Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

dottorato di ricerca in
ingegneria civile e ambientale

Settore concorsuale di afferenza: 08/A1 Ciclo XXVI
Settore Scientifico Disciplinare: ICAR/02

Stima dei parametri di modelli idrologici mediante ottimizzazione dell'utilità

Emanuele Baratti

Coordinatore Dottorato:
Prof. Ing Alberto Lamberti

Relatore:
Prof. Ing. Alberto Montanari

Esame finale anno 2014

Ringraziamenti

Desidero ringraziare di cuore il Prof. Alberto Montanari per il sostegno e la fiducia dimostrata. Un grazie enorme all'Elena, ad Attilio alla Cri e a tutti i ragazzi del dipartimento DICAM.

Desidero ringraziare il Prof. Marcello Coradini per la fantastica esperienza di Pasadena.

Infine, un ringraziamento speciale va alla mia famiglia, per essermi sempre accanto.

Indice

Ringraziamenti iii

Indice iv

Elenco delle Figure vii

Elenco delle Tabelle ix

1 Introduzione 1

2 La Parametrizzazione dei modelli afflussi-deflussi 7
2.1 La funzione obiettivo . . . 8
2.2 I Differential Evolution Algorithm (DE) . . . 11
2.3 Approcci di tipo probabilistico . . . 15
2.4 Metodi Markov Chain Monte Carlo (MCMC) . . . 17
2.4.1 L'algoritmo DiffeRential Evolution Adaptive Metropolis (DREAM) 19

3 La Teoria dell'utilità attesa 21
3.1 Teoria dell'utilità attesa . . . 23
3.2 Metodologia di calibrazione proposta . . . 28

4 Area di studio e modello afflussi-deflussi 31
4.1 Inquadramento dell'area di studio . . . 31
4.1.1 Bacino del Fiume Reno a Casalecchio . . . 31
4.1.2 Bacino idrografico dell'Arno a Subbiano . . . 32
4.1.3 Bacino del Fiume Sieve . . . 35
4.2 Il modello afflussi-deflussi HyMOD . . . 36

5 Applicazione della metodologia proposta 43
5.1 Calibrazione *tradizionale*: approccio deterministico e probabilistico . . . 43
5.2 Calibrazioni mediante la massimizzazione dell'utilità . . . 51
5.2.1 Funzioni di utilità dipendenti unicamente dall'errore assoluto . . . 52
5.2.2 Funzioni di utilità dipendenti sia dall'errore assoluto che dalle portate osservate e simulate . . . 75

6 Conclusioni 91

Bibliografia **93**

Elenco delle figure

2.1 Rappresentazione schematica delle fasi principali del Differential Evolution Algorithm . . . 15

3.1 Esempio di *Albero di decisione* . . . 24
3.2 Forme della funzione di utilità per diversi atteggiamenti nei confronti del rischio . . . 26
3.3 Schematizzazione delle funzioni di utilità basate unicamente sull'errore assoluto commesso dal modello . . . 29
3.4 Schematizzazione delle funzioni di utilità dipendenti sia dall'errore assoluto che dalle portate osservate e simulate . . . 30

4.1 Area di Studio . . . 32
4.2 Plot dei dati utilizzati per il bacino del Fiume Reno . . . 33
4.3 Bacino idrografico del Fiume Arno e dei suoi principali sottobacini . . . 34
4.4 Plot dei dati utilizzati per il bacino del Fiume Arno . . . 35
4.5 Plot dei dati utilizzati per il bacino del Fiume Sieve . . . 37
4.6 Rappresentazione schematica di HyMOD . . . 38
4.7 Esempi della funzione di distribuzione della capacità di immagazzinamento del bacino $F(C(t))$ . . . 39

5.1 Reno: risultati della calibrazione tradizionale deterministica e probabilistica 47
5.2 Arno: risultati della calibrazione tradizionale deterministica e probabilistica 48
5.3 Sieve: risultati della calibrazione tradizionale deterministica e probabilistica 49
5.4 Istogrammi della densità di probabilità a posteriori dei parametri ottimizzati secondo un approccio probabilistico . . . 50
5.5 Rappresentazione schematica delle funzioni di utilità *bidimensionale* adottate nel processo di calibrazione . . . 53
5.6 Funzione di utilità inizialmente analizzata . . . 53
5.7 Istogrammi della densità di probabilità a posteriori dei parametri ottimizzati secondo un approccio probabilistico - Utilità lineare . . . 54
5.8 Calibrazione probabilistica - Confronto dei risultati ottenuti attraverso l'approccio tradizionale e quello basato su una funzione di utilità che diminuisce costantemente . . . 56
5.9 Scatterplot portate simulate: calibrazione tradizionale e calibrazione con utilità che decresce costantemente . . . 58
5.10 Reno – Calibrazione: Effetto soglia destra . . . 62
5.11 Reno – Validazione: Effetto soglia destra . . . 63
5.12 Reno – Calibrazione: Effetto soglia sinistra . . . 63
5.13 Reno – Validazione: Effetto soglia sinistra . . . 64

5.14 Reno: confronto della distribuzione a posteriori dei parametri a parità di soglia destra della funzione di utilità 64
5.15 Arno – Calibrazione: Effetto soglia destra 67
5.16 Arno – Validazione: Effetto soglia destra 67
5.17 Arno – Calibrazione: Effetto soglia sinistra 68
5.18 Arno – Validazione: Effetto soglia sinistra 68
5.19 Arno: confronto della distribuzione a posteriori dei parametri a parità di soglia destra della funzione di utilità 69
5.20 Sieve Effetto soglia destra – Calibrazione 71
5.21 Sieve Effetto soglia destra – Validazione 72
5.22 Sieve Effetto soglia sinistra – Calibrazione 72
5.23 Sieve Effetto soglia sinistra – Validazione 73
5.24 Sieve: confronto della distribuzione a posteriori dei parametri a parità di soglia sinistra della funzione di utilità 73
5.25 Reno – Esempio di risultati delle calibrazioni avvenute attraverso l'utilizzo della funzione di utilità basata sia sull'errore assoluto che sulle portate osservate e simulate 78
5.26 Reno – Esempio di risultati delle calibrazioni avvenute attraverso l'utilizzo della funzione di utilità basata sia sull'errore assoluto che sulle portate osservate e simulate 79
5.27 Reno – Istogrammi delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri - utiltà dipendente sia dall'errore di simulazione che dalle portate osservate e simulate 80
5.28 Arno – Effetto della variazione della soglia E_{dx} a parità di E_{sx} e q^* 82
5.29 Arno – Effetto della variazione della soglia E_{dx} a parità di E_{sx} e q^* 83
5.30 Arno – Istogrammi delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri - utiltà dipendente sia dall'errore di simulazione che dalle portate osservate e simulate 84
5.31 Sieve – Effetto della variazione della soglia q^* 87
5.32 Sieve – Effetto della variazione della soglia q^* 88
5.33 Sieve – Istogrammi delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri - utiltà dipendente sia dall'errore di simulazione che dalle portate osservate e simulate 89

Elenco delle tabelle

2.1 Esempi di funzioni obiettivo comunemente utilizzate 10

3.1 Esempio di *Tavola di decisione* 23

4.1 Caratteristiche principali del bacino idrografico del Fiume Reno a Casalecchio. 33
4.2 Caratteristiche principali del bacino idrografico sotteso alla stazione di Subbiano (Fiume Arno) 35
4.3 Caratteristiche principali del bacino idrografico del Fiume Sieve 36

5.1 Dati utilizzati per la calibrazione e validazione di HyMOD 44
5.2 Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la minimizzazione della somma degli errori assoluti 46
5.3 Risultati delle calibrazioni avvenute adottando una funzione di utilità che diminuisce costantemente. 57
5.4 Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Reno – Utilità lineare 65
5.5 Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Arno – Utilità lineare 70
5.6 Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Sieve – Utilità lineare 74
5.7 Valori di soglia q^* utilizzati nelle simulazioni 76
5.8 Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Reno – Utilità dipendente sia dall'errore di simulazione che dalle portate osservate e simulate 79
5.9 Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Arno – Utilità dipendente sia dall'errore di simulazione che dalle portate osservate e simulate 85
5.10 Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Sieve – Utilità dipendente sia dall'errore di simulazione che dalle portate osservate e simulate 90

Capitolo 1

Introduzione

Nel corso degli ultimi decenni sono stati sviluppati numerosi modelli numerici atti alla stima di una o più variabili idrologiche.

Alcuni di essi si propongono di descrivere nel dettaglio la dinamica di un singolo processo idrologico, rappresentando quindi una fase limitata del ciclo dell'acqua; altri, invece, si propongono di descrivere porzioni maggiormente estese del ciclo idrologico, rappresentando variabili che discendono dall'integrazione di più processi.

I modelli idrologici possono essere considerati come un sistema di equazioni che, una volta risolto, dato un certo input (ad esempio le precipitazioni in un determinato intervallo temporale) e determinate condizioni iniziali ed al contorno, fornisce un output (una o più grandezze di interesse da simulare, ad esempio i deflussi in una determinata sezione fluviale). Essi rappresentano un'approssimazione imperfetta della realtà (Beven, 1989, 2006).

Numerosi modelli idrologici sono caratterizzati da parametri. Qualunque sia la complessità del modello e per quanto ampia sia la sua base fisica, l'applicazione pratica spesso non può prescindere da una preliminare *parametrizzazione* o *calibrazione* dei parametri del modello (Beven, 2012; Duan et al., 1992; Madsen et al., 2002; Montanari, 2007; Moore and Doherty, 2005; Wagener et al., 2004).

Col termine *parametrizzazione* (o *calibrazione*) si definisce il processo attraverso cui attribuire ai parametri dei valori tali da permettere al modello di riprodurre al meglio il reale sistema che si vuole rappresentare (Gupta and Soroosh, 1998). In alcuni casi è possibile determinare i valori ottimali attraverso misure dirette condotte nel sistema reale. Tuttavia, nella maggior parte dei casi, è necessario ricavarli attraverso una procedura "trial-and-error" che termina nel momento in cui si raggiungono le prestazioni desiderate.

Soprattutto in passato, questa procedura veniva eseguita manualmente: l'utilizzatore del modello variava manualmente i valori dei parametri fino ad ottenere i risultati desiderati. Negli ultimi decenni, grazie all'avvento dei calcolatori, la calibrazione manuale è stata sostituita o integrata da procedure automatiche, più rapide ed efficaci nella ricerca dei parametri ottimali del modello.

Generalmente una procedura di calibrazione si articola nella *(i)* definizione del criterio che valuta le performances del modello (i.e. la funzione obiettivo), *(ii)* determinazione del range di variabilità dei parametri e *(iii)* scelta di un efficace algoritmo di ottimizzazione (Efstratiadis and Koutsoyiannis, 2010). Il problema può essere affrontato in un'ottica deterministica o stocastica, attraverso un approccio mono-obiettivo o multi-obiettivo.

La letteratura è ricca di studi che trattano uno o più di questi aspetti. Ad esempio, alcune ricerche trattano la gestione dei diversi tipi di errori presenti nei dati osservati (Sorooshian and Dracup, 1980; Sorooshian and Gupta, 1983). Altri studi invece hanno affrontato lo sviluppo di algoritmi per la ricerca dei parametri ottimali (Duan et al., 1992, 1993; Vrugt et al., 2003, 2008b). Al giorno d'oggi esistono efficienti e robuste tecniche di ottimizzazione in ambito idrologico, quali ad esempio gli *Algoritmi Genetici* (Wang, 1991), il *Shuffled Complex Evolution (SCE)* (Duan et al., 1992) ed il *Simulated Annealing* (Sumner et al., 1997). Altri lavori trattano la sensitività dei parametri in base alla quantità di dati utilizzati per la calibrazione del modello (Gupta and Sorooshian, 1985; Kuczera, 1982; Yapo et al., 1996). Recentemente stanno ricevendo crescente attenzione gli approcci basati sulla stima dell'incertezza e della sua rappresentazione (Beven, 2006; Beven and Binley, 1992; Merz and Thieken, 2005; Montanari, 2007; Vrugt et al., 2003).

A fronte di una vasta letteratura che tratta lo spinoso problema della calibrazione, a tutt'oggi non esiste un approccio univocamente accettato/corretto (Gupta and Soroosh, 1998). Ogni approccio sopramenzionato presenta i propri pregi e difetti. È stato ad esempio osservato come le funzioni obiettivo quadratiche, quali il *Mean Square Error*, il *Root Mean Square Error* o l'*Efficienza di Nash-Sutcliffe* (Nash and Sutcliffe, 1970) sono generalmente più indicate per riprodurre i colmi di piena; per una buona riproduzione del bilancio idrico è consigliabile utilizzare lo *Scarto Medio* o il *Mean Absolute Error*; i periodi di magra possono essere riprodotti opportunamente utilizzando il *Mean Relative Error* o indici logaritmici quali il *Mean Square Logaritm Error*(Lindström, 1997; Liong et al., 1998; Madsen, 2000). I metodi che si basano su un'unica funzione obiettivo (*calibrazione mono-obiettivo*) risultano essere robusti e computazionalmente accettabili. Tuttavia, diversi autori hanno evidenziato come, adottando strategie di ottimizzazione basate su di una singola funzione obiettivo, non sia possibile rappresentare la variabilità dei processi naturali che, per loro natura, sono legati a differenti aspetti del ciclo idrologico (Efstratiadis and Koutsoyiannis, 2010; Gupta and Soroosh, 1998; Madsen,

2000). Sopratutto nell'ultima decade sono state così sviluppate le cosiddette *tecniche multi-obiettivo*, attraverso le quali è possibile considerare contemporaneamente più funzioni obiettivo. Risulta così possibile rappresentare al meglio la natura multiobiettiva dei processi naturali ed individuare/stimare al meglio le incertezze in gioco (Efstratiadis and Koutsoyiannis, 2010). Questi metodi si basano sull'ottimizzazione contemporanea di diversi criteri (diverse funzioni obiettivo) spesso in contrasto tra loro. Solitamente, infatti, si utilizzano una o più funzioni obiettivo quadratiche per enfatizzare la riproduzione delle piene ed uno o più criteri per "adattare" il modello anche ai periodi di magra. Di fatto, la soluzione che si ottiene attraverso una calibrazione multi-obiettivo rappresenta il miglior compromesso delle diverse funzioni obiettivo (de Vos and Rientjes, 2008; Efstratiadis and Koutsoyiannis, 2010; Moussa and Chahinian, 2009). Un aspetto problematico di questi metodi è rappresentato dal fatto che all'aumentare delle funzioni obiettivo considerate, aumenta il numero di soluzioni ottimali per cui il problema si trasforma rapidamente in un problema decisionale, soggettivo (Zhou et al., 2014). Inoltre, l'elevato numero di funzioni obiettivo, può dar luogo ad una "superficie delle soluzioni" (nello specifico chiamata *Frontiera di Pareto*) non ben definita. Risultano inoltre essere computazionalmente onerosi. Infine, anche per quanto riguarda gli approcci probabilistici, sia quelli definiti *formali* che *non formali*, vi sono tutt'ora aspetti da approfondire. Ad esempio, una delle metodologie maggiormente utilizzate nella stima dell'incertezza, la Generalized Likelihood Uncertainty Estimation (GLUE) (Beven and Binley, 1992), è ancora ad oggi oggetto di un ampio dibattito a causa degli elementi di soggettività presenti nel metodo (ad esempio la scelta sulla distribuzione a priori dei parametri e del criterio di verosimiglianza) (Mantovan and Todini, 2006; Montanari, 2005; Stedinger et al., 2008; Vrugt et al., 2008a). Anche i metodi che seguono un approccio "più formale" (Pianosi and Raso, 2012; Vrugt et al., 2008a, 2009) si basano su determinate assunzioni non sempre soddisfatte. Ad esempio, tra le ipotesi che difficilmente vengono rispettate in ambito idrologico vi sono l'omoschedasticità e l'indipendenza dei residui.

Una peculiarità del processo di calibrazione è che essa inevitabilmente comporta una qualche forma di compromesso (Viney et al., 2009). È sufficiente infatti pensare che i modelli stessi sono una rappresentazione imperfetta del reale sistema. Essi, attraverso equazioni, descrivono "in forma semplificata" il comportamento di una o più componenti del ciclo idrologico (Madsen et al., 2002). Per quanto concerne ai modelli afflussi-deflussi, spesso questo compromesso si traduce nell'enfatizzare un particolare aspetto dell'idrogramma (ad esempio migliorare la rappresentazione dei deflussi elevati a discapito di quelli medio/bassi, o viceversa). Come già esposto, vi sono ad esempio funzioni obiettivo più adatte ad una rappresentazione dei colmi di piena, altre maggiormente indicate per i deflussi di magra. Va notato che questi indici tradizionalmente vengono utilizzati per enfatizzare un certo aspetto dell'idrogramma osservato ma vengono calcolati su tutti

i dati a disposizione. Sempre in un'ottica di calibrazione mono-obiettivo, altri autori per enfatizzare un aspetto dell'idrogramma introducono dei vincoli, ad esempio dei pesi o delle grandezze di penalizzazione nelle funzioni obiettivo (Lindström, 1997; Vaze et al., 2010). Un altro esempio di "compromesso" è dato dalle calibrazioni multi-obiettivo: esse di fatto si basano su "criteri" contrastanti; la soluzione che si ottiene rappresenta il miglior compromesso tra i diversi criteri (Efstratiadis and Koutsoyiannis, 2010; Fenicia et al., 2007; Gupta and Soroosh, 1998; Lombardi, 2011; Madsen, 2003). Infine, anche negli approcci probabilistici, l'informazione viene estratta da tutti i dati utilizzati per la calibrazione "distribuendo" in questo modo la verosimiglianza su tutto il periodo di calibrazione (Weijs et al., 2010).

A valle di un così ampio quadro, seppure brevemente accennato, un aspetto parzialmente trattato in letteratura è quello del confronto di tali metodologie con le reali applicazioni. A tale proposito risulta fondamentale la definizione dell'obiettivo che si vuole ottenere attraverso la modellazione, quali processi si vogliono rappresentare, quale sarà l'utilizzo pratico del modello. In base a questi aspetti l'utilizzatore, infatti, sceglie il modello, la funzione obiettivo e la strategia di ottimizzazione che meglio soddisfa le proprie esigenze.

È utile notare come tali scelte, cosi come i compromessi che l'utilizzatore è disposto ad accettare, risultano essere aspetti estremamente intrecciati tra loro. Si può inoltre affermare che alla base di entrambi vi è implicitamente una misura di *qualità* del modello. Ad esempio, se l'obiettivo di una calibrazione è la riproduzione dei deflussi medi, viene spontaneo definire "di qualità" o "utile" un modello, una funzione obiettivo ed una procedura di calibrazione che enfatizzano tali deflussi. Paradossalmente se il modello o una funzione obiettivo riproducessero perfettamente i colmi di piena sarebbero classificati come "inutili" o "senza valore". Sorgono a questo punto alcune domande: quando è che un modello o una funzione obiettivo o una procedura di calibrazione possono essere definiti "utili"? Come si può giudicare un modello idrologico? Cosa si intende per "bontà" di una simulazione? In generale non esiste una risposta univoca a tali domande. Per quanto esposto precedentemente, infatti, la "qualità" di un modello o di un processo di calibrazione dipendono strettamente dall'obiettivo che si vuole ottenere e dall'uso che se ne fa.

Sulla base di queste considerazioni, nel presente lavoro di tesi è stata sviluppata ed analizzata una procedura di calibrazione che trae spunto da semplici risultati della *teoria dell'utilità* . Attraverso tale teoria infatti è possibile esprimere numericamente la propria percezione del *beneficio*, *valore*, della *utilità* di un modello idrologico. Questa associazione numerica viene eseguita tramite le *funzioni di utilità* che permettono di esprimere numericamente i benefici che possono derivare a seguito di una determinata decisione. La teoria dell'utilità e più in generale la teoria delle decisioni non è un ambito

nuovo in idrologia. Infatti molti sistemi di gestione delle risorse idriche, di previsione di piene, di valutazione del rischio utilizzano risultati che derivano dalla teoria delle decisioni (Cohon, 1978; Martina et al., 2006; Weijs et al., 2010). Un altro esempio è dato dalle calibrazioni multi-obiettivo: in queste le funzioni di utilità vengono utilizzate per confrontare le diverse soluzioni possibili ed identificare la "migliore" (Cohon, 1978).

Nel presente lavoro di tesi sono state sviluppate funzioni di utilità che dipendono sia dall'errore commesso dal modello sia dalla portata osservata e simulata. Ad ogni simulazione operata dal modello viene quindi associata un'utilità. Il processo di calibrazione avviene attraverso la massimizzazione della somma delle utilità.

Le indagini sono state svolte analizzando tre bacini dell'arco appenninico: il bacino del Fiume Reno con chiusura a Casalecchio (BO), il bacino del fiume Sieve con chiusura a Fornacina (FI) ed il bacino del Fiume Arno con chiusura a Subbiano (PI). Come modello afflussi-afflussi è stato utilizzato HyMOD (Boyle et al., 2000). Le calibrazioni sono avvenute sia attraverso un *approccio classico* deterministico sia attraverso una procedura probabilistica. Nel primo caso è stato utilizzato l'algoritmo evolutivo *DEoptim* (Mullen et al., 2011), nel secondo è stato utilizzato l'algoritmo *DREAM* (Vrugt et al., 2009) che fornisce una stima dell'incertezza associata a ciascun parametro del modello.

Capitolo 2

La Parametrizzazione dei modelli afflussi-deflussi

Il capitolo illustra gli aspetti del processo di calibrazione maggiormente analizzati nel lavoro di tesi. Innanzitutto vengono effettuate alcune considerazioni sul problema della calibrazione dei modelli afflussi-deflussi. Segue una descrizione delle funzioni obiettivo tradizionalmente adottate. Infine vengono descritti gli algoritmi di ottimizzazione utilizzati per eseguire le calibrazioni di tipo deterministico e probabilistico.

Al giorno d'oggi esistono molteplici modelli aflussi-deflussi caratterizzati da un differente grado di complessità nella rappresentazione dei processi e da un differente ambito di applicazione; si spazia dai modelli fisicamente basati a quelli concettuali, a parametri concentrati o spazialmente distibuiti. Una classe di questi modelli sono i cosiddetti modelli afflussi-deflussi.

Un modello afflussi-deflussi di tipo concettuale, a parametri concentrati, è un sistema di equazioni matematiche che descrivono in forma semplificata il comportamento del bacino. I parametri del modello, così come le equazioni costituive, rappresentano valori delle grandezze mediati sull'intero bacino (Madsen et al., 2002). In questa schematizzazione, il bacino viene rappresentato come un sistema soggetto ad un ingresso (ad esempio le precipitazioni e l'evapotraspirazione) e da un'uscita, rappresentata dalla portata defluente attraverso la sezione di chiusura. Nella applicazioni pratiche, quali ad esempio la previsione delle piene o la stima di disponibilità di risorsa idrica, essi vengono ampliamente utilizzati. Infatti, nonostante la loro semplicità, forniscono ottimi risultati nella rappresentazione dei deflussi.

Affinchè il modello possa rappresentare al meglio la grandezza oggetto d'indagine (nel caso specifico, i deflussi), prima di un qualsiasi utilizzo pratico, occorre eseguire la procedura di *parametrizzazione* o *calibrazione* dei suoi parametri (Beven, 2012; Duan et al., 1992; Madsen et al., 2002; Montanari, 2007; Moore and Doherty, 2005; Wagener et al., 2004). In questa procedura vengono attribuiti dei valori ai parametri in modo tale che il modello si "adatti bene" al caso di interesse.

Soprattutto in passato, questa procedura veniva eseguita manualmente: l'utilizzatore del modello variava manualmente i valori dei parametri fino ad ottenere i risultati desiderati. Questo processo richiede/richiedeva un elevato grado di conoscenza del modello e del sistema che si vuole rappresentare, è caratterizzato da un alto grado di soggettività nella strategia impiegata per definire i valori dei parametri, e può risultare molto dispendioso in termini di tempo (Boyle et al., 2000; Madsen et al., 2002). Inoltre, la complessità della procedura può complicarsi notevolmente, soprattutto all'aumentare della complessità del modello e del numero dei parametri da stimare. Tuttavia, la calibrazione manuale, soprattutto se eseguita da un idrologo esperto, può portare ad ottimi risultati.

Negli ultimi decenni, grazie all'avvento dei calcolatori, la calibrazione manuale è stata sostituita o integrata da procedure automatiche, più rapide ed efficaci nella ricerca dei parametri ottimali del modello. I principali vantaggi delle tecniche automatiche sono l'accelerazione del processo di calibrazione, la ridotta soggettività coinvolta nella procedura (molte tecniche infatti richiedono solamente la definizione del dominio dei parametri) e la copiosa disponibilità di algoritmi di ottimizzazione (Blasone et al., 2007; Madsen et al., 2002).

Di seguito vengono trattati in dettaglio alcuni degli elementi fondamentali del processo di calibrazione.

2.1 La funzione obiettivo

Una funzione obiettivo è un'equazione che definisce numericamente le metrica utilizzata per valutare le prestazioni di un modello. Attraverso la sua minimizzazione o massimizzazione vengono definiti i parametri (o il set di parametri) che l'utente ritiene essere ottimali per il modello. In letteratura esistono molteplici funzioni obiettivo. Un ampio numero di possono essere ricavate dalle espressioni generali definite da Van der Molen and Pintér (1993):

$$F = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|q_{sim_i} - q_{obs_i}|^{\tau}\right]^{\frac{1}{b}}, \quad \tau \geq 1, \quad b \geq 1 \tag{2.1}$$

o dall'analoga equazione

$$F = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{q_{sim_i} - q_{obs_i}}{q_{obs_i}}\right|^{\tau}\right]^{\frac{1}{b}}, \quad q_{obs_i} \neq 0, \quad \tau \geq 1, \quad b \geq 1 \tag{2.2}$$

dove F rappresenta la funzione obiettivo, n il numero di osservazioni (in questo caso i deflussi in una deteminata sezione fluviale), q_{sim_i} e q_{obs_i} rispettivamente le portate simulate ed osservate ad ogni passo temporale i. Le metriche che derivano da queste espressioni non sono limitate superiormente, mentre un valore nullo rappresenta la perfetta corrispondenza tra simulato ed osservato (Biondi et al., 2012). In funzione dei valori di τ e di b, le due espressioni forniscono diverse funzioni obiettivo. Al crescere di τ la funzione obiettivo diventa più "sensibile" alla differenza tra le portate osservate e simulate. La tabella 2.1 riporta alcune delle metriche ricavate delle equazioni 2.1 ed 2.2, assieme ad altre funzioni obiettivo comunemente utilizzate.

Diversi studi mostrano come, in generale, le funzioni obiettivo quadratiche (cioè τ pari a 2) sono maggiormente indicate per la riproduzione dei dei deflussi elevati, mentre quelle logaritmiche, sono invece indicate per una rappresentazione dei deflussi medi/di magra (Pushpalatha et al., 2012). Altri lavori, invece, decompongono tali metriche per ottenere una comprensione più dettagliata delle loro proprietà (Gupta et al., 2009; Krause and Boyle, 2005; Murphy, 1988). In altri studi, le funzioni obiettivo vengono aggregate per definirne altre. Ad esemepio, Lindström (1997) introduce una nuova metrica che combina l'R^2 con il Relative Volume Error. Infine, vi sono autori (Chiew et al., 2009; Viney et al., 2009) che propongono funzioni obiettivo che introducono dei termini di penalizzazione. Ad esempio, Viney et al. (2009), per la calibrazione di diversi bacini Australiani, propone una funzione obiettivo costituita da una combinazione pesata dell'efficenza di Nash and Sutcliffe (1970) ed un termine di penalizzazione (o vincolo) logaritmico legato al $BIAS$

$$F = NS - 5|ln(1 + BIAS)|^{2.5} \tag{2.3}$$

dove i coefficienti 5 e 2 sono stati scelti in base a diversi tentativi che forniscono buoni risultati. Sempre in questo studio gli autori applicano dei termini di penalizzazione alla funzione obiettivo solamente nel caso in cui il l'errore relativo della simulazione risulta superiore al 5%.

Mean Square Error (MSE)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - q_{sim_i})^2$
Route Mean Square Error ($RMSE$)	$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - q_{sim_i})^2}$
Nash-Sutcliffe Measure (NS)	$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(q_{sim_i} - q_{obs_i})^2}{\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - \overline{q_{obs}})^2}$
Mean Error ($BIAS$)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - q_{sim_i})$
Mean Absolute Error (MAE)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert q_{obs_i} - q_{sim_i}\rvert$
Mean Relative Error (MRE)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{q_{obs_i} - q_{sim_i}}{q_{obs_i}}\right\rvert$
Mean Square Logaritm Error ($MSLE$)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(log(q_{obs_i}) - log(q_{sim_i}))^2$
Coefficiente di determinazione (R^2)	$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - \overline{q_{obs}})(q_{sim_i} - \overline{q_{sim}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - \overline{q_{obs}})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_{sim_i} - \overline{q_{sim}})^2}}\right)^2$
Minimax	$\frac{1}{n} max\lvert q_{obs_i} - q_{sim_i}\rvert$
Mean Square Relative Error ($MSRE$)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lvert\frac{q_{obs_i} - q_{sim_i}}{q_{obs_i}}\right\rvert^2$
Index of Agreement (D)	$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(q_{obs_i} - q_{sim_i})^2}{\sum_{i=1}^{n}(\lvert(q_{sim_i} - \overline{q_{obs}}\rvert + \lvert q_{obs_i} - \overline{q_{obs}}\rvert)^2}$
Peak Difference (PDIFF)	$max\{q_{obs_i}\} - max\{q_{obs_i}\}$

TABELLA 2.1: Alcuni esempi di funzioni obiettivo comunemente utilizzate.

Come si può comprendere, in letteratura sono state proposte molteplici funzioni obiettivo, ognuna delle quali risponde a diverse esigenze dell'utilizzatore del modello. Attraverso esse infatti l'utilizzatore sceglie di "addestrare" il modello per rappresentare al meglio uno o più aspetti del processo idrologico.

In seguito alla scelta della funzione obiettivo, l'utilizzatore dovrà scegliere un determinato algoritmo che, attraverso la minimizzazione della funzione obiettivo, fornirà il set di parametri ottimali del modello (*calibrazione classica mono-obiettivo*). A tale proposito la letteratura offre una molteplicità di algoritmi di ottimizzazione (Duan et al., 1993; Storn and Price, 1997; Vrugt et al., 2009). Nel presente lavoro di tesi per effettuare le calibrazioni deterministiche è stato utilizzato un algoritmo evolutivo (si veda il paragrafo 2.2).

Una volta terminata la calibrazione occorre eseguire l'operazione di *validazione*, nella quale le performances del modello vengono valutate sui dati non utilizzati nella fase

precedente (la calibrazione). Viene cioè valutata la capacità del modello nel riprodurre il processo idrologico (ad esempio i deflussi) su un periodo per il quale non è stato "addestrato", la sua capacità di previsione. Ciò che si osserva è una diminuzione delle prestazioni del modello. Se questa avviene in modo marcato, la calibrazione deve essere rivista partendo dall'analisi degli elementi che possono avere compromesso il risultato.

2.2 I Differential Evolution Algorithm (DE)

I Differential Evolution Algorithm (DE) fanno parte dei cosiddetti Algoritmi Evolutivi, algoritmi che si ispirano a processi dell'evoluzione naturale: la funzione obiettivo rappresenta l'ambiente all'interno del quale le soluzioni/individui vivono e si evolvono secondo le leggi della selezione naturale e della sopravvivenza del più forte. Essi esplorano lo spazio dei parametri attraverso regole non deterministiche. Lo sviluppo degli algoritmi evolutivi è mirato a fornire una soluzione di buona qualità ad un problema difficile con un limitato tempo di calcolo. Un limite di essi, infatti, è rappresentato dal fatto che esplorando lo spazio attraverso regole non deterministiche non è detto che essi convergano alla soluzione ottimale, ma possono rimanere "intrappolati" in punti di minimo locale. Questi algoritmi devono bilanciare due componenti: *il grado di esplorazione*, cioè i tentativi che l'algoritmo impiega nella ricerca in regioni distanti dello spazio dei parametri (deve essere possibile indagare ed accettare una soluzione in una regione distante e/o accettare una cattiva soluzione per avere la possibilità di scoprire nuove buone soluzioni) ed *il grado di ricerca*, che misura lo sforzo impiegato "localmente" per la ricerca dell'ottimo.

Gli Algoritmi Evolutivi possono essere applicati ad una vasta gamma di problemi, distinguendosi in termini di robustezza ed efficienza; non sono soggetti ai requisiti di differenziabilità della funzione obiettivo, tendono ad evitare la convergenza in minimi locali ed inoltre operano in parallelo su una popolazione di soluzioni distribuite sulla superficie di ricerca.

Una particolare classe degli algoritmi evolutivi sono i *Differential Evolution (DE)*, introdotti da Storn and Price (1997). Questa tecnica di ottimizzazione è stata creata per rispondere a diversi requisiti, quali:

1. la capacità di minimizzare funzioni obiettivo non lineari, multimodali e non differenziabili;
2. la capacità di operare in parallelo in modo da poter trattare funzioni obiettivo particolarmente onerose computazionalmente;

3. la facilità di utilizzo (poche variabili governano il processo di ottimizzazione);
4. buone proprietà di convergenza (la convergenza al minimo globale viene confermata da prove consecutive ed indipendenti).

Di seguito si descrive l'algortimo seguendo la trattazione proposta dagli autori Storn and Price (1997).

Gl algoritmi DE utilizzano NP vettori $d-$dimensionali contemporaneamente

$$\mathbf{x}_{i,G}, \quad i = 1, \ldots, NP \tag{2.4}$$

dove G indica la $G-esima$ generazione di parametri, chiamata *popolazione* e d il numero di parametri incogniti. Durante il processo di minimizzazione NP non varia. Inoltre, l'utilizzo contemporaneo di numerosi vettori consente di evitare minimi locali.

Il primo passo è la generazione casuale di una popolazione di vettori. Solitamente si utilizza una distribuzione di probabilità uniforme d-dimensionale. L'estrazione dovrebbe coprire l'intero spazio dei parametri. Nel caso in cui sia disponibile una soluzione preliminare, la popolazione iniziale potrebbe essere generata con l'aggiunta di deviazioni casuali normalmente distribuite rispetto a tale soluzione.

Al passo successivo, DE genera un nuovo vettore sommando ad ogni vettore la differenza pesata della differenza di altri due vettori. Tale operazione è definita *mutation* ed il nuovo vettore è definito *mutant vector*. I parametri dei vettori che sono mutati vengono successivamente "mischiati" con i parametri di un altro vettore predeterminato (il *target vector*) formando così il *trial vector*. Tale operazione viene definita di *crossoover*. Se il *trial vector* produce un valore della funzione obiettivo minore rispetto al *target vector*, esso verrà scelto al posto del *target vector* per generare la nuova popolazione (operazione di *selection*).

Mutation

Per ogni *target vector* $\mathbf{x}_{i,G}, \quad i = 1, \ldots, NP$ viene generato un *mutant vector* secondo l'espressione

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G}) \tag{2.5}$$

dove gli indici interi e mutualmenti diversi r_2,r_2, $r_3 \in \{1, \ldots, NP\}$ sono selezionati in modo casuale mentre F rappresenta una costante positiva scelta in modo da controllare l'ampiezza della mutazione. F rappresenta una costante reale $\in [0, 2]$ che controlla l'amplificazione della variazione differenziale $(\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G})$. La scelta casuale degli indici r è inoltre effettuata in modo che essi siano differenti anche dall'indice i, pertanto NP

deve essere maggiore o uguale a quattro.

Crossover

Questa operazione viene introdotta per aumentare la variabilità dei vettori costituenti la popolazione. Il *trial vector* viene ottenuto secondo la relazione

$$\mathbf{u}_{i,G+1} = (u_{1i,G+1} + u_{2i,G+1} + \ldots, +u_{di,G+1}) \tag{2.6}$$

con

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1}, & \text{se } (rand(j) \leq CR) \text{ o } j = rnbr(i) \\ x_{ji,G}, & \text{se } (rand(j) > CR) \text{ e } j \neq rnbr(i) \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, d \tag{2.7}$$

nella quale u_{ji} rappresenta la j-esima componente del vettore $\mathbf{u_i}$ costituito da d parametri. Nelle equazioni precedenti $randb(j)$ rappresenta la j-esima valutazione di un generatore di numeri casuali uniformemente distribuiti nello spazio $\in [0, 1]$. CR invece è la costante di crossover $\in [0, 1]$ che deve essere determinata dall'utilizzatore; essa la percentuale di mutazioni considerate nel *trial vector*. $rnbr(i)$ rappresenta invece un indice scelto a caso $\in [1, \ldots, d]$ che assicura che $\mathbf{u}_{ji,G+1}$ acquisisca almeno un parametro da $\mathbf{v}_{ji,G+1}$.

