

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dottorato di ricerca in Fisica

ciclo XXVI

settore concorsuale di afferenza: 02/A2

settore scientifico disciplinare FIS/02

---

Implicazioni teoriche e sperimentali  
della sincronizzazione assoluta nella  
teoria della relatività speciale

---

presentata da: Massimo Brighi

relatore: prof. Roberto Soldati

coordinatore: prof. Fabio Ortolani

---

esame finale 2014

# Indice

<b>Introduzione .....</b>	<b>4</b>
<b>1– Convenzionalità della simultaneità.....</b>	<b>8</b>
1.1– Sincronizzazione degli orologi e misura delle velocità.....	8
1.2– Sincronizzazione standard .....	9
1.3– Sincronizzazioni alternative .....	10
1.4 – Teorema di Malament .....	11
1.5 – Le trasformazioni parametriche tra sistemi di riferimento inerziali .....	12
1.6 – Conseguenze delle sincronizzazioni non standard.....	15
1.7 – Sincronizzazione per trasporto lento degli orologi.....	16
1.8– Le sincronizzazioni inerziali .....	18
1.9 – Sincronizzazione assoluta .....	19
<b>2– Trasformazioni Inerziali.....</b>	<b>21</b>
2.1 – Trasformazioni Inerziali e loro proprietà .....	21
2.1.1 – Simultaneità assoluta.....	22
2.1.2 – Contrazione delle lunghezze .....	22
2.1.3 – Dilatazione del tempo .....	23
2.1.4 – La velocità della luce .....	23
2.2 – La natura degli effetti relativistici.....	24
2.2.1 – Principio di causalità .....	25
2.2.2 – Effetto di desincronizzazione in moti rettilinei e circolari .....	26
2.3 – Procedura operativa per la sincronizzazione assoluta .....	28
2.3.1 – Sincronizzazione in riferimenti accelerati .....	29
2.3.2 – Scelta del sistema di riferimento assoluto .....	30
2.4 – Trasformazioni inerziali tra due riferimenti in moto assoluto .....	31
2.4.1 – Composizione delle velocità nelle trasformazioni inerziali .....	32
2.5 – Sviluppi del formalismo .....	33
2.5.1 – Trasformazioni temporali.....	35
2.5.2 – Decomposizione delle trasformazioni di Lorentz .....	36
2.6 – Generalizzazione a sistemi di riferimento non collineari.....	37
2.7 – Trasformazioni inerziali tra riferimenti inerziali comunque orientati.....	39
2.7.1 – Composizione delle velocità .....	42
2.7.2 – Precessione di Thomas .....	43
2.8 – Proprietà algebriche delle trasformazioni inerziali.....	44
2.8.1 – Gruppo delle trasformazioni inerziali estese .....	44
2.8.2 – Significato fisico del gruppo di trasformazioni inerziali estese .....	46
<b>3 – Moto rigido di un corpo esteso.....</b>	<b>47</b>
3.1 – moto rigido di Born.....	48
3.2 – Moto uniformemente accelerato di un corpo esteso .....	49
3.2.1 – Descrizione del moto rigido secondo la relatività standard.....	49
3.2.2 – Descrizione del moto rigido secondo la relatività con le TI.....	52

3.3 – Moto conforme .....	53
<b>4 – Elettrodinamica con le Trasformazioni inerziali.....</b>	<b>56</b>
4.1 – Definizione dei campi.....	56
4.2 – Le trasformazioni dei campi.....	59
4.2.1 – Generalità delle trasformazioni .....	62
4.2.2 – Unicità delle trasformazioni .....	62
4.3 – Elettrodinamica inerziale.....	63
4.3.1 – Forza sulle cariche elettriche.....	63
4.3.2 – Equazioni dei campi.....	63
4.3.3 – Onde anisotrope .....	63
4.3.4 – Potenziale elettromagnetico .....	64
4.4 – Un apparente paradosso.....	65
4.4.1 – Soluzione del paradosso.....	65
4.4.2 – Effetto di redistribuzione della carica nei conduttori percorsi da corrente .....	66
4.4.3 – Effetti causati dalla redistribuzione delle cariche .....	67
4.4.4 – Argomento del circuito interrotto.....	69
4.5 – Un possibile esperimento .....	72
<b>6 – Conclusioni .....</b>	<b>75</b>
<b>Appendice A .....</b>	<b>77</b>
<i>Deduzione delle equazioni dei campi elettrico e magnetico secondo la relatività con sincronizzazione assoluta.....</i>	77
<b>Appendice B.....</b>	<b>84</b>
<i>Forza esercitata dai campi sulla carica elettrica .....</i>	84
<b>Appendice C .....</b>	<b>89</b>
<i>Analisi secondo la TRS standard della desincronizzazione causata dal moto.....</i>	89
<b>Appendice D .....</b>	<b>92</b>
<i>Implicazioni delle trasformazioni parametriche.....</i>	92
<b>Bibliografia.....</b>	<b>95</b>

# Introduzione

La teoria della relatività speciale (TRS) ha superato indenne più di un secolo di prove e tentativi di falsificazione e nel contempo ha generato o riformato molteplici ambiti della fisica. Indubbiamente oltre alla solidità sperimentale mostra eleganza e perfezione formale. In base a questo non si può sensatamente ritenere la TRS sbagliata, anche se non è possibile escludere che misure molto affinate possano in situazioni particolari rivelarne in futuro delle limitazioni.

Per il suo carattere peculiare, di teoria del tempo e dello spazio, la TRS interviene praticamente ogni altra teoria fisica perché spazio e tempo sono grandezze che compaiono pressoché in ogni descrizione dei sistemi fisici. Il ruolo che ha perciò assunto, una volta accreditata, è stato quello di "teoria filtro" con la funzione di respingere le teorie non in accordo con essa. Una sua eventuale non conformità ai fatti sperimentali può riguardare al più solo fenomeni fisici molto sottili e alquanto reconditi o al di là dei limiti sperimentali attuali.

Accanto alle critiche, regolarmente rivelatesi infondate, che sono state indirizzate alla TRS al fine di evidenziarne contraddizioni logiche interne o con i dati sperimentali, esiste da diversi anni una critica che, si basandosi sugli aspetti convenzionali presenti nella formulazione standard, considera la possibilità di teorie alternative. In particolare la definizione di sincronicità di eventi distanti nello spazio attraverso la procedura di scambio di segnali luminosi la cui velocità si assume essere costante e isotropa, introdotta prima da Poincaré [1] e poi da Einstein [2], è stata riconosciuta convenzionale dagli stessi autori, quindi non logicamente o sperimentalmente fondata ma dettata solamente da criteri di semplicità e simmetria. Il successo della teoria ha fatto spesso dimenticare la natura convenzionale dell'assunto o addirittura farlo ritenere inevitabile.

Come mostrò Reichenbach nel 1958 [3], se un assunto è convenzionale può essere modificato operando scelte diverse senza intaccare il contenuto empirico della teoria. Si ottengono in questo modo teorie che sono equivalenti alla TRS nell'ambito di applicazione comune ma generalmente più complesse algebricamente. Inoltre spesso compaiono aspetti che seppure non contraddittori risultano decisamente sgraditi, ad esempio in alcuni casi il principio d'inerzia risulta violato. Per questi motivi teorie alternative sono state generalmente considerate semplici curiosità di interesse principalmente epistemologico e forse didattico, ma di nessuna utilità pratica [4].

Tra le possibili definizioni di sincronicità esistono però alcune interessanti eccezioni. In particolare la teoria che è presentata in questo lavoro si basa sulla sincronizzazione assoluta. Si tratta di una sincronizzazione che non nasce dalla scelta arbitraria di una fra le tante possibili, ma si determina attraverso una procedura basata sul principio di causalità che si può riassumere nell'argomento secondo cui "cause uguali devono produrre effetti uguali", almeno nell'ambito della fisica classica.

La caratteristica peculiare che, a mio avviso, rende interessante questo criterio di simultaneità è che permette con molta naturalezza di estendere il campo di

applicazione della relatività speciale a situazioni in cui la teoria standard non è applicabile cioè ai sistemi di riferimento accelerati. In particolare ai sistemi di riferimento in rotazione. Inoltre non presenta quelle sgradite conseguenze che mostra la maggior parte delle sincronizzazioni alternative (come la già citata violazione della legge d'inerzia).

Anche la descrizione di sistemi fisici accelerati da riferimenti inerziali, che dà spesso adito a interpretazioni discordanti nell'ambito della TRS [5, 6], appare ben definita se si utilizza la sincronizzazione assoluta.

Infine, l'elettrodinamica fondata sulla sincronizzazione assoluta applicata a sistemi rotanti permette di dedurre un effetto non contemplato dalla relatività standard. Tale effetto appare sperimentalmente rilevabile in un esperimento che viene descritto.

Il materiale di questa tesi è stato suddiviso in quattro capitoli il cui contenuto è qui di seguito descritto più in dettaglio:

## Capitolo 1 : Convenzionalità della simultaneità

Si descrive il metodo standard di sincronizzazione attraverso l'invio di segnali elettromagnetici, mostrandone l'aspetto convenzionale. Le sincronizzazioni *non standard* sono analizzate indicando alcune conseguenze da esse derivanti; in particolare si introducono le *trasformazioni parametriche* che lasciando indeterminato un parametro legato alla sincronizzazione permettono di discriminare gli aspetti convenzionali della TRS dagli aspetti non convenzionali. Si analizzano alcuni argomenti che si oppongono alla "tesi convenzionalista": il teorema di Malament e la sincronizzazione per trasporto lento degli orologi.

Si introduce una classe particolare di sincronizzazioni (dette *inerziali*) in cui lo spazio risulta omogeneo e perciò il principio d'inerzia è rispettato. Una particolare sincronizzazione inerziale, detta *assoluta*, mostra caratteristiche peculiari.

## Capitolo 2 : Le trasformazioni inerziali

Le trasformazioni che sostituiscono le classiche trasformazioni di Lorentz, se si opera la scelta della sincronizzazione assoluta, sono dette *trasformazioni inerziali* (TI). Alcune conseguenze derivanti da queste trasformazioni vengono illustrate: il recupero della simultaneità assoluta, la definizione di un sistema riferimento assoluto e l'anisotropia dello spazio rispetto alla velocità unidirezionale della luce in riferimenti inerziali diversi al riferimento assoluto.

Un'analisi critica, sulla base del *principio di causalità*, viene fatta sui fenomeni classici relativistici di contrazione delle lunghezze e dilatazione del tempo. Viene mostrato, con un esperimento mentale, come la natura di tali fenomeni abbia un carattere ambiguo nell'interpretazione standard che scompare del tutto nella teoria con sincronizzazione assoluta. Si unificano così le descrizioni sia in sistemi di riferimento inerziali sia in sistemi linearmente accelerati o in rotazione.

Una generalizzazione si ottiene con trasformazioni inerziali tra due riferimenti che hanno ciascuno velocità diversa da zero rispetto al riferimento assoluto; prima per velocità collineari e poi per velocità comunque orientate. Si mostra che è previsto il fenomeno della precessione di Thomas.

Le trasformazioni inerziali sono state già considerate [7] nell'ambito della relatività generale utilizzando il formalismo tensoriale, la trattazione vettoriale qui presentata, che tiene separati spazio e tempo, permette di mostrare alcune relazioni formali (a mio avviso) molto interessanti ed eleganti: ad esempio risulta che l'insieme delle trasformazioni inerziali può avere la struttura di gruppo se viene ampliato aggiungendo alcune "trasformazioni limite" che fisicamente rappresentano trasformazioni verso sistemi di riferimento inerziali in moto con velocità superluminali.

### Capitolo 3 : Moto rigido di un corpo esteso.

In questo capitolo è analizzato il concetto relativistico corpo rigido e moto rigido. Considerando il moto uniformemente accelerato di un corpo esteso, viene mostrato che il moto rigido secondo Born (in cui il corpo è istantaneamente in quiete in un sistema di riferimento inerziale comovente) se osservato da sistemi comoventi inerziali sincronizzati assolutamente, appare, in generale, variare le sue dimensioni. Se si adotta la sincronizzazione assoluta, l'unica possibilità di moto accelerato per un corpo esteso a cui si richiede la conservazione delle distanze tra le varie parti, è quello in cui ogni punto materiale del corpo si muove con identica accelerazione e velocità. Inoltre l'invarianza della distanza tra le parti del corpo in moto è una proprietà rispettata in ogni riferimento inerziale.

### Capitolo 4 : Elettrodinamica con le Trasformazioni Inerziali

Un'analisi preliminare mette in luce alcuni aspetti dell'elettromagnetismo classico che risultano convenzionali. Ciò accade perché i campi sono di per sé inaccessibili all'osservazione; l'unico effetto misurabile è l'azione di questi sulle cariche. Tale azione è normalmente utilizzata per definire i campi stessi. D'altra parte i campi sono generati dalle cariche secondo leggi la cui forma dipende anche della definizione dei campi stessi. È perciò possibile ridefinire i campi modificando contemporaneamente le leggi che li legano alle cariche e correnti da cui sono generati.

Risulta che con la sincronizzazione assoluta le usuali definizioni di campo elettrico e campo magnetico non appaiono adeguate perciò il campo elettrico viene definito in relazione alle cariche che lo generano (legge di Gauss e legge di Ampère).

Le leggi di trasformazione dei campi, così definiti, sono ottenute operativamente esaminando come appaiono particolari disposizioni di cariche e correnti in diversi sistemi di riferimento inerziali.

In base alla trasformazione dei campi è possibile ricavare l'equivalente della forza di Lorentz esercitata dai campi sulle cariche e le equazioni dei campi che sostituiscono le equazioni di Maxwell.

È mostrato che nel vuoto esistono soluzioni dei campi che si propagano sotto forma di onde anisotrope che hanno velocità in accordo con la velocità della luce prevista dalla sincronizzazione assoluta.

L'analisi di un apparente paradosso collegato alla trasformazione della densità di corrente indica l'esistenza di un effetto non previsto nella TRS standard. Un possibile esperimento viene proposto per rilevare l'effetto.

# 1– Convenzionalità della simultaneità

## 1.1– Sincronizzazione degli orologi e misura delle velocità

Uno degli aspetti della teoria della relatività che inizialmente destò maggiore sconcerto (e che rese la teoria così popolare tra i filosofi) è la relatività della simultaneità: eventi sufficientemente separati nello spazio possono risultare simultanei o in qualunque successione temporale in relazione allo stato di moto del sistema di riferimento inerziale (SRI) da cui sono osservati. Questo nuovo aspetto del tempo sconvolgeva decisamente l'idea ingenua di un presente simultaneo per tutti e in tutto l'universo: un'idea originata probabilmente dalla apparente istantaneità di propagazione dei segnali luminosi nella limitata esperienza della dimensione umana. La nozione di tempo assoluto era talmente radicata da non essere mai stata messa in discussione da nessun filosofo pre-relativista.

Ci si è posti il problema di stabilire se due eventi che accadono in luoghi distanti siano simultanei o meno, soltanto dopo aver riflettuto sulle conseguenze dell'esistenza di una velocità limite finita nella propagazione dei segnali e quindi dell'informazione. Infatti, si può dire con certezza (o per definizione) che un evento precede un altro se questi sono in *connessione causale*, ossia se il primo è causa o comunque può influenzare il secondo, ma se i due eventi accadono a tale distanza che nulla, cioè nessuna informazione, può passare dall'uno all'altro, allora, se si desidera poter ancora attribuire un *prima* e un *dopo* alla loro successione, è necessario associare a ciascun evento una posizione su una condivisa coordinata temporale secondo una procedura o regola definita.

Supponiamo allora due eventi che accadono in due luoghi distanti (diciamo in A e in B); ci sono essenzialmente due possibilità per definire il loro ordine temporale:

1. Due osservatori muniti di orologi identici si trovano uno in A e uno in B e registrano localmente con il loro orologio il tempo di accadimento di ciascun evento che poi si comunicano,  
oppure
2. Un unico osservatore con orologio osserva i due eventi dal punto O in cui si trova, a distanza nota da A e da B. Misurando i tempi d'arrivo dei segnali che partono da A e B nel preciso istante in cui accadono gli eventi, può calcolare l'istante in cui sono partiti.

Con il primo metodo è ovvio che i due orologi devono essere sincronizzati. Nel secondo è altrettanto ovvio che l'osservatore deve conoscere la velocità dei segnali sul percorso AO e BO<sup>1</sup>. È necessario allora definire una procedura che permetta di

---

<sup>1</sup> Per la precisione sarebbe sufficiente, nel caso l'osservatore si ponga equidistante da A e B, sapere che i segnali hanno la stessa velocità pur viaggiando necessariamente in direzioni diverse. In ogni caso vedremo che si incontrano le stesse difficoltà.



sincronizzare orologi distanti o una procedura di misura della velocità di un determinato segnale su percorsi tra due punti distanti.

In realtà è facile vedere che si tratta di due aspetti dello stesso problema in quanto se si dispone di orologi sincronizzati nei punti A e B distanti  $L$  si può misurare il tempo di volo  $T$  del segnale e quindi determinarne la velocità  $v_{A \rightarrow B} = L/T$ .

Viceversa conoscendo la velocità  $v_{A \rightarrow B}$  si può sincronizzare l'orologio in B regolandolo sul tempo  $T_B = T_A + L/v_{A \rightarrow B}$  all'arrivo in B del segnale partito da A al tempo  $T_A$  (dell'orologio in A).

Parleremo nel seguito, pertanto, indifferentemente di procedura di sincronizzazione o procedura per la misura di velocità su percorsi aperti<sup>2</sup>

## 1.2– Sincronizzazione standard

Secondo la tesi convenzionalista vi è ampia libertà nella scelta di queste procedure da cui conseguono sincronizzazioni diverse ma ugualmente praticabili [1, 3, 8, 9]. La simultaneità degli eventi, dipendendo da tale scelta, è quindi essenzialmente convenzionale.

Questa tesi si ritrova già a in Poincaré nel 1898 [1], poi Einstein, nella sua analisi del concetto di tempo, presentando la relatività speciale nel suo fondamentale articolo del 1905, prima ancora di enunciare i due principi su cui si fonderà la teoria, si preoccupa di dare una definizione consistente di simultaneità tra eventi distanti nello spazio. Considera due orologi che sono fermi in due punti distanti A e B dello stesso SRI, e osserva: [2]

«Non abbiamo (ancora) definito un “tempo” comune per A e B, perché quest’ultimo non può affatto essere definito a meno che non stabiliamo *per definizione* che il “tempo” richiesto dalla luce per viaggiare da A a B eguagli il “tempo” richiesto per viaggiare da B ad A»

Accettata questa convenzione risulta facile poi sincronizzare l’orologio posto in B con quello in A secondo la nota procedura:

Un segnale luminoso parte da A al tempo  $t_A$ , viene riflesso in B e ritorna in A all’istante  $t'_A$  (i tempi sono misurati dall’orologio in A). Al momento dell’arrivo del segnale in B, l’orologio lì è regolato al tempo

$$t_B = t_A + \frac{1}{2}(t'_A - t_A) \quad (1.1)$$

ovvero l’orologio in B è regolato sul tempo di partenza del segnale da A più metà della durata del viaggio andata e ritorno della luce da A a B (Fig.1).

---

<sup>2</sup> Con *percorso aperto* si intende un percorso in cui il punto di partenza ed il punto di arrivo non coincidono. Al contrario, è evidente che in un percorso è *chiuso* (partenza coincidente con l'arrivo) è sufficiente un unico orologio per misurare i tempi di partenza e di arrivo del segnale, allora il problema della sincronizzazione non si pone.

Questa procedura per la sincronizzazione degli orologi a distanza sarà nel seguito indicata come *sincronizzazione standard* e la simultaneità che ne risulta come *simultaneità standard*.

Questa convenzione, adottata in un particolare SRI  $S_0$ , assume implicitamente che la velocità della luce in quel riferimento è costante e indipendente dalla direzione, cioè che, rispetto alla propagazione della luce, lo spazio è omogeneo e isotropo. Il principio di relatività, negando l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, impone subito di estendere questa proprietà a tutti i SRI.

Sulla base della sincronizzazione standard si costruisce la relatività speciale.

Il successo della teoria ha indotto molti a ritenere che tale sincronizzazione non fosse affatto convenzionale ma l'unica scelta possibile. Cioè una sorta di giustificazione a posteriori che però dal punto di vista logico è evidentemente errata<sup>3</sup>.

### 1.3– Sincronizzazioni alternative

La tesi convenzionalista fu ripresa da Reichenbach [3] e Grünbaum [10] sostenendo che nella (1.1) il coefficiente  $\frac{1}{2}$ , che moltiplica la durata del viaggio di andata e ritorno della luce, può essere sostituito da qualunque valore  $\varepsilon$  compreso tra 0 e 1, cioè, l'orologio in B sincronizzato sul tempo  $t_B$  dato da (Fig.2)

$$t_B = t_A + \varepsilon(t'_A - t_A)$$

La limitazione  $0 < \varepsilon < 1$ , è imposta per evitare inversioni temporali, ossia che un segnale inviato possa arrivare a destinazione prima o contemporaneamente all'istante di emissione. Tuttavia, sebbene segnali che viaggiano indietro nel tempo possano apparire bizzarri, nessun paradosso causale può manifestarsi se  $|\varepsilon| > 1$  dal momento che in ogni caso la velocità limite su percorsi chiusi è sempre  $c$ , il segnale non può comunque mai tornare al punto di emissione ad un tempo precedente a quello in cui è partito.<sup>4</sup>

Il significato del coefficiente  $\varepsilon$  è legato alla velocità della luce unidirezionale (*one way*) nel percorso di andata ( $c_+$ ) e di ritorno ( $c_-$ ). È facile verificare che

$$c_+ = \frac{c}{2\varepsilon}, \quad c_- = \frac{c}{2(1-\varepsilon)}$$

dove con  $c$  si indica come al solito la velocità della luce nel vuoto in un percorso chiuso (*round trip*) che innumerevoli conferme sperimentali hanno mostrato essere costante in ogni SRI.

<sup>3</sup> L'errore logico è noto come "affermazione del conseguente":  $p$  implica  $q$  e  $q$  è vero, quindi  $p$

<sup>4</sup> La situazione non è più paradossale del fatto che una telefonata fatta da Roma alle 12:00 *arrivi* a New York alle 6:00 ora locale. Chiaramente sorgerebbero serie difficoltà soltanto se la risposta potesse *tornare indietro* prima delle 12:00 ora di Roma.

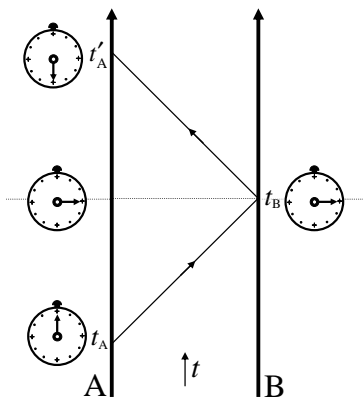


Fig.1 – Sincronizzazione standard ( $\varepsilon = 1/2$ )

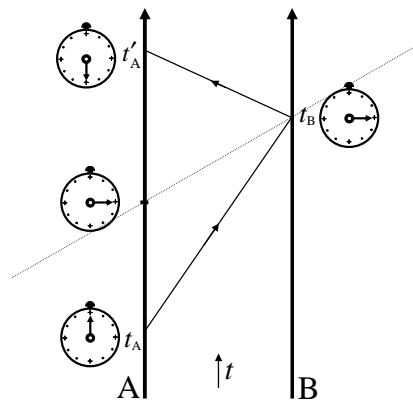


Fig.2 – Sincronizzazione non standard ( $\varepsilon > 1/2$ )

Come già accennato, appare evidente che se fosse possibile misurare la velocità della luce, o di qualunque altra cosa<sup>5</sup>, su percorsi unidirezionali questa determinerebbe il valore di  $\varepsilon$  e perciò la sincronizzazione. Viceversa, data una procedura di sincronizzazione sarebbe possibile, con orologi sincronizzati, misurare le velocità unidirezionali.

#### 1.4 – Teorema di Malament

Sono stati proposti numerosi metodi per determinare la velocità della luce unidirezionale anche in tempi recenti [11,12], ma tutti, ad una analisi più approfondita si sono rivelati inefficaci [13, 14].

Esistono anche argomentazioni teoriche volte a “dimostrare” che la scelta  $\varepsilon = 1/2$ , che determina la sincronizzazione standard della relatività speciale, è l’unica coerente. Spesso citato è il teorema di Malament [15]. Ciò che questo teorema dimostra è che la simultaneità standard tra due eventi in un SRI è l’unica relazione di equivalenza non vuota e non universale<sup>6</sup> che soddisfa alcune richieste specifiche. Queste richieste si riferiscono ai criteri di *connettibilità causale simmetrica* ovvero si richiede che la relazione di simultaneità tra eventi sia invariante per *automorfismi causali*: con ciò si intendono particolari trasformazioni dello spazio di Minkowski che mappano la linea d’universo dell’orologio usato per sincronizzare su se stessa. Queste trasformazioni includono

- a) traslazioni temporali
- b) rotazioni spaziali
- c) dilatazioni spazio-temporali
- d) riflessioni

<sup>5</sup> Conoscendo la velocità  $v$  di un qualunque segnale su un tratto AB di lunghezza  $L$ , si può fare partire il segnale al tempo  $t$  di A e regolare l’orologio in B, quando il segnale arriva, al tempo  $t + L/v$ .

