminante.

Nella fase iniziale di questa tesi, per individuare domande significative per la ricerca e per analizzare le caratteristiche di quelle considerate, è stato utilizzato prevalentemente questo strumento statistico, in un'ottica misuratoria del legame tra la difficoltà delle domande esaminate e le abilità degli studenti rispetto alla prova contenente le domande.

In particolare, considereremo grafici in cui sono riportate, per gli item che ci interessano, le curve caratteristiche di tutti i possibili distrattori, per poter considerare e analizzare gli errori (le scelte sbagliate) degli allievi. Tali grafici sono chiamati *distractor plot*, e si presentano in questa forma:

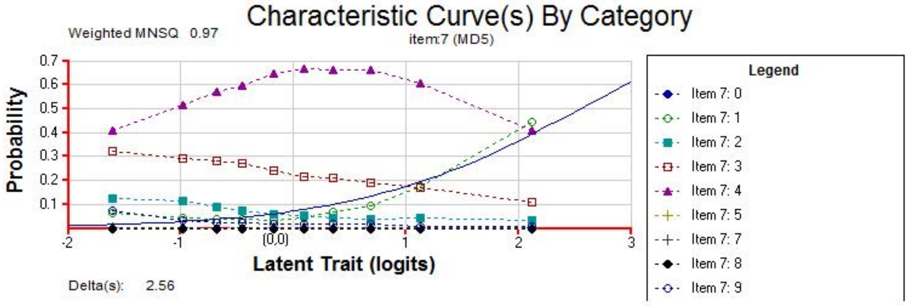


Fig. 4: Curve caratteristiche (distractor plot) relative alla domanda INVALSI D5-Livello 10, a.s. 2010/11

In questi grafici, ogni curva rappresenta la probabilità di scelta di un particolare distrattore; la risposta corretta è quella interpolata dalla curva caratteristica predetta dal modello.

1.2.4. *La valenza delle valutazioni standardizzate per la didattica della matematica*

In linea con quanto dichiarato nelle direttive ministeriali, l'analisi dei dati e il commento di essi da parte degli esperti del SNV (presenti nelle Guida alla Lettura e nei "Quaderni SNV" che si possono trovare nel sito http://www.invalsi.it/invalsi/index.php?page=snv) forniscono un quadro generale non solo del sistema scolastico, ma anche di alcune (quelle rilevabili da una prova standardizzata) difficoltà degli studenti italiani. Questi dati, sono un'ottima risorsa per chiunque si occupi di "scuola".

L'utilizzo dei dati di sistema, unitamente ai dati delle singole realtà (scuola, classe, area geografica) si sta dimostrando uno strumen

to strategico fondamentale per il miglioramento delle pratiche didattiche (Bolondi e Fandiño Pinilla, 2009).[4] In Italia, un importante progetto nazionale, il "Progetto Qualità e Merito"[5], fu organizzato proprio sull'utilizzo dei dati di una valutazione standardizzata per la definizione di un "piano di miglioramento" del processo di insegnamento/apprendimento della matematica. Diverse sperimentazioni hanno portato a definire modelli di intervento per i singoli istituti o per i singoli insegnanti basati sull'analisi delle domande e dei risultati delle Prove Invalsi (Ferretti, Lemmo e Maffia, preprint; Branchetti et al., preprint).
D'altra parte, è evidente che molte domande delle Prove Invalsi e in generale delle valutazioni standardizzate sono costruite avendo ben presente quanto la ricerca in didattica della matematica ha messo in evidenza. I risultati delle prove spesso confermano e definiscono quantitativamente la presenza di fenomeni ben conosciuti dai ricercatori, interpretabili attraverso costrutti tipici della didattica (Fandiño Pinilla, 2005; Gabellini, 2006; Paola, 2006). In tale direzione, si consiglia la lettura di "Le Prove INVALSI e la valutazione in matematica" redatto dal gruppo di lavoro ValerMath: Valutazione Emilia Romagna in Matematica, reperibile al seguente sito web:
http://www.istruzioneferrara.it/documentinew/valermath.pdf .

[4] Per un approccio più divulgativo si vedano articoli come:
Paola Bruno Longo, Discalculia o difficoltà di calcolo? Parlano le Prove INVALSI, 22 maggio 2013 reperibile nel sito www.ilsussisiario.net .

[5] Tutte le informazioni sul progetto sono reperibili al sito:
http://archivio.pubblica.istruzione.it/fondistrutturali/documenti/descrizione_piano_qualit_merito.shtml .

In certi casi i risultati delle valutazioni standardizzate rilevano a livello di sistema nuovi fenomeni che richiedono di essere studiati con gli strumenti metodologici specifici della didattica della matematica. E' quanto viene fatto in questa tesi in cui, partendo

dall'analisi combinata tra i dati quantitativi e le analisi qualitative con gli strumenti teorici della didattica della matematica, si è cercato di inquadrare il fenomeno rilevato, indagandone caratteristiche e modalità.

1.3. Il fenomeno osservato

Questa ricerca nasce dall'osservazione dei risultati di una domanda proposta in Italia nell'ambito di una valutazione nazionale standardizzata degli apprendimenti in matematica, effettuata dal Servizio Nazionale di Valutazione (SNV) dell'INVALSI nel maggio del 2011. La domanda in questione è stata somministrata in maniera censuaria ai circa 600 mila studenti italiani del livello 10, di tutti i percorsi scolastici[6] (Licei, Istituti Tecnici e Istituti Professionali). In questa popolazione era stato selezionato un campione rappresentativo composto da 43.458 studenti a cui la prova è stata somministrata in maniera controllata da un osservatore esterno e sulle cui risposte sono stati elaborati i dati. Il campione è stato scelto in modo da avere rappresentatività sia *geografica,* rispetto alle regioni italiane, sia *tipologica,* rispetto agli indirizzi di studio; le caratteristiche tecniche del campione sono descritte in Invalsi-SNV

[6] Il livello 10 in Italia è l'ultimo anno di istruzione obbligatorio. Esistono dispositivi di legge che fissano gli obiettivi di apprendimento in matematica per tutti gli studenti di tutti gli indirizzi, e all'interno di questi compaiono esplicitamente come obiettivi: "Comprendere il significato di potenza", "Il concetto di approssimazione", "Valutare l'ordine di grandezza di un risultato" (Assi culturali, 1997).

2011a e per i risultati generali della rilevazione si veda Invalsi-SNV 2011.

La domanda, che denoteremo d'ora in poi con "età della Terra" è la seguente:

D5. L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

☐ A. $4{,}5 \times 10^9$ anni

☐ B. $3{,}5 \times 10^9$ anni

☐ C. $4{,}5 \times 10^6$ anni

☐ D. $4{,}5 \times 10^3$ anni

Fig. 5: Immagine della domanda INVALSI D5-Livello 10, a.s. 2010/11

I risultati sono stati i seguenti:

Item:7 (MD5)
Cases for this item 43458 Discrimination 0.32
Item Threshold(s): 2.55 Weighted MNSQ 0.97
Item Delta(s): 2.56

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
1	1.00	4438	10.21	0.32	70.12(.000)	0.90	1.20
2	0.00	2992	6.88	-0.11	-24.05(.000)	-0.39	0.92
3	0.00	10084	23.20	-0.15	-31.01(.000)	-0.25	0.89
4	0.00	24831	57.14	0.02	4.97(.000)	0.02	0.88
7	0.00	41	0.09	-0.03	-5.55(.000)	-0.90	1.51
9	0.00	1072	2.47	-0.11	-22.17(.000)	-0.67	1.02

Tabella 1: Analisi IRT relativa alla domanda 5 del livello 10 a.s. 2010/11

Come si vede dai risultati, le risposte corrette sono state il 10,21%. La domanda è risultata buona dal punto di vista misuratorio (Discrimination Index = 0.32, Weighted MSNQ = 0.97) e decisamente difficile rispetto agli standard delle valutazioni INVALSI (Maffia, 2013) e all'interno della prova stessa (Delta(s) = 2.56) (per i dettagli dell'analisi statistica e il significato di questi indici vedi Invalsi, SNV 2011a).

Il Distractor Plot e l'Item Information Function della domanda permettono di analizzare le scelte degli allievi in funzione del loro livello di competenza (Latent Trait) così come misurato dalla prova.

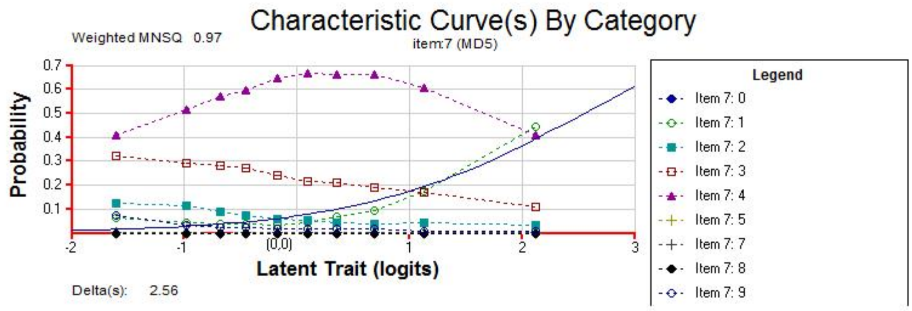


Fig. 6: Distractor Plot relativo alla domanda INVALSI D5-Livello 10, a.s. 2010/11

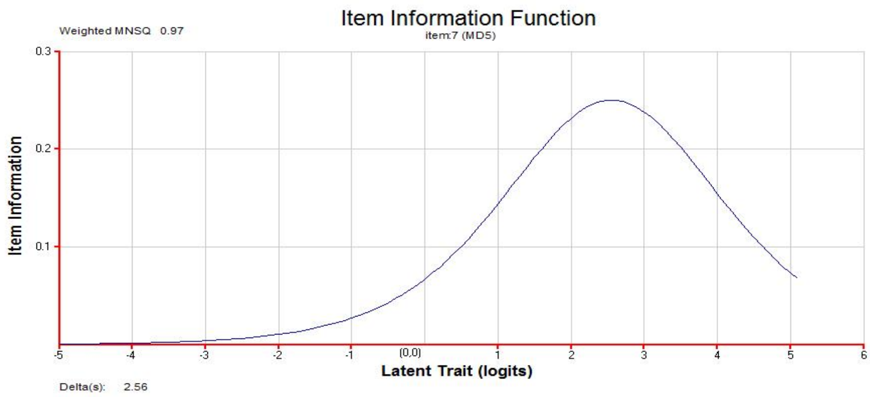


Fig. 7: Item Information relativo alla domanda INVALSI D5-Livello 10, a.s. 2010/11

In particolare è evidente che mentre il distrattore C (linea Item 7.3) è molto scelto dagli allievi situati nella parte bassa della scala di Latent Trait, il distrattore D (linea Item 7.4), in cui l'esponente del la potenza è ottenuto per sottrazione degli esponenti delle potenze presenti nella consegna, è preferito a tutti i livelli di competenza e la scelta di tale distrattore è massima per gli allievi situati nella parte medio-alta della scala. La linea 7.1, che rappresenta la risposta corretta (distrattore A, linea Item 7.1), è bene interpolata dalla curva continua prevista dal modello e questo è indice di buona misura dal punto di vista statistico. Si può osservare che la risposta corretta richiedeva esplicitamente di scegliere come risposta uno dei dati presenti nel testo della consegna.

Una situazione equivalente, dal punto di vista matematico, si è presentata nella sessione 2013 della valutazione proposta dal SNV dell'INVALSI sempre nella prova per il livello 10. La domanda è stata somministrata a 560.487 studenti delle classi seconde del secondo ciclo di ogni percorso scolastico e il campione era costituito da 38533 allievi, scelti con criteri di rappresentatività coerenti con i precedenti (Invalsi-SNV 2013, Invalsi-SNV 2013a).

D6. **Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è all'incirca $2 \cdot 10^{-27}$ kg, e un elettrone la cui massa m_e è all'incirca $9 \cdot 10^{-31}$ kg.**
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè $m_p + m_e$)?

A. ☐ $2 \cdot 10^{-27}$ kg

B. ☐ $11 \cdot 10^{-31}$ kg

C. ☐ $11 \cdot 10^{-58}$ kg

D. ☐ $18 \cdot 10^{-58}$ kg

Fig. 8: Immagine della domanda INVALSI D6-Livello 10, a.s. 2012/13

I risultati sono stati i seguenti:

Item:7 (M6)
Cases for this item 38533 Discrimination 0.37
Item Threshold(s): 1.80 Weighted MNSQ 1.00
Item Delta(s): 1.81

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
1	1.00	6893	17.89	0.37	79.08(.000)	0.72	1.16
2	0.00	3607	9.36	-0.01	-1.98(.047)	-0.04	1.02
3	0.00	12761	33.12	-0.08	-15.81(.000)	-0.10	0.82
4	0.00	12764	33.12	-0.14	-28.73(.000)	-0.18	0.82
7	0.00	70	0.18	-0.05	-9.16(.000)	-1.30	1.29
9	0.00	2438	6.33	-0.13	-26.31(.000)	-0.58	1.15

Tabella 2: Analisi IRT relativa alla domanda INVALSI D6-Livello 10, a.s. 2012/13

Come mostrano i risultati, le risposte corrette sono state il 17,89%. Analizzando le percentuali di scelta dei distrattori, l'Item Information Function e i Distractor Plot anche di questa domanda, si può vedere come i distrattori C (linea Item 7.3) e D (linea Item 7.4) in cui l'esponente della potenza è ottenuto per somma degli esponenti delle potenze presenti nel testo, sono i più scelti a livello nazionale (più del 30% di scelte ciascuno) e sono i preferiti dagli allievi a quasi tutti i livelli di competenza.

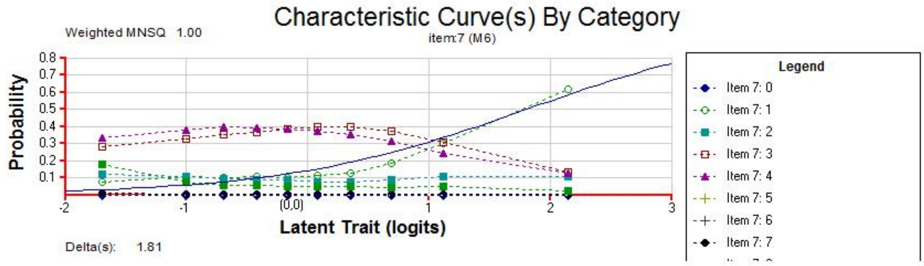


Fig. 9: Distractor plot relativo alla domanda INVALSI D6-Livello 10, a.s. 2012/13

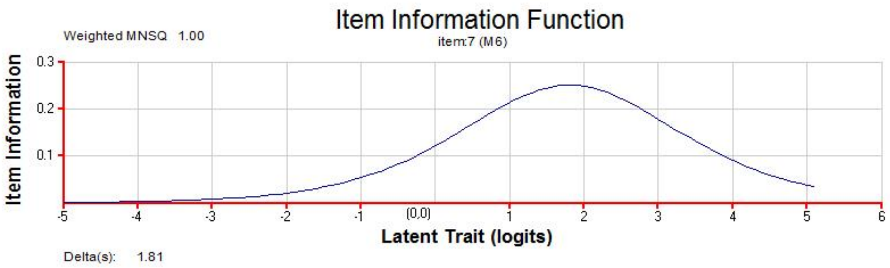


Fig. 10: Item Information relativo alla domanda D6-Livello 10, a.s. 2012/13

1.3.1. *Prime evidenze*

Le prime interpretazioni (cfr. ad es. Impedovo, Orlandoni & Paola, 2011) del fenomeno evidenziato dalla domanda "età della Terra" hanno collegato il comportamento degli allievi genericamente a effetti di contratto didattico nel senso di Brousseau (Brousseau, 1988) e alla mancanza di controllo critico sui contenuti. In particolare, il fatto che la maggior parte degli allievi nella domanda "età della Terra", il cui testo richiama intuitivamente una situazione sottrattiva, scelgano il distrattore D in cui l'esponente della potenza è la differenza degli esponenti delle potenze presenti nella consegna, mentre nella domanda Massa del protone (situazione additiva) scelgano i distrattori C e D (in cui compare la somma degli esponenti delle potenze), appare come un evidente esempio di presenza della clausola del contratto didattico denominata *delega formale* (D'Amore, 2007). In particolare il comportamento degli allievi sembra analogo a comportamenti rilevati in situazioni legate all'effetto età del capitano (Baruck, Verschaffel, Greer & de Corte, 2000). Osserviamo però un altro fatto, manifestato in entrambi i casi e che permetterà di definire l'effetto in questione: in entrambe le situazioni, la risposta corretta è uno dei dati esplicitamente presenti nel testo della domanda. In due domande somministrate agli allievi del livello 8 (terzo anno della scuola secondaria di prima grado) si trovano situazioni similari.

Nella prova Nazionale dell' anno 2012 (somministrata a 587.412 studenti) era presente una situazione in qualche modo similare.

E21. **Osserva questa moltiplicazione:**

$$\boxed{17 \cdot 36 = 612}$$

Ora scrivi il risultato delle seguenti moltiplicazioni.

a.	$17 \cdot 3{,}6$ = ...
b.	$17 \cdot 0{,}36$ = ...
c.	$1{,}7 \cdot 360$ = ...
d.	$1{,}7 \cdot 3{,}6$ = ...

Figura 1: Immagine della domanda INVALSI E21-Livello 08 PN, a.s. 2011/12

Come mostrano le percentuali di risposta (rilevate da un campione di 1304 classi, scelte con criteri di rappresentatività coerenti con i precedenti (Invalsi, SNV 2012a)), l'item *c*, in cui il risultato è uguale al risultato dell'operazione contenuta nello stimolo, ottiene un risultato sensibilmente inferiore agli altri.

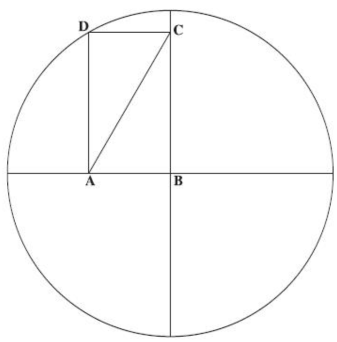
Domanda E21	Item *a*	Item *b*	Item *c*	Item *d*
Errata	13,5%	23,1%	29,2%	18,4%
Corretta	79,6%	67,8%	60%	70,8%
Non valida	0,1%	0,1%	0,1%	0,1%
Non raggiunta	0,4%	0,4%	0,4%	0,4%
Mancante	6,4%	8,6%	10,2%	10,2%

Tabella 3: percentuali di risposte relative alla domanda E21-Livello 08 PN, a.s. 2011/12

Un'altra situazione simile (in cui la risposta corretta è un dato presente esplicitamente nello stimolo) si è manifestata nella domanda D23 della prova Nazionale dell'anno 2010, somministrata in modo censuario a 595732 studenti.

Di seguito, l'immagine della domanda:

D23. La circonferenza in figura ha il raggio di 4 cm. ABCD è un rettangolo.



a. Qual è la lunghezza (in cm) del segmento $\overline{AC}$?

Risposta: ....

Figura 2: Immagine della domanda INVALSI D23-Livello 08 PN, a.s. 2009/10

Come si può osservare dall'ITN sottostante, i risultati ottenuti (sono interessanti per questa ricerca le risposte fornite all'item a) da un campione rappresentativo di 28.014 studenti (Invalsi, SNV 2011), mostrano che la percentuale di risposta corretta è il 37,4%.

item:37 (D23A_Spazio e Figure)
Cases for this item 25626 Discrimination 0.38
Item Threshold(s): 0.58 Weighted MNSQ 0.99
Item Delta(s): 0.58

Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t (p)	PV1Avg:1	PV1 SD:1
0	0.00	6818	26.61	-0.13	-21.37(.000)	-0.16	0.71
1	1.00	9570	37.34	0.38	66.68(.000)	0.35	0.76
7	0.00	3231	12.61	-0.11	-17.75(.000)	-0.21	0.69
8	0.00	222	0.87	-0.10	-15.85(.000)	-0.77	0.76
9	0.00	5785	22.57	-0.20	-31.94(.000)	-0.26	0.68

Tabella 4: Analisi IRT relativa alla domanda INVALSI D23A-Livello 08 PN, a.s. 2009/10

E' opportuno specificare che nel sistema scolastico italiano il risultato della prova del livello 08, a differenza delle prove somministrate agli altri livelli scolastici, entra nella valutazione individuale dell'allievo alla conclusione del primo ciclo d'istruzione (così come richiamato dalla C.M. 48 del 31 maggio 2012, gli esiti della Prova INVALSI concorrono alla definizione del voto finale dell'Esame di Stato). Questo rende la prova di livello 8 una prova *high stake*, e questo implica un maggior coinvolgimento e impegno degli allievi (e, solitamente, le percentuali di risposte corrette all'interno delle prove sono superiori rispetto alle percentuali di risposte corrette ottenute nelle prove degli altri livelli).

Comune a questi quattro esempi, differenti per molti aspetti di formulazione, contesto, contenuto, abilità richiesta, è la difficoltà che si manifesta quando la risposta coincide con uno dei dati di partenza, difficoltà che coinvolge inaspettatamente anche allievi di livello medio e alto. Questa situazione verrà denominata effetto " età della Terra". In particolare, le conoscenze in gioco nell'ultima domanda presentata sono nell'ambito spazio-figure; come verrà specificato anche in seguito, anche all'interno della sperimentazione sono state indagate domande inerenti a quest'ambito, ma i risultati relativi non saranno oggetto di discussione nel presente testo.

Capitolo secondo
La letteratura, l'inquadramento teorico e le domande di ricerca

2.1. La problematica e le ipotesi di ricerca

Questa ricerca si sviluppa all'interno di un quadro costruttivista, secondo il quale

> Il soggetto esplora attivamente il suo ambiente, e attivamente partecipa alla creazione di uno spazio, tempo, e causalità (Inhelder & Caprona, 1985, pag. 8).

Allo stesso modo lo studente partecipa attivamente alla costruzione della "sua" matematica.

L'apprendimento della matematica si sviluppa quindi in situazioni che sono specifiche per la natura e significative per il funzionamento della disciplina; è ormai dimostrato che è impossibile aspettarsi che lo studente riesca a ricostruire la matematica spontaneamente indipendentemente dalle interazioni libere con la noosfera. Come si legge nelle parole di Brousseau:

> Non c'è metodo naturale per l'insegnamento della matematica (Brousseau, 1972).

Si cercherà quindi di interpretare il fatto didattico oggetto di indagine in quest'ottica secondo la quale la noosfera è fondamentale per la costruzione della conoscenza da parte dell'allievo.

Il fenomeno osservato si presta ad essere descritto da differenti punti di vista, ognuno dei quali implica l'uso di una adeguata lente teorica. Di fatto, si è in presenza di un comportamento degli allievi (rilevato dall'analisi quantitativa nazionale e, come vedremo, confermato dall'indagine quantitativa della sperimentazione effettuata) che va interpretato anche in funzione del contesto in cui si manifesta. La ricerca parte dall'osservazione dell'esistenza di un mis-match tra il sapere atteso e il sapere appreso dagli studenti, l'uno misurato dalla valutazioni standardizzate nazionali e l'altro indicato dai curricoli sui quali sono costruite le valutazioni stesse. A partire da queste evidenze empiriche si è cercato di misurare l'effettiva distanza di questi due "saperi" e, successivamente, di indagarne le cause. L'ipotesi fondamentale è che si è di fronte a un comportamento dell'allievo che non è spiegabile se non presupponendo, a monte del problema e in qualche modo indipendenti da esso, che esistano dei "principi regolativi" specifici che condizionano la sua azione, accettati esplicitamente o implicitamente, dinamicamente negoziati o profondamente interiorizzati e stabilizzati.