Selection

Per decidere se il *trial vector* $\mathbf{u}_{i,G+1}$ diventerà un membro della generazione $G + 1$, esso viene confrontato al *target vector* $\mathbf{x}_{i,G}$ della popolazione precedente. Il vettore $\mathbf{u}_{i,G+1}$ sarà scelto come elemento della nuova popolazione solo se il valore della funzione obiettivo F ad esso corrispondente risulta inferiore a quello del vettore della popolazione precedente. In pratica si comparano i valori delle rispettive funzioni obiettivo e in base ad esse si decide per la sostituzione o la conservazione del valore precedente. L'operazione di *selection* è definita dalla seguente espressione

$$\mathbf{x}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,G+1}, & \text{se } F(\mathbf{u}_{i,G+1}) < F(\mathbf{x}_{i,G}) \\ \mathbf{x}_{i,G}, & \text{se } F(\mathbf{u}_{i,G+1}) \geq F(\mathbf{x}_{i,G}) \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, NP \tag{2.8}$$

Criteri di convergenza

La ricerca ricerca si arresta quando l'algoritmo non è in grado di cambiare in modo apprezzabile i valori dei parametri e contemporaneamente migliorare il valore della funzione obiettivo. Al fine di stabilire l'avvenuta convergenza dell'algoritmo, i vettori della popolazione alla generazione $G+1$ vengono ordinati in base al valore della funzione obiettivo ad essi corrispondente

$$F(\hat{\mathbf{x}}_{1,G+1}) < F(\hat{\mathbf{x}}_{2,G+1}) < \cdots < F(\hat{\mathbf{x}}_{NP,G+1}) \tag{2.9}$$

La convergenza si considera raggiunta quando la differenza tra i valori della funzione obiettivo risultano inferiore ad una costante prefissata ϵ_1

$$\Delta_i^F = \frac{|F(\hat{\mathbf{x}}_{i,G+1}) - F(\hat{\mathbf{x}}_{i+1,G+1})|}{|F(\hat{\mathbf{x}}_{i,G+1})|} < \epsilon_1 \tag{2.10}$$

Nel caso in cui tale funzione obiettivo presenti valori modesti del gradiente in prossimità della soluzione, il controllo sulla funzione obiettivo non è sufficiente per garantire l'avvenuta convergenza dell'algoritmo. Perciò, si ritiene raggiunta la convergenza anche quando viene soddisfatta una seconda condizione sulle distanze relative tra le componenti dei vettori

$$\Delta_{ji}^x = \frac{|(\hat{x}_{ji,G+1}) - (\hat{x}_{j,i+1,G+1})|}{|(\hat{x}_{j,i+1,G+1})|} < \epsilon_2 \tag{2.11}$$

dove ϵ_2 rappresenta un valore prestabilito. La figura 2.1 riporta la struttura principale dell'algoritmo.

Storn and Price (1997) e Price et al. (2005) consigliano di impostare il numero di generazioni NP pari ad almeno dieci volte il numero dei parametri, impostare $F = 0,8$ e $CR = 0.9$. Suggeriscono inoltre di applicare un range di variabilità ai parametri sufficientemento esteso. Se l'algoritmo non converge, generalmente non è necessario aumentare il valore di NP ma è sufficiente diminuire F. Se si aumenta NP e contemporaneamente si diminuisce F, la convergenza è più probabile ma richiede più tempo. L'algoritmo DE è molto più sensibile alla scelta di F piuttosto che alla scelta di CR. Alti valori di CR, ad esmepio $CR = 1$ permettono una convergenza più veloce. A volte tuttavia, bisogna diminuire $CR = 0$ per rendere l'algoritmo DE robusto per un ottimizzare un determinato problema.

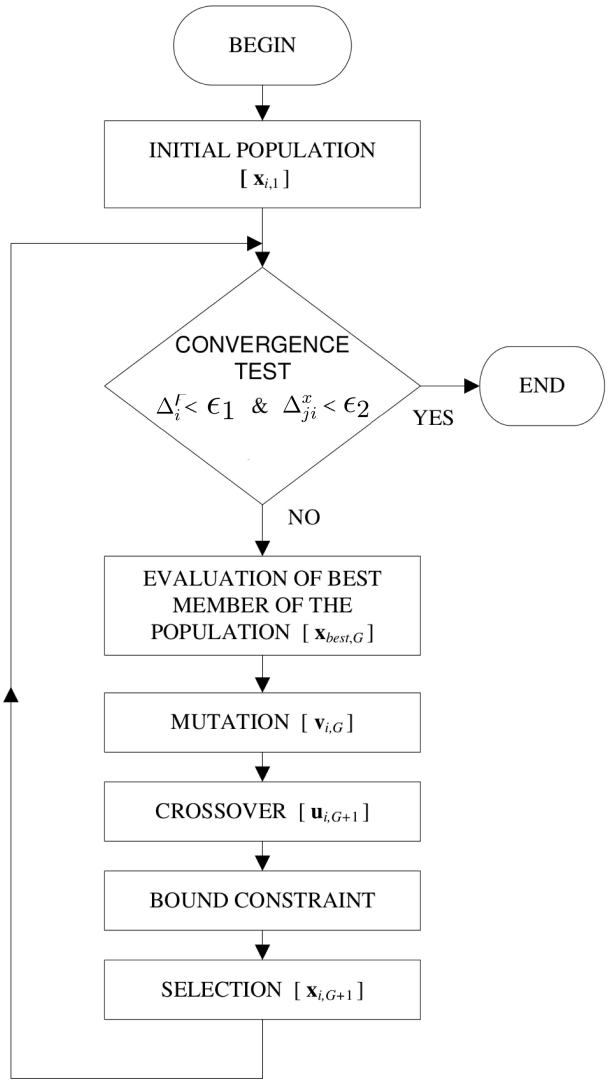

FIGURA 2.1: Rappresentazione schematica delle fasi principali del Differential Evolution Algorithm (Fonte: Rebecchi (2010)).

2.3 Approcci di tipo probabilistico

Sopratutto nell'ultimo decennio, le tecniche probabilistiche per la stima dei parametri stanno ricevendo una crescente attenzione da parte della comunità scientifica. Infatti, a causa della naturale variabilità dei processi idrologici, recenti studi suggeriscono come l'incertezza sia un aspetto intrinseco nell'idrologia, e non potrà mai essere del tutto eliminata (Montanari and Koutsoyiannis, 2012). Diverse, infatti, sono le fonti di incertezze in ambito idrologico. Si pensi, ad esempio, alle semplificazioni ed approssimazioni introdotte nella rappresentazione matematica dei processi naturali, alla definizione delle condizioni al contorno, iniziali ed alle approssimazioni numeriche introdotte per la risoluzione di tali equazioni. Anche i cosiddetti"dati osservati" utilizzati come input al modello sono affetti da incertezza, basti pensare ala precipitazione, o alla temperatura.

Alcune grandezze, quali l'evapotraspirazione, viene comunemente calcolata sulla base di equazioni empiriche che dipendono dalla temperatura. Anche le grandezze che vengono utilizzate per eseguire la calibrazione (quali i deflussi in una determinata sezione fluviale) sono affette da incertezza.

Nel processo di modellazione, questi aspetti si traducono sulla univocità dei parametri del modello. È possibile infatti, che diversi set di parametri forniscano rappresentazioni egualmente accettabili della grandezza indagata. È inoltre possibile, che modelli semplici, forniscano risultati del tutto paragonabili a modelli più complessi. Questo aspetto della modellistica idrologica viene definito da Beven and Binley (1992) *equifinalità*. L'obiettivo di una calibrazione probabilistica è quello di fornire stime affidabili sull'incertezza. Per quanto concerne i parametri del modello, una calibrazione probabilistica si traduce nell'ottenere non più un unico set di parametri ottimali, ma la densità di probabilità associata a ciascun parametro del modello.

Esistono molteplici metodologie per affrontare il problema della stima dell'incertezza (Montanari, 2007). Tra gli approcci maggiormente utilizzati si trovano quelli proposti da Beven and Binley (1992), **?**, Krzysztofowicz (1999) e Vrugt et al. (2003).

Sia f un modello idrologico caratterizzato da d parametri $\theta = \{\theta_1 \ldots, \theta_d\}$ che, date condizioni al contorno $\hat{\xi}$ e certe condizioni iniziali $\hat{\psi}$, produce una risposta $\mathbf{Q_{sim}} = \{q_{sim_1}, \ldots, q_{sim_n}\} = f(\theta, \hat{\xi}, \hat{\psi})$; $\mathbf{Q_{sim}}$ rappresenta la previsione del modello per gli n istanti temporali considerati. Per verificare se il modello rappresenta accuratamente il sistema reale, è prassi comune confrontare tale previsione con i dati osservati $\mathbf{Q_{obs}} = \{q_{obs_1}, \ldots, q_{obs_n}\}$, definendo in questo mododo il vettore dei residui:

$$\varepsilon_i \left(\theta|\mathbf{Q_{obs}}, \hat{\xi}, \hat{\psi}\right) = q_{sim_i} \left(\theta|\hat{\xi}, \hat{\psi}\right) - q_{obs_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.12}$$

L'incertezza, in modellistica idrologica, è rappresentata proprio dall'errore del modello, che rappresenta la discriminante fra l'impostazione deterministica e quella stocastica (Montanari and Koutsoyiannis, 2012). Tanto più il modello rappresenterà al meglio il sistema, quanto più i residui tenderanno a zero. Tuttavia, a causa degli errori nelle condizioni iniziali ad al contorno, gli errori strutturali del modello, quelli nelle osservazioni e l'incertezza associata alla "corretta" scelta dei parametri il vettore dei residui non assumerà mai valore identicamente nullo. Come già accennato, l'incertezza è un aspetto intrinseco nell'idrologia (Montanari and Koutsoyiannis, 2012).

Un approccio di calibrazione non probabilistico indaga lo spazio dei parametri e fornisce una stima di θ. Un approccio di tipo probabilistico, invece, fornisce informazioni sulla densità di probabilità a posteriori dei parametri $p(\theta|\mathbf{Q_{obs}}, \hat{\xi}, \hat{\psi})$. È attraverso essa che esprimiamo l'incertezza associata ai parametri del modello. Attraverso il teorema

di Bayes, la distribuzione dei posteriori dei parametri risulta essere proporzionale alla funzione di verosimiglianza $\mathcal{L}(\theta|\mathbf{Q_{obs}}, \hat{\xi}, \hat{\psi})$:

$$p(\theta|\mathbf{Q_{obs}}, \hat{\xi}, \hat{\psi}) \propto \mathcal{L}(\theta|\mathbf{Q_{obs}}, \hat{\xi}, \hat{\psi})p(\theta) \tag{2.13}$$

dove $p(\theta)$ è la distribuzione a priori dei parametri. La densità di probabilità a posteriori, risulta cioè essere pari al prodotto della funzione di verosimiglianza e della densità a priori dei parametri. La funzione di verosimiglianza è definita come la probabilità che i dati simulati dal modello coincidano con quelli osservati, condizionata ai valori dei dati osservati e alle condizioni iniziali ed al contorno, in dipendenza dai valori assunti dai parametri. E' importante notare che la funzione di verosimiglianza esprime una probabilità, che dipende dai parametri, e non una distribuzione di probabilità. In pratica, la funzione di verosimiglianza è una misura della bontà della simulazione operata dal modello con l'assegnato valore dei parametri. Esistono diverse funzioni di verosimiglianza, dipendenti delle ipotesi effettuate sulle proprietà statistiche dei residui ε_i. Solitamente, per ragioni algebriche e numeriche, non si massimizza la verosimiglianza, ma il suo logaritmo. Se si assumono errori incorrelati e distribuiti normalmente con varianza costante, σ_e^2, il logaritmo della verosimiglianza assume la seguente forma:

$$\ell(\theta|\mathbf{Q_{obs}}, \hat{\xi}, \hat{\psi}) = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln(\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_{i=1}^{n}(q_{sim_i}(\theta|\hat{\xi}, \hat{\psi}) - q_{obs_i})^2 \tag{2.14}$$

Il calcolo della distribuzione di probabilitá a posteriori dei parametri non può essere risolta analiticamente, se non in casi estremamente semplici di ridotta utilitá pratica. Si ricorre quindi a metodi numerici quali tecniche di campionamento Markov Chain Monte Carlo(MCMC).

2.4 Metodi Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

La metodologia MCMC (Monte Carlo Marcov Chain) è, sostanzialmente, una tecnica d'integrazione Monte Carlo basata sull'impiego di catene di Markov. Il metodo fu introdotto da Metropolis et al. (1953). Da allora ha trovato ampio utilizzo in diversi campi della fisica, della medicina ed economici. Nella statistica Bayesiana esso viene largamente utilizzato per calcolare distribuzioni di probabilità multidimensionali che non possono essere risolte analiticamente.

In termini semplicistici, il metodo permette di indagare lo spazio dei parametri attraverso una o più catenedi Markov che "passeggiano in modo aleatorio" (*random walk*) e forniscono informazioni sulla funzione oggetto di indagine.

Un catena di Markov, o processo Markoviano, è un processo stocastico in cui lo stato del sistema allo stato precedente $\mathbf{x}_{t-1}$ evolve ad un nuovo stato $\mathbf{z}$ successivo; la probabilità di evoluzione del sistema dipende unicamente dallo stato precedente e non da tutto il processo effettuato in precedenza. Attraverso percorsi puramente casuali, esse indagano lo spazio dei parametri campionando la funzione oggetto dell'indagine. Per un numero sufficientemente elevato di passi, la distribuzione che si ottiene approssima la distribuzione target (ad esempio la densità di probabilità a posteriori).

Esistono diversi algoritmi per la costruzione di queste catene, la maggior parte di essei derivanti dal metodo più antico teorizzato da Metropolis et al. (1953), il random walk Metropolis (RWM). Si supponga che una catena abbia "campionato" i punti $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}_{t-1}\}$, l'algoritmo procede estraendo un *punto candidato* $\mathbf{z}$ da una *proposal distribution* $q(\cdot,\cdot)$ simmetrica che dipende dalla posizione attuale $\mathbf{x}_{t-1}$. La *proposal distribution* deve dosare opportunamente i movimenti proposti in modo che non risultino troppo bassi, ma che lo spazio degli stati venga visitato sufficientemente in fretta. Successivamente il *punto candidato* θ viene accettato o rigettato in base alla probabilità

$$\alpha(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}) = \begin{cases} min\left(\frac{\pi(\mathbf{z})}{\pi(\mathbf{x}_{t-1})}, 1\right), & \text{se } \pi(\mathbf{x}_{t-1}) > 0 \\ 1, & \text{se } \pi(\mathbf{x}_{t-1}) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

dove $\pi(\cdot)$ definisce la densità di probabilità della distribuzione target. Infine, se il punto è accettato si muove verso la nuova posizione $\mathbf{z}$, altrimenti la catena rimane ferma nella situazione attuale $\mathbf{x}_{t-1}$. Ad ogni passo della catena viene rispettata la condizione

$$p(\mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{x}_{t-1} \to \mathbf{z}) = p(\mathbf{z})p(\mathbf{z} \to \mathbf{x}_{t-1}) \tag{2.16}$$

dove $p(\mathbf{x}_{t-1})$ e $p(\mathbf{z})$ indicano, rispettivamente, la probabilità di trovare il sistema allo stato $\mathbf{x}_{t-1}$ e $\mathbf{z}$; $p(\mathbf{x}_{t-1} \to \mathbf{z})$ e $p(\mathbf{z} \to \mathbf{x}_{t-1})$ rappresentano le probabilità condizionate che si effettui lo spostamento da $\mathbf{x}_{t-1}$ a $\mathbf{z}$ e viceversa. Per iterazioni sufficientemente elevate, la distribuzione dei punti fornirà una stima della densità di probabilità a posteriori di $\pi(\cdot)$. Tale metodo è stato esteso da Hastings (1970) includendo anche *proposal distribution* non simmetriche (i.e. $q(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{z}) \neq q(\mathbf{z}, \mathbf{x}_{t-1})$).

L'efficienza del metodo è influenzata dalla *proposal distribution* utilizzata per generare i "movimenti" del punto nella catena. Quando $q(\cdot,\cdot)$ è troppo "ampia" diversi punti

candidati vengono rigettati e la catena converge lentamente alla distribuzione target. D'altra parte, se la distribuzione $q(\cdot,\cdot)$ è troppo "stretta" diversi punti vengono accettati ma la distanza percorsa dai punti sarà minore, comportando anche in questo modo una convergenza lenta. La scelta della *proposal distribution* risulta pertanto essere un aspetto cruciale per l'applicabilità del metodo MCMC. Un suo automatico adattamento risulta essere un buon espediente per superare tali difficolà. Esempi di tali metodi sono gli Adaptative Proposal (AP) e Adaptative Metropolis (AM) presentati da cite Haario199,Haario2001. Questi metodi utilizzano una singola catena che continuamente adatta la matrice di covarianza della *proposal distribution*, rappresentata da una Gaussiana multivariata, in base alle informazioni contenute nella catena fino a quell'istante. Altri metodi sono stati proposti da Gilks et al. (1994), Mykland et al. (1995) e Braak (2006).

2.4.1 L'algoritmo DiffeRential Evolution Adaptive Metropolis (DREAM)

Nel presente lavoro di tesi, per effettuare le calibrazioni di tipo probabilistico, è stato utilizzato l'algoritmo proposto da Vrugt et al. (2003, 2008a,b, 2009) chiamato *DiffeRential Evolution Adaptive Metropolis (DREAM)*. Si tratta di un algoritmo MCMC che permette la ricerca di soluzioni per l'equazione di verosimiglianza 2.14. Attraverso DREAM è possibile stimare l'incertezza associata a ciascun parametro del modello.

Di seguito si riporta la metodologia adottata dall'algoritmo. Si supponga di trovarsi al passo temporale t. Lo stato della catena $i-esima$ è rappresentato dal vettore di d dimensioni $\mathbf{x}^i$, con $i = (1,\dots,N)$ dove N rappresenta il numero di catene che si evelvono in parallelo, generalmente pari a $N = d$ oppure $N = 2d$. Ogni elemento j-esimo elemento della catena viene indicato con x^i_j. L'algoritmo è costituito dai seguenti passi:

1. estrazione di una popolazione iniziale $\mathbf{x}^i, i = (1,\dots,N)$ dalla distribuzione di probabilità a priori;
2. calcolo della densità di probabilità $\pi(\mathbf{x}^i)$, $i = (1,\dots,N)$ attraverso la trasformata antilog della funzione di log-verosimiglianza (si veda l'equazione 2.14);

   PER $i = 1,\dots,N$ (L'EVOLUZIONE DELLA CATENA)

3. generazione di un punto candidato $\mathbf{z^i}$, nell'$i-esima$ catena;

$$\mathbf{z^i} = \mathbf{x^i} + (\mathbf{1_d} + \mathbf{e})\gamma(\delta, d')\left[\sum_{j=1}^{\delta}\mathbf{x}^{r_1(j)} - \sum_{n=1}^{\delta}\mathbf{x}^{r_2(n)}\right] + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.17}$$

dove δ rappresenta il numero di coppie utilizzate nella generazione del punto candidato, $r_1(j)$ e $r_2(n) \in \{1, \ldots, N\}$; $r_1(j) \neq r_2(n) \neq i$ per $j = 1, \ldots, \delta$ e $n = 1, \ldots, \delta$; i valori di e e $\boldsymbol{\varepsilon}$ sono estratti da $e \sim \mathbf{U_d}(-\mathbf{b}, \mathbf{b})$ e $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N_d}(\mathbf{0}, \mathbf{b}^*)$ con $|b| < 1$ e b^* piccolo rispetto alla larghezza della distribuzione target. Le dimensioni del salto γ dipendono δ e dal numero di dimensioni che vengono aggiornate assieme d' (vedi passo successivo). Una buona scelta di $\gamma(\delta, d') = 2.38/\sqrt{2d'\delta}$, con $d = d'$ in prima istanza, ma che di passo in passo può assumere valori inferiori; ad ogni 5 generazioni γ viene posto pari ad 1;

4. sostituzione di ogni elemento $j = 1, \ldots, d$ del punto candidato z_j^i con x_j^i attraverso uno schema binomiale $1 - CR$, dove CR indica la probabilità di crossover o di rimescolamento:

$$z_j^i = \begin{cases} x_j^i, & \text{se } \mathbf{U}[\mathbf{0}, \mathbf{1}] \leq 1 - CR, \quad d' = d' - 1 \\ z_j^i, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, d \tag{2.18}$$

5. calcolo di $\pi(\mathbf{z^i})$ (si veda il passo 2) ed $\alpha(\mathbf{x^i}, \mathbf{z^i})$ del punto candidato (si veda equazione 2.15);

6. se accettato la catena si sposta nella nuova posizione $\mathbf{x^i} = \mathbf{z^i}$, altrimenti rimane ferma in quel punto $\mathbf{x^i}$;

FINE (L'EVOLUZIONE DELLA CATENA SI ARRESTA)

7. rimozione degli outlier dfella catena attraverso il calxcolo dell'*Inter Quantile Range (IQR)*;

8. calcolo dell'indice di convergenza di Gelman-Rubin $\hat{R}$ (Gelman and Rubin, 1992) per ogni dimensione $j = 1, \ldots, d$ utilizzando l'ultimo 50% dei campioni di ogni catena;

9. se $\hat{R} < 1.2$ per tutti i j, arresto, altrimenti torna all' EVOLUZIONE DELLA CATENA.

Il metodo utilizza una popolazione iniziale di punti che campionano lo spazio; ciascun punto rappresenta l'inizio di una differente catena di Markov. L'adozione di N catene permette di campionare con maggiore facilità lo spazio delle soluzioni anche in presenza di molteplici punti di ottimo locale. L'algortimo risulta essere estremamente efficace e robusto nel campionare lo spazio dei parametri (Vrugt et al., 2008a) e viene ampiamente utilizzato per la calibrazione dei modelli afflussi-deflussi (Laloy and Vrugt, 2012; Laloy et al., 2010; Muleta and McMillan, 2012). Al termine della procedura, ogni catena contiene le informazioni necessarie per stimare l'incertezza parametrica.

Capitolo 3

La Teoria dell'utilità attesa

Fra gli obiettivi della modellistica idrologica vi è quello di fornire strumenti che aiutano i processi decisionali che l'utilizzatore è chiamato ad affrontare.

Nell'ambito della gestione delle risorse idriche, ad esempio, un problema decisionale (o gestionale) potrebbe essere la determinazione ottimale di risorsa idrica da allocare alle diverse utenze, la quantità di acqua da rilasciare a valle di un impianto idroelettrico, il livello idrometrico soglia in un corso d'acqua che determina uno stato di allerta, etc.

Un processo decisionale comprende molteplici aspetti ad esempio economici, sociali, la valutazione delle diverse alternative progettuali, l'individuazione di un criterio di scelta, etc (Loucks et al., 2005). Tutti questi aspetti, estremamente dipendenti gli uni dagli altri, costituiscono di fatto un insieme di alternative decisionali. Il decisore (inteso sia come singola persona che come gruppo di persone) sarà chiamato a scegliere la decisione ottimale fra le diverse alternative possibili.

In questo contesto, si inserisce la *Teoria delle decisioni*. Attraverso essa è possibile analizzare la decisione preferibile, tra varie possibili, prendendo in considerazione le conseguenze derivanti da ciascuna di esse; di fatto fornisce tecniche e metodi per la soluzione dei problemi decisionali.

Quando si analizza un problema di decisione, l'analista, che può essere lo stesso soggetto che prende la decisione, deve individuare l'insieme rilevante delle azioni, degli stati e delle conseguenze per caratterizzare in modo adeguato il problema stesso. Attraverso la loro definizione si costruisce il problema decisionale.

La Teoria delle decisioni è un campo di ricerca molto attivo, oggetto di diversi libri (Clemen, 1996; Parmigiani and Inoue, 2009) e riviste scientifiche quali, ad esempio, *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, Decision Analysis, Risk and Decision Analysis*. Essa si basa sul fatto che qualunque decisione comporta una scelta tra più alternative (o

azioni), ciascuna delle quali produrrà una conseguenza che dipenderà dalle condizioni del contesto (*stato di natura*) nel quale il processo decisionale si svolge. Le decisioni, sono, pertanto, costituite da azioni, stati e conseguenze, con le ultime che dipendono, nella generalità dei casi, dall'azione e dallo stato in cui l'azione si verifica.

Ogni problema decisionale che il decisore deve affrontare comporta delle conseguenze, alcune di esse considerate migliori di altre. Entra in gioco quindi il principio di dominanza, il quale suggerisce di escludere tutte quelle alternative che comportino conseguenze peggiori delle altre, pertanto, se un'alternativa predomina sulle altre, verrà scelta proprio questa e il problema decisionale sarà risolto in maniera ottimale. Purtroppo la maggior parte delle decisioni è basata sul ciò che si ritiene possa accadere e non su quello che accadrà realmente. Nella quasi totalità dei casi risulta quindi impossibile prendere una decisione giusta, si dovrà allora prendere una decisione razionale, valutando al meglio l'insieme parziale di informazioni a disposizione riguardo al vero stato del mondo.

I fondamenti della moderna teoria delle decisioni o del valore o più in generale dell'utilità si trovano nell'opera Von Neumann and Morgenstern (1944). I due autori mostrano come, sulla base di determinati postulati o assiomi di comportamento razionale del decisore, esiste una funzione a valori reali detta, a seconda del contesto in cui si opera, di *valore* o di *utilità*, perfettamente equivalente al suo schema di preferenze: la decisione migliore è quella alla quale corrisponde il massimo dell'utilità attesa.

Prima di esporre in dettaglio la teoria dell'utilità attesa, è opportuno ricordare che i "contesti decisionali" nei quali il decisore può trovarsi ad operare si possono distinguere in:

- decisioni in situazioni di certezza;
- decisioni in situazioni di rischio;
- decisioni in situazioni di incertezza.

Il primo caso è quello in cui lo stato futuro della natura (esiti della decisione) sono certi. Nell'ambito del processo di scelta razionale questo problema diventa banale: una volta che il decisore ha definito l'insieme delle scelte ed ordinato tutte le possibili conseguenze egli sceglierà la decisione migliore. Se invece gli esiti della decisione non sono noti, ma sono note le probabilità dei possibili stati di natura, si dice che si opera in condizioni di rischio. Al contrario, se non si dispone di nessuna informazione sulle probabilità dei diversi stati di natura, si parla di decisione in situazione di incertezza. Soprattutto in ambito idrologico, è quest'ultimo il contesto entro cui il decisore si trova ad operare. Alcuni autori, quelli che seguono un approccio al problema di tipo Bayesiano, introducono

Azioni	Stato di natura					
	$P(\theta_1)$	$P(\theta_2)$	$\dots$	$P(\theta_j)$	$\dots$	$P(\theta_n)$
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1j}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2j}	$\dots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	c_{i1}	c_{i2}	$\dots$	c_{ij}	$\dots$	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mj}	$\dots$	c_{mn}

TABELLA 3.1: Esempio di *Tavola di decisione*

una misura della plausibilità (probabilità soggettiva) dei vari stati di natura facendo così cadere la distinzione tra situazioni di rischio e situazioni di incertezza.

3.1 Teoria dell'utilità attesa

Un processo decisionale in condizioni di incertezza si basa tradizionalmente sulla formulazione della teoria dell'utilità e della funzione di utilità proposta da Von Neumann and Morgenstern (1944). Essi presentarono un modello che rappresentava le azioni umane come il prodotto di un calcolo che teneva in considerazione i desideri degli individui, le alternative a disposizione e le conseguenze delle loro scelte.

Sia $A = \{a_1, \dots, a_m\}, i = 1, \dots, m$ l'insieme delle decisioni (azioni) alternative possibili, $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_n\}, j = 1, \dots, n$ l'insieme dei possibili stati di natura e con $C = \{c_{11}, \dots, c_{ij}, \dots, c_{mn}\}$ quello conseguenze, dove ogni conseguenza dipende sia dalla decisione i-esima che dallo stato j-esimo. Si supponga inoltre che lo stato di natura non sia noto ma che si disponga di una misura della probabilità dei vari stati di natura $P(\theta_j)$. Questo è il caso in cui l'ambito decisionale è incerto. La tabella 3.1, detta anche *Tavola di decisione*, e la figura 3.1 riportano un esempio della rappresentazione del processo decisionale considerato.

Affinchè l'agente sia in grado di effettuare una scelta tra le diverse azioni a_i, egli dovrà introdurre una scala (o relazione) di preferenza sulle conseguenze. Nella formulazione di Von Neumann and Morgenstern (1944) il concetto di utilità viene utilizzato per rappresentare le "preferenze" di un individuo. Quest'ultimo si comporta razionalmente se, vincolato ad effettuare una scelta in condizioni di incertezza, sceglie l'alternativa che massimizza la propria utilità. La loro formulazione è basata su assiomi che permettono la costruzione della funzione di utilità. In particolare, se lo schema di preferenze del decisore soddisfa l'insieme degli assiomi, allora esiste una funzione di utilità per il decisore.

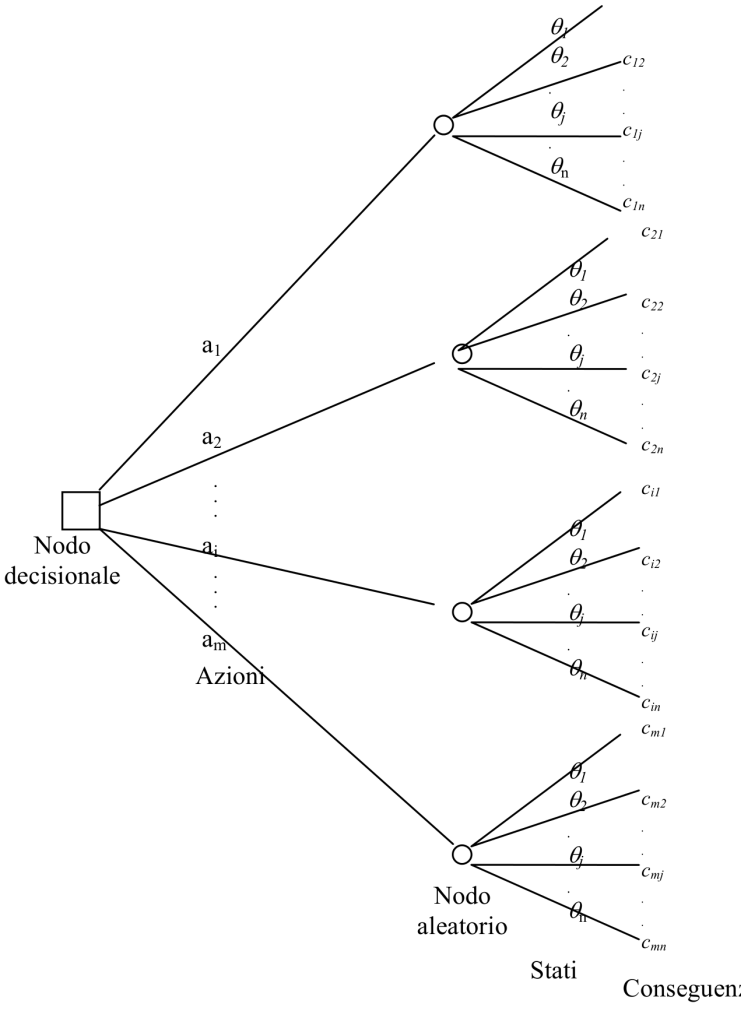

FIGURA 3.1: Esempio di *Albero di decisione.*

Una rappresentazione alternativa del problema decisionale può essere espressa in termini di lotteria o gioco d'azzardo. Una lotteria è semplicemente una distribuzione di probabilità su un insieme finito e noto di risultati (o esiti, conseguenze). Questi risultati potrebbero essere somme di denaro, beni o più in generale *eventi* dei quali è nota la probabilità di accadimento. Sia $L_i = (p_1, c_{i1}; p_2, c_{i2}; \ldots; p_n, c_{in})$ una generica lotteria semplice; essa può essere considerata "equivalente" alle diverse azioni: se si scegliesse l'azione a_i sarebbe come scegliere di partecipare alla lotteria L_i, nella quale si ha la possibilità di ricevere il premio c_{ij} con probabilità $p(\theta_j)$.

Pertanto, da un punto di vista analitico, una lotteria semplice L_i può essere trattata come una distribuzione di probabilità sull'insieme dei possibili stati ed azioni. Esistono inoltre lotterie composte, che possono essere trattate come distribuzioni di probabilità su diverse lotterie: il risultato di una lotteria può essere esso stesso un altra lotteria. Esse possono essere indicate come $L_i = (q_1, L_{i1}; q_2, L_{i2}; \ldots, q_n, L_{in})$, dove $L_{i1}, L_{i2}, \ldots, L_{in}$

rappresentano le lotterie e $q_1, \ldots, q_n$ rappresentano le probabilità di partecipare a tali lotterie, con $q_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$.

Sia G l'insieme di tutte le lotterie, sia semplici che composte. Al fine di costruire una funzione di utilità sulla lotteria, è necessario assumere determinate ipotesi (definite tramite assiomi) sulle preferenze. Indichiamo tale preferenza col simbolo $\succcurlyeq$. Di seguito vengono riportati gli assiomi alla base della teoria dell'utilità:

- *Assioma di completezza.* Si ipotizza che le preferenze siano complete. In altre parole, i giocatori possono confrontare e classificare tutte le lotterie possibili e farne una classifica;
- *Assioma di transitività.* Le preferenze sono transitive. Per ogni terna di lotterie L, L' e $L'' \in G$, se $L \succcurlyeq L'$ e $L' \succcurlyeq L''$, allora $L \succcurlyeq L''$. Il rispetto di questo assioma discende da un'ipotesi di coerenza nel comportamento del giocatore;
- *Assioma di continuità.* Da un punto di vista analitico, questo assioma afferma che vi è continuità nell'insieme delle lotterie G.
- *Assioma di indipendenza.* Siano L, L' e L'' lotterie appartenenti all'insieme G, con $L \succcurlyeq L'$. Indichiamo con $\alpha \in (0, 1)$ una certa probabilità. Indichiamo con $L\alpha + (1-\alpha)L''$ una lotteria ottenuta "mescolando" L e L'' nella proporzione α. Indichiamo inoltre con $L''\alpha + (1-\alpha)L''$ una lotteria ottenuta da L' e L'' attraverso la proporzione α. Risulta che $L\alpha + (1-\alpha)L'' \succcurlyeq +L'\alpha + (1-\alpha)L''$. L'assioma risulta importante in quanto riguarda la possibilità di espressione coerente di misure di alternative rischiose. Se, nel caso di due alternative rischiose una è preferita all'altra, anche una combinazione lineare di ciascuna alternativa con una terza alternativa, non modifica l'ordine di preferenza.

Questi assiomi permettono di rappresentare le preferenze sulle lotterie (quindi sulle azioni da compiere) in termini di utilità. Si dimostra che, data una lotteria L_i è sempre possibile associarle una funzione di utilità a valori reali $U : C \to \Re$ tale che

$$U(L_i) = \sum_{j=1}^{n} p(\theta_j) u(c_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

dove $u(c_{ij})$ rappresenta l'utilità del decisore associata alla conseguenza c_{ij}. Pertanto, l'utilità di una lotteria viene calcolata semplicemente facendo una media ponderata, rispetto alle rispettive probabilità, delle utilità dei risultati possibili.

Secondo il *Teorema dell'utilità attesa*, date due generiche lotterie L ed L', il decisore sceglierà quella delle due che risulta essere maggiormente vantaggiosa, ossia quella a cui

corrisponde il valore di utilità atteso maggiore. In un contesto di incertezza, quindi, il decisore sceglierà la decisione che massimizzerà l'utilità attesa. Una lotteria sarà quindi preferita ad un'altra lotteria se e solo se l'utilità attesa della prima è maggiore dell'utilità attesa della seconda.

Una delle caratteristiche più importanti della funzione di utilità è che, attraverso essa, è possibile evidenziare l'atteggiamento del decisore nei confronti del rischio e la sua eventuale dipendenza dalle conseguenze. Ricorrendo agli assi cartesiani la rappresentazione grafica di una funzione di utilità può risultare analoga ad una delle tre evidenziate nella Fig. 2, dove in ordinata sono riportati i valori assunti dalla funzione di utilità ed in ascissa i valori delle possibili conseguenze (ad esempio dei costi economici). Un decisore la cui funzione di utilità è concava risulta avverso al rischio, se invece le funzione è lineare l'atteggiamento del decisore è di neutralità o indifferenza nei confronti del rischio, mentre il decisore con funzione di utilità convessa à propenso al rischio.