<sup>6</sup> Una relazione di equivalenza è *vuota* se ogni elemento è in relazione soltanto con se stesso, è *universale* se ogni elemento è in relazione con tutti.

Il teorema è corretto, ma la questione è: perché la simultaneità tra eventi dovrebbe essere invariante per queste trasformazioni? Si può ragionevolmente accettare l'invarianza per trasformazioni a) e b) che sono connesse rispettivamente con la omogeneità del tempo e l'isotropia dello spazio e forse anche la trasformazioni c) che rappresenta la richiesta di invarianza per cambiamento di scala. Ma la condizione d) ha un carattere non fisico: equivale, dal punto di vista geometrico, alla richiesta che nello spazio di Minkowski l'asse temporale sia ortogonale allo spazio. Dal punto di vista fisico non si capisce perché una adeguata relazione di simultaneità dovrebbe soddisfare questo vincolo geometrico. Come si vedrà la simultaneità assoluta, che verrà in seguito descritta, infatti non soddisfa tale vincolo.

### **1.5 – Le trasformazioni parametriche tra sistemi di riferimento inerziali**

È possibile derivare delle trasformazioni generali tra SRI senza presupporre alcun criterio di sincronizzazione [9, 16] semplicemente facendo poche assunzioni di carattere generale o derivate da osservazioni sperimentali e cioè:

- a) Esiste un sistema di riferimento inerziale  $S_0$  dal quale lo spazio è osservato isotropo e omogeneo ed in particolare la velocità della luce è  $c$  in tutte le direzioni
- b) La velocità della luce su percorsi chiusi è  $c$  in qualunque SRI [20]
- c) Gli orologi in moto con velocità  $\mathbf{u}$  relativamente a  $S_0$  rallentano secondo l'usuale fattore relativistico  $\gamma \equiv (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ .

È importante osservare che, come dimostrato da Selleri [16], l'assunto c) può essere equivalentemente sostituito dal seguente:

- c') I corpi in moto con velocità  $\mathbf{u}$  relativamente a  $S_0$  si contraggono secondo l'usuale fattore relativistico  $\gamma^{-1} \equiv \sqrt{1 - u^2/c^2}$

Considerando poi il caso particolare in cui i SRI  $S_0$  e  $S$  siano in configurazione tipica<sup>7</sup>, Mansouri e Sexl [9] dimostrano che, sotto queste ipotesi, le trasformazioni assumono il seguente aspetto:

---

<sup>7</sup> La configurazione tipica è quella in cui la velocità di  $S$  relativamente a  $S_0$  è nella direzione di  $+x$  e gli assi dei due sistemi coincidono per  $t = t_0 = 0$ . È evidente che con una rotazione degli assi di  $S$  o di  $S_0$  ci si può ricondurre alla configurazione tipica.

$$\begin{cases} t = Rt_0 + e(x_0 - ut_0) \\ x = \frac{x_0 - ut_0}{R} \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

dove  $R = \sqrt{1 - u^2/c^2}$  e  $u$  è la velocità di S relativamente a  $S_0$ . Il parametro  $e$  è collegato al coefficiente  $\varepsilon$  dalla relazione

$$e = \frac{c(2\varepsilon - 1) - u}{c^2 R} \quad (1.3)$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} t_0 = \frac{t}{R} - e x \\ x_0 = (R - eu)x + \frac{u}{R}t \\ y_0 = y \\ z_0 = z \end{cases} \quad (1.4)$$

Le trasformazioni (1.2) sono dette *trasformazioni parametriche* contenendo il parametro  $e$  che può essere determinato soltanto fissando la sincronizzazione.

Con  $\varepsilon = 1/2$  si ha  $e = \frac{-u}{c^2 R}$  e le (1.2) e (1.4) si riducono alle classiche trasformazioni di Lorentz.

È interessante derivare alcuni risultati che si ottengono dalle trasformazioni parametriche. Ciò permette di giudicare "a vista" quali effetti sono assoluti e quali dipendono dalla convenzione di sincronizzazione semplicemente osservando se il parametro  $e$  (oppure  $\varepsilon$ ) compare o meno nella formula che quantifica l'effetto.

Riporto di seguito soltanto i risultati, le dimostrazioni sono riportate nell'appendice D. Questi risultati saranno utili in seguito.

- La velocità unidirezionale della luce in S dipende ovviamente dalla sincronizzazione. Risulta:

$$c(\theta) = \frac{c}{1 + (2\varepsilon - 1)\cos\theta} = \frac{c}{1 + \left(\frac{u}{c} + e c R\right)\cos\theta} \quad (1.5)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la direzione di propagazione della luce e la velocità  $\mathbf{u}$  di S relativamente a  $S_0$ .

- In generale se un SRI  $S$  ha velocità assoluta (ovvero rispetto al riferimento assoluto  $S_0$ )  $\mathbf{u}$ , la velocità  $\mathbf{u}'$  di  $S_0$  rispetto ad  $S$  non è  $-\mathbf{u}$ . Vale infatti, supponendo  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$

$$u' = \frac{-u}{R(R - eu)} = \frac{-u}{1 - (2\varepsilon - 1)u^2/c^2} \quad (1.6)$$

con  $\mathbf{u}' = (u', 0, 0)$ .

- Consideriamo una barra lunghezza propria  $L_{pr}$  allineata con gli assi  $x$  di  $S_0$  e  $S$ . Se la barra è ferma in  $S$  la contrazione nel senso della sua lunghezza misurata dal sistema  $S_0$  è

$$L_{S_0} = RL_{pr} \quad (1.7)$$

mentre se la barra è ferma in  $S_0$  la contrazione misurata dal sistema  $S$  è

$$L_S = \frac{L_{pr}}{R - eu} = \frac{RL_{pr}}{1 - (2\varepsilon - 1)u^2/c^2} \quad (1.8)$$

- L'intervallo di tempo proprio  $T_{pr}$  scandito da un orologio in moto con velocità assoluta  $u$ , misurato in  $S_0$  è dilatato secondo:

$$T_{S_0} = \frac{T_{pr}}{R} \quad (1.9)$$

mentre se lo stesso orologio è fermo in  $S_0$  l'intervallo misurato in  $S$  in moto con velocità assoluta  $u$  è

$$T_S = (R - eu)T_{pr} = \left[ 1 - (2\varepsilon - 1)\frac{u^2}{c^2} \right] \frac{T_{pr}}{R} \quad (1.10)$$

Da questi risultati è evidente che la scelta della relatività standard (con  $\varepsilon = 1/2$  o  $e = \frac{-u}{c^2 R}$ ) è l'unica che rende simmetriche contrazioni delle lunghezze e dilatazione dei tempi rispetto ai SRI  $S_0$  e  $S$ . Ciò significa  $S$  indistinguibile da  $S_0$ , e poiché  $S$  è un SRI generico ne consegue che tutti i riferimenti inerziali sono sullo stesso piano. Questo non è altro che il principio di relatività che, per tanto, è rispettato soltanto se la sincronizzazione è quella standard.

Vale la pena osservare che soltanto le contrazioni delle lunghezze e dilatazione dei tempi che si misurano dal riferimento privilegiato  $S_0$  sono indipendenti dalla sincronizzazione e perciò non hanno nulla di convenzionale.

## 1.6 – Conseguenze delle sincronizzazioni non standard

Da un punto di vista geometrico, la scelta di una sincronizzazione in un SRI definisce delle ipersuperfici nello spazio di Minkowski costituite da insiemi di punti-eventi che devono essere considerati simultanei. La regione che resta al di fuori del cono di luce<sup>8</sup> che ha vertice in un determinato evento  $\mathcal{E}$  non può essere in connessione causale con quel evento, per cui una qualunque ipersuperficie continua di tipo spazio passante per  $\mathcal{E}$  può rappresentare l'insieme di eventi simultanei ad  $\mathcal{E}$ . Supponiamo che  $\mathcal{E}$  appartenga alla linea di universo di un osservatore dotato di orologio  $O$ , allora la procedura di sincronizzazione di ogni altro orologio con  $O$ , definisce una di tali ipersuperfici per ogni istante  $t$  di  $O$ . Un vincolo essenziale per queste ipersuperfici è che l'intersezione di due qualunque di esse deve essere vuota, cioè: date le ipersuperfici di simultaneità  $I_1$  e  $I_2$  relative agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , deve valere  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  se  $t_1 \neq t_2$ . Se infatti esistesse un evento  $\mathcal{F}$  comune a  $I_1$  e  $I_2$ , per la proprietà transitiva della relazione di simultaneità, tutti gli eventi sulle due ipersuperfici sarebbero simultanei e quindi anche gli eventi " $O$  segna il tempo  $t_1$ " e " $O$  segna il tempo  $t_2$ ", sarebbero eventi simultanei, il che è assurdo avendo supposto  $t_1 \neq t_2$ .

In questo modo tutto lo spazio-tempo viene suddiviso in ipersuperfici che rappresentano lo spazio in un istante definito (secondo la sincronizzazione adottata). Ci si riferisce a questa scomposizione dello spazio-tempo come *fogliettamento*: lo spazio-tempo acquista così la struttura matematica di fibrato in cui la linea di universo di un orologio è la *base* e le ipersuperfici di simultaneità le *fibres*. Quindi la scelta del coefficiente di sincronizzazione  $\varepsilon$  (oppure del parametro  $e$ ) definisce la forma di queste ipersuperfici.

Nonostante esista ampia libertà di scelta nella definizione di questi parametri la maggior parte delle scelte porta con se aspetti che appaiono singolari dal punto di vista fisico. Ad esempio scegliendo la sincronizzazione con  $\varepsilon$  costante e diverso da  $1/2$ , le ipersuperfici di simultaneità sono iper-coni (Fig.3) i cui vertici si trovano sull'asse dei tempi (si suppone qui per semplicità che l'orologio di riferimento sia in quiete nell'origine del SRI  $S$ ). L'osservatore fermo nell'origine spaziale di  $S$  ha un punto di osservazione privilegiato rispetto ad altri osservatori situati altrove perché solo per lui lo spazio è isotropo. Questo implica che lo spazio non è omogeneo dato che l'origine risulta un punto privilegiato. Inoltre, il moto inerziale dei corpi le cui traiettorie passano nell'origine (o nei pressi dell'origine), a causa della particolare sincronizzazione sembra subire una immotivata accelerazione, cioè viola il

---

<sup>8</sup> Possiamo ancora parlare di *cono di luce* anche nel caso di sincronizzazioni non standard mantenendo il normale significato: "insieme dei punti dello spazio-tempo collegati con un evento da segnali che viaggiano alla velocità della luce, qualunque essa sia". Nel caso generale con  $\varepsilon \neq 1/2$ , si tratta di un iper-cono a sezione ellissoidale e obliquo. Questa ipersuperficie, dopo aver opportunamente orientato gli assi, ha equazione: 
$$\left( \kappa x - \sqrt{1 - \kappa^2} \frac{ct}{\kappa} \right)^2 + y^2 + z^2 = \left( \frac{ct}{\kappa} \right)^2$$
 dove 
$$\kappa = 2\sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon)}.$$

principio galileiano d'inerzia. In Fig.4 si mostrano le posizioni di un mobile in istanti di "tempo" uguali successivi.

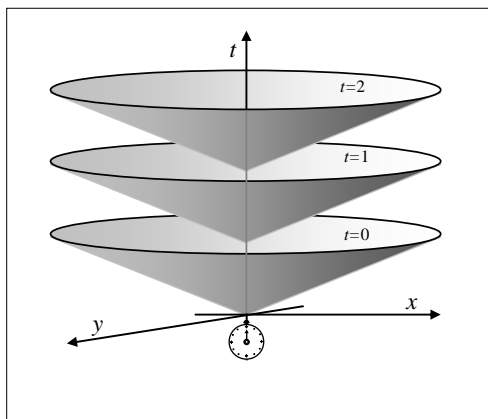


Fig.3 – Superfici di simultaneità con  $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$  costante. Con  $1 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  i "coni" avrebbero il vertice "in alto"

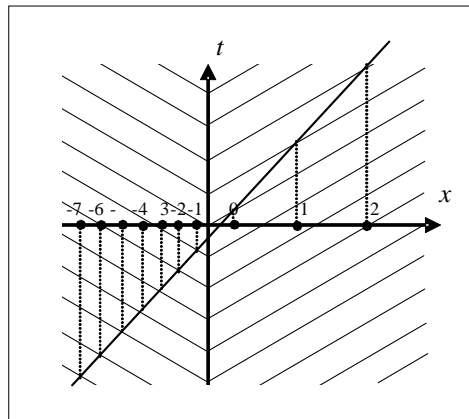


Fig.4 – Le posizioni di un corpo in moto inerziale con  $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$  in istanti successivi: quando passa per l'origine subisce una brusca accelerazione.

Questi risultati potrebbero spingere alla conclusione affrettata secondo cui: quand'anche sincronizzazioni alternative fossero non in contrasto con l'esperienza, l'inutile complicazione che si portano appresso le rende decisamente poco attraenti e perciò tranquillamente ignorabili in ossequio al Rasoio di Occam.

Tuttavia, come si vedrà, esiste una notevole eccezione: per una particolare classe di sincronizzazioni, dette *inerziali*, sussiste il principio di inerzia. In particolare con la sincronizzazione assoluta si hanno caratteristiche tali che forse meritano di far riporre il Rasoio.

Prima di esaminare le sincronizzazioni inerziali esaminiamo una procedura spesso considerata in letteratura [9] che porta alla simultaneità standard.

### 1.7 – Sincronizzazione per trasporto lento degli orologi

Un metodo di sincronizzazione degli orologi che appare a prima vista naturale consiste nel trasporto degli orologi. Ovvero, si sincronizzano due orologi quando sono nello stesso luogo poi se ne trasporta uno, là dove serve. È però noto che il moto degli orologi altera il loro passo in funzione della velocità, per cui questo tipo di sincronizzazione produrrebbe risultati diversi cambiando velocità di trasporto.

Eddington [17] illustra questo metodo di sincronia, e osserva che conduce alla stessa convenzione standard di Poincarè–Einstein se si effettua un *trasporto lento degli orologi*, nel limite in cui la velocità tende a zero.

È stato da alcuni sostenuto che questa coincidenza sarebbe una prova contro la tesi convenzionalista [18, 4]. Utilizzando le trasformazioni parametriche (1.2),



mostriamo però che, ad una analisi più accurata, non è logicamente derivabile alcuna conclusione circa l'oggettività di una o un'altra sincronia.

Supponiamo che un orologio sia trasportato dall'origine  $O$  di un SRI  $S$  fino al punto  $P$  per una distanza  $L$  sull'asse delle  $x$ . Il moto sia rettilineo e avvenga ad una velocità costante  $v$ . L'orologio si trovi in  $x = 0$  al tempo  $t = 0$  e quindi in  $x = L$  al tempo  $t = T$ . Quindi  $v = L/T$ .

Utilizzando le inverse delle trasformazioni parametriche (1.2) si trova che nel SRI  $S_0$  gli eventi "Passaggio dell'orologio in  $O$ " e "Passaggio dell'orologio in  $P$ " hanno coordinate<sup>9</sup>  $(0,0)$  e  $\left( L\left(\frac{1}{Rv} - e\right); L\left(R - eu + \frac{u}{Rv}\right) \right)$ .

Il SRI di quiete dell'orologio  $S'$  abbia velocità  $u'$  relativamente a  $S_0$ .

Di nuovo con le (1.2) troviamo le coordinate in  $S'$  degli stessi eventi:

Il "Passaggio dell'orologio in  $O$ " avviene ovviamente al tempo  $t' = 0$  in  $x' = 0$ , mentre il "Passaggio dell'orologio in  $P$ " avviene al tempo

$$t' = L \left\{ R' \left( \frac{1}{Rv} - e \right) - e' \left[ R - eu + \frac{u}{Rv} - u' \left( \frac{1}{Rv} - e \right) \right] \right\} \quad (1.11)$$

nel punto

$$x' = L \left\{ \frac{1}{R'} \left[ R - eu + \frac{u}{Rv} - u' \left( \frac{1}{Rv} - e \right) \right] \right\}. \quad (1.12)$$

dove si è posto  $R' = \sqrt{1 - (u'/c)^2}$  ed il parametro per la sincronizzazione in  $S'$  è stato indicato con  $e'$ .

Poiché  $S'$  è il sistema di quiete dell'orologio, deve essere  $x' = 0$ , per cui dalla (1.12) si ricava che la velocità  $u'$  di  $S'$  relativamente a  $S_0$  è  $u' = u + \frac{R^2 v}{1 - eRv}$  che sostituito nella (1.11) dà il tempo proprio  $\tau$  segnato dall'orologio quando arriva in  $P$ :

$$\tau = LR' \left( \frac{1}{Rv} - e \right).$$

La differenza tra il tempo d'arrivo dell'orologio trasportato in  $P$ , secondo il tempo di  $S$  sincronizzato col parametro  $e$ , e il tempo proprio segnato dallo stesso orologio è allora:

$$\Delta t = \frac{L}{v} - \tau = \frac{L}{v} \left[ 1 - \frac{R'}{R} (1 - eRv) \right] \quad (1.13)$$

Ci interessa il limite a basse velocità  $v$  (trasporto lento) per cui, sviluppando in potenze di  $v$ , si ha:

<sup>9</sup> Considero qui, per semplicità, oltre al tempo, un'unica coordinata spaziale:  $(t, x)$

$$R' = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( u + \frac{R^2 v}{1 - eRv} \right)^2} = R \left( 1 - \frac{uv}{c^2} \right) + o(v^2)$$
 che sostituita nella (1.13) dà:
 
$$\Delta t = \frac{L}{v} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{uv}{c^2} \right) (1 - eRv) \right] + o(v) = L \left( \frac{u}{c^2} + eR \right) + o(v).$$
 Ricordando al relazione (1.3) tra  $e$  e  $\varepsilon$  questa può essere scritta più semplicemente come:

$$\Delta t = L \frac{2\varepsilon - 1}{c} + o(v) \quad (1.14)$$

da cui risulta che soltanto se  $\varepsilon = 1/2$  si ha  $\Delta t = 0$  per  $v \rightarrow 0$ . Ovvero soltanto la sincronizzazione standard coincide con la sincronizzazione per trasporto "infinitamente" lento degli orologi.

Questo risultato è stato spesso usato contro la tesi convenzionalista [18, 4] come una conferma della inevitabilità della sincronizzazione standard. Non vi è però necessità logica in questa conclusione perché anche se è verosimile che l'effetto sul tempo segnato dagli orologi in movimento diminuisca riducendo la velocità fino praticamente ad azzerarsi per  $v$  quasi nullo, bisogna tenere conto che una velocità quasi nulla implica tempi di trasporto in proporzione inversamente lunghi per distanze finite. Infatti, osservando la (1.13), si vede che a parità di velocità l'effetto, cioè il ritardo  $\Delta t$  dell'orologio, è proporzionale alla durata del tempo di trasporto  $L/v$ . Non è perciò lecito inferire che nella (1.14)  $\Delta t$  sia zero per  $v \rightarrow 0$  e quindi dedurre che  $\varepsilon = 1/2$ .

### 1.8– Le sincronizzazioni inerziali

La tesi convenzionalista è ormai generalmente accettata dalla maggioranza dei fisici seppure non esista una dimostrazione formale dell'impossibilità di misure di velocità unidirezionali indipendente dalla sincronizzazione degli orologi. In ogni caso assumendo che questa impossibilità sia un dato di fatto della natura è evidente che attribuendo ad  $\varepsilon$  un valore diverso da  $1/2$  si possano sviluppare delle teorie equivalenti dal punto di vista sperimentale alla relatività standard. La maggior parte di queste teorie ha però aspetti generalmente poco attraenti: ad esempio, come si è visto, attribuendo ad  $\varepsilon$  un valore costante diverso da  $1/2$  si ottiene un *tempo non inerziale* cioè una definizione di tempo che viola il principio d'inerzia con la spiacevole proprietà per cui i corpi in moto subiscono improvvise accelerazioni non in relazione a forze effettive. Il motivo di questi aspetti decisamente strani dipende essenzialmente dal fatto che in queste sincronizzazioni lo spazio non è omogeneo. Se si vincola la scelta della sincronizzazione alla richiesta di omogeneità dello spazio (in tutti i SRI) ovvero di tempo inerziale, restano soltanto poche alternative. Come dimostrato da Torretti [19] sopravvivono soltanto sincronizzazioni in cui il tempo  $t$  e collegato con il tempo  $t_s$  della relatività standard, dalla relazione

$$t = t_s + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (1.15)$$

dove  $\mathbf{k}$  è un vettore costante e  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione nello spazio del SRI S. Dal punto di vista geometrico la (1.15) definisce per ogni  $t$  costante degli iperpiani paralleli nello spazio-tempo riferito alle coordinate  $t_s$  e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  (Fig.5). Poiché tutti i punti dell'iperpiano  $t = \text{costante}$  sono equivalenti lo spazio è omogeneo ma in generale non isotropo in quanto il vettore  $\mathbf{k} = -\nabla t_s$  determina una direzione privilegiata nello spazio (tranne nel caso  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  che corrisponde alla sincronia standard).

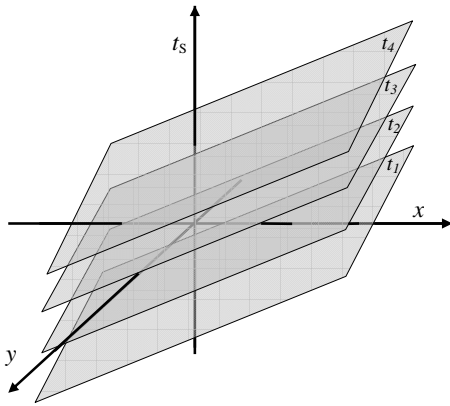


Fig.5 - Simultaneità inerziale: ogni iperpiano consiste negli eventi che accadono allo stesso tempo  $t_k$ . Il tempo non è generalmente ortogonale allo spazio.

### 1.9 – Sincronizzazione assoluta

Il vettore  $\mathbf{k}$  nella (1.15) rappresenta la direzione privilegiata dello spazio che, in base a quanto finora mostrato, non può che essere determinata dalla velocità assoluta  $\mathbf{u}$  del SRI dove si sincronizza, rispetto al riferimento assoluto  $S_0$ . La scelta più semplice,  $\mathbf{k} = \mathbf{u}/c^2$ , è quella che conduce alla sincronizzazione assoluta.

Considerando invece il coefficiente  $\varepsilon$  della (1.2), la sincronizzazione assoluta in un SRI S che ha velocità  $\mathbf{u}$  rispetto ad  $S_0$ , si ottiene formalmente assegnando ad  $\varepsilon$  il valore

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{c} \right) \quad (1.16)$$

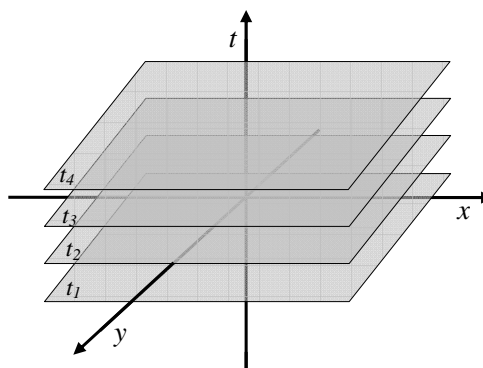
dove  $\hat{\mathbf{r}}$  è il vettore unitario che dall'orologio A punta all'orologio B da sincronizzare con A. Nel caso particolare considerato nelle trasformazioni (1.2)

dove  $\mathbf{u}$  è parallelo a  $\hat{\mathbf{r}}$  la (1.16) si riduce a  $\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{u}{c} \right)$ .

Infine, dalla relazione (1.3), si ha per il parametro di sincronizzazione  $e = 0$ . Ciò implica che il tempo, nelle trasformazioni (1.2) è indipendente dalle coordinate spaziali.

Da un punto di vista geometrico la sincronizzazione assoluta definisce un fogliettamento dello spaziotempo le cui *ipersuperfici di simultaneità* (ovvero le ipersuperfici che rappresentano gli eventi dello spaziotempo che hanno la stessa coordinata temporale) sono iperpiani in generale non ortogonali all'asse temporale (Fig.5). Soltanto nel sistema isotropo  $S_0$  gli iperpiani sono perpendicolari all'asse del tempo (Fig.6). Nella TRS con la sincronizzazione standard in tutti i SRI si ha la perpendicolarità.

Fig.6 - Ipersuperfici di simultaneità definite dalla sincronizzazione standard: spazio e tempo sono ortogonali



## 2– Trasformazioni Inerziali

### 2.1 – Trasformazioni Inerziali e loro proprietà

Nel capitolo precedente si è visto che accettando la tesi convenzionalista, la scelta della sincronizzazione da adottare non può essere determinata da un criterio di "verità", intendendo con ciò la corrispondenza con i dati sperimentali che è comunque garantita da ogni sincronizzazione. Piuttosto ci si deve basare su altri criteri, ad esempio criteri estetici o di semplicità descrittiva [3] o, ancora, si può considerare la capacità euristica cioè la capacità di favorire l'accesso a nuovi sviluppi teorici e a scoperte empiriche, o ancora alla capacità esplicativa ossia l'estensione dell'insieme dei fenomeni che la teoria riesce a descrivere.