Per essere più espliciti, con *principio regolativo* si intende un criterio organizzativo o normativo dell'azione dell'allievo che si innesta di fronte a una consegna di matematica. Come si vedrà più dettagliatamente in seguito, le situazioni d'aula sono permeate da "negoziazioni" spesso implicite che influiscono in modo determinante sui contenuti e sui meta-contenuti in gioco. Questi criteri discendono dalle interazioni di classe tra insegnante, discente e sapere in gioco, sono quindi sono certamente decisi dal *contratto didattico* (EMS-EC, 2012). Queste norme possono riguardare più strettamente meta-contenuti, generando convinzioni o regole che convalidano in generale il discorso matematico determinando così l'instaurarsi di norme sociomatematiche (Yackel & Cobb, 1996, EMS-EC, 2013) o riguardare più direttamente i contenuti coinvolti, come nel caso di molte *misconcezioni* (vedi ad esempio Sbaragli, 2005). Queste forme di organizzazione dei modelli sono dei *principi regolativi* (Garuti & Boero, 1999) che possono essere influenzati anche dalla prassi matematica della classe (è il caso del *costume didattico* di Balacheff, 1988). Come si vede da questi esempi, negli ultimi decenni sono stati proposti diversi costrutti teorici che descrivono, di volta in volta, le diverse forme di questi principi regolativi. Il quadro che viene proposto in questa tesi cerca di esplicitarne le relazioni in modo tale da poter arrivare alle possibili interpretazioni di un fenomeno che si può presentare e di fatto si presenta, come mostrano i risultati della nostra sperimentazione, in contesti e situazioni molto diverse, dove il singolo costrutto non risulta esaustivo. L'interazione o quanto meno il confronto tra teorie e costrutti diversi non è sempre agevole (come argomenta Radford, 2005), ma in questo caso è indispensabile vista l'evidente varietà di manifestazioni di uno stesso fenomeno, quasi *avatar* diversi una stessa entità.

L'effetto che si osserva può essere descritto in questo modo (di seguito si intende il termine "situazione didattica" nell'accezione classica di Brousseau, 1997):

In una situazione didattica, di fronte a una consegna gli allievi tendono a non accettare una risposta che non sia identificabile chiaramente con un risultato distinto dai dati di partenza.

Il termine "effetto" è scelto in analogia a quello utilizzato per i classici "effetti di contratto didattico" (come l'*effetto età del capitano,* Par. 2.2.2). Per brevità, l'effetto considerato verrà denominato *effetto età della Terra*.

Ipotesi di ricerca è che questo effetto dipenda da un principio regolativo (che a una prima analisi sembra discendere da pratiche d'aula) del tipo:

Il risultato di una problema o di una operazione non può essere uguale al dato di partenza.

2.2. La letteratura nazionale e internazionale. Il quadro teorico.

Di seguito verranno richiamati e approfonditi alcuni dei principali costrutti teorici che hanno permesso di inquadrare il fenomeno rilevato e, successivamente, di interpretare le risposte degli studenti fornite nelle interviste.

2.2.1. Le negoziazioni all'interno della classe vista come un Istituzione. Il gioco didattico.

Il contesto scolastico è fatto di relazioni fra allievi, docenti e gestione del sapere da parte di entrambi. Le situazioni di apprendimento sono permeate da interazioni tra lo studente e l'ambiente circostante, il *milieu*; per studiare l'apprendimento degli studenti non si può quindi prescindere dalla sua dimensione sociale.

In particolare, il processo di insegnamento-apprendimento avviene principalmente all'interno del contesto classe che, come leggiamo nelle parole della Schubauer-Leoni, non è altro che un'*istituzione*.

> Il primo passo utile per capire le dinamiche che avvengono in una classe è il fatto di considerare che la scuola oltre ad essere un luogo in cui sono presenti insegnanti, allievi (comunità di classe) e dove viene gestito il sapere, è un'*istituzione*. Le istituzioni prevedono sempre determinate norme, valori e modalità d'adesione (Schubauer-Leoni, 2005, p.5).

Il ventesimo secolo ha visto una proliferazione e una diversificazione delle teorie delle istituzioni; queste teorie spesso si differenziano per i diversi aspetti su cui si concentrano. In questa tesi si abbracciano le teorie delle istituzioni di Crozier e Firedberg (1980) e Ostrom (2005) i quali evidenziano il fatto che le istituzioni sono organismi attivi e che l'istituzione è un "azione collettiva" (Crozier & Friedberg, 1980), il più delle volte intenzionale, forzata e regolarizzata (Ostrom, 2005). Quando c'è un Istituzione, inequivocabilmente qualcuno possiede *potere*; qui il *potere* viene inteso nel senso di Ostrom per il quale

> il potere di un individuo in una situazione è il valore dell'opportunità (il range di valori possibili è dato dalla situazione) moltiplicato per la misura del controllo[7] (Ostrom, 2005, p.50).

In questo contesto il "controllo" è inteso come la probabilità che un intervento individuale possa cambiare i risultati di un'azione collettiva. Esso quindi può essere grande o piccolo, ma

[7] Trad. it a cura dell'autrice.

rimane comunque potenziale. Ad esempio, una variabile che gli studenti possono controllare, è la loro attenzione in classe. Molto spesso gli studenti non sono attenti in classe e di conseguenza le lezioni vengono interrotte. Il loro "rifiuto di ascoltare e di stare attenti" offre così in qualche modo agli studenti un certo potere sull'andamento delle lezioni. Per interpretare meglio gli effetti delle interazioni di classe, fino ad ora vista come istituzione, il concetto di potere e, di conseguenza, quello di "sanzione" sono fondamentali. Innanzitutto il potere non deve essere visto esclusivamente come qualche cosa di negativo. Anzi spesso affinché le "cose funzionino" è necessario che esso venga esercitato. Ovviamente in giusta misura e con il rispetto, che non deve mai mancare, delle norme e delle regole che determinano la situazione e in modo tale da rispettare i diritti di tutti i partecipanti. Fondamentale è considerare il fatto che le istituzioni sono artefatti sociali, non fenomeni naturali (Crozier & Friedberg 1980) e sono il risultato di consapevoli sforzi sociali e "legislativi"; non sono il frutto di comportamenti spontanei che hanno acquisito lo status di "routine" nel procedere in determinate circostanze.

La società, la classe, l'istituzione, .. si organizza per raggiungere determinati obiettivi, ottenere certi risultati (Ostrom, 2005). Gli obiettivi possono essere descritti come risultati desiderabili ma, naturalmente, un'azione collettiva avrà risultati effettivi, attesi e inattesi; desiderabili e meno desiderabili. Ad esempio l'insegnante ha degli obiettivi di apprendimento che vengono materializzati attraverso consegne . domande, problemi, esercizi che vengono proposte agli allievi.

Ci sono sanzioni per chi non partecipa all'azione comune o per chi viene a meno di seguire le regole, norme e strategie sancite (Ostrom, 2005, 139-140). Spesso, il fatto di poter essere "sanciti", come vedremo in seguito, sarà determinante per l'atteggiamento degli studenti, sia per quanto riguarda il comportamento nel contesto classe, sia per quanto riguarda più strettamente il loro rapporto con la matematica. Gli allievi occupano la posizione dei discenti e il loro diritto e dovere principale è quello di imparare. Si presuppone che i discenti posseggano meno esperienza e conoscenza dei docenti che assumono così il compito ufficiale di aiutare e guidare gli studenti nel loro processo di apprendimento. Questo insieme di relazioni per le quali l'insegnante svolge il ruolo istituzionale di guida nei confronti dello studente, richiama il concetto di lavoro istituzionale nel senso di Bourdieu secondo cui questo lavoro di istituzione indica contemporaneamente gli oggetti che devono permeare le situazioni di classe e i rapporti che gli allievi devono avere con essi (Sensevy, 1998). Le interazioni che avvengono all'interno dell'aula si possono infatti descrivere in termini di *giochi sociali*, sviluppando così una prospettiva "bourdieusiana" per interpretare il contesto classe (Bourdieu, 1992). Si può considerare l'attività umana al pari dello svolgimento di giochi. Utilizzando il concetto di gioco, si possono utilizzare i seguenti descrittori: la posta in gioco, l'investimento dei giocatori nel gioco, il "sentimento" che i giocatori provano nei confronti del gioco, i diversi tipi di capitali relativi ai diversi giochi. Attraverso il mondo dei giochi si possono così riconoscere fenomeni nel mondo sociale e attraverso le sue diverse sfaccettature si può cercare di comprendere come ci si relaziona all'interno di situazioni istituzionali. Imparare a comportarsi in una determinata parte del mondo sociale sta imparando a giocare un certo gioco in situazioni incorporati nelle istituzioni.

> Imparare a comportarsi in una specifica parte del mondo sociale è imparare a giocare un certo gioco incorporato dentro alle istituzioni[8] (Sensevy, 2010, p.1647).

[8] Trad. it a cura dell'autrice.

Seguendo ancora Sensevy (2010), le interazioni didattiche tra l'insegnante e gli allievi si possono descrivere come un tipo di gioco particolare, il gioco didattico. Quali sono le sue caratteristiche?

> Si tratta di due giocatori, A e B. B vince se e solo se A vince, ma B non deve dare direttamente la strategia vincente ad A. B è l'insegnante (il polo di insegnamento) e A è lo studente (il polo dello studiare)[9] (Sensevy, 2010, p.1647).

Questa generalizzazione del *paradosso della didattica* di Brousseau è dovuta a Sensevy. Questa descrizione permette di capire che il *gioco didattico* è un gioco collaborativo, un gioco il cui obiettivo è in comune, e si svolge all'interno di un'azione comune (Clark, 1996). Se si guarda il gioco didattico più attentamente, si nota che B (l'insegnante), per vincere, deve condurre A (lo studente) a un certo punto, a un particolare "stato di conoscenza" che permette allo studente di svolgere le "mosse giuste" all'interno del gioco; ciò permetterà all'insegnante di poter verificare che lo studente abbia costruito o meno la "giusta" conoscenza. Al centro di questo processo, vi è una condizione fondamentale: per essere sicuri che A (lo studente) ha davvero vinto, B (l'insegnante) deve rimanere tacito sulle proprie conoscenze principale del gioco (Sensevy, 2010). L'insegnante deve essere reticente per permettere allo studente costruire le conoscenze adeguate; egli deve trattenere quante più informazioni affinché lo studente agisca il più possibile a modo proprio. In accordo con l'autore, anche in questa ricerca si considera il gioco didattico, con la clausola dell'agire "a modo proprio" dello studente e la reticenza del maestro, fornisce un modello generale di interazione didattica. Considerando il *gioco didattico* la grammatica fondamentale delle interazioni didattiche, esso spesso viene caratterizzato dalla materia in questione; quan-

[9] Trad. it a cura dell'autrice.

do il contenuto diventa caratterizzante del processo di insegnamento-apprendimento diventa cruciale la nozione di contratto didattico a cui si è già accennato e che verrà sviluppato nel prossimo paragrafo. In questa prospettiva, questo gioco didattico inteso come grammatica delle interazioni didattiche si può vedere esso può essere visto come un sistema implicito di aspettative reciproche (Mauss, 1989) tra l'insegnante e gli studenti, circa la conoscenza in gioco; un sistema implicito di abitudini comuni (Dewey, 1922) su questa conoscenza, e un sistema implicito di attribuzione reciproca delle intenzioni (Baxandhall, 1985). Come si vedrà in seguito, queste idee richiamano fortemente i costrutti di didattica della matematica di contratto didattico e costume didattico.

Da un lato l'ambiente è un contesto cognitivo, come un terreno comune, che prevede le aspettative e le attribuzioni di intenti che fanno affidamento al contratto didattico. Da questo punto di vista, l'ambiente è un sistema di significati condivisi che rende possibile l'azione congiunta. Ma questo tipo di descrizione non è abbastanza efficiente per fornire una buona comprensione del processo di insegnamento-apprendimento. Si deve riconoscere che, al fine di imparare, gli studenti devono incontrare un ambiente antagonista (che, come si vedrà in seguito, Brousseau ha chiamato *situazioni adidattiche*), una sorta di resistenza alla loro azione, che è anche una resistenza all'azione congiunta. Così questa nozione si riferisce alla parte di conoscenza che gli studenti non possono assimilare direttamente, che resiste alle loro abitudini, e che impedisce loro di giocare il gioco giusto. Il modo in cui l'ambiente fornisce una tale resistenza può essere capito (o non) a priori dal docente, e anche modellato da un ricercatore. È importante notare che incontrando la resistenza del ambiente richiede una certa presa di coscienza. Infatti, sperimentando questa resistenza, gli studenti diventano consapevoli di quello che non sanno, e da lì nascerà in loro la necessità di colmare questo gap (Sensevy, 2010).

Nel paragrafo successivo verrà effettuato un breve excursus fra le diverse sfaccettature assunte in questi anni dal concetto di contratto didattico; verrà esplicitata la posizione assunta in questa ricerca e verranno indagati i suoi legami con le norme sociomatematiche.

Un'analisi di queste relazioni dal punto di vista ontosemiotico, con particolare riferimento alle teorie di Font e Godino è contenuta in D'Amore, Font e Godino (2007).

2.2.2. Il contratto didattico

Il concetto di contratto didattico nasce da studi da G. Brousseau, effettuati in Francia alla fine del 1970, volti ad indagare le cause dell'insuccesso, in particolare dei *fallimenti elettivi*, degli studenti in matematica (IREM Bordeaux, 1978). Questa idea viene sancita definitivamente nel 1981, in uno studio effettuato dallo stesso Brousseau con Pèrez, nel quale gli autori riferiscono le osservazioni effettuate sul caso Gaël (Brousseau & Pèrez, 1981; Brousseau & Warfield, 1999), divenuto dopo di allora molto famoso. Durante la prima fase della sperimentazione i ricercatori hanno descritto la conoscenza in matematica di Gaël, un bambino di 8 anni, come un prodotto totalmente dipendente da regole più o meno implicite dell'interazione tra il bambino e l'ambiente circostante, in particolare l'insegnante. Per Gaël, la conoscenza non ha altro significato che "un'attività rituale che si ripete attraverso modelli" e che in continuazione evoca l'autorità pedagogica del maestro (Sarrazy, 1995). Il bambino, infatti, in luogo di esprimere la propria conoscenza riferendosi al suo oggetto, la esprime solo in termini che coinvolgono il suo insegnante, e sia le sue capacità strategiche sia le sue competenze non sono mai le "sue" ma sono “quel che la maestra ha detto di fare” e “quel che la maestra gli ha insegnato” (D’Amore, 1999). Pertanto, lo scopo dei ricercatori durante gli incontri successivi è stato quello di provocare un cambiamento della concezione di Gaël e a poco a poco il bambino è riuscito a cambiare il suo ruolo all’interno della situazione e ad accettare di implicarsi nella risoluzione dei problemi assegnatoli. Gaël tenta di padroneggiare l'incertezza delle situazioni senza "rifugiarsi" dietro gli algoritmi o le procedure che devono essere applicate, come faceva prima, ma adattando la sua conoscenza ai vincoli della situazione a-didattica (Brousseau, 1997). Ed è in questo contesto interattivo e definito sulla base di tre elementi – l’insegnante, lo studente e la conoscenza – che G. Brousseau definisce il contratto didattico come

> l'insieme dei comportamenti (specifici della disciplina) che si aspetta lo studente e l’insieme dei comportamenti degli studenti che sono attesi dal docente (Brousseau, 1980a, p. 127).

Questo concetto, certamente di spirito francese (si pensi a Jean-Jacques Rousseau e al suo Contratto Sociale[10]), venne riconosciuto ed entrò presto a far parte del linguaggio condiviso dell’intera comunità internazionale. Il termine “contratto” non era nuovo in letteratura: agli inizi degli anni ‘70, Jeanine Filloux (1973) lanciò l’idea di *contratto pedagogico*. L’idea di Brousseau nasce all’interno del contesto degli studi in questo campo dell’epoca nei quali si sentiva sempre di più l’esigenza di differenziare gli studi in ambito sociologico in base alla specificità della conoscenza in gioco. In-

[10] Il contratto didattico è strutturalmente analogo al contratto sociale di J. J. Rousseau: il contratto sociale permette di comprendere teoricamente le condizioni di esistenza di rapporti tra un individuo e un gruppo, senza che questo contratto venga effettivamente stipulato; tutto avviene come se questo accordo apparente fosse stato firmato tempo fa. Questo avviene anche tra i soggetti di tutte le situazioni didattiche.

fatti, il termine "didattica della matematica" appare per la prima volta in Francia intorno al 1974 come un nuovo campo teorico basato sullo studio dei fenomeni di insegnamento/apprendimento specifico della matematica all'interno di situazioni scolastiche. Gli studi sugli insuccessi in matematica rientrano in questo ambito, e affermano la specificità e la rilevanza delle ricerche in didattica della matematica; negli studi di Brousseau vengono indagate infatti problematiche relative alla matematica le cui cause non sono affatto scollegate dal processo di apprendimento/insegnamento, ma anzi costitutive di esso (Brousseau, 1980a,b). Il contratto didattico è quindi una interpretazione degli impegni presunti, delle aspettative reciproche, e delle sanzioni previste da uno dei protagonisti di una situazione didattica per lui o se stessa e per ciascuno degli altri, strettamente legati alla conoscenza matematica in gioco (Brousseau & Otte, 1989; Brousseau, 1997).

L'importanza delle aspettative reciproche tra insegnante e studente può essere illustrata mediante diversi episodi per i quali l'idea di contratto didattico offre una adeguata chiave di lettura (si può trovare una ricca rassegna in D'Amore et al, 2010 e in Sarrazy, 1995).

Viene illustrato qui di seguito un famoso episodio, noto nella comunità dei didatti sotto il nome di effetto "età del capitano" e dal quale prende spunto l'idea e il nome dell'effetto oggetto di questa tesi. Alla fine degli anni 1970, i ricercatori dell'IREM di Grenoble (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) proposero la seguente consegna ad alcuni studenti della scuola primaria: "In una nave ci sono 26 pecore e 10 capre. Quanti anni ha il capitano della nave?" 76 studenti su 97 hanno calcolato l'età del capitano combinando i numeri presenti nel testo da qualche operazione come addizione o sottrazione. Nel corso degli anni, in diversi paesi sono state utilizzate diverse versioni di questo problema (si veda ad esempio Verschaffel, Greer & de Corte, 2000), “adattato” in base al livello scolastico. Nella maggior parte dei casi è stato osservato un comportamento degli studenti analogo a quello rilevato dai primi ricercatori; è stato notato che i loro atteggiamenti sono governati dalla convinzione secondo cui i dati numerici nel testo di un problema/esercizio in matematica devono essere utilizzati nei calcoli e che la risposta corretta debba necessariamente derivare da questi calcoli. La maggior parte degli studenti non cercano di dare un senso alla consegna e manca completamente un controllo critico della situazione, mancanza molto probabilmente dovuta alla totale fiducia nel fatto che l’insegnante consegni un problema “che abbia senso” e “che si possa risolvere”. In questa situazione, come in molte altre rilevate in letteratura, gli studenti spesso rispondono “non quello che pensano”, ma quello che “pensano che l’insegnante si aspetti loro rispondano”. Il contratto didattico è un costrutto teorico inventato proprio per interpretare questo e ad altri fenomeni derivanti dal rapporto tra allievo, docente e matematica.

Nello specifico, sviluppando l’idea originaria di Brousseau, è comunemente inteso come l'insieme degli obblighi reciproci e "sanzioni", che ciascun partner nella situazione didattica impone o a cui crede di essere sottoposto, rispetto alle conoscenze matematiche in gioco.

Il contratto didattico può essere quindi il risultato di una "trattativa", spesso implicita, del modo di stabilire le relazioni nel contesto classe; si può considerare anche come l’insieme di “obblighi” del docente rispetto alla società che ha delegato alla sua persona la legittimità didattica.

Esso non è un vero e proprio contratto, perché spesso non è esplicito, né liberamente accettato; inoltre, né le condizioni in cui si rompe, né le modalità e le difficoltà per farlo rompere possono essere condivise in anticipo, in quanto la sua natura didattica dipende dalla conoscenza ancora sconosciuta degli studenti.

Inoltre, questo costrutto è spesso soggetto a situazioni paradossali: tutto ciò che gli insegnanti fanno per far si che gli studenti adottino gli atteggiamenti e i comportamenti desiderati, tende a diminuire le sicurezze degli studenti, e li priva sempre più delle condizioni necessarie per la comprensione e l'apprendimento della matematica. Se l'insegnante dice o fa capire quello che lei/lui vuole allo studente, esso otterrà solo l'esecuzione di un ordine, e nessun processo di costruzione di conoscenza consapevole da parte degli studenti. Ma anche lo studente è di fronte a un fatto paradossale: lo studente è consapevole del fatto che il docente conosce la procedura di risoluzione corretta; quindi, secondo contratto didattico, il maestro le/gli insegnerà le soluzioni e le strategie di risposte corrette, lui / lei non li stabilisce per se stesso / se stessa e quindi non coinvolgerà la conoscenza matematica necessaria e non se ne approprierà. Cruciale per l'apprendimento degli studenti è infatti la *devoluzione*, il processo di responsabilizzazione da parte dell'allievo che "rompe" il contratto didattico e impegna la sua responsabilità nell'attività cognitiva in gioco, accettandone le conseguenze (Bolondi & Fandiñio Pinilla, 2012). Originariamente Brousseau (1996) definisce questo processo in termini più legati all'insegnante, colui che fa accettare all'allievo la responsabilità della situazione, accettando lui stesso le conseguenze di questo transfer cognitivo. Diversi autori (Perrin & Glorian, 1994; D'Amore, 2002) spiegano i diversi motivi del non innescarsi della devoluzione: mancanze in termini di utilizzazione e messa in discussione delle conoscenze, di affidabilità delle procedure con conseguente distoglimento dall'obiettivo principale; lacune nella capacità di lettura e interpretazione di situazioni problematiche con la messa in campo di letture selettive con l'unico scopo di dare risposte immediate. Ed è durante il processo di devoluzione che si viene a creare la situazione paradossale vista sopra, strettamente legata al contratto didattico e per la quale lo studente da un lato non deve accettare che sia l'insegnante a insegnare la matematica ma se ne deve appropriare e dall'altro se rifiuta ogni informazione fornitagli, allora la relazione didattica si rompe. Ottimale sarebbe che lo studente accettasse la relazione didattica ma che la considerasse provvisoria e che si sforzasse, al momento opportuno, di staccarsene.

> Più il professore (...) svela ciò che desidera, più dice all'allievo precisamente ciò che deve fare e più rischia di perdere le possibilità di ottenere e di constatare oggettivamente l'apprendimento al quale, in realtà, deve mirare (Brousseau, 1983b, p. 315).

Come si legge in Bolondi e Fandiñio Pinilla (2012) questo paradosso va a pari passa con il *paradosso della credenza*:

> Credetemi, ma non credete, imparate a sapere che cos'è sapere (...) abbiate fiducia in me per non dover più avere fiducia in me, ma nella vostra ragione (Clanché, 1994, p. 224).

E i due autori aggiungono:

> Questa idea dell'apprendimento come rischio personale, come impegno, come implicazione diretta dell'allievo è un po' il cardine attorno al quale ruota tutta l'impostazione che stiamo cercando di descrivere e che si manifesta con la rottura (voluta) del contratto (Bolondi & Fandiñio Pinilla, 2012, p.74).