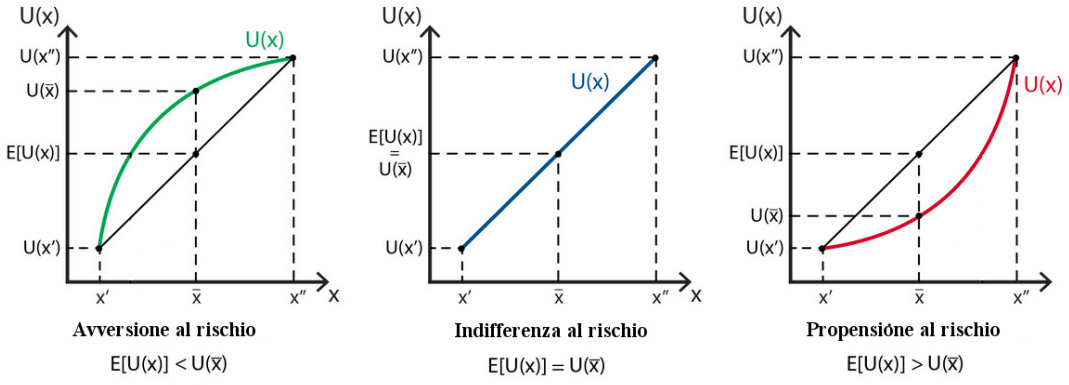

FIGURA 3.2: Forme della funzione di utilità per diversi atteggiamenti nei confronti del rischio.

Si immagini, ad esempio, una semplice scommessa l, il lancio di una moneta non truccata, nella quale un giocatore guadagnerà $x_1 = 10$ euro se uscirà testa, $x_2 = 20$ se uscrirà croce. Il valore atteso della scommessa vale $\overline{x} = (0.5 * 10) + (0.5 * 20) = 15 = E[l]$.

Un individuo si dirà avverso al rischio se vale la relazione

$$u(\overline{x}) = u(E[x]) = u[p * x_1 + (1-p)x_2] > pu(x_1) + (1-p)u(x_2) = \overline{u} = E[u(x)] \quad (3.2)$$

cioè se assegna un'utilità al valore atteso della lotteria maggiore rispetto all'utilità attesa della lotteria stessa. Un esempio di funzione di utilità che esprime avversione al rischio è quella proposta da Bernoulli: $u(w) = log(w)$, nella quale w rappresenta l'esito). Tornado all'esempio del giocatore, l'utilità del valore atteso della scommessa varrebbe $u(\overline{x}) = u(E(l)) = log15) = 1.176$, mentre l'utilità attesa della scommessa sarebbe stata $0.5 * log(10) + 0.5 * log(20) = 1.15$. Da ciò deriva che un decisore avverso al rischio sarà

"caratterizzato" da una funzione di utilià concava: per ogni coppia di valori monetari distinti x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$, una funzione di utilità concava assume per ogni valore $\overline{x}$ interno all'intervallo $x_1 - x_2$ un valore maggiore rispetto alla combinazione lineare dei valori assunti dalla funzione dei due punti estremi dell'intervallo.

Un individuo, invece, si dice propenso al rischio se per esso l'utilità del valore atteso di una scommessa è inferiore al valore atteso dell'utilità della scommessa stessa, cioè $u(E[x]) < E[u(x)]$. Le funzioni di utilità convesse (ad esempio $u(w) = w^2$) esprimono tale propensione. In questo caso il valore atteso dell'utilità del gioco sarebbe stata pari a $0.5 * 10^2 + 0.5 * 20^2 = 250$, mentre l'utilità del valore atteso sarebbe stata $15^2 = 225$.

Infine, un atteggiamento caratterizzato da indifferenza al rischio viene espresso da una funzione di utilità con crescita costante, ad esempio $u(w) = 2w$. Per la scommessa precedente, il valore dell'utilità attesa della scommessa sarebbe stato pari a $0.5 * 2 * 20 + 0.5 * 2 * 20 = 30$ mentre l'utilità del valore atteso del gioco sarebbe stata pari a $2 * 15 = 30$.

Attraverso le funzioni di utilità è possibile esprimere delle relazioni di preferenza. La costruzioni di utilità su un insieme finito è semplice. Si supponga ad esempio che un individuo debba scegliere tra cinque "benefici" *a,b,c,d,e* e che le sue preferenze siano coì ordinate: $b \succcurlyeq c \succcurlyeq d \succcurlyeq a \succcurlyeq e$. Una funzione di utilità che rappresenti tali preferenze si può costruire nel seguente modo: in corrispondenza del beneficio minimo è associata un'utilità minima, pari zero; in corrispondenza del beneficio massimo è associata un'utilità massima, pari ad uno; infine, al crescere del beneficio la funzione di utilità deve essere crescente. Le funzioni di utilità possono essere costruite, ad esempio, mediante interviste.

La formalizzazione delle decisioni assunte in condizioni di incertezza presuppone tre stadi:

- la definizione dell'oggetto della scelta, ossia delle alternative;
- la definizione di un ordinamento tra le alternative;
- la rappresentazione di questo ordinamento tramite una opportuna funzione di utilità.

In un regime di incertezza si sceglie l'azione a cui è associata l'utilità attesa maggiore. Come precedentemente mostrato, l'utilità attesa dell'azione a_i è una media ponderata delle utilità elementari che si ottengono nei vari stati di natura, con pesi pari alle utilità.

3.2 Metodologia di calibrazione proposta

Il presente lavoro di tesi trae spunto dal fatto che non sempre una "perfetta corrispondenza tra dati osservati e simulati" rappresenta la metrica migliore per calibrare/valutare un modello idrologico. Infatti, le prestazioni di un modello dipendono strettamente dall'uso che se ne fa di quest'ultimo. In un sistema di previsione di piena, ad esempio, un modello potrebbe acquisire particolare valore se fosse in grado di riprodurre l'istante temporale del transito del colmo di piena. Nell'ambito della gestione delle risorse idriche, invece, un modello potrebbe essere valutato positivamente se in grado di riprodurre i deflussi nell'arco dell'intera annualità. Come sottolineato nell'introduzione, nessun modello di trasformazione afflussi-deflussi, per quanto ampia sia la sua base fisica, riesce (e probabilmente riuscirà) a riprodurre perfettamente i processi naturali che per loro natura sono incerti.

Il metodo di calibrazione indagato nel lavoro di tesi non viene guidato dal puro confronto tra simulato ed osservato, ma piuttosto cerca di inquadrare queste discrepanze in un ottica di "valore/utilità di un modello idrologico". Attraverso un'apposita definizione della funzione di utilità, si vorrebbero massimizzare le prestazioni del modello laddove ritenute di maggior interesse (o utili) per l'utilizzatore del modello. In particolare, tramite l'utilizzo di funzioni di utilità, ad ogni passo temporale di simulazione, le discrepanze tra dati simulati ed osservati vengono tradotte in utilità. La calibrazione viene quindi eseguita attraverso la massimizzazione di una funzione obiettivo costituita dalla somma delle utilità.

Inizialmente sono state indagate funzioni di utilità *bidimensionali*, basate sull'errore assoluto commesso dal modello: attraverso queste funzioni ad ogni valore di errore assoluto commesso dal modello viene associata una differente importanza o beneficio in base al valore dell'errore di simulazione. L'utilizzatore trarrà beneficio massimo se l'errore commesso dal modello risulterà inferiore ad un valore soglia di errore E_{sx} mentre avrà un beneficio nullo per simulazioni che produrranno errori superiori ad un secondo valore di soglia E_{dx}. In altre parole, se l'errore assoluto commesso al generico istante di calcolo risulta essere inferiore o pari ad E_{sx}, allora l'utilità associata a quel passo temporale vale uno. Se invece l'errore commesso dal modello risulta essere superiore al valore soglia E_{dx}, allora l'utilità ad esso associato è nulla. Tra i due valori di soglia è stata ipotizzata una variazione lineare dell'utilità. Ogni errore commesso dal modello viene pertanto trasformato attraverso la funzione di utilità nell'intervallo $[0, 1]$. La funzione obiettivo sarà costituita dalla somma delle utilità associate ad ogni istante di calcolo. Attraverso questa definizione della funzione obiettivo il processo di calibrazione massimizzerà il beneficio (o l'utilità) associata al modello. La figura 3.3 riporta una schematizzazione della funzione di utilità appena descritta. È opportuno sottolineare che è stato scelto di

basare le funzioni di utilità sull'errore assoluto poichè tale grandezza è dimensionalmente confrontabile con i valori di portata.

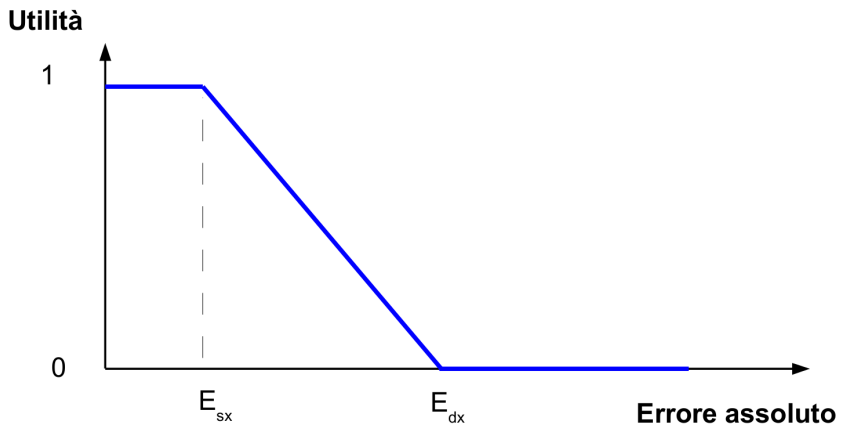

FIGURA 3.3: Schematizzazione delle funzioni di utilità basate unicamente sull'errore assoluto commesso dal modello

In seguito alle indagini condotte per indagare gli effetti sul processo di calibrazione delle funzioni di utilità basate unicamente sull'errore assoluto di simulazione, nel lavoro di tesi è stata esaminata una seconda famiglia di funzioni di utilità, dipendenti sia dall'errore assoluto che dalle portate osservate e simulate. Attraverso tali funzioni di utilità l'utilizzatore di un modello potrà esprimere il proprio livello di beneficio in funzione sia all'errore di simulazione, sia sulla base dei valori di portata simulata ed osservata.

La costruzione di tali funzioni di utilità è basata sull'evidenza che all'aumentare delle portate osservate (e simulate) aumentano gli errori commessi dal modello. Pertanto, è lecito ipotizzare che l'utilizzatore di un modello idrologico riterrà ugualmente soddisfacenti le simulazioni che a portate osservate elevate assoceranno errori elevati. D'altra parte, per deflussi osservati modesti, la riproduzione delle portate avverrà efficacemente se ad esse corrisponderanno errori modesti. L'utilizzatore sarà quindi in grado di associare valori di beneficio differenti in funzione ad ogni coppia "errore-portata".

Per una miglior comprensione della forma della funzione di utilità, risulta funzionale analizzare la figura 3.4.

La definizione di questa seconda famiglia di funzioni di utilità si esplica attraverso tre valori di soglia: uno associato alle portate q^* e due relativi agli errori E_{sx} ed E_{dx}.

Se al generico istante di calcolo l'errore assoluto di simulazione risulta superiore alla soglia E_{dx} alla simulazione verrà associata un'utilità nulla; se invece l'errore assoluto

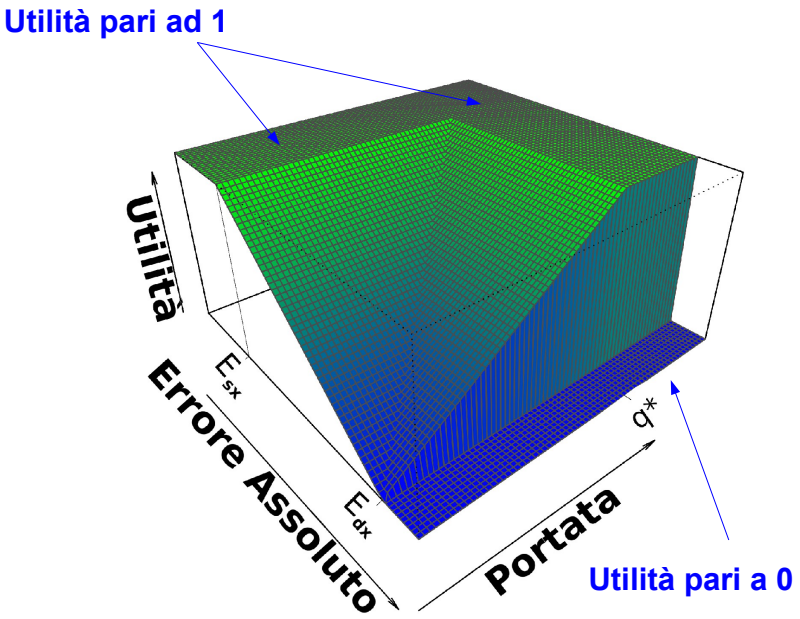

FIGURA 3.4: Schematizzazione delle funzioni di utilità dipendenti sia dall'errore assoluto che dalle portate osservate e simulate.

risulta inferiore alla soglia E_{sx} ad esso corrisponderà un'utilità pari ad uno indipendentemente dal valore di portata; se invece i valori di portata sia osservata che simulata risultano entrambi superiori alla soglia q^* al generico istante di calcolo sarà attribuito un valore di utilità pari ad uno. Infine, se l'errore di simulazione risulta compreso tra E_{dx} ed E_{sx} e la portata inferiore a q^*, l'utilità associata al generico istante verrà calcolata attraverso una funzione analoga a quella rappresentata in figura 3.4, costituita da due piani passanti rispettivamente per i punti $(q = 0, E_{sx}, U = 1)$, $(q = 0, E_{dx}, U = 0)$, $(q^*, E_{sx}, U = 1)$ e per i punti $(q = 0, E_{dx}, U = 0)$, $(q^*, E_{dx}, U = 1)$, $(q^*, E_{sx}, U = 1)$. In quest'ultimo caso l'utilità dipenderà quindi sia dal valore dell'errore di simulazione che dal valore di portata.

Il punto (q^*, E_{dx},$U = 1$) rappresenta il fatto che l'utilizzatore riterrà ugualmente soddisfacenti le simulazioni alle quali a portate elevate corrispondono errori elevati. Il valore di soglia E_{sx} rappresenta l'errore minimo che l'utilizzatore del modello sarà disposto a tollerare per qualsiasi valore di portata (ad esempio, E_{sx} può essere associato alla sensibilità dello strumento misuratore).

Come precedentemente eseguito la funzione obiettivo è costituita dalla somma delle utilità associate ad ogni istante temporale di simulazione. Il processo di calibrazione avviene quindi attraverso la massimizzazione della somma delle utilità.

Capitolo 4

Area di studio e modello afflussi-deflussi

Il capitolo illustra alcuni elementi descrittivi fondamentali dei bacini sui quali sono state condotte le analisi ed il modello afflussi-deflussi utilizzato per eseguire tali indagini.

4.1 Inquadramento dell'area di studio

Il metodo presentato nel lavoro di tesi è stato applicato per stimare i deflussi fluviali in tre bacini ricadenti nelle aree appenniniche Tosco-Emiliane. In particolare, le analisi hanno riguardato il sottobacino del Fiume Reno sotteso alla stazione di Casalecchio di Reno (BO), il bacino del Fiume Arno sotteso alla stazione di Subbiano (AR) ed il bacino del Fiume Sieve a Fornacina (FI) (Figura 4.1).
Questi territori, prevalentemente montousi e caratterizzati da bassa presenza antropica, mostrano una buona copertura di stazioni meteoclimatiche. Nella analisi sono state utilizzate misure di precipitazione, temperatura e portate medie sia giornaliere che orarie. I dati sono stati raccolti e resi disponibili su supporto informatico dal Servizio Idrografico e Mareografico Nazionale (S.I.M.N.), dall'Autorità di Bacino del Fiume Arno e dall'Autorità di bacino del Reno.

4.1.1 Bacino del Fiume Reno a Casalecchio

Il Fiume Reno è il più importante fiume dell'Emilia-Romagna dopo il Po. Nasce nel versante settentrionale dell'Appennino Tosco-Emiliano, in provincia di Pistoia, dove i rami del Reno di Prunetta e del Reno di Campolungo si uniscono presso la località Le Piastre (PT). Dopo un percorso di 212 km sfocia nel Mar Adriatico. Complessivamente

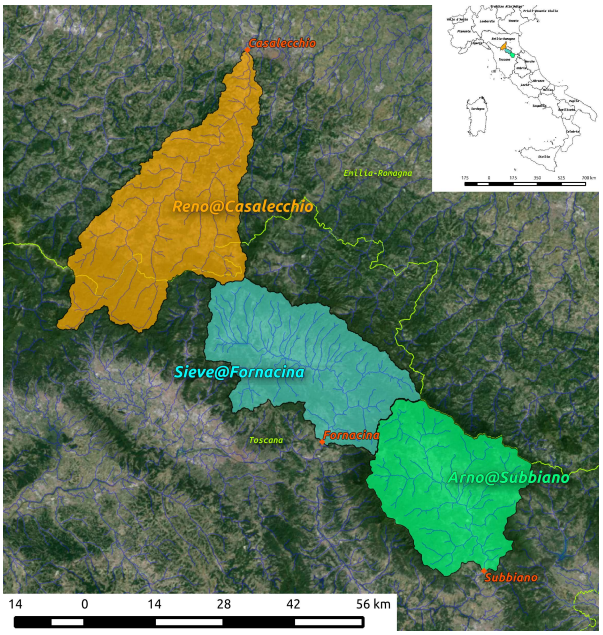

FIGURA 4.1: Area di studio. In rosso sono indicate le sezioni di chiusura dei rispettivi bacini.

drena un territorio di 5040 km^2. Le analisi condotte nel presente lavoro considerano il bacino idrografico del Reno sotteso alla stazione di Casalecchio di Reno (BO). I territori sottesi a questa stazione sono principalmente boschivi. Il regime dei deflussi, di tipo torrentizio, non risente della presenza antropica. Le precipitazioni atmosferiche si concentrano principalmente tra Ottobre ed Aprile, con un massimo nel mese di Novembre; il mese più siccitoso risulta essere Luglio. Le temperature, così come i deflussi, seguono anch'esse questo trend.

I dati disponibili per il bacino consistono nelle altezze di pioggia orarie (13 pluviometri), temperature orarie (7 termometri) e livelli idrometrici del Reno registrati all'idrometro di Casalecchio (Bo). Il periodo di osservazione è di 5 anni, dal 1 Gennaio 1993 al 31 Dicembre 1997 (Figura 4.2) I dati di pioggia e temperatura sono stati elaborati col metodo delle distanze quadratiche inverse ottenendo quindi la distribuzione spaziale della precipitazione e della temperatura. Tramite l'equazione di Thornthwaite (1948) è quindi stata stimata l'evapotraspirazione.

4.1.2 Bacino idrografico dell'Arno a Subbiano

Il Fiume Arno nasce nell'Appennino tosco-emiliano alle pendici meridionali del monte Falterona. Con un bacino di 8228 km^2 e con una lunghezza totale di 241 km, risulta essere il principale corso d'acqua della Toscana. Il suo bacino viene comunemente suddiviso in sei sottobacini principali che, da est ad ovest sono: il Casentino, la Val di Chiana,

Bacino del Reno a Casalecchio	
Superficie	1050 km^2
Lunghezza asta principale	75 km
Quota max\media\min	1914 \627 \39 m $s.l.m$
Pendenza media	14.6%
Dati orari disponibili	1 Gennaio 1993 – 31 Dicembre 1997

TABELLA 4.1: Caratteristiche principali del bacino idrografico del Fiume Reno a Casalecchio.

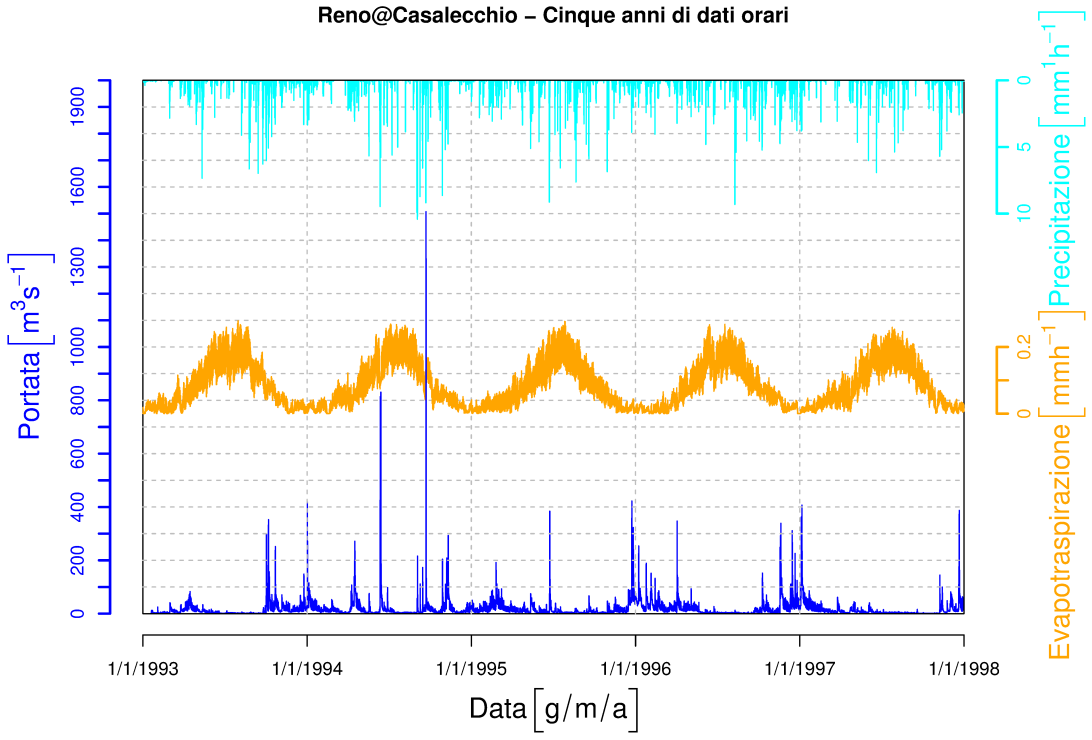

FIGURA 4.2: Idrogramma osservato alla stazione idrometrica di Casalecchio di Reno. Serie temporali della precipitazione ed evapotraspirazione potenziale ragguagliate all'area per il bacino del Fiume Reno sotteso alla stazione di Casalecchio di Reno (rispettivamente azzurro ed arancione).

la Val di Sieve, il Valdarno Superiore, il Valdarno Medio ed il Valdarno Inferiore (Figura 4.3).

In un primo tratto montano, il Fiume defluisce in direzione sud-est fino alla Piana di Arezzo dove riceve le acque del Canale della Chiana. Dopo aver disegnato un ampio arco entra nel bacino del Valdarno Superiore dove, dirigendosi verso nord-ovest, riceve in sinistra le acque del Fiume Ambra. In seguito alla confluenza in destra del Fiume Sieve, suo principale affluente, l'Arno si orienta verso ovest ed entra nella Piana di Firenze. Dopo aver ricevuto gli apporti della Greve, del Bisenzio, dell' Ombrone Pistoiese e del Pesa incontra Empoli. Proseguendo fino a Pontedera raccoglie in sinistra le acque

FIGURA 4.3: Bacino idrografico del Fiume Arno e dei suoi principali sottobacini. Fonte http://www.adbarno.it/adb/

dell'Elsa, dell'Egola e dell'Eramentre, mentre a destra, grazie il Canale Usciana, confluiscono i tributari della Valdinevole. Il reticolo idrografico della piana di Pisa è in gran parte costituito da canali artificiali drenati dal cosiddetto Canale Scolmatore. Da qui prosegue fino all'abitato di Marina di Pisa dove sfocia nel Mar Tirreno.

Il bacino analizzato nel presente lavoro ricade nelle aree del Casentino; in particolare vengono considerati i territori sottesi alla stazione di Subbiano. Con un estensione di 751 km^2, il territorio risulta essere prevalentemente montuoso e comprende le maggiori vette del bacino dell'Arno. L'area è dominata dalla presenza di superfici boscate e risulta del tutto trascurabile la superficie urbanizzata. Le temperature medie annue si aggirano attorno ai 10°C; nel mese di gennaio i valori medi sono attorno ai 2°C, mentre nel pieno della stagione estiva, tra luglio e agosto, le temperature medie si attestano attorno ai 18°C.
Le precipitazioni, con un valore annuo medio poco superiore a 1000 mm, si concentrano essenzialmente nei mesi autunnali, raggiungendo il loro massimo nel mese di novembre, mentre nel mese di luglio vengono registrate le precipitazioni minime. Similmnete al Fiume Sieve, anche l'Arno in questo primo tratto presenta un carattere torrentizio.

Per analizzare il bacino, sono stati utilizzati i dati giornalieri di precipitazione e temperatura in 8 stazioni ricadenti sia nel bacino, che in zone limitrofe. Il periodo di osservazione va dal 1 Gennaio 1992 fino al 31 Dicembre 2013 (Figura 4.4). Elborando i dati puntuali attraverso il metodo delle distanze quadratiche sono stati ottenuti i valori delle grandezze ragguagliate all'area.

Bacino dell'Arno a Subbiano	
Superficie	751 km^2
Lunghezza asta principale	49 km
Quota max\media\min	1622 \752 \259 m $s.l.m$
Pendenza media	14.6 %
Dati giornalieri disponibili	1 Gennaio 1992 – 31 Dicembre 2013

TABELLA 4.2: Caratteristiche principali del bacino idrografico del Fiume Arno sotteso alla stazione di Subbiano. Fonte http://www.adbarno.it/adb/

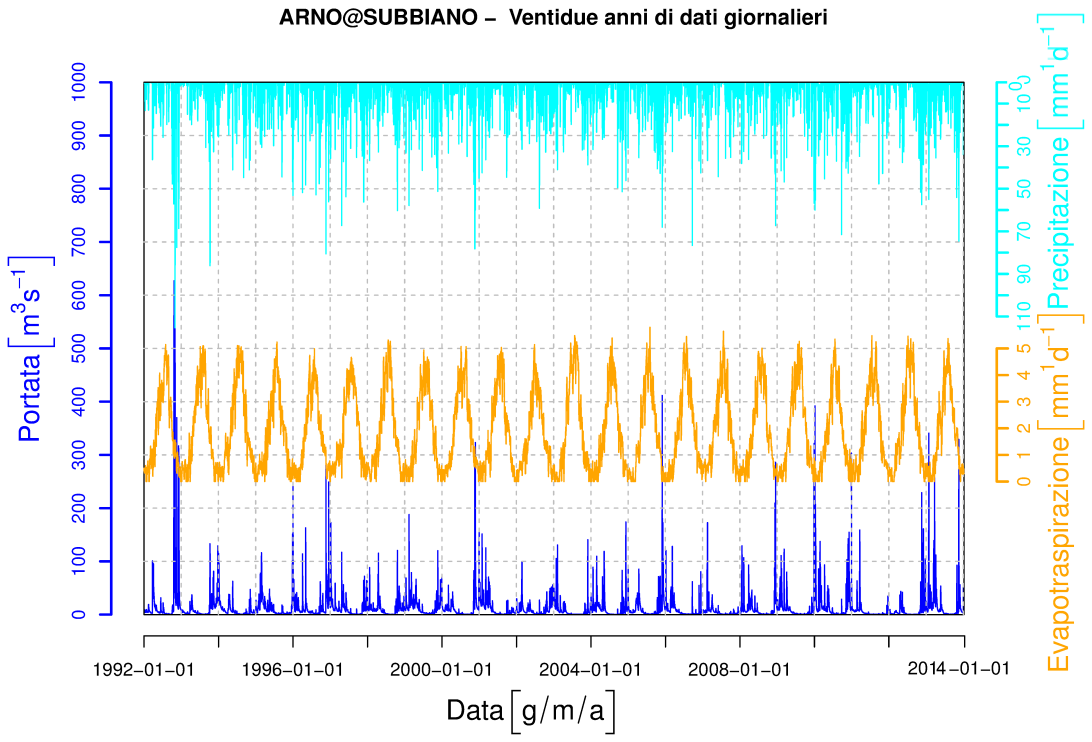

FIGURA 4.4: Idrogramma osservato alla stazione idrometrica di Subbiano. Serie temporali della precipitazione ed evapotraspirazione potenziale ragguagliate all'area per il bacino del Fiume Arno sottteso alla stazione di Subbiano (rispettivamente azzurro ed arancione).

4.1.3 Bacino del Fiume Sieve

Il bacino, che deve il nome al fiume che lo attraversa, si presenta come un'ampia area depressa delimitata da alte e ripide dorsali che la chiudono nettamente sia a monte che a valle. Il suolo è ricoperto principalmente da superfici boschive ed agricole; risulta marginale la superficie urbanizzata. I terrotori più diffusi nel bacino sono quelli collinari, con pendenze medie tra 8÷35%, mentre porzioni di terreno con pendenze superiori al 35% raggiungono quasi un terzo del bacino. Questo tratto di Appennino non presenta cime elevate: in genere esse superano di poco i mille metri. Il regime pluviometrico è

Bacino del Sieve	
Superficie	846 km^2
Lunghezza asta principale	58 km
Quota max\media\min	1637 \488 \96 m $s.l.m$
Pendenza media	12.4 %
Dati giornalieri disponibili	1 Gennaio 1992 – 31 Dicembre 1996

TABELLA 4.3: Caratteristiche principali del bacino idrografico del Fiume Sieve. Fonte http://www.adbarno.it/adb/

quello tipico dell'Appennino settentrionale e centrale, caratterizzato da un minimo principale estivo ed uno secondario invernale, ed un massimo principale autunnale ed uno secondario primaverile. Le precipitazioni, così come le temperature, variano in funzione dell'altimetria: alle quote altimetriche maggiori, cioè quelle della dorsale appenninica, si registrano valori medi annui di circa 1300÷1400 mm ed a 8÷9°C, mentre nelle aree di fondovalle i valori scendono a 1000÷1100 mm e 12÷13°C.
Il fiume Sieve, principale affluente in destra dell'Arno, nasce presso Capo Sieve dalle pendici del Monte Cuccoli (633 m $s.l.m$) e si sviluppa per una lunghezza di circa 60 km prima di confluire nell'Arno a Pontassieve (92 m $s.l.m$). Presenta un carattere prevalentemente torrentizio: alterna infatti deflussi estremamente modesti in estate a momenti in cui si verificavano piene con portate di diverse centinaia di metri cubi al secondo.

Per analizzare il bacino sono stati utilizzati i dati medi giornalieri di precipitazione e temperatura areale in un periodo di 5 anni, dal 1 Gennaio 1992 al 31 Dicembre 1996 (Figura 4.5). Per la caratterizzazione delle portate sono stati utilizzati i livelli idrometrici del Fiume Sieve registrati all'idrometro di Fornacina (ubicato poco a monte della sezione di Pontassieve).

4.2 Il modello afflussi-deflussi HyMOD

Per svolgere le analisi è stato adottato un modello afflussi-deflussi di tipo concettuale, a parametri concentrati chiamato HyMOD (Boyle et al., 2000). Il modello fa parte dei cosiddetti *Probability Distributed Model (PDM)*, modelli che si basano sul cosiddetto *probability-distributed principle* introdotto da (Moore, 1985). Il principio si basa sul fatto che a scala di bacino sia più importante la frequenza con la quale le variabili idrologiche assumono una certo valore piuttosto che la posizione di accadimento della variabile. Partendo da un'iniziale descrizione del processo di formazione del deflusso in un punto del bacino, i *PDM* utilizzano delle distribuzioni di probabilità per descrivere la variabilità spaziale del processo di formazione del deflusso dell'intero bacino. Attraverso

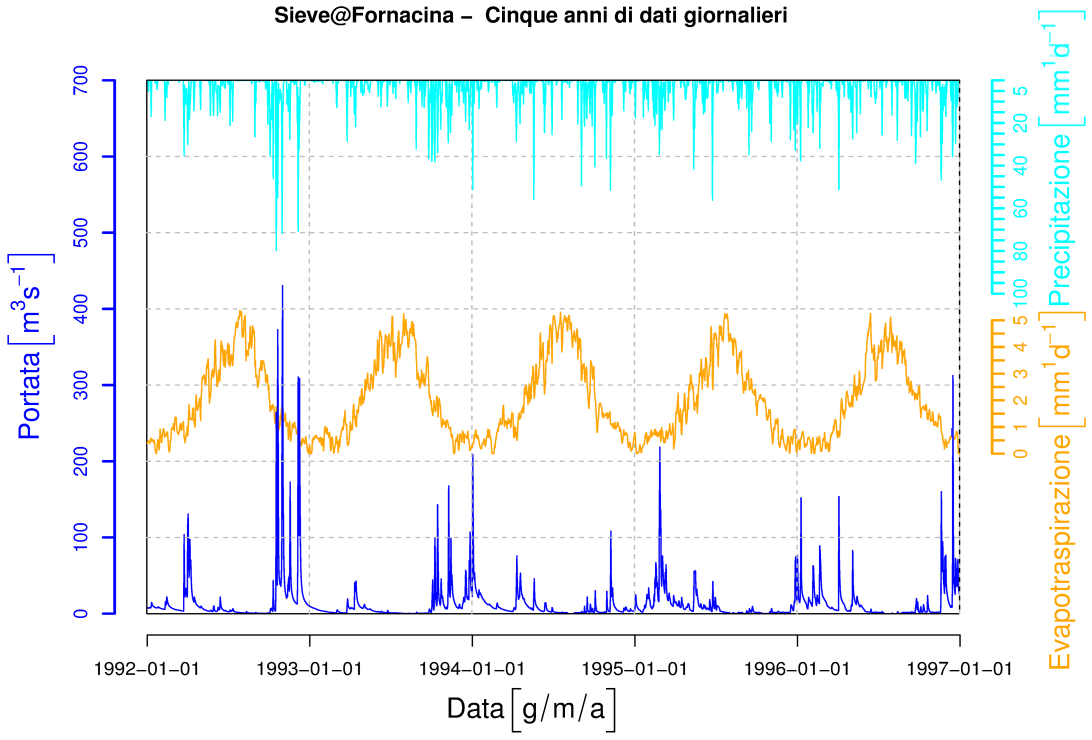

FIGURA 4.5: Idrogramma osservato alla stazione idrometrica di Fornacina. Serie temporali della precipitazione ed evapotraspirazione potenziale ragguagliate all'area per il bacino del Sieve sotteso alla stazione di Fornacina (rispettivamente azzurro ed arancione).

queste distribuzioni è possibile ricavare espressioni algebriche per il calcolo del deflusso sull'intera area analizzata.

Per rendere l'approccio *probability-distributed* analiticamente trattabile è necessario adottare rappresentazioni semplificate dei meccanismi responsabili della generazione di deflusso. In particolare, HyMODO utilizza una distribuzione di probabilità per rappresentare la variabilità spaziale della capacità di immagazzinamento del bacino C. Ad ogni passo temporale, nelle aree nelle quali la capacità di accumulo è superiore a $C(t)$ la pioggia netta si invasa completamente. Nella parte satura di bacino, invece, la parte di pioggia netta che eccede tale capacità si trasforma in deflusso. Grazie ad una costante α, il deflusso viene successivamente suddiviso in deflusso superficiale (rappresentato da tre serbatoi lineari posti in serie caratterizzati dalla stessa costante di invaso $k_{quick}[1/tempo]$) e in deflusso profondo (rappresentato da un unico serbatoio lineare con costante di invaso $k_{slow}[1/tempo]$). Il deflusso complessivo sarà espresso dalla somma dei due contributi. La figura 4.6 fornisce una rappresentazione schematica del modello HyMOD.