La scelta della relatività standard con  $\varepsilon = 1/2$  risponde senz'altro ad un criterio di semplicità descrittiva che deriva dal collocare tutti i SRI sullo stesso piano introducendo così una simmetria che, come si è visto, qualunque altra opzione non ha. Tuttavia il criterio di "semplicità" non è necessariamente l'unico che può determinare la scelta. Per una teoria è forse più importante della "semplicità" è la sua capacità esplicativa. Sotto questo aspetto la sincronizzazione assoluta, come si vedrà, rappresenta senz'altro un'alternativa che consente di analizzare e interpretare ambiti che sono comunemente esclusi dalla teoria standard.

Le trasformazioni tra SRI sincronizzati assolutamente si ottengono ponendo  $e = 0$  in (1.2). Si ha allora:

$$\begin{cases} t = Rt_0 \\ x = \frac{x_0 - ut_0}{R} \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

dove, al solito,  $R = \sqrt{1 - u^2/c^2}$

Queste trasformazioni saranno qui indicate come *trasformazioni inerziali* (TI). In letteratura le (2.1) sono state proposte in questa forma da diversi autori [8, 9, 7] e con nomi diversi<sup>10</sup>.

La teoria relativistica che deriva dalla sincronizzazione assoluta e delle TI presenta alcuni aspetti peculiari che sono qui di seguito illustrati.

---

<sup>10</sup> Altri nomi sono: trasformazioni galileiane generalizzate, trasformazioni di Tangherlini o di Tangherlini-Chang.

### 2.1.1 – Simultaneità assoluta

Appare immediatamente dalle trasformazioni (2.1), che la coordinata temporale  $t$  è indipendente dalle coordinate spaziali  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $S_0$ , ovvero la simultaneità di eventi risulta assoluta e non relativa al particolare SRI a cui ci si riferisce. Più esplicitamente, se due eventi accadono in due punti distanti di  $S_0$  allo stesso tempo  $t_0 = \tau$ , gli stessi eventi osservati da  $S$  accadono contemporaneamente nei due punti corrispondenti al tempo  $t = R\tau$ . Possiamo perciò parlare di un tempo assoluto condiviso da ogni SRI.

### 2.1.2 – Contrazione delle lunghezze

Si può verificare, ad esempio utilizzando la (1.7) e la (1.8) con  $e = 0$  (e quindi  $\varepsilon = (1+u/c)/2$ ), che con le TI si ha la contrazione delle lunghezze dei corpi in moto assoluto cioè rispetto ad  $S_0$ : una barra di lunghezza propria  $L_{pr}$  nella direzione del moto, ha misura ridotta  $L_{S_0}$  in  $S_0$  secondo il solito fattore relativistico:

$$L_{S_0} = RL_{pr}$$

Se invece la barra ferma in  $S_0$  la lunghezza  $L_S$  misurata dal sistema  $S$  è inversamente dilatata secondo lo stesso fattore:  $L_S = \frac{L_{pr}}{R}$ .

Questo particolare risultato, che è specifico della sincronizzazione assoluta, impone una interpretazione causale della contrazione delle lunghezze: la variazione di lunghezza dei corpi deve essere considerata come effettivo fenomeno fisico ovvero un fenomeno che riguarda un concreto sistema fisico rappresentato dal corpo in moto assoluto, ed ha una causa oggettiva identificabile con la velocità assoluta del corpo.

In questa interpretazione la contrazione riguarda esclusivamente la lunghezza dei corpi cioè gli oggetti materiali e non in senso astratto la distanza tra punti dello spazio.

Il fatto che la lunghezza di un corpo assolutamente fermo in  $S_0$  appaia dilatato nella direzione di  $\mathbf{u}$  se osservato da un sistema  $S$  in moto con velocità assoluta  $\mathbf{u}$ , deve essere allora considerato non come una *oggettiva*<sup>11</sup> dilatazione del corpo ma come *apparente* dilatazione originata dal confronto con i regoli campione fermi in  $S$ , contratti a causa del loro moto assoluto.

Va notato che nessuna altra sincronizzazione, ad esclusione di quella assoluta, consente questa interpretazione.

È evidente che questa interpretazione della contrazione relativistica è in netto conflitto con l'interpretazione ortodossa della TRS; tuttavia, come si vedrà, non

---

<sup>11</sup> I termini *oggettivo* e *oggettivamente* qui e altrove espressi, possono essere intesi nel senso minimale di "dal punto di osservazione del SRI  $S_0$ " oppure, con maggiore implicazione ontologica, "reale per tutti gli osservatori".

solo è sostenibile ma è anche efficace nel trattare fenomeni che sfuggono alla TRS standard.

### 2.1.3 – Dilatazione del tempo

Analogamente, dalle (1.9) e (1.10) ponendo  $e = 0$  (ovvero  $\varepsilon = (1+u/c)/2$ ), si trova che l'intervallo di tempo scandito da un orologio fermo in  $S_0$  appare durare  $RT_{pr}$ , cioè meno del tempo proprio  $T_{pr}$ , se misurato da  $S$ . Viceversa se l'orologio è in quiete in  $S$  allora, se misurato da  $S_0$ , questo intervallo ha durata maggiore:  $T_{pr}/R$ .

Quindi anche la dilatazione del tempo, in questa interpretazione, è vista come rallentamento *oggettivo* degli orologi all'aumentare della loro velocità assoluta  $u$ . Ovviamente gli "orologi" di cui si tratta sono intesi in senso lato come "sistemi fisici che hanno una evoluzione nel tempo".

Il ritmo degli orologi rallenta aumentando la loro velocità assoluta  $u$  ed è massimo per gli orologi in quiete in  $S_0$ . L'apparente accelerazione del ritmo degli orologi a riposo rispetto ad  $S_0$ , quando questi sono osservati da  $S$ , deve essere vista come conseguenza del confronto con gli orologi campione di  $S$  che sono *oggettivamente* rallentati.

### 2.1.4 – La velocità della luce

Dalla relazione (1.5) si ottiene ponendo  $e = 0$  (ovvero  $\varepsilon = (1+u/c)/2$ ), la velocità della luce in un SRI generico  $S$  di velocità assoluta  $\mathbf{u}$ . Sia  $\hat{\mathbf{r}}$  è il versore nella direzione di propagazione della luce, cioè  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}} = u \cos \theta$ , si ha allora

$$c_{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{c}{1 + \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}/c} \quad (2.2)$$

Questa è la velocità unidirezionale (one way) della luce ed è compresa tra un valore minimo ed uno massimo dati da

$$c_- = \frac{c}{1+u/c} \quad , \quad c_+ = \frac{c}{1-u/c} \quad (2.3)$$

che si hanno rispettivamente nelle due direzioni opposte, con  $\hat{\mathbf{r}}$  nella direzione di  $\mathbf{u}$  o di  $-\mathbf{u}$ . Si nota che esiste un limite inferiore di  $c_-$  dato da  $c/2$  ma non esiste alcun limite superiore per  $c_+$ .

Si dimostra infine che, in ogni caso, la velocità della luce su percorsi chiusi è sempre  $c$  :

Supponiamo che la luce descriva una curva chiusa  $\Gamma$  nello spazio. Il tempo di percorrenza è  $T = \oint_{\Gamma} \frac{dl}{c_{\hat{\mathbf{r}}}}$  dove il versore  $\hat{\mathbf{r}}$  è funzione di  $l$ . Sostituendo la velocità della luce nelle direzione  $\hat{\mathbf{r}}$  dato dalla (2.2) si ha

$$T = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma} \left( 1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}(l)}{c} \right) dl = \frac{1}{c} \oint_{\Gamma} dl + \frac{1}{c^2} \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}(l) dl = \frac{L}{c} + \frac{\mathbf{u}}{c^2} \cdot \oint_{\Gamma} d\mathbf{r} = \frac{L}{c}$$

essendo  $L = \oint_{\Gamma} dl$  la lunghezza del percorso e  $\mathbf{0} = \oint_{\Gamma} d\mathbf{r}$  lo spostamento totale in un circuito chiuso.

## 2.2 – La natura degli effetti relativistici

Come si è visto (§ 1.4), ogni teoria relativistica, indipendentemente dalla sincronia adottata, prevede i fenomeni della *dilatazione dei tempi* e della *contrazione delle lunghezze*. La natura di questi fenomeni è però generalmente ambigua nel quadro interpretativo delle teorie, in quanto, a volte, questi si presentano come assoluti mentre in altre situazioni sono relativi al SRI da cui si osservano. Ciò dipende essenzialmente dal fatto che in parte questi fenomeni sono indipendenti dalla sincronizzazione e in parte legati alla sincronizzazione stessa e perciò convenzionali. Non a caso questa ambiguità si riflette anche nel linguaggio descrittivo che oscilla tra apparenza e realtà, ad esempio:

Per giustificare che un viaggio spaziale verso una lontana stella può avvenire in un tempo breve a piacere per gli astronauti che lo compiono, si dice che la distanza tra la Terra la stella *appare* contratta quando l'astronave accelera verso la stella, ma, d'altro canto, ricordando il paradosso di Bell [21], se si accelera una fune tesa tra due veicoli spaziali costringendo gli estremi allo stesso moto accelerato in un certo SRI allora ad un certo momento la fune si spezzerà a causa della *reale* contrazione della sua lunghezza.

Sarebbe strano pensare che l'accelerazione della astronave determini fisicamente in qualche modo la riduzione della distanza tra la Terra e la stella, mentre è ragionevolmente accettabile che un corpo materiale (la fune) possa subire effetti se accelerata.

Similmente per il tempo: un orologio in moto subisce un rallentamento come hanno dimostrato diversi esperimenti [22, 23] ma come si può pensare di rallentare, ad esempio, il ritmo di una stella pulsar semplicemente mettendosi in moto verso di essa?

Una risposta comune a queste osservazioni è che parlare di realtà o apparenza dei fenomeni è solo un problema di linguaggio: se chiamiamo reale ciò che si misura da un determinato SRI allora questi fenomeni sono reali.

È sicuramente vero che è il linguaggio che va adattato alla realtà e non viceversa e che le parole sono spesso incapaci di esprimere adeguatamente i concetti fisici ma va notato però che le (vere o presunte) ambiguità si hanno solo quando sono coinvolte accelerazioni. Se non si considerano corpi accelerati o sistemi di



riferimento accelerati non avviene mai di osservare orologi che rallentano né metri che si accorciano. Infatti in ogni SRI orologi e metri hanno da sempre e per sempre la stessa velocità e quindi, in ciascuno, stesso ritmo e lunghezza. Se si vuole fare accadere il fenomeno allora deve esserci una accelerazione, o dell'oggetto o dell'osservatore cioè del sistema di riferimento. Nel primo caso il fenomeno è oggettivo e può essere considerato un vero fenomeno causa-effetto che riguarda i corpi materiali come metri e orologi, nel secondo caso, semplicemente, la teoria standard non sarebbe applicabile.

Un artificio per trattare l'osservatore accelerato nell'ambito della teoria standard è di considerarlo prima e dopo l'accelerazione in due diversi SRI in cui l'oggetto osservato ha ovviamente cambiato velocità.<sup>12</sup> In questo modo è evidente che non si ha descrizione *quando* il fenomeno accade, ma semplicemente si confronta ciò che si misura dal primo SRI con ciò che si misura dal secondo SRI e si prende atto che c'è stata una (immotivata) variazione nell'oggetto osservato.

### 2.2.1 – Principio di causalità

Riassumendo la situazione si può affermare che la TRS standard, dove questa è applicabile, cioè per gli osservatori in quiete nei sistemi di riferimento inerziali, potrebbe considerare i fenomeni di dilatazione del tempo e di contrazione delle lunghezze come genuini fenomeni causa-effetto che riguardano non il tempo o le distanze in senso astratto ma le dimensioni e la frequenza di sistemi fisici concreti. Tuttavia questa interpretazione non può essere accolta senza difficoltà dalla TRS standard in quanto è in conflitto con un assunto che è alla base della fisica: e cioè il *principio di causalità*. Possiamo formulare questo principio così:

*Se si agisce allo stesso modo su due sistemi fisici (macroscopici<sup>13</sup>) identicamente preparati si ottengono gli stessi effetti.*

Questo principio non è rispettato nella procedura che porta alla sincronizzazione standard né in nessuna altra sincronizzazione tranne la sincronizzazione assoluta. Perciò se si adotta qualunque sincronizzazione che non sia quella assoluta, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi non possono essere considerate effettivi fenomeni fisici cioè conseguenti ad una causa identificabile. Per illustrare quanto sopra consideriamo due situazioni sperimentali in cui si riproduce il fenomeno della desincronizzazione di orologi in moto, prima nel caso di moto rettilineo e poi con moto circolare:

---

<sup>12</sup> Oppure anche con una serie di SRI comoventi in cui l'osservatore è istantaneamente in quiete.

<sup>13</sup> La precisazione che si tratta di sistemi macroscopici è evidentemente necessaria in quanto per sistemi microscopici sappiamo di poter richiedere soltanto una regolarità statistica. Però nell'ambito della pura relatività il problema non si pone.

## 2.2.2 – Effetto di desincronizzazione in moti rettilinei e circolari<sup>14</sup>

### *Moto rettilineo*

Si considerino due osservatori, A e B, muniti di orologi  $O_A$  e  $O_B$  sincronizzati secondo la procedura standard inizialmente fermi a distanza  $d$  sull'asse  $x$  del sistema inerziale  $S_0$ . Ciascuno dei due osservatori esegue un moto in due fasi secondo un programma prefissato:

Fase 1:

- A e B accelerano ugualmente nella direzione che va da A a B fino a raggiungere la velocità  $u$  nella direzione delle  $x$  crescenti.
- Mantengono la velocità  $u$  costante trovandosi così a riposo in un SRI  $S$  in moto rispetto ad  $S_0$  con velocità  $u$  nella direzione delle  $x$  positive.

Fase 2 :

- A e B eseguono (allo stesso tempo del loro orologio) un'altra piccola accelerazione, uguale come intensità e durata ma di verso opposto, in modo tale che A acquista, rispetto al riferimento  $S$ , una velocità  $w$  e B  $-w$ , sempre nella direzione  $x$ .
- In seguito a questa accelerazione A e B si incontrano dopo un certo tempo.

L'analisi secondo la TRS (Riportata in appendice C) mostra che dopo la fase 1, nel nuovo sistema  $S$  dove A e B sono in quiete la loro distanza è aumentata da  $d$  a  $\gamma d$ , dove al solito  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ , e che  $O_B$  anticipa su  $O_A$  di

$$\Delta T = \frac{\gamma u d}{c^2} \quad (2.4)$$

rispetto all'usuale sincronizzazione standard tramite segnali di luce.<sup>15</sup>

Questo sembra indicare che gli orologi si sono desincronizzati durante il loro moto accelerato. Eppure le accelerazioni sono state identiche e perciò, se si accetta il principio di causalità, non si può sostenere che le "lancette" di  $O_A$  hanno girato più lentamente e/o quelle di  $O_B$  più velocemente senza nessuna causa, ed effettivamente nel SRI  $S_0$  gli orologi non sono affatto desincronizzati. Però se i due osservatori controllano i loro orologi scambiandosi segnali luminosi secondo la procedura standard confidando nel valore invariabile della velocità unidirezionale della luce sia in  $S_0$  che in  $S$ , devono concludere che per qualche motivo gli orologi, che prima erano sincroni, ora non lo sono più.

---

<sup>14</sup> Questo effetto è una diversa versione di quello che in letteratura viene indicato come effetto (o paradosso) dei gemelli o degli orologi.

<sup>15</sup> È importante osservare che l'anticipo di tempo  $\Delta T$  è del tutto indipendente dal tipo di moto che ha portato A e B da  $S_0$  a  $S$  ma dipende solamente dalla velocità finale  $u$  relativa ad  $S_0$ . Lo stesso discorso vale per la dilatazione dello spazio tra A e B.

Alla luce di queste considerazioni si è tentati di risolvere la questione ribadendo che la sincronia dei due orologi è relativa come lo è in generale la simultaneità di eventi distanti, e semplicemente, si ha che gli orologi sono sincroni in  $S_0$  ma non lo sono in  $S$ . Tuttavia se si procede nell'esperimento concettuale secondo la fase 2, facendo cioè incontrare gli osservatori, si ottiene un effetto oggettivo e assoluto. Si trova infatti che al ricongiungimento il tempo  $\tau_B$  segnato da  $O_B$  è maggiore del tempo  $\tau_A$  segnato da  $O_A$  (i dettagli dei calcoli sono in appendice C):

$$\Delta\tau = \tau_B - \tau_A = \frac{ud}{c^2} \sqrt{\frac{c^2 - w^2}{c^2 - u^2}} \quad (2.5)$$

Si noti che  $\Delta\tau$  è tanto maggiore quanto minore è  $w$ . Se  $w$  tende a zero la (2.5) si riduce alla (2.4). Il significato del limite  $w \rightarrow 0$  è infatti quello di "trasporto infinitamente lento" degli orologi e, come si è visto, questo tipo di trasporto conserva la sincronizzazione standard.

### *Moto circolare*

Nell'esperimento mentale precedente, nonostante le opinabili difficoltà concettuali, si può evitare di individuare cause fisiche dell'effetto: i percorsi di A e B nello spaziotempo sono differenti e gli orologi, misurando il tempo proprio, semplicemente registrano la differenza nella "lunghezza" dei percorsi. Non ha perciò senso chiedersi *quando* (nella fase 1 o 2) avviene il fenomeno.

Se però ripetiamo lo stesso esperimento mentale curvando (leggermente) le traiettorie di A e B facendogli descrivere archi di circonferenza in orbita circolare di raggio  $R$ , vedremo che i risultati non cambiano mentre cambia radicalmente l'interpretazione.

Possiamo pensare, per avere un'immagine, A e B vincolati a muoversi su di una rotaia che descrive un'ampia circonferenza. In questo caso le velocità  $u$  e  $w$  sono le velocità tangenziali e  $\Omega = u/R$  e  $\omega = w/R$  le relative velocità angolari.  $d$  è la distanza tra A e B misurata lungo l'arco di circonferenza.

Intuitivamente, se  $R$  è molto maggiore di  $d$  il moto circolare non è distinguibile dal moto rettilineo ed infatti, descrivendo il moto dal sistema stazionario  $S_0$ , il calcolo secondo la TRS procede nello stesso modo che nel caso rettilineo e dà lo stesso anticipo  $\Delta\tau$  dato dalla (2.5). Inoltre il risultato è indipendente da  $R$ .

Supponiamo ora di far tendere  $R \rightarrow \infty$ ,  $\Omega \rightarrow 0$  e  $\omega \rightarrow 0$  mantenendo costanti  $u = \Omega R$  e  $w = \omega R$ , il moto da circolare diventa rettilineo, o più precisamente si può affermare che per  $R$  sufficientemente grande il moto, su tratti delimitati, non è strumentalmente distinguibile da un moto rettilineo. Infatti il percorso rettilineo è un'astrazione matematica soltanto approssimabile in un concreto sistema fisico.

Questi esperimenti concettuali indicano che nei risultati empirici non può esistere alcuna discontinuità tra moti rettilinei e moti circolari, tuttavia mentre nel primo caso la desincronizzazione degli orologi sembra già avvenire nella prima fase del moto quando gli osservatori passano dal riferimento  $S_0$  al riferimento  $S$ , nel caso di moto circolare non è in alcun modo ipotizzabile che il ritardo  $\Delta\tau$  di  $O_B$  su  $O_A$  abbia

luogo durante la prima fase del moto. Un modo per vederlo è di immaginare non due ma molti osservatori equidistanziati sulla circonferenza. Posti in rotazione, l'orologio di ciascuno dovrebbe risultare in anticipo su quelli che seguono e in ritardo su quelli che precedono nel senso di rotazione, e quindi, in anticipo e in ritardo su se stesso!<sup>16</sup>

D'altra parte nella seconda fase del moto, quando A e B si riavvicinano si trovano oggettivamente sottoposti ad azioni ineguali: la velocità tangenziale  $u$  si compone con  $w$  e  $-w$  secondo le equazioni (C2) cosicché la velocità di A aumenta e si riduce quella di B con la conseguenza che gli orologi subiscono accelerazioni centrifughe differenti (come possono avvertire localmente gli osservatori stessi).

Per il principio di equivalenza l'accelerazione che ciascun orologio avverte durante il moto di riavvicinamento può essere considerato come l'effetto di un campo gravitazionale. Il potenziale di questo campo dipende dalla velocità angolare  $\omega$  secondo

$$\varphi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \quad (2.6)$$

dove  $r$  è la distanza dal centro di rotazione ove si è posto il potenziale uguale a zero.

Nella seconda fase del moto le accelerazioni angolari sono differenti per A e B che quindi si trovano in punti a potenziale differente. Allora, in accordo con la relatività generale, il tempo proprio  $t$  segnato dagli orologi in rotazione si può mettere in relazione col tempo  $t_0$  di un orologio nel SRI in quiete in  $S_0$ , ad esempio nel centro di rotazione con  $\varphi = 0$ , tramite la relazione

$$t = t_0 \sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \quad (2.7)$$

Alla distanza  $R$  dal centro di rotazione  $-2\varphi$  è uguale numericamente al quadrato della velocità tangenziale  $v$  e quindi la (2.7) per un orologio che descrive una rotazione di raggio  $R$  si identifica con la solita dilatazione relativistica del tempo di un orologio che viaggia a velocità  $v$ . Utilizzando la (2.7) ed eseguendo i passaggi analoghi ai precedenti si giunge allo stesso ritardo dato dalla (2.5).

### **2.3 – Procedura operativa per la sincronizzazione assoluta**

Se nell'esperimento concettuale sopra descritto si assume che gli orologi  $O_A$  e  $O_B$  trasportati con "moto identico" da  $S_0$  a  $S$  non abbiano affatto perso la loro sincronicità allora possono essere utilizzati per sincronizzare anche altri orologi di  $S$ . Il tempo che indicano definisce infatti la simultaneità tra due punti nello spazio distanti cioè i punti dove si trovano i due orologi in quiete in  $S$ . È così possibile

---

<sup>16</sup> Questa situazione è ovviamente collegata con l'impossibilità della sincronizzazione standard nel sistema di riferimento rotante

adoperarli per misurare le velocità (della luce o di un altro segnale) da  $O_A$  a  $O_B$  e nel verso opposto.

La sincronizzazione che così ne risulta è quella assoluta come si può vedere osservando che la velocità della luce, nelle due direzioni opposte in  $S$ , è proprio quella data dalle (2.3).

Possiamo perciò definire la procedura operativa per la sincronizzazione assoluta degli orologi in un sistema di riferimento  $S$  secondo il metodo che sarà indicato come “*sincronizzazione per identica accelerazione degli orologi*”.

La procedura consiste nei seguenti passi:

1. Definire (o scegliere) il SRI assoluto  $S_0$  dove lo spazio è considerato omogeneo e isotropo.
2. Sincronizzare gli orologi di  $S_0$  secondo la procedura standard (cioè assumendo la velocità della luce isotropa).
3. Accelerare identicamente gli orologi fino a portarli alla velocità  $\mathbf{u}$ , che è la velocità di  $S$  relativamente a  $S_0$ , cosicché gli orologi risultino definitivamente immobili in  $S$

### 2.3.1 – Sincronizzazione in riferimenti accelerati

Nella procedura sopra descritta non è richiesto che il sistema di riferimento  $S$  sia inerziale. La sola condizione, implicita nel punto 3, è che sia possibile fare in modo che, con una opportuna accelerazione identica, gli orologi siano immobili in  $S$  da un certo momento in poi. Precisare cosa sia *l'immobilità* in un sistema di riferimento accelerato non è generalmente evidente a priori, tuttavia si può stabilire che se due o più corpi (puntiformi) mantengono la loro distanza in  $S_0$  allora per definizione sono relativamente immobili anche in ogni altro sistema di riferimento definito da questi corpi (inerziale o non inerziale).<sup>17</sup>

La richiesta che le accelerazioni (e quindi che le velocità finali<sup>18</sup>) siano identiche si può limitare ad una identità in modulo cioè, se  $\mathbf{a}_A$  e  $\mathbf{a}_B$  sono le accelerazioni di due orologi  $O_A$  e  $O_B$ , è sufficiente che  $|\mathbf{a}_A| = |\mathbf{a}_B|$  mentre può essere  $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_B$ . Perché in virtù dell'isotropia dello spazio rispetto ad  $S_0$  non ci possono essere effetti dipendenti dalla direzione spaziale del moto. Questo consente di definire la sincronizzazione assoluta anche in una ampia gamma di sistemi accelerati. In particolare è possibile sincronizzare assolutamente nei sistemi rotanti (anche non uniformemente) semplicemente disponendo una serie di orologi sulla circonferenza

---

<sup>17</sup> Occorre sottolineare che dal sistema di riferimento accelerato  $S$  dove i corpi in questione sono per definizione fermi, la loro distanza, misurata in  $S$ , può apparire variabile. La apparente contraddizione si risolve, secondo il punto di vista presentato, assumendo che i metri campione in  $S$  variano la loro lunghezza in funzione della loro velocità assoluta. Questa descrizione è normalmente accettata anche nella interpretazione standard, si pensi infatti ad osservatori posti lungo una circonferenza che ruotano attorno al centro: aumentando la velocità di rotazione la loro distanza reciproca, a loro giudizio, aumenta infatti i loro regoli si contraggono nella direzione del moto. Questa è essenzialmente la soluzione fornita da Einstein al paradosso di Ehrenfest.