Pertanto, insegnare significa creare le condizioni in modo tale che possa emergere qualche cosa di nuovo (Sarrazy & Novotna, 2013); ed è proprio la creazione di situazioni che consentiranno agli studenti di cercare nuovi modi di risolvere i problemi che deve essere centrale per il lavoro dei docenti. Come asseriscono i due autori, questa creazione da parte dello studente non si basa su reiterazione di algoritmi insegnati, ma su modi unici e innovativi di usarli. Quindi, oggetto di interesse, non è tanto la creazione stessa ma le condizioni sociali, pedagogiche e didattiche (caratteristiche della matematica) di questa creazione. Una delle manifestazioni di apprendimento diventa la capacità degli studenti di proporre soluzioni originali a problemi nuovi; come si è già visto è ovvio che l'insegnante non può insegnare (almeno non direttamente) questa capacità di creare nuove situazioni.

Come si è già visto, nelle prime interpretazioni del fenomeno didattico di partenza (Par. 1.2) si fa riferimento in particolare a una clausola del contratto didattico: la *clausola di delega formale*. Questa clausola del contratto didattico è ben sintetizzate nelle parole di D'Amore (2002):

> Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che... disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico (D'Amore, 2002, p.6).

Come si vedrà in seguito, questa clausola sarà una buona chiave di lettura anche degli atteggiamenti degli studenti intervistati in questa ricerca. Un'altra clausola che come si vedrà, risulterà molto valida in questo senso, è la *clausola di esigenza di giustificazione formale*. Si trova una buona descrizione esemplificatrice di essa in D'Amore e Sandri (1998), in cui i due autori, commentando l'atteggiamento di una alunna, definiscono così questa clausola:

Dopo aver dato la risposta (Giovanna) più intuitiva al quesito, alcuni allievi entrano in conflitto: la loro risposta a questo problema, quella che a loro viene spontanea, nella lingua materna, è formalmente assai diversa da quelle standard cui sono abituati dal contratto didattico. In queste risposte standard è forte una clausola del contratto didattico che richiede di esplicitare le operazioni che hanno condotto dal testo alla risposta (anzi, il bambino sa bene che questo è un passaggio essenziale e critico, perché è lì che si addensano di solito gli eventuali errori rilevati dall'insegnante). Dunque, dopo aver dato la risposta in modo intuitivo con una sola battuta a parole, essi sentono la necessità di scrivere alcune operazioni nelle quali appaiono i dati numerici del testo: solo la presenza di qualche calcolo sembra ridare la dignità necessaria al loro compito. (Vedremo che nella scuola media questa esigenza è sentita maggiormente che non nella scuola elementare).

Chiameremo questa clausola del contratto didattico: *esigenza della giustificazione formale* (egf). L'esigenza è tale non per un bisogno intrinseco dell'allievo, ma per una sua interpretazione del modello generale di problema e di comportamenti al riguardo, che si suppongono attesi da parte degli insegnanti (e dunque dei ricercatori che vengono comunque assimilati ad insegnanti) (D'Amore & Sandri, 1998).

Come si vedrà in seguito in questa tesi e come si è visto in Bolondi et al. (2015), questa esigenza è sentita anche da studenti che frequentano la scuola secondaria di secondo grado.

2.2.3. *Il costume didattico in relazione al contratto didattico*

Nelle situazioni d'aula il docente, oltre ad avere come obiettivo la formazione di ogni singolo studente, ha anche la responsabilità di assicurare l'omogeneità e la coerenza della costruzione della conoscenza a livello di classe. Senza l'omogeneità, il funzionamento didattico della classe sarebbe impossibile (Balacheff, 1988a). Seguendo l'ipotesi costruttivista della conoscenza, tale omogeneizzazione può essere prodotta solo in termini di interazione sociale. Brousseau (1972, 1981) ha descritto le forme fondamentali che questa interazione sociale può assumere all'interno del processo di insegnamento/apprendimento della matematica nell'ambito della teoria delle situazioni didattiche. Il concetto di *coutume didactique* è ben inquadrato nel lavoro Balacheff (1988a) nel quale l'autore analizza i risultati di uno studio sperimentale (Balacheff, 1988b). In esso, esamina i vincoli didattici collegati alle caratteristiche sociali delle situazioni didattiche, in particolare il problema della natura e dei mezzi della loro regolazione. Innanzitutto, secondo l'autore, con il termine *devoluzione* non si intende solo il processo secondo il quale ogni studente si appropria del problema, ma anche il momento in cui tutta la classe riconosce il problema e viene adottata quindi una responsabilità collettiva. Questa socializzazione è una condizione necessaria per l'esistenza della devoluzione in una situazione didattica: è tutta la comunità d'aula che deve essere coinvolta. La sequenza di attività analizzate dal ricercatore è basata sulla creazione di un certo tipo di interazione sociale che richiede agli studenti l'assunzione della responsabilità della "verità in gioco" e di giocare quindi una partita in cui l'insegnante non è più colui che "possiede il sapere". Questo tipo di interazione sociale può essere descritto da un insieme di regole quasi sempre implicite, che determinano le relazioni tra gli studenti, tra gli studenti e l'insegnante e tra tutti i partner umani e la conoscenza matematica in gioco. Come si è visto nel paragrafo precedente (Par. 2.2.2) questo insieme di norme costituisce il contratto didattico nel senso di Brousseau (1981). Balacheff però effettua l'indagine in due classi distinte e trova differenze sostanziali nelle manifestazioni di queste relazioni dovute principalmente all'instaurarsi di alcune regole sociali all'interno del contesto classe. È qui che viene introdotto il concetto di costume didattico:

> L'aula è una società di costume. Il costume è qui inteso come un insieme di pratiche obbligatorie (Carbonnier, 1971) stabilite tali dal loro utilizzo, e le quali, nella maggior parte dei casi, vengono stabilite implicitamente. Il costume regola il modo in cui il gruppo sociale stabilisce le relazioni e le interazioni tra i suoi componenti e, quindi, si è inizialmente caratterizzato come prodotto di pratiche sociali (Balacheff, 1988).[11]

Seguendo Chevallard (1983), si potrebbero riformulare alcune proprietà del contratto didattico in modo tale da caratterizzare il costume didattico. Ad esempio, nello stesso modo del contratto didattico che diventa visibile quando viene rotto (devoluzione),

> si realizza l'esistenza [del costume] solo quando vengono prodotti i suoi effetti (Levy-Bruhl, 1964, p. 44).

Tuttavia, il concetto di contratto come era stato descritto in letteratura fino a quel momento, per Balacheff, non era sufficiente a spiegare l'insieme completo dei fenomeni sociali che regolano il funzionamento della conoscenza in una classe. Ad esempio, la problematica del contratto induce ad indagare la sua origine, per identificare le parti che detengono il contratto, per determinare il luogo e momento della sua negoziazione, per stimare la sua durata. Ci si chiede "quando" e "chi" ha stabilito il contratto e istituito

[11] Trad. it a cura dell'autrice.

le regole, mentre per certi autori come Chevallard (1983) il contratto didattico

> è sempre stato stabilito e c'è sempre stato. (...) Si sottoscrive al contratto didattico quando si entra in quel tipo di relazioni sociali regolate da esso[12] (Chevallard 1983, p. 11).

Secondo Balacheff, il concetto di costume didattico esula da queste problematiche ed è molto più adatto per spiegare le modalità di regolazione del funzionamento sociale nel contesto classe e allo stesso tempo può circoscrivere il dominio di validità del concetto di contratto didattico. Per il ricercatore questa differenziazione tra contratto didattico (un concetto che l'autore vede più di carattere locale e elemento chiave nel processo di decentramento) e costume didattico (una nozione che vede invece come regolatrice del funzionamento sociale all'interno di una classe) permetterà di eliminare tutti le accezioni "negative" del contratto didattico. Come il contratto didattico, anche il costume è specifico per la conoscenza in gioco in classe; in particolare Balacheff identifica un costume per ogni classe (intesa come grado scolastico). E secondo l'autore è proprio questa specificazione del costume didattico per livello di scolarizzazione che porta non tanto alle questioni circa le sue origini (come per il contratto didattico) ma piuttosto al momento dell'iniziazione degli studenti all'usanza della classe in cui entrano. Una iniziazione di una sorta di sistema di nuovi

> diritti e doveri (di coloro che hanno sottoscritto l'accordo) all'interno di un quadro di riferimento condiviso[13] (Chevallard, 1983, p. 11).

[12] Trad. it a cura dell'autrice.
[13] Trad. it a cura dell'autrice.

Il contratto didattico ha invece un carattere locale e Balacheff lo vede come negoziato per un compito particolare che richiede le regole per il funzionamento sociale della classe da definire a livello puntuale e in modo sempre nuovo; quando il contratto didattico svanisce, la classe ritorna al suo solito costume didattico.

Una delle principali accezioni negative della nozione di contratto didattico è che spesso induce l'idea che si dovrebbe essere in grado di rendere esplicito nel miglior modo possibile "un buon contratto”. Tale "buon contratto" dovrebbe essere reso esplicito agli studenti e definire tutto ciò che è accettabile per quanto riguarda i loro diritti e doveri, cioè una sorta di oggetto fisso che dovrebbe essere concordato (Brousseau, 1984). Ma come osserva Brousseau, la nozione di contratto didattico non ha nulla a che vedere con l'idea di un "buon contratto", in quanto il contratto didattico è sempre (necessariamente) invisibile. Tutto avviene come se ci fosse un contratto, ma questo non è mai stato concordato.

Secondo Balacheff il modello del costume didattico dovrebbe consentire di comprendere meglio quello che sembra essere una specie di “paradosso del contratto didattico”: il necessario essere implicito e la necessità della sua mancanza quando è necessario esplicitarlo. Questo sottolinea il fatto che la scomposizione delle regole cambia la natura delle interazioni sociali in classe. Si cambiano i comportamenti e, quindi, cambia anche il significato della conoscenza costruita assieme in base al nuovo quadro. Il costrutto di costume didattico è nato dall’esigenza di interpretare il comportamento degli studenti osservazioni mostrano con chiarezza relativa che le situazioni proposte, e quindi il significato dei comportamenti e produzioni degli studenti, sono molto sensibili a quello che potrebbe essere identificato come la consuetudine della classe in cui vengono introdotti queste situazioni.

Fondamentale è la figura dell’insegnante: all’interno delle interazioni sociali determinate dal costume didattico il ruolo del docente deve essere necessariamente accettato dalla classe. Si verificheranno episodi sporadici stabiliti dal contratto didattico ma poi la classe, e l'insegnante con essa, ritorneranno all'ordinario costume di classe fino a quando non ci sarò bisogno di una nuova negoziazione in termini di contratto. Risultante di un prodotto di pratiche, il costume evolverà con queste pratiche didattiche ed esso verrà modificato finché non appariranno progressi nell'apprendimento della matematica.

Il contratto didattico e il costume didattico sono due costrutti che forniscono un ottimo quadro di riferimento per cercare di descrivere e interpretare il carattere dinamico delle interazioni sociali e il loro legame con la conoscenza in gioco (la matematica). La permanenza e la stabilità di queste interazioni sociali sono indispensabili per il buon funzionamento del sistema didattico; come si vedrà in seguito entrambi i costrutti sono stati fondamentali per inquadrare il fenomeno rilevato a livello quantitativo e indispensabili per interpretare le cause di esso durante l'analisi qualitativa. Come più volte detto, sia il costume che il contratto didattico, sono strettamente correlati con la matematica in questione; nonostante questo un ulteriore supporto per entrare a fondo in alcuni atteggiamenti e convinzioni da parte degli studenti è un costrutto ancora più legato alla disciplina stessa: le norme sociomatematiche (Par. 2.2.4).

2.2.4. Le norme sociomatematiche

Si è visto che i concetti di contratto didattico e costume didattico sono due chiavi di lettura delle diverse norme e regole che si instaurano in classe durante le lezioni di matematica e molto funzionali per interpretare il fenomeno in questione. In generale, diversi studi nell'ambito dell'interazionismo simbolico mostrano l'influenza di norme o obblighi impliciti all'interno delle relazioni di insegnamento/apprendimento della matematica (Sierpinska & Lerman, 1996; Godino & Llinares, 2000, Voigt, 1994) e ormai è riconosciuta l'esistenza di alcune norme sociali generali, e spesso indipendenti dalla disciplina, che permeano le micro-culture della classe. Queste norme sociali

> [..] dentro la classe, sono convenzioni che descrivono come comunicare gli uni con gli altri, così come gli obblighi che descrivono come reagire socialmente di fronte ad un errore o ad un suggerimento (D'Amore et al, 2008, p.6).

Il fenomeno oggetto di questa ricerca è strettamente correlato alla disciplina e le norme che meglio si prestano come chiave di lettura sono quelle che più si riferiscono alla matematica. Tra le varie norme che si possono instaurare in situazioni di classe in cui si fa matematica, diversi autori si sono concentrati sulle norme sociomatematiche (Tatsis & Koleza, 2008; Yackel & Cobb, 1996). Nel 1996, Yackel e Cobb hanno introdotto la nozione di *norme sociomatematiche*, nel tentativo di indagare come l'attività matematica degli studenti potrebbe essere influenzata dalle loro convinzioni sulla disciplina, dal valore che attribuiscono alla matematica e dal loro "dare un senso" alla complessità delle attività matematiche svolte in classe. La distinzione tra norme sociali e norme sociomatematiche è sottile; ad esempio il fatto che gli studenti siano tenuti a fornire una spiegazione della propria risoluzione è una norma sociale, mentre ciò che rende accettabile, dal punto di vista matematico, la loro spiegazione è una norma sociomatematica.

I due autori hanno definito le norme sociomatematiche come segue:

"aspetti normativi della discussione matematica specifica dell'attività matematica degli studenti"[14] (Yackel & Cobb, 1996, p. 461).

Le norme sociomatematiche possono essere viste come degli comportamenti ricorrenti che si concentrano sul "pensiero matematico" piuttosto che sul "pensare in matematica". Ad esempio, una norma sociale generale è quella per la quale è necessario che gli studenti non solo giustifichino le loro risposte ma è inoltre necessario che le loro giustificazioni siano accurate, rigorose, e convincenti. Una norma sociomatematica è quella che definisce ciò che costituisce un argomento convincente in matematica ed è spesso introdotta nelle pratiche didattiche per incoraggiare fortemente le diverse forme di giustificazione durante le attività matematica (Yackel & Cobb, 1996; Kazemi & Stipek, 2001). In accordo con Yackel e Cobb, in questo contributo con il terme norme sociomatematiche si intendono tutti gli aspetti normativi propri della discussione matematica specifici dell'attività matematica degli studenti. Altri autori come Gorgorio e Planas (2005) hanno utilizzato questo costrutto con un peso sociale più pesante rispetto a quello che si ritrova nell'interpretazione di Yackel e Cobb. Essi sottolineano infatti che queste sono le norme esplicite o implicite che influenzano la partecipazione in classe durante le attività di matematica e tutta la struttura interattiva dello sviluppo della pratica matematica. I due autori descrivono le norme sociomatematiche come quegli aspetti inerenti non solo al modo in cui i diversi partecipanti, durante una discussione, si approcciano alle conoscenze matematiche ma riguardanti anche il valore che gli studenti attribuiscono a sé stessi, agli altri e al il loro gruppo classe per quanto riguarda la conoscenza e la pratica matematica (Gorgorio & Planas, 2005).

[14] Trad. it a cura dell'autrice.

Altri studi, successivi a quello fondazionale di Yackel e Cobb, si sono concentrati sulla costituzione delle norme sociomatematiche all'interno del contesto classe (Hershkowitz & Schwarz, 1999, Gorgorio & Planas, 2005). Le ricerche di questi autori forniscono preziose informazioni sulla co-costruzione di queste norme da parte degli studenti/docenti; ad esempio, sempre in Gorgorio e Planas (2005), si ritrovano alcune situazioni che hanno a che fare con le norme sociomatematiche, inerenti al ruolo assunto dal docente, alla struttura di una lezione, o all'organizzazione di gruppi all'interno della classe. Come leggiamo in Sanchez e Garcìa (2013), questi autori hanno rilevato, in situazioni d'aula di scuole spagnole, alcune frasi di insegnanti che possono aiutare l'instaurarsi di norme sociomatematiche, come ad esempio:

> In questa classe, lavoriamo in modo collaborativo e dobbiamo aiutarci a vicenda (Gorgorio & Planas, 2005, p. 94).

O ancora

> In questa aula, ognuno può contribuire con le proprie idee (Gorgorio & Planas, 2005, p. 94).

Queste norme vengono quindi legittimate all'interno di strutture sociali più ampie, come il sistema educativo, di cui l'impatto sulle interazioni di classe avviene spesso mediante messaggi impliciti. In linea con l'inquadramento di questo costrutto effettuato nei Solid Findings dell'Education Committee of the EMS (EMS-EC, 2013), le norme sociomatematiche che aiutano ad interpretare le parole degli studenti intervistati in questa ricerca vengono intese come sorte nelle interazioni tra studenti e tra studenti e insegnante quando risolvono un compito matematico. Esse sono determinate e profondamente influenzate dal modo di considerare la matematica scolastica in diversi contesti. Tali norme vengono quindi identificate sulla base di vincoli comunemente accettati durante le pratiche di classe e vengono sancite con condizioni e particolarità legate alla visione degli studenti della matematica come materia scolastica. In particolare lo studio delle norme sociomatematiche è spesso un tentativo di interpretazione di come e quanto le credenze degli studenti e il valore che essi attribuiscono alla matematica incida nel dare un senso alla complessità dell'attività matematica in classe.

2.2.5. Il legame tra il contratto didattico e le norme sociomatematiche

Sembra naturale pensare che ci sia un legame tra l'instaurarsi di norme sociomatematiche nella classe e situazioni di contratto didattico. La dinamica che determina l'instaurarsi di norme sociomatematiche richiede evidentemente una partecipazione attiva da parte dello studente. Per partecipazione attiva si intende, ad esempio, la condivisione dei criteri di valutazione di un esercizio di matematica oppure la discussione in classe su cosa è da ritenersi una giustificazione adeguata di una affermazione matematica o altre pratiche di determinazione di criteri e comportamento. Queste norme si possono quindi vedere come una delle conseguenze del contratto didattico, strettamente legate sia alla disciplina (la matematica) che alle discussioni collettive tra studenti.

L'instaurarsi di queste norme sociomatematiche in classe a partire di situazioni di contratto didattico fa si che l'attenzione del ricercatore debba spostarsi progressivamente dall'osservazione di dinamiche posizionate sul lato docente-studente del triangolo della didattica a dinamiche che sono meglio focalizzabili sul lato studente-sapere. In questo modo si osserva e si studia più direttamente come lo studente costruisce e organizza il proprio sapere matematico anche in relazione alle condizioni didattiche in cui si sviluppa il percorso di apprendimento.

Inoltre, a differenza del contratto didattico che, come si è più volte visto nel Par. 2.2.2 non viene mai esplicitamente negoziato, le norme sociomatematiche, una volta introdotte, vengono negoziate e rinegoziate dai partecipanti della situazione didattica. Come si legge in Gerson & Bateman (2010), il processo di negoziazione spesso promuove l'aspettativa, incorporata nella norma sociomatematica stessa, di diventare chiara e comprensibile sia da parte dell'insegnante che da parte degli studenti in modo tale che il suo instaurarsi sia effettivamente concordato. Tuttavia, Levenson, Tirosh, and Tsamir (2009) durante una ricerca hanno constatato che l'insegnante emana e approva norme sociomatematiche e che gli studenti percepiscono che esse possono essere differenti all'interno della stessa classe. In casi come quello sopracitato le norme non sono affatto esplicitamente concordate da entrambi i partner della situazione didattica, ma stabilite dall'insegnante. E, molto probabilmente, l'accettazione da parte degli studenti è determinata dal contratto didattico.

2.3. Il sapere degli studenti generato dalle pratiche d'aula e quello rilevato dalle valutazioni standardizzate nazionali

Questa ricerca nasce da evidenze messe in luce da risultati di alcune valutazioni standardizzate nazionali. Nel paragrafo 1.2 si sono presentate le valutazioni standardizzate italiane, L'INVALSI e le principali caratteristiche e modalità di somministrazione. Ora si entrerà un po' più a fondo sui contenuti valutati e sulla loro natura. Il sapere degli studenti, cioè il "sapere appreso", oltre ad essere frutto di processi cognitivi e rielaborazioni personali dell'allievo, dipende indiscutibilmente dal contesto in cui questo sapere si forma, dalla noosfera ma anche, e soprattutto, dall'insegnante. Qual è il "sapere" presentato dagli insegnanti in classe? In questa direzione uno dei termini più diffusi nelle ricerche in didattica della matematica è la *trasposizione didattica* (Chevallard, 1985). Con il termine "trasposizione didattica" s'intende quel processo cognitivo per il quale l'insegnante attinge dal proprio "sapere", sapere maturo, che si è organizzato e costruito cognitivamente negli anni, ormai consolidato, e lo trasforma in "sapere da insegnare". L'auspicio è che gli insegnanti agiscano in maniera colta e consapevole in questa trasformazione, e che questo processo abbia una relazione con la "trasposizione" che l'Istituzione fa dello stesso sapere e che si è tradotto, nel caso italiano, nelle Indicazioni Nazionali, negli Assi Culturali (1997) e nelle Linee Guida per l'Istruzione Tecnica e Professionale[15], cioè nei

[15] In Italia i curriculi di legge vigenti ad ora sono:

- Indicazioni Nazionali 2012 per il primo ciclo d'istruzione, reperibili al seguente link: http://www.indicazioninazionali.it/documenti_Indicazioni_nazionali/indicazioni_nazionali_infanzia_primo_ciclo.pdf
- Indicazioni Nazionali 2010 per i percorsi liceali, reperibili al seguente link:

curricoli di legge. Questa azione dell'insegnante è solo il primo passo del percorso che compie il "sapere" per arrivare al "sapere appreso" dall'allievo. Questo sapere da insegnare diventa sapere insegnato attraverso l'ingegneria didattica e le abitudini e le pratiche didattiche messe in campo. D'altra parte l'istituzione traduce il sapere da insegnare in un sapere atteso attraverso momenti di valutazione, come gli Esami di Stato e le valutazioni standardizzate, nel caso del sistema scuola nel suo complesso. Alla fine di tutto questo processo il sapere effettivamente rilevato da queste valutazioni standardizzate è una parte, un elemento visibile del sapere appreso dagli studenti. I risultati di risposta alle domande INVALSI permettono di valutare la distanza tra il sapere appreso e il sapere atteso e pongono la domanda di come le pratiche e le abitudini d'aula incidano nell'instaurarsi di questa distanza. Il quadro di riferimento delle domande INVALSI rispecchia i curricoli di legge vigenti nella scuola italiana e ogni domanda fa riferimento esplicitamente ad essi. Ovviamente si valutano soltanto competenze valutabili in una valutazione standardizzata e non tutto il ventaglio di competenze matematiche che dovrebbero possedere gli studenti; ma indagando anche solo una parte di esse si riescono ad ottenere informazioni alquanto indicative sulle difficoltà degli studenti italiani.

http://nuovilicei.indire.it
- Linee Guida per gli Istituti Tecnici 2010, reperibili al seguente link: http://nuovitecnici.indire.it
- Linee Guida per gli Istituti Professionali 2010, reperibili al seguente link: http://nuoviprofessionali.indire.it

2.4. Inquadramento del fenomeno e domande di ricerca

Come già osservato, per interpretare il comportamento degli studenti, un'ottima chiave di lettura è fornita dalla nozione di contratto didattico. L'interpretazione "ortodossa" di questo costrutto concentra l'analisi sulla relazione allievo-docente, e a partire da questa relazione evidenzia il ruolo della noosfera. Il contratto è in questo caso l'insieme delle convinzioni, delle pratiche messe in campo, dei comportamenti praticati da uno degli attori della situazione didattica (in questo caso l'allievo) in risposta alle aspettative reciproche che si instaurano nella relazione insegnante-allievo. Come si è visto nel Par. 2.2.2, interpretazioni più ampie del costrutto lo estendono anche ai comportamenti generati dalle aspettative reciproche tra allievo e società.