Più in dettaglio, si può immaginare il bacino come un insieme infinito di punti senza che vi sia interazione tra questi. Ogni punto è caratterizzato da una determinata capacità

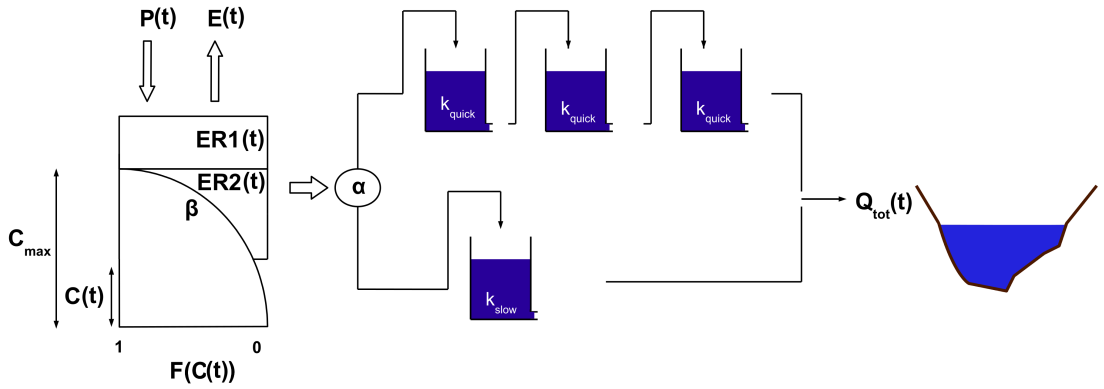

FIGURA 4.6: Rappesentzione schematica di HyMOD.

di ritenzione idrica C e da un determinato livello idrico che viene incrementato dalla precipitazione P e diminuito dall'evapotraspirazone E. Nel momento in cui la capacità di ritenzione viene superata, l'eccesso d'acqua produce deflusso. Come risultato della variabilità spaziale delle caratteristiche del terreno, come ad esempio la tessitura e la struttura, anche la capacità di ritenzione dei differenti punti del bacino varierà. In particolare, HyMOD descrive tale grandezza attraverso una distribuzione di Pareto:

$$F(C(t)) = 1 - \left(1 - \frac{C(t)}{C_{max}}\right)^{\beta} \qquad 0 \leq C(t) \leq C_{max} \tag{4.1}$$

nella quale $F(C(t))$ rappresenta, in determinato istante temporale t, la frazione di bacino dotata di capacità di ritenzione (per unità di superficie) inferiore od uguale ad un valore assegnato $C(t)$, $C_{max}[mm]$ la massima capacità di ritenzione idrica del terreno, $\beta[/]$ il grado di variabilità spaziale di della capacità di ritenzione. In particolare, nel caso in cui β fosse pari a zero, il bacino sarebbe caratterizzato da un valore di C costante, mentre se β assumesse un valore unitario C varierebbe uniformemente tra 0 e C_{max}. La figura 4.7 mostra un esempio della funzione $F(C(t))$ per diversi valori di β. L'area evidenziata in grigio rappresenta la capacità di ritenzione complessiva del bacino (si osservi che gli assi sono stati invertiti rispetto alle due immagini precedenti).

In HyMOD, ad ogni istante temporale, il volume idrico W (per unità di area) invasato nel bacino vale

$$W(t) = C(t) - \left[\int_0^{C(t)} F\left(\chi(t)\right)\, d\chi\right] \tag{4.2}$$

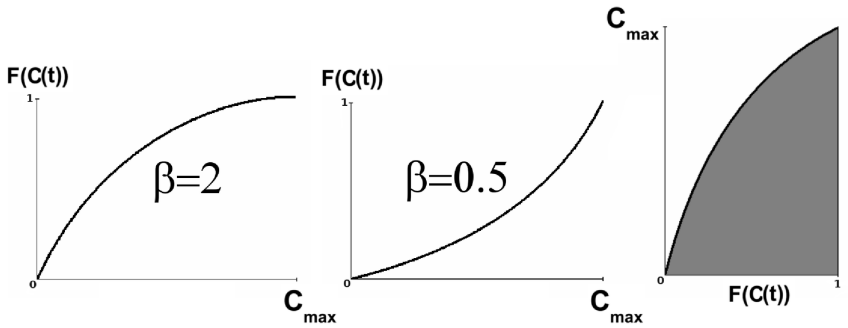

FIGURA 4.7: Esempi della funzione di distribuzione della capacità di immagazzinamento del bacino $F(C(t))$ in funzione del valore di β. In grigio la capacità di ritenzione idrica complessiva del bacino.

Sviluppando l'integrale della 4.3 si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{C(t)} F\left(\chi(t)\right)\, d\chi &= \int_0^{C(t)} \left\{1 - \left[1 - \frac{\chi(t)}{C_{max}}\right]^{\beta}\right\} d\chi(t) \\ &= C(t) + \left[\frac{C_{max}}{\beta+1}\left[1 - \frac{\chi(t)}{C_{max}}\right]^{\beta+1}\right]_{\chi(t)=0}^{\chi(t)=C(t)} \\ &= C(t) - \frac{C_{max}}{\beta+1}\left[1 - \left(1 - \frac{C(t)}{C_{max}}\right)^{\beta+1}\right].\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sostituendo la 4.3 nella 4.3, si ottiene un volume idrico $W(t)$ espresso da

$$W(t) = \frac{C_{max}}{\beta+1}\left\{1 - \left[1 - \frac{C(t)}{C_{max}}\right]^{\beta+1}\right\}, \tag{4.4}$$

attraverso la quale è possibile esprimere $C(t)$ come

$$C(t) = C_{max}\left[1 - \left(1 - W(t)\frac{\beta+1}{C_{max}}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\right]. \tag{4.5}$$

Procedendo per istanti di tempo finiti, ad un generico istante temporale t, noto il volume idrico invasato nel bacino $W(t)$ è possibile calcolare il volume idrico invasato $C(t)$ mediante l'equazione 4.5. All'istante di calcolo successivo la capacità di ritenzione vale

$$C(t+1) = C(t) + P(t) \tag{4.6}$$

con $C(t+1) = C_{max}$ se $C(t) + P(t) > Cmax$.

Si procede quindi al calcolo di un primo contributo al deflusso rappresentato dalla eventuale eccedenza rispetto a C_{max}, in accordo alla relazione

$$ER1 = max\left\{C(t) + P(t) - C_{max}, 0\right\} \tag{4.7}$$

che rappresenta il volume d'acqua superiore a $Cmax$ (si veda la figura 4.6) che viene direttamente destinato al deflusso.

Si procede quindi al calcolo di una seconda quota del deflusso dato dalla parte di volume idrico che non può essere trattenuto nel bacino poichè una frazione della superficie contribuente al deflusso si è saturata. Questo secondo contributo vale

$$ER2 = [C(t+1) - C(t)] - [W(t+1) - W(t)] \tag{4.8}$$

L'evapotraspirazione effettiva E_{eff} viene poi calcolata in accordo alla formula 4.10 e sottratta dal volume invasato all'interno del bacino

$$E_{eff} = \left(1 - \frac{\frac{C_{max}}{\beta+1} - W(t)}{\frac{C_{max}}{\beta+1}}\right) E(t). \tag{4.9}$$

Infine, il volume invasato $W(t+1)$ viene aggiornato sottraendo l'evapotraspirazione effettiva, in accordo alla relazione

$$W(t+1) = max\left\{W(t+1) - E_{eff}(t), 0\right\}. \tag{4.10}$$

Si noti che l'evapotraspirazione viene sottratta al volume invasato nel bacino dopo aver computato $ER1$ ed $ER2$.

Il contributo totale $ER(t) = ER1(t) + ER2(t)$ al deflusso viene successivamente diviso in due parti: $\alpha ER(t)$ che rappresenta il contributo al deflusso superficiale e $(1-\alpha)ER(t)$ che viene invece indirizzato al deflusso profondo. $\alpha ER(t)$ viene propagato attraverso i tre serbatoi in serie caratterizzati dal parametro k_quick (si veda la figura 4.6); $(1-\alpha)ER(t)$ viene invece propagato attraverso il serbatoio profondo con parametro k_slow.

Il modello HyMOD prevede quindi la calibrazione di 5 parametri:

- C_{max} $[mm]$ che rappresenta la massima capacità di immagazzinamento di acqua nel bacino;

- β [/] che controlla il grado di variabilità spaziale della capacità immagazzinamento sul bacino;
- α[/] che esprime la separazione tra deflusso veloce e lento;
- k_{quick} [$1/tempo$] che rappresenta la costante di proporzionalità fra portata uscente dallo scarico di fondo e volume invasato nella serie dei serbatoi che riproducono la risposta veloce;
- k_{slow} [$1/tempo$] che rappresenta la costante di proporzionalità fra portata uscente dallo scarico di fondo e volume invasato nel serbatoio che riproduce la risposta lenta;

Il limitato numero di parametri rendono HyMOD estremamente parsimonioso. Ciò nonostante è in grado di adattarsi alle condizioni che si verificano in bacini completamente differenti, fornendo risultati del tutto soddisfacenti nella riproduzione dei deflussi. Inoltre, data la sua semplicità (sia dal punto di vista dell'implementazione che come numero di parametri) rendono il suo utilizzo e la sua calibrazione estremamente rapida. Diversi studi (Blasone et al., 2008; Lombardi, 2011; Montanari, 2005, 2007; Montosi, 2012; Vrugt et al., 2008b; Zhou et al., 2014) hanno utilizzato HyMOD come modello di simulazione afflussi-deflussi.

Capitolo 5

Applicazione della metodologia proposta

Nel presente capitolo viene eseguita la calibrazione dei tre bacini oggetto d'indagine attraverso l'utilizzo della funzione obiettivo basata sulle funzioni di utilità precedentemente illustrate. Il capitolo presenta innanzitutto i risultati delle calibrazioni effettuate secondo un approccio classico, sia deterministico che probabilistico. Tali risultati vengono successivamente utilizzati come confronto per le calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione dell'utilità. Innanzitutto viene indagata la metodologia che prevede la dipendenza di tali funzioni unicamente dall'errore assoluto commesso dal modello. In seguito si analizza la parametrizzazione attraverso funzioni dipendenti anche dalle portate osservate e simulate.

5.1 Calibrazione *tradizionale*: approccio deterministico e probabilistico

L'attività di ricerca è stata innanzitutto rivolta alla calibrazione dei tre bacini indagati mediante la minimizzazione di una funzione obiettivo "classica": l'errore assoluto medio, chiamato anche *Mean Absolute Error (MAE)* (v.d. capitolo 2). L'obiettivo di queste prime indagini è stato quello di verificare le capacità di HyMOD nel riprodurre il comportamento dei bacini analizzati. Questi risultati sono stati successivamente utilizzati come confronto per le calibrazioni basate sulla funzione obiettivo proposta nel lavoro di tesi.

Le parametrizzazioni sono avvenute attraverso l'utilizzo dei software R (R Development Core Team, 2011) e MATLAB®. Il primo è stato utilizzato per le calibrazioni deterministiche, il secondo per quelle probabilistiche. In R le calibrazioni sono avvenute attraverso

Dati utilizzati			
		Calibrazione	Validazione
Reno		1-1-1993 – 31-12-1995	1-1-1995 – 31-12-1997
Arno		1-1-1992 – 31-12-1994	1-1-1994 – 31-12-2013
Sieve		1-1-1992 – 31-12-1994	1-1-1994 – 31-12-1996
Intervalli di variabilità dei parametri			
		Minimo	Massimo
C_{max}	$[mm]$	50.00	1000.00
β	$[/]$	0.01	2.00
α	$[/]$	0.001	0.99
k_s	$[1/giorni]$	0.01	0.10
k_q	$[1/giorni]$	0.10	0.99

TABELLA 5.1: Dati utilizzati per la calibrazione e validazione di HyMOD.

l'utilizzo dell'algortimo DEoptim (Mullen et al., 2011), in MATLAB® è stato utilizzato l'algoritmo DREAM (Vrugt et al., 2008b).

Per ogni bacino i dati a disposizione sono stati suddivisi in due serie: la prima utilizzata per la calibrazione del modello, la seconda per la sua validazione (tabella 5.1). Per diminuire la sensibilità del modello alle condizioni iniziali, nella serie utilizzata per la calibrazione è stato adottato un periodo di *warm-up* pari a cinque mesi. Le ottimizzazioni sono avvenute imponendo come limiti di variabilità ai parametri i valori riportati in tabella 5.1.

I risultati di questa prima fase sono riassunti in tabella 5.2 e nelle figure 5.1 (Reno), 5.2 (Arno) e 5.3 (Sieve). In particolare, in tabella 5.2 vengono riportati i parametri ottimali ottenuti grazie all'algoritmo DEoptim ed alcune statistiche sulla distribuzione a posteriori dei parametri calcolati da DREAM (figura 5.4). Sono inoltre mostrati alcuni indici di qualità del modello (l'*Efficienza di Nash-Sutcliffe* (NE) ed il *Root Mean Square Error* ($RMSE$)) ottenute attraverso una calibrazione con funzione obiettivo pari all'errore assoluto medio (MAE). Per quanto concerne le figure 5.1, 5.2 e 5.3 ognuna di esse riporta rispettivamente nella parte superiore, in mezzeria e nella parte inferiore, i seguenti grafici:

- idrogramma osservato e simulato (sia nel periodo di calibrazione che validazione) ed i relativi intervalli di confidenza (5%-95%) calcolati attraverso DREAM;
- scatterplot in calibrazione e validazione, entrambi in scala doppio logaritmica per una miglior visualizzazione dei risultati;
- errore assoluto medio (MAE^*) calcolato all'interno di una determinata media mobile dei deflussi osservati. Tradizionalmente il MAE viene ottenuto sommando gli

errori assoluti commessi per tutti i passi temporali di simulazione e dividendo tale valore per il numero dei dati (i deflussi osservati) considerati. I grafici indicati con la sigla MAE^*, invece, riportano l'errore medio del modello calcolato in un determinato intervallo di deflussi osservati (finestra mobile). Attraverso questi grafici viene cioè rappresentato il trend dell'errore medio assoluto corrispondente ad un determinato intervallo di portate osservate. Per avere una lettura il più possibile "comprensibile" dei grafici sono state adottate due ampiezze diverse delle finestre mobili: per portate osservate minori o uguali a 15 m^3s^{-1} l'ampiezza vale 2 m^3s^{-1}, per portate osservate superiori l'ampiezza vale 5 m^3s^{-1}. Tale scelta deriva dal fatto che adottando un'unica finestra mobile di ampiezza "modesta" la dispersione del grafico al crescere delle portate osservate cresce a tal punto da rendere la lettura "poco chiara". D'altra parte, adottando una finestra mobile di ampiezza "elevata" l'errore assoluto medio nelle portate "minori" non viene rappresentato. Per i bacini analizzati è stato osservato che una buona rappresentazione si ottiene, appunto, nell'adottare due finestre mobili con ampiezza pari a 2 m^3s^{-1} per valori di portate osservate fino a 15 m^3s^{-1} , 5 m^3s^{-1} per deflussi osservati superiori.

Per quanto concerne al Fiume Reno (figura 5.1), analizzando l'idrogramma osservato è possibile innanzitutto notare una marcata differenza dell'intensità e del numero di eventi di piena presenti nel periodo di calibrazione rispetto a quello di validazione. In calibrazione, tali eventi di piena vengono sottostimati dal modello (tale aspetto si nota sia dallo scatterplot sia dal grafico del trend dell'errore assoluto che riporta valori di MAE^* marcatamente elevati in corrispondenza dei deflussi osservati elevati). Una minor sottostima dei colmi di piena si ha invece nel periodo di validazione. In tale periodo si nota un incremento degli indici di prestazione (tabella 5.2), probabilmente come conseguenza ai minori errori commessi dal modello nella rappresentazione dei colpi di piena. La rappresentazione del processo afflussi-deflussi per il Fiume Reno, rimane tuttavia modesta. Risulta interessante notare come il set di parametri ottimali calcolato da DEoptim coincida praticamente con la mediana della distribuzione a posteriori dei parametri del modello calcolati attraverso DREAM. Queste distribuzioni risultano caratterizzate da una dispersione estremamente contenuta, evidenziando una bassissima incertezza sulla distribuzione a posteriori dei parametri (figura 5.4).

Le simulazioni per il Fiume Arno (figura 5.2) mostrano un buon adattamento del modello alle portate osservate. Sia in calibrazione che in validazione, gli scatterplot appaiono nel complesso simmetrici e poco dispersi. Anche in questo caso, l'idrogramma mostra tuttavia una sottostima dei colmi di piena più importanti, ma una discreta riproduzione

Calibrazioni – Mean Absolute Error (MAE)

Reno				
		DEoptim	DREAM	
			Mediana	SD
C_{max}	$[mm]$	317.192	317.072	0.178
β	$[/]$	0.150	0.150	0.001
α	$[/]$	0.237	0.237	0.001
k_s	$[1/ore]$	0.010	0.010	0.001<
k_q	$[1/ore]$	0.189	0.189	0.001<
MAE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	9.602	9.602	
MAE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	8.447	8.448	
NE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.535	0.535	
NE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.686	0.686	
$RMSE$ (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	29.787	29.782	
$RMSE$ (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	16.165	16.167	
Arno				
		DEoptim	DREAM	
			Mediana	SD
C_{max}	$[mm]$	879.792	879.198	3.444
β	$[/]$	0.087	0.087	0.001
α	$[/]$	0.410	0.398	0.008
k_s	$[1/giorni]$	0.059	0.059	0.002
k_q	$[1/giorni]$	0.890	0.900	0.006
MAE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	5.404	5.406	
MAE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	6.361	6.373	
NE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.616	0.617	
NE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.673	0.675	
$RMSE$ (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.701	15.681	
$RMSE$ (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.148	15.127	
Sieve				
		DEoptim	DREAM	
			Mediana	SD
C_{max}	$[mm]$	383.910	386.235	3.337
β	$[/]$	0.086	0.086	0.003
α	$[/]$	0.618	0.615	0.006
k_s	$[1/giorni]$	0.042	0.042	0.001
k_q	$[1/giorni]$	0.768	0.770	0.006
MAE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	5.299	5.300	
MAE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	6.142	6.127	
NE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.813	0.813	
NE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.655	0.655	
$RMSE$ (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.139	15.159	
$RMSE$ (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	14.189	14.182	

Tabella 5.2: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la minimizzazione della somma degli errori assoluti (MAE) utilizzando due procedure di calibrazione differenti: deterministica (algoritmo di ottimizzazione DEoptim) e probabilistica (algoritmo di ottimizzazione DREAM). Si riportati i valori ottimali dei parametri ed alcuni indici di qualità delle simulazioni. Per la calibrazioni probabilistiche vengono mostrate la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori.

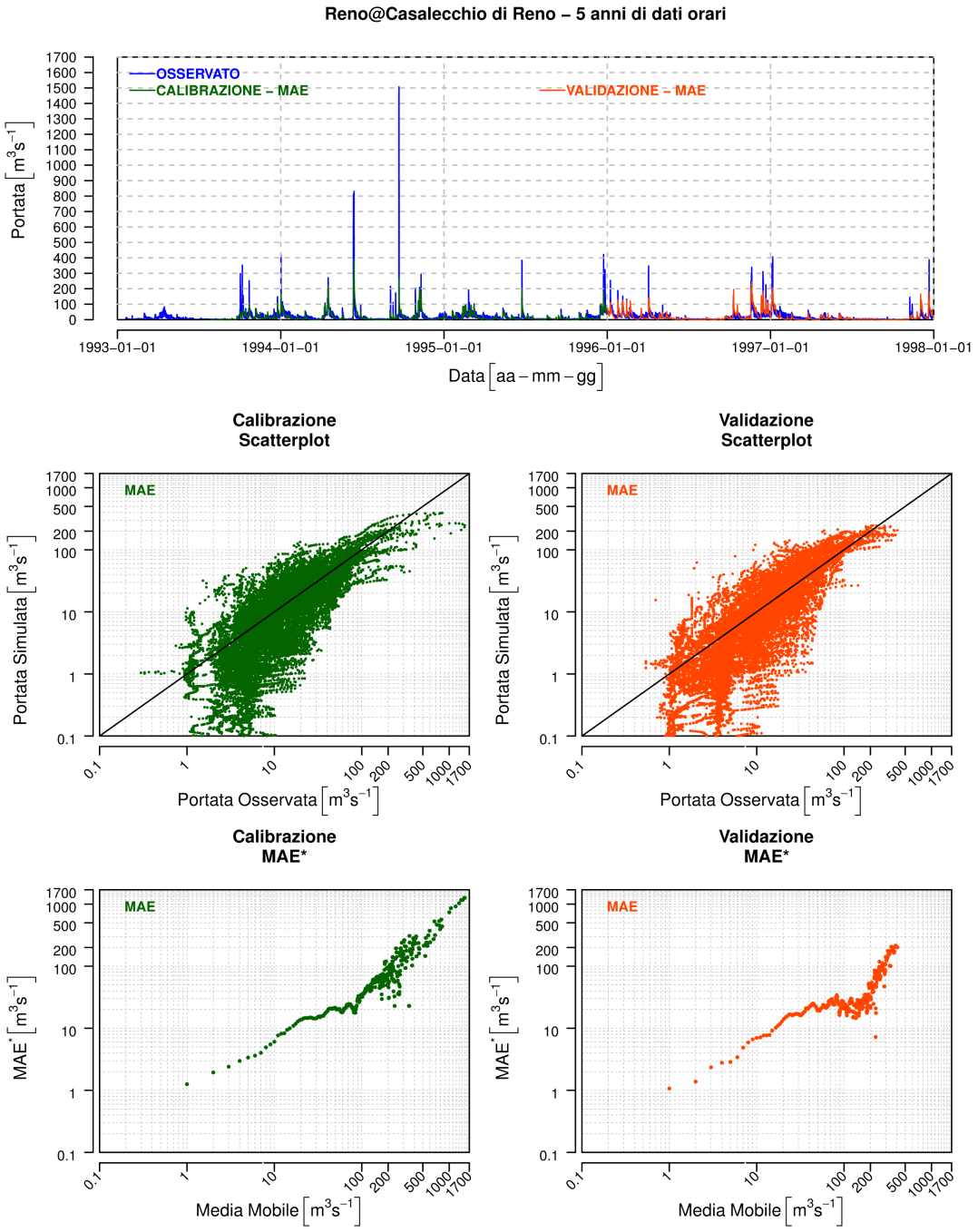

FIGURA 5.1: Reno: risultati grafici della calibrazione (sia deterministica che probabilistica) adottando come funzione obiettivo il MAE.

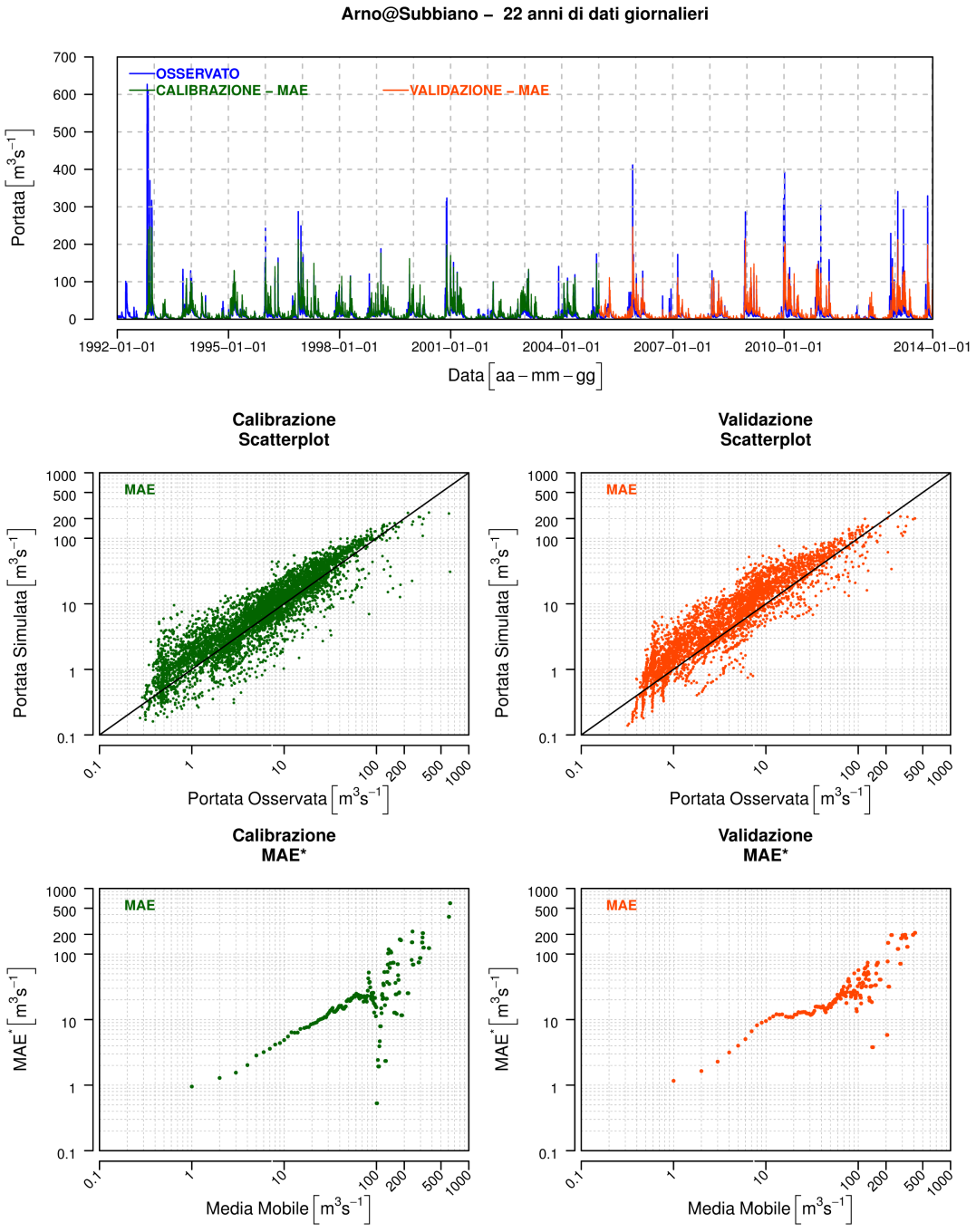

FIGURA 5.2: Arno: risultati grafici della calibrazione (sia deterministica che probabilistica) adottando come funzione obiettivo il MAE.

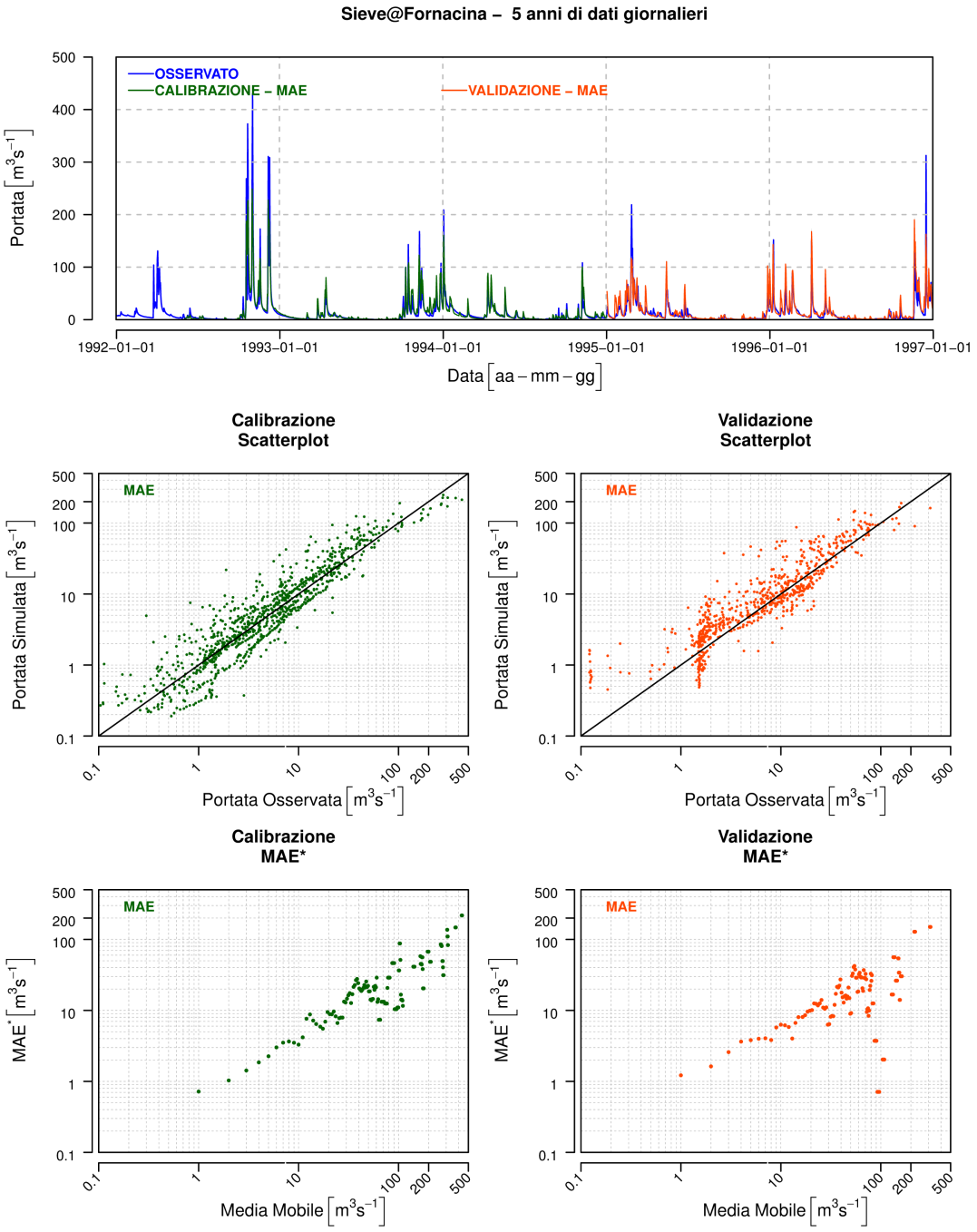

FIGURA 5.3: Sieve: risultati grafici della calibrazione (sia deterministica che probabilistica) adottando come funzione obiettivo il MAE.

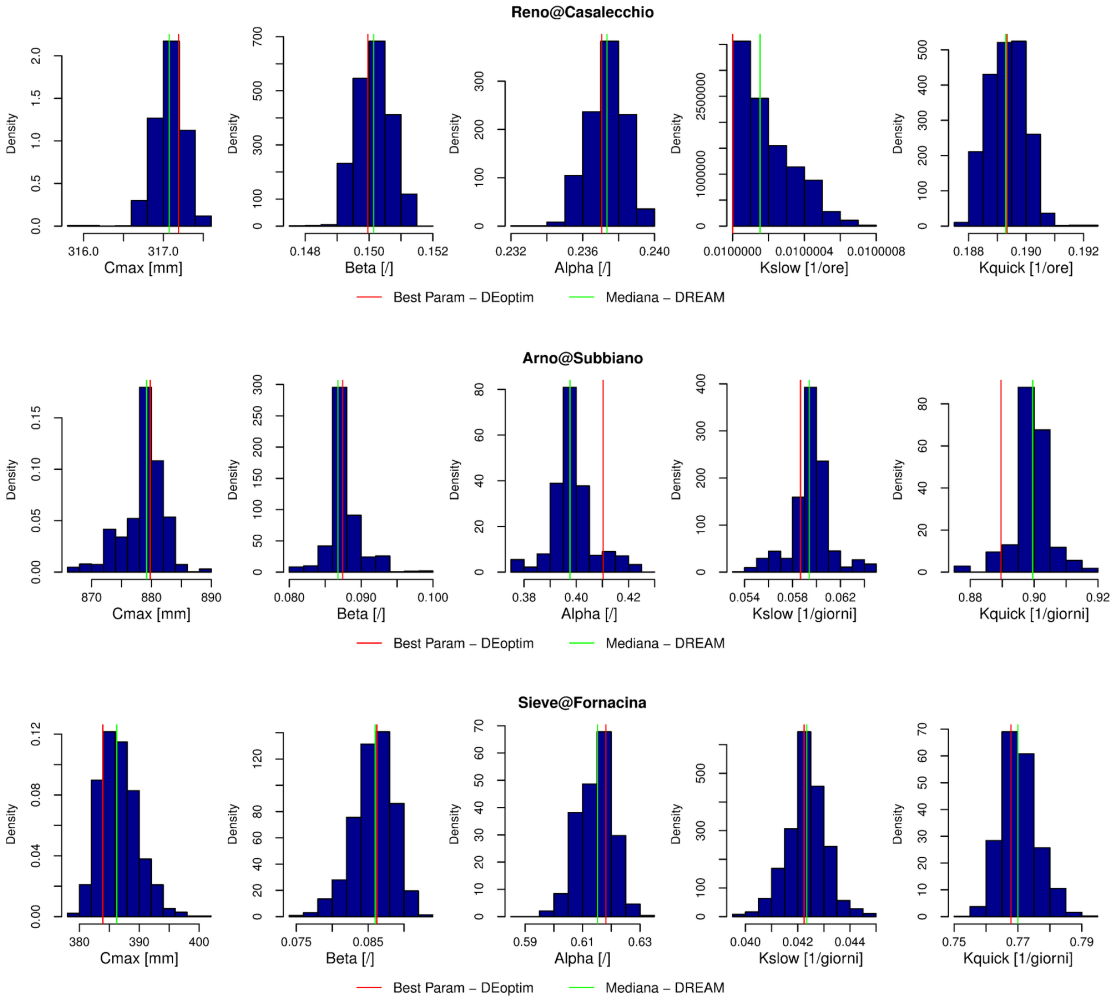

FIGURA 5.4: Istogrammi della densità di probabilità a posteriori dei parametri ottimizzati con DREAM adottando come funzione obiettivo il MAE.

di quelli secondari. Dagli scatterplot si nota che in validazione il modello tende maggiormente a sovrastimare i deflussi rispetto alla calibrazione. Analizzando i grafici del trend dell'errore assoluto si osserva che per valori di portate inferiori a 20 $m^3 s^{-1}$ il modello in calibrazione commette errori minori rispetto alla validazione. Come per il Fiume Reno, anche in questo caso nel passaggio dalla calibrazione alla validazione la rappresentazione dei periodi con portate "modeste" peggiora mentre aumentano le capacità del modello nella rappresentazione dei deflussi elevati. Gli indici mostrati in tabella 5.2 confermano un buon adattamento del modello ai dati osservati.
Infine, è possibile notare come la mediana della distribuzione a posteriori dei parametri ottenuti secondo un approccio probabilistico coincida praticamente con il miglior set di parametri ottenuto attraverso un approccio deterministico (figura 5.4).

I risultati ottenuti per il Fiume Sieve risultano essere soddisfacenti sia in calibrazione

che in validazione. Analizzando la figura 5.3 si osserva una buona riproduzione dell'idrogramma ed una contenuta dispersione negli scatterplot.
A meno degli eventi di piena più significativi che vengono sottostimati dal modello, quelli minori vengono riprodotti "adeguatamente". Sia gli scatterplot che il grafico del trend dell'errore assoluto mostrano un miglior adattamento del modello ai deflussi di magra in calibrazione rispetto alla validazione; sopratutto in quest'ultima fase le portate osservate inferiori a 1 $m^3 s^{-1}$ vengono costantemente sovrastimate dal modello. Come si può notare dalla tabella 5.2, gli indici di prestazioni associati a questo fiume risultano essere i migliori dei tre bacini analizzati. Anche in questo caso, i parametri ottimali calcolati da DEoptim e la mediana delle distribuzioni calcolate da DREAM praticamente coincidono (figura 5.4).

Le simulazioni precedentemente descritte hanno permesso di analizzare il comportamento del modello Hymod e dei due algoritmi di ottimizzazione (DEoptim e DREAM) in relazione ai tre bacini considerati. Sulla base dei risultati ottenuti è stato osservato che il modello HyMOD risulta adatto per la riproduzione del processo afflussi-deflussi per i Fiumi Arno e Sieve; si evidenziano invece discrepanze più evidenti tra i deflussi simulati ed osservati per il Fiume Reno. Ciò nonostante tutti i bacini analizzati mostrano indici di qualità soddisfacenti, sia in fase di calibrazione che validazione. Queste prime indagini hanno inoltre messo in luce come entrambi gli algoritmi di ottimizzazione convergano alla medesima soluzione. Va tuttavia sottolineato che la procedura deterministica risulta essere estremamente più rapida rispetto a quella probabilistica, mostrando tempi di calcolo marcatamente inferiori.

5.2 Calibrazioni mediante la massimizzazione dell'utilità

Di seguito vengono presentati i risultati ottenuti dalle calibrazioni mediante la massimizzazione della funzione obiettivo presentata nel capitolo 3. Attraverso un'apposita definizione di tale funzione, si vorrebbero massimizzare le prestazioni del modello laddove ritenute di maggior interesse (o utili) per l'utilizzatore del modello. Attraverso essa è infatti possibile associare un valore di utilità ad ogni passo temporale di simulazione. Tale valore può dipendere o solamente dall'errore assoluto commesso dal modello, oppure anche dalla portata osservata e simulata (v.d. capitolo 3). La calibrazione, quindi, avviene attraverso la massimizzazione della somma di tali valori di utilià.