<sup>18</sup> Con "velocità finali" si intende quelle velocità per le quali gli orologi giungono a riposo in  $S$ .

di un disco rotante, si sincronizzano quando il disco è fermo in  $S_0$  e, quando sono posti in rotazione mantengono, per definizione, la sincronizzazione assoluta<sup>19</sup>.

### 2.3.2 – Scelta del sistema di riferimento assoluto

Quanto è arbitraria la scelta del sistema di riferimento assoluto  $S_0$ ? Le leggi fisiche assumono veramente la stessa forma in SRI che viaggiano a qualunque velocità costante rispetto agli attuali laboratori? Di certo sappiamo che esistono sistemi di riferimento privilegiati: quelli rispetto ai quale la radiazione cosmica di fondo è isotropa e il tempo è il tempo cosmologico.<sup>20</sup> Tuttavia spesso questo dato è considerato non significativo per l'indicazione del SRI assoluto, perché è visto come una specie di condizione al contorno accidentale che pur permettendo l'identificazione di un sistema di riferimento particolare, a parte l'effetto Doppler sulla radiazione di fondo e l'indicazione di un tempo cosmologico, non porta ad alcuna altra violazione nella simmetria di Lorentz.

Questa posizione ha una connotazione metafisica perché presuppone che una teoria fisica (la relatività nello specifico) possa avere una totale validità assoluta indipendente dallo stato e struttura dell'universo quale esso è. Detto in altri termini ci si può chiedere se:

*l'universo che osserviamo è quello che è perché deve obbedire a delle leggi (più che) universali, o piuttosto, le leggi fisiche sono come sono perché l'universo è fatto in un certo determinato modo?*

Forse non è possibile dare una risposta ma, in ogni caso, mi pare più prudente la seconda posizione. Ad esempio, si sostiene a volte che la relatività speciale è la teoria dello spaziotempo vuoto di materia e radiazione ma ovviamente questa è una affermazione controfattuale perché nessuno può dire quali leggi dovrebbero valere se nell'universo non ci fosse materia e radiazione, ad esempio potrebbe non esistere una velocità limite in un universo vuoto.

Il punto di vista della relatività standard è di supporre fondamentale la simmetria di Lorentz e accidentale ogni situazione in cui tale simmetria non è rispettata.

Se invece si accetta il punto di vista della sincronizzazione assoluta e della teoria che ne deriva, allora si rende più urgente una spiegazione del perché la simmetria di Lorentz è con tanta approssimazione esatta o addirittura esatta tout court nonostante la evidente esistenza di un sistema di riferimento universale privilegiato.

---

<sup>19</sup> Se si dispongono gli orologi a varie distanza dal centro di rotazione evidentemente le accelerazioni dei vari orologi non sono identiche, neanche in modulo e perciò non si ha sincronizzazione assoluta. È noto però che in questo caso gli orologi hanno un passo differente che non consente di mantenere la sincronicità comunque sia definita.

<sup>20</sup> La terra ha una velocità dell'ordine di  $10^{-3}c$  rispetto questo fondo cosmico che si manifesta come un debole ma evidente effetto Doppler sulla radiazione di fondo.

## 2.4 – Trasformazioni inerziali tra due riferimenti in moto assoluto

Nel § 2.1 abbiamo considerato le trasformazioni inerziali tra il SRI assoluto  $S_0$  di coordinate  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  ed un altro  $S$  di coordinate  $(t, x, y, z)$  in moto rispetto a  $S_0$  con velocità  $\mathbf{u}$  in configurazione tipica.<sup>21</sup> Vediamo ora come appaiono le TI tra due SRI  $S$  e  $S'$  entrambi in moto rispetto al riferimento assoluto  $S_0$  con velocità assolute  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$ . Limitiamo per ora al caso particolare in cui sia  $S$  che  $S'$  sono in configurazione tipica e quindi le componenti delle velocità sono  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  e  $\mathbf{u}' = (u', 0, 0)$ .

Le (2.1) forniscono le TI da  $S_0$  a  $S$ . Le trasformazioni inerziali inverse delle (2.1) da  $S$  a  $S_0$  sono (esplicitando  $R = \sqrt{1-u^2}$ ):

$$\begin{cases} t_0 = \frac{t}{\sqrt{1-u^2}} \\ x_0 = \sqrt{1-u^2} x_0 + \frac{ut_0}{\sqrt{1-u^2}} \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

considerando le trasformazioni da  $S_0$  ad un altro SRI  $S'$  di velocità  $u'$  rispetto  $S_0$  date dalla (2.1) e le (2.6) scriviamo la trasformazione  $S \rightarrow S_0 \rightarrow S'$ . Eliminando le coordinate  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  otteniamo la trasformazione diretta  $S \rightarrow S'$

$$\begin{cases} t' = \frac{\sqrt{1-u'^2}}{\sqrt{1-u^2}} t \\ x' = \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u'^2}} \left[ x - \frac{(u'-u)c}{1-u^2} t \right] \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.8)$$

Come apparirà chiaro in seguito, non è conveniente esprimere le (2.8) tramite le due velocità assolute  $u$  e  $u'$  ma attraverso la velocità assoluta  $u$  e la velocità  $v$  che è la velocità di  $S'$  rispetto  $S$ .

A tale scopo consideriamo in  $S$  l'evento  $\mathcal{E}$  definito dalla posizione dell'origine degli assi di  $S'$  in un istante  $t = \tau$ . Questo evento ha in  $S$  coordinate  $\mathcal{E}(\tau, v\tau, 0, 0)$ . Secondo la (2.8) la coordinata  $x'$  dell'evento è:

<sup>21</sup> Con “configurazione tipica” si intende come solito che al tempo  $t_0 = t = 0$  gli assi dei due sistemi coincidono e che le velocità relative sono nella direzione degli assi  $x$ .

$$x' = \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u'^2}} \left[ v - \frac{(u'-u)c}{1-u^2} \right] \tau \quad (2.9)$$

D'altra parte l'evento  $\mathcal{E}$  ha luogo nell'origine di  $S'$  e quindi deve essere  $x' = 0$ , che sostituito nella (2.9) permette di ricavare  $u'$  :

$$u' = u + u(1-u^2) \quad (2.10)$$

Sostituendo la (2.10) nella (2.8) si ottengono le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} t' = R(u,v)t \\ x' = \frac{x-vt}{R(u,v)} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.11)$$

dove si è introdotto il fattore:

$$R(u,v) = \sqrt{(1-uv)^2 - v^2} \quad (2.12)$$

che generalizza il coefficiente  $R$  che appare nelle trasformazioni (2.1) .

Si noti che per la realtà di  $R(u,v)$  deve valere la disuguaglianza (ripristinando  $c$ ):

$$\frac{-c}{1-u/c} \leq v \leq \frac{c}{1+u/c}$$

ovvero  $v$  non può superare in valore assoluto le velocità della luce nelle due direzioni opposte.

#### 2.4.1 – Composizione delle velocità nelle trasformazioni inerziali

Sia la configurazione dei riferimenti inerziali  $S_0$ ,  $S$  e  $S'$  come descritto nel § 2.4 precedente. Si considerino in  $S$  i due eventi  $E_0(0,0,0,0)$  e  $E_1(t,wt,0,0)$  relativi al moto di un corpo nella direzione delle  $x$  con velocità  $w$ , passante per l'origine al tempo  $t=0$ . Secondo le (2.11) in  $S'$  tali eventi hanno coordinate  $E_0(0,0,0,0)$  e  $E_1(R(u,v)t, (w-v)t/R(u,v), 0, 0) = E_1(t', w't', 0, 0)$  da quest'ultima uguaglianza si ha:



$$\begin{cases} t' = R(u, v)t \\ w't' = \frac{w-v}{R(u, v)}t \end{cases}$$

da cui si ricava

$$w = v + R(u, v)^2 w' \quad (2.13)$$

con  $R(u, v)$  dato dalla (2.12)

L'equazione (2.13) è quindi la formula per la composizione relativistica delle velocità secondo le TI nel caso particolare che  $\mathbf{u}$ , velocità assoluta di S, e  $\mathbf{v}$  velocità di S' relativamente ad S, siano collineari.

## 2.5 – Sviluppi del formalismo

Nella equazione (2.13) sono coinvolti quattro sistemi di riferimento: quello privilegiato  $S_0$ , S di velocità assoluta  $\mathbf{u}$ , S' di velocità  $\mathbf{v}$  rispetto a S, e quello solidale con il corpo che viaggia a velocità  $\mathbf{w}'$  rispetto S' che indichiamo con  $S_3$  ( $S_3$  potrebbe non essere inerziale).

Si guadagna alquanto in chiarezza e leggibilità se si introduce, per le velocità, una notazione a doppio indice:  $v_{ij}$  in cui il primo indice  $i$  indica la "velocità di chi" cioè il sistema (o il corpo)  $i$ -esimo, ed il secondo indice  $j$  indica "velocità relativamente a cosa" cioè rispetto al sistema  $j$ -esimo.

Riserviamo l'indice 0 (zero) per il sistema di quiete assoluto  $S_0$ , per cui  $v_{i0}$  sarà la velocità assoluta del sistema  $S_i$  (indichiamo la velocità assoluta generalmente con la lettera  $u$  e perciò poniamo  $u_i \equiv v_{i0}$ ). Scriviamo inoltre

$$R_{ij} \equiv R(u_j, v_{ij}) \equiv \sqrt{(1 - u_j v_{ij})^2 - v_{ij}^2} \quad (2.14)$$

Con questa notazione la (2.13) si può scrivere:

$$v_{31} = v_{21} + R_{21}^2 v_{32}$$

o anche

$$v_{ki} = v_{ji} + R_{ji}^2 v_{kj} \quad (2.15)$$

Ponendo in questa equazione l'indice  $i = 0$  si ha:  $v_{k0} = v_{j0} + R_{j0}^2 v_{kj}$  da cui

$$v_{kj} = \frac{v_{k0} - v_{j0}}{R_{j0}^2} = \frac{u_k - u_j}{R_{j0}^2}$$

e osservando che  $R_{j0}^2 = (1 - v_{00}v_{j0})^2 - v_{j0}^2 = 1 - v_{j0}^2 = 1 - u_j^2$  si ottiene

$$v_{kj} = \frac{u_k - u_j}{1 - u_j^2} \quad (2.16)$$

Ponendo invece, sempre nella (2.15),  $k = i$  e osservando che per ogni  $S_i$  si ha sempre  $v_{ii} = 0$ , si trova

$$0 = v_{ji} + R_{ji}^2 v_{kj}$$

ovvero

$$R_{ji} = \sqrt{-\frac{v_{ji}}{v_{ij}}} \quad (2.17)$$

Il radicando della (2.17) è positivo per velocità fisicamente realizzabili, cioè  $|u_i| < 1$  e  $|u_j| < 1$  perché  $v_{ji}$  e  $v_{ij}$  hanno sempre segno opposto; infatti, utilizzando la (2.16) si ha

$$v_{kj}v_{jk} = \frac{u_k - u_j}{1 - u_j^2} \frac{u_j - u_k}{1 - u_k^2} v_{kj} = -\frac{(u_k - u_j)^2}{(1 - u_j^2)(1 - u_k^2)} < 0$$

(Notiamo però che il radicando della (2.17) risulta positivo anche se  $u_i$  e  $u_j$  sono entrambi di modulo  $>1$  ovvero per velocità superluminali)

Osserviamo inoltre che la (2.17) perde di significato per  $v_{ij} = 0$  ma la (2.14) mostra chiaramente che per  $v_{ij} = 0$  si ha  $R_{ij} = 1$  (d'altra parte per  $v_{ij} \rightarrow 0$  deve valere il limite classico in cui si ha  $v_{ij} = -v_{ji}$  e quindi  $-v_{ji}/v_{ij} \rightarrow 1$  )

Possiamo scrivere le trasformazioni inerziali (2.11) in forma matriciale (trascurando le coordinate  $x$  e  $y$  non coinvolte nella trasformazione):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(u, v) & 0 \\ -v & 1 \\ R(u, v) & R(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

oppure, usando la notazione vista precedentemente,

$$\begin{pmatrix} t_j \\ x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{ji} & 0 \\ -v_{ji} & 1 \\ R_{ji} & R_{ji} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_i \\ x_i \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

e, in virtù della (2.17) la matrice di trasformazione in (2.19) si può porre nella forma

$$\chi(v_{ji}, v_{ij}) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\frac{v_{ji}}{v_{ij}}} & 0 \\ -v_{ji} \sqrt{\frac{v_{ij}}{v_{ji}}} & \sqrt{\frac{v_{ij}}{v_{ji}}} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$\chi(v_{ji}, v_{ij})$  è la matrice di trasformazione dal SRI  $S_i$  a  $S_j$  espressa in funzione delle velocità relative  $v_{ij}$  e  $v_{ji}$  misurate nei due SRI.

### 2.5.1 – Trasformazioni temporali

Il criterio di sincronizzazione degli orologi in un sistema di riferimento inerziale è una definizione implicita della coordinata temporale in quel sistema. Se prendiamo in considerazione i due metodi di sincronizzazione degli orologi: la sincronizzazione standard, basata sul postulato della costanza di  $c$  unidirezionale, e la sincronizzazione assoluta, le definizioni di tempo che ne risultano saranno legate da una particolare trasformazione temporale che consentirà di passare da una sincronizzazione all'altra.

Consideriamo un osservatore situato nell'origine del suo sistema di riferimento che voglia sincronizzare col suo orologio  $O$ , un orologio  $O'$  posto a distanza  $x$  sull'asse  $X$  in modo standard. A tale scopo, quando il suo orologio  $O$  segna  $t = 0$  egli invia un segnale luminoso verso  $O'$  che viene regolato sul tempo  $t = x/c$  all'arrivo del segnale.

Se invece vuole effettuare una sincronizzazione assoluta dovrà considerare il fatto che la velocità del segnale da  $O$  a  $O'$  è generalmente diversa da  $c$  in funzione della velocità assoluta  $u$  del suo sistema inerziale. In accordo con le (2.3) la velocità della luce da  $O$  a  $O'$  è  $c_{O \rightarrow O'} = \frac{c}{1+u/c}$  perciò la regolazione di  $O'$  va fatta sul tempo

$\tau = t + \frac{ux}{c^2}$ . Si ha quindi la relazione

$$\tau = t + ux/c^2 \quad (2.21)$$

che collega il tempo standard  $t$  al tempo assoluto  $\tau$ .

## 2.5.2 – Decomposizione delle trasformazioni di Lorentz

Consideriamo in un SRI  $S$  di velocità assoluta  $u$  la trasformazione  $\mathbf{T}(u)$  che trasforma il tempo standard  $t$  nel tempo assoluto  $\tau$  secondo la relazione (2.21)

$$\tau = t + ux \quad (2.22)$$

avendo posto  $c = 1$ .

In forma matriciale, considerando soltanto un'unica coordinata spaziale, la  $\mathbf{T}(u)$  si scrive

$$\mathbf{T}(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Si verifica facilmente che la matrice inversa  $\mathbf{T}(u)^{-1} = \mathbf{T}(-u)$ .

La trasformazione di Lorentz (TL) dal sistema  $S$  al sistema  $S'$  che si muove con velocità  $v$  rispetto  $S$ , è

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

dove al solito  $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$ .

Indichiamo con  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice di Lorentz che compare nella (2.24), si osserva che si può sempre scrivere  $\mathbf{\Lambda}(v) = \mathbf{T}(-u')\mathbf{\chi}(u,w)\mathbf{T}(u)$  con  $\mathbf{\chi}(u,w)$  la matrice definita in (2.19), ovvero

$$\begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(u,w) & 0 \\ -w/R(u,w) & 1/R(u,w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

dove  $R(u,w) = \sqrt{(1-uw)^2 - w^2}$  è il solito coefficiente delle TI (2.12) e

$w = \frac{v}{1+uv}$  è la velocità di  $S'$  rispetto a  $S$  quale risulta dopo la risincronizzazione secondo la trasformazione temporale (2.22)

si ha infatti:  $d\tau = dt + u dx$  da cui  $w = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt + u dx} = \frac{dx/dt}{1 + u dx/dt} = \frac{v}{1 + uv}$  e

$u' = u + wR(0,u)^2 = u + w(1 - u^2)$  è la velocità assoluta di  $S'$  (quella di  $S$  è  $u$ ) come risulta dalla (2.15) posto  $i = 0$ ,  $S_k = S'$  e  $S_j = S$ <sup>22</sup>

<sup>22</sup> Si può anche ottenere  $u'$  così:  $u' = \frac{u+v}{1+uv}$  secondo le TL, e poi sostituire  $v = \frac{w}{1-uw}$

Osserviamo che non ci sono limitazioni formali per  $u$  nella (2.25), cioè si può porre anche  $|u| > 1$  che corrisponderebbe ad una velocità assoluta superluminale.

Le tre successive trasformazioni di coordinate che compaiono nella (2.25) hanno la seguente interpretazione operativa in cui la trasformazione di Lorentz da  $S$  a  $S'$  viene eseguita in tre fasi

- i) Si sincronizzano gli orologi di  $S$  assegnando un determinato valore alle velocità della luce unidirezionale nelle due direzioni opposte lungo l'asse  $X$  (si ha infatti  $c_+ = 1/(1+u)$  e  $c_- = 1/(1-u)$ )
- ii) Si eseguono le trasformazioni inerziali considerando  $S$  in moto assoluto con velocità  $u$
- iii) Si risincronizzano gli orologi con la procedura standard riportando così la velocità  $c = 1$  in tutte le direzioni di  $S'$ .

## 2.6 – Generalizzazione a sistemi di riferimento non collineari

Nella TRS, dati due sistemi inerziali  $S_A$  e  $S_B$  è sempre possibile, con una rotazione spaziale degli assi, porre  $S_A$  e  $S_B$  in configurazione tipica, ovvero con gli assi  $X_A$  e  $X_B$  sovrapposti e nella direzione del moto relativo; e gli assi  $Y_A, Y_B$  e  $Z_A, Z_B$  paralleli (e coincidenti al tempo  $t_A = t_B = 0$  con una opportuna traslazione temporale). In tale modo, le trasformazioni che legano  $S_A$  e  $S_B$ , assumono la forma particolarmente semplice delle TL in cui “si mescolano” soltanto la coordinata  $x$  e il tempo  $t$ .

Per le TI la situazione è diversa in quanto, sebbene sia possibile allineare la direzione delle velocità relative  $\mathbf{v}_{BA}$  e  $\mathbf{v}_{AB}$  con gli assi  $X_A$  e  $X_B$ , generalmente le velocità assolute  $\mathbf{u}_A$  e  $\mathbf{u}_B$  non hanno la stessa direzione di  $\mathbf{v}_{BA}$  e  $\mathbf{v}_{AB}$ .

È quindi interessante determinare le TI nel caso generale con i vettori velocità in direzione arbitraria.

Consideriamo inizialmente le TL da  $S_A$  a  $S_B$  in configurazione tipica che possiamo scrivere in forma matriciale come:

$$\mathbf{x}_B = \Lambda(v)\mathbf{x}_A \quad (2.26)$$

oppure in forma "estesa"

$$\begin{pmatrix} t_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

con  $\gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$ .

Sia ora la velocità di  $S_B$  rispetto  $S_A$   $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \sin\theta \cos\varphi \\ v \sin\theta \sin\varphi \\ v \cos\theta \end{pmatrix}$

La matrice  $3 \times 3$   $\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta \cos\varphi & -\cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \end{pmatrix}$  è una rotazione spaziale

degli assi che fa coincidere il vettore  $\mathbf{v}$  con la direzione di  $\mathbf{x}$ . Quindi la matrice  $4 \times 4$

$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathfrak{R}) & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  trasforma il sistema  $S_A$  in  $S'_A$  e  $S_B$  in  $S'_B$  tali che  $S'_A$  e  $S'_B$

sono in configurazione tipica. Dalla (2.26) allora

$$\mathbf{R}\mathbf{x}_B = \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}\mathbf{x}_A$$

e moltiplicando per  $\mathbf{R}^{-1}$  (che è uguale alla matrice trasposta  $\mathbf{R}^T$ ) si ha:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{R}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{R} \mathbf{x}_A$$

sicché la matrice  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{R}$  rappresenta la TL generale dal sistema  $S_A$  al sistema  $S_B$  che si muove con velocità  $\mathbf{v}$  rispetto  $S_A$ .

Eseguendo il calcolo ed esprimendo tutto attraverso le componenti cartesiane di  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , posto  $v = |\mathbf{v}|$  e  $\gamma = \gamma(v) = (1 - v^2)^{-1/2}$ , si trova:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \gamma & -\mathcal{W}_x & -\mathcal{W}_y & -\mathcal{W}_z \\ -\mathcal{W}_x & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_x^2 & \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_y & \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_z \\ -\mathcal{W}_y & \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_y & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_y^2 & \frac{\gamma-1}{v^2} v_y v_z \\ -\mathcal{W}_z & \frac{\gamma-1}{v^2} v_x v_z & \frac{\gamma-1}{v^2} v_y v_z & 1 + \frac{\gamma-1}{v^2} v_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Le TL generali possono essere scritte in forma compatta utilizzando la notazione vettoriale:

$$\begin{cases} t_B = \gamma (t_A - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_A) \\ \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \left( \frac{\gamma-1}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_A - \gamma t_A \right) \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.28)$$

Avremo bisogno in seguito della formula per la composizione di due velocità  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  comunque orientate secondo la TRS. Un modo abbastanza rapido per ottenerla è

quello di eseguire due trasformazioni date dalle (2.28), la prima con velocità  $\mathbf{v}$  di  $S_B$  rispetto  $S_A$  e la seconda con velocità  $\mathbf{v}'$  di  $S_C$  rispetto  $S_B$ . Si trova  $t_C = \gamma(v') \gamma(v) (t_A - \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_A)$  dove

$$\mathbf{w} = \frac{\left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma(v)} \right) \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \right] \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}'}{\gamma(v)}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}} \quad (2.29)$$

è la velocità di  $S_C$  rispetto  $S_A$ .

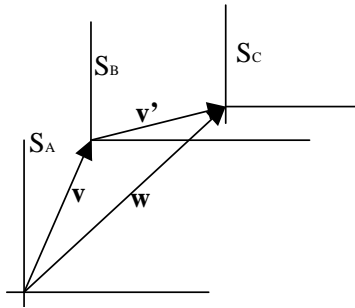


Fig.7 - Rappresentazione schematica della composizione delle velocità espressa dell'equazione (2.29).

## 2.7 – Trasformazioni inerziali tra riferimenti inerziali comunque orientati

Consideriamo ora la ovvia generalizzazione delle trasformazioni temporali (2.23) :

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & u_x & u_y & u_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{u}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \quad (2.30)$$

nell'ultima uguaglianza si è utilizzata una notazione ridotta dove  $\mathbf{u}^T$  è il vettore (riga)  $(u_x, u_y, u_z)$  dove l'indice T sta per trasposto,  $\mathbf{0}$  è il vettore (colonna) nullo e  $\mathbf{I}$  è la matrice identità 3x3. Con questa notazione la (2.27) si semplifica in

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{v}) = \left( \begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \mathbf{v}^T \\ -\gamma \mathbf{v} & \mathbf{I} + \frac{\gamma-1}{v^2} \mathbf{v} * \mathbf{v}^T \end{array} \right) \quad (2.31)$$

dove con  $\mathbf{v} * \mathbf{v}^T$  si è indicato il prodotto matriciale

$$\mathbf{v} * \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & v_y^2 & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & v_z^2 \end{pmatrix}$$

Indichiamo con  $\mathbf{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  la trasformazione inerziale generalizzata da un sistema  $S_A$  in moto assoluto con velocità  $\mathbf{u}$  ad un sistema  $S_B$  in moto rispetto a  $S_A$  con velocità  $\mathbf{v}$ . Deve valere una relazione analoga alla (2.25) ovvero:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{w}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}')^{-1} \mathbf{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{T}(\mathbf{u})$$

da cui

$$\mathbf{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}') \mathbf{\Omega}(\mathbf{w}) \mathbf{T}(\mathbf{u})^{-1} \quad (2.32)$$

dove abbiamo indicato con  $\mathbf{w}$  la velocità di  $S_B$  rispetto ad  $S_A$  misurata con la sincronizzazione standard (mentre  $\mathbf{v}$  è misurata con la sincronizzazione assoluta) e  $\mathbf{u}'$  è la velocità assoluta di  $S_B$ .

Possiamo calcolare  $\mathbf{w}$  per mezzo delle trasformazioni temporali (2.30).

Si ottiene il tempo inerziale  $\tau = t + \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$  dove  $t$  è il tempo standard e  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , per cui  $dt = d\tau + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$  quindi, poiché  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ,

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau - \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \quad (2.33)$$

Per calcolare  $\mathbf{u}'$ , poiché non possediamo la formula di composizione delle velocità secondo le TI generalizzate, procediamo in maniera analoga a quanto descritto nella nota 22 a pag.36 e, utilizzando la (2.29), si trova:

$$\mathbf{u}' = \frac{\left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{\gamma(w)} \right) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{w^2} \right] \mathbf{w} + \frac{\mathbf{u}}{\gamma(w)}}{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}$$

Sostituendo  $\mathbf{w}$  con  $\mathbf{v}/(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$  in base alla (2.33), e osservando che

$$\frac{1}{\gamma(w)} = \sqrt{1 - w^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}} = \frac{\sqrt{(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \quad (2.34)$$

si ottiene:

$$\mathbf{u}' = R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mathbf{u} + \left[ (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - R(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} + 1 \right] \mathbf{v}$$

dove  $R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2}$ .