L'effetto descritto in questa ricerca può evidentemente originarsi in una situazione di interazione tra allievo e docente, soprattutto con allievi piccoli, abituati al fatto che l'insegnante propone di eseguire una operazione *e si aspetta un risultato*, quasi sempre diverso dai dati di partenza. Il principio regolativo che si è enunciato può facilmente iniziare a formarsi in situazioni di contratto didattico.

Utilizzando come schema organizzativo il triangolo della didattica della matematica (Chevallard, 1992,) si può asserire che quando viene proposta una consegna matematica all'allievo, questa viene vista da quest'ultimo posizionata in qualche modo lungo il lato insegnante-sapere. Se il processo per la soluzione della consegna (con tutti i suoi aspetti praxeologici, cfr. Chevallard, 1999) si svolge lungo il lato insegnante-allievo, i principi regolativi sono descritti efficacemente dalle categorie del contratto didattico. In questo caso, i principi regolativi sono negoziati, e la loro natura è essenzialmente dinamica (Brousseau, 1997; Sarrazy, 1995). Questa identificazione tra insegnante e sapere è particolarmente stretta per gli allievi piccoli, e di conseguenza per essi è naturale che la natura dei principi regolativi sia prevalentemente contrattuale e legata alla figura dell'insegnante. Usando l'immagine del triangolo, per essi l'angolo avente per vertice l'allievo è ancora molto stretto.

D'altra parte, ben presto l'istituzione entro cui si esplica la dinamica didattica acquisisce importanza.

Diversi studi hanno evocato la presenza di situazioni di contratto in contesto di istituzione; per fare solo due esempi, Elia et al., 2009, e De Vleeschouwer e Gueudet, 2011. Si può affermare che anche il famosissimo effetto "età del capitano" presentato in precedenza (considerato un esempio classico di contratto) sia rilevabile al di fuori della relazione diretta docente-allievo, e arrivi a manifestarsi indipendentemente da essa (pur essendo, ovviamente, da essa originato).

Si assiste quindi a una sorta di accettazione e condivisione di questi principi regolativi, che all'origine sono continuamente negoziati ma poi diventano via via sempre più stabili. Per spiegare questi meccanismi a livello della prima istituzione- un microsistema- in cui la presenza dell'insegnante è ancora esplicita e forte, vale la dire *la classe*, Balacheff (1998) ha proposto l'idea di *costume didattico* (Par. 2.2.3).

Quando il fenomeno osservato si manifesta a livello di *comportamento della classe* il costrutto adatto sembra essere quindi piuttosto quello del *costume didattico*, che appare quasi come un primo sedimento delle situazioni di contratto vissute dall'allievo nel contesto della classe.

Dagli insiemi di pratiche didattiche vissute in aula con l'insegnante resta un impronta che viene in qualche modo interiorizzata come principio regolativo, una sorta di meta-oggetto.

Il fenomeno descritto, peraltro, è stato osservato in valutazioni standardizzate di dimensione nazionale, su campioni di diverse decine di migliaia di studenti. Siamo quindi in una situazione più ampia, che non può esser vista come una somma di tante situazioni-classe. Siamo di fronte all'emergere di un comportamento che deve rispondere a principi regolativi dell'azione degli allievi *rispetto alla matematica*. Per tornare all'immagine del triangolo citata precedentemente, l'azione dell'allievo per rispondere alla domanda si sviluppa qui lungo il lato allievo-sapere. Questo switching dell'effetto da un lato all'altro del triangolo passa necessariamente attraverso un processo di accettazione di norme e regole di comportamento, di cui il *costume* di Balacheff è un primo passo.

Un contributo alla comprensione di questo nuovo *avatar* del fenomeno può infatti venire da teorie dei sistemi sociali, seguendo un approccio analogo a quello di Sierpinska, Bobos e Knipping (2008) e di Sensevy (2010), che utilizzano la strumentazione (in termini di *norms* e *rules*) sviluppata, tra gli altri, anche da Ostrom (2005) (Par. 2.2.1). Appare infatti necessario considerare in maniera più ampia le caratteristiche della noosfera e in particolare il ruolo delle regole e delle norme nell'istituzione in cui avviene l'interazione tra allievo, docente e matematica (anche in termini di norme sociomatematiche di Yackel e Cobb, 1996, Par.2.2.4).

In (Garuti e Boero, 1994) gli autori, studiando situazioni di modellizzazione matematica, evocano l'azione di "principi", intesi come *criteri organizzativi delle operazioni di formulazione di una ipotesi che esistono prima dell'analisi dello specifico problema esaminato*.

In questa ricerca, il principio regolativo enunciato appare effettivamente come un criterio organizzativo dell'azione di risoluzione del problema, esistente prima dell'analisi del problema stesso. L'ipotesi è quindi che questo principio regolativo del comportamento dell'allievo *alle prese con la matematica* sia alla base dell'ultimo *avatar* del fenomeno- che si vedrà poter manifestare in contesti sempre più allargati (prima l'insegnante, poi la classe, infine la matematica scolastica)- ormai completamente posizionato sul lato allievo-sapere del triangolo della didattica.

Obiettivo della ricerca diventa quindi indagare come e quando si manifesta il fenomeno, e a quale lato del triangolo della didattica si collegano le convinzioni e la visione della matematica degli studenti partecipanti la partecipazione, cercando quindi di interpretare i loro atteggiamenti con il costrutto teorico più idoneo.

Si possono quindi esplicitare le seguenti domande di ricerca.

Un primo blocco di domande è volto a esplorare le caratteristiche di questo effetto:

- il fenomeno si manifesta in ambiti matematici diversi?
- interessa tutti i livelli scolastici?
- è presente in alunni con diverse abilità matematiche diverse?
- dipende dal controllo semantico che l'allievo ha sui contenuti della domanda?
- è possibile quantificarlo, in particolari situazioni?

In secondo luogo, la ricerca vuole iniziare a indagare se il comportamento degli allievi in cui si osserva l'effetto dipende da un principio regolativo vicino a quello enunciato.

Capitolo terzo
La sperimentazione

3.1. La metodologia

3.1.1 Premessa alla descrizione della sperimentazione

La ricerca didattica è un'attività conoscitiva sistematica e controllata svolta su una data realtà educativa. È considerata parte del "sapere scientifico", anche se è una ricerca che parte da situazioni umane spesso personali e, quindi, soggettive (Gobbi, 1997). Quando allora una ricerca può dirsi scientifica?

Molto dipende dall'agire del ricercatore; una ricerca può intendersi scientifica se mira a produrre un sapere controllabile. Il ricercatore dovrà quindi rendere il più possibile chiaro ed esplicito il percorso che lo ha portato ad ottenere un dato sapere. È lui che deve esplicitare in maniera esaustiva le premesse teoriche e dichiarare in modo esplicativo obiettivi ed aspettative. Il ricercatore ha inoltre il compito di rendere chiari tutti i passaggi logici ed empirici che compie, mettendo a disposizione tutti gli elementi possibili perché altri ricercatori possano criticare e verificare, con opportune argomentazioni, scelte e passaggi di ricerca. Solo in questo modo si potrà attribuire un valore "scientifico" alla ricerca, anche in campo educativo.

Questo non vuol dire de-umanizzare il lavoro dell'educatore, renderlo freddo e rigido nei suoi modelli pre-costituiti ma evitare il tradizionalismo.

La sperimentazione di questa ricerca è nata ed è stata struttura in modo tale da fornire gli strumenti necessari per una chiave interpretativa funzionale alla verifica delle ipotesi di ricerca; in particolare è stata svolta una ricerca di tipo qualitativa, quantitativa e interpretativa nella forma di indagine.

Seguendo Goetz e Lecompte (1988), si cercherà di rendere il più affidabile possibile il processo di ricerca, fornendo quante più informazioni possibili circa le situazioni nelle quali si è sviluppata l'esperienza e descrivendo la popolazione campione e i criteri secondo i quali è stata scelta, i metodi di raccolta e di analisi dei dati in modo tale da facilitarne la revisione o una replica da parte di altri ricercatori.

3.1.2 La sperimentazione

La sperimentazione si è svolta in due fasi centrali: si sono prima somministrati dei questionari e successivamente, per avere una conferma dell'analisi quantitativa sono stati intervistati alcuni degli studenti che hanno fatto i questionari, chiedendo l'esplicitazione della strategia messa in atto mediante brevi interviste mirate condotte a piccoli gruppi. Già nel 1991 (Ericsson &, 1991) sostenevano l'esigenza di andare oltre al quantitativo per poter interpretare le situazioni ed in linea con questo filone di pensiero la sperimentazione è proseguita con analisi dal punto di vista cognitivo. Nella seconda fase sono stati intervistati studenti frequentanti la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado che non avevano partecipato alla prima fase della sperimentazione per cercare di effettuare un'analisi qualitativa del fenomeno.

Nei paragrafi successivi verranno descritte analiticamente le fasi delle sperimentazione ma si ritiene doveroso iniziare questa sezione con l'elenco delle scuole che hanno partecipato in quanto senza la preziosa collaborazione dei dirigenti, degli insegnanti e degli alunni di queste scuole questa ricerca non si sarebbe svolta.

Di seguito ecco l'elenco completo delle scuole che hanno partecipato alla sperimentazione di questa ricerca:

a) Istituto Comprensivo "R. Gasparini" di Novi di Modena (MO)
b) Istituto Comprensivo "C. Bassi" di Castel Bolognese (RA)
c) Istituto Comprensivo "IC4" di Imola (BO)
d) Liceo Statale "B. Rambaldi – L. Valeriani - Alessandro Da Imola" di Imola (BO)
e) Istituto di Istruzione Superiore "E. Majorana" di San Lazzaro di Savena (BO)
f) Istituto di Istruzione Superiore "E. Mattei" di San Lazzaro di Savena (BO)
g) Istituto Statale di Istruzione Superiore "I.S.I.S. Archimede" di San Giovanni in Persiceto (BO)
h) Liceo Scientifico Sportivo "Toniolo" di Bolzano
i) Liceo Scientifico Statale "A. Righi" di Cesena (FC).

3.2. L'analisi quantitativa

3.2.1. *La popolazione campione*

La ricerca quantitativa è stata condotta in tre Istituti Comprensivi nelle provincie di Bologna, Modena e Ravenna, e in due Licei Scientifici e un Istituto di Istruzione Superiore distribuiti nelle province di Bologna e Forlì-Cesena, tutti nella regione Emilia-Romagna (scuole a), b), c), d), e) e i) elencate nel Par. 3.1).

In totale sono stati somministrati 124 questionari che hanno svolto la funzione di pre-test e 612 questionari definitivi sui quali si è basata l'analisi quantitativa della ricerca. Distribuiti nei diversi livelli scolastici, hanno partecipato alla rilevazione quantitativa in totale 736 studenti. Successivamente sono state effettuate interviste a piccoli gruppi a 10 allievi del Liceo Scientifico e a 2 allievi dell'Istituto di Istruzione Superiore tra gli studenti delle scuole secondarie superiori che hanno partecipato alla rilevazione.

Le classi sono state individuate dopo colloqui con i dirigenti degli istituti e gli insegnanti di riferimento, che hanno permesso di disegnarne un profilo e di collocarle nella fascia medio-alta di standard rispetto al sistema italiano e nella fascia intermedia rispetto alla macroregione di riferimento (Italia Nord-Est) - sia come background socioeconomico degli studenti che come risultati di apprendimento. Per un migliore ancoraggio dei livelli di apprendimento in matematica di ognuna delle classi selezionate, sono stati confrontati i risultati ottenuti dalle classi nelle valutazioni standardizzate dell'Invalsi, sia rispetto alle medie nazionali e macro-regionali che rispetto alle 200 classi italiane più vicine, come indicatori socioeconomici di riferimento (per brevità espositiva questa metodologia di scelta viene denominata *AnchorSA*).

3.2.2. *I questionari*

Nei questionari sono state proposte non solo domande indicative per la ricerca ma anche domande “schermo”. Per poter disporre di termini di confronto per i risultati ottenuti sono stati proposti come domande schermo quesiti (leggermente modificati) presenti nei test INVALSI di anni precedenti di cui si posseggono risultati su scala nazionale; questo ha permesso di ancorare ulteriormente il livello degli studenti che hanno fatto parte della sperimentazione in riferimento all’intera popolazione italiana. Abbiamo quindi somministrato i questionari in livelli scolastici di cui si hanno i risultati campionari nazionali, livelli 05, 06, 08, 10, 11. In questo modo, oltre ad avere la possibilità di ancorare il livello scolastico, in linea con l’ipotesi di ricerca per la quale l’effetto si manifesti indipendentemente dal livello scolastico, si è effettuata la sperimentazione su un campione distribuito in tutti i segmenti della scuola italiana. In particolare, si è scelto di indagare nei livelli di “passaggio” tra la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado e tra la scuola secondaria di primo grado e la scuola di secondaria di secondo grado in modo tale da cercare conferme dell’ipotesi per la quale l’effetto persiste indipendentemente dalla noosfera circostante. Proprio per cercare di validare l’altra ipotesi di ricerca, per la quale l’effetto di contratto didattico sia presente indipendentemente dal contenuto matematico, nei vari questionari sono presenti quesiti che spaziano ambiti diversi della matematica, dall’algebra alla geometria alla probabilità. Sono stati predisposti tre questionari pre-test per i 5 livelli indagati; i risultati ottenuti nei pre-test e le difficoltà riscontrate dagli

allievi (rilevate anche attraverso colloqui con insegnanti e studenti) hanno permesso di arrivare alla stesura dei questionari definitivi sui quali è stata basata la sperimentazione.
All'inizio di tutti e tre i questionari definitivi è evidenziato il tempo di esecuzione, 30 minuti; è indicato di poter usare righello e/o squadra ma non calcolatrice ed è specificato che in ogni facciata sono presenti spazi bianchi a disposizione per calcoli o tentativi di soluzione. Viene richiesto un nickname identificativo la cui funzione è spiegata agli allievi: da un lato, per cercare di evitare effetti di ansia da valutazione, è stato garantito l'anonimato del questionario, e dall'altro ciò ha permesso di invitare a sostenere le interviste alcuni studenti avendo a disposizione i protocolli, lasciandoli liberi di non rispondere e quindi di non farsi identificare. Peraltro, tutti gli studenti che dopo la somministrazione sono stati invitati all'intervista attraverso il nickname hanno accettato volentieri di farsi identificare e intervistare.

Il questionario somministrato nei livelli 05-06 è costituito in totale da 5 domande, composte per la maggior parte da più item, che spaziano dall'ambito geometrico, all'ambito algebrico, all'ambito aritmetico (vedi Allegato 1 e Allegato 2). È stato somministrato a 267 studenti di 14 classi e sono stati utilizzati per la ricerca 247 questionari[16].
La prima domanda ha la funzione di filtro, due sono domande schermo, e due sono domande nelle quali la risposta corretta è un dato contenuto nel testo.

[16] In questo livello, come negli altri, non sono stati considerati i questionari di studenti con disturbi specifici di apprendimento o con bisogni educativi speciali.

Il questionario somministrato nel livello 08 è costituito in totale da 12 domande articolate complessivamente in 26 item. È stato somministrato a 126 studenti di 7 classi e sono stati utilizzati per la ricerca 113 questionari. Oltre alla domanda filtro iniziale comune a tutti i questionari, sono presenti 5 item in cui la risposta corretta è un dato contenuto nel testo; altri item svolgono la funzione di filtro o di schermo. Una delle domande sotto osservazione è proposta in due varianti, equivalenti dal punto di vista matematico, ma differenti per la loro evidenza semantica.

Il questionario somministrato nei livelli 10/11 è costituito in totale da 8 domande articolate complessivamente in 23 item. È stato somministrato a 219 studenti di 11 classi e sono stati utilizzati per la ricerca 216 questionari. Oltre alla domanda filtro iniziale comune a tutti i questionari, sono presenti 5 item in cui la risposta corretta è un dato contenuto nel testo; altri item svolgono la funzione di filtro.
In questo questionario è presente la stessa domanda che verrà posta in osservazione nel livello 08, nelle medesime due varianti semantiche. I questionari esaminati sono stati complessivamente 101 di una variante e 115 dell'altra. In questa tesi, per quanto riguarda l'analisi quantitativa, saranno analizzati dettagliatamente i risultati di quattro domande (la domanda "zero-virgola", la domanda "massa di Marte", la domanda "gli atomi di Marte" e la domanda "del maglione").

3.3. Le interviste di gruppo e le interviste individuali

Dopo la correzione dei questionari e la codifica dei risultati sono stati individuati 12 allievi che avevano svolto i questionari dei livelli 10 e 11 con i quali sono state condotte delle interviste semi-strutturate, task-based, a piccoli gruppi. Successivamente sono state effettuate interviste individuali, incentrate sulle domande delle valutazioni standardizzate da cui è nata la ricerca, a studenti del livello 10 che non hanno partecipato alla sperimentazione. Per quanto riguarda le interviste, come opzione metodologica è stata scelta l'intervista strutturata task-based (Goldin, 2000), conducendola sia in piccoli gruppi di studenti che individualmente. Il focus delle interviste task-based è lo studio dell'interazione dei soggetti intervistati con l'attività matematica, pianificata in anticipo dall'intervistatore. Come leggiamo in Goldin (2000), questa struttura è adatta sia per le interviste individuali che per le interviste di gruppo.

Nei paragrafi seguenti verranno esplicitate puntualmente le strutture delle interviste e, in linea con il quadro teorico, in tutte le interviste si è cercato di creare un ambiente disteso. Un ambiente rilassato ha permesso di creare situazioni idonee alla ricerca; infatti molti aspetti del contratto didattico sono inerenti alla difficoltà di esplicitazione di processi interiori e molto spesso i fattori esterni sono determinanti. Inoltre, come suggerisce ancora Goldin, si è cercato di prendere precauzioni in merito a possibili imprevisti che potevano verificarsi, ma essendo disponibili ad alterare temporaneamente le strutture previste delle in-

terviste, si sono individuate effettivamente situazioni che hanno portato a osservazioni utili ai fini della ricerca. Come viene sottolineato dall'autore, nel momento dell'intervista al centro dell'attenzione più che la correttezza o meno del compito matematico, vi è il processo che il soggetto compie per arrivare alla risposta; ed è proprio questo fatto che crea la possibilità di approfondire tematiche importanti in modo più approfondito rispetto quanto sia possibile con altri mezzi sperimentali. In particolare nel contesto di questa ricerca, ciò è stato determinante per fare emergere sensazioni e convinzioni proprie delle zone di confine tra esplicito ed implicito degli studenti.
Tutti quanti gli alunni sono stati disponibili a farsi registrare (sia con la videocamera che con il registratore vocale) ed è sembrato che la presenza del registratore non abbia influito in alcun modo sullo svolgimento dell'intervista.

3.3.1. La struttura delle interviste di gruppo

Gli studenti sono stati scelti in base alle loro risposte fornite nei questionari di sperimentazione quantitativa; in particolare sono stati invitati a sostenere le interviste studenti che hanno mostrato atteggiamenti interessanti (vedi in seguito) nelle domande finalizzate ad indagare la presenza dell'effetto *età della Terra*. La struttura delle interviste è stata pianificata in anticipo. Inizialmente è stato consegnato agli studenti un questionario ed è stato chiesto loro di svolgerlo assieme. La costruzione dei task proposti è stata curata particolarmente, con la costruzione di domande isomorfe a quelle presenti nei questionari, ma non

riconoscibili. In questo primo momento gli studenti hanno potuto interagire tra di loro,
discutendo o accettando le affermazioni e le argomentazioni presentate dai loro coetanei e hanno avuto modo così di analizzare e comprendere elementi aggiuntivi in relazione alle attività e agli argomenti inizialmente considerati. Successivamente l'intervistatore è entrato in scena, chiedendo al gruppo di studenti di commentare il lavoro svolto esplicitando il processo di risoluzione e motivando le scelte strategiche. Infine, sono stati proposti agli studenti i questionari da loro svolti ed è stato chiesto loro di commentare le risposte date, dando loro la possibilità di argomentare ed eventualmente "autocorreggersi" in seguito alle discussioni emerse precedentemente.

Le interviste sono state filmate, trascritte e corredate di minutaggio durante tutta la durata di esecuzione.
Di seguito, il testo consegnato all'inizio dell'intervista:

1)
a. Sappiamo che 359 x 61 = 21889
Determinate il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza eseguire i calcoli). Potete scrivere sul fianco del foglio.

3,59 x 61 =
3,59 x 610 =
3590 x 6,1 =
3,59 x 610 =
35,9 x 610 =

b. Sappiamo che 3,8 x 45,7 = 173,66
Determinate il risultato delle seguenti operazioni. Potete scrivere sul fianco del foglio.

38 x 457 =
38 x 4,57 =
3,8 x 4,57 =

2)
Nelle compravendite in borsa, si chiama "prezzo di apertura" il prezzo di vendita all'inizio delle contrattazioni e "prezzo di chiusura" il prezzo di vendita al termine delle contrattazioni.
Ogni giorno, il prezzo di apertura è dato dal prezzo di chiusura del giorno precedente.
L'andamento dei titoli viene esaminato guardando ogni giorno, la variazione tra il prezzo di apertura e il prezzo di chiusura.

Il 23 maggio una azione apre con un prezzo di apertura di 100 euro. Nel corso della giornata il suo prezzo cala del 20%. Il 24 maggio il suo prezzo cresce del 25%.
Qual è il prezzo di chiusura il 24 maggio?
A. 125
B. 100
C. 105
D. 145

Mostrate i calcoli che fate per rispondere:
....
....
....
....

Fig. 9: Testo proposto durante le interviste di gruppo

I primi due item richiamano la domanda 7 dei questionari per i livelli 10 e 11. Gli intervistati sono stati selezionati scegliendo tra quelli che dimostrano (nella domanda 1 dei questionari per i livelli 10 e 11) di saper eseguire i calcoli con le virgole e gli zeri, e che nella domanda 7 sbagliano o l'item c), o quello e), o tutti e due.
E' molto probabile che l'effetto abbia agito senza che ve ne fosse consapevolezza da parte degli allievi: in altre parole, è poco probabile che l'allievo abbia pensato "non può es-

sere uguale al risultato di partenza". Però l'effetto, inconsciamente, c'è, perché lo si è misurato quantitativamente rilevandone la presenza sia a livello nazionale, con l'analisi delle domande INVALSI, sia con la sperimentazione messa in atto. Dunque lo scopo dell'intervista è farlo emergere, far sì che lo studente, anche solo con una frase, o una osservazione, o qualche cosa che scrive e cancella, "reagisca" di fronte al fatto di vedere il risultato uguale al dato di partenza.
Per questo motivo nei gruppi non ci sono allievi che hanno risposto correttamente alla domanda 7: per evitare che la loro "chiarezza" impedisca all'effetto di rendersi visibile nella zona di sviluppo prossimale degli allievi più deboli.
La seconda domanda richiama invece la "domanda del maglione", anche quella presente nei questionari per i livelli 10 e 11.
Qui è possibile che, a rendere la domanda difficile e bassa la percentuale di risposte corrette (vedi Par. 3.4), giochi in prevalenza una mancata comprensione del concetto di percentuale, e in particolare una non padronanza del fatto che la percentuale si calcola su un "tutto" che può variare. In altre parole, molti degli allievi che sbagliano, lo fanno perché non effettuano neppure il calcolo, e semplicemente sommano e sottraggono le percentuali (per cui è ovvio che il risultato non è quello di partenza).
In questa domanda, l'effetto si dovrebbe manifestare in quegli allievi che effettuano correttamente il calcolo, e poi non lo accettano. Chi non fa il calcolo, non vede neppure che il risultato è quello di partenza.
Per questo tra gli intervistati sono stati selezionati quelli che segnano la risposta corretta, e poi la cambiano: sono quelli per cui probabilmente ha giocato esplicitamente l'ef-

fetto. Anche in questo caso, ovviamente, non è importante il risultato a cui pervengono, quanto quello che riusciamo a osservare della loro discussione.
Si può inoltre osservare anche che nella domanda proposta nel questionario non era stato inserito un distrattore "fortissimo", vale a dire 105 = 100 + 25 – 20.