Per poter valutare la metodologia proposta sono state eseguite diverse calibrazioni dei bacini, ciascuna associata ad una differente funzione di utilità. Attraverso tali indagini si è voluto verificare se:

- mediante un'apposita definizione della funzione di utilità sia possibile ricondursi ad un approccio tradizionale;
- l'utilizzo di tali funzioni obiettivo permette un miglioramento delle prestazioni del modello (rispetto ad una funzione obiettivo classica) in corrispondenza dei deflussi ritenuti maggiormente utili ad un utilizzatore del modello.

Poichè le funzioni di utilità proposte sono state definite sulla basa dell'errore assoluto, i risultati dell'applicazione di tale metodologia sono stati confrontati con le calibrazioni precedentemente descritte, basate sulla minimizzazione dell'errore assoluto medio.

Inizialmente è stata indagata la metodologia che prevede l'utilizzo di funzioni di utilità *bidimensionali*, la cui definizione si basa unicamente sull'errore assoluto commesso dal modello. Successivamente sono state indagate le funzioni di utilità basate anche sui valori di portata osservata e simulata.

Di seguito vengono presentati e discussi i risultati delle indagini condotte.

5.2.1 Funzioni di utilità dipendenti unicamente dall'errore assoluto

Come precedentemente descritto, le funzioni di utilità *bidimensionali* permettono di associare una differente "importanza" al valore dell'errore commesso dal modello ad ogni passo temporale di simulazione. Attraverso esse risulta possibile "vincolare" la funzione obiettivo associando un utilità differente ad ogni valore di errore commesso al modello. In particolare, agli errori inferiori ad una (prima) soglia E_{sx} vengono attribuiti valori di utilità massima (pari ad uno), a quelli superiori ad una (seconda) soglia E_{dx} viene fatta corrispondere un utilità minima, pari a zero. Attraverso tale trasformazione, nel processo di calibrazione, viene quindi data maggior importanza agli errori inferiori ad E_{sx}, mentre non vengono considerati gli errori superiori alla soglia E_{dx}. Entro tali soglie, è stata ipotizzata una variazione lineare "dell'importanza" dell'errore. In figura 5.5 viene mostrata una schematizzazione delle funzioni di utilità così definite. La calibrazione avviene attraverso la massimizzazione di una funzione obiettivo costuita dalla somma delle utilità associate ad ogni istante temporale di simulazione.

Per condurre le indagini sono stati ipotizzati diversi valori di soglia dell'errore assoluto: 0 m^3s^{-1}, da 1 a 5 m^3s^{-1} con passo 1 m^3s^{-1}, 10 m^3s^{-1}, 15 m^3s^{-1}, da 20 a 100 m^3s^{-1} con passo 10 m^3s^{-1}, 200 m^3s^{-1} e 500 m^3s^{-1}.

Attraverso essi è stato possibile definire molteplici funzioni obiettivo, ciascuna di esse definita da un differente valore di E_{sx} e da un uguale, o superiore, valore di soglia E_{dx}.

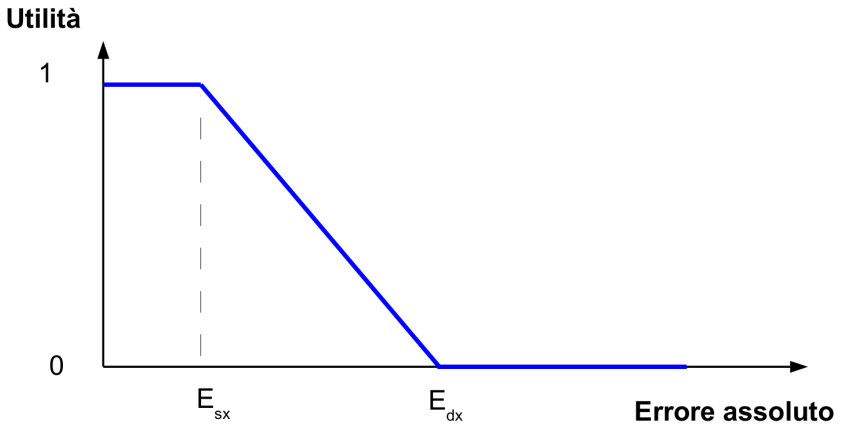

FIGURA 5.5: Rappresentazione schematica delle funzioni di utilità *bidimensionale* adottate nel processo di calibrazione.

Il primo obiettivo delle indagini è stato quello di verificare se attraverso un'apposita scelta della funzione di utilità fosse possibile ricondursi ad una calibrazione *classica* basata sulla minimizzazione dell'errore assoluto medio.

In base alle simulazioni effettuate, è stato osservato che entrambi gli ottimizzatori convergono a tale risultato nel momento in cui si attribuisce alla soglia sinistra dell'errore E_{sx} un valore nullo e contestualmente alla soglia destra E_{dx} il valore di soglia massimo ipotizzato (500 $m^3 s^{-1}$). Tale funzione di utilità è costituita da un unico "ramo" discendente, che associa ad ogni errore assoluto un differente valore di utilità (figura 5.6).

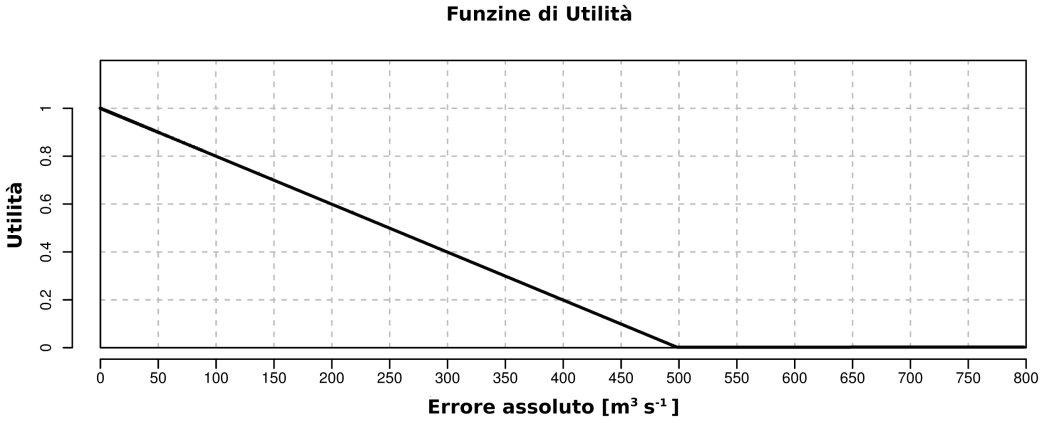

FIGURA 5.6: Funzione di utilità adottata per ottenere risultati analoghi a quelli ottenuti attraverso una calibrazione *classica* basata sulla minimizzaizone del MAE.

La corrispondenza biunivoca e lineare tra errore assoluto ed utilità permette a tale funzione di fornire risultati (in termini di parametri ottimali) praticamente identici rispetto a quelli ottenuti attraverso una calibrazione *classica* con funzione obiettivo pari al MAE.

La tabella 5.3 riporta i parametri calibrati da DEoptim e da DREAM ottenuti in questa fase. Dal confronto con la tabella 5.2 è possibile osservare che, relativamente al best set ottenuto da DEoptim, non si notano differenze per i Fiumi Arno e Sieve. Per quanto riguarda il Reno, invece, l'ottimizzatore deterministico calcola un nuovo set di parametri ottimali. È interessante notare come quest'ultimo determini un aumento, seppur lieve, delle prestazioni del modello rispetto a quelle precedentemente ottenute.

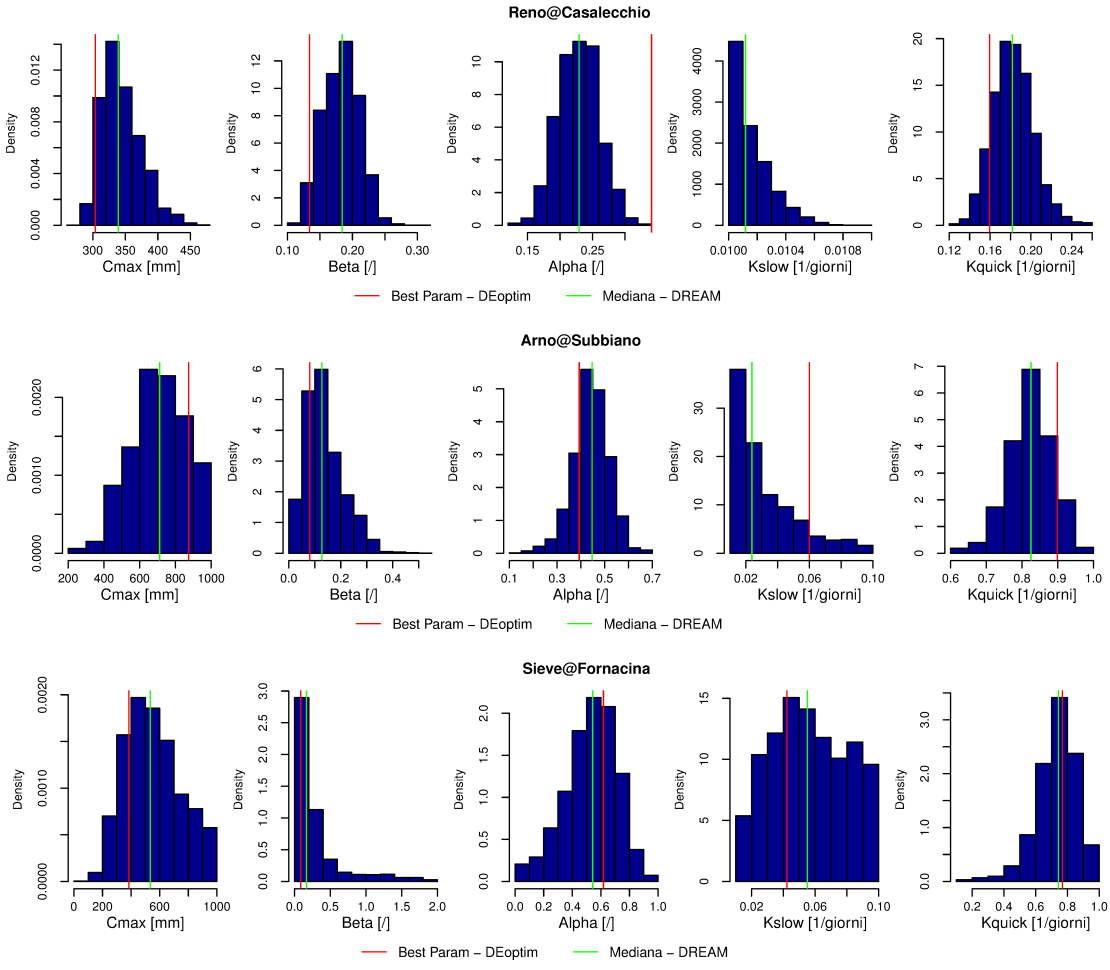

FIGURA 5.7: Istogrammi delle densità di probabilità a posteriori dei parametri adottando una procedura di ottimzzazione di tipo probabilistico. La funzione obiettivo è basata sulla funzione di utilità riportata in figura 5.6.

In figura 5.7 vengono riportate le distribuzioni a posteriori dei parametri ottenute attraverso l'approccio probabilistico. Si può osservare come, macroscopicamente, la mediana delle distribuzioni risulta essere in buon accordo con il set di parametri ottimizzati da DEoptim (come precedentemente osservato, entrambi gli ottimizzatori convergono ai

medesimi risultati); tuttavia risulta evidente un marcato incremento della dispersione dei parametri rispetto al caso precedente (figura 5.7). Probabilmente tale aspetto rende "difficoltosa" la ricerca di parametri ottimali da parte dell'algoritmo.

Infine, in figura 5.9 vengono mostrati gli scatterplot delle portate simulate adottando i parametri riportati nelle tabelle 5.2 e 5.3. Come precedentemente affermato, sia per il Fiume Arno che per il Sieve non si osservano differenze tra i deflussi simulati utilizzando i parametri ottenuti da DEoptim, mentre vi è differenza per il Fiume Reno. Per quanto riguarda i parametri mediani ottenuti da DREAM, si osservano marcate discrepanze nelle portate che essi generano. Analogamente a quanto ottenuto da DEoptim, le portate simulate per il fiume Reno mostrano un'evidente discrepanza.

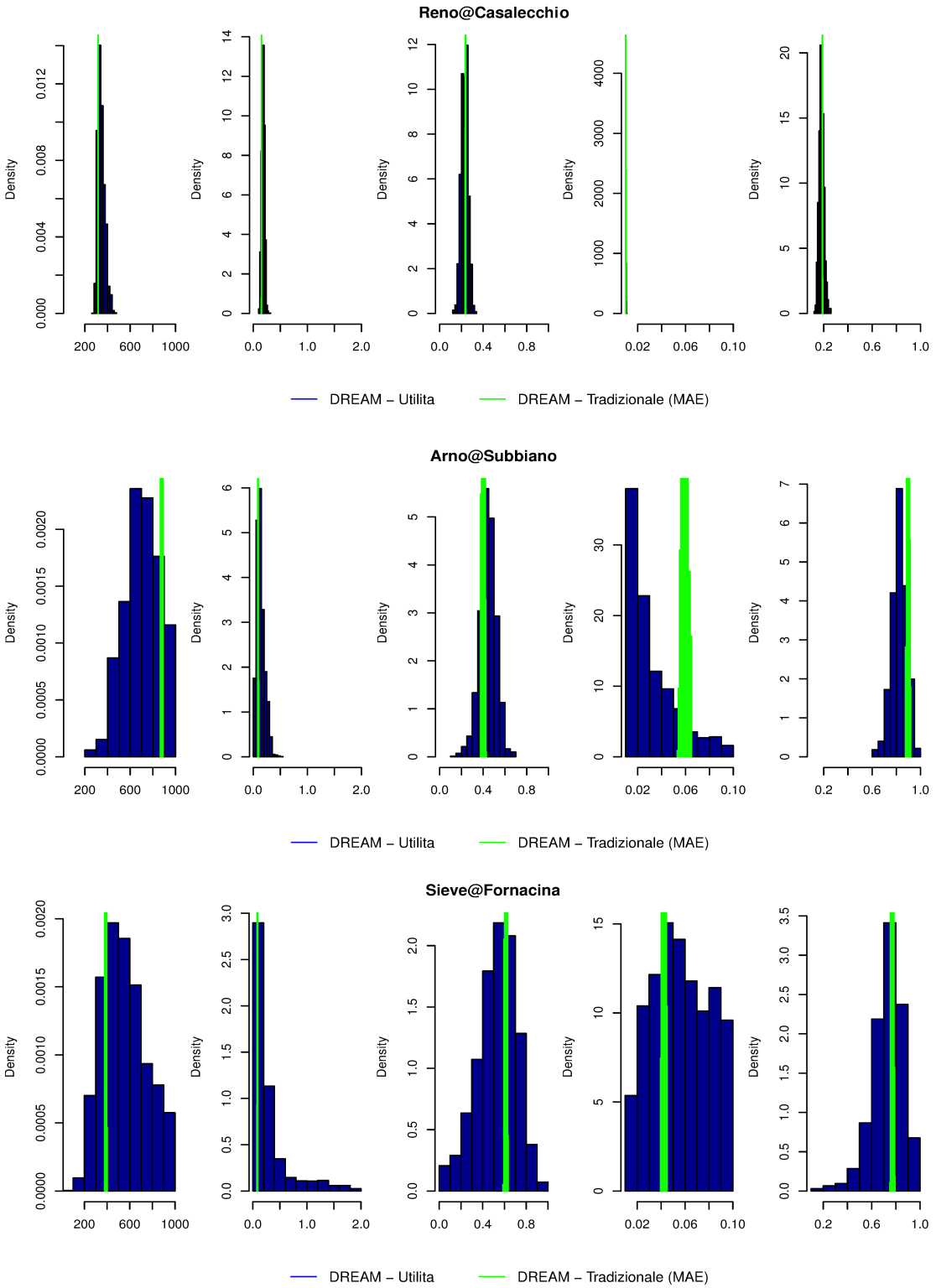

FIGURA 5.8: Calibrazione probabilistica - Confronto degli istogrammi dei parametri ottenuti attraverso la calibrazione tradizionale MAE (rappresentati in verde) e quelli ottenuti adottando la funzione di utilità riportata in figura 5.6 (rappresentati in blu).

Risultati Calibrazioni – Utilità lineare con descrescita costante

		Reno		
		DEoptim	DREAM	
			Mediana	SD
C_{max}	$[mm]$	303.843	344.827	30.213
β	$[/]$	0.134	0.183	0.028
α	$[/]$	0.341	0.230	0.031
k_s	$[1/ore]$	0.004	0.010	0.001 <
k_q	$[1/ore]$	0.160	0.182	0.020
MAE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	9.017	9.641	
MAE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	7.667	8.261	
NE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.527	0.507	
NE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.723	0.713	
$RMSE$ (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	30.046	30.675	
$RMSE$ (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.208	15.461	
		Arno		
		DEoptim	DREAM	
			Mediana	SD
C_{max}	$[mm]$	874.319	707.120	158.973
β	$[/]$	0.081	0.143	0.079
α	$[/]$	0.393	0.439	0.075
k_s	$[1/giorni]$	0.060	0.033	0.022
k_q	$[1/giorni]$	0.899	0.823	0.063
MAE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	5.411	5.917	
MAE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	6.363	7.108	
NE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.616	0.643	
NE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.674	0.649	
$RMSE$ (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.702	15.13	
$RMSE$ (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.141	15.71	
		Sieve		
		DEoptim	DREAM	
			Mediana	SD
C_{max}	$[mm]$	383.968	560.547	194.145
β	$[/]$	0.086	0.299	0.361
α	$[/]$	0.618	0.524	0.183
k_s	$[1/giorni]$	0.042	0.057	0.023
k_q	$[1/giorni]$	0.768	0.730	0.134
MAE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	5.299	5.731	
MAE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	6.143	6.036	
NE (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.814	0.719	
NE (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	0.655	0.710	
$RMSE$ (Calibrazione)	$[m^3s^{-1}]$	15.139	18.592	
$RMSE$ (Validazione)	$[m^3s^{-1}]$	14.192	13.020	

Tabella 5.3: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione della funzione obiettivo basata sull'utilità riportata in figura 5.6. Sono state adottate due tecniche di calibrazione differenti: deterministica (algoritmo di ottimizzazione DEoptim) e probabilistica (algoritmo di ottimizzazione DREAM). Si riportati i valori ottimali dei parametri ed alcuni indici di qualità delle simulazioni. Per la calibrazioni probabilistiche si mostrano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori.

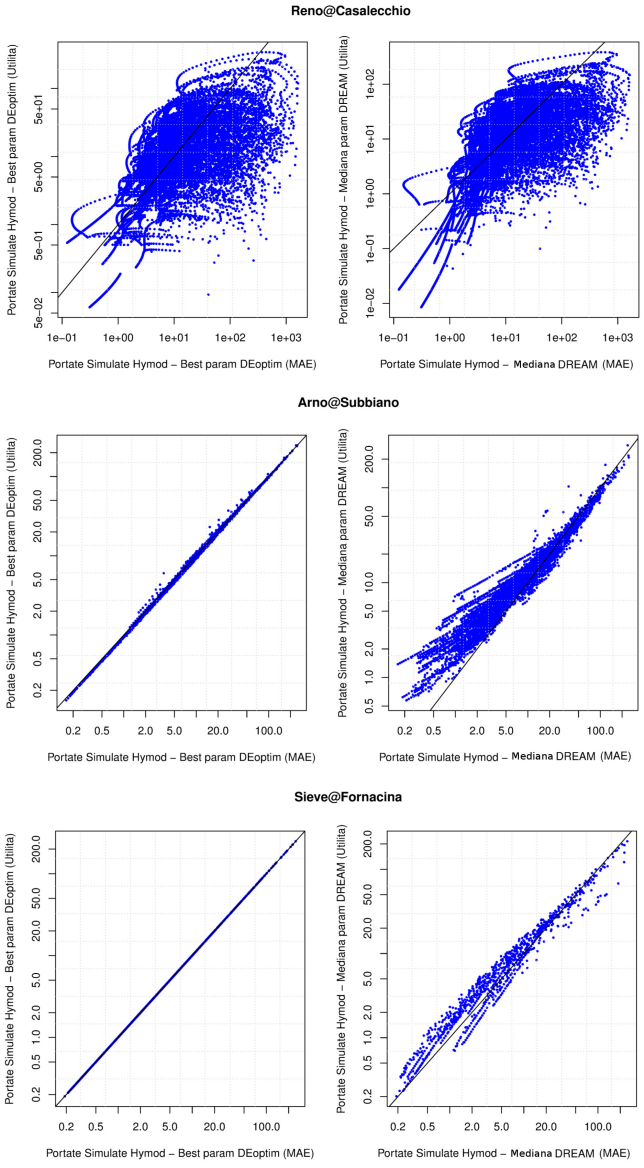

FIGURA 5.9: Scatterplot delle portate simulate ottenute attraverso la calibrazione di HyMOD adottando come funzione obiettivo il MAE (paragrafo precedente) e l'utilità definita in figura 5.6. I deflussi graficati sono stati ottenuti utilizzando i valori dei parametri ottimali mostrati nelle tabelle 5.2 e 5.3

Le calibrazioni precedentemente illustrate hanno permesso di evidenziare come attraverso un'apposita definizione della funzione di utilià i parametri ottimali stimati attraverso un approccio deterministico risultano essere equivalenti a quelli stimati adottando un approccio *classico*. Le calibrazioni probabilistiche hanno dimostrato da un lato la medesima convergenza in termini di valori mediani dei parametri, ma dall'altro hanno evidenziato un deciso aumento dell'incertezza associata ai parametri.

Il passo successivo del lavoro di tesi è stato quello di indagare l'effetto che hanno sul processo di calibrazione le funzioni di utilità caratterizzate da valori di soglia di E_{sx} ed E_{dx} differenti rispetto a quelli finora adottati (figura 5.6). Nel processo di calibrazione sono state pertanto considerate funzioni di utilità costanti fino ad un determinato valore di E_{sx}, decrescenti linearmente fino ad una seconda soglia E_{dx}, ed infine nulle per valori di errore superiori ad E_{dx} (5.5).

L'obiettivo di questa fase del lavoro è stato quello di verificare se, attraverso una determinata funzione obiettivo (definita in base alle "preferenze", o utiltà dell'utilizzatore del modello), sia possibile migliorare o meno le prestazione del modello laddove ritenute di maggior interesse ai fini applicativi. Si rcorda che, al momento, tali preferenze vengono espresse solamente tramite l'errore assoluto: fino al valore di soglia E_{sx} gli errori del modello sono parimente pesati (ognuno di essi vale uno), tra E_{sx} ed E_{dx} il peso varia linearmente mentre, se gli errori superano E_{dx} non vengono considerati nel processo di calibrazione.

Le calibrazioni sono avvenute utilizzando come valori di soglia quelli presentati all'inizio del paragrafo.

A causa dell'elevato numero di simulazioni eseguite, di seguito saranno presentati solamente i risultati ritenuti maggiormente esplicativi ai fini della comprensione dell'effetto sul processo di calibrazione delle differenti funzioni di utilità. In particolare, i risultati mostrano l'effetto che la variazione delle due soglie ha sulla funzione obiettivo. La rappresentazione dei risultati avviene tramite il confronto degli scatterplot e dei grafici relativi al trend dell'errore assoluto. In ciascun grafico i valori delle due soglie vengono riportati attraverso due linee orizzontali (in blu) corrispondenti rispettivamente ad E_{sx} ed E_{dx}. I risultati ottenuti tramite massimizzazione dell'utilità vengono confrontati (sovrapposti) con quelli precedentemente ottenuti attraverso la calibrazione basata sulla minimizzazione del MAE. In tutti i grafici in alto a sinistra si indicano con MAE i risultati delle calibrazioni precedentemente ottenute, con $UTILITÀ$ i nuovi risultati.

Fiume Reno

I risultati mostrati per questo fiume si riferiscono a valori di E_{sx} pari a 1, 10, 30 m^3s^{-1} mentre E_{dx} assume i valori di 3, 15, 50, 80 m^3s^{-1} (figure 5.10, 5.11, 5.12, 5.11).

Nelle figure 5.10 e 5.11 vengono mostrati gli effetti sul processo di calibrazione e validazione che genera l'incremento della soglia destra, fissato un determinato valore di soglia sinistra pari ad E_{sx} 1 m^3s^{-1}. Per quanto riguarda la calibrazione (figura 5.10), analizzando il grafici del trend dell'errore assoluto si può innanzitutto notare come, per valori di E_{dx} pari a 3 e 15 m^3s^{-1}, i deflussi simulati che precedentemente generavano errori "elevati"ora mostrano errori vistosamente più contenuti. Tale miglioramento nella riproduzione delle portate osservate, soprattutto in corrispondenza dei deflussi medi/di magra, lo si può notare anche dagli scatterplot. Come ci si aspettava, tali miglioramenti diminuiscono progressivamente all'aumentare della soglia destra dell'errore E_{dx}. Assumendo infatti un valore di soglia sinistra "modesto" ed un valore di soglia destra "elevato", la calibrazione basata sull'utilità tende, come precedentemente osservato, a quella classica. Si osserva inoltre che la riproduzione dei deflussi sia peggiore rispetto alla precedente calibrazione in corrispondenza di quelle portate che precedentemente producevano errori superiori alla soglia destra della funzione di utilità. Dagli scatterplot è evidente la minor discrepanza tra portate osservate e simulate soprattutto per valori entro i 10 m^3s^{-1}.

In validazione (figura 5.11) viene osservato il medesimo comportamento: in corrispondenza dei valori di portata "associati" ad errori compresi tra le due soglie, ora si ha un miglioramento della loro riproduzione. Come già notato per la calibrazione, all'aumentarea della soglia destra, il modello tende ai medesimi risultati ottenuti tramite la calibrazione *classica*.

Nelle figure 5.12 e 5.13 viene mostrato l'effetto che determina l'incremento della soglia sinistra, fissata quella destra. In calibrazione si può osservare che l'incremento di E_{sx} da 1 a 10 m^3s^{-1} comporta un aumento degli errori nella rappresentazione dei deflussi inferiori a 10 m^3s^{-1} circa. Attraverso l'adozione di tali soglie nella funzione di utilità, infatti, gli errori che precedentemente venivano "considerati" nel processo di calibrazione, ora vengono "pesati" egualmente. A tale errori infatti è associata un utilità pari ad uno. Attraverso una calibrazione basata sulla funzione di utilità ci si aspetta di ottenere miglioramenti in corrispondenza di quei deflussi che nella calibrazione classica producevano errori compresi tra le due soglie E_{sx} e E_{dx}. Si osserva infatti come vi sia una diminuzione dell'errore assoluto del modello in corrispondenza dei deflussi compresi tra 10 e 40 m^3s^{-1}. Gli errori associati ai deflussi simulati che precedentemente generavano discrepanze superiori alla soglia destra della funzione di utilità, ora non vengono

"considerati" nel processo di calibrazione. In corrispondenza di tali deflussi si nota un peggioramento delle prestazioni del modello.

Si riportano infine (figura 5.14) gli isogrammi della distribuzione a posteriori dei parametri calcolati da DREAM nel caso in cui la soglia destra assuma un valore costante pari a 50 $m^3 s^{-1}$. Come si osserva, sia DREAM che DEoptim convergono ai medesimi risultati. La tabella 5.4 riporta la mediana e la deviazione standard delle calibrazioni appena mostrate. Si può notare che rispetto alla calibrazione *tradizionale* la deviazione standard dei parametri, per tutti i casi analizzati, in genere aumenta. Tuttavia, considerando solamente i valori derivati dalla massimizzazine dell'utilità, non si notano variazioni sostanziali della deviazione standard delle distribuzioni dei parametri.

Sulla base di tali risultati è evidente l'influenza che l'introduzione della funzione di utilità ha sul processo di ottimizzazione.

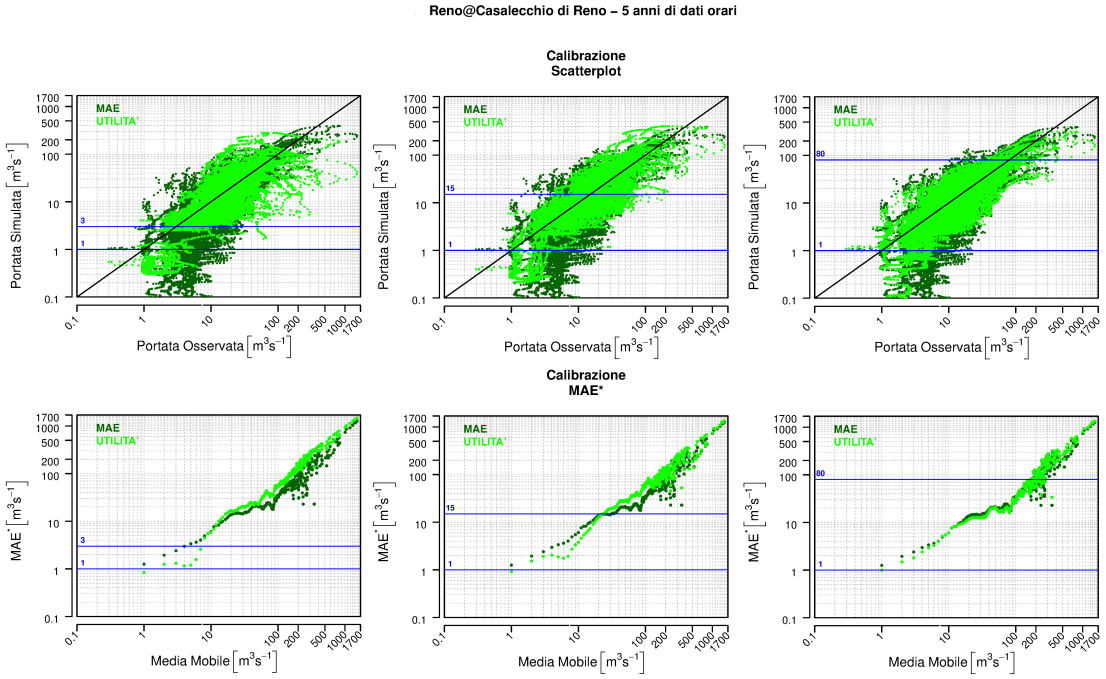

FIGURA 5.10: Effetto che l'aumento della soglia destra E_{dx} determina sul processo di calibrazione. Il valore della soglia sinistra E_{sx} è costante e pari ad 1 $m^3 s^{-1}$.

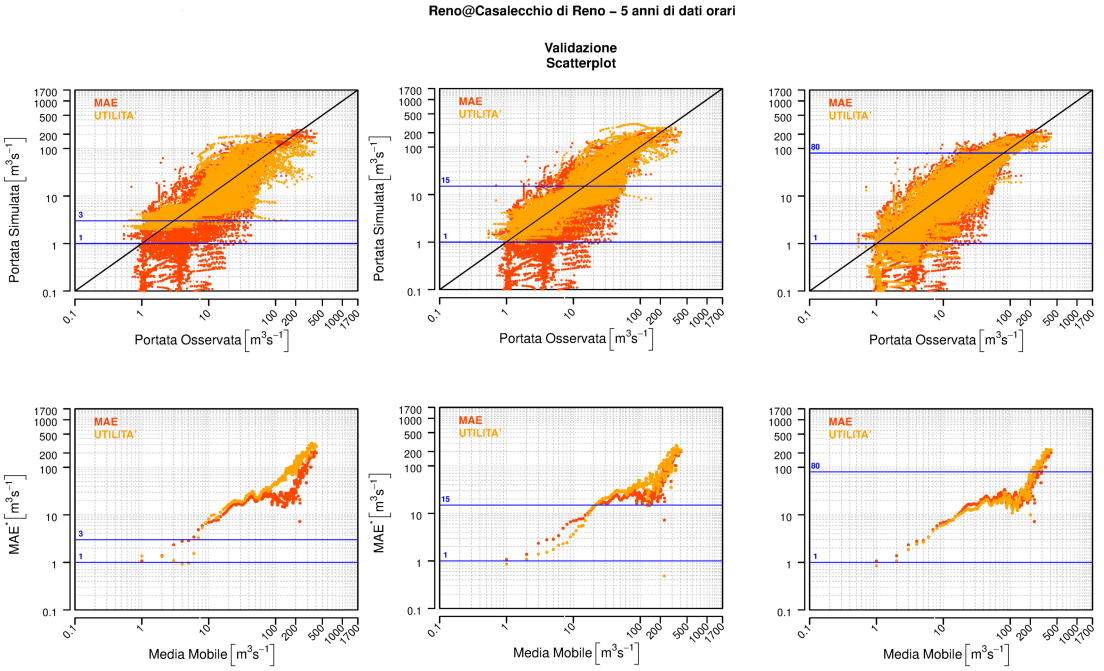

FIGURA 5.11: Effetto che l'aumento della soglia destra E_{dx} determina in fase di validazione. Il valore della soglia sinistra E_{sx} è costante e pari ad 1 m^3s^{-1}.

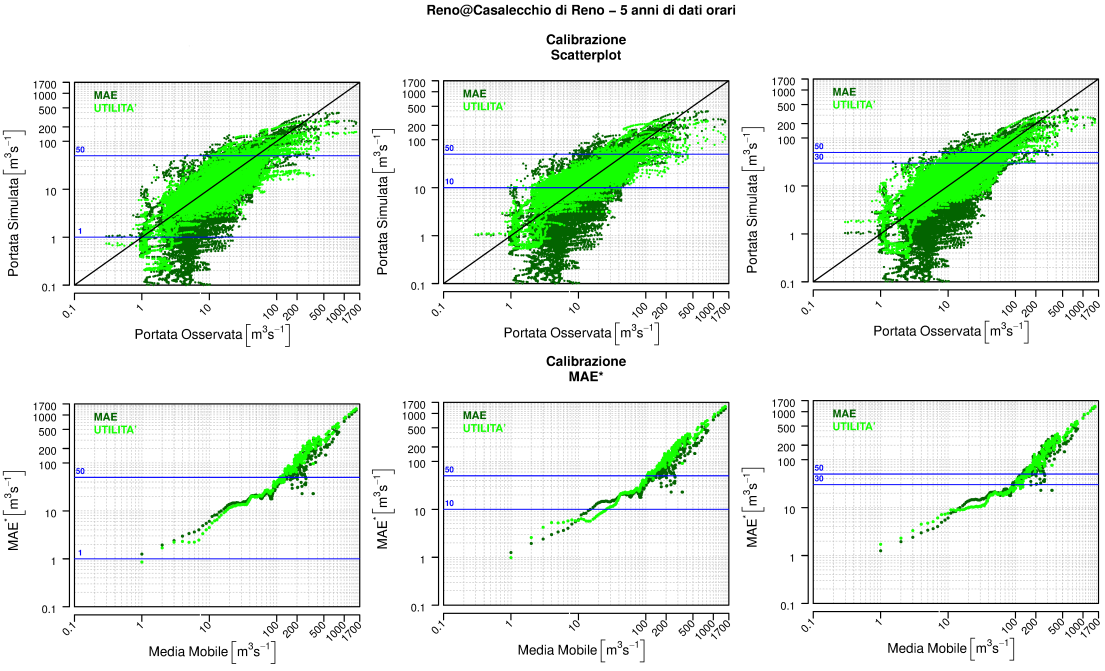

FIGURA 5.12: Effetto che l'aumento della soglia sinistra E_{sx} determina in fase di calibrazione. Il valore della soglia destra E_{dx} è costante e pari a 50 m^3s^{-1}.

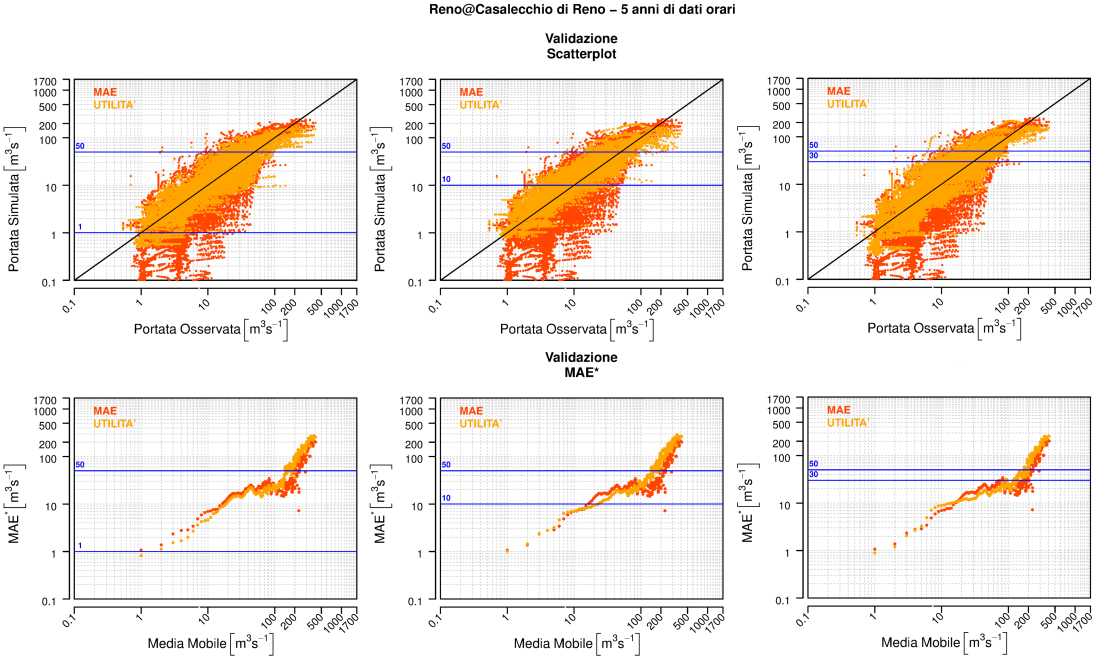

FIGURA 5.13: Effetto che l'aumento della soglia sinistra E_{sx} ha sul processo di validazione. Il valore della soglia destra E_{dx} è costante e pari a 50 $m^3 s^{-1}$.