Utilizzando la (2.33) e la (2.34)  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{w})$  dato dalla (2.31) diventa:



$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{w}) = \left( \begin{array}{c|c} \gamma(w) & -\gamma(w)\mathbf{w}^\top \\ \hline -\gamma(w)\mathbf{w} & \mathbf{I} + \frac{\gamma(w)-1}{v^2} \mathbf{w} * \mathbf{w}^\top \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R(\mathbf{u}, \mathbf{v})} & \frac{-\mathbf{v}^\top}{R(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \\ \hline \frac{-\mathbf{v}}{R(\mathbf{u}, \mathbf{v})} & \mathbf{I} + \left( \frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R(\mathbf{u}, \mathbf{v})} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} * \mathbf{v}^\top}{v^2} \end{array} \right)$$

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per il calcolo esplicito di  $\mathbf{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  tramite la (2.32)

$$\mathbf{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & R\mathbf{u}^\top + \left[ (1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - R) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} + 1 \right] \mathbf{v}^\top \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} & \frac{-\mathbf{v}^\top}{R} \\ \hline \frac{-\mathbf{v}}{R} & \mathbf{I} + \left( \frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} * \mathbf{v}^\top}{v^2} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} 1 & -\mathbf{u}^\top \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right)$$

eseguendo le moltiplicazioni si ottiene infine:

$$\mathbf{I}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \begin{array}{c|c} R & \mathbf{0} \\ \hline -\frac{\mathbf{v}}{R} & \mathbf{I} + \frac{\mathbf{v} * \mathbf{u}^\top}{R} + \left( \frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} * \mathbf{v}^\top}{v^2} \end{array} \right)$$

con  $R = R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2}$ .

Quindi le TI generalizzate sono:

$$\begin{cases} t' = Rt \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{R} \mathbf{v} + \left( \frac{1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} \mathbf{v} - \frac{t}{R} \mathbf{v} \end{cases} \quad (2.35)$$

Consideriamo alcuni casi particolari che ci serviranno in seguito:

- i) Se  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  e  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$  si riottengono le (2.17)
- ii) Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono dati è sempre possibile ruotando gli assi di S e S' fare in modo che risulti  $\mathbf{u} = (u \cos\theta, u \sin\theta, 0)$  e  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ . In questo modo la (2.35) diventa

$$\begin{cases} t' = \sqrt{(1-uv\cos\theta)^2 - v^2} t \\ x' = \frac{x - vt + yuv\sin\theta}{\sqrt{(1-uv\cos\theta)^2 - v^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (2.36)$$

### 2.7.1 – Composizione delle velocità

Considerando le TI generalizzate date nella (2.35) supponiamo che  $\mathbf{r}$  sia funzione di  $t$  (cioè  $\mathbf{r}(t)$  sia l'equazione del moto di un corpo in moto nel sistema S). Siano  $\mathbf{w} = d\mathbf{r}/dt$  e  $\mathbf{w}' = d\mathbf{r}'/dt'$  le velocità del corpo rispetto a S e S' rispettivamente. Differenziando le (2.35) si ha:

$$\mathbf{w}' = \frac{1}{R} \left[ \mathbf{w} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{R} \mathbf{v} + \left( \frac{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{v^2} \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}}{R} \right] \quad (2.37)$$

e risolvendo rispetto a  $\mathbf{w}$  si trova:

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + R \left[ \mathbf{w}' - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}') \mathbf{v} - (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - R) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}'}{v^2} \mathbf{v} \right] \quad (2.38)$$

Adoperando la notazione con doppio indice introdotta sopra, posto  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_{31}$ ,  $\mathbf{w}' = \mathbf{v}_{32}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{21}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  e  $R = R_{21}$ , la (2.38) si scrive:

$$\mathbf{v}_{31} = R_{21} \mathbf{v}_{32} + \left[ 1 - R_{21} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{32} - \frac{R_{21}}{v_{21}^2} (1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{21} - R_{21}) \mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{v}_{32} \right] \mathbf{v}_{21} \quad (2.39)$$

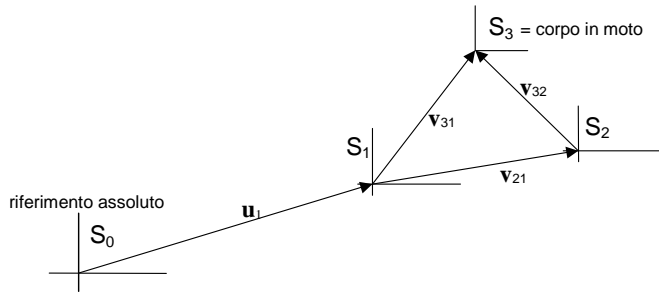


Fig.8 – rappresentazione schematica della composizione delle velocità espressa dell'equazione (2.39)

Se si fanno coincidere  $S_3$  con  $S_1$  dalla (2.39) si ottiene:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_{11} = R_{21} \mathbf{v}_{12} + \left[ 1 - R_{21} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{12} - \frac{R_{21}}{v_{21}^2} (1 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{21} - R_{21}) \mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{v}_{12} \right] \mathbf{v}_{21} \quad (2.40)$$

moltiplicando per  $\mathbf{v}_{21}$  e semplificando si ha:

$$(\mathbf{v}_{12} \cdot \mathbf{v}_{12}) R_{21}^2 + [(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{12}) v_{21}^2 - (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_{21})(\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{v}_{12})] R_{21} + v_{21}^2 = 0$$

per proseguire il calcolo poniamo  $\mathbf{a} = \mathbf{v}_{21}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{v}_{12}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$  e  $R = R_{21}$  e, utilizzando la convenzione di sommare su gli indici ripetuti, possiamo scrivere la (2.40) come:

$$a_i b_i R^2 - (u_i b_i a_j a_j - u_i a_i a_j b_j) R + a_i a_i = 0$$

ovvero

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} R^2 - \left[ (\delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \delta_{jl}) u_i b_l a_j a_k \right] R + a^2 = 0$$

e quindi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} R^2 - \left[ \varepsilon_{ijn} \varepsilon_{nlk} u_i b_l a_j a_k \right] R + a^2 = 0$$

cioè

$$\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{v}_{12} R_{21}^2 - (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{21}) \cdot (\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{v}_{21}) R_{21}^2 + v_{21}^2 = 0 \quad (2.41)$$

ma osservando la (2.40) si nota che i vettori  $\mathbf{v}_{21}$  e  $\mathbf{v}_{12}$  sono paralleli<sup>23</sup> in quanto è nulla una loro combinazione lineare, quindi  $\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{v}_{12} = -v_{21} v_{12}$  ( $\mathbf{v}_{21}$  e  $\mathbf{v}_{12}$  sono comunque opposti) e  $\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{v}_{21} = 0$ .

Per cui la (2.41) diventa:  $-v_{21} \cdot v_{12} R_{21}^2 + v_{21}^2 = 0$  da cui segue

$$R_{21} = \sqrt{-\frac{v_{21}}{v_{12}}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{v}_{21}|}{|\mathbf{v}_{12}|}} \quad (2.42)$$

ma poiché  $\mathbf{v}_{21}$  e  $\mathbf{v}_{12}$  sono paralleli, vale anche:

$$\mathbf{v}_{21} = -R_{21}^2 \mathbf{v}_{12} \quad (2.43)$$

che collega le reciproche velocità tra i due SRI  $S_1$  e  $S_2$ .

Infine dalla (2.37) si trova l'espressione della velocità  $\mathbf{v}_{21}$  di  $S_2$  rispetto a  $S_1$  in funzione delle velocità assolute  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  dei due sistemi:

$$\mathbf{v}_{21} = \frac{(\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \hat{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_1}{1 - u_1^2} - \frac{(\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \hat{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{u}_2}{\sqrt{1 - u_1^2}} \quad (2.44)$$

dove  $\hat{\mathbf{u}}_1 \equiv \mathbf{u}_1 / u_1$  è il versore nella direzione di  $\mathbf{u}_1$ .

## 2.7.2 – Precessione di Thomas

Se nella (2.44) si esegue lo scambio degli indici  $1 \rightarrow 2$  e  $2 \rightarrow 1$  si ottiene ovviamente la velocità  $\mathbf{v}_{12}$  del sistema  $S_1$  rispetto al sistema  $S_2$ . Può lasciare a prima vista perplessi il fatto che le due velocità  $\mathbf{v}_{21}$  e  $\mathbf{v}_{12}$  così ottenute non siano generalmente parallele come si può verificare ad esempio svolgendo il prodotto vettoriale

<sup>23</sup> A rigore non si dovrebbe parlare di parallelismo per due vettori che sono definiti in due sistemi di riferimento diversi. Quindi il senso da attribuire all'asserzione che “ $\mathbf{v}_{21}$  e  $\mathbf{v}_{12}$  sono paralleli” consiste in qualcosa come “il vettore  $\mathbf{v}$  in  $S_1$  che ha le stesse componenti numeriche di  $\mathbf{v}_{12}$  in  $S_1$  risulta parallelo a  $\mathbf{v}_{21}$ ”. È evidente che questa nozione di parallelismo in senso allargato dipende dall'orientazione reciproca dei sistemi di riferimento  $S_1$  e  $S_2$ .

$\mathbf{v}_{12} \times \mathbf{v}_{21}$  che risulta non nullo. Questo è in apparente contrasto con quanto visto sopra in riferito all'equazione (2.40). Si deve però tenere presente che, nelle ipotesi che sostengono la (2.44) si ha che il sistema  $S_0$  è collineare<sup>24</sup> col sistema  $S_1$  il quale è a sua volta collineare col sistema  $S_2$  ma la relazione di collinearità tra sistemi non gode della proprietà transitiva quindi, in generale, il sistema  $S_2$  non è collineare con  $S_0$ . Coticché, quando nella (2.44) gli indici 1 e 2 sono scambiati, i sistemi  $S_1$  e  $S_2$  si scambiano di ruolo ma ora è il sistema  $S_2$  a essere collineare con  $S_0$  mentre  $S_1$  non lo è più è chiaro quindi che la velocità  $\mathbf{v}_{12}$  si riferisce non più ai due vecchi sistemi  $S_1$  e  $S_2$  ma a due sistemi ruotati rispetto a questi.

Il fatto che la collinearità tra sistemi non sia una proprietà transitiva è ben noto nella TRS. La precessione di Thomas ne è una conseguenza. Vediamo quindi che anche nella teoria qui esposta è previsto tale effetto.

## 2.8 – Proprietà algebriche delle trasformazioni inerziali

### 2.8.1 – Gruppo delle trasformazioni inerziali estese

Esaminiamo qui alcune proprietà formali delle TI limitandoci, per semplicità, a trasformazioni che coinvolgono il tempo e una sola coordinata spaziale. In base al risultato espresso dalla (2.42).

Le trasformazioni inerziali (2.20) sono realizzate, secondo la (2.19) da matrici  $\chi(a,b)$  del tipo

$$\chi(a,b) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\frac{a}{b}} & 0 \\ -a\sqrt{-\frac{b}{a}} & \sqrt{-\frac{b}{a}} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

con  $a, b$  reali tali che  $ab < 0$

Consideriamo l'insieme  $M$  formato dalle matrici del tipo (2.45), a cui aggiungiamo la matrice

$$\text{identità } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>24</sup> Qui definiamo due sistemi collineari se le loro reciproche velocità relative formano gli stessi angoli con gli assi dei rispettivi sistemi di riferimento.

L'insieme  $M \cup \{ I \}$  con l'operazione di prodotto tra matrici non forma un gruppo perché, pur possedendo alcune proprietà dei gruppi, non è chiuso rispetto l'operazione di moltiplicazione. Si ha infatti che

- Esiste l'elemento neutro che è ovviamente  $I$ .
- Esiste l'elemento inverso e si verifica facilmente che  $\chi(a,b)^{-1} = \chi(b,a)$ .
- La proprietà associativa consegue dal valere la stessa proprietà per il prodotto tra matrici.
- Per ogni  $\chi(a,b)$  e  $\chi(c,d)$  con  $ab < 0$ ,  $cd < 0$  e  $a \neq d$ , vale la legge di composizione<sup>25</sup>

$$\chi(a,b)\chi(c,d) = \chi\left(\frac{c}{d}(d-a), \frac{b}{a}(a-d)\right) \quad (2.46)$$

però, se  $a = d$ , questa relazione perde significato perché  $\chi(0,0)$  non appartiene a  $M \cup \{ I \}$ .

Il calcolo diretto mostra infatti che

$$\chi(a,b)\chi(c,a) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{b}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{b}{c}} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

che chiaramente non appartiene a  $M$  né è la matrice identità  $I$ .  
Notiamo però che la (2.47) può essere scritta come

$$\chi(a,b)\chi(c,a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\varepsilon, -\varepsilon b/c)$$

consideriamo quindi l'insieme  $M'$  formato dalle matrici "limite" del tipo  $\chi'(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\varepsilon, -\varepsilon k)$  con  $k > 0$ , ovvero:

$$\chi'(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\varepsilon, -\varepsilon k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{k} & \sqrt{k} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Si ha che l'insieme  $M \cup M'$ , col prodotto matriciale come operazione di composizione interna, forma un gruppo. Infatti

- L'elemento neutro è l'identità  $I = \chi'(1) \in M'$
- Ogni elemento ha un inverso  $\chi(a,b)^{-1} = \chi(b,a)$  e  $\chi'(k)^{-1} = \chi'(k^{-1})$
- Valgono le seguenti regole di composizione:

<sup>25</sup> Si osservi che il secondo membro della (2.46) è senz'altro un elemento del gruppo perché

$$\frac{c}{d}(d-a) \cdot \frac{b}{a}(a-d) = -\frac{c}{d} \frac{b}{a} (a-d)^2 < 0$$

$$\begin{aligned}
\chi'(k)\chi'(h) &= \chi'(kh) \\
\chi'(k)\chi(a,b) &= \chi(a,kb) \\
\chi(a,b)\chi'(h) &= \chi(a/h,b) \\
\chi(a,b)\chi(c,d) &= \begin{cases} \chi((c/d)(d-a), (b/a)(a-d)) & \text{se } a \neq d \\ \chi'(b/c) & \text{se } a = d \end{cases}
\end{aligned}$$

- Vale ovviamente la legge associativa

## 2.8.2 – Significato fisico del gruppo di trasformazioni inerziali estese

Al contrario delle trasformazioni di Lorentz dove ogni trasformazione  $\Lambda(v)$  collega infinite coppie di sistemi di riferimento inerziali, ovvero tutte quelle coppie che hanno velocità relativa  $v$ , la TI associata alla matrice  $\chi(v_{21}, v_{12})$  collega una ed una sola coppia di sistemi  $S_1$  e  $S_2$ . Infatti specificando le velocità relative  $v_{21}$  e  $v_{12}$  restano fissate anche le velocità assolute  $u_1$  e  $u_2$  come si può dedurre dalla (2.44). Perciò, mentre componendo due trasformazioni di Lorentz,  $\Lambda(w)$  e  $\Lambda(v)$ , che trasformano rispettivamente i sistemi  $S_1$  in  $S_2$  e  $S_3$  in  $S_4$ , è normale considerare  $S_2$  coincidente con  $S_3$ , questa identificazione non è invece possibile con le TI in quanto  $S_2$  e  $S_3$  hanno in generale velocità assolute  $u_2$  e  $u_3$  differenti.

Soltanto un prodotto del tipo  $\chi(v_{4k}, v_{k4})\chi(v_{k1}, v_{1k})$  dà  $\chi(v_{41}, v_{14})$ , questo prodotto corrisponde alle successive trasformazioni  $S_1 \rightarrow S_k \rightarrow S_4$ . Ma cosa rappresenta allora la matrice  $\tilde{\chi} = \chi(v_{43}, v_{34})\chi(v_{21}, v_{12})$  quando i sistemi  $S_2$  e  $S_3$  sono distinti?

$\tilde{\chi}$  rappresenta ancora una trasformazione inerziale (eventualmente limite, cioè appartenente a  $M'$ ) e si tratta ancora di trasformazione da  $S_1$  a  $S_4$ . Quello che cambia è però il sistema di riferimento assoluto  $S_0$ . In altre parole  $\tilde{\chi}$  trasforma le coordinate degli eventi da  $S_1$  a  $S_4$ , però ora le velocità assolute di questi due sistemi di riferimento sono prese rispetto ad un nuovo riferimento assoluto  $S'_0$ . Il nuovo riferimento assoluto  $S'_0$  può essere fisicamente non realizzabile perché le nuove velocità assolute  $u'_1$  e  $u'_4$  di  $S_1$  e  $S_4$  relative a  $S'_0$  possono essere superluminali e in questo caso si ha  $\tilde{\chi} \in M'$ . È infatti possibile, con una scelta diversa del sistema assoluto, fare in modo che  $\chi(v_{43}, v_{34})\chi(v_{21}, v_{12}) = \chi(v_{4k}, v_{k4})\chi(v_{k1}, v_{1k}) = \chi(v_{41}, v_{14})$  per un certo opportuno SRI  $S_k$ .

Risulta quindi che se è effettivamente possibile fissare arbitrariamente il sistema di riferimento assoluto allora l'insieme delle TI con le trasformazioni improprie rappresenta un gruppo. In caso contrario l'insieme non è chiuso perché non è possibile attribuire alcun significato ad alcuni prodotti.

Il fatto che possa essere scelto anche un sistema di riferimento assoluto non fisico cioè un riferimento rispetto al quale la velocità dei sistemi fisici (dove noi ci troviamo) è pari o superiore a  $c$ , non può produrre alcuna contraddizione perché in ogni caso le TI proprie collegano soltanto sistemi di riferimento fisici.

### 3 – Moto rigido di un corpo esteso

In meccanica non relativistica si definisce “corpo rigido” un corpo ideale le cui distanze relative tra i suoi punti materiali non variano nel tempo, indipendentemente dalle forze applicate al corpo e dal suo stato di moto<sup>26</sup>. Tale definizione, anche se ovviamente può essere solo approssimativamente verificata per un corpo reale, è compatibile con la meccanica non relativistica. È però evidentemente incompatibile con la relatività in quanto l'ipotetica esistenza di un corpo perfettamente rigido permetterebbe la propagazione istantanea dei segnali in qualunque direzione.

Indebolendo la richiesta di corpo perfettamente rigido si può richiedere, invece della indeformabilità del corpo sotto l'azione di qualsivoglia forza, che il corpo mantenga le distanze reciproche dei suoi punti rispetto ogni SRI, anche descrivendo un moto d'insieme nello spazio. Eventualmente sarà necessario applicare a ognuno dei suoi punti materiali una opportuna forza.

Secondo la relatività standard, tuttavia, solo il moto rettilineo uniforme e senza rotazione può essere rigido in questo senso, cioè *per ogni* osservatore inerziale.

Che le cose stiano così si può vedere dalle seguenti considerazioni:

Consideriamo prima un moto di un corpo  $C$  puramente di traslazione (senza rotazione) rispetto ad un SRI  $S$ .

Dati due punti distinti  $P$  e  $Q$  di  $C$ , il vincolo di “rigidità” in  $S$  richiede che la loro velocità sia la stessa in ogni istante di tempo:  $\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_Q(t) \equiv \mathbf{v}(t)$ . Ciò implica che in un altro SRI  $S'$  di velocità  $\mathbf{u}$  rispetto ad  $S$  valga  $\mathbf{v}'(t'_P) = \mathbf{v}'(t'_Q)$ , dove, secondo la trasformazione di Lorentz dei tempi

$$t'_P = \left[ t - \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_P(t) / c^2 \right] (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \quad , \quad t'_Q = \left[ t - \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_Q(t) / c^2 \right] (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$$

$\mathbf{r}_P(t)$  e  $\mathbf{r}_Q(t)$  sono le posizioni di  $P$  e  $Q$  in  $S$  e  $\mathbf{v}'(t')$  si ottiene componendo relativisticamente le velocità  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

Si ha che la differenza dei tempi

$$\Delta t' = t'_P - t'_Q = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t))}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

assume ogni valore numerico reale al variare di  $\mathbf{u}$ , cioè del SRI  $S'$ . Per cui, per ogni  $\Delta t'$ , si ha  $\mathbf{v}'(t'_P) = \mathbf{v}'(t'_Q) = \mathbf{v}'(t'_P + \Delta t')$ , ovvero  $\mathbf{v}'_P(t) = \mathbf{v}'_Q(t) = \text{costante}$  e quindi costante in ogni SRI.

<sup>26</sup> Non sarebbe necessario specificare l'indipendenza dallo stato di moto nel caso non relativistico perché la contrazione delle lunghezze non esiste classicamente.

Nel caso il corpo  $C$  esegua un moto con rotazione esistono almeno due punti distinti  $P$  e  $Q$  di  $C$  tali che il loro segmento congiungente  $\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t)$  cambia direzione nel tempo rispetto ad  $S$ . Supponiamo allora che la distanza  $d = |\mathbf{r}_P(t) - \mathbf{r}_Q(t)|$  resti costante in  $S$  durante il moto. Sia  $S'$  un SRI in moto rispetto ad  $S$  nella direzione, ad esempio, di  $\mathbf{r}_P(0) - \mathbf{r}_Q(0)$ . Anche in questo riferimento il segmento ruota ed assume necessariamente diverse inclinazioni rispetto alla direzione del moto di  $S'$ . La contrazione relativistica sarà perciò massima quando il segmento è allineato con la direzione del moto di  $S$  riducendosi quando il segmento, ruotando, si inclina rispetto a questa direzione. Ovvero la distanza di  $P$  e  $Q$  se è costante in  $S$  varia in  $S'$ .

### 3.1 – moto rigido di Born

Tutto quello che si può ottenere è, con un ulteriore indebolimento delle richieste, che il corpo esteso mantenga le distanze tra i suoi punti durante il moto solo rispetto ad alcuni particolari SRI. Una scelta che appare naturale è che il corpo resti indeformato soltanto rispetto ai sistemi di riferimento di quiete istantanea cioè che la distanza tra i punti misurata nell'istante in cui questi sono fermi in un certo SRI  $S'$  sia sempre la stessa. Tale distanza è detta *distanza propria* e il SRI  $S'$  *sistema di riferimento comovente istantaneo*.

È qui da osservare che l'esistenza di SRI comoventi in cui *tutti* i punti del corpo sono simultaneamente fermi (che indicheremo come SRI *comoventi globali*) non è affatto scontata a priori. In ogni caso, la proprietà per un SRI di essere comovente globale rispetto al moto di un corpo esteso dipende dal tipo di moto e, come si vedrà, dalla sincronizzazione degli orologi. Questa proprietà è perciò convenzionale nella stessa misura in cui lo è la sincronizzazione degli orologi.

Si definisce *moto rigido di Born* la condizione di moto di un corpo esteso in cui la distanza tra i suoi punti resta localmente costante nel SRI comovente istantaneo (si veda ad esempio [24]). Ovvero la lunghezza del segmento che congiunge due punti “infinitamente” vicini è la stessa in tutti i SRI in cui il segmento si trova istantaneamente in quiete. La necessità di specificare la conservazione della distanza soltanto per elementi di lunghezza *infinitesimi*, dipende dal fatto che in generale, per moti arbitrari, non esiste un SRI comovente globale in cui tutti i punti sono contemporaneamente in quiete.

Non è possibile in generale soddisfare questa condizione di rigidità per moti arbitrari, ad esempio è noto che i moti con rotazione non possono essere rigidi secondo Born (teorema di Herglotz-Noether [25]). Ciò nonostante questa definizione pare essere la più naturale in quanto sembra suggerire che osservatori che viaggiano solidamente con il corpo, quindi osservatori non inerziali, non avvertono variazioni nelle dimensioni del corpo stesso.<sup>27</sup>

<sup>27</sup> Questa conclusione ha senso solo se si assimilano questi osservatori non inerziali con la successione continua di osservatori comoventi (inerziali).



### 3.2 – Moto uniformemente accelerato di un corpo esteso

Come esempio esaminiamo il moto rigido (secondo Born) uniformemente accelerato di una barra nelle direzione della sua lunghezza [24]. Questo particolare moto è caratterizzato dal fatto che ogni punto del corpo ha accelerazione propria costante, inoltre, esiste in ogni istante un SRI comovente globale in cui *tutto* il corpo si trova istantaneamente in quiete. Perciò, per il vincolo di Born-rigidità, si può richiedere che la lunghezza dell'intero corpo sia costante nel riferimento globale di quiete istantanea e non soltanto la lunghezza locale dell'elemento infinitesimo.

Questa proprietà fa pensare che in questo tipo di moto il corpo non subisca stress dovuti a deformazioni in quanto in ogni istante le singole parti sono, rispetto ad osservatori comoventi, ferme ed alla stessa distanza. Tuttavia questa particolarità, come si vedrà, dipende dalla sincronizzazione infatti imponendo le stesse condizioni con la sincronizzazione assoluta si ottiene un altro tipo di moto.

Per un confronto si esaminerà il moto uniformemente accelerato di un corpo esteso soggetto al vincolo di rigidità di Born prima utilizzando le trasformazioni di Lorentz poi le trasformazioni inerziali.