3.3.2. La struttura delle interviste individuali

Gli studenti che hanno sostenuto le interviste individuali sono di quattro differenti scuole secondarie di secondo grado nella provincia di Bologna e Bolzano e le classi degli studenti intervistate sono state scelte secondo la metodologia *AnchorSA*.

Gli studenti frequentavano la classe seconda della scuola secondaria di secondo grado ed è stato chiesto alle insegnanti di indicare due o tre studenti per classe con rendimento "medio" rispetto all'andamento di classe. Sono stati intervistati in tutto 24 studenti approssimativamente equi distribuiti tra i quattro istituti e le interviste si sono svolte individualmente e sono state registrate e trascritte previo consenso degli alunni. Anche in questi casi all'inizio dell'intervista è stato chiesto agli studenti di inserire un nickname identificativo.
Ogni intervista iniziava con la consegna del testo nella figura seguente (Fig.10) ed è stato chiesto agli studenti di svolgere i task presenti o direttamente ad alta voce oppure di svolgerli autonomamente in silenzio ed esplicitare le strategie risolutive in seguito. La maggior parte degli studenti ha optato per la seconda opzione, svolgendo prima

tutti i task e poi esplicitando ad alta voce i ragionamenti e le strategie messe in atto per la risoluzione.
Il testo proposto agli studenti è il seguente:

Scuola: ………………………………

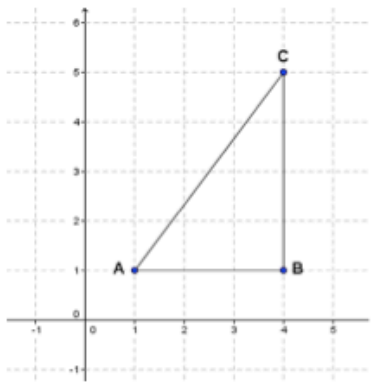
Nickname: …………………………………

1.

Luca si reca in profumeria, trova il suo profumo preferito che, a prezzo pieno, costa 130 euro. Quando va alla cassa scopre che c'è uno sconto del 10%. Quanto paga il profumo?
………………………………………………………………………

2.

Nella figura qui sotto, il punto A indica la casa di Francesca, il punto B la biblioteca e il punto C la scuola. La casa di Francesca dista 3 km dalla biblioteca e la biblioteca dista 4 km dalla scuola. Quanto dista la casa di Francesca dalla scuola?



Risposta: ……………………………………………………….

3.

L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

- ☐ A. $4{,}5 \times 10^9$ anni
- ☐ B. $3{,}5 \times 10^9$ anni
- ☐ C. $4{,}5 \times 10^6$ anni
- ☐ D. $4{,}5 \times 10^3$ anni

4. Per andare alla partita della nazionale si sono radunati nel parcheggio degli autobus 1164 tifosi. Ogni autobus può trasportare 36 tifosi. Qual è il numero minimo di autobus necessari per trasportare i tifosi fino allo stadio?
Risposta: ………………………………………………………….

Fig. 10: Testo proposto durante le interviste individuali

Proprio per indagare l'atteggiamento da un punto di vista qualitativo dell'effetto indagato, tra i task proposti c'è la domanda di partenza presente nella prova INVALSI 2011, livello 10. Le prime due domande coinvolgono competenze di base e si presuppone la loro risoluzione non implichi particolari difficoltà in studenti del secondo della scuola secondaria di secondo grado. In linea con il quadro teorico sono state scelte domande che coinvolgono competenze di base in quanto si presuppone che studenti di seconda superiore le risolvano senza difficoltà e che questo fatto li metta a loro agio. La quarta domanda richiama una situazione più volte ricondotta dalla letteratura al contratto didattico (D'Amore, 1999). Alcuni studenti avevano già visto in classe con la loro insegnante la domanda 3, ma questo non è stato rilevante ai fini dell'indagine. Agli studenti che hanno risposto correttamente alla domanda 3 è stato spiegato l'insuccesso generale tra i suoi coetanei ed è stato chiesto di interpretare il fenomeno. Mentre con gli studenti che hanno fornito la risposta sbagliata si è cercato di indagare in profondità le ragioni delle difficoltà incontrate.

Capitolo quarto
Presentazione e analisi dei risultati

4.1. I risultati dei questionari

Di seguito verranno presentati i risultati ottenuti in quattro domande:

- la domanda “zero-virgola” (presente in tutti i questionari)
- la domanda “gli atomi di Marte”, versione A (presenti ai livelli 08, 10 e 11)
- la domanda “le rocce di Marte”, versione B (presenti ai livelli 08, 10 e 11)
- la domanda “del maglione” (presente ai livelli 08, 10 e 11)

4.1.1. La domanda "zero-virgola"

Tutti i questionari si aprono con la stessa domanda filtro, che valuta la capacità di eseguire moltiplicazioni fra numeri razionali espressi in forma decimale, con la presenza di virgole e di zeri finali.

Esegui le seguenti moltiplicazioni:

2,5 x 32 = ...

1,9 x 4,1 = ...

2,5 x 320 = ...

19 x 0,41 = ...

25 x 0,32 = ...

1,9 x 41 = ...

2,5 x 3,2 = ...

1,9 x 410 = ...

Fig. 11: Domanda "schermo" presente nei questionari di tutti i livelli

Questa domanda aveva lo scopo di filtrare gli allievi rispetto alla loro abilità nell'eseguire le moltiplicazioni con questa tipologia di numeri e controllare le interferenze, dovute a scarsa abilità nel calcolo, con l'effetto che si voleva osservare. In particolare, due degli item richiedono di gestire nella stessa operazione la presenza simultanea di un numero con la virgola e un numero terminante con 0, e quindi una delle funzioni di questo filtro è stata quella di

eliminare interferenze nei risultati, dovute a scarsa padronanza del meccanismo di moltiplicazione con 0 finali.
In seguito verranno indicati con "tipologia A" gli allievi che hanno risposto correttamente ad almeno 7 di questi 8 item, e con "tipologia A+" gli allievi che hanno risposto correttamente a tutti e 8 gli item. Il numero e la percentuale di studenti di ciascuna tipologia, nei diversi livelli, sono riportati nella seguente tabella.

	Livello 5	Livello 6	Livello 8	Livello 10	Livello 11
tipologia A+	34 (28%)	42 (34%)	34 (30%)	42 (44%)	54 (44%)
tipologia A	61 (50%)	66 (53%)	56 (50%)	57 (60%)	73 (60%)

Tab 5: Percentuali di risposte corrette alla domanda "zero-virgola" degli studenti delle tipologie A e A+

La domanda filtro ha permesso quindi di mettere a fuoco, all'interno della popolazione, il comportamento degli strati di allievi con maggiore padronanza delle procedure di calcolo con zeri finali e virgole. La tipologia A raccoglie oltre la metà degli studenti, in tutti i livelli testati, mentre la tipologia A+ raccoglie all'incirca un terzo degli studenti della popolazione, in misura leggermente diversa a seconda dei livelli testati.

Tutti i questionari contengono poi una domanda in cui questa situazione permette di osservare l'eventuale presenza dell'effetto "età della Terra".
La domanda è presente nel questionario proposto ai livelli 05 e 06 con 4 item (di cui uno presentante l'effetto "età della Terra" oggetto di studio, l'item *c*), e nei questionari

somministrati ai livelli 08, 10 e 11 con 5 item (di cui 2 presentanti l'effetto "età della Terra", l'item *c* e l'item *e*).

Sapendo che 34 x 33 = 1122, determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

a) 34 x 3,3 = ...

b) 34 x 0,33 = ...

c) 3,4 x 330 = ...

d) 3,4 x 33 = ...

Fig 12: Domanda "zero-virgola" presente nei questionari dei livelli 05 e 06

Sapendo che 34 x 33 = 1122, determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

a) 34 x 3,3 = ...

b) 34 x 0,33 = ...

c) 3,4 x 330 = ...

d) 3,4 x 33 = ...

e) 0,34 x 3300 = ...

Fig 13: Domanda "zero-virgola" presente nei questionari dei livelli 08, 10 e 11

Nei questionari per i livelli 05 e 06 non era quindi presente l'item *e*.
La seguente tabella e il grafico sottostante riportano le percentuali di risposte corrette in ciascuno degli item della domanda sotto osservazione, distinte per i vari livelli testati.

	item a	item b	item c	item d	item e
Liv 05 06	87,04%	81,38%	48,99%	74,09%	
Liv 08	88,50%	75,22%	48,67%	76,99%	44,25%
Liv 10 11	88,07%	84,86%	73,85%	83,49%	72,48%

Tab. 6: Percentuali di risposte corrette alla domanda "zero-virgola" della popolazione della sperimentazione

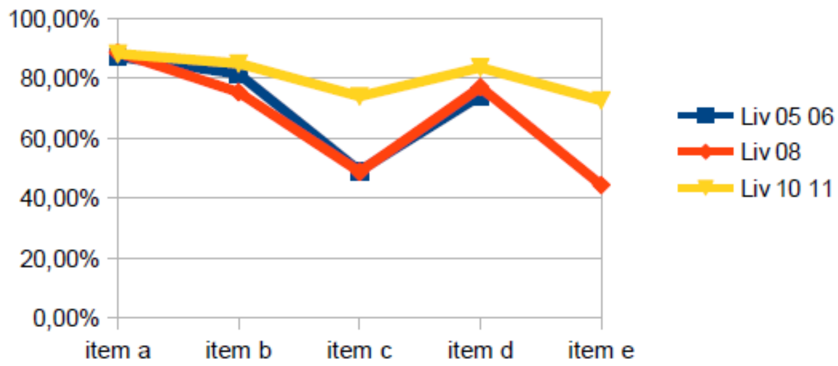


Fig. 13: Rappresentazione grafica delle risposte corrette alla domanda "zero-virgola" della popolazione della sperimentazione

È interessante notare che non c'è sostanziale differenza di comportamento tra gli allievi dei livelli 05 e 06 e quelli del livello 08 (nonostante intercorrano tra di essi due o tre anni di scolarità).
In tutti i livelli considerati la percentuale di risposte corrette negli item sotto osservazione è sensibilmente inferiore rispetto alle percentuali di risposte corrette negli altri item. Gli studenti di livello 10 e 11 mostrano una flessione di risposte più contenuta, negli item *c* ed *e*, ma pur sempre ben rilevabile. Si deve comunque tener conto che la somministrazione, nei livelli 10 e 11, è avvenuta in scuole di indirizzo scientifico, frequentate da studenti che, nei livelli precedenti, ottengono generalmente buoni risultati in matematica.
Si può notare a margine che i dati raccolti permettono anche di mostrare che non c'è sostanziale differenza tra i risultati degli studenti di livello 5 e quelli di livello 6, e neppure tra quelli di livello 10 e quelli di livello 11, nonostante queste coppie di livelli siano caratterizzate, nel sistema scolastico italiano, dal cambiamento dell'insegnante di matematica. In altre parole, gli studenti di livello 5 e quelli di livello 10 sono al termine un percorso con un insegnante, mentre quelli di livello 6 e di livello 11 sono all'inizio di un percorso con un nuovo insegnante- questo è un fattore importante per le interpretazioni in un'ottica interazionista.

Vengono di seguito riportate le percentuali di risposta agli item considerati degli allievi che hanno risposto correttamente ad almeno 7 degli 8 item della domanda filtro sopracitata (tipologia A).

	item a	item b	item c	item d	item e
Liv 05 06	94,40%	90,40%	60,00%	85,60%	
Liv 08	96,43%	89,29%	62,50%	94,64%	66,07%
Liv 10 11	93,85%	93,08%	82,31%	93,08%	81,54%

Tab. 7: Percentuali di risposte corrette alla domanda "zero-virgola"della tipologia A

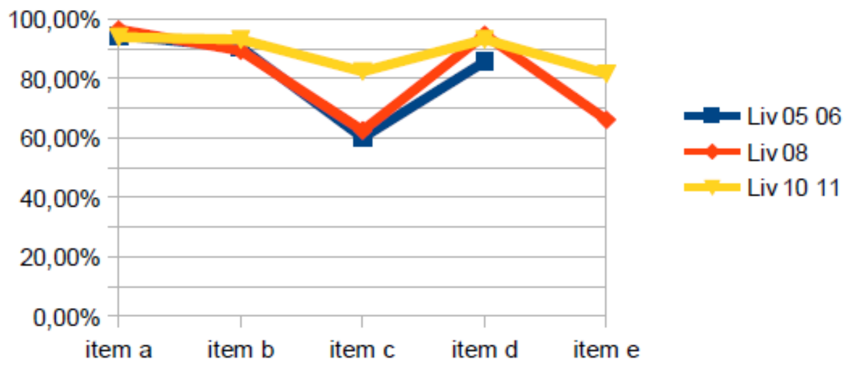


Fig 14: Rappresentazione grafica delle risposte corrette alla domanda "zero-virgola"della tipologia A

Anche in questo caso l'item c e l'item e (per i livelli 08 e 10-11) riportano una percentuale di risposte corrette sensibilmente inferiore alle altre in tutti i livelli scolastici. Andando ad esaminare la distribuzione delle risposte sbagliate ai diversi item fornite da questi allievi di tipologia A, si rileva che:

- il 66.13% risponde correttamente a tutti e 5 gli item;

- il 9.14% sbaglia entrambi gli item *c* ed *e*, e solo questi:
- il 12.9% sbaglia uno tra gli item *c* ed e *e* solo questo;
- l'8.06 % sbaglia almeno uno tra gli item *c* ed e *e* almeno uno degli altri;
- il 3.76% sbaglia uno o più degli altri item, e risponde correttamente agli item *c* e *e*.

In sintesi, oltre il 30% degli allievi di tipologia A sbaglia almeno uno degli item *c* ed *e* e il 22% sbaglia solo uno di questi due. In altre parole tra gli allievi di Tipologia A che sbagliano almeno un item di questa domanda, oltre il 90% sbaglia proprio uno degli item *c* o *e* o entrambi. Viceversa, è irrilevante la percentuale di allievi che sbaglia sugli altri item e risponde correttamente agli item *c* ed *e*.

Per quanto riguarda gli allievi di tipologia A+ (gli allievi che hanno risposto correttamente a tutti gli 8 item della domanda filtro), le seguenti tabelle e i grafici riportano, distinte per i diversi livelli, le percentuali di risposte corrette fornite agli item della domanda in osservazione.

	item a	item b	item c	item d	item e
Liv 05 06	92,31%	88,81%	57,34%	86,01%	
Liv 08	95,38%	83,08%	60,00%	87,69%	63,08%
Liv 10 11	91,61%	90,32%	81,29%	88,39%	78,06%

Tab. 8: Percentuali di risposte corrette alla domanda "zero-virgola"della tipologia A

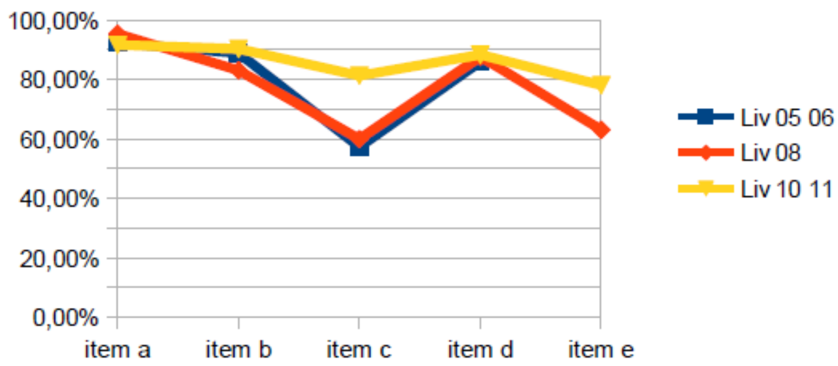


Fig. 16: Rappresentazione grafica delle risposte corrette alla domanda "zero-virgola"della tipologia A+

Anche per gli studenti di tipologia A+ l'item *c* e l'item *e* (per i livelli 08 e 10-11) riportano una percentuale di risposte corrette sensibilmente inferiore alle altre in tutti i livelli scolastici. Andando ad esaminare la distribuzione delle risposte sbagliate ai diversi item fornite da questi allievi di tipologia A+, si rileva che:

- il 64,55% risponde correttamente a tutti e 5 gli item;
- l'8,18% sbaglia entrambi gli item *c* ed *e*, e solo questi:
- il 10% sbaglia uno tra gli item *c* ed *e* e solo questo;
- il 13,18 % sbaglia almeno uno tra gli item *c* ed *e* e almeno uno degli altri;
- il 4,10% sbaglia uno o più degli altri item, e risponde correttamente agli item *c* e *e*.

Sono quindi percentuali del tutto in linea con quelle degli studenti di tipologia A: anche tra gli allievi di tipologia A+ (quelli che rispondono correttamente a *tutte* le operazioni presenti nella domanda filtro), oltre il 30% sbaglia almeno uno degli item *c* ed *e* e quasi il 20% sbaglia solo uno o due di questi item. Viceversa, è irrilevante la percentuale di allievi che sbaglia sugli altri item e risponde correttamente agli item *c* ed *e*.

I seguenti grafici mostrano comparativamente, per ogni livello, il confronto tra la percentuale di risposte corrette di tutta la popolazione e degli studenti di tipologia A+.

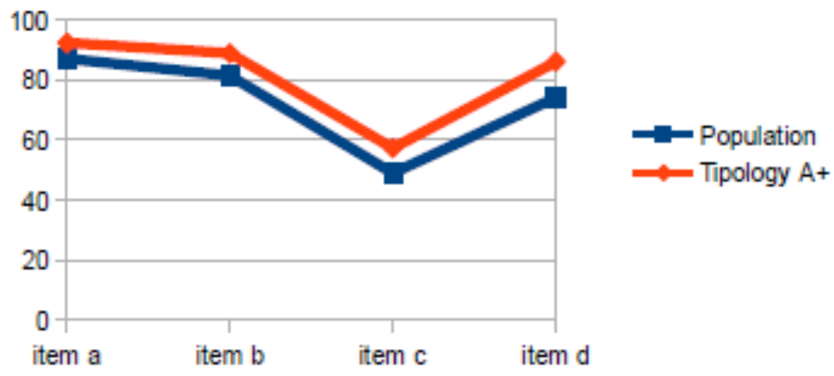


Fig. 17: Confronto fra le percentuali di risposte corrette dell'intera popolazione e della tipologia A+ dei livelli 05 e 06

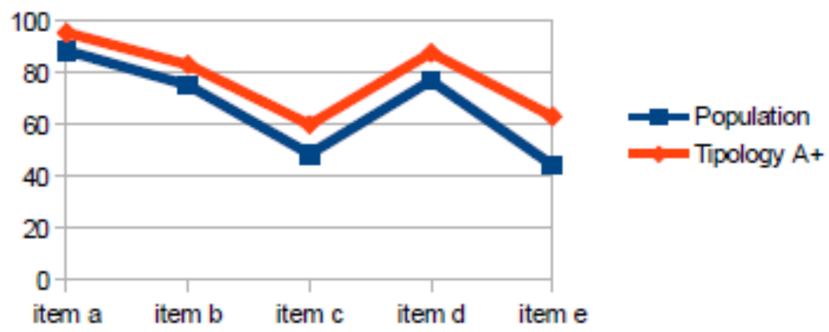


Fig. 18: Confronto fra le percentuali di risposte corrette dell'intera popolazione e della tipologia A+ del livello 08

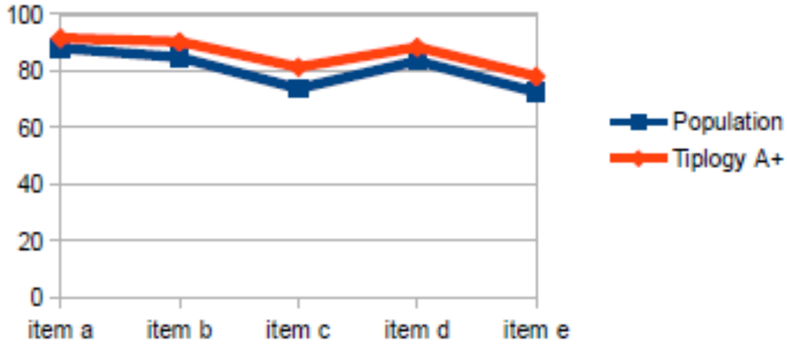
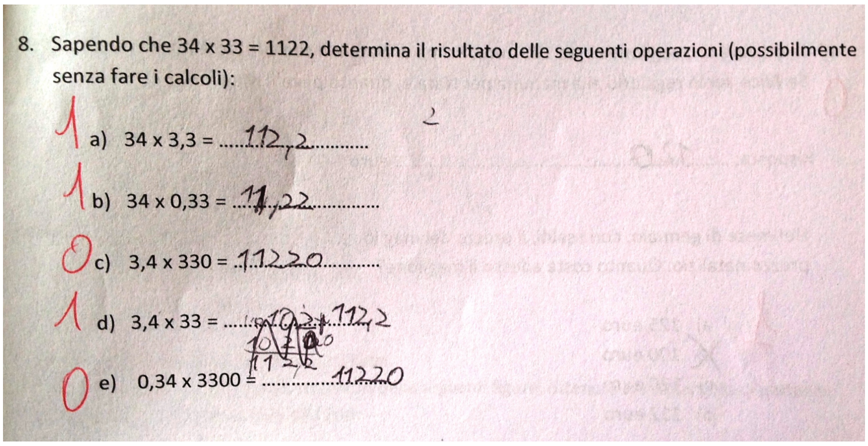


Fig. 19: Confronto fra le percentuali di risposte corrette dell'intera popolazione e della tipologia A+ dei livelli 10 e 11

Analizzando i protocolli degli studenti si hanno conferma delle analisi quantitative[17]. Ad esempio, le due immagini seguenti riportano gli atteggiamenti tipici degli studenti di fronte a questa domanda: gli item c ed e (in cui la risposta coincide con il dato fornito nello stimolo) vengono o sbagliati (Fig.19) o lasciati in bianco (Fig.20).

[17] I segni rossi presenti nei protocolli sono i segni della codifica.