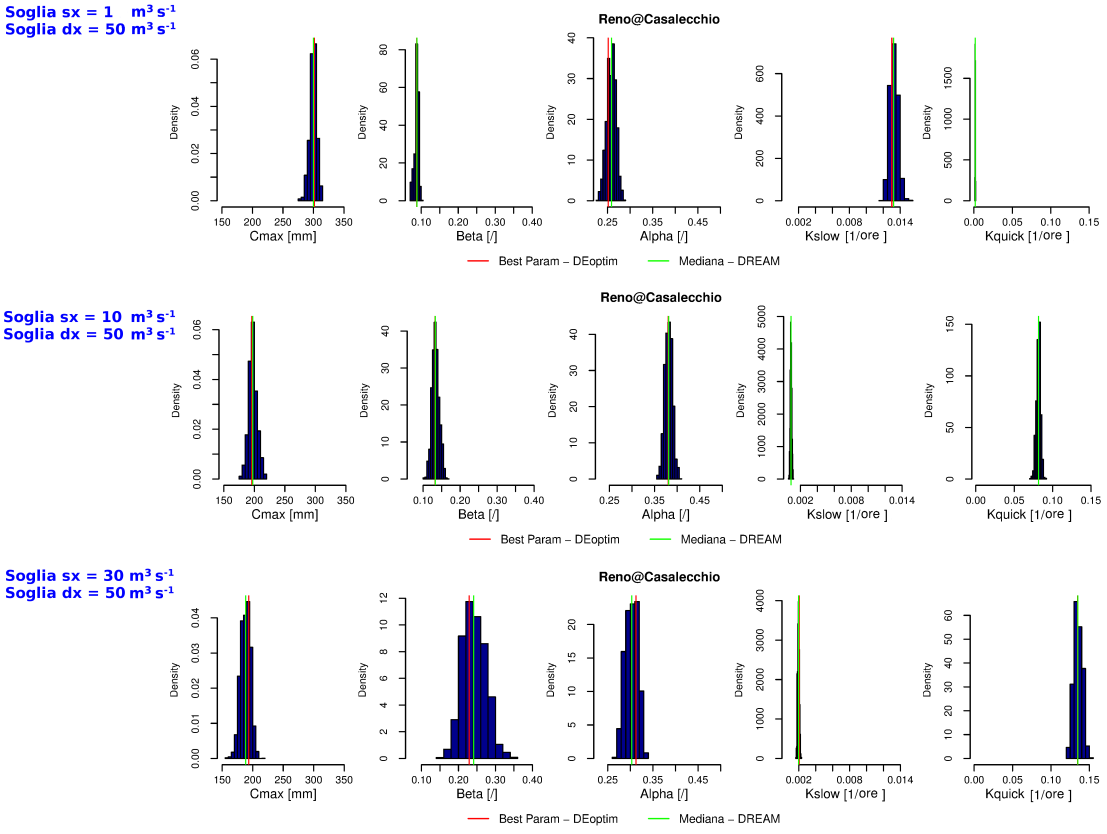

FIGURA 5.14: Confronto delle distribuzioni a posteriori dei parametri ottenuti tramite DREAM adottando diverse funzioni di utilità.

Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Reno – Utilità lineare

			C_{max} [mm]	β [/]	α [/]	k_s [$1/ore$]	k_q [$1/ore$]
Funzione Obiettivo							
MAE		Mediana	317.074	0.150	0.237	0.010	0.189
		SD	0.178	0.001	0.001	0.001 <	0.001 <
Utilità							
E_{sx} $[m^3s^{-1}]$	E_{dx} $[m^3s^{-1}]$						
0	500	Mediana	344.827	0.183	0.230	0.010	0.182
		SD	30.213	0.028	0.031	0.001 <	0.020
1	3	Mediana	209.312	0.052	0.241	0.016	0.006
		SD	23.035	0.008	0.125	0.045	0.018
1	15	Mediana	298.060	0.057	0.259	0.013	0.001
		SD	3.072	0.003	0.006	0.001 <	0.001 <
1	80	Mediana	301.474	0.093	0.262	0.014	0.002
		SD	6.095	0.007	0.010	0.001	0.001 <
1	50	Mediana	299.475	0.078	0.259	0.013	0.002
		SD	5.785	0.012	0.010	0.001 <	0.001 <
10	50	Mediana	197.782	0.134	0.381	0.001	0.082
		SD	7.179	0.010	0.008	0.001 <	0.003
30	50	Mediana	188.499	0.242	0.302	0.002	0.135
		SD	7.923	0.031	0.014	0.001 <	0.005

Tabella 5.4: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione di diverse funzioni di utilità con differenti valori di soglia E_{sx} ed E_{dx}. Si riportano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori ottenuti attraverso una calibrazione di tipo probabilistico adottando l'ottimizzatore DREAM.

Fiume Arno

I risultati mostrati per questo fiume si riferiscono a valori di E_{sx} pari a 1, 5, 15 m^3s^{-1} mentre E_{dx} risulta pari a 3, 10, 20 e 50 m^3s^{-1} (figure 5.15, 5.16, 5.17, 5.18).

Rispetto al Fiume Reno, nel caso dell'Arno sono meno evidenti le differenze rispetto alla calibrazione classica (figura 5.15). Si notano infatti lievi discrepanze sia negli scatterplot che nei grafici dell'errore assoluto. Lievi miglioramenti si osservano in corrispondenza di quelle portate che nella calibrazione classica, producevano errori compresi tra le due soglie della funzione di utilità. I deflussi invece precedentemente "responsabili" degli errori superiori alla soglia destra, ora "mostrano" un peggioramento delle prestazioni. Gli errori che percedentemente erano associati a tali portate, ora nel processo di calibrazione vengono "trascurati". Considerazioni del tutto analoghe possono essere fatte analizzando il periodo di validazione (figura 5.16).

Risulta interessante il confronto dei casi in cui la soglia destra dell'utilità rimane costante e contestualmente varia quella sinistra (figura 5.17). Si nota come nel passaggio di E_{sx} da 1 a 5 m^3s^{-1} si ha una marcata differenza tra i risultati precedentemente ottenuti (calibrazione classica) e quelli ottenuti attraverso la massimizzazione dell'utilità. Rispetto al Reno, ora si osserva un miglioramento delle prestazione del modello anche in corrispondenza di quelle portate "associate" ad errori inferiori alla soglia sinistra. Dallo scatterplot è evidente che i deflussi inferiori al valore di tale soglia vengono sovrastimati dalle ottimizzazioni attuali.

Considerazioni analoghe possono essere eseguite osservando i risultati ottenuti nel periodo di validazione (figura 5.18). Si osserva che per portate inferiori a 5 e 10 m^3s^{-1} (rispettivamente grafico centrale e a destra) le prestazioni del modello peggiorano, ma d'altra parte aumentano le performances per portate superiori. Tali miglioramenti si verificano fino a portate caratterizzate da un errore assoluto inferiore alla soglia destra.

A titolo d'esempio, la tabella 5.4 e la figura 5.19 riportano i risultati delle calibrazioni svolte per l'Arno adottando una le medesime funzioni di utilità appena illustrate. Come si osserva, il set di parametri ottimali ottenuti attraverso l'ottimizzatore deterministico praticamente coincidono con i valori mediani delle distribuzioni dei parametri ottenuti attraverso l'utilizzo di DREAM.

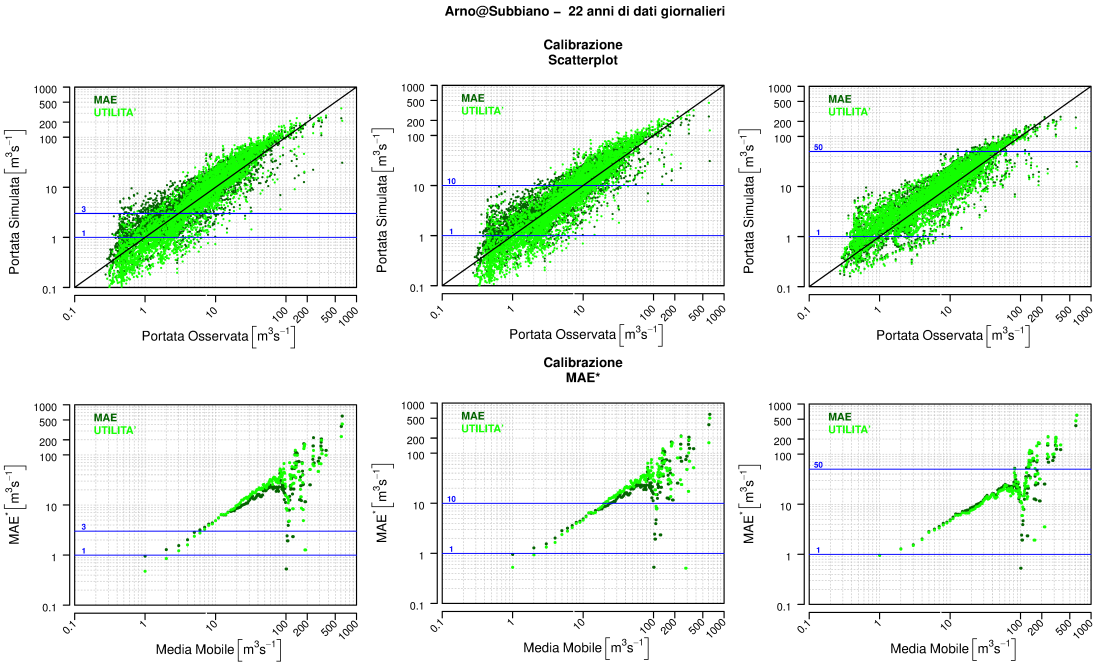

FIGURA 5.15: Effetto che l'aumento della soglia destra E_{dx} ha sul processo di calibrazione. Il valore della soglia sinistra E_{dx} è costante e pari ad 1 m^3s^{-1}.

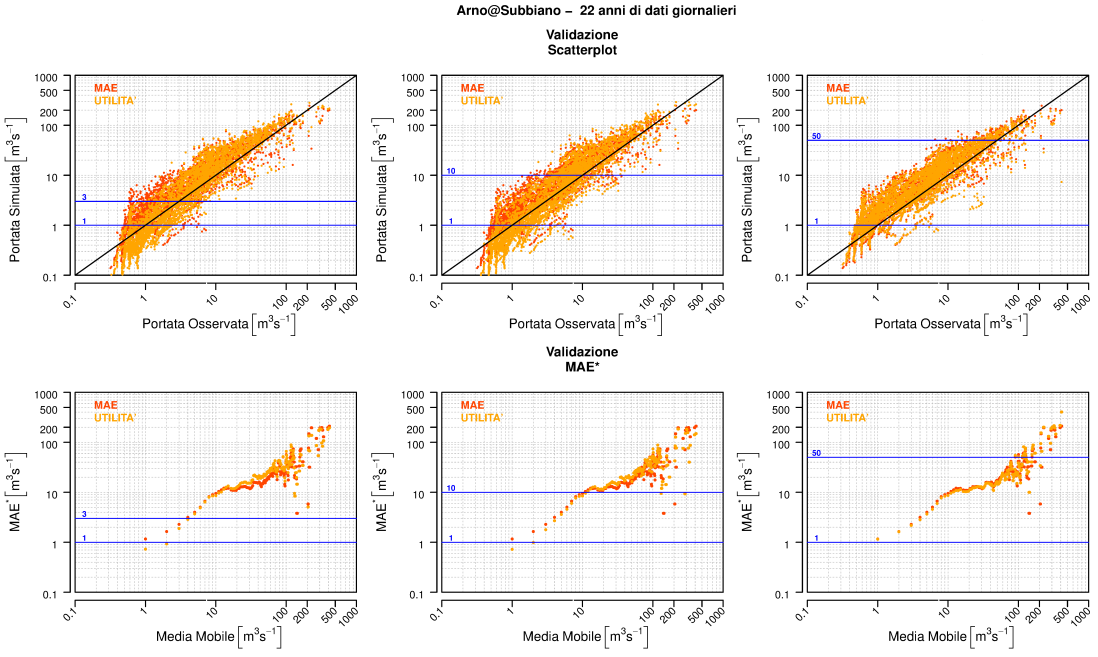

FIGURA 5.16: Effetto che l'aumento della soglia destra E_{dx} determina sul processo di validazione. Il valore della soglia sinistra E_{dx} è costante e pari ad 1 m^3s^{-1}.

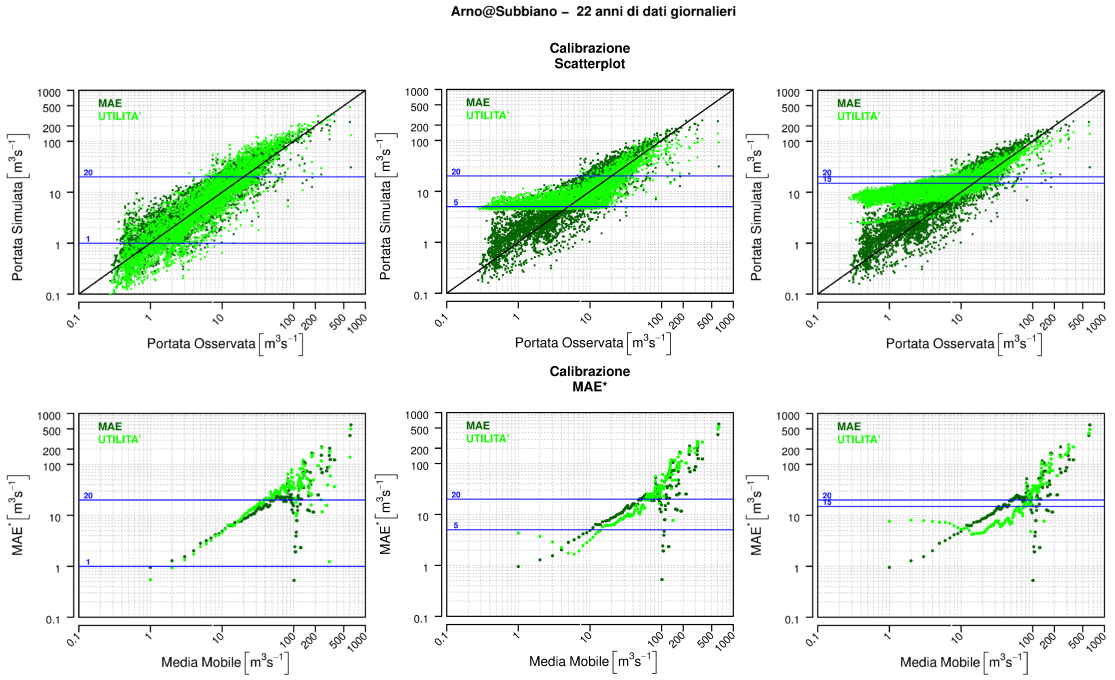

FIGURA 5.17: Effetto che l'aumento della soglia sinistra E_{sx} determina sul processo di calibrazione. Il valore della soglia destra E_{dx} è costante e pari a 20 $m^3 s^{-1}$.

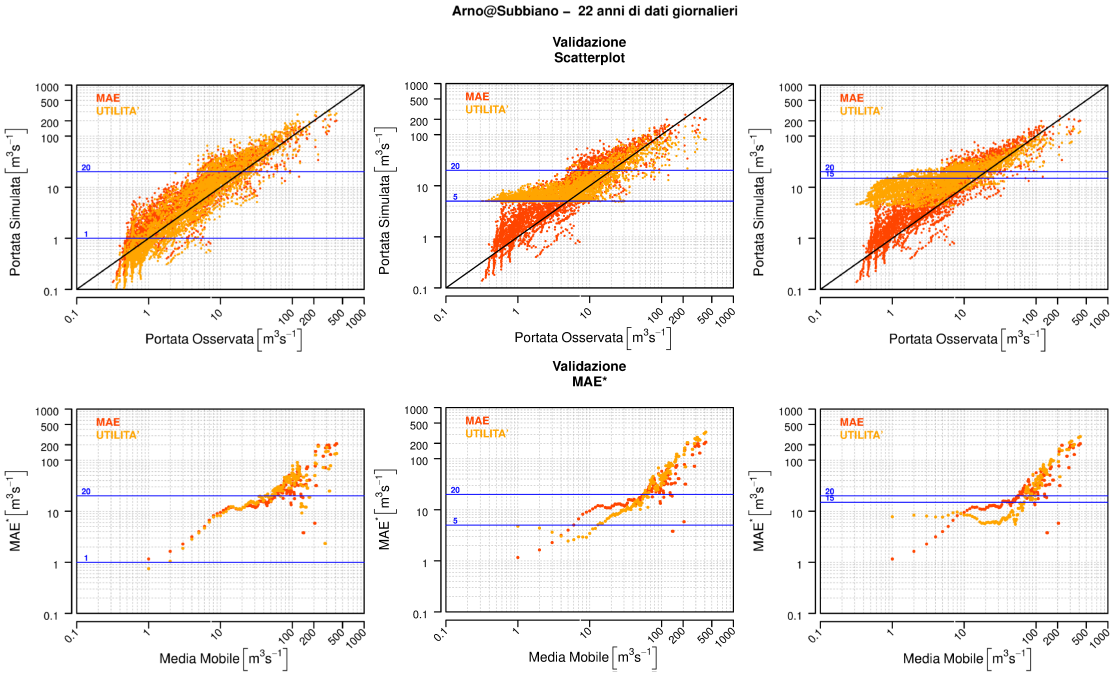

FIGURA 5.18: Effetto che l'aumento della soglia sinistra E_{sx} determina sul processo di validazione. Il valore della soglia destra E_{dx} è costante e pari a 20 $m^3 s^{-1}$.

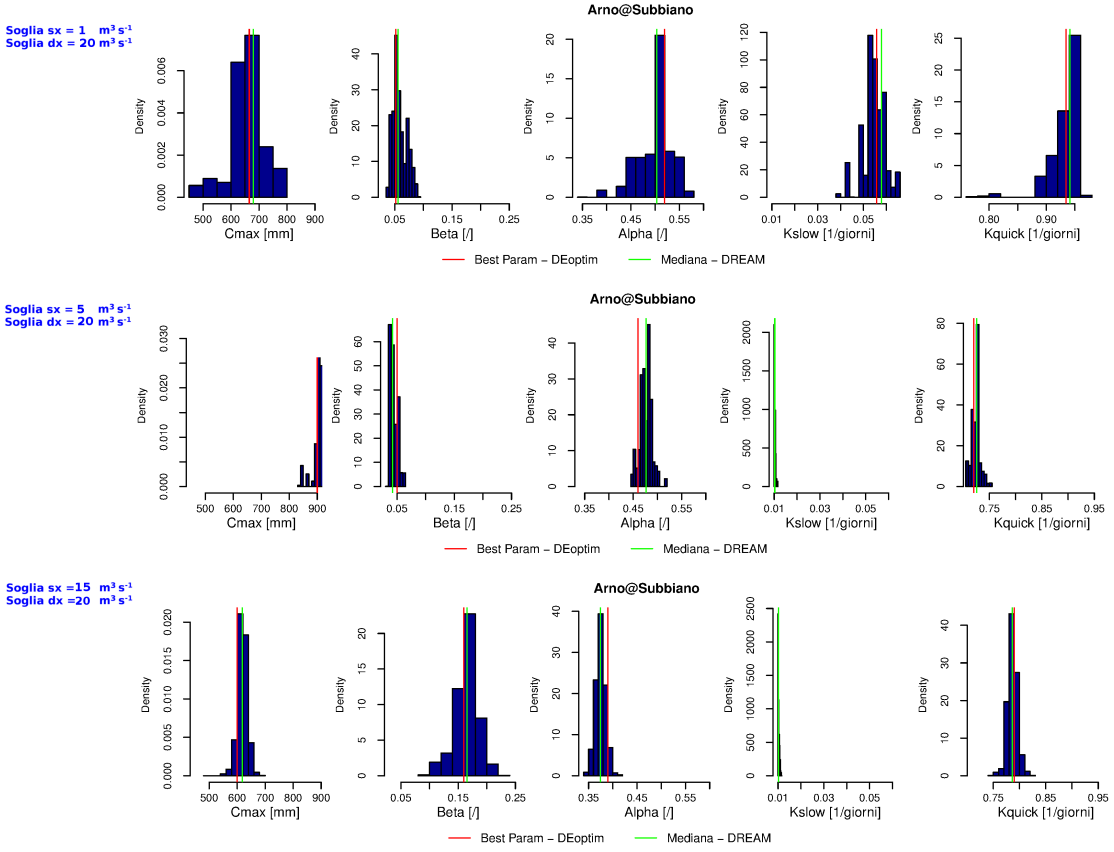

FIGURA 5.19: Confronto della distribuzione a posteriori dei parametri calcolati da DREAM adottando diversi valori per la soglia sinistra della funzione di utilità

Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Arno – Utilità lineare

			C_{max} $[mm]$	β $[/]$	α $[/]$	k_s $[1/giorni]$	k_q $[1/giorni]$
Funzione Obiettivo							
MAE		Mediana	879.198	0.087	0.398	0.059	0.900
		SD	3.444	0.001	0.008	0.002	0.006
Utilità							
E_{sx} $[m^3s^{-1}]$	E_{dx} $[m^3s^{-1}]$						
0	500	Mediana	707.120	0.143	0.439	0.033	0.823
		SD	158.973	0.079	0.075	0.022	0.063
1	3	Mediana	323.762	0.038	0.670	0.034	0.781
		SD	32.381	0.002	0.023	0.003	0.033
1	10	Mediana	621.184	0.050	0.497	0.064	0.930
		SD	30.884	0.005	0.022	0.006	0.013
1	20	Mediana	716.098	0.054	0.511	0.058	0.934
		SD	113.442	0.010	0.030	0.006	0.010
1	50	Mediana	926.703	0.080	0.392	0.054	0.860
		SD	31.046	0.008	0.029	0.006	0.020
5	20	Mediana	942.915	0.045	0.477	0.010	0.724
		SD	38.783	0.07	0.012	$0.001 <$	0.009
15	20	Mediana	619.750	0.163	0.374	0.010	0.788
		SD	17.433	0.020	0.012	$0.001 <$	0.012

Tabella 5.5: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione della funzione obiettivo basata su funzioni di utilità con differenti valori di soglia E_{sx} ed E_{dx}. Si riportano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori ottenuti attraverso un approccio di tipo probabilistico attraverso l'ottimizzatore DREAM.

Fiume Sieve

Analogamente al Fiume Arno, anche per il Sieve i risultati mostrati si riferiscono a calibrazioni mediante la massimizzazione di funzioni obiettivo basate su utilità definite da valori di soglia sinistra E_{sx} pari 1, 5, 15 m^3s^{-1} e soglia destra pari a E_{dx} 3, 10, 20, 50 m^3s^{-1} (figure 5.20, 5.21, 5.22, 5.23).

L'introduzione delle funzioni di utilità, anche nel caso del Sieve mostrano sul processo di calibrazione analoghe consegue a quelle descritte nei precedenti casi di studio: la riproduzione dei deflussi migliora contestualmente all'aumentare della soglia sinistra della funzione di utilità. Tale miglioramento si verifica fino a valori di portate osservate pari al valore della soglia destra. Dagli scatterplot si osserva che all'aumentare del valore di E_{sx} il modello tende a sovrastimare le portate osservate minori di tale soglia.

Differenze meno evidenti si hanno invece nel caso di incremento della soglia destra dell'utilità, avendo fissato E_{sx} pari all'unità (figure 5.22 ed 5.23).

Come precedentemente eseguito, si riportano in tabella 5.6 ed in figura 5.24 i risultati ottenuti attraverso la parametrizzazione del modello mediante l'ottimizzatore probabilistico. Anche in questo caso i valori mediani delle distribuzioni dei parametri risultano essere in buon accordo con il set ottimale determinato da DEoptim.

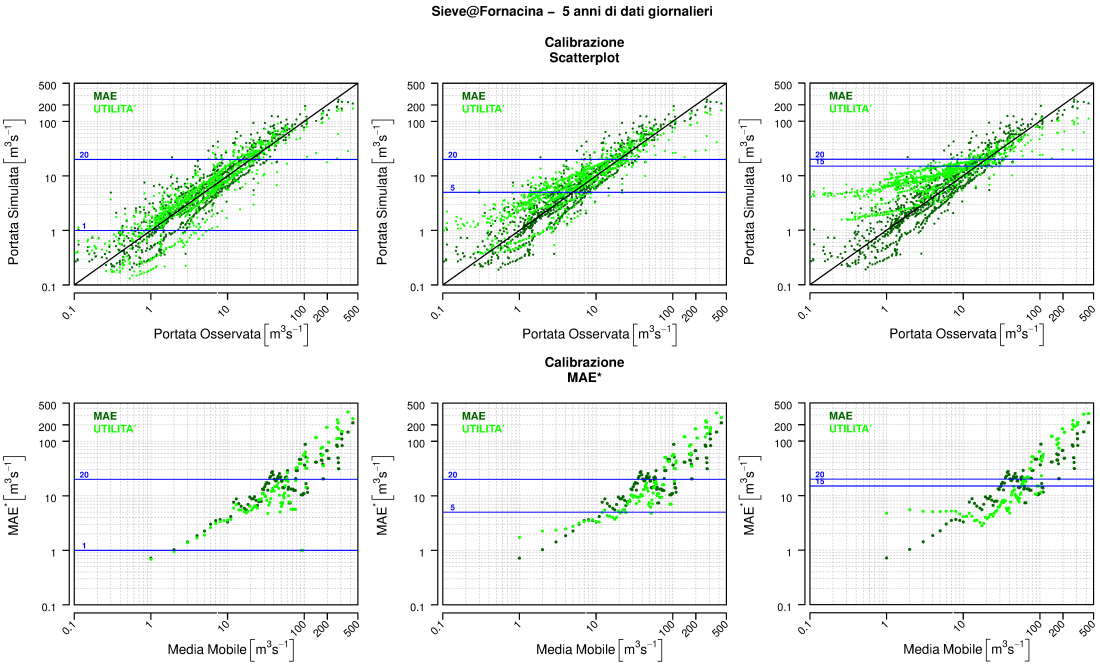

FIGURA 5.20: Effetto che l'aumento della soglia sinistra E_{sx} determina sul processo di calibrazione. Il valore della soglia destra E_{dx} è costante e pari a 20 m^3s^{-1}.

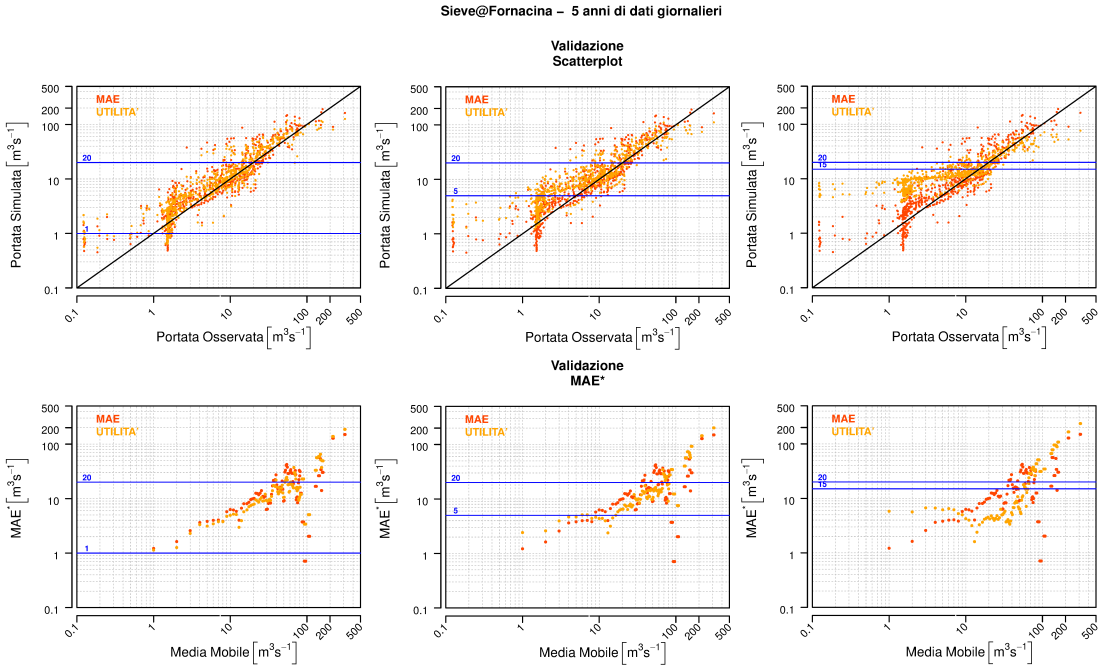

FIGURA 5.21: Effetto che l'aumento della soglia sinistra E_{sx} determina sul processo di validazione. Il valore della soglia destra E_{dx} è costante e pari a 20 $m^3 s^{-1}$.

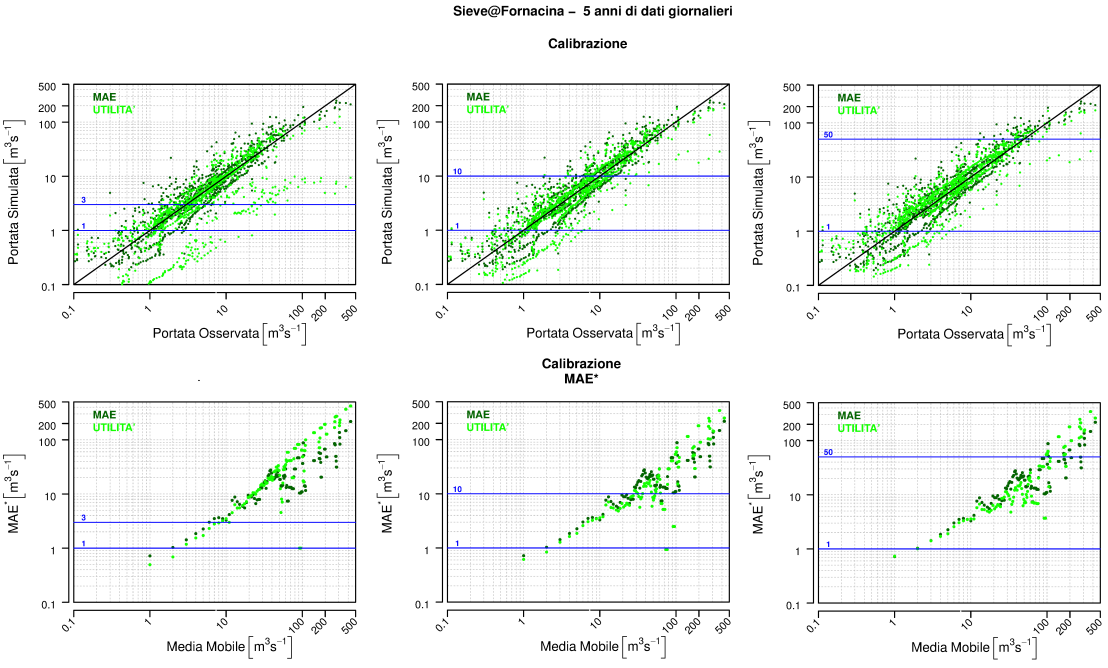

FIGURA 5.22: Effetto che l'aumento della soglia destra E_{dx} determina sul processo di calibrazione. Il valore della soglia sinistra E_{sx} è costante e pari ad 1 $m^3 s^{-1}$.

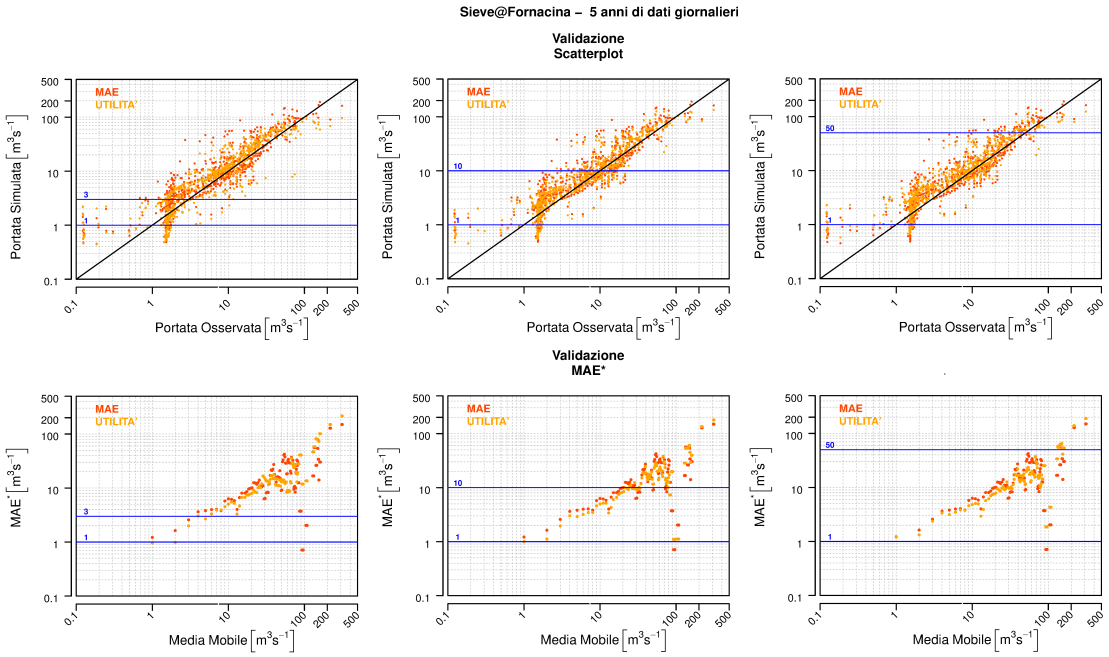

FIGURA 5.23: Effetto che l'aumento della soglia destra E_{dx} determina sul processo di calibrazione. Il valore della soglia sinistra E_{sx} è costante e pari ad 1 $m^3 s^{-1}$.