#### 3.2.1 – Descrizione del moto rigido secondo la relatività standard

Poiché siamo interessati soltanto l'aspetto cinetico del moto non è necessario considerare le forze interne sui “punti materiali” del corpo. Pertanto si può modellizzare una sottile barra materiale con un insieme di punti disposti sull'asse  $x$  e indicizzati da un indice discreto  $i$ .

Dunque supponiamo che ciascuno di questi punti si muova in  $S$  di moto uniformemente accelerato con accelerazione propria  $\alpha_i$  nella direzione delle  $x$  positive. L'equazione del moto lungo l'asse  $x$  di ciascuno di questi punti può essere scritta come [26]

$$x_i(t) = \frac{1}{\alpha_i} \left( \sqrt{1 + \alpha_i^2 t^2} - 1 \right) + \lambda_i \quad (3.1)$$

(si è posto  $c = 1$ )

$\lambda_i$  è la posizione del punto materiale  $i$ -esimo al tempo  $t = 0$  (supponiamo  $\lambda_i > 0$ ).  
Velocità e accelerazioni sono rispettivamente:

$$v_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\alpha_i t}{\sqrt{1 + \alpha_i^2 t^2}} \quad (3.2)$$

$$a_i(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{\alpha_i}{(1 + \alpha_i^2 t^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

Questi moti, osservati da un SRI S' che ha velocità  $u$  relativamente ad S nella direzione delle  $x$  positive, ottenuti tramite le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} t = \gamma(t' + ux') \\ x = \gamma(x' + ut') \end{cases}, \quad \gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$$

hanno equazione

$$x'_i(t') = \frac{1}{\alpha_i} \left( \sqrt{1 + \alpha_i^2 (t' - \tau'_i)^2} - \gamma \right) + \gamma \lambda_i \quad (3.4)$$

$$v'_i(t') = \frac{\alpha_i (t' - \tau'_i)}{\sqrt{1 + \alpha_i^2 (t' - \tau'_i)^2}}$$

$$a'_i(t') = \frac{\alpha_i}{[1 + \alpha_i^2 (t' - \tau'_i)^2]^{3/2}}$$

dove si è posto  $\tau'_i \equiv \mu \left( \frac{1}{\alpha_i} - \lambda_i \right)$ .

All'istante  $t' = \tau'_i$  si ha  $v'_i(\tau'_i) = 0$  e  $a'_i(\tau'_i) = \alpha_i$  cioè il punto  $i$ -esimo della barra è fermo e ha accelerazione (propria)  $\alpha_i$ . Se si impone il vincolo secondo cui *ogni* punto della barra sia contemporaneamente fermo nel SRI S', ne consegue che  $\tau'_i$  non può dipendere da  $i$ , ovvero che  $\frac{1}{\alpha_i} - \lambda_i = \lambda$  (costante indipendente da  $i$ ).

Questo comporta però che l'accelerazione propria  $\alpha_i = \frac{1}{\lambda + \lambda_i}$  è diversa per ogni punto della barra.

Con queste accelerazioni le equazioni del moto in S' date dalla (3.4) diventano

$$x'_i(t') = \sqrt{(\lambda + \lambda_i)^2 + (t' - \tau'_i)^2} - \lambda \gamma$$

e in particolare al tempo  $t' = \tau' = \mu \lambda$  si ha  $x'_i(\tau') = \lambda(1 - \gamma) + \lambda_i$  cosicché la distanza (propria) tra due punti qualunque  $i$  e  $j$  della barra è

$$x'_j(\tau') - x'_i(\tau') = \lambda(1 - \gamma) + \lambda_j - [\lambda(1 - \gamma) + \lambda_i] = \lambda_j - \lambda_i$$

cioè costante.

È evidente che per ottenere questo tipo di moto di una barra reale è necessario applicare a ogni suo punto una forza diversa (che cresce più ci si avvicina al punto di coordinata  $x = -\lambda$ ). Apparentemente sembra che la barra non subisca alcuno stress di stiramento o compressione da parte di queste forze in quanto la lunghezza

propria resta immutata. Tuttavia va considerato che l'accelerazione è diversa per ciascun punto, come appare evidente osservando le linee orarie differenti che questi punti descrivono nello spazio-tempo (Fig.9),

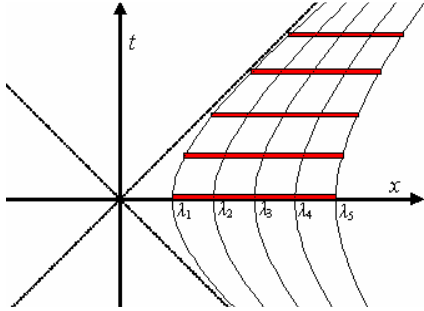


Fig.9 - Moto rigido uniformemente accelerato di una barra. Ogni punto esegue un moto iperbolico con diversa accelerazione.

quindi anche il tempo proprio misurato in ciascun punto dalla partenza da S fino al tempo  $t' = \tau' = \gamma u \lambda$ , dipende dal punto  $i$  considerato. Infatti questo tempo proprio è dato da

$$T_i = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - [v_i(t)]^2} dt$$

dove  $v_i(t) = \frac{t}{\sqrt{(\lambda + \lambda_i)^2 + t^2}}$  è la velocità in S dell' $i$ -esimo punto ottenuto dalla

(3.2) con  $\alpha_i = \frac{1}{\lambda + \lambda_i}$  e  $\tau$  è il tempo in S corrispondente al tempo  $\tau'$  nel punto  $x'_i(\tau')$  in S' secondo le trasformazioni di Lorentz:

$$\tau = \gamma(\tau' + ux'(\tau')) = \gamma\{\gamma u \lambda + u[(1 - \gamma)\lambda + \lambda_i]\} = \gamma u(\lambda + \lambda_i).$$

Quindi si trova

$$T_i = \int_0^{\gamma u(\lambda + \lambda_i)} \frac{\lambda + \lambda_i}{\sqrt{(\lambda + \lambda_i)^2 - t^2}} dt = (\lambda + \lambda_i) \tanh^{-1} u$$

che dipende da  $\lambda_i$ , ovvero esiste uno sfasamento temporale relativo tra due punti  $i$  e  $j$  della barra proporzionale alla loro distanza:

$$\Delta T_{ij} \equiv T_j - T_i = (\lambda_j + \lambda_i) \tanh^{-1} u$$

Questa perdita di coerenza temporale tra le differenti parti del corpo rigidamente accelerato secondo Born dovrebbe essere considerato alla stregua della deformazione spaziale nel senso che, analogamente a quest'ultima, la struttura dell'oggetto accelerato dovrebbe resistere ai cambiamenti nella relazione di fase tra le varie parti. La ragione di ciò risiede nel fatto che ciò che è uno sfasamento nel

tempo risulta uno sfasamento nello spazio (cioè una variazione di distanza) e viceversa, secondo la sincronizzazione scelta.

Vediamo infatti cosa cambia se si considerano le trasformazioni inerziali per passare dal riferimento S a S'.

### 3.2.2 – Descrizione del moto rigido secondo la relatività con le TI

Per trattare il caso più generale supponiamo che il sistema S dove, come prima, la barra è inizialmente ferma abbia velocità assoluta  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  comunque orientata. Il moto dei vari punti di coordinate iniziali  $(\lambda_i, 0, 0)$ , avvenga come prima nelle direzione positiva dell'asse  $x$  di S secondo le equazioni (3.1) (3.2) e (3.3). Per determinare le equazioni del moto in S', di velocità  $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$  rispetto ad S, utilizziamo le trasformazioni inerziali generali date dalle (2.35) che qui riporto:

$$\begin{cases} t' = Rt \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{R} \mathbf{v} + \left( \frac{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} \mathbf{v} - \frac{t}{R} \mathbf{v} \end{cases} \quad (3.5)$$

specializzate per questa configurazione:

$$\begin{cases} t' = Rt \\ x' = \frac{x - w(t + yu_y + zu_z)}{R} \\ y' = y \quad , \quad z' = z \end{cases}$$

con  $R = \sqrt{(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 - \mathbf{w}^2} = \sqrt{(1 - u_x w)^2 - w^2}$ .

Le equazioni del moto in S' risultano essere:

$$x'_i(t') = \frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\alpha_i} \sqrt{R^2 + \alpha_i^2 t'^2} - w t' \right) - \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\alpha_i} - \lambda_i \right) \quad (3.6)$$

e ovviamente anche  $y'_i(t') = z'_i(t') = 0$  essendo  $y_i(t) = z_i(t) = 0$ , quindi queste coordinate possono essere trascurate nel seguito.

Derivando rispetto a  $t'$  si trovano le velocità e le accelerazioni:

$$v'_i(t') = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\alpha_i t'}{\sqrt{R^2 + \alpha_i^2 t'^2}} - w \right) \quad (3.7)$$

$$a'_i(t') = \frac{\alpha_i}{(R^2 + \alpha_i^2 t'^2)^{3/2}} \quad (3.8)$$

Se ora poniamo, come prima,  $\alpha_i = \frac{1}{\lambda + \lambda_i}$  per ottenere il moto rigido di Born, si ha:

$$x'_i(t') = \frac{1}{R^2} \left( \sqrt{R^2(\lambda + \lambda_i)^2 + t'^2} - wt' \right) - \frac{\lambda}{R} \quad (3.9)$$

$$v'_i(t') = \frac{1}{R^2} \left( \frac{t'}{\sqrt{R^2(\lambda + \lambda_i)^2 + t'^2}} - w \right) \quad (3.10)$$

$$a'_i(t') = \frac{(\lambda + \lambda_i)^2}{[R^2(\lambda + \lambda_i)^2 + t'^2]^{3/2}} \quad (3.11)$$

Dalla (3.10) risulta che  $v'_i(t') = 0$  se e solo se  $t' = \tau_i \equiv \frac{Rw(\lambda + \lambda_i)}{\sqrt{1-w^2}}$ , ovvero, i diversi punti della barra non sono fermi simultaneamente in S' ma in istanti successivi.

La lunghezza di un elemento infinitesimo istantaneamente in quiete in S' si può calcolare come differenza di due punti del corpo adiacenti:  $x'_{i+1}(t') - x'_i(t')$  all'istante

$$t' = \tau_i \equiv \frac{Rw(\lambda + \lambda_i)}{\sqrt{1-w^2}}.$$

Supponendo in S una distanza infinitesima tra punti adiacenti al tempo  $t = 0$ , data da  $d\lambda \equiv \lambda_{i+1} - \lambda_i = x_{i+1}(0) - x_i(0)$ , si ottiene in S', al primo ordine in  $d\lambda$

$$d\lambda' \equiv x'_{i+1}(\tau_i) - x'_i(\tau_i) = \frac{\sqrt{1-w^2}}{R} d\lambda.$$

Questa è uguale a  $d\lambda$  soltanto se  $R \equiv \sqrt{(1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 - w^2} = \sqrt{1-w^2}$  cioè se  $u_w = 0$  ovvero se la velocità assoluta del sistema S è nulla nella direzione del moto della barra. In pratica, il moto iperbolico di un corpo esteso rappresentato dalla (3.1), è rigido secondo Born soltanto se è riferito al SRI assoluto  $S_0$  e non a un SRI S in moto rispetto ad  $S_0$ .

### 3.3 – Moto conforme

Possiamo chiederci come dovrebbe essere il moto uniformemente accelerato con la di un corpo esteso sincronizzazione assoluta, se si impone il vincolo che potremmo

definire *vincolo di conformità*, ovvero di invarianza delle distanze finite tra i punti del corpo in (almeno) un SRI.

Se si richiede, nella (3.7), che tutti i punti della barra siano contemporaneamente fermi in S', cioè che valga  $v'_i(t')=0$  per ogni  $i$ , è necessario e sufficiente che

$$t' = \frac{wR}{\alpha_i \sqrt{1-w^2}} \equiv \tau'_i \text{ quindi } \tau'_i \text{ è indipendente da } i \text{ se e solo se lo è } \alpha_i, \text{ vale a dire, se}$$

e solo se tutti i punti della barra hanno la stessa accelerazione propria  $\alpha_i = \alpha$ .

Questo risultato non sorprende in quanto sappiamo che se due punti distinti sono contemporaneamente fermi nel sistema S' (sistema comovente) la simultaneità assoluta contenuta nelle TI implica che abbiano la stessa velocità contemporaneamente in ogni altro SRI, cioè  $v_i(t) = v_j(t)$  e questo per ogni  $t$ , da cui evidentemente  $a_i(t) = a_j(t)$ .

Da questa analisi ne consegue che, con la sincronizzazione assoluta, la sola possibilità di avere SRI comoventi globali (cioè SRI in cui ogni punto del corpo è fermo nello stesso istante di tempo) è che tutti i punti si muovano dello stesso moto cioè, in altri termini, che abbiano stessa velocità e accelerazione allo stesso momento. Ogni altra scelta, moto rigido di Born inclusa, produce una situazione in cui il corpo è osservato deformarsi in ogni SRI in conseguenza della velocità diversa delle sue parti.

Possiamo allora denominare *moto conforme*, il moto di un corpo esteso tale che le distanze reciproche tra i suoi punti si conservano costanti nel tempo in almeno un sistema di riferimento inerziale (Fig.10).

È immediato dimostrare che nella relatività con la sincronizzazione assoluta la definizione di moto conforme puramente traslatorio implica che le distanze reciproche tra i punti del corpo sono costanti nel tempo in *tutti* i SRI. Infatti:

Siano  $\mathbf{r}'_1(t') = \mathbf{f}(t')$  e  $\mathbf{r}'_2(t') = \mathbf{f}(t') + \mathbf{d}'$  le equazioni del moto di due punti del corpo, che procedono in S' di moto parallelo senza rotazione a distanza  $|\mathbf{d}'|$  con  $\mathbf{d}' = \mathbf{r}'_2(t') - \mathbf{r}'_1(t')$  costante.

Il SRI S' abbia velocità  $\mathbf{v}$  relativamente ad S. Considero le TI più generali date dalle (3.5). Le equazioni del moto in S allora sono

$$\mathbf{r}_1(t) + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_1(t)}{R} \mathbf{v} + \left( \frac{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_1(t)}{v^2} \mathbf{v} = \mathbf{f}(Rt) + \frac{t}{R} \mathbf{v} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{r}_2(t) + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_2(t)}{R} \mathbf{v} + \left( \frac{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2(t)}{v^2} \mathbf{v} = \mathbf{f}(Rt) + \mathbf{d} + \frac{t}{R} \mathbf{v} \quad (3.13)$$

sottraendo la (3.12) dalla (3.13) si ha

$$\mathbf{d} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{d}}{R} \mathbf{v} + \left( \frac{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{R} - 1 \right) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}{v^2} \mathbf{v} = \mathbf{d}' \quad (3.14)$$

dove  $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$ . Nell'equazione (3.14) il tempo  $t$  può comparire soltanto implicitamente tramite  $\mathbf{d}$ , perciò non è necessario risolvere rispetto  $\mathbf{d}$  per affermare che  $\mathbf{d}$  non dipende da  $t$ , cioè che la distanza e l'orientazione dei due punti resta, anche in  $S$ , costante nel tempo (sebbene in generale  $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}'$ )<sup>28</sup>.

Anche in presenza di rotazione si può certamente avere moto conforme, ad esempio in un determinato SRI  $S'$ , applicando opportunamente le forze ai punti materiali di un disco è possibile farlo ruotare attorno al suo asse lasciandolo indeformato<sup>29</sup>. Però le distanze tra due punti del disco necessariamente appaiono mutare nel tempo se il moto è osservato da un altro SRI  $S$  in moto rispetto ad  $S'$  con velocità  $\mathbf{v}$  non parallela all'asse di rotazione. Infatti il vettore  $\mathbf{d}'(t') = \mathbf{r}'_2(t') - \mathbf{r}'_1(t')$  congiungente due punti distinti ruota in  $S'$  pur mantenendo invariato il modulo e anche  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$  in  $S$  ruota formando angoli variabili con la direzione di  $\mathbf{v}$  cosicché la distanza  $|\mathbf{d}(t)|$  varia nel tempo.

In ogni caso, secondo il punto di vista della relatività con sincronizzazione assoluta, si deve considerare questa contrazione/dilatazione non propria dell'oggetto in moto (il disco in rotazione nell'esempio sopra esposto), ma dovuta alla dilatazione/contrazione che i regoli di  $S$  subiscono cambiando direzione rispetto a  $\mathbf{v}$ .

In definitiva, l'unico moto rotatorio conforme (nella definizione data) sarebbe quello in cui le distanze tra i punti restano invariate nel SRI stazionario  $S_0$ , e tutte le deformazioni (costanti o dipendenti dal tempo) rilevate negli altri SRI in moto assoluto si dovrebbero considerare apparenti e causate dalla contrazione degli strumenti di misura in moto assoluto.

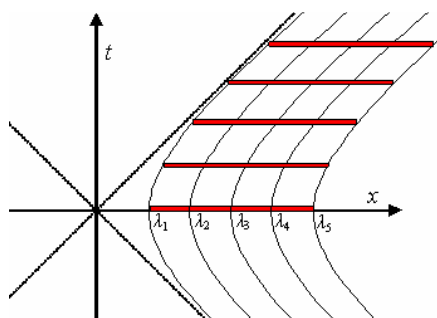


Fig.10 - Moto conforme uniformemente accelerato di una barra. Ogni punto esegue un moto iperbolico con la stessa accelerazione.

<sup>28</sup> La soluzione è comunque facilmente calcolabile e risulta  $\mathbf{d} = \mathbf{d}' - \left[ \left( \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + R} \right) \cdot \mathbf{d}' \right] \mathbf{v}$

<sup>29</sup> Il disco rotante ha una lunga e controversa storia nella letteratura relativistica [33].

## 4 – Elettrodinamica con le Trasformazioni inerziali

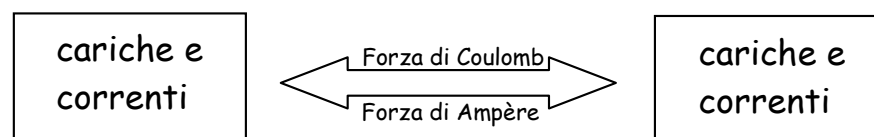
Non è immediato tradurre l'elettrodinamica classica nel linguaggio relativistico con la sincronia assoluta in quanto, come si vedrà dall'analisi preliminare, è necessario operare alcune scelte legate alla definizione dei campi elettrici e magnetici. Alcuni autori hanno già affrontato l'argomento ma in un caso postulando le trasformazioni dei campi [27] e mostrando, a posteriori, la loro validità. In altri [7, 28] utilizzando il formalismo tensoriale della relatività generale che rende opaco il significato fisico. I risultati ottenuti differiscono da quelli qui presentati e sebbene forse soltanto nella forma. Ciò non significa che si tratti di teorie non valide ma semplicemente che si basano su definizioni e assunti iniziali diversi e non esplicitati.

### 4.1 – Definizione dei campi

L'introduzione del concetto di campo per opera di Faraday ha permesso di semplificare la descrizione dei fenomeni elettromagnetici. Il complesso problema di determinare l'azione reciproca tra cariche elettriche, grazie all'introduzione dei campi, è scomposto in due sottoproblemi più semplici che consistono nel

- a) determinare come i campi sono generati dalle cariche sorgenti, e
- b) determinare come i campi agiscono sulle cariche.

Possiamo così schematizzare la situazione dell'elettrodinamica senza campi, cioè l'interazione diretta tra cariche e correnti elettriche



Questa formulazione presenta delle difficoltà in caso di cariche non statiche o correnti non stazionarie, legate alla propagazione finita dei segnali elettromagnetici, che si manifestano come non conservazione della quantità di moto, dell'energia o del momento angolare. L'introduzione del concetto di campo supera queste difficoltà permettendo ai campi stessi di avere quella quantità di moto, energia e momento angolare che pare scomparire considerando solamente i sistemi materiali. In questa visione l'interazione tra cariche è mediata dai campi: la distribuzione delle cariche e delle correnti elettriche tramite le leggi di Gauss, Ampère-Maxwell definiscono la forma dei campi i quali, a loro volta, agiscono su cariche e correnti secondo la forza di Lorentz





In questo modo il concetto di campo, che poteva a prima vista apparire solo come un utile artificio di calcolo assume ben presto un significato fisico fondamentale fino ad assurgere a entità reale al pari della materia ponderabile.

Tuttavia appare evidente che i campi di per sé sono inaccessibili a qualsiasi rilevazione diretta perché l'effettiva grandezza direttamente misurabile è soltanto la forza che agisce sulle cariche<sup>30</sup>.

Classicamente si scompone questa forza in una parte elettrica  $\mathbf{F}_E$  e in una parte magnetica  $\mathbf{F}_B$ . La forza magnetica si discrimina dalla forza elettrica per il solo fatto che, per definizione, la prima agisce soltanto sulle cariche in moto. La forza totale che agisce su una carica  $q$  in qualunque stato è quindi la somma delle due:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B$ .

In base alle osservazioni sperimentali risulta possibile introdurre due campi vettoriali  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  tali che si può sempre esprimere  $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$  e  $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  essendo  $\mathbf{v}$  la velocità della carica nel sistema di riferimento inerziale scelto. Allora, in linea di principio, è possibile determinare completamente il campo elettrico  $\mathbf{E}$  ed il campo magnetico  $\mathbf{B}$  in una regione dello spazio esplorando questa regione con una carica di prova  $q$ , misurando la forza che agisce su di essa nei vari punti e in varie condizioni di moto. Dunque la forza che agisce su una carica (puntiforme) in moto con velocità  $\mathbf{v}$  è si scrive<sup>31</sup>

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono i due campi vettoriali nel punto in cui  $q$  si trova.

Seguendo la TRS, trasformando opportunamente i campi e la forza, si mostra che la (4.1) assume la stessa forma in ogni SRI.

Nella relatività basata sulla sincronizzazione assoluta si può conservare immutata la (4.1) soltanto nel sistema di riferimento di quiete assoluta  $S_0$ , ma non è possibile estenderla in un qualunque SRI  $S$  in moto rispetto ad  $S_0$ . In particolare non è possibile trovare in  $S$  due campi vettoriali  $\mathbf{E}'$  e  $\mathbf{B}'$  tali che la forza su una carica ferma dipenda soltanto da  $\mathbf{E}'$ . Che questo sia impossibile lo si può vedere con un semplice esempio considerando la seguente situazione sperimentale:

Si abbia, in  $S_0$ , un filo conduttore rettilineo immobile nella direzione delle  $x$ , percorso da una corrente elettrica continua, ed una carica  $q$  che viaggia con velocità  $\mathbf{v}$  parallelamente al filo ad una certa distanza. Supponiamo che nel filo la densità di cariche positive eguagli in valore assoluto quella delle cariche negative cosicché il

<sup>30</sup> A voler essere cavillosi, neppure la forza è direttamente misurabile. Forse in ultima analisi le uniche grandezze direttamente misurabili sono la lunghezza e il tempo. Ma qui supporremo di saper misurare le forze.

<sup>31</sup> Uso il sistema di unità di misura di Gauss con la costante della luce  $c = 1$ .

filo è, in  $S_0$ , elettricamente neutro e quindi  $\mathbf{E} = 0$ .<sup>32</sup> La carica  $q$  risente comunque della parte magnetica della forza di Lorentz (4.1) che è trasversale alla direzione del moto ed è dovuta al campo magnetico generato dalla corrente nel filo.

Ci poniamo ora in un SRI  $S$  in moto lungo  $x$  con velocità  $\mathbf{v}$ , cioè nel SRI di quiete della carica  $q$ . Se supponiamo che la (4.1) sia valida anche in  $S$ , allora sappiamo che la forza che agisce su  $q$  non può avere origine magnetica poiché questa carica è ferma in  $S$ . Quindi deve esistere un campo elettrico in  $S$  che determina la forza osservata. L'analisi della situazione secondo la TRS (si veda ad esempio [29]) indica l'origine di questo campo elettrico nella diversa densità delle cariche positive e negative presenti nel filo osservato da  $S$ : in altri termini il filo risulta elettricamente carico. L'apparire di questa carica elettrica in un corpo che, in  $S_0$ , è neutro, può essere vista come conseguenza del fatto che nel filo le cariche positive e negative sono in moto relativo e avendo velocità diverse le loro distanze subiscono contrazioni relativistiche differenti che determinano densità di cariche positive e negative non più bilanciate:  $|\rho^+| \neq |\rho^-|$ . In ultima analisi, però, l'apparire della carica è legata al fatto che la contemporaneità degli eventi di  $S_0$  non è quella di  $S$ .<sup>33</sup>

Con la sincronizzazione assoluta, la contemporaneità degli eventi è però un fatto assoluto, perciò il filo che è elettricamente neutro in  $S_0$  risulta tale in ogni altro SRI. Questo ci fa capire che, se si richiede che l'unica origine di un campo elettrico statico sia la carica elettrica, la forza che in  $S$  agisce sulla carica ferma (di prova)  $q$  deve essere etichettata come forza magnetica. In questo modo si deve però accettare che in SRI diversi dal sistema assoluto  $S_0$ , il campo magnetico possa agire anche su cariche relativamente ferme.<sup>34</sup>

Questa analisi preliminare induce a ritenere che la usuale definizione dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  tramite l'effetto che questi hanno sulle cariche non sia compatibile con le trasformazioni inerziali.

L'alternativa è di definire i campi tramite la dipendenza dalle sorgenti, in altre parole assumere come fondamentale la relazione che esiste tra cariche e correnti, e i campi da queste generati.