8. Sapendo che 34 x 33 = 1122, determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

1 a) 34 x 3,3 = 112,2

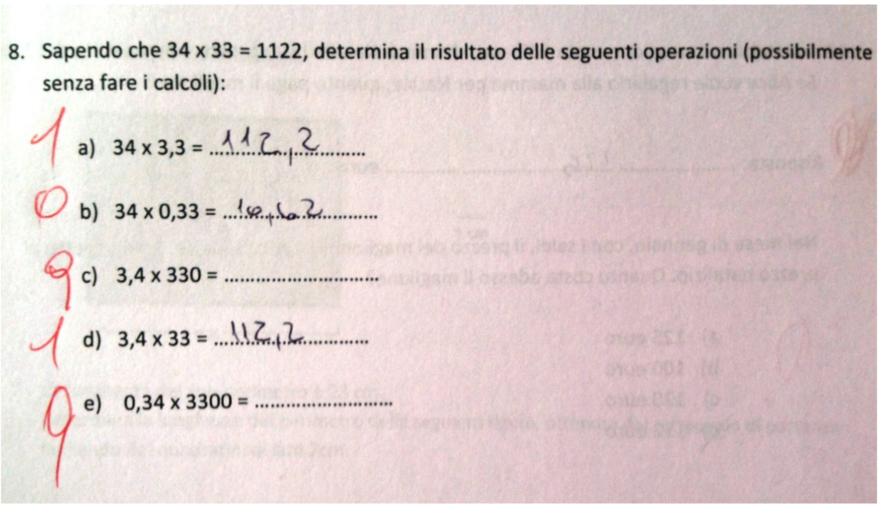
1 b) 34 x 0,33 = 11,22

0 c) 3,4 x 330 = 11220

1 d) 3,4 x 33 = 112,2

0 e) 0,34 x 3300 = 11220

Fig. 20: Protocollo relativo alla domanda "Zero-virgola" del questionario del livello 08, studente n° 1001



8. Sapendo che 34 x 33 = 1122, determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

1 a) 34 x 3,3 = 112,2

0 b) 34 x 0,33 = 10,62

9 c) 3,4 x 330 = ...

1 d) 3,4 x 33 = 112,2

9 e) 0,34 x 3300 = ...

Fig. 21: Protocollo relativo alla domanda "Zero-virgola" del questionario dei livelli 10 e 11, studente n° 229

Le due immagini seguenti invece, (Fig.22 e Fig.23) mostrano un altro atteggiamento tipico riscontrato analizzando i protocolli: gli studenti ricorrono al calcolo in colonna solo per svolgere le operazioni degli item *c* ed *e*.

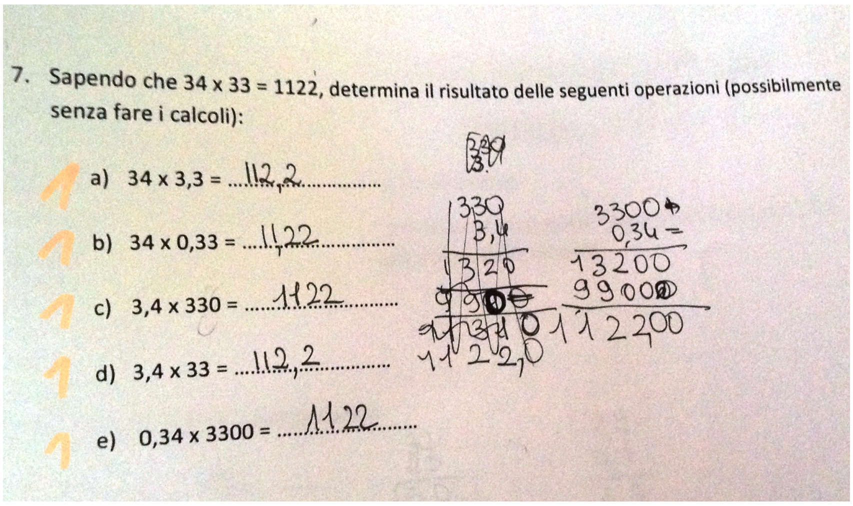


Fig. 22: Protocollo relativo alla domanda "Zero-virgola" del questionario dei livelli 10 e 11, studente n° 218

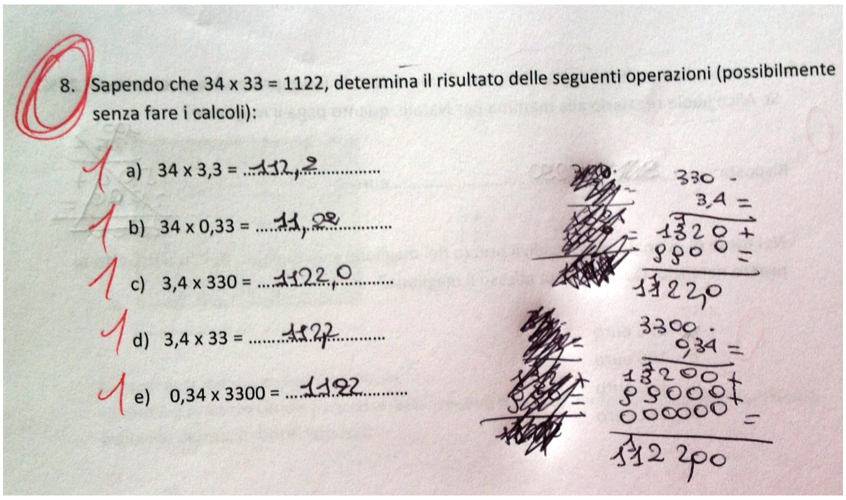


Fig. 23: Protocollo relativo alla domanda "Zero-virgola" del questionario del livello 08, studente n° 1061

4.1.2 Le domande "gli atomi di Marte" e "la massa di Marte"

Nei due questionari, quello rivolto agli studenti del livello 08 e quello rivolto agli studenti dei livelli 10-11, era presente una domanda, inerente alle proprietà delle potenze che richiamava la situazione delle domanda "età della Terra" e "Masse" della prove INVALSI analizzate precedentemente. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, il contesto della domanda è il Pianeta Marte; per verificare quanto il controllo del contesto influisca sull'effetto indagato, la domanda è stata somministrata in due versioni.
La prima versione, "gli atomi di Marte" è la seguente:

Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa 10^{54}. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in 10^{28}, che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a) 10^{54}

b) 10^{33}

c) 10^{28}

d) 10^{26}

Fig. 24: La domanda "Gli atomi di Marte" presente nei questionari dei livelli 08, 10 e 11, versione A.

Il contesto della domanda fa riferimento al *numero di atomi* del pianeta Marte, numero il cui significato sfugge probabilmente a molti studenti di questi livelli. La seconda variante, fa riferimento invece alla *massa* del pianeta. Si era infatti assunto che parlare di *massa* portasse a un maggiore controllo del significato rispetto al parlare di *numero degli* atomi. La domanda è la seguente:

La massa del pianeta Marte è stimata in circa $6{,}4\text{x}10^{26}$ g. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce con una massa di circa 10^{5}g, che ha portato sulla terra. Quant'è, all'incirca, la massa di Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a) $6{,}4 \times 10^{26}$ g

b) 5.4×10^{26} g

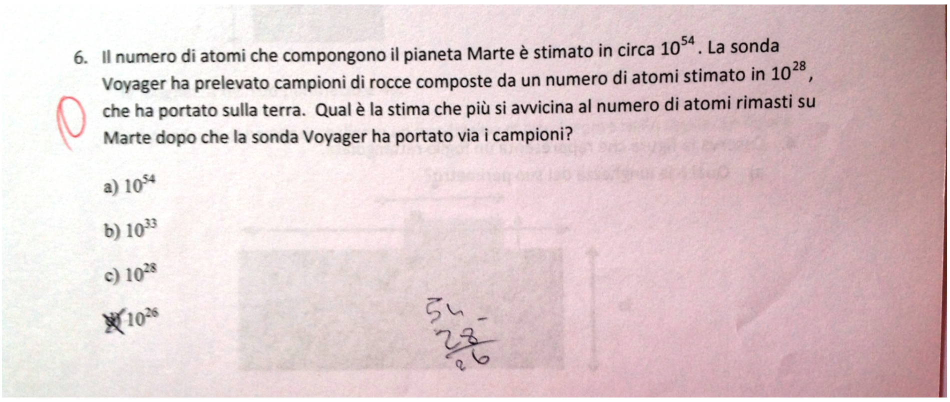
c) $6{,}4 \times 10^{5}$ g

d) $6{,}4 \times 10^{21}$ g

Fig. 25: La domanda "La massa di Marte" presente nei questionari dei livelli 08, 10 e 11, versione B.

L'ipotesi era che risultasse per lo studente più naturale accettare il fatto che la massa di un pianeta non cambia se una sonda porta via un centinaio di kg di rocce, e quindi che la risposta fosse uno dei dati contenuti nell'enunciato del problema.

Al livello 11 le percentuali di risposte corrette sono del 40,5%, al livello 10 del 15,8% e a livello 08 del 8%. Gli studenti del livello 11 che avevano la versione A hanno risposto correttamente il 42,9% mentre tra quelli che avevano la versione B hanno risposto correttamente il 38,5%. La situazione si rovescia al livello 10 dove solo il 13,3% degli studenti che avevano la versione A ha risposto correttamente e un po' di più, il 18%, la percentuale di risposte corrette degli studenti che avevano la versione B. I risultati ottenuti mostrano che, in questo caso, l'effetto indagato è indipendente dal controllo sul significato del contesto della domanda. A conferma del fenomeno rilevato nelle domande analizzate in precedenza, il distrattore d, nel quale l'esponente della potenza è ottenuto per sottrazione degli esponenti delle potenze presenti nel testo della domanda, è quello più scelto a tutti i livelli (è stato scelto dal 61% degli allievi del livello 08 e dal 49% degli allievi dei livelli 10 e 11).



6. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa 10^{54}. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in 10^{28}, che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a) 10^{54}

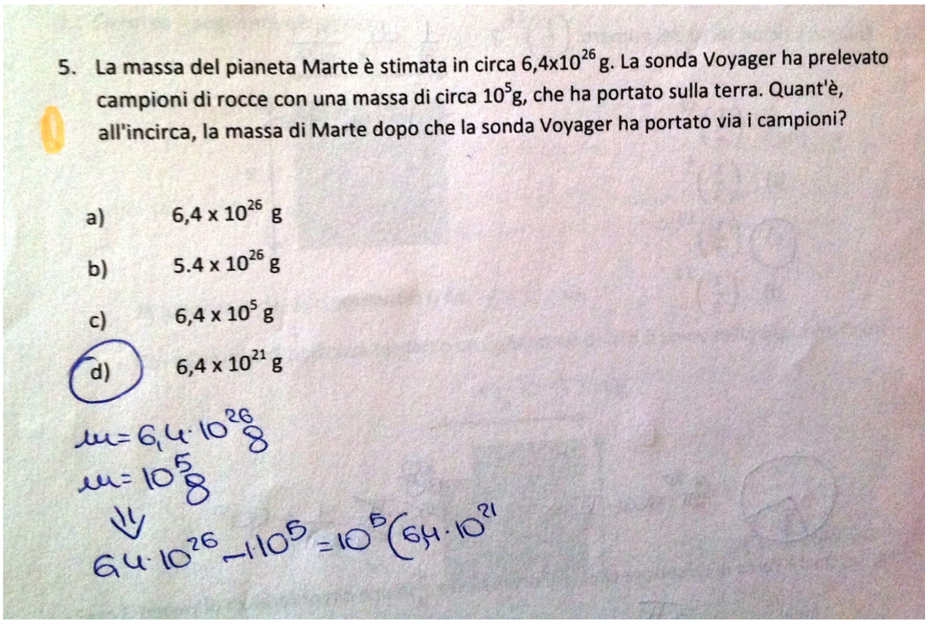
b) 10^{33}

c) 10^{28}

d) 10^{26}

$54 - 28 = 26$

Fig. 26: La domanda "Gli atomi di Marte" del questionario dei livelli 10 e 11, versione A, studente n°184.



5. La massa del pianeta Marte è stimata in circa $6{,}4\mathrm{x}10^{26}$ g. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce con una massa di circa 10^{5}g, che ha portato sulla terra. Quant'è, all'incirca, la massa di Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a) $6{,}4 \times 10^{26}$ g

b) 5.4×10^{26} g

c) $6{,}4 \times 10^{5}$ g

d) $6{,}4 \times 10^{21}$ g

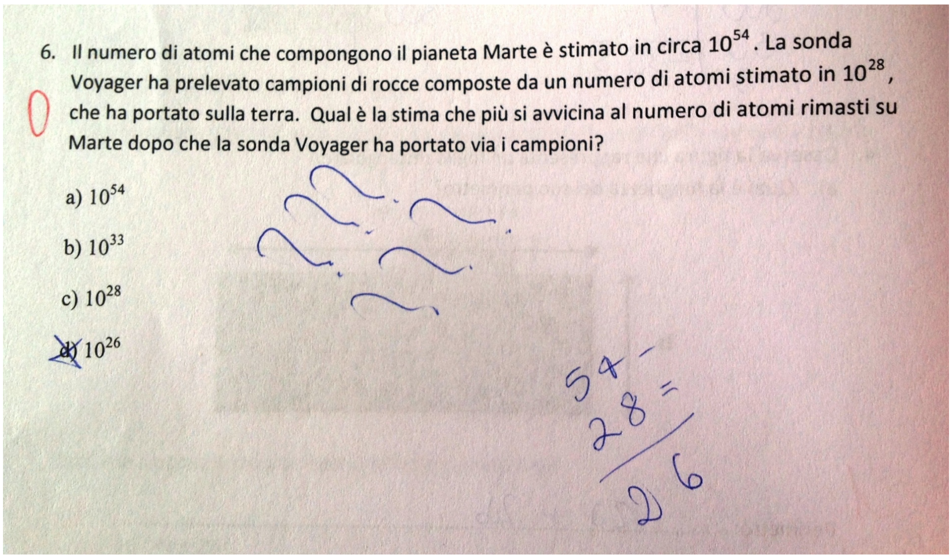
$m = 6{,}4 \cdot 10^{26}$ g

$m = 10^{5}$ g

$\Downarrow$

$6{,}4 \cdot 10^{26} - 1 \cdot 10^{5} = 10^{5}(6{,}4 \cdot 10^{21}$

Fig. 27: La domanda "La massa di Marte" del questionario dei livelli 10 e 11, versione B, studente n°153.



6. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa 10^{54}. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in 10^{28}, che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

a) 10^{54}

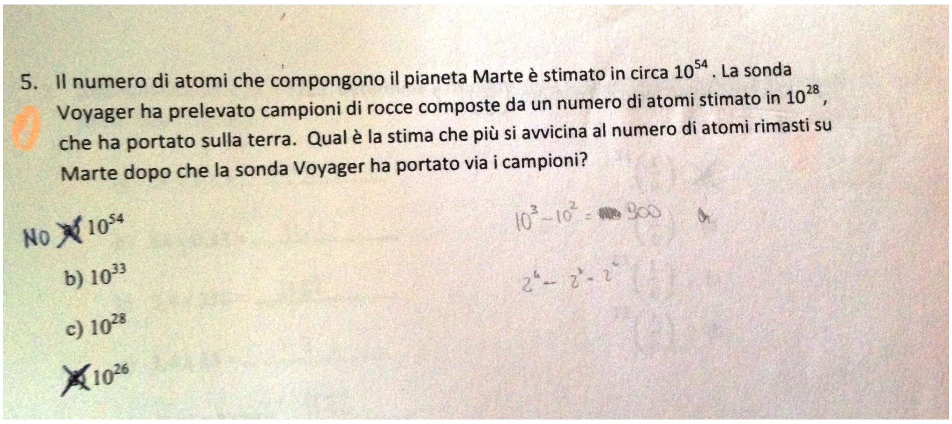
b) 10^{33}

c) 10^{28}

d) 10^{26}

$54 - 28 = 26$

Fig. 28: La domanda "Gli atomi di Marte" del questionario del livello 08, versione A, studente n°1024.



5. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa 10^{54}. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in 10^{28}, che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

NO a) 10^{54}

b) 10^{33}

c) 10^{28}

d) 10^{26}

$10^3 - 10^2 = 900$

Fig. 29: La domanda "Gli atomi di Marte" del questionario dei livelli 10 e 11, versione A, studente n°219.

4.1.3 La domanda "del maglione"

Nei questionari dei livelli 08, 10 e 11 c'è la seguente domanda (Fig. 29), suddivisa in due item. Entrambi gli item indagano competenze nell'ambito della soluzione di situazioni problematiche che coinvolgono il calcolo di percentuali.

In ottobre un maglione costa 100 euro. Prima di Natale il suo prezzo è aumentato del 25%. Se Alice vuole regalarlo alla mamma per Natale, quanto paga il maglione?

Risposta: ……………………………………………………………… euro

Nel mese di gennaio, con i saldi, il prezzo del maglione si è ribassato del 20% rispetto al prezzo natalizio. Quanto costa adesso il maglione?

a) 125 euro
b) 100 euro
c) 120 euro
d) 112 euro

Fig. 30: "La domanda del maglione" presente nei questionari dei livelli 08, 10 e 11.

Il primo item è a risposta aperta univoca mentre il secondo è a risposta multipla e la risposta corretta è 100, cioè uno dei dati contenuti esplicitamente nello stimolo della domanda.
La tabella seguente, Tab.9, mostra le percentuali di risposta corretta nei due item, suddivise per livello scolastico.

Risposte corrette	Item a	Item b	Item a e Item b
Livello 08	70 (61%)	21 (18,58%)	13
Livelli 10 e 11	187 (85,78%)	118 (54,13%)	117

Tab. 9: Il numero e le percentuali di risposte corrette alla "Domanda del maglione" presente nei questionari dei livelli 08, 10, 11.

Dalle percentuali di risposte di vede che sia a livello che a livello 10/11, molti studenti che dimostrano di saper calcolare una percentuale (risposta corretta all'item a) sbagliano la riposta all'item b, in cui occorreva di nuovo semplicemente calcolare una percentuale. Il fenomeno, in questo caso, può essere rafforzato dalla presenza delle note misconcezioni sulla composizione di percentuali.

4.2. Le interviste di gruppo

Come si è visto nel Cap. 3, gli studenti, all'inizio delle interviste dovevano risolvere alcuni task. Gli studenti selezionati avevano ottenuti buoni risultati nella domanda 1 dei questionari della sperimentazione, ma avevano sbagliato a scrivere i risultati degli item *c* ed *e* della domanda "0-virgola" oppure avevano eseguito correttamente tutti i calcoli nei 5 item svolgendo in colonna solo gli item *c* ed *e*. Il comportamento degli studenti nei due task proposti durante l'intervista ha confermato i risultati emersi nell'analisi quantitativa (risultati corretti sensibilmente inferiori negli item *c* ed *e* nella domanda 1a e nell'item *b* nella domanda 2a; nessuna differenza tra le percentuali di risposte corrette nelle due domande). Anche per quanto riguarda la domanda 2, i risultati sono stati in linea con quelli ottenuti durante la sperimentazione (le percentuali di risposte corrette sono confrontabili con i risultati ottenuti nell'item b della domanda "del maglione" dei questionari per i livelli 10 e 11).

Successivamente sono stati discussi con gli intervistati sia la risoluzione dei task appena risolti che alcuni dei loro protocolli della sperimentazione senza alcun segno di correzione da parte del ricercatore e senza che emergesse alcun riferimento a quale fossero le risposte corrette e quali quelle sbagliate. I risultati rilevati nei protocolli delle interviste e le osservazioni e argomentazioni emerse durante le discussioni con gli intervistati hanno confermato l'ipotesi di partenza. La maggior parte degli studenti, 9 su 12 ha confermato (chi a livello più implicito, chi a livello più esplicito), in riferimento ad almeno una delle domande volte ad indagare l'effetto presenti o nei protocolli della sperimentazione o nei protocolli delle interviste, che il fatto che il risultato fosse un dato esplicitamente presente nel testo dello stimolo ha costituito un elemento di disturbo[18].

Un'intervista di gruppo particolarmente interessante è la seguente, effettuata a un gruppo di studenti del Liceo Statale "B. Rambaldi – L. Valeriani - Alessandro Da Imola" di Imola (BO). Il protocollo riportato di seguito fa riferimento alla fine dell'intervista; gli studenti avevano già svolto i task iniziali e si stavano già commentando i loro protocolli della sperimentazione.

[18] In questa prima fase, focalizzata alla conferma del dato rilevato quantitativamente, le interviste non sono state categorizzate.

In dettaglio si stavano discutendo i risultati della domanda “la massa del Pianeta Marte”; entrambi gli studenti avevano svolto la versione A del questionario per il livello 10/11: lo studente S_2 ha risposto correttamente, lo studente S_1 ha prima messo la risposta giusta (A), poi si è corretto e ha scelto la risposta D (vedi protocollo n°219, Par. 4.1.2). Nel testo seguente R1 e R2 sono i due ricercatori che hanno condotto l’intervista ed S1 lo studente e si fa riferimento al confronto fra la domanda “gli atomi del Pianeta Marte” (Fig. 24, Par. 4.1.2) e la domanda “la massa del Pianeta Marte” (Fig. 25, Par. 4.1.2) .

15:05 – 15:28	21	R_1: Dimmi se vedi delle differenze, qui come risponderesti.. (indicando la domanda “la massa del Pianeta Marte” nel testo del questionario per i livelli 10/11, versione B)
	22	S_1: Non mi ricordo mica sinceramente nemmeno quella che ho fatto io
	23	R_1: Te la faccio vedere (mostrando la domanda “gli atomi del Pianeta Marte” nel testo del questionario per i livelli 10/11, versione A, protocollo n° 219 di S_1)
	24	R_2: Eccola, leggila per bene
	25	R_1: Ci spieghi come hai ragionato, quali sono le operazioni che hai fatto .. come mai hai fatto una scelta e poi l’hai corretta?
	26	S_1: Innanzitutto questa domanda qui è stata una domanda un po’ particolare perché non ho capito se era una domanda trabocchetto o no perché quando ho letto che la sonda aveva prelevato una quantità di atomi pari a 10^{28}, ho messo inizialmente la risposta A perché ho pensato che comunque

il numero generale di atomi del pianeta non cambiava! Poi invece ho capito che era una domanda… mmm… prettamente matematica perciò ho applicato le proprietà delle potenze perciò ho fatto 10^{54} meno 10^{28} e 54 meno 28 uguale 10^{26}

27 R_2: Quindi all'inizio hai scritto questo (indicando la risposta A del protocollo n°219) poi invece hai pensato che è una domanda di matematica e hai cambiato idea?

28 S_1: Si perché all'inizio proprio pensavo.. ho fatto nel senso.. ne ho fatto una questione fisica, nel senso se uno prende 10^{28} di atomi prende un tipo di atomo non è che li toglie tutti dal pianeta, anzi è come se non ne togliesse.

Come si evince dalla sue parole, lo studente S_1 leggendo la domanda ha subito interpretato il testo da un punto di vista fisico (lo studente frequentava la classe terza di un liceo scientifico e dalla classe prima ha seguito fisica come materia scolastica).
Dal punto di vista fisico lo studente si è accorto che prelevando la quantità di atomi indicata nello stimolo, non sarebbe affatto cambiato l'ordine di grandezza della quantità totale di atomi del Pianeta Marte. Però poi quando ha pensato che stava risolvendo un task di matematica ha cambiato strategia risolutiva, ha applicato le "proprietà delle potenze" e ha "fatto calcoli" che lo hanno portato a sbagliare. Alcune possibili cause del suo atteggiamento sono certamente riconducibili a due note clausole del contratto didattico, clausola di *delega formale* e clausola di *esigenza di giustificazione formale* (D'Amore, 2007). Indubbiamente si rileva il seguente fatto: quando lo studente si comporta in riferimento "al fare matematica", cambia idea e non sceglie più la risposta corretta contenete un dato esplicita-

mente presente nel testo. Nei paragrafi successivi si analizzeranno altre interviste e si effettuerà un'interpretazione delle risposte degli studenti facendo ricorso ai costrutti analizzati nel quadro teorico cercando di inquadrare sempre meglio le cause dell'effetto in questione.