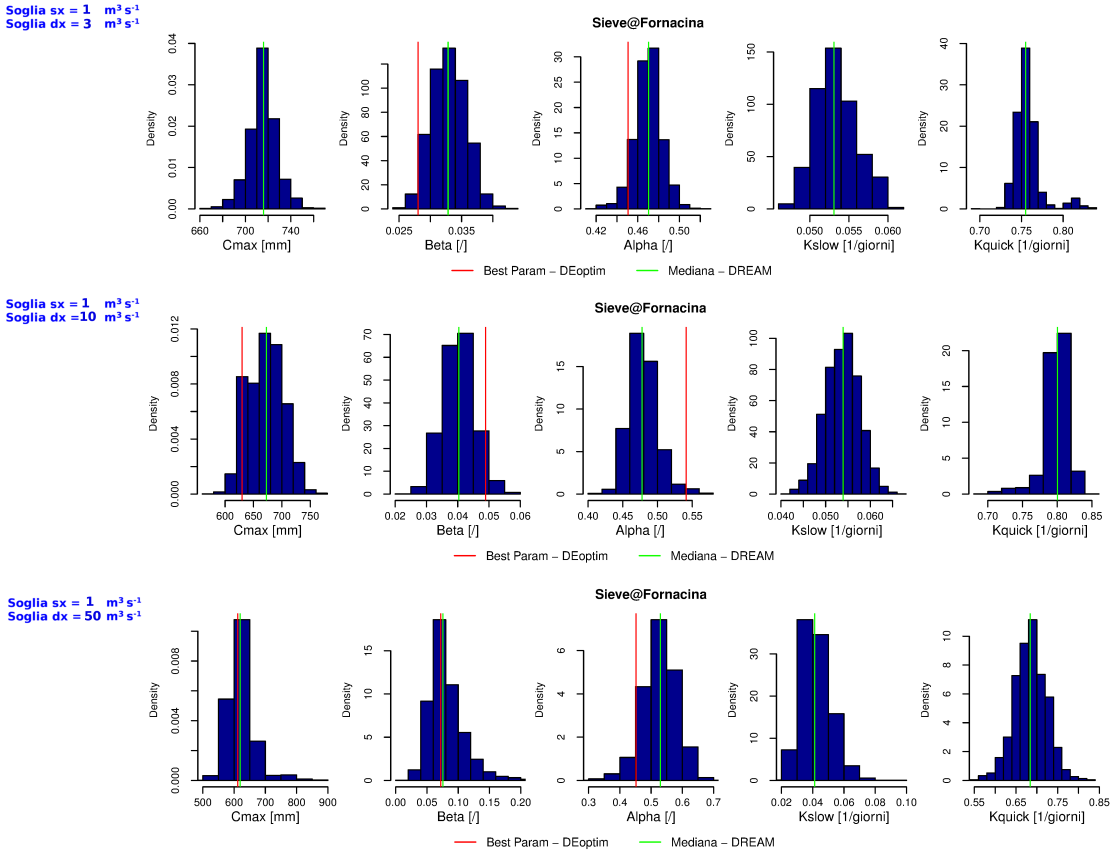

FIGURA 5.24: Confronto della distribuzione a posteriori dei parametri ottenuti tramite DREAM adottando diversi valori per la soglia destra della funzione di utilità

Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Sieve – Utilità lineare

			C_{max} $[mm]$	β $[/]$	α $[/]$	k_s $[1/giorni]$	k_q $[1/giorni]$
Funzione Obiettivo							
MAE		Mediana	386.235	0.086	0.615	0.042	0.770
		SD	3.337	0.003	0.006	0.001	0.006
Utilità							
E_{sx} $[m^3s^{-1}]$	E_{dx} $[m^3s^{-1}]$						
0	500	Mediana	560.547	0.299	0.524	0.057	0.730
		SD	194.145	0.361	0.183	0.023	0.134
1	3	Mediana	715.754	0.033	0.469	0.054	0.759
		SD	12.122	0.003	0.013	0.003	0.018
1	10	Mediana	671.909	0.040	0.479	0.054	0.798
		SD	31.335	0.005	0.022	0.004	0.021
1	20	Mediana	631.014	0.065	0.522	0.042	0.705
		SD	18.593	0.010	0.033	0.006	0.032
1	50	Mediana	621.547	0.081	0.529	0.042	0.684
		SD	40.878	0.029	0.053	0.009	0.039
5	20	Mediana	634.196	0.105	0.525	0.023	0.635
		SD	52.766	0.029	0.039	0.007	0.037
15	20	Mediana	557.078	0.262	0.383	0.0166	0.593
		SD	108.385	0.093	0.054	0.009	0.037

Tabella 5.6: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione della funzione obiettivo basata su funzioni di utilità con differenti valori di soglia E_{sx} ed E_{dx}. Si riportano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori ottenuti attraverso un approccio di tipo probabilistico mediante l'ottimizzatore DREAM.

Le indagini condotte in questo paragrafo hanno messo in luce l'influenza che una funzione di utilità (lineare) basata sull'errore assoluto ha sul processo di calibrazione. In particolare è stato osservato che, generalmente, nei "rami" nei quali la funzione è decrescente le prestazioni del modello migliorano, diminuiscono cioè gli errori assoluti commessi dal modello rispetto ai risultati che si otterrebbero seguendo un approccio di calibrazione tradizionale.

Finora le funzioni di utilità non hanno considerato esplicitamente i valori di portata (osservata e simulata). Di seguito si descrivono alcuni dei risultati che sono stati ottenuti adottando nel processo di calibrazione una funzione di utilità che valuta esplicitamente, oltre all'errore assoluto del modello, anche i valori di portata osservata e simulata.

5.2.2 Funzioni di utilità dipendenti sia dall'errore assoluto che dalle portate osservate e simulate

Nella seconda parte del lavoro di tesi sono state analizzate funzioni di utilità che dipendono esplicitamente, oltre che dall'errore commesso dal modello anche dalla portata osservata e simulata. Attraverso tali funzioni l'utilizzatore del modello è in grado di associare direttamente valori di utilità alle diverse portate simulate. Così facendo, egli è in grado di migliorare, attraverso il processo di calibrazione, la rappresentazione degli aspetti dell'idrogramma che ritiene maggiormente interessanti per i propri fini applicativi.

La costruzione di tali funzioni di utilità è basata sull'evidenza che all'aumentare delle portate osservate (e simulate) aumentano gli errori commessi dal modello. I grafici del trend dell'errore assoluto mostrati nei paragrafi precedenti ne sono un chiaro esempio: gli errori commessi nella rappresentazione dei deflussi aumentavano vistosamente al crescere delle portate osservate. Sulla base di queste considerazioni è lecito quindi ipotizzare che l'utilizzatore di un modello idrologico riterrà ugualmente soddisfacenti le simulazioni che a portate osservate elevate associano errori elevati. D'altra parte, per deflussi osservati modesti, la riproduzione delle portate avverrà efficacemente se ad esse corrisponderanno errori modesti.

Come precedentemente illustrato (v.d. capitolo 3), la definizione delle funzioni di utilità analizzate si basa sulle seguenti considerazioni:

- a portate osservate elevate corrispondono simulazioni soddisfacenti anche nel caso in cui esse generino errori elevati. Se ad un generico passo temporale di calcolo si verifica tale condizione l'utilità associata ad esso è pari ad uno;

- a portate modeste e contestualmente errore modesto, si associa un utilità elevata. Il caso limite di tale condizione è quello in cui le portate siano prossime allo zero: se anche l'errore è prossimo ad annullarsi allora l'utilità associata alla simulazione risulta massima (pari ad uno), altrimenti l'utilità decresce linearmente all'aumentare dell'errore del modello. Quest'ultimo caso rappresenta le funzioni di utilità precedentemente analizzate.

Sulla base di queste considerazioni la definizione della funzione di utilità si esplica attraverso l'attribuzione di tre valori di soglia, uno associato alle portate q^* e due relativi agli errori E_{sx} ed E_{dx}.

Come precedentemente eseguito la funzione obiettivo è costituita dalla somma delle utilità associate ad ogni istante temporale di simulazione. Il processo di calibrazione avviene quindi attraverso la massimizzazione della somma delle utilità.

Le analisi sono avvenute adottando i medesimi valori di soglia dell'errore definiti nel paragrafo precedente. I valori di soglia relativi a q^* sono invece stati definiti sulla base della curva di durata delle portate di ciascun Fiume analizzato. In particolare, sono stati assunti come valori di soglia q^* le portate corrispondenti alla Q_{355}, Q_{300}, Q_{250}, Q_{200}, Q_{180}, Q_{135}, Q_{90}, Q_{60}, Q_{30}, Q_{10} (tabella 5.7).

	Q_{355}	Q_{355}	Q_{300}	Q_{250}	Q_{200}	Q_{180}	Q_{135}	Q_{90}	Q_{30}	Q_{10}
Reno	1.49	3.30	4.46	6.45	7.67	11.49	18.01	26.47	46.56	79.50
Arno	0.68	1.21	2.36	4.29	5.23	7.88	12.75	19.20	31.87	64.77
Sieve	0.08	1.37	2.23	3.96	5.22	8.36	13.04	19.57	33.61	75.96

TABELLA 5.7: Valori della soglia q^* utilizzati nelle calibrazioni. I valori di portata sono stati determinati sulla base della curva di durata delle portate relativa a ciascun Fiume. Ogni valore è espresso in $m^3 s^{-1}$.

Di seguito vengono riportati alcuni dei risultati ottenuti ritenuti maggiormente rappresentativi del lavoro svolto. Dato l'elevato numero di ottimizzazioni eseguite solamente alcune in alcune di esse è stato utilizzato l'algortimo DREAM. In analogia al lavoro precedentemente svolto, i risultati vengono mostrati mediante l'utilizzo degli scatterplot e dei grafici che rappresentano l'andamento dell'errore medio assoluto calcolato in corrispondenza di un determinato intervallo di portate osservate. Come prima, le linee graficate in blu rappresentano i valori di soglia E_{sx} ed E_{dx}, mentre il valore di q^* viene evidenziato attraverso una linea tratteggiata verticale di color viola. Nei grafici si indica con *UTILITÀ II* la funzione di utilità che dipende dalle tre soglie. Di seguito ci si riferirà ad essa definendola *utilità* ^{II}.

Fiume Reno

I risultati relativi al Fiume Reno si riferiscono al caso in cui i valori delle soglie dell'errore valgono, rispettivamente 1, 10 e 30 m^3s^{-1} (E_{sx}) e 50 m^3s^{-1} (E_{dx}); il valore di q^* è assunto pari a 18.01 m^3s^{-1}. Occorre innanzitutto far notare che i risultati ottenuti per questo bacino attraverso l'impiego dell'*utilità* ^{II} non hanno mostrato significative differenze gli uni dagli altri. Ciò nonostante si notano differenze rispetto alle calibrazioni basate sulla funzione di utilità definita nel precedente paragrafo.

Nelle figure 5.25 e 5.26 si osserva infatti che rispetto ai risultati precedentemente ottenuti attraverso la funzione di utilità dipendente esclusivamente dall'errore di simulazione, all'aumentare della soglia di errore sinistra E_{sx} ora non si osservano variazioni apprezzabili nei risultati delle calibrazioni. Il fatto di aver introdotto nella funzione di utilià anche la dipendenza dalle portate osservate e simulate, fa si che anche gli errori relativi alle portate inferiori alla soglia q^* vengano considerati nel processo di calibrazione. Il modello quindi sarà portato a calibrare anche tali valori di portate.

Dal confronto delle figure si notano leggere variazioni nel trend dell'errore assoluto associato alle portate di magra al crescere del valore della soglia E_{sx}.

In figura 5.27 vengono riportati gli istogrammi delle densità di probabilità a posteriori ottenute mediante l'utilizzo di DREAM. Sono inoltre indicati i parametri ottimali calcolati da DEoptim. Si può osservare che in analogia a quanto accadeva precedentemente le distribuzioni mostrano un andamento ben definito. La mediana delle distribuzioni è molto prossima ai valori ottimali dei parametri calcolati da DEoptim. La tabella 5.8 riporta la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri ottimali calcolati da DREAM. Dal confronto con la tabella 5.4 (funzione obiettivo basata sull'utilità *bidimensionale*) si nota una diminuzione della deviazione standard dei parametri. Tuttavia, la dispersione dei parametri ottimali risulta essere maggiore rispetto alla calibrazione tredizionale avvenuta attraverso la minimizzazione della somma degli errori assoluti (tabella 5.2).

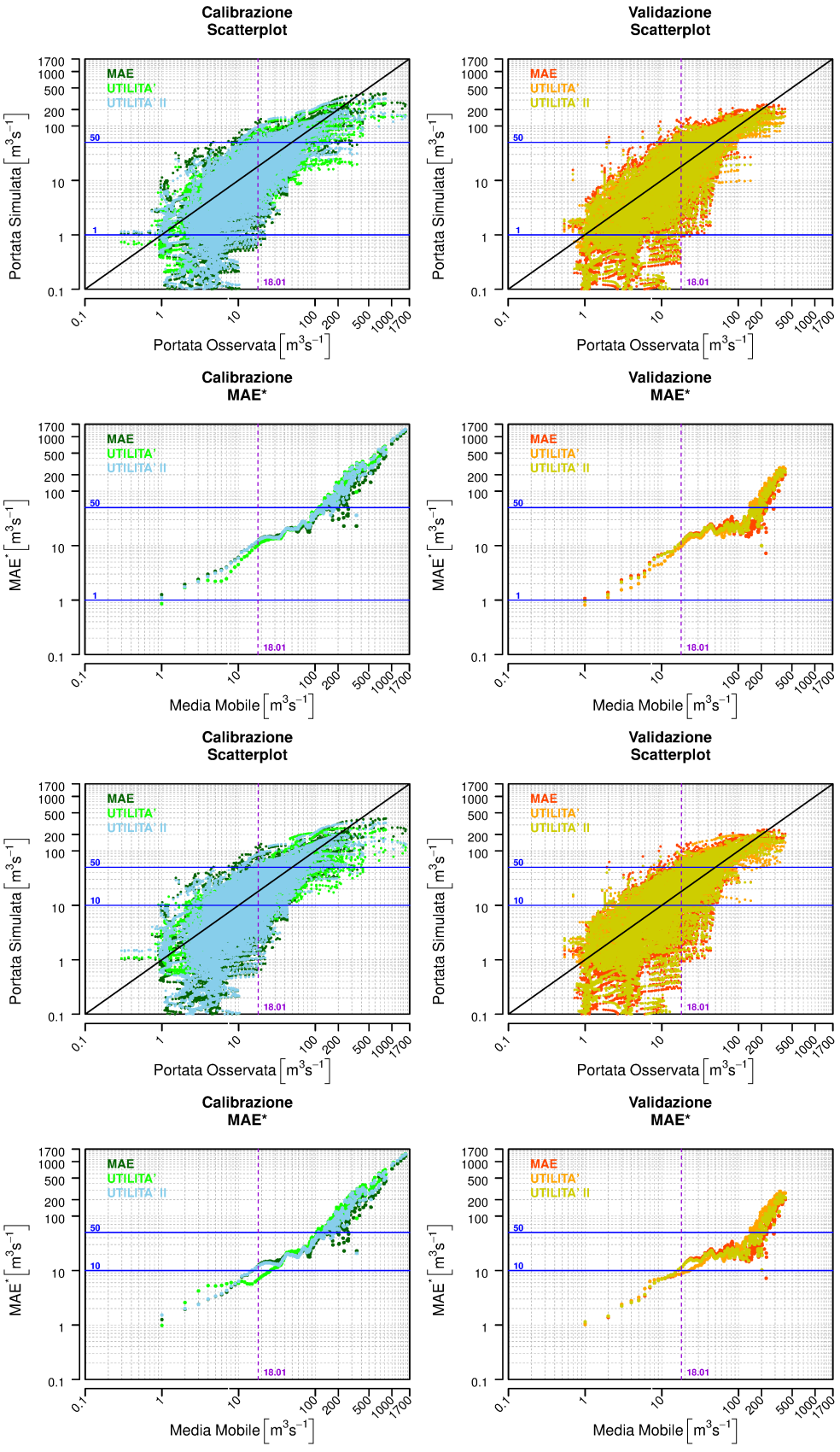

FIGURA 5.25: Reno – Esempio di risultati ottenuti attraverso la calibrazione basata sull'*utilità* ^{II} per valori di E_{dx} pari a 50 m^3s^{-1} ed E_{sx} pari a 1 e 10 m^3s^{-1}. Il valore di soglia q^* è fissato a 18.01 m^3s^{-1}).

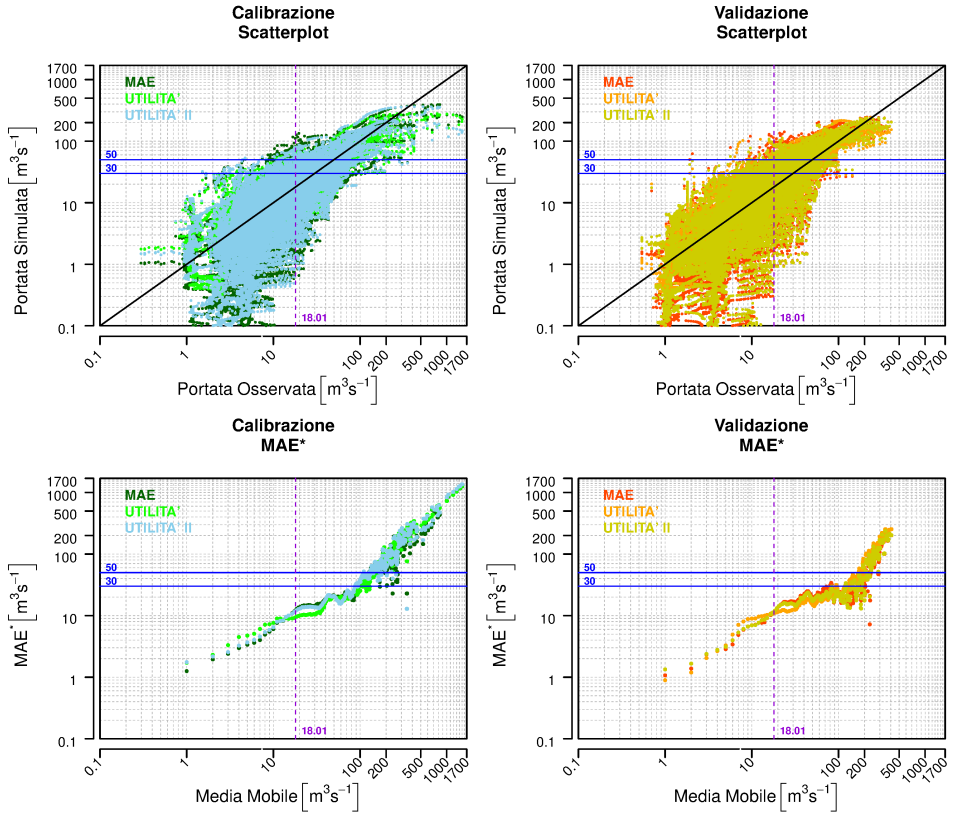

FIGURA 5.26: Reno – Esempio di risultati ottenuti attraverso la calibrazione basata sull'*utilità* ^{II} per valori di E_{dx} pari a 50 m^3s^{-1} ed E_{sx} pari 30 m^3s^{-1}. Il valore di soglia q^* è fissato a 18.01 m^3s^{-1}.

Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Reno – Utilità^{II}

			C_{max} $[mm]$	β $[/]$	α $[/]$	k_s $[1/ore]$	k_q $[1/ore]$
Funzione Obiettivo							
Utilità ^{II}							
E_{sx} $[m^3s^{-1}]$	E_{dx} $[m^3s^{-1}]$						
1	50	Mediana	401.859	0.191	0.115	0.010	0.128
		SD	1.817	0.009	0.009	0.001<	0.008
10	50	Mediana	403.039	0.223	0.174	0.010	0.114
		SD	3.340	0.011	0.013	0.001<	0.006
30	50	Mediana	402.445	0.272	0.315	0.010	0.135
		SD	2.630	0.015	0.019	0.001<	0.004

TABELLA 5.8: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione della funzione obiettivo basata su funzioni di *utilità* ^{II} con differenti valori di soglia E_{sx} ed E_{dx}. q^* vale 18.01 m^3s^{-1}. Si riportano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori ottenuti attraverso un approccio di tipo probabilistico mediante l'ottimizzatore DREAM.

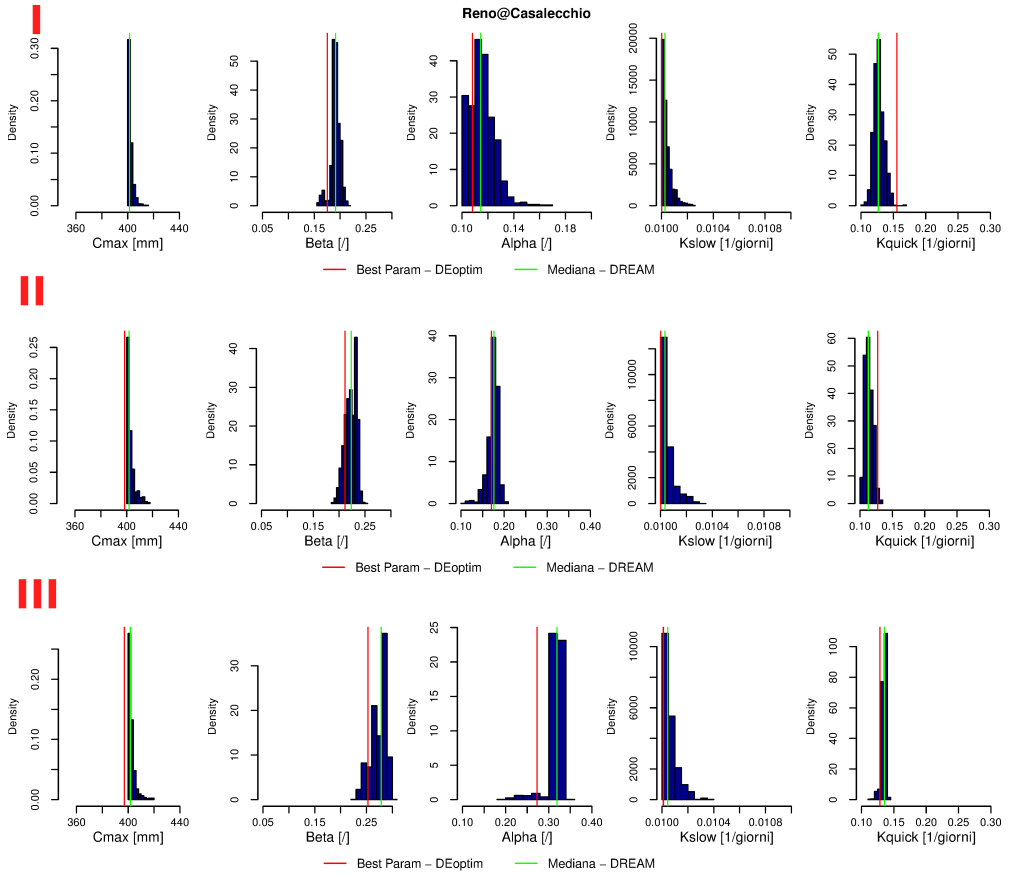

FIGURA 5.27: Istogrammi delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri calcolate da DREAM. I risultati si riferiscono alle ottimizzazioni avvenute mediante l'*utilità* ^{II} mantenendo costante il valore di E_{dx} posto a 50 $m^3 s^{-1}$ e facendo variare il valore della soglia sinistra E_{sx} (rispettivamente pari a 1, 10 e 30 $m^3 s^{-1}$ - figure I, II e III) ; q^* vale a 18.01 $m^3 s^{-1}$.

Fiume Arno

I risultati in merito al Fiume Arno hanno l'obiettivo di mostrare l'effetto che la variazione della soglia superiore dell'errore E_{dx} a partià delle altre due soglie determina sul processo di calibrazione. I risultati mostrati si riferiscono a valori di E_{sx} pari a 3 m^3s^{-1} e q^* pari a 4.29 m^3s^{-1} (figure 5.28 e 5.29).

In figura 5.28 si nota chiaramente sia dagli scatterplot che dai grafici del trend dell'errore assoluto medio che, in calibrazione, nel passaggio di E_{dx} da 10 a 20 m^3s^{-1} le portate inferiori a 10 m^3s^{-1} che attraverso l'utilità bidimensionale venivano sovrastimate ora vengono riprodotte con maggior dettaglio. D'altra parte, tuttavia, le portate superiori a q^* sono caratterizzate da errori superiori rispetto a quelli ottenuti attraverso un approccio basato sull'utilità dipendente unicamente dall'errore assoluto.

Relativamente ai risultati ottenuti attraverso la calibrazione basata sull'*utilità* ^{II} si osserva che all'aumentare del valore di soglia E_{dx} aumentano, seppur lievemente, gli errori assoluti di simulazione associati alle portate entro i 10 m^3s^{-1} ma d'altra parte migliora la rappresentazione dei deflussi più elevati. Risultati analoghi si osservano in validazione, soprattutto per quanto riguarda le portate inferiori al valore di soglia q^*.

Da notare tuttavia che gli errori commessi nella loro riproduzione risultano superiori a quelli ottenuti attraverso un approccio tradizionale.

Analizzando la figura 5.29 si nota ancora una volta il miglioramento della rappresentazione dei deflussi per portate inferiori a q^*, seguite tuttavia da un peggioramento delle prestazioni per valori superiori a tale soglia.

In figura 5.30 vengono riportati gli istogrammi delle distribuzioni a posteriori dei parametri ottenuti tramite DREAM. Ad eccezione di pochi casi, si può notare la forma ben definita delle distribuzioni. La mediana dei parametri coincide col set ottimale di parametri calcolato da DEoptim. La tabella 5.9 mostra alcune statistiche sui parametri ottimali ottenuti da DREAM. Confrontando questi risultati con quelli ottenuti attraverso una calibrazione tradizionale avvenuta attraverso la minimizzazione della somma degli errori assoluti (tabella 5.2) si nota un aumento della deviazione standard dei parametri ottimali.

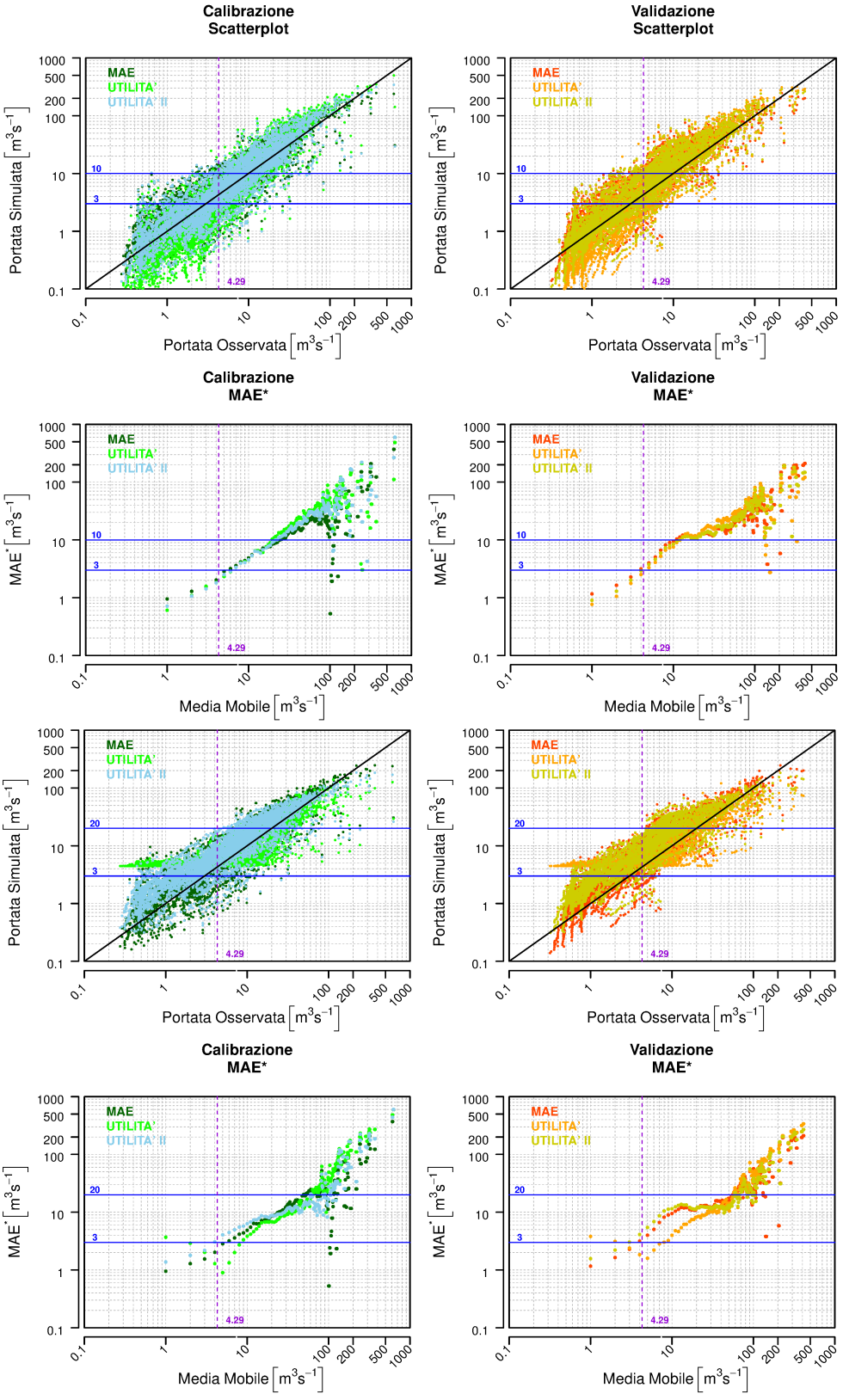

FIGURA 5.28: Fiume Arno - Effetto che l'aumento della soglia di errore E_{dx} determina sull'idrogramma simulato (E_{sx}=3 m^3s^{-1}, q^*=4.29 m^3s^{-1}).

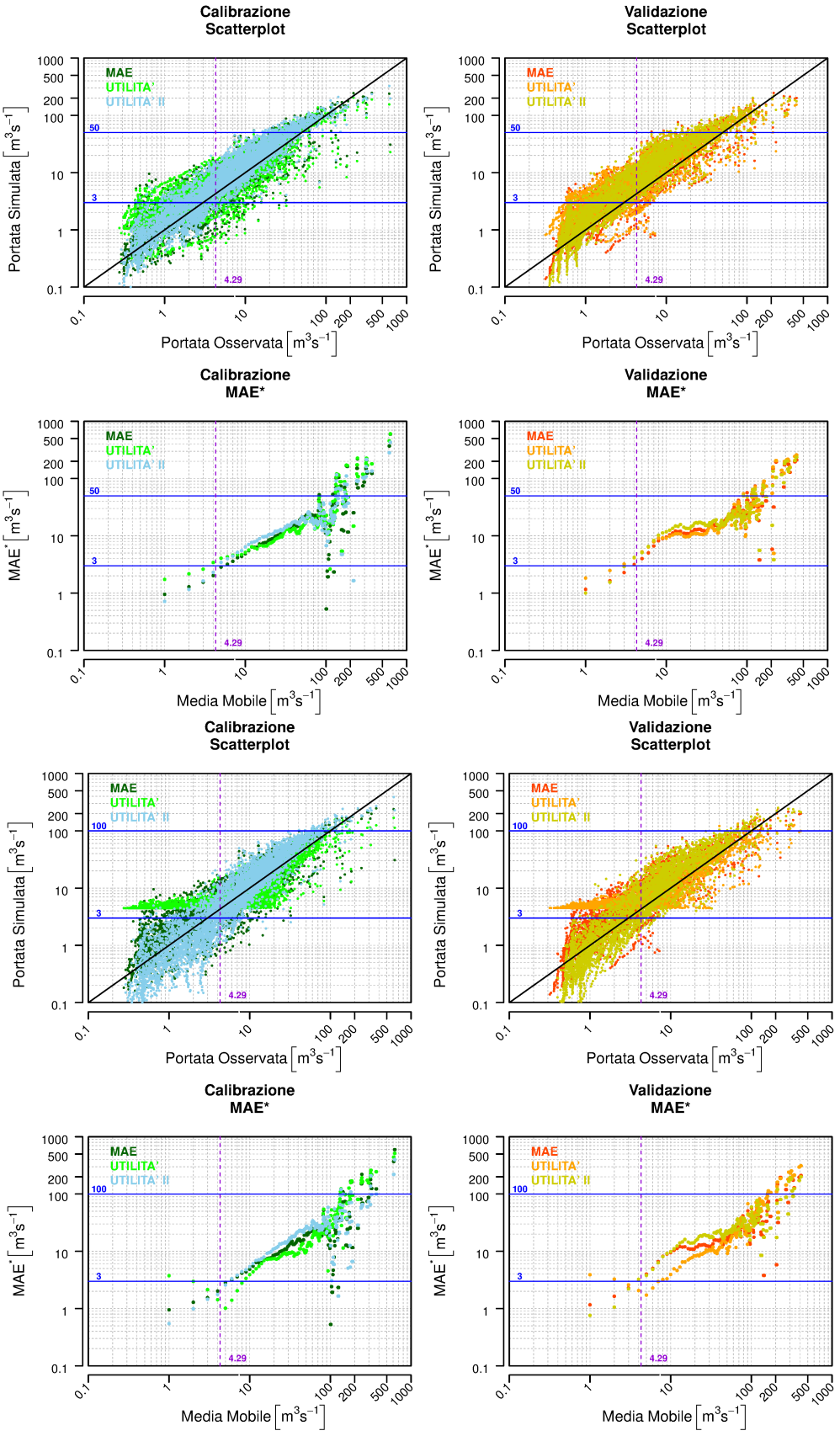

FIGURA 5.29: Fiume Arno - Effetto che l'aumento della soglia di errore E_{dx} determina sull'idrogramma simulato (E_{sx}=3 m^3s^{-1}, q^*=4.29 m^3s^{-1}).

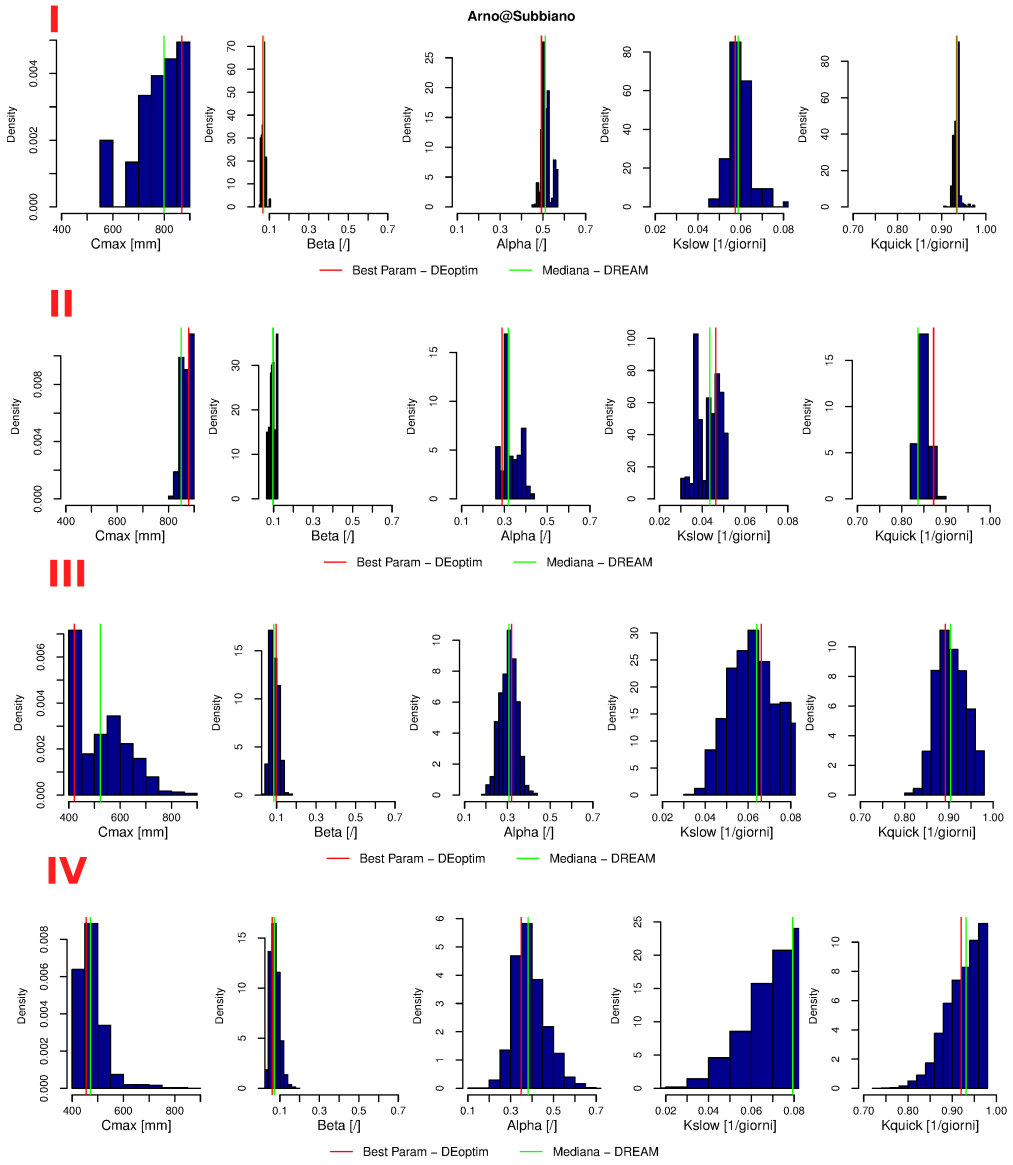

FIGURA 5.30: Istogrammi delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri ottenuti mediante le ottimizzazioni tramite DREAM. I risultati sono stati ottenuti dall'applicazione dell'*utilità* ^{II} mantenendo costante il valore di E_{sx} (pari a 3 $m^3 s^{-1}$) e facendo variare E_{dx} (10, 20, 50, 100 $m^3 s^{-1}$ - rispettivamente le immagini I, II, III,e IV). Il valore di soglia q^* è pari 4.29 $m^3 s^{-1}$.

Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Arno –Utilità^{II}

				C_{max} $[mm]$	β $[/]$	α $[/]$	k_s $[1/giorni]$	k_q $[1/giorni]$
Funzione Obiettivo								
Utilità^{II}								
E_{sx}	$[m^3s^{-1}]$	E_{dx}	$[m^3s^{-1}]$					
3		10		Mediana	765.893	0.069	0.518	0.0587	0.934
				SD	89.187	0.008	0.024	0.003	0.003
3		20		Mediana	828.205	0.091	0.326	0.042	0.824
				SD	60.984	0.012	0.035	0.004	0.037
3		50		Mediana	536.351	0.087	0.305	0.066	0.904
				SD	102.056	0.0216	0.039	0.014	0.033
3		100		Mediana	480.998	0.075	0.392	0.077	0.924
				SD	66.264	0.023	0.072	0.015	0.0396

TABELLA 5.9: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione della funzione obiettivo basata su funzioni di *utilità* ^{II} con differenti valori di soglia E_{dx}; E_{sx} è pari a 3 $m^e s^{-1}$; q^* vale 4.29 $m^e s^{-1}$ Si riportano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori ottenuti attraverso un approccio di tipo probabilistico mediante l'ottimizzatore DREAM.

Fiume Sieve

I risultati mostrati relativamente al Fiume Sieve si riferiscono a calibrazioni basate sull'*utilità* ^{II} definite da valori di soglia sinistra E_{sx} pari 5 m^3s^{-1}, soglia destra pari a E_{dx} 20 m^3s^{-1} e soglia della portata q^* variabile. Tramite i risultati mostrati si vuol mettere in luce l'effetto che l'aumento di soglia q^* comporta nel processo di calibrazione e nella rappresentazione dei deflussi osservati (figure 5.31 e 5.32).

In particolare, dagli scatterplot relativi a q^* pari a 1.37 m^3s^{-1} (figura 5.31), sia in calibrazione che validazione, si nota una sovrastima delle portate simulate medie\di magra ottenute attraverso la calibrazione basata sull'*utilità* ^{II} ed una sovrastima dei deflussi più elevati; aumentando il valore di q^*, invece, le prestazioni del modello migliorano vistosamente (ciò si osserva anche dai grafici del trend dell'errore assoluto). Va notato tuttavia, soprattutto per portate modeste\di magra, che gli errori commessi dal modello calibrato attraverso l'*utilità* ^{II} corrispondenti a portate inferiori al valore di soglia q^* risultano essere superiori rispetto a quelli ottenuti attraverso un approccio classico.

Dal confronto della figura 5.31 ($q^* = 8.36\ m^3s^{-1}$) con la figura 5.32 ($q^* = 33.61\ m^3s^{-1}$) si evince che por portate osservate comprese tra 10 e 12 m^3s^{-1} l'aumento della soglia q^* determina un miglioramento nella rappresentazione dei deflussi osservati. Sempre dalla figura 5.32 si osserva come, per valori di q^* molto superiori al valore di soglia E_{dx} non vi sono miglioramenti apprezzabili nelle performances del modello. Tuttavia, gli errori assoluti medi del modello per portate osservate inferiori a circa 5 m^3s^{-1} risultano anche in questo caso superiori rispetto a quelli ottenuti attraverso un approccio *tradizionale*.

Risultati analoghi sull'effetto che l'introduzione dell'*utilità* ^{II} determina sul processo di calibrazione sono stati osservati anche per gli altri casi di studio.

Come precedentemente eseguito, si riportano gli istogrammi delle densità di probabilità a posteriori dei parametri calcolati da DREAM (figura 5.33). Anche per il Fiume Sieve le distribuzioni sono ben definite, con valori mediani praticamente coincidenti rispetto ai valori ottenuti da DEoptim. La tabella 5.10 riporta alcune statistiche delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri ottenuti attraverso DREAM. Anche in questo caso, come osservato per i Fiumi Reno ed Arno, si nota un aumento della dispersione dei parametri ottimali ottenuti attraverso un approccio *tradizionale* (tabella5.2).

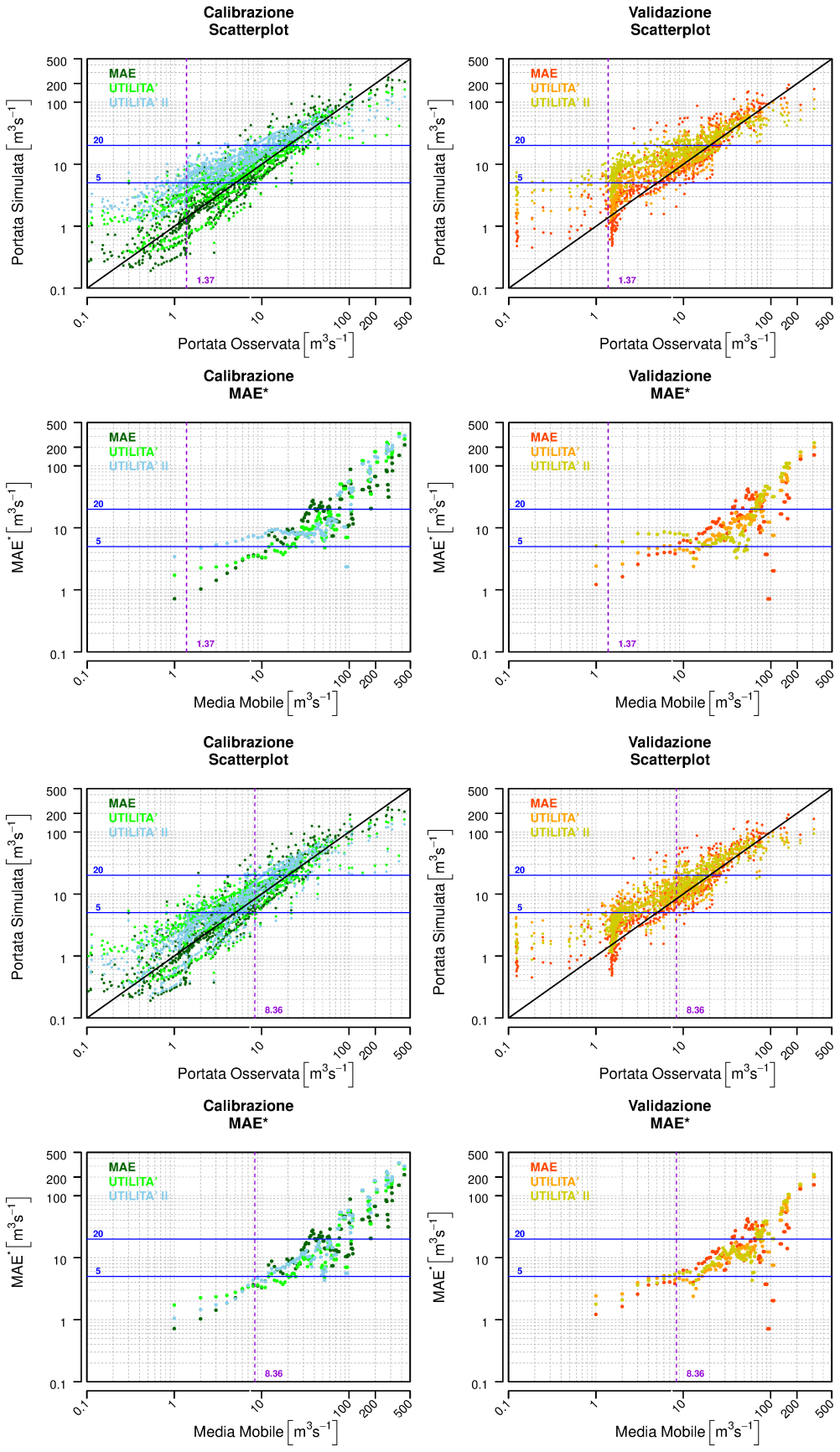

FIGURA 5.31: Fiume Sieve - Effetto che l'aumento della soglia di portata q^* determina sull'idrogramma simulato (E_{sx}=5 m^3s^{-1}, E_{dx}=20 m^3s^{-1}).

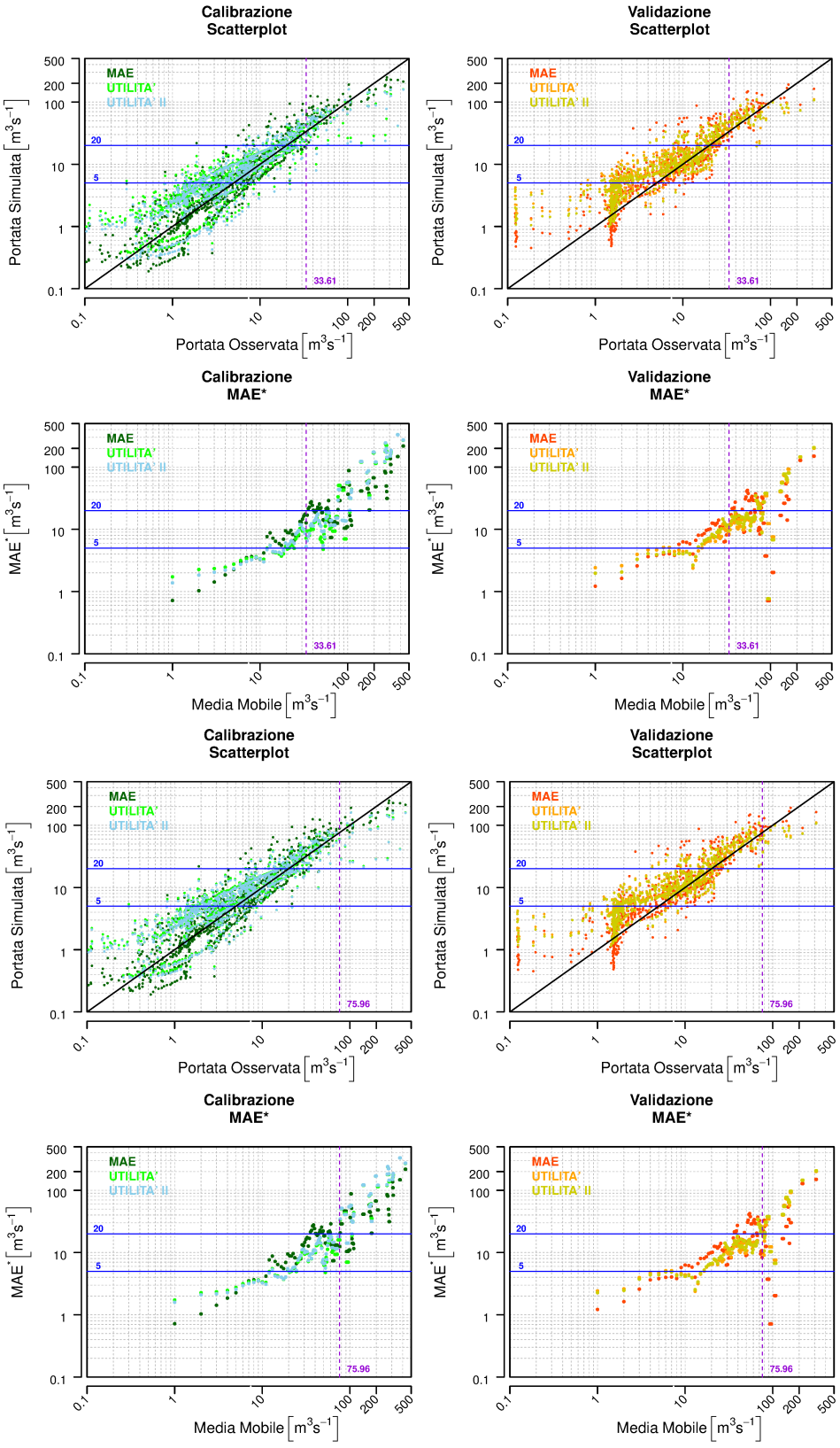

FIGURA 5.32: Fiume Sieve - Effetto che l'aumento della soglia di portata q^* determina sull'idrogramma simulato (E_{sx}=5 m^3s^{-1}, E_{dx}=20 m^3s^{-1}).

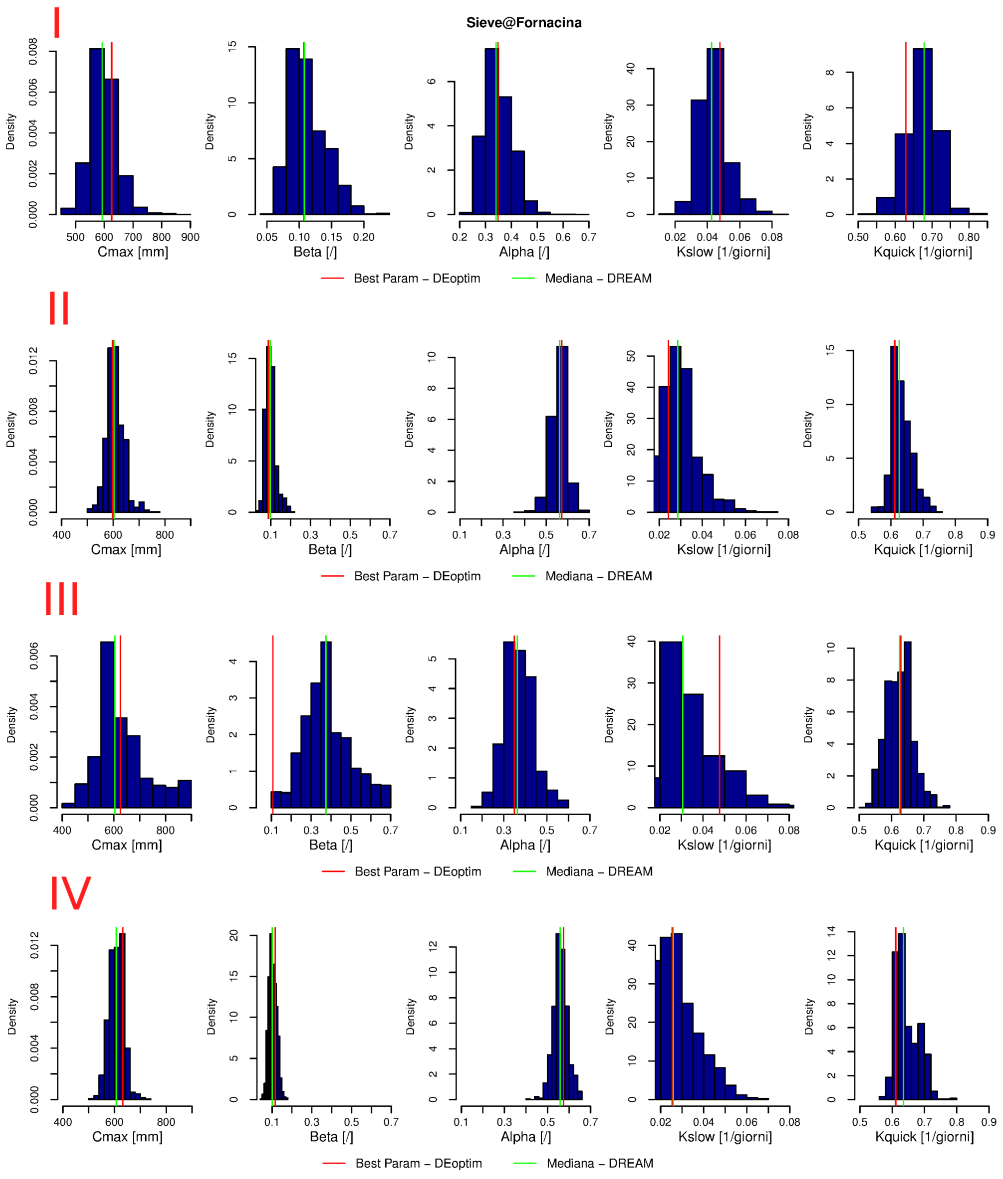

FIGURA 5.33: Istogrammi delle distribuzioni di probabilità a posteriori dei parametri ottenuti mediante le ottimizzazioni tramite DREAM. I risultati si riferiscono alle ottimizzazioni mediante l'*utilità* ^{II} mantenendo costanti i valori di E_{sx} ed E_{dx}, rispettivamente pari a 5 e 20 $m^3 s^{-1}$. La soglia q^* vale 1.37, 8.36, 33.61 e 75.96 $m^3 s^{-1}$ rispettivamente i grafici I, II III e IV.

Risultati Calibrazioni DREAM – Fiume Sieve – Utilità^{II}

		C_{max} $[mm]$	β $[/]$	α $[/]$	k_s $[1/giorni]$	k_q $[1/giorni]$
Funzione Obiettivo						
Utilità^{II}						
q^*	$[m^3s^{-1}]$					
1.37	Mediana	617.183	0.389	0.373	0.032	0.619
	SD	92.387	0.117	0.064	0.011	0.038
8.36	Mediana	606.814	0.098	0.557	0.030	0.637
	SD	33.085	0.024	0.038	0.009	0.033
33.61	Mediana	606.973	0.104	0.559	0.028	0.647
	SD	28.127	0.020	0.034	0.010	0.036
75.96	Mediana	599.855	0.113	0.351	0.044	0.673
	SD	49.109	0.029	0.053	0.009	0.042

Tabella 5.10: Risultati delle calibrazioni avvenute attraverso la massimizzazione della funzione obiettivo basata su funzioni di *utilità* ^{II} considerando $E_{sx} = 5\ m^3s^{-1}$ ed $E_{dx} = 20\ m^3s^{-1}$. Si riportano la mediana e la deviazione standard delle distribuzioni dei parametri a posteriori ottenuti attraverso un approccio di tipo probabilistico mediante l'ottimizzatore DREAM.

Capitolo 6

Conclusioni

Nel presente elaborato di tesi è stata analizzata una metodologia di calibrazione dei modelli afflussi-deflussi basata sull'utilizzo di funzioni di utilità. La ricerca è stata motivata dalla considerazione che nella pratica diffusa, attraverso il processo di calibrazione, si cerca di massimizzare l'adattamento del modello alla realtà osservata, trascurando il fatto che l'utilizzatore del modello potrebbe essere maggiormente interessato alla riproduzione di un determinato aspetto del processo affussi-deflussi, ritenuto maggiormente utile per le proprie finalità applicative.

La ricerca trae quindi spunto dall'intenzione di proporre un metodo di calibrazione che sia maggiormente flessibile in merito alla possibilità, da parte dell'utente, di specificare un criterio di calibrazione flessibile, che permetta di speficare un obiettivo di calibrazione ad hoc.

Nel lavoro di tesi viene proposta una metodologia di calibrazione che mira a valutare le prestazioni del modello stimandone l'utilità nell'applicazione prevista. Tramite l'utilizzo di opportune funzioni, ad ogni passo temporale viene valutata l'utilità della simulazione ottenuta, utilizzando criteri dotati di spiccata flessibilità. La calibrazione viene quindi eseguita attraverso la massimizzazione di una funzione obiettivo costituita dalla somma delle utilità stimate nei singoli passi temporali.

Le analisi hanno considerato due famiglie di funzioni di utilità: le prime dipendenti unicamente dall'errore assoluto di simulazione, le seconde dipendenti sia dall'errore assoluto di simulazione che dalle portate osservate e simulate. Le indagini sono avvenute ipotizzando molteplici forme della funzione di utilità e testando ognuna di esse attraverso la calibrazione di tre fiumi appenninici: il Fiume Sieve a Fornacina, il Fiume Arno a Subbiano ed il Fiume Reno a Casalecchio. Le simulazioni sono state effettuate con

il modello HyMOD. I risultati ottenuti sono stati confrontati con quelli raggiunti attraverso una calibrazione classica basata sulla minimizzazione della somma degli errori assoluti. Le ottimizzazioni sono avvenute sia utilizzando un algortimo di ottimizzazione deterministico sia utilizzando un algoritmo ad impostazione probabilistica.

I risultati mostrano che attraverso un opportuna scelta della funzione obiettivo è possibile migliorare le prestazioni del modello rispetto ad un approccio classico laddove ritenute maggiormente utili. Le calibrazioni basate sulle funzioni di utilità dipendenti unicamente dall'errore assoluto di simulazione hanno evidenziato un aumento delle prestazioni del modello in corrispondenza dei tratti in cui tali funzioni risultano decrescenti ed un peggioramento nei tratti in cui tali funzioni sono costanti.

Attraverso l'introduzione delle funzioni di utilità dipendenti oltre che dall'errore assoluto di simulazione anche dalla portata osservata e simulata, è stata indagata la possibilità di associare un peso all'errore in funzione della portata. I risultati mostrano che all'aumentare dell'utilità associata ad un assegnato valore di portata è possibile migliorare le prestazioni del modello ad intervalli temporali selezionati. Le indagini svolte hanno tuttavia mostrato che la definizione delle funzioni di utilità rappresenta un passo delicato da compiere con cura e facendo opportune verifiche sulle distribuzioni di probabilità risultanti per i parametri.

Bibliografia

K Beven. Changing ideas in hydrology–The case of physically-based models. *Journal of hydrology*, 105(1-2):157–172, 1989. ISSN 0022-1694.

K. Beven. A manifesto for the equifinality thesis. *Journal of Hydrology*, 320(1-2):18–36, 2006. ISSN 00221694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2005.07.007.

K. Beven and A. Binley. The future of distributed models: model calibration and uncertainty prediction. *Hydrological processes*, 1992.

K. J. Beven. *Rainfall-Runoff Modelling*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, January 2012. ISBN 9781119951001. doi: 10.1002/9781119951001.

D. Biondi, G. Freni, V. Iacobellis, G. Mascaro, and A. Montanari. Validation of hydrological models: Conceptual basis, methodological approaches and a proposal for a code of practice. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C*, 42-44:70–76, January 2012. ISSN 14747065. doi: 10.1016/j.pce.2011.07.037.

R. S. Blasone, H. Madsen, and D. Rosbjerg. Parameter estimation in distributed hydrological modelling: comparison of global and local optimisation techniques. *Nordic Hydrology*, 38(4-5):451, October 2007. ISSN 13667017. doi: 10.2166/nh.2007.024.

R. S. Blasone, J. A. Vrugt, H. Madsen, D. Rosbjerg, B. A. Robinson, and G. A. Zyvoloski. Generalized likelihood uncertainty estimation (GLUE) using adaptive Markov Chain Monte Carlo sampling. *Advances in Water Resources*, 31(4):630–648, April 2008. ISSN 03091708. doi: 10.1016/j.advwatres.2007.12.003.

D. P. Boyle, H. V. Gupta, and S. Sorooshian. Toward improved calibration of hydrologic models: Combining the strengths of manual and automatic methods. *Water Resources Research*, 36(12):3663–3674, December 2000. ISSN 00431397. doi: 10.1029/2000WR900207.

C. J. F. Ter Braak. A Markov Chain Monte Carlo version of the genetic algorithm Differential Evolution: easy Bayesian computing for real parameter spaces. *Statistics and Computing*, 16(3):239–249, September 2006. ISSN 0960-3174. doi: 10.1007/s11222-006-8769-1.

F. H. S. Chiew, J. Teng, J. Vaze, D. A. Post, J .M. Perraud, D . G. C. Kirono, and N. R. Viney. Estimating climate change impact on runoff across southeast Australia: Method, results, and implications of the modeling method. *Water Resources Research*, 45(10):1–17, 2009. ISSN 00431397. doi: 10.1029/2008WR007338.

R. Clemen. *Making Hard Decisions: An Introduction to Decision Analysis*. 2nd ed. Belmont, CA, Duxbury Press, 1996.

J. I. Cohon. *Multiobjective Programming and Planning*. 1978.

N. J. de Vos and T. H. M. Rientjes. Multiobjective training of artificial neural networks for rainfall-runoff modeling. *Water Resources Research*, 44(8):W08434, August 2008. ISSN 0043-1397. doi: 10.1029/2007WR006734.

Q. Duan, S. Sorooshian, and V. Gupta. Effective and efficient global optimization for conceptual rainfall-runoff models. *Water resources research*, 28(4):1015–1031, 1992.

Q. Y. Duan, V. K. Gupta, and S. Sorooshian. Shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 76(3):501–521, March 1993. ISSN 0022-3239. doi: 10.1007/BF00939380.

A. Efstratiadis and D. Koutsoyiannis. One decade of multi-objective calibration approaches in hydrological modelling: a review. *Hydrological Sciences Journal*, 55(1):58–78, February 2010. ISSN 0262-6667. doi: 10.1080/02626660903526292.

F. Fenicia, H. H. G. Savenije, P. Matgen, and L. Pfister. A comparison of alternative multiobjective calibration strategies for hydrological modeling. *Water Resources Research*, 43(3):W03434, March 2007. ISSN 0043-1397. doi: 10.1029/2006WR005098.

A. Gelman and D. B. Rubin. Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical science*, 1992.

W R Gilks, G O Roberts, and E I George. Adaptive Direction Sampling. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 43(1):179–189, 1994. ISSN 00390526.

H. V. Gupta and S. Soroosh. Toward improved calibration of hydrologic models: Multiple and noncommensurable measures of information. *Water Resources Research*, 34 (4):751–763, April 1998. ISSN 00431397. doi: 10.1029/97WR03495.

H. V. Gupta, H. Kling, K. K. Yilmaz, and G. F. Martinez. Decomposition of the mean squared error and NSE performance criteria: Implications for improving hydrological modelling. *Journal of Hydrology*, 377(1-2):80–91, October 2009. ISSN 00221694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2009.08.003.

V. K. Gupta and S. Sorooshian. The relationship between data and the precision of parameter estimates of hydrologic models, 1985. ISSN 00221694.

W. K. Hastings. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970.

P. Krause and D. P. Boyle. Advances in Geosciences Comparison of different efficiency criteria for hydrological model assessment. pages 89–97, 2005.

R. Krzysztofowicz. Bayesian theory of probabilistic forecasting via deterministic hydrologic model. *Water Resources Research*, 35(9):2739–2750, 1999.

G. Kuczera. On the relationship between the reliability of parameter estimates and hydrologic time series data used in calibration, 1982. ISSN 0043-1397.

E. Laloy and J. A. Vrugt. High-dimensional posterior exploration of hydrologic models using multiple-try DREAM (ZS) and high-performance computing. *Water Resources Research*, 48(1):W01526, January 2012. ISSN 0043-1397. doi: 10.1029/2011WR010608.

E. Laloy, D. Fasbender, and C.L. Bielders. Parameter optimization and uncertainty analysis for plot-scale continuous modeling of runoff using a formal Bayesian approach. *Journal of Hydrology*, 380(1-2):82–93, January 2010. ISSN 00221694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2009.10.025.

G. Lindström. A simple automatic calibration routine for the HBV model. *Nordic Hydrology*, 28(3):153–168, 1997. ISSN 00291277.

S. Y. Liong, S.T . Khu, and W. T. Chan. Derivation of Pareto Front with Accelerated Convergence Genetic Algortithm (ACGA). In V Babovic and L C Larsen, editors, *Proceedings of the Third Hydroinformatics Conference*, 1998.

L. Lombardi. *Calibrazione di modelli idrologici con algoritmi multiobiettivo*. PhD thesis, Alma Mater Studiorum - Universita Di Bologna, 2011.

D. P. Loucks, E. Van Beek, J. R. Stedinger, and E. Van Beek. *Water resources systems planning and management. An introduction to methods, models and applications*. Studies and reports in hydrology. UNESCO Publishing / WL - Delft Hydraulics, 2005. ISBN 9231039989.

H. Madsen. Automatic calibration of a conceptual rainfall–runoff model using multiple objectives. *Journal of Hydrology*, 235(3-4):276–288, August 2000. ISSN 00221694. doi: 10.1016/S0022-1694(00)00279-1.

H. Madsen. Parameter estimation in distributed hydrological catchment modelling using automatic calibration with multiple objectives. *Advances in Water Resources*, 26(2): 205–216, February 2003. ISSN 03091708. doi: 10.1016/S0309-1708(02)00092-1.

H. Madsen, G. Wilson, and H. C. Ammentorp. Comparison of different automated strategies for calibration of rainfall-runoff models. *Journal of Hydrology*, 261(1-4): 48–59, April 2002. ISSN 00221694. doi: 10.1016/S0022-1694(01)00619-9.

P. Mantovan and E. Todini. Hydrological forecasting uncertainty assessment: Incoherence of the GLUE methodology. *Journal of Hydrology*, 330(1-2):368–381, October 2006. ISSN 00221694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2006.04.046.

M. L. V. Martina, E. Todini, and a. Libralon. A Bayesian decision approach to rainfall thresholds based flood warning. *Hydrology and Earth System Sciences*, 10(3):413–426, June 2006. ISSN 1607-7938. doi: 10.5194/hess-10-413-2006.

B. Merz and A. H. Thieken. Separating natural and epistemic uncertainty in flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, 309(1-4):114–132, July 2005. ISSN 00221694. doi: 10.1016/j.jhydrol.2004.11.015.

N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21 (6):1087–1092, 1953.

A. Montanari. Large sample behaviors of the generalized likelihood uncertainty estimation (GLUE) in assessing the uncertainty of rainfall-runoff simulations. *Water Resources Research*, 41(8):n/a–n/a, August 2005. ISSN 00431397. doi: 10.1029/2004WR003826.

A. Montanari. What do we mean by 'uncertainty'? The need for a consistent wording about uncertainty assessment in hydrology. *Hydrological Processes*, 21(6):841–845, March 2007. ISSN 08856087. doi: 10.1002/hyp.6623.

A. Montanari and D. Koutsoyiannis. A blueprint for process-based modeling of uncertain hydrological systems. *Water Resources Research*, 48(9):n/a–n/a, September 2012. ISSN 00431397. doi: 10.1029/2011WR011412.

E. Montosi. *Variabilità spaziale dei modelli afflussi-deflussi*. Dottorato di ricerca in ingegneria strutturale ed idraulica, 24. ciclo., Alma Mater Studiorum Università di Bologna, 2012.

C. Moore and J. Doherty. Role of the calibration process in reducing model predictive error. *Water Resources Research*, 41(5):n/a–n/a, May 2005. ISSN 00431397. doi: 10.1029/2004WR003501.

R. J. Moore. The probability-distributed principle and runoff production at point and basin scales. *Hydrological Sciences Journal*, 30(2):273–297, June 1985. ISSN 0262-6667. doi: 10.1080/02626668509490989.

R. Moussa and N. Chahinian. Comparison of different multi-objective calibration criteria using a conceptual rainfall-runoff model of flood events. *Hydrology and Earth System Sciences*, pages 519–535, 2009.

M. K. Muleta and J. McMillan. Bayesian Approach for Uncertainty Analysis of an Urban Storm Water Model and Its Application to a Heavily Urbanized Watershed. *Journal of Hydrologic ...*, (1992), 2012. doi: 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000705.

K. M. Mullen, D. Ardia, D. L. Gil, and J. Cline. DEoptim : An R Package for Global Optimization by Differential Evolution. *Journal Of Statistical Software*, 40(6):1–17, 2011. ISSN 1548-7660.

A. H. Murphy. Skill Scores Based on the Mean Square Error and Their Relationships to the Correlation Coefficient, 1988. ISSN 0027-0644.

P. Mykland, L. Tierney, and B. Yu. Regeneration in Markov Chain Samplers. *Journal of the American Statistical Association*, 90(429):233–241, 1995. ISSN 0162-1459. doi: 10.1080/01621459.1995.10476507.

J. E. Nash and J. V. Sutcliffe. River flow forecasting through conceptual models part I — A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10(3):282–290, April 1970. ISSN 00221694. doi: 10.1016/0022-1694(70)90255-6.

G. Parmigiani and L. Inoue. *Wiley series in probability and statistics, decision theory: principles and approaches*. New York: Wiley, 2009.

F. Pianosi and L. Raso. Dynamic modeling of predictive uncertainty by regression on absolute errors. *Water Resources Research*, 48(3), 2012. ISSN 0043-1397. doi: 10.1029/2011WR010603.

K. V. Price, R. M. Storn, and J. A. Lampinen. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, volume 28 of *Natural Computing Series*. Springer, 2005. ISBN 3540209506.

R. Pushpalatha, C. Perrin, N. Le Moine, and V. Andréassian. A review of efficiency criteria suitable for evaluating low-flow simulations. *Journal of Hydrology*, 420-421: 171–182, 2012.

R R Development Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing, 2011. ISSN 16000706.

S. Rebecchi. *Identificazione Dei Parametri Meccanici Del Ponte Metallico Ferroviario A Pontelagoscuro Attraverso Un Algoritmo Di Ottimizzazione Di Tipo Evolutivo*. PhD thesis, Tesi di Laurea Magistrale - Alma Mater Studiorum - Universita Di Bologna, 2010, 2010.

S. Sorooshian and J. A. Dracup. Stochastic parameter estimation procedures for hydrologie rainfall-runoff models: Correlated and heteroscedastic error cases. *Water Resources Research*, 16(2), 1980.

S. Sorooshian and V. K. Gupta. Automatic calibration of conceptual rainfall-runoff models: The question of parameter observability and uniqueness. *Water Resources Research*, 19(1):260–268, 1983.

J. R. Stedinger, R. M. Vogel, S. U. Lee, and R. Batchelder. Appraisal of the generalized likelihood uncertainty estimation (GLUE) method. *Water Resources Research*, 44 (12):n/a–n/a, December 2008. ISSN 00431397. doi: 10.1029/2008WR006822.

R. Storn and K. Price. Differential evolution–a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of global optimization*, pages 341–359, 1997.

N. R. Sumner, P. M. Fleming, and B. C. Bates. Calibration of a modified SFB model for twenty-five Australian catchments using simulated annealing. *Journal of Hydrology*, 197(1-4):166–188, 1997.

C. W. Thornthwaite. An approach toward a rational classification of climate. *Geographical review*, 38(1):55–94, 1948.

D. T. Van der Molen and J. Pintér. Environmental model calibration under different specifications: an application to the model SED, 1993. ISSN 03043800.

J. Vaze, F. H. S. Chiew, J. M. Perraud, N. Viney, D. Post, J. Teng, B. Wang, J. Lerat, and M Goswami. Rainfall-runoff modelling across southeast Australia: Datasets, models and results. *Australian Journal of Water Resources*, 14(2):101–116, 2010.

N. R. Viney, J. M. Perraud, and J. Vaze. The usefulness of bias constraints in model calibration for regionalisation to ungauged catchments. *18th World IMACS ...*, (July):3421–3427, 2009.

J. Von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, volume 2. 1944. ISBN 0691003629. doi: 10.1177/1468795X06065810.

J. A. Vrugt, W. Bouten, H. V. Gupta, and J. W. Hopmans. Toward improved identifiability of soil hydraulic parameters: On the selection of a suitable parametric model. *Vadose Zone Journal*, 2(1):98–113, 2003. ISSN 15391663.

J. A. Vrugt, C. J. F. Braak, H. V. Gupta, and B. A. Robinson. Equifinality of formal (DREAM) and informal (GLUE) Bayesian approaches in hydrologic modeling? *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 23(7):1011–1026, October 2008a. ISSN 1436-3240. doi: 10.1007/s00477-008-0274-y.

J. A. Vrugt, C. G. H. Diks, and M. P. Clark. Ensemble Bayesian model averaging using Markov Chain Monte Carlo sampling. *Environmental Fluid Mechanics*, 8(5-6): 579–595, October 2008b. ISSN 1567-7419. doi: 10.1007/s10652-008-9106-3.

J. A. Vrugt, C. J. F. Ter Braak, C. G. H. Diks, B. A. Robinson, J. M. Hyman, and D. Higdon. Accelerating Markov chain Monte Carlo simulation by differential evolution with self-adaptive randomized subspace sampling. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(3):273–290, 2009. ISSN 15651339.

T. Wagener, H.S. Wheater, and H. V. Gupta. *Rainfall-runoff modelling in gauged and ungauged catchments*. Imperial College Press, London, UK, 2004. ISBN 978-1-86094-466-6.

Q. J. Wang. The Genetic Algorithm and Its Application to Calibrating Conceptual Rainfall-Runoff Models, 1991. ISSN 0043-1397.

S. V. Weijs, G. Schoups, and N. van de Giesen. Why hydrological predictions should be evaluated using information theory. *Hydrology and Earth System Sciences*, 14(12): 2545–2558, December 2010. ISSN 1607-7938. doi: 10.5194/hess-14-2545-2010.

P. O. Yapo, H. V. Gupta, and S. Sorooshian. Automatic calibration of conceptual rainfall-runoff models: sensitivity to calibration data. *Journal of Hydrology*, 181: 23–48, 1996.

J. Zhou, S. Ouyang, X. Wang, L. Ye, and H. Wang. Multi-Objective Parameter Calibration and Multi-Attribute Decision-Making: An Application to Conceptual Hydrological Model Calibration. *Water Resources Research*, 28(3):767–783, January 2014. ISSN 0920-4741. doi: 10.1007/s11269-014-0514-5.