---

<sup>32</sup> Si tenga presente che in  $S_0$  si assume che valgano le usuali leggi dell'elettromagnetismo.

<sup>33</sup> L'effetto si può dedurre applicando le trasformazioni di Lorentz alle densità di carica e corrente, ma può essere anche facilmente visualizzato con un modello molto semplificato della corrente nel filo rappresentata come una processione regolare di cariche negative equidistanti che incrociano nel loro moto le cariche positive del reticolo atomico. In  $S_0$ , dove la carica netta è nulla, il passo del reticolo è uguale alla distanza tra le cariche negative e pertanto tutti gli incroci avvengono simultaneamente. In  $S$  però gli incontri non saranno eventi simultanei ma avverranno in successione; da questo si deduce che in  $S$  la densità delle cariche positive e negative deve risultare differente.

<sup>34</sup> Si noti, però, che la carica  $q$  in  $S$  non è assolutamente ferma.

Questa dipendenza è espressa classicamente dalla leggi di Gauss e di Ampère del flusso elettrico e della circuitazione magnetica.

Assumiamo quindi che, nel caso statico e di correnti stazionarie, il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}$ , in un qualunque SRI,  $S$  soddisfino le seguenti condizioni.

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 4\pi Q(V) \quad (4.2)$$

$$\int_{\partial \Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi I(\Sigma) \quad (4.3)$$

dove  $Q(V)$  e  $I(\Sigma)$  sono rispettivamente la carica totale contenuta nel volume  $V$  e la corrente totale che attraversa la superficie  $\Sigma$  e gli integrali sono estesi rispettivamente a  $\partial V$  superficie di  $V$  e a  $\partial \Sigma$  contorno di  $\Sigma$ . Vedremo in seguito quanto c'è di arbitrario e di necessario in queste assunzioni.

Queste condizioni in generale non sono da sole sufficienti a definire i campi in un punto dello spazio a meno che, particolari condizioni di simmetria del sistema considerato non ci permettano di valutare  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{B}$  costanti sul rispettivo dominio di integrazione. Solo in questo caso i campi possono essere portati fuori dal segno di integrazione cosicché la (4.2) e (4.3) definiscono completamente i campi. In ogni caso vedremo che le condizioni fissate dalle (4.2) e (4.3) sono sufficienti per determinare le trasformazioni inerziali dei campi.

## 4.2 – Le trasformazioni dei campi

La trasformazione dei campi elettrico e magnetico in accordo con le TI dal SRI  $S_0$  ad un SRI qualunque  $S$  è qui derivata operativamente considerando concreti oggetti da laboratorio (per quanto idealizzati) come condensatori e solenoidi. Si è evitato di considerare una deduzione puramente formale utilizzando le trasformazioni inerziali date dalla (2.1) ed è sembrato inoltre opportuno tenere separati i campi elettrico e magnetico piuttosto che considerare una unica entità definita come campo elettromagnetico. Ciò in coerenza con la separazione tra spazio e tempo implicita nella relatività con sincronizzazione assoluta. Questo non esclude che si possa ottenere lo stesso risultato assumendo che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  si possano fondere al solito modo nel 4-tensore del campo elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  che si trasforma come  $F'^{\mu\nu} = I^\mu_\rho I^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$  dove  $I^\mu_\nu$  è la TI. Tuttavia, a questo livello di analisi, non è opportuno imporre una struttura matematica ad enti di cui non è ancora definita la natura<sup>35</sup>.

<sup>35</sup> In altre parole, detto in una battuta, *la matematica non deve precedere la fisica*. A mio avviso, sebbene la struttura matematica di una teoria fisica consolidata e ritenuta corretta, è lo strumento

Supponiamo, nel SRI assoluto  $S_0$ , un condensatore formato da due superfici piane parallele al piano  $x$ - $z$  virtualmente infinite. Sulle due armature del condensatore sia presente una carica con densità superficiale  $-\sigma_0$  e  $+\sigma_0$ . Il condensatore sia in moto in  $S_0$  nella direzione delle  $x$  positive con velocità  $\mathbf{v}_0$  costante, cosicché in  $S_0$  è le cariche in moto determinano due flussi di corrente elettrica di densità superficiale  $-\sigma_0\mathbf{v}_0$  e  $+\sigma_0\mathbf{v}_0$ .

Con questa disposizione, in  $S_0$ , nello spazio tra le due armature esistono i campi  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  costanti e uniformi le cui componenti cartesiane sono deducibili dalle (4.2) e (4.3) utilizzando i consueti procedimenti dell'elettromagnetismo classico. Si ha:

$$\mathbf{E}_0 = (0, 4\pi\sigma_0, 0) \quad , \quad \mathbf{B}_0 = (0, 0, 4\pi\sigma_0 v_0) \quad (4.4)$$

In un SRI  $S$  in moto rispetto a  $S_0$  la densità superficiale di carica sarà  $\sigma$  diversa in generale da  $\sigma_0$  a causa della contrazione relativistica delle lunghezze, e le cariche avranno ovviamente una velocità  $\mathbf{v}$  diversa da  $\mathbf{v}_0$ . Scegliamo  $S$  in moto con velocità assoluta  $\mathbf{u}$  nella direzione delle  $x$  positive con gli assi coincidenti con quelli di  $S_0$  al tempo  $t = t_0 = 0$ . In questo modo, anche in  $S$ , nello spazio tra le due armature esistono i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  costanti e uniformi<sup>36</sup> le cui componenti sono nuovamente ricavabili applicando le (4.2) e (4.3) che abbiamo postulato valere in ogni SRI. Si avrà:

$$\mathbf{E} = (0, 4\pi\sigma, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = (0, 0, 4\pi\sigma v)$$

Per esprimere  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  in funzione di  $\mathbf{E}_0$  e  $\mathbf{B}_0$  dobbiamo determinare come si trasformano  $\sigma_0$  e  $\mathbf{v}_0$  da  $S_0$  a  $S$  secondo le TI.

In  $S_0$  la densità superficiale di carica elettrica sull'armatura positiva del condensatore è data da  $\sigma_0 = \frac{\Delta Q_0}{\Delta x_0 \Delta z_0}$  dove  $\Delta Q_0$  è la carica contenuta in una superficie rettangolare di area  $\Delta x_0 \Delta z_0$  sull'armatura. Poiché assumiamo che la carica sia invariante per TI<sup>37</sup>, nel SRI  $S$  di velocità assoluta  $\mathbf{u}$ , si ha  $\Delta Q = \Delta Q_0$ . Delle lunghezze  $\Delta x_0$  e  $\Delta z_0$ , la seconda, perpendicolare a  $\mathbf{u}$ , resta invariata:

---

fondamentale di sviluppo della teoria stessa e delle sue conseguenze, quando si intende riesaminare le basi, è bene rinunciare, per quanto possibile, alla struttura matematica che in un certo senso ingabbia la teoria. Ovviamente, in ogni caso, per riesaminare le basi di una teoria fisica, ci si deve affidare comunque ad una struttura matematica di qualche teoria a un livello sottostante.

<sup>36</sup> La costanza e uniformità dei campi in  $S$  si può desumere anche qui dalle simmetrie spaziali e temporali del sistema fisico in esame.

<sup>37</sup> Una possibilità interessante sarebbe ipotizzare accanto alla carica elettrica  $q$  una carica magnetica  $q_m$  tale che il rapporto  $q_m/q = 0$  in  $S_0$  ma diverso da zero in altri SRI in funzione della velocità assoluta  $\mathbf{u}$ . Questa possibilità non è stata qui approfondita.

$\Delta z = \Delta z_0$ , mentre la prima appare<sup>38</sup> dilatata, secondo le TI, del fattore  $R = \sqrt{1-u^2}$  cioè  $\Delta x = \frac{\Delta x_0}{R}$ . In definitiva si trova

$$\sigma \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta z} = R \frac{\Delta Q_0}{\Delta x_0 \Delta z_0} = R \sigma_0.$$

Per quanto riguarda la velocità delle cariche in S la (2.15) ci permette subito di scrivere  $v = \frac{v_0 - u}{R^2}$  per cui i campi in S diventano

$$\mathbf{E} = (0, 4\pi R \sigma_0, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = (0, 0, 4\pi \sigma_0 (v_0 - u)/R).$$

Confrontando con la (4.4) si ottiene

$$E_y = R E_{0y} \quad \text{e} \quad B_z = (B_{0z} - u E_{0y})/R.$$

Ripetendo lo stesso procedimento con il condensatore ruotato di  $90^\circ$  in senso orario attorno all'asse X, in modo tale che in  $S_0$  si abbia  $\mathbf{E}_0 = (0, 0, 4\pi \sigma_0)$  e  $\mathbf{B}_0 = (0, -4\pi \sigma_0 v_0, 0)$ , si perviene in modo analogo a

$$E_z = R E_{0z} \quad \text{e} \quad B_y = (B_{0y} + u E_{0z})/R.$$

Per trovare come si trasforma un campo elettrico nella direzione del moto di S, consideriamo ora un condensatore fermo in  $S_0$  con le armature perpendicolari all'asse X. In  $S_0$  il campo elettrico al suo interno è  $\mathbf{E}_0 = (4\pi \sigma_0, 0, 0)$ . Nel SRI S la densità superficiale di carica ovviamente non cambia:  $\sigma = \sigma_0$  e quindi anche  $E_x = E_{0x}$ .

Consideriamo infine il campo magnetico nella direzione x, generato, ad esempio, all'interno di un solenoide fermo in  $S_0$ . Il solenoide di forma cilindrica "infinitamente" lungo, con asse coincidente con l'asse X, sia percorso da una corrente continua  $I_0$ . La distanza tra una spira e la successiva sia  $d_0$ .<sup>39</sup> In  $S_0$  esiste all'interno del solenoide un campo magnetico uniforme e costante diretto lungo l'asse X di intensità  $B_{0x} = 4\pi I_0/d_0$ . Secondo le TI, osservate da S, sia la distanza  $d$  tra le spire sia la corrente  $I$  risultano aumentate dello stesso fattore<sup>40</sup>:  $d = d_0/R$  e  $I = I_0/R$  cosicché il loro rapporto è invariato; e quindi anche  $B_x = B_{0x}$

<sup>38</sup> L'uso del verbo "apparire" non è qui improprio perché secondo la relatività delle TI sono i metri di S che hanno subito l'effettiva contrazione relativistica nella direzione del suo moto assoluto e fanno quindi apparire i corpi fermi in  $S_0$  dilatati.

<sup>39</sup> Ovviamente parlare di spire e di corrente nel solenoide ha solo la funzione di rendere più concreto il ragionamento. A rigore, per avere un campo perfettamente omogeneo si dovrebbe far tendere la distanza  $d_0$  a zero insieme alla corrente restando costante il rapporto  $I_0/d_0$  cioè la densità superficiale di corrente. Si può anche immaginare, in luogo del solenoide, ad una corrente superficiale uniforme che circola attorno alla superficie di un cilindro cavo conduttore.

<sup>40</sup> La variazione di  $I_0 = q_0/\Delta t_0$  è dovuta alla apparente contrazione del tempo in S:  $\Delta t = \sqrt{1-u^2} \Delta t_0$  e alla postulata invarianza della carica:  $q = q_0$

Riassumendo, i campi elettrici e magnetici nelle varie situazioni illustrate si trasformano così:

$$E_x = E_{0x}, \quad E_y = RE_{0y}, \quad E_z = RE_{0z} \quad (4.5)$$

$$B_x = B_{0x}, \quad B_y = \frac{(B_{0y} + uE_{0z})}{R}, \quad B_z = \frac{(B_{0z} - uE_{0y})}{R} \quad (4.6)$$

con  $R = \sqrt{1-u^2}$

oppure, in forma vettoriale

$$\begin{cases} \mathbf{E} = R\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_0}{1+R} \mathbf{u} \\ \mathbf{B} = \frac{1}{R} \left( \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_0}{1+R} \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{E}_0 \right) \end{cases} \quad (4.7)$$

#### 4.2.1 – Generalità delle trasformazioni

Il procedimento seguito per dedurre le (4.5) e (4.6) potrebbe dare l'impressione che queste trasformazioni si riferiscano a campi in situazioni particolari. Tuttavia se le trasformazioni devono essere locali non può avere importanza come il campo è stato generato in quanto il valore del campo in un punto e in un certo istante determinano in maniera univoca come deve apparire il campo in un altro SRI nel corrispondente punto e istante. Dobbiamo considerare quindi le (4.5) e (4.6) come trasformazioni generali.

#### 4.2.2 – Unicità delle trasformazioni

Riguardo all'unicità delle trasformazioni riesaminiamo il significato della scelta di estendere la validità della (4.2) e della (4.3) in tutti i SRI oltre al sistema privilegiato  $S_0$ .

È lecito sospettare che si tratti di scelte arbitrarie, e che possano esistere altre opzioni, altrettanto valide, che conducono ad equazioni diverse dalle (4.5) e (4.6) ma ugualmente accettabili.

Però si può dimostrare che se si assume la legge di Gauss (4.2) come (parziale) definizione del campo elettrico, e si postula l'invarianza della carica per trasformazioni inerziali, allora la legge di Ampère nella forma (4.6) deve valere in tutti i SRI. Poiché qui supporremo la carica invariante per TI, si ha che soltanto la (4.2) ha un aspetto convenzionale mentre la (4.6) ne è una conseguenza.<sup>41</sup>

Sono quindi possibili anche scelte diverse da quella compiuta assumendo che la (4.2) valga in ogni SRI. Ovviamente si otterranno trasformazioni dei campi diverse

<sup>41</sup> La dimostrazione di quanto affermato è analoga a quella che permette di dedurre le equazioni di Maxwell dalla legge di Coulomb e dalla invarianza della carica per trasformazioni di Lorentz [30].

dalle equazioni (4.5) e (4.6) semplicemente perché differenti sono le definizioni dei campi.

### 4.3 – Elettrodinamica inerziale

#### 4.3.1 – Forza sulle cariche elettriche

Con le TI dei campi dati dalle (4.5) e (4.6) è possibile derivare l’analogo della forza di Lorentz ossia la forza che i campi esercitano sulla carica elettrica  $q$  in moto con velocità  $\mathbf{v}$  in un SRI di velocità assoluta  $\mathbf{u}$ .

La procedura e i calcoli sono riportati nell’appendice B.

Per la forza sulle cariche si trova:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + q[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \times \mathbf{B} \quad (4.8)$$

#### 4.3.2 – Equazioni dei campi

Analogamente si possono ottenere le equazioni dei campi corrispondenti alle classiche equazioni di Maxwell

Riporto qui soltanto il risultato finale, la procedura e i calcoli sono nell’appendice A.

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \tilde{\nabla})\mathbf{B} \\ \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \end{array} \right. \quad (4.9)$$

qui si è introdotto l’operatore

$$\tilde{\nabla} \equiv \nabla + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial t}$$

#### 4.3.3 – Onde anisotrope

In assenza di cariche, dalle (4.9) si derivano delle equazioni che si potrebbero chiamare equazioni d’onda anisotrope:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \tilde{\nabla}^2 \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{4.10}$$

Si può facilmente constatare che ciascuna delle (4.10) ha come soluzione delle funzioni che esprimono onde che si propagano nello spazio con velocità dipendenti dalla direzione. Ad esempio una soluzione per il campo elettrico è

$$E_x = f(x - c^+ t) + g(x + c^- t) \quad , \quad E_y = \text{const} \quad , \quad E_z = \text{const}$$

dove  $f$  e  $g$  sono due funzioni qualunque derivabili almeno due volte e  $c^+ = 1/(1+u)$  e  $c^- = 1/(1-u)$ .

Questa soluzione rappresenta due onde piane si propagano nel verso positivo e negativo dell'asse  $X$ , alla prevista velocità della luce nelle due direzioni secondo le (2.3)<sup>42</sup>

#### 4.3.4 – Potenziale elettromagnetico

I campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  possono anche essere derivati da un potenziale scalare  $\varphi$  ed un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  in questo modo:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\tilde{\nabla} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{A} \\ \mathbf{B} = \tilde{\nabla} \times \mathbf{A} \end{cases}$$

Se si assumono queste equazioni come definizione di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , le prime due equazioni della (4.9) sono automaticamente soddisfatte.

I potenziali  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  sono definiti a meno di una trasformazioni di gauge che assume la seguente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \tilde{\nabla} \lambda \\ \varphi' = \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \tilde{\nabla}) \lambda \end{cases}$$

---

<sup>42</sup> Ricordare che si è posto  $c = 1$ . Ripristinando la costante  $c$  si ha  $c^+ = c/(1+u/c)$  e  $c^- = c/(1-u/c)$



#### 4.4 – Un apparente paradosso

Dalle trasformazioni dei campi (4.5) o (4.6), si deriva l'equazione (4.8) che è l'equivalente della forza di Lorentz. Questa equazione dice che se in un SRI  $S$  si ha  $\mathbf{E} = 0$ , ma un campo magnetico  $\mathbf{B} \neq 0$ , una carica  $q$  ferma ( $\mathbf{v} = 0$ ) è comunque soggetta alla forza  $\mathbf{F} = q \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , dove  $\mathbf{u}$  è la velocità assoluta di  $S$ . Questo fatto appare paradossale perché se le cose stessero veramente così, basterebbe ad esempio porre una carica ferma sopra un polo di un magnete per rilevare la velocità assoluta  $\mathbf{u}$  del SRI e quindi di identificare il riferimento assoluto  $S_0$ !

In realtà, analizzando più approfonditamente il problema, si scopre che non c'è nessuna incoerenza e che la soluzione del paradosso è interessante perché fornisce una chiave di lettura per interpretare fenomeni noti ma controversi (38) e per prevederne di nuovi non ancora osservati.

##### 4.4.1 – Soluzione del paradosso

Mettendo da parte per un momento il magnete che è un oggetto fisicamente un po' complicato, consideriamo il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo percorso da corrente e poniamo vicino ad esso una carica positiva  $q$ . Il tutto sia fermo in  $S$  che supponiamo avere velocità assoluta  $\mathbf{u}$  nella direzione della corrente. Se fosse presente soltanto il campo magnetico  $\mathbf{B}$  dalla (4.8) risulterebbe una forza magnetica  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  di attrazione sulla carica verso il filo. Dal momento che sappiamo, sperimentalmente, che nessuna forza agisce sulla carica, deve esistere una forza  $-\mathbf{F}$  su  $q$  uguale e contraria alla forza magnetica. Non avendo origine dal campo magnetico deduciamo che  $-\mathbf{F}$  sia una forza elettrica, cioè che attorno al filo esista anche un campo elettrico  $\mathbf{E}$  che respinge la carica  $q$ . Data la simmetria del sistema, questo campo elettrico deve avere simmetria assiale attorno al filo ed essere diretto radialmente verso l'esterno affinché la forza magnetica sia bilanciata. Un campo con queste caratteristiche ha divergenza diversa da zero. L'origine di questo campo elettrico appare però problematica perché se effettivamente c'è un campo  $\mathbf{E}$  in  $S$ , allora un campo elettrico diverso da zero dovrà esistere in ogni altro riferimento inerziale. Infatti, a causa della forma delle trasformazioni inerziali del campo elettrico (4.5) se  $\mathbf{E} \neq 0$  in un riferimento si ha  $\mathbf{E} \neq 0$  in tutti i SRI. Tuttavia la legge di Gauss (4.2) ci dice che l'unica possibilità che un corpo (il filo) produca un campo elettrico con divergenza non nulla è che il filo sia carico, cioè che la densità delle cariche positive non sia bilanciata da quelle negative.

In questo modo si è solamente spostato il problema perché non è evidente l'origine di questo eccesso di carica sul filo. Come si è già visto, al contrario della relatività standard nella relatività con sincronizzazione assoluta la densità di carica nel filo non può cambiare in base al riferimento scelto,<sup>43</sup> se c'è un eccesso di carica positiva in  $S$ , lo si deve avere in qualunque altro riferimento.

---

<sup>43</sup> Si veda nota 33 a pag. 58 e l'equazione (A13) nell'appendice A per la trasformazione della densità di carica e di corrente

La conclusione forzata di questo ragionamento è che il filo deve essere elettricamente carico in qualunque SRI. L'origine di questa carica risiede in un effetto che non è mai stato esaminato né osservato.<sup>44</sup>

#### 4.4.2 – Effetto di redistribuzione della carica nei conduttori percorsi da corrente

L'effetto consiste in un campo elettrico che si crea, in opportune condizioni, attorno ad un filo, inizialmente neutro, nel momento in cui inizia a fluire in esso una corrente elettrica. La causa del fenomeno è da imputare nella contrazione relativistica che l'insieme degli elettroni di conduzione tende a subire quando sono in movimento cioè quando la corrente comincia a fluire nel filo.

In uno schematico modello classico di conduzione elettronica, possiamo dire che quando inizia a fluire la corrente, l'insieme degli elettroni di conduzione acquista una certa velocità di deriva nel verso della corrente. Nella interpretazione della relatività con le TI è logico ritenere che subisca una contrazione<sup>45</sup>. Tuttavia, in relazione della geometria del sistema, questa contrazione può essere più o meno effettiva. Un esempio chiarirà meglio il discorso:

Consideriamo ad esempio un circuito costituito da due lunghi fili paralleli ma sufficientemente distanti per poter trascurare ogni loro eventuale interazione (Fig.11). Supponiamo che inizialmente non ci sia nessuna corrente e che il filo sia elettricamente neutro. Se una corrente inizia a circolare per qualche motivo (ad esempio una corrente indotta) è evidente che la carica totale non può variare, e l'intero filo deve restare complessivamente neutro perché se il sistema è isolato la carica totale si conserva. Questo tuttavia non esclude che le cariche di conduzione mobili possano distribuirsi in modo tale da creare parti positive e parti negative. Se si effettua questo esperimento in  $S_0$  (quindi  $\mathbf{u} = 0$ ) la velocità  $w$  di deriva degli elettroni tende a contrarre la loro distanza nel senso del moto in ugual misura sia nella parte superiore sia nella parte inferiore del circuito. Questa contrazione (che è infinitesima vista l'esiguità di  $w$ )<sup>46</sup> sarà contrastata dalla relativa rigidità del reticolo atomico degli ioni del conduttore, oppure deformerà impercettibilmente la struttura<sup>47</sup>, ma in ogni caso non altererà l'equilibrio locale tra cariche di segno opposto.

---

<sup>44</sup> Forse a causa dell'esiguità del campo elettrico che si genera nell'effetto. In pratica questo debole campo è ampiamente mascherato dai campi elettrici che si generano tra le varie parti dei conduttori reali che hanno inevitabilmente resistenza non nulla.

<sup>45</sup> Questo effetto dovrebbe essere preso in considerazione anche nell'ambito della relatività standard. Non risulta tuttavia alcun riferimento per quanto è dato di sapere.

<sup>46</sup> La velocità di deriva degli elettroni di conduzione nei metalli è dell'ordine di  $10^{-4}$  m/s

<sup>47</sup> La situazione è alquanto simile al comportamento relativistico di un disco materiale posto in rapida rotazione attorno al suo asse. Cosa accada realmente al disco, soggetto a contrazione di Lorentz (non secondo alcuni), forza centrifuga e a vincoli di rigidità interna, è una questione che non ha mai trovato un accordo comune nonostante la moltitudine di lavori sull'argomento (ad esempio [39]). In ogni caso qui non interessa cosa fisicamente succede al conduttore, ma solo di sottolineare che, secondo quanto la relatività con sincronizzazione assoluta indica, esiste un effetto che tende ad avvicinare gli elettroni di conduzione nella direzione del moto assoluto.

Consideriamo ora lo stesso circuito in un SRI  $S$  di velocità assoluta  $\mathbf{u} \neq 0$  nella direzione dei lati lunghi del circuito. Qui le velocità di deriva degli elettroni  $w$  e  $-w$  si compongono con la velocità assoluta  $u$ , di conseguenza la contrazione nella parte superiore non è più uguale a quella nella parte inferiore del circuito; vale a dire banalizzando: la "forza di contrazione" sul "gas" di elettroni è diversa nei due tratti di circuito cosicché gli elettroni vengono risucchiati nella parte alta, che diventa negativa mentre la parte bassa diventa positiva.

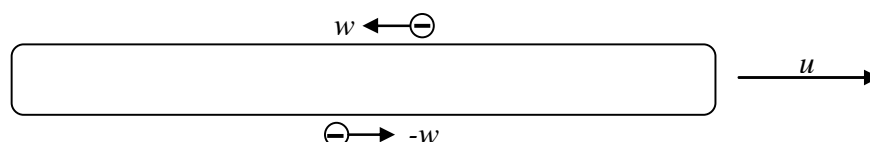


Fig.11- Il moto delle cariche di conduzione si compone con il moto assoluto del circuito

Resta ancora verificare se quantitativamente il campo  $\mathbf{E}$  prodotto in questo modo sia sufficiente a bilanciare la forza magnetica del campo  $\mathbf{B}$  attorno al filo. Questo sarà dimostrato nel § 4.4.4.

Nel paragrafo seguente è mostrato come questo effetto renda conto con semplicità di altre situazioni che per la relatività standard sono problematiche.

#### 4.4.3 – Effetti causati dalla redistribuzione delle cariche

Consideriamo una spira circolare percorsa da corrente e in rotazione attorno al proprio asse. Evidentemente, per il principio di conservazione della carica, se la spira è elettricamente neutra tale deve rimanere per qualunque velocità di rotazione.