4.3. L'analisi qualitativa

4.3.1. Le risposte degli studenti nelle interviste individuali

Di seguito sono riportati alcuni testi delle interviste individuali.

All'inizio di ogni intervista vengono riportati, per ognuna delle quattro domande presenti nel testo (Par. 3.3.2), se lo studente l'ha svolta correttamente o meno e se ha esplicitato i calcoli svolti ad alta voce durante la risoluzione oppure dopo lo svolgimento del task.

S10_06, Liceo Scientifico-Archimede, San Giovanni in Persiceto (Bo)

1_ Corretta. Esplicita i calcoli mentre svolge il task.

2_ Corretta. Esplicita i calcoli mentre svolge il task.

3_ Errata. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

4_ Errata. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

Lo studente ha già svolto i task 1, 2 e 3 e sta esplicitando alla ricercatrice lo svolgimento del terzo task.

04:40 – 11:15	1	S10_06: Potrebbe essere la B, ma non ne sono sicura
	2	R: Mi spieghi come hai fatto?
	3	S10_06: Stavo pensando che, dato che l'età della Terra è 4,5x10^9 e l'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa.. ho fatto 10^9-10^6 però non ne sono sicurissima
	4	R: Di cosa non sei sicurissima?
	5	S10_06: Che vada bene
	6	R: Che cosa hai fatto per arrivare alla risposta?
	7	S10_06: Ho semplicemente sottratto i vari esponenti di 10, però non..
	8	R: Non sei convinta? Prova a dirmi perché?
	9	S10_06: Perché non mi sembra che si faccia 4,5x10^9 – 10^6. Perché per diventare così bisognerebbe dividere
	10	R: Bisognerebbe dividere per fare la sottrazione degli esponenti. E quindi come puoi fare?
	11	S10_06: Si potrebbe risolvere facendo proprio il calcolo 4,5x10^9
	12	R: Prova a pensare anche senza calcolare. Se tu facessi 4,5x10^9 e ci togliessi 10^6, secondo te, cosa ti potrebbe venire come risultato tra quelli presenti nelle opzioni?
	13	S10_06: C'è per forza il 4,5 che rimane perché si fa 10^6
	14	R: 4,5 rimane, quindi quale può essere il problema?
	15	S10_06: Forse 4,5x10^6, ma a fare i calcoli così non saprei (guarda la calcolatrice)
	16	R: Vuoi usare la calcolatrice?
	17	S10_06: Non so come si fa, non ho la calcolatrice così

io

18 R: (La ricercatrice aiuta lo studente nel calcolo con la calcolatrice)

19 S10_06: Rimane uguale, rimane 4,5x10^9

Si passa allo svolgimento della quarta domanda e infine, la ricercatrice chiede allo studente di provare a fornire una propria interpretazione dell'atteggiamento suo, e di tanti altri suoi coetanei, di fronte alla domanda 3.

12:30 – 13:57

31 S10_06: Perché secondo me, essendo già un dato che compare nel testo, può sembrare strano che sia anche la risposta

32 R: Può sembrare strano che sia la risposta corretta. Ma perché può sembrare strano? E' questo che devo capire. Perché?

33 S10_06: Perché quando si risolve un problema di solito il risultato che ti viene non è un dato che ti compare già nel testo, magari si può pensare di aver fatto un calcolo che è servito solo a trovare un dato che era già nel testo. Per quello può sembrare strano che, essendo già presente nel testo, sembra un po' impossibile che sia anche il risultato

34 R: Perché solitamente non è così?

35 S10_06: Perché solitamente il risultato non è uguale a un dato già presente nel testo

S10_15, Istituto Sportivo, Bolzano (Bz)

1_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

2_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

3_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

4_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

Lo studente ha già svolto i task 1, 2 e 3 e sta esplicitando alla ricercatrice lo svolgimento del terzo task.

05:15 - 07:35	7	S10_15: Secondo me, poi non lo so, io so che la risposta D non è giusta perché l'abbiamo discussa anche in classe
	8	R: Sicuramente è giusta, ma volevo sapere perché la risposta corretta viene scartata a priori
	9	S10_15: Secondo me, leggendo la domanda, anche io avrei risposto la D, perché mi dice che l'Homo Erectus è comparso 10^6 anni fa, quale è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus? Quindi, visto che la Terra è valutata attorno ai $4{,}5x10^9$…secondo me leggendo la domanda uno scarta subito la risposta A perché pensa subito a fare la differenza tra gli anni, perché è come dire che Marco è nato 10 anni fa e gli hanno regalato la prima penna 6 anni fa e quindi…

cioè non è proprio lo stesso paragone però io lo associo a questo

10 R: Fanno la differenza. Io sono d'accordo che ti viene da rispondere la D, ma vorrei sapere perché la risposta corretta viene esclusa a priori

11 S10_15: Secondo me, perché c'è proprio scritto qua, cioè se io leggo in un testo di matematica un dato poi leggo che ce ne è un altro e poi non mi chiede la differenza, ma più o meno la stessa cosa, ovviamente penso subito che non può essere quello visto che c'è un altro dato che devo sottrarre

S10_10 Liceo delle Scienze Umane, Istituto Mattei, San Lazzaro (BO)

1_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

2_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

3_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

4_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

14:05 - 15:04

35 S10_10: Si, vedendo il risultato uguale magari si è sempre spinti a cercare un risultato diverso, facendo dei calcoli soprattutto. Cioè vedendo un dato nel problema, e vedendo un risultato uguale al dato presente nel problema, si è diffidenti a scrivere lo stesso risultato perché si pensa di fare calcoli in cui non possa venire un risultato uguale a quello già scritto

36 R: Quindi è proprio il fatto che devo fare calcoli che induce a non rispondere con lo stesso dato del problema?

37 S10_10: Si

S10_03 ITIS Majorana, San Lazzaro (Bo)

1_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

2_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

3_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

4_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

Lo studente ha già svolto tutti task. Ha svolto correttamente il task 3 e ha dichiarato di averlo già visto precedentemente. Durante lo svolgimento ha chiesto alla ricercatrice la calcolatrice per svolgere i calcoli. E, come leggiamo nelle parole seguenti, questo fatto è stato determinante per l'accettazione della soluzione.

13:30 – 13:31	10	R: Ti sei convinta quando ti ho dato la calcolatrice?
	11	S10_03: Sì, anche però non avevo ancora letto le soluzioni. Sicuramente la calcolatrice non sbaglia, quindi non potevo dubitare.

S10_24 Liceo Scientifico-Archimede, San Giovanni in Persiceto (Bo)

1_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

2_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

3_ Non corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

4_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

Lo studente ha già svolto i task 1, 2 e 3 e sta esplicitando alla ricercatrice lo svolgimento del terzo task.

02:51 – 06:40	1	R: Mi dici che ragionamento hai fatto?
	2	S10_24: Ho tolto 4,5 e ho sottratto gli esponenti. Però non è giusto
	3	R: Credi che non sia giusto?
	4	S10_24: Stavo pensando, dovrei fare una sottrazione. Se tolgo l'età della Terra a questo, ottengo l'età della Terra quando l'Homo Erectus è nato. Però non è facile. Non mi ricordo come si fa. Questo risultato è impossibile perché è uguale, quindi la risposta A non è. La risposta D non è.
	5	R: Vuoi la calcolatrice? Potrebbe aiutarti?
	6	S10_24: Se ci stanno tanti numeri, sì. Dovrebbe essere la risposta B
	7	R: Quali risposte hai escluso fin ora?
	8	S10_24: La A l'ho esclusa perché è identica e quindi non è assolutamente possibile. La risposta D non è possibile perché sarebbe un numero di anni piccolissimo. Restano le altre due. Stavo pensando a quale potrebbe essere la più verosimile, perché i numeri sono tanti tanti .. però potrebbe essere la B. Con 10^6 diventano troppo pochi.

Lo studente passa allo svolgimento della quarta domanda, che svolge correttamente e infine il discorso torna sulla terza domanda. La ricercatrice mostra la risposta corretta spiegando lo svolgimento corretto e chiedendo un'interpretazione dei risultati ottenuti su scala nazionale.

09:21 – 12:10 6 R: Questa è una prova Invalsi somministrata qualche anno fa agli studenti italiani della tua età. L'avevi mai vista?

7 S10_24: No, non l'avevo mai vista

8 R: A livello nazionale è stata una domanda che ha avuto una percentuale di risposte corrette molto bassa. È stata sbagliata da tanti tuoi coetanei, secondo te perché?

9 S10_24: Sì, in effetti ora che ci penso, non era difficile, avevo un numero molto molto grande e un numero molto molto piccolo e si poteva trascurare, era una cavolata

10 R: Ho ipotizzato che in un problema di matematica quando la soluzione è uguale al dato scritto nel problema..

11 S10_24: ..fa scattare che non possa essere quella

12 R: E' vero?

13 S10_24: Sì, me ne sono accorto. Infatti, la prima cosa che ho detto è che la risposta A non poteva essere perché era uguale

14 R: Mi provi a spiegare a parole tue perché in matematica si pensa che la risposta non possa essere uno dei dati del testo?

15 S10_24: E' una concezione che abbiamo proprio in testa. Nel senso che se vediamo una cosa che noi sottraiamo, il risultato non può essere uguale. E' come se ragionassimo con numeri molto più piccoli. Se fai 2-4 è impossibile che venga 2. Verrà un numero minore che sarà -2. La concezione che abbiamo preso alle elementari e alle medie, questo numero se sottratto non potrà mai essere uguale a se stesso, ma se effettivamente ragioniamo in termini molto grandi è uguale

16 R: Tu la vedi molto ristretta a questa cosa, al fatto che devi fare la sottrazione o come cosa generale che se c’è il dato nel testo ti viene istintivo cambiare risposta?

17 S10_24: Credo che cambiare risposta sia innato, istintivo, ancora prima di pensarci appena vedi pensi che non possa essere quello, a meno che non ci siano altri dati. Quando vedi una sottrazione pensi subito questo

18 R: Se avessi un problema senza risposta multipla, dove un dato del testo corrisponde al tuo risultato finale, penseresti di aver sbagliato?

19 S10_24: No, dopo aver ottenuto il risultato ci penso, se i calcoli sono giusti, il risultato non mente. Se viene un numero leggermente più piccolo approssimo e ottengo il mio risultato

S10_07 Liceo Scientifico-Archimede, San Giovanni in Persiceto (Bo)
1_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.
2_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.
3_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.
4_ Corretta. Esplicita i calcoli dopo avere svolto il task.

08:47 – 11:15	17	S10_07: Penso sia perché c'è nella domanda, non vedo altri motivi per cui questa debba essere una risposta con un tasso più basso
	18	R: Perché secondo te, in matematica si è convinti o si tende a rifiutare un pochino che il risultato possa essere uguale a uno dei dati nel testo?
	19	S10_07: Penso che sia perché siamo abituati ad avere più un'espressione in cui è difficile che il risultato venga come nel testo, è una cosa quasi impossibile, penso che il risultato di una espressione o un'uguaglianza non venga come nel testo. Quindi penso sia per quello
	20	R: Secondo te, è più marcata questa cosa quando si devono risolvere operazioni o problemi?

21 S10_07: Quando si devono risolvere dei problemi

22 R: Perché? Pensa a un qualunque problema o a una domanda aperta in cui ti viene come risposta un dato che coincide con uno presente nel testo. Ti viene da pensare di aver sbagliato?

23 S10_07: Io ho fiducia in me stesso, però io non penso di aver sbagliato, ma vedo da alcuni miei compagni, facendo i compiti assieme, vedo che loro pensano di aver sbagliato. Oppure un'altra insicurezza quando il risultato viene molto elevato o molto basso

24 R: Secondo te, è quindi per abitudine? Perché non sono abituati ad avere risultati molto alti o bassi?

25 S10_07: Sì, per abitudine

4.3.2 Una classificazione delle risposte degli studenti

Dovendo spiegare perché hanno dato una risposta errata o dovendo interpretare il comportamento dei propri coetanei che sbagliano, gli studenti intervistati vedono comunque una relazione con il proprio percorso didattico che mette in evidenza di volta in volta il rapporto con l'insegnante, le abitudini del contesto classe o un più generale rapporto con la matematica. Le risposte fornite si possono classificare quindi principalmente con i costrutti di contratto didattico o del costume didattico (abitudini assunte nelle pratiche didattiche durante le lezioni di matematica oppure consuetudini apprese nello svolgere le operazioni e risolvere problemi matematici) e di norma sociomatematica (riferimento esplicito ai calcoli e a cosa è/non è ammesso mentre si fa matematica).

Alcuni spiegano il proprio comportamento come se stessero enunciando una legge generale (si veda ad es. S10_06). In situazioni del genere è come se il contratto didattico avesse costruito un criterio di comportamento oggettivo, come se si fosse istituzionalizzato. C'è una costruzione di tipo "meta" e si è di fronte a un livello di generalità di secondo livello.
In altre interviste si può invece riscontrare la presenza del contratto didattico a livello implicito (si veda ad es. S10_07); in linea con la definizione del costrutto teorico, infatti, spesso le "regole" che si instaurano tra allievo, insegnante e matematica spesso sono implicite.
Altri si riferiscono esplicitamente ai calcoli e a che cosa è lecito in matematica (si veda ad es. S10_24); si tratta di una norma sociomatematica unilaterale e distorta in quanto è una concezione degli studenti nei confronti della matematica e decide cosa *non* è lecito fare in matematica. Molto probabilmente questa norma si è instaurata dopo numerose esperienze vissute dagli studenti durante le quali non si sono mai trovati di fronte a problemi ed esercizi di matematica nei quali il risultato fosse un dato esplicitamente presente nello stimolo; questa regola si è quindi instaurata molto probabilmente in seguito a situazioni di contratto didattico (Par. 2.2.5).
Nelle parole degli studenti, in generale, si riscontra numerose volte la proiezione nel futuro di una regolarità vista nel passato; una trasposizione di un criterio matematico che ha funzionato nel passato (fenomeno che viene talvolta chiamato *principio di continuità*).
Alcuni studenti fanno riferimento esplicito a un principio regolativo come quello esplicitato (Par. 2.1) e richiamano esplicitamente un comportamento legato al fatto che c'è un principio, altri devono invece essere sollecitati dalla ricercatrice.
Anche se manifestato in modo implicito, nella maggior parte delle interviste effettuate (22 su 24) si è quindi riscontrata la presenza di

un principio regolativo che ha influenzato l'atteggiamento e il comportamento degli studenti di fronte ai task proposti.

Capitolo quinto
Conclusione e sviluppi futuri

5.1 Risposte alle domande di ricerca

Sulla base dei risultati delle indagini qualitative e quantitative effettuate, in questo paragrafo si cercherà di dare una risposta ad ognuna delle domande di ricerca, poste nel paragrafo 2.4.

- *Questo fenomeno si manifesta in ambiti matematici diversi?*

  L'idea di ricerca è nata da un quesito delle rilevazioni INVALSI che richiede la risoluzione di un problema con i dati espressi in potenze di 10. Conferme del fenomeno si hanno avute in altre domande delle rilevazioni nazionali sia in ambito aritmetico che in ambito geometrico. Come si è visto nel Cap. 4, l'analisi dei dati della sperimentazione effettuata fa emergere che l'effetto si è manifestato in domande che richiedono conoscenze e competenze per quanto riguarda la risoluzione di quesiti con le potenze, con il calcolo di percentuali e con moltiplicazioni di numeri razionali.

- *Questo fenomeno interessa tutti i livelli scolastici?*

Le domande da cui è nata la ricerca sono state somministrate, a livello nazionale, a studenti della classe terza della scuola secondaria di primo grado e della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado. La sperimentazione quantitativa ha coinvolto studenti delle seguenti classi:

- classe quinta della scuola primaria;
- classe prima della scuola secondaria di primo grado;
- classe terza della scuola secondaria di primo grado;
- classe seconda della scuola secondaria di secondo grado;
- classe terza della scuola secondaria di secondo grado

e ha confermato la manifestazione dell'effetto in tutti i livelli indagati.
L'analisi delle interviste (Par. 4.3.1) degli studenti di altre classi seconde di altre scuole secondarie di secondo grado, confermano anche da un punto di vista qualitativo la presenza dell'effetto "età della Terra".

- *Questo fenomeno si manifesta in alunni con diverse abilità matematiche diverse?*

Per quanto riguarda l'indagine quantitativa nelle scuole secondarie di secondo grado è stato scelto di somministrare i questionari a scuole con indirizzi diversi e con curricoli matematici differenti. Le curve caratteristiche delle domande D5 - Livello 10 - 2010/11 e D6 – Livello 10 – 2012/13 (Fig. 6 e Fig.10, Par. 1.3) mostrano che il fenomeno rilevato a livello nazionale si manifesta indipendentemente dalla competenza (misurata in relazione allo svolgimento delle prove) degli studenti. La sperimentazione effettuata a tutti i livelli indagati nell'indagine quantitativa (livelli 05, 06, 08, 10 e 11) riguardante la domanda "zero-virgola" (Par. 4.1.1) conferma i dati nazionali. Infatti, grazie alla misurazione delle abilità di calcolo degli studenti nella domanda schermo (Fig. 11, Par. 4.1.1), si è verificato che la presenza dell'effetto "età della Terra" è indipendente dalla padronanza del contenuto (Fig. 17, Fig. 18 e Fig.19, Par. 4.1.1).

- *Questo fenomeno dipende dal controllo semantico che l'allievo ha sui contenuti della domanda?*

  Per poter rispondere a questa domanda è stata fatta la scelta metodologica di somministrare la domanda che richiama la domanda "età della Terra" in due versioni: "gli atomi di Marte" (versione A, Fig. 24, Par. 4.1.2) e "la massa di Marte" (versione B, Fig. 25, Par. 4.1.2).
  L'ipotesi era che risultasse per lo studente più naturale accettare il fatto che la massa di un pianeta non cambia se una sonda porta via un centinaio di kg di rocce. Queste due versioni sono presenti nei questionari dei livelli 08, 10 e 11 e come mostrano i dati rilevati, la percentuale di risposte corrette fornite dagli studenti è indipendente dalla versione della domanda.

Nel complesso, la sperimentazione attraverso la somministrazione dei questionari ha confermato la presenza del fenomeno e avvalorato quando emerso dalle rilevazioni standardizzate nazionali. La ricerca voleva inoltre indagare se il comportamento degli allievi in cui si osserva l'effetto dipende da un principio regolativo vicino a quello enunciato (Par. 2.1). Sono state effettuate delle interviste a studenti frequentanti classi seconde di scuole secondarie di secondo grado ed è stato indagato il loro comportamento di fronte alla domanda "età della Terra". Le interviste mostrano che i loro comportamenti sono influenzati da abitudini di classe, abitudini nello risolvere problemi e operazioni in matematica, convinzioni su operazioni matematiche e fiducia nei calcoli. Tutti questi fattori contribuiscono, a livelli diversi, al formarsi di un principio regolativo che influenza l'attività matematica degli allievi.

5.2. Implicazioni didattiche

Questa ricerca avvalora quanto emerso da altre sul contratto didattico. In particolare, mostra come i problemi legati al contratto didattico siano presenti anche in livelli scolastici avanzati. Come si è visto durante la trattazione, ovviamente le regole e le norme che si instaurano in classe non sono le stesse ad ogni livello e spesso cambiano con il cambiare del livello scolastico e con l'aumentare dell'età. Anche se il contratto didattico, man mano che si progredisce lungo il percorso scolastico, diventa sempre più interiorizzato e più collegato alla matematica, esso è sempre presente e sarebbe importante e necessario che anche gli/le insegnanti della scuola secondaria di secondo grado e di corsi universitari prestassero attenzione a dinamiche di tipo contrattuale. Ma come fare a superare gli "effetti" del Contratto Didattico? Si è visto che la devoluzione è un passaggio che non può venire solo con l'acquisizione di una maggior competenza da parte degli attori della situazione didattica, ma passa attraverso un complesso di autonomia critica e la liberazione da comportamenti abitudinari. A livello di comportamento degli insegnanti si è già notato che a volte l'autorità è necessaria all’apprendimento e spesso, soprattutto nei primi anni di scolarità, è necessario un imperativo autoritario e quindi l’instaurarsi del contratto didattico che, come tutti i “poteri” ha effetti positivi ed effetti degenerativi. Certamente alcune ideologie educative, cercando di mettere a tacere l'errore, non solo riescono a fare insorgere il terrore di sbagliare da parte dello studente, ma impediscono all’insegnante di utilizzarlo in maniera formativa. Il guardare solo a livello superficiale *dove* è l’errore non aiuta gli insegnanti nel processo di insegnamento/apprendimento in quanto solo quando si va a fondo e si cercano di comprendere le cause degli errori degli studenti si riesce ad intervenire in modo formativo mettendo in atto interventi mirati e utili che aiuteranno significativamente l’apprendimento degli studenti. In definitiva, molte delle implicazioni didattiche delle ricerche sul contratto sviluppate per la scuola primaria appaiono, alla luce di questa ricerca, altrettanto valide e importanti per l’istruzione matematica più avanzata.

5.3. Problemi aperti, direzioni future

All’interno dell’epistemologia dell’apprendimento matematico, gli studi sul contratto didattico si stanno rilevando molto fruttiferi e di grande interesse; la maggior parte della letteratura presente è concentrata sulle dinamiche contrattuali presenti nella scuola primaria. Questo contributo studia un fenomeno di contratto didattico presente in tutti i livelli scolastici e le direzioni future che prenderà la ricerca saranno in questa direzione.

In particolare si cercherà di investigare le seguenti questioni:

- *Le manifestazioni dell'effetto "età della Terra" in ambito geometrico.* Una delle domande INVALSI in cui si è rilevato il fenomeno in questione è in ambito Spazio e Figure (Fig. Par. 1.4) e in tutti i questionari somministrati in questa sperimentazione è presente una domanda in ambito geometrico (si veda Appendice 1 e Appendice 2). Dai risultati (non presentati in questo contributo) emergono delle interferenze con alcune delle più note misconcezioni per quanto riguarda le relazioni tra area e perimetro (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2005). Sarà interessante indagare in ricerche future come e in che misura questa e altre misconcezioni di natura geometrica interferiscono con l'effetto "età della Terra".

- *La correlazione del comportamento degli studenti nella domanda "età della Terra" con il comportamento degli studenti in alcune domande già note in letteratura che rilevano manifestazioni di contratto didattico.* Nei questionari del livelli 05 e 06 l'ultima domanda (Appendice 1) indaga atteggiamenti di contratto didattico già noti in letteratura. Sarà interessante analizzare eventuali correlazioni con le risposte a questa domanda e alle domande con l'effetto "età della Terra".

- *Proporre la domanda "età della Terra", "atomi di Marte" e "massa di Marte" cambiando registro semiotico.* Tutte queste domande, la prima delle rilevazioni INVALSI e le ultime due della sperimentazione di questa ricerca, presentano i dati nello stimolo e nelle risposte sotto forma di potenze. In una successiva sperimentazione queste domande verranno sia somministrate che discusse oralmente cambiando il registro di rappresentazione dei dati numerici e verrà indagato come e se cambieranno le risposte degli studenti.

- *Indagare la presenza dell'effetto "età della Terra" a livello universitario.* La pratica d'aula suggerisce molte situazioni in cui questo effetto si potrebbe manifestare e su cui sembra utile indagare in un prossimo futuro: ad esempio, la difficoltà che hanno gli allievi ad accettare, in problemi geometrici o algebrici con parametro, i casi degeneri in cui il parametro scompare o la risposta corretta è per tutti i valori (o per nessun valore) del parametro.

Appendice 1: Questionario somministrato agli studenti dei livelli 05 e 06

Tempo di esecuzione: **<u>30 min</u>** **<u>Nickname:</u>** **……….……**

Puoi usare il righello e/o la squadra ma <u>non</u> la calcolatrice. Puoi disegnare o scrivere sulle figure e in ogni facciata ci sono degli spazi bianchi dove puoi fare i calcoli e scrivere i ragionamenti che hai fatto per arrivare alle risposte.

1. Esegui le seguenti moltiplicazioni:

   2,5 x 32 = …………………………

   1,9 x 4,1 = …………………………

   2,5 x 320 = …………………………

   19 x 0,41 = …………………………

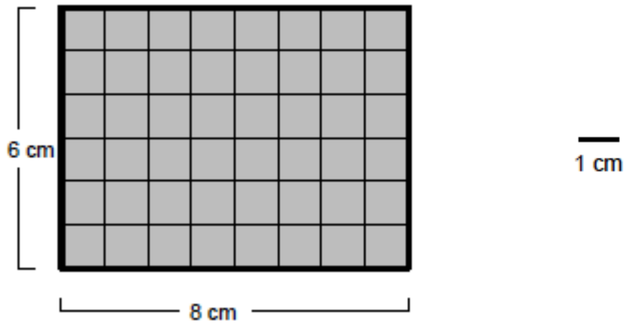
   25 x 0,32 = …………………………

   1,9 x 41 = …………………………

   2,5 x 3,2 = …………………………

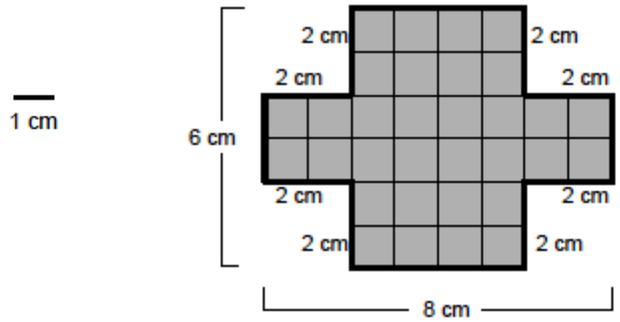
   1,9 x 410 = ……………………..........

2. Osserva il seguente rettangolo:



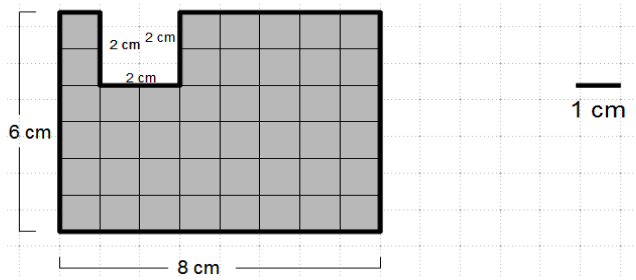
La lunghezza del suo perimetro è 28 cm.
Determina la lunghezza del perimetro delle seguenti figure, ottenute dal rettangolo di partenza tagliando dei quadratini di lato 2cm:

a)



Perimetro: …………………………………… cm

b)



Perimetro: …………………………………….. cm

3. La somma degli anni di Alice e Alessandro è 62. Alessandro ha 8 anni in più di Alice; quanti anni ha Alice?

   a) 54

   b) 27

   c) 35

4. Sapendo che 34 x 33 = 1122, determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

   a) 34 x 3,3 = ...

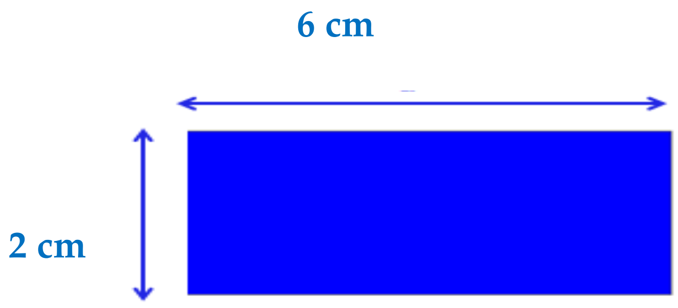
   b) 34 x 0,33 = ...

   c) 3,4 x 330 = ...

   d) 3,4 x 33 = ...

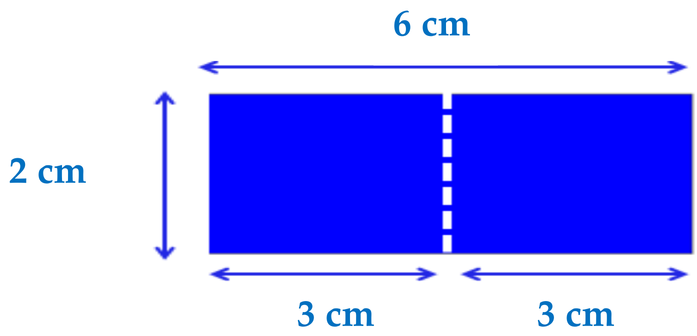
5. Osserva la figura che rappresenta un foglio rettangolare.

   a) Qual è la lunghezza del suo perimetro?



Perimetro: ………………………………… cm

b) Ora il foglio viene tagliato a metà lungo la linea tratteggiata; qual è la lunghezza del perimetro di ciascuna delle due parti ottenute?



Perimetro:…………………………………………cm

Appendice 2: Questionario somministrato agli studenti dei livelli 08, 10 e 11

Tempo di esecuzione: **30 min** **Nickname:** **………..……**

Puoi usare il righello e/o la squadra ma non la calcolatrice. Puoi disegnare o scrivere sulle figure e in ogni facciata ci sono degli spazi bianchi dove puoi fare i calcoli e scrivere i ragionamenti che hai fatto per arrivare alle risposte.

1. Esegui le seguenti moltiplicazioni:

   2,5 x 32 = …………………………

   1,9 x 4,1 = …………………………

   2,5 x 320 = …………………………

   19 x 0,41 = …………………………

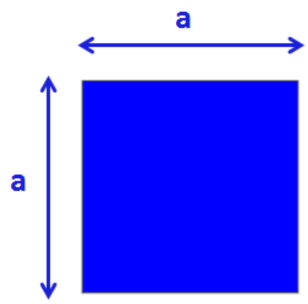
   25 x 0,32 = …………………………

   1,9 x 41 = …………………………

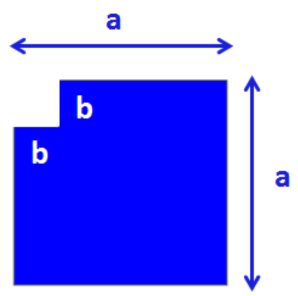
   2,5 x 3,2 = …………………………

   1,9 x 410 = ……………………........

1. Osserva il seguente quadrato:



la lunghezza del suo perimetro è $4a$.
Dal quadrato di partenza tagliamo un quadratino di lato b come nella seguente figura:



Qual è la lunghezza del perimetro della figura ottenuta?

a) $4a + 2b$
b) $4a - 4b$
c) $4a$
d) $4a - 2b$

2. In una scuola con 300 allievi, 45 tifano per la squadra dell'Ozzangeles. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

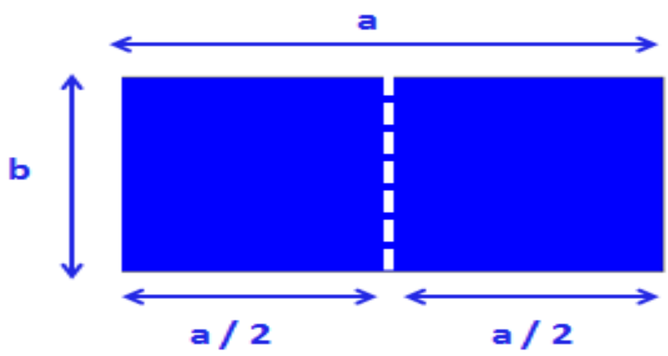
   A. Un ragazzo su 6 è tifoso dell'Ozzangeles.
   B. I tifosi dell'Ozzangeles sono il 25% degli allievi.
   C. I tifosi dell'Ozzangeles sono il 15% degli allievi.
   D. Un quinto degli allievi è tifoso dell'Ozzangeles.

3. Osserva la figura che rappresenta un foglio rettangolare.

   a) Qual è la lunghezza del suo perimetro?

Perimetro: …………………………………………………………..

b) Ora il foglio viene tagliato a metà lungo la linea tratteggiata; qual è la lunghezza del perimetro di ciascuna delle due parti ottenute?



Perimetro: …………………………………………………..

4. Per trovare il 27% di 450 si deve:

a) dividere 450 per 27
b) dividere 450 per 0,27
c) moltiplicare 450 per 27
d) moltiplicare 450 per 0,27

5. VERSIONE A. Il numero di atomi che compongono il pianeta Marte è stimato in circa 10^{54} . La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce composte da un numero di atomi stimato in 10^{28} , che ha portato sulla terra. Qual è la stima che più si avvicina al numero di atomi rimasti su Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

   a) 10^{54}
   b) 10^{33}
   c) 10^{28}
   d) 10^{26}

   VERSIONE B. La massa del pianeta Marte è stimata in circa $6{,}4 \times 10^{26}$ g. La sonda Voyager ha prelevato campioni di rocce con una massa di circa 10^{5}g, che ha portato sulla terra. Quant'è, all'incirca, la massa di Marte dopo che la sonda Voyager ha portato via i campioni?

   a) $6{,}4 \times 10^{26}$ g
   b) 5.4×10^{26} g
   c) $6{,}4 \times 10^{5}$ g
   d) $6{,}4 \times 10^{21}$ g

6. Daniele e Luca si stanno allenando con le loro moto su un circuito. Guidano entrambi alla stessa velocità ma Daniele ha iniziato più tardi ad allenarsi. Quando Daniele ha fatto 15 giri del circuito, Luca ne ha fatti 25. Al termine dell'allenamento Daniele ha fatto 40 giri; quanti ne ha fatti Luca?

   Risposta:……………………………………………..

7. Sapendo che 34 x 33 = 1122, determina il risultato delle seguenti operazioni (possibilmente senza fare i calcoli):

   e) 34 x 3,3 = …………………………

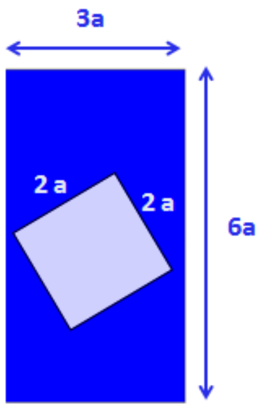
   f) 34 x 0,33 = …………………………

   g) 3,4 x 330 = …………………………

   h) 3,4 x 33 = …………………………

   i) 0,34 x 3300 = ………………………

8. In un prato di forma rettangolare è stata costruita una fontana quadrata, come vedi nella figura:



La superficie di prato rimasta è:

a) 14 a^2
b) 4 a^2
c) 18 a^2
d) 10 a^2

9. In ottobre un maglione costa 100 euro. Prima di Natale il suo prezzo è aumentato del 25%. Se Alice vuole regalarlo alla mamma per Natale, quanto paga il maglione?

Risposta: ………………………………………….. euro

Nel mese di gennaio, con i saldi, il prezzo del maglione si è ribassato del 20% rispetto al prezzo natalizio.

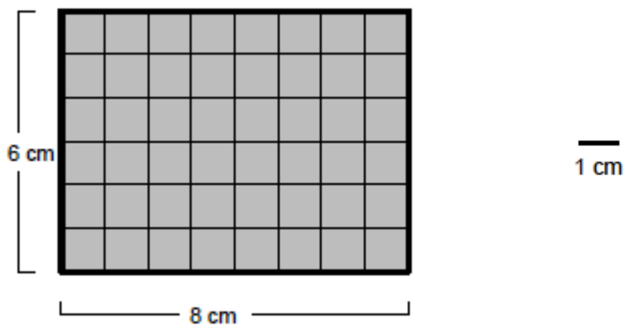
Quanto costa adesso il maglione?

a) 125 euro
b) 100 euro
c) 120 euro
d) 112 euro

10. Risolvi la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{12}\right):\left(\frac{13}{2}+\frac{1}{10}\right)\right]\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}- \quad =$$

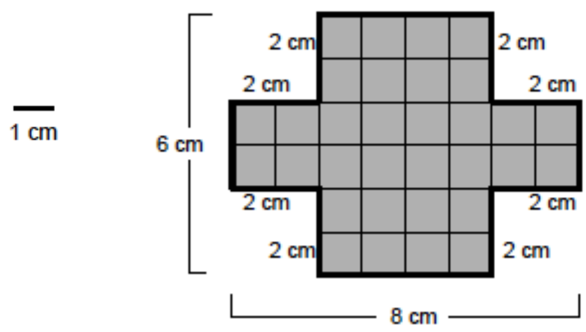
11. Osserva il seguente rettangolo:



La lunghezza del suo perimetro è 28 cm.

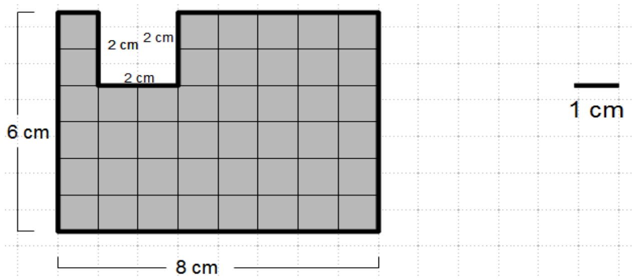
Determina la lunghezza del perimetro delle seguenti figure, ottenute dal rettangolo di partenza tagliando dei quadratini di lato 2cm:

a)



Perimetro: …………………………………… cm

b)



Perimetro: ……………………………………. cm

Bibliografia

Assi culturali (1997). D.M. n.139 del 22/08/2007. Roma: MIUR.

Balacheff N. (1988a), Le contrat et la coûtume: deux registres des intéractions didactiques. In: Laborde C. (ed.), *Actes du premier colloque Franco- Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Grénoble, La pensée Sauvage. 15-26.

Balacheff, N. (1988b). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stroughton.

Bagni T.G., D'Amore (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*. 1, 73-89.

Baruk, S., (1985), "L'âge du capitaine", De l'erreur en mathématiques. Paris, Seuil

Baxandall, M. (1985). *Patterns of Intention: On the Historical Explanation of Pic- tures*. New Haven: Yale University Press.

Bourdieu, P. (1992). *Language and Symbolic Power*. Cambridge: Polity Press

Bolondi G., Branchetti, L., Ferretti, F., (pre-printed). *Correlazioni tra componenti della competenza linguistica e capacità di lavoro su un testo matematico: gli studenti del Liceo Scientifico alle prese con le prove dell'Esame di Stato.* In: Atti del Convegno Nazionale GISCEL, Roma 2014.

Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (2009). Valutazione in matematica. *Vita Scolastica*. Anno 63, numero 11, pagine 15-17.

Bolondi G., Fandiño Pinilla M. I., (2012). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Pagine 214. Napoli: Edises.

Branchetti, L., Ferretti, F., Lemmo, A., Maffia, A., Martignone, F., Matteucci, M., Mignani, S. (pre-printed). A longitudinal analysis of the Italian standardized mathematics test. *Proceedings of the 9th CERME*. Prague: ERME.

Brousseau, G. (1972). *Processus de mathématisation La mathematique a l' ecole elementaire.* [Processes of mathematization. The mathematics of the elementary school]. Paris: Association de Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Publique.

Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laringologie otologie rinologie*, vol. 101, 3-4, 107-131.

Brousseau, G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches*, n.41, 177-182.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux [Didactical problems with decimals]. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*, 37-127.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education: ICME 5 – topic area and miniconference: Adelaide, Australia*. Bielefeld, Germany: Institut fuer Didaktik der Mathematik der Universitaet Bielefeld.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau G. & Perez J. (1981), Le cas Gaël. Université de Bordeaux I, IREM (documento dattiloscritto).

Brousseau, G., & Warfield, V., (1999). The Case of GAEL. *Journal of mathematical Behavior* 18 (1), 7-52.

Carbonnier, J. (1971). *Flexible droit: Textes pour une sociologie du droit sans rigueur* [Flexible right: texts for a sociology of right without rigor]. Paris: Pichon & Durand-Anzias.

Chevallard, Y. (1983). *Remarques sur la notion de contrat didactique* [Remarks on the notion of didactical contract] Marseille: IREM d' A ix-Marseill.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clanché, P., (1994). L'enfant et le contrat didactique dans les derniers textes de Wittgenstein. *in* H. HANNOUN. A.-M. DROUIN-HANS. (dir.). *Pour une philosophie de l'éducation.* [Actes du colloque « Philosophie de l'éducation et formation des maîtres » Dijon 14-15-16 oct. 1993]. ed. CNDP. CRDP de Bourgogne. 223-232.

Clark, H. (1996). *Using language*. Cambridge: Cambridge University Press.

Crozier, M. and Friedberg, E. (1977). *L'acteur et le système*. Paris: Le Seuil.

D'Amore B.(2007). Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento. *La matematica e la sua didattica.* 21 (3), 347-369. English version: D'Amore, B. (2008), Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. *Mediterranean Journal of Research in Mathematics Education*. Vol. 7, (1), 1-22.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. [Bologna, Italia]. 2, 165-190.

D'Amore B., Font, V., Godino J. D., (2007), La dimension metadidàctica en los processos de ensenanza y aprendizaje de la matematica, Relime XXXVIII, 2 (49-77).

D'Amore B., Fandiño, M. I., Marazzani I., & Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica alcuni effetti del "contratto"*. Bologna, Italy: Archetipolibri.

D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. [Questo articolo è stato pubblicato anche in lingua francese: *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1998, 1, 55-94].

Dewey, J. (1922). *Human nature and conduct.* New York: Modern Library.

De Vleeschouwer, M. & Gueudet, G. (2011). Secondary- Tertiary transition and evolutions of didactic contract: the example of duality in Linear Algebra. In M.

Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (eds.) *Proceedings* of CERME 7, Univ. of Rzeszów, Poland, 1359-1368.

Douglas, M. (1987). *How institutions think.* Syracuse: Syracuse University Press.

Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of limit and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(4), 765-790.

EMS-EC (Education Committee of the EMS) (2012). What are the Reciprocal Expectations between Teacher and Students? Solid Findings in Mathematics Education on Didactical Contract. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 84, 53-55.

EMS-EC (Education Committee of the EMS) (2013). Sociomathematical Norms: In Search of the Normative Aspects of Mathematical Discussions. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 88, 59-61.

Ericsson, A. & Simon, H. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review, 8*, 215-251.

Fandiño Pinilla, M.I., (2005), La valutazione in matematica e le prove INValSI, *La matematica e la sua didattica*, 3, 359-371.

Ferretti, F., Lemmo, A., Maffia, (submitted). Rational numbers conceptions: comparing fractions and decimals representations. *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hobart, Australia: PME.

Filloux J. (1973). *Positions de l'enseignant et de l'enseigné*. Paris: Dunod.

Hershkowitz, R. & Schwarz, B. B. (1999). The emergent perspective in rich environments: Some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 149-166.

Gabellini, G., (2006), Le prove INValSI: adempimento burocratico e ricerca di senso, *La matematica e la sua didattica*, 1, 102-125.

Garuti, R., & Boero, P. (1994). *Mathematical modelling of the elongation of a spring: given a double length spring...* In Proc. of PME-XVIII, Lisbon, vol.2, 384-391.

Gerson, H., and E. Bateman. 2010. Authority in an agency-centered, inquiry-based university calculus classroom. Journal of Mathematical Behavior 29: 195–206.

Gobo, G., (1997). *Le risposte e il loro contesto. Processi cognitivi e comunicativi nelle interviste standardizzate*, Franco Angeli, Milano.

Godino, J., & Linares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática.* 12 (1), 70-92.

Goetz, J. & Lecompte, M. (1988). Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa. Madrid: Morata.

Impedovo, M., Orlandoni, A. & Paola, D. (2011). *Quaderni SNV N.1-MAT. Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica*. Frascati: Invalsi.

Inhelder,B. & Caprona, D. (1985). Constructivisme et création de nouveautés: Introduction. *Archives de Psychologie, 53* (204), 7-17.

IREM de Bordeaux I (1978), Étude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs électifs de l'enfant en mathématiques. 18, 170-181.

Invalsi, SNV (2011). *Le rilevazioni degli apprendimenti A.S. 2010/11*. Frascati: Invalsi.

Invalsi, SNV (2011a). *Relazione tecnica sulle caratteristiche psicometrico-misuratorie delle prove INVALSI 2011 sostenute dagli studenti delle classi II e V della scuola primaria, I e III della secondaria di primo grado e della classe II della scuola secondaria di secondo grado.* Frascati: Invalsi.

Invalsi, SNV (2012). *Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2011/12. Il quadro di sistema*. Frascati: Invalsi.

Invalsi, SNV (2012a). *Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2011-12. Rapporto tecnico.* Frascati: Invalsi.

Invalsi, SNV (2013). *Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2012/13. Il quadro di sistema*. Frascati: Invalsi.

Invalsi, SNV (2013a). *Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 20112/13. Rapporto tecnico.* Frascati: Invalsi.

Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *Elementary School Journal, 102*, 59-80.

Levinson E., Tirosh, D., & Tsamir, P: (2009). Students' perceibed sociomathematical norms: the missing paradigm. *The Journal of Mathematical Behavior* 28, 171-187.

Levy-Bruhl, H. (1964). *Sociologie du droit* [Sociology of right]. Paris: Presses Universitaires de France.

Mauss, M. (1989). *Oeuvres*. Paris: Minuit.

Ostrom, E. (2005). *Understanding Institutional Diversity*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Paola, D., (2006) Le prove PISA e INVALSI: possibili conseguenze sulla pratica didattica, *Atti convegno UMI - CIIM 2005, in* (a cura di G. Anichini e M. D'Aprile), Valutare in Matematica, *NUMI Novembre 2006,* pp. 63-70.

Perrin-Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématique en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* Grenoble: La Pensée Sauvage. 97-147.

Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.

Sanchez, V. and Garcìa, M. (2014) 'Sociomathematical and mathematical norms related to definition in pre-service primary teachers' discourse', *Educational Studies in Mathematics*, **85**, 605-320.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue Française de pédagogie*, Note de synthèse 112, 85-118.

Sarrazy B. (2005). La théorie des situations: une théorie anthropologique du didactique ?. In: *Sur la théorie des situations didactiques: questions, responses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*. Grenoble : La Pensée Sauvage. 375-390.

Sarrazy, B. (2007). Ostension et dévolution dans l'enseignement des mathématiques : anthropologie wittgensteinienne et théorie des situations didactiques. *Education & Didactque,* 1, 3, 31-46.

Sensevy, G. (2010). Outline of a joint action theory in didactics. In V. Durand Guerrier, S. Maury & F. Arzarello. CERME 6 Proceedings (pp1645-1654), [http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg9-12-sensevy.pdf] Lyon : INRP

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996), *Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education.* In :A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds) *International Handbook of Mathematics Education*. London: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Bobos, G. & Knipping, C. (2008). Source of students' frustration in pre-university level, prerequisite mathematics courses. *Instructional Science* 36 (4), 289-320.

Tatsis, K., & Koleza, E. (2008). Social and Sociomathematical Norms in Collaborative Problem Solving. *European Journal of Teacher Education*, 31, 89-100.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse: Swets & Zeitlinger.

Voigt J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In: Cobb P., Bauersfeld H. (1995) (eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures.* 163-199. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates Pub.

Yackel E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Panhuizen-Heuvel (Ed.). *Proceedings of the Conference of the International Group for the PME* (vol. 1, pp. 1-9). Utrecht, the Netherlands: PME.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.