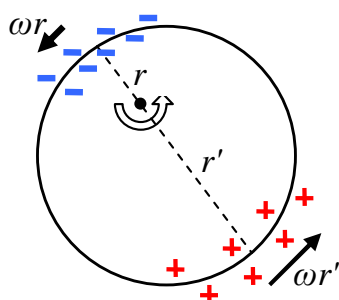


Fig.12 – Spira circolare percorsa da corrente in rotazione attorno ad un asse non passante per il suo centro.

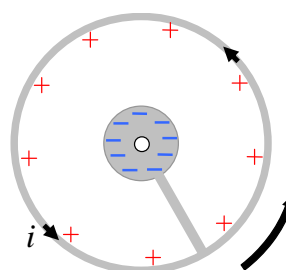


Fig.13 – La spira è collegata elettricamente con conduttori rotanti a velocità inferiore.

Inoltre, per la simmetria del sistema ogni segmento della spira è equivalente e non può quindi accumulare carica a discapito di un'altra parte. Questo sistema se affrontato con la relatività standard per mezzo di SRI istantanei comoventi dà risultati contraddittori perché per ogni segmento infinitesimo di spira nel SRI comovente le trasformazioni di Lorentz del quadrivettore densità di carica-corrente danno una densità di carica  $\rho \neq 0$  e perciò una carica totale su tutta la spira non nulla. Nella interpretazione della relatività con sincronizzazione assoluta, nei vari SRI comoventi, la densità di carica  $\rho$  è sempre nulla se  $\rho_0$  è nullo nel SRI  $S_0$  dove l'asse di rotazione della spira è fermo (equazione (A12)).

L'eventuale contrazione dell'insieme degli elettroni di conduzione (o del reticolo di ioni<sup>48</sup>) in una spira perfettamente circolare, di sezione idealmente nulla che ruota esattamente attorno al suo asse, è impedita dai vincoli che trattengono gli elettroni all'interno del filo e non può perciò produrre né squilibri né accumuli di cariche in nessun punto. Tuttavia, fili reali aventi sezione non nulla o geometrie diverse dovrebbero mostrare comportamenti differenti, ad esempio: se la spira di corrente ruota non attorno al suo asse ma attorno ad un asse parallelo passante per un punto distante dal centro (anche fuori dalla spira) allora si ha un accumulo di elettroni nella parte più vicina all'asse di rotazione ed una rarefazione dalla parte più lontana (o viceversa a seconda del verso di rotazione e della corrente).

Questo accade perché questi punti hanno velocità assoluta diversa<sup>49</sup>. Si forma perciò un momento di dipolo elettrico (Fig.12).

Nelle figure 13, 14 e 15 sono illustrate altre situazioni analoghe in cui il circuito è complessivamente neutro ma si ha redistribuzione della carica a causa della velocità assoluta delle varie parti del circuito.

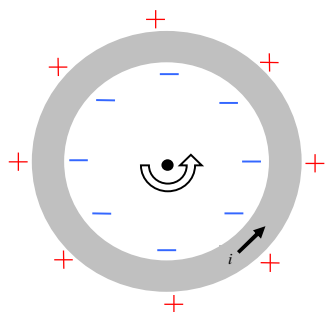


Fig.14 – Spira circolare con sezione non trascurabile. Si ha redistribuzione della carica tra l'interno e l'esterno.

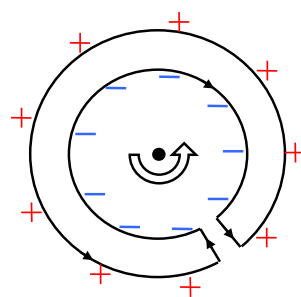


Fig.15 – Nelle due parti del circuito il moto delle cariche si somma o sottrae alla velocità di rotazione .

Come ultimo esempio consideriamo il fenomeno noto dai tempi di Faraday e conosciuto come induzione omopolare (o unipolare) [31]. Questo fenomeno si ha ponendo in rotazione un magnete cilindrico attorno al suo asse nord-sud. Si genera

<sup>48</sup> In relazione verso di rotazione della spira concorde o discorde al moto degli elettroni.

<sup>49</sup> Supponiamo per semplicità che il centro di rotazione sia in quiete in  $S_0$

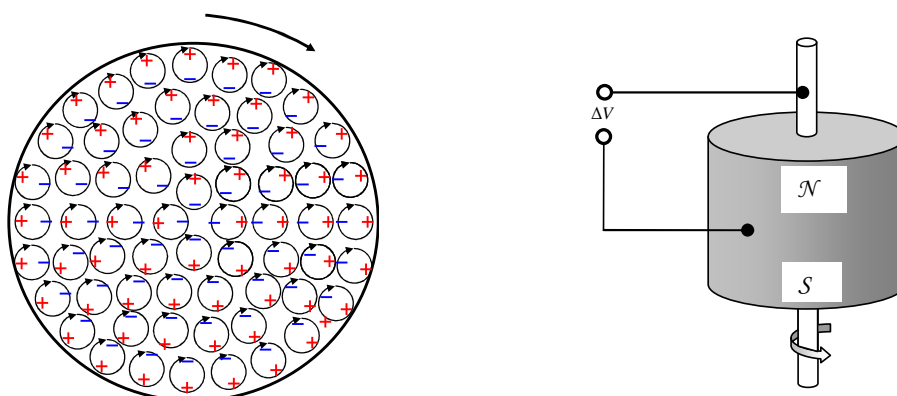


Fig.16 – Modello classico di magnete.  
 Gli anelli di corrente elementari ridistribuiscono la carica in quanto l'asse di rotazione non coincide con il loro

allora un campo elettrico tra l'asse di rotazione e la superficie laterale. Se il magnete è conduttore questo campo può produrre una corrente esterna in un circuito con contatti striscianti (Fig.17).

Tale fenomeno ha avuto sempre interpretazione controversa nell'ambito dell'elettromagnetismo classico [5, 32]. È perciò interessante scoprire che, anche utilizzando il semplicistico modello classico di magnete in cui il campo magnetico è prodotto da moltissimi anelli microscopici di corrente orientati parallelamente, si ha una immagine chiara di cosa succede. Il campo elettrico ha origine dal fatto che la carica nei piccoli anelli di corrente si distribuisce non uniformemente (Fig.16). Che questo meccanismo si possa estendere ad un più realistico modello quantistico della struttura del magnete è una scommessa aperta, tuttavia si può affermare che la spiegazione qualitativa proposta è accettabile nella misura in cui lo è il modello classico di magnete dato da Ampère.

#### 4.4.4 – Argomento del circuito interrotto

L'argomento presentato per giustificare il manifestarsi di un campo elettrico nello spazio attorno ad un filo conduttore come dovuto alla diversa contrazione del gas di elettroni in punti diversi, può apparire macchinoso e troppo legato al semplicistico modello classico di corrente nei conduttori. Tuttavia è possibile dimostrare che questo fenomeno deve esistere anche a prescindere dal particolare modello di conduzione adottato.

Consideriamo un circuito formato da due lunghi fili paralleli all'asse  $X$  di un SRI  $S$  e congiunti agli estremi  $A$  e  $B$  da due brevi tratti dove sono presenti due interruttori (Fig.18)

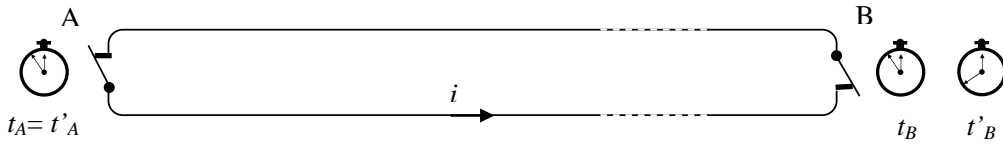


Fig.18 – L'apertura "simultanea" dei due interruttori può essere stabilita secondo il tempo standard ( $t'_A$  e  $t'_B$ ) oppure secondo il tempo assoluto ( $t_A$  e  $t_B$ ).

Sia  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  la velocità assoluta di S. Il circuito sia inizialmente percorso da una corrente continua  $i$  e complessivamente neutro.

Secondo la TRS standard l'intero circuito sarà anche localmente neutro ovvero non ci sono particolari zone del circuito dove la carica si accumula a discapito di altre. Infatti se si interrompe la corrente agendo simultaneamente (con la sincronizzazione standard) sugli interruttori A e B, i due tratti di circuito separati rimarranno elettricamente neutri.

Se invece la simultaneità dell'apertura degli due interruttori è data da orologi in A e B sincronizzati secondo le TI, secondo la relatività standard l'interruzione ai due estremi avverrà in successione, ad esempio A precederà B. Ma l'apertura dell'interruttore A non interrompe istantaneamente il flusso di cariche in B perché l'informazione dell'interruzione della corrente in A non può arrivare in B in un tempo inferiore a  $\Delta t = L/c$  dove  $L$  è la distanza AB. Cosicché per un certo tempo continuerà a fluire carica in B ma non in A. Quando successivamente anche B viene aperto una certa quantità di carica si è trasferita dal tratto inferiore del circuito a quello superiore (o viceversa). Perciò i due semicircuiti risulteranno carichi, uno positivo e l'altro negativo.

Se assumiamo l'interpretazione data dalla relatività con sincronizzazione assoluta, l'apertura degli interruttori A e B è simultanea, quindi "fotografa" la distribuzione delle cariche all'istante  $t$ , che, dato il regime stazionario della corrente, è quello che si aveva durante il fluire della corrente stessa.

Questo conferma che nel SRI in moto assoluto la contrazione delle lunghezze riguarda anche l'insieme delle cariche di conduzione all'interno del filo e genera la redistribuzione di queste.<sup>50</sup>

Verifichiamo che il campo elettrico generato dalla redistribuzione delle cariche è esattamente quello che agendo su una carica di prova  $q$  bilancia esattamente la forza magnetica.

Supponiamo dunque di avere in S sia orologi sincronizzati standard (che segnano i tempi  $t'$ ) sia orologi sincronizzati naturalmente (che segnano i tempi  $t$ ). In  $S_0$  le due

<sup>50</sup> È importante sottolineare che l'esistenza dell'effetto di redistribuzione delle cariche è inevitabile anche se si crede nella relatività standard e si rifiuta la sincronizzazione assoluta. La differenza consiste nel fatto che secondo il "relativista standard" il fenomeno è dovuto alla non simultanea apertura degli interruttori mentre secondo il "relativista assoluto" è dovuto alla differente contrazione delle cariche di conduzione in moto assoluto.

sincronizzazioni coincidono cioè  $t'_0 = t_0$  ma in S (che supponiamo avere velocità assoluta)  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  rispetto ad  $S_0$ ) si ha, secondo le trasformazioni di Lorentz

$$t' = \frac{t_0 - ux_0}{R}$$

e secondo le trasformazioni inerziali (2.1)

$$t = Rt_0$$

dove al solito  $R = \sqrt{1 - u^2}$ . Quindi la differenza tra tempo standard e tempo assoluto per gli orologi in  $x_0$  è

$$t - t' = Rt_0 - \frac{t_0 - ux_0}{R} = \frac{u(x_0 - ut_0)}{R} \quad (4.11)$$

ma per le coordinate  $x'$  (di Lorentz) e  $x$  (inerziali) vale la stessa legge di trasformazione:  $x' = x = \frac{x_0 - ut_0}{R}$  che inserita nella (4.11) dà

$$t - t' = ux \quad (4.12)$$

In accordo con la trasformazione temporale (2.22).

Poniamo che l'apertura dell'interruttore in A avvenga al tempo  $t_A = t'_A = 0$  nelle origini coincidenti di S e  $S_0$ . Allora l'apertura dell'interruttore in B avviene, nel punto  $x = x' = L$ , al tempo  $t_B = 0$  o, secondo la (4.12), al tempo  $t'_B = -uL$  (cioè contemporaneamente in A e B secondo il tempo assoluto ma in successione secondo il tempo standard). Nell'intervallo di tempo  $uL$  un segnale che viaggia alla velocità della luce ( $c = 1$ ) percorre una distanza  $uL < L$  pertanto l'informazione della apertura del circuito in B al tempo  $t'_B = -uL$  non può giungere in A prima che anche questo interruttore scatti al tempo  $t'_A = 0$ . Durante l'intervallo di tempo  $uL$  la corrente continua a fluire indisturbata in A cosicché una quantità di carica  $\Delta Q = uLi$  passa dalla parte superiore del circuito alla parte inferiore.

Avendo supposto il circuito inizialmente neutro alla fine, quando entrambi gli interruttori sono aperti, si avrà una densità di carica lineare nella parte inferiore del circuito

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{L} = ui \quad (4.13)$$

nella parte superiore ovviamente sarà uguale ma di segno opposto.

Grazie alla simmetria del sistema considerato<sup>51</sup>, applicando la legge di Gauss (4.2), si può determinare il campo elettrico generato da questa densità di carica: alla

<sup>51</sup> La simmetria deriva dal fatto che la direzione del filo è quella della velocità assoluta  $\mathbf{u}$ . Quindi il campo elettrico generato dalle cariche accumulate sul filo ha la stessa simmetria assiale.

distanza  $r$  dal filo conduttore il campo ha intensità  $E = \frac{2\lambda}{r} = \frac{2ui}{r}$  ed è diretto radialmente, verso all'esterno nel tratto inferiore e verso il filo nel tratto superiore. Per quanto osservato precedentemente, secondo la relatività con sincronizzazione assoluta, questo campo elettrico si genera in S, nel momento in cui la corrente inizia a circolare, come pure il campo magnetico, la cui intensità, deducibile, grazie alla simmetria cilindrica, dalla (4.3), ha intensità  $B = \frac{2i}{r}$  e “ruota” intorno al filo secondo le solite convenzioni. Questi due campi determinano sulla carica di prova ferma relativamente al circuito, posta alla distanza  $r$  dal filo, una forza totale nulla come è immediato verificare se nella (4.8) si pone  $\mathbf{v} = 0$  ottenendo  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$  e sostituendo i campi trovati scritti in forma vettoriale<sup>52</sup>.

#### 4.5 – Un possibile esperimento

È possibile realizzare un esperimento per testare quanto sopra affermato. Nella disposizione lineare di Fig.18 per avere un effetto osservabile la distanza  $L$  dovrebbe essere almeno di qualche chilometro ma, quand'anche fosse possibile allestire l'esperimento non avrebbe molto interesse in quanto sarebbe soltanto una riconferma della relatività standard: l'accumulo di carica in una metà del circuito è un'ovvia conseguenza della velocità finita dei segnali e della “non simultaneità” della apertura degli interruttori (secondo la sincronizzazione standard).

Molto più interessante è invece allestire l'esperimento sostituendo la “non osservabile” velocità assoluta  $\mathbf{u}$  con la velocità misurabile oggettivamente data da una rotazione.

Immaginiamo il lungo circuito di Fig.18 avvolto su un cilindro che può ruotare attorno al suo asse (Fig.19 e Fig.20). I due interruttori che in Fig.18 si trovavano a grande distanza si trovano ora vicinissimi e comandati da un unico dispositivo. Il cilindro è posto in rapida rotazione ad una velocità angolare  $\omega$  con gli interruttori aperti dopo di che il circuito viene chiuso per un certo tempo e poi riaperto, sempre mentre il cilindro ruota. A questo punto si può verificare l'eventuale trasferimento di carica tra i due semicircuiti. Poiché qui non si può dubitare della simultaneità della apertura degli interruttori che si trovano nello stesso luogo la redistribuzione della carica dei fili deve essere imputata alla contrazione relativistica del gas di elettroni di conduzione che si muove nei due semicircuiti con velocità assolute disuguali.

È da notare che la palese simultaneità dell'apertura degli interruttori sul cilindro è la simultaneità assoluta introdotta nel § 2.1.1. Infatti immaginando di eseguire l'esperimento su cilindri di raggio  $R$  sempre più grande e a velocità angolare  $\omega$  decrescente, mantenendo la lunghezza  $L$  del circuito e la velocità tangenziale

---

<sup>52</sup> Si possono scrivere come  $\mathbf{E} = \frac{2ui}{r^2} \mathbf{r}$  e  $\mathbf{B} = \frac{2i}{r^2} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}$ , dove  $\hat{\mathbf{u}}$  è il versore nella direzione di  $\mathbf{u}$  ed  $\mathbf{r}$

il vettore perpendicolare al filo che va da questo alla carica di prova.



$u = \omega R$  costante, ci si approssima alla situazione vista prima del circuito piano in moto con velocità assoluta  $\mathbf{u}$  e con gli orologi assolutamente sincronizzati.

È semplice fare una valutazione dell'intensità dell'effetto: per la densità lineare di carica su un semicircuito vale la stessa relazione utilizzata per il circuito piano dato dalla (4.13) con  $u = \omega R$  cioè  $\lambda = \frac{i\omega R}{c^2}$  (avendo ripristinato la costante  $c$ ). Con una lunghezza  $L$  del semicircuito la carica spostata è

$$\Delta Q = \frac{i\omega RL}{c^2}$$

Con delle grandezze ragionevoli ad esempio  $i = 15\text{A}$  ,  $\omega = 300\text{ rad/s}$ ,  $R = 1\text{ m}$  e  $L = 2000\text{ m}$  (circa 300 avvolgimenti) si avrebbe  $\Delta Q = 0.1\text{ nC}$  , una quantità agevolmente misurabile, anche in considerazione del fatto è possibile ripetere più volte la apertura e chiusura degli interruttori e accumulare ogni volta le cariche in un condensatore. Inoltre invertendo il senso di rotazione del cilindro si dovrebbe ottenere un  $\Delta Q$  di segno opposto quindi misurando il valore differenziale  $\Delta Q_{\text{orario}} - \Delta Q_{\text{antiorario}}$  si dovrebbero eliminare eventuali errori sistematici presenti in ciascuna misura. Infatti l'apparato è costruibile con una configurazione di perfetta simmetria oraria/antioraria e quindi la eventuale presenza cariche spurie dovrebbe manifestarsi con lo stesso valore indipendentemente dal verso di rotazione

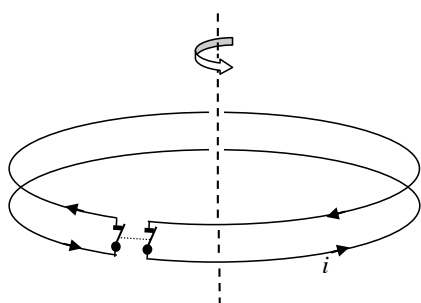


Fig.19 – Disposizione del circuito per l'esperimento di redistribuzione della carica causato dal moto assoluto

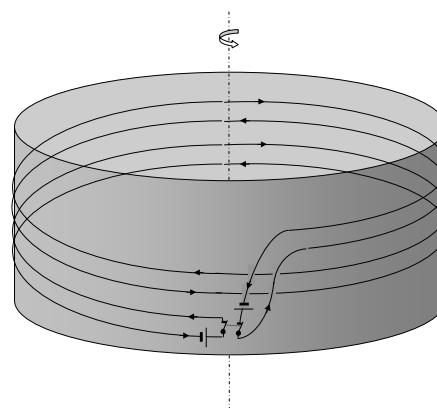


Fig.20 – rappresentazione un po' più realistica dell'esperimento proposto

L'esperimento descritto, mettendo in evidenza l'effetto, avrebbe i seguenti significati:

- rappresenta una prova della contrazione di Lorentz (che come è noto non ha evidenze sperimentali dirette).
- è una prova che è possibile trattare i sistemi rotanti per mezzo della relatività ristretta pur di adottare la sincronizzazione assoluta.

- Avvalora l'impostazione della relatività basata sulle TI mostrando la necessità logica di considerare le contrazioni relativistiche come assolute e riguardanti i sistemi materiali e non lo spazio.

D'altra parte se l'esperimento non dovesse mostrare alcun effetto, la situazione sarebbe più problematica perché considerato che:

- la relatività standard prevede innegabilmente che con l'allestimento "piano" di Fig.18, aprendo gli interruttori contemporaneamente secondo la sincronizzazione assoluta, si debba avere redistribuzione di carica.
- si può idealmente trasformare con continuità il circuito piano di Fig.18 nel circuito avvolto di Fig.19 aumentando gradualmente la curvatura del circuito stesso.

Se l'effetto si ha nel circuito piano ma non nel circuito avvolto, ci sono due possibilità:

1. Il fenomeno avviene soltanto se la curvatura è inferiore ad un certo valore di soglia
2. L'intensità del fenomeno decresce gradualmente all'aumentare della curvatura

La prima possibilità appare alquanto improbabile e comunque sorgerebbe la questione di capire qual è e perché esiste una soglia. Il secondo caso ugualmente meriterebbe di indagare la forma di questa dipendenza e di trovare una teoria che la giustifichi.

## 6 – Conclusioni

Da quanto presentato dovrebbe risultare chiaro che la teoria relativistica qui esposta, basata sulla sincronizzazione assoluta e sulle conseguenti trasformazioni inerziali, non si pone come antagonista alla teoria standard. In questo senso entrambe le teorie possono coesistere fino a quando qualche dato empirico o sviluppo teorico faccia propendere per l'una o per l'altra o per altro ancora. L'idea che la scienza proponga delle teorie "vere" in qualche senso assoluto e stata da tempo abbandonata e sostituita con una più cauta posizione che considera le teorie come adeguate descrizioni di una parte della realtà e aperte a future modifiche o smentite.

Rispetto alla teoria standard, la relatività con la sincronizzazione assoluta utilizza un linguaggio che appare più complesso a causa della introduzione del riferimento privilegiato che nasconde la simmetria di Lorentz. Perciò, se si limitasse soltanto a replicare le previsioni della teoria standard, la si potrebbe tranquillamente ignorare o al massimo considerare una tra le varie possibili alternative, utili forse per una riflessione epistemologica sulle interpretazioni della relatività ma di scarso interesse pratico.

Ma, come è stato mostrato, il potere esplicativo di questa teoria si estende naturalmente oltre all'ambito di applicazione della relatività standard, comprendendo sistemi di riferimento linearmente accelerati e in rotazione. È in questi ultimi che la teoria standard risulta generalmente inadatta e anche l'artificio di considerare SRI comoventi istantanei non dà risultati sempre coerenti.

In ogni caso la teoria qui presentata fornisce un'immagine chiara e realistica dei classici fenomeni relativistici, indicando che la "dilatazione del tempo" e la "contrazione delle distanze" devono essere considerati fenomeni assoluti che riguardano oggetti fisici e non lo spazio e il tempo in senso astratto come è stato spesso frainteso, salvo dover ammettere che questi fenomeni "a volte invece si riferiscono agli oggetti fisici".

L'unificazione tra riferimenti inerziali e accelerati assieme all'interpretazione "realista" dei fenomeni relativistici produce un'immagine definita in varie situazioni sperimentali. In particolare si è visto che lo sviluppo dell'elettromagnetismo, coerente con la sincronizzazione assoluta, porge equazioni che applicate a situazioni sperimentali concrete indicano l'esistenza di fenomeni nuovi non previsti nella interpretazione standard della relatività (perché al di là della campo di applicazione o perché richiedono appunto una interpretazione diversa dei fenomeni relativistici). Ciò dimostra, se non altro, la capacità euristica che possiede la visione proposta dalla teoria qui presentata.

Un fatto notevole è che un fenomeno previsto nell'interpretazione qui proposta sia sperimentalmente rilevabile con una attrezzatura relativamente semplice.

Osservo infine che la teoria proposta recupera, oltre allo spazio assoluto rappresentato dal riferimento preferenziale, anche il concetto di simultaneità assoluta per tutti gli osservatori in qualunque stato di moto. Questo dato è in sintonia con la cosmologia attuale che riconosce un riferimento privilegiato: quello

in cui la radiazione cosmica di fondo è isotropa e il tempo è il tempo cosmologico. Anche se questo dato non è sufficiente per sostenere una violazione della invarianza di Lorentz, suggerisce che la teoria che assume tali riferimenti assoluti è forse più adeguata alla descrizione della realtà, e che il cambiamento del punto di vista che essa comporta può essere utile a formulare nuove ipotesi.

## Appendice A

### ***Deduzione delle equazioni dei campi elettrico e magnetico secondo la relatività con sincronizzazione assoluta***

Le trasformazioni inerziali dal SRI privilegiato  $S_0$  ad un SRI  $S$  di velocità assoluta  $\mathbf{u}$  sono, in base alla (2.35)

$$\begin{cases} t = Rt_0 \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \left(\frac{1}{R} - 1\right) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_0}{u^2} \mathbf{u} - \frac{t_0}{R} \mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{A1})$$

dove  $R = \sqrt{1 - u^2}$ .

Da queste trasformazioni si ottengono le relazioni tra le derivate temporali e spaziali in  $S$  e in  $S_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} &= \frac{\partial t}{\partial t_0} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t_0} \frac{\partial}{\partial x^i} = R \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} u^i x^i \\ \frac{\partial}{\partial x_0^i} &= \frac{\partial t}{\partial x_0^i} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^j}{\partial x_0^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0 + \left[ \delta_i^j - \left(\frac{1}{R} - 1\right) \frac{u^i u^j}{u^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_0} = R \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} \mathbf{u} \cdot \nabla \\ \nabla_0 = \nabla + \left(\frac{1}{R} - 1\right) \frac{\mathbf{u}}{u^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \end{cases} \quad (\text{A3})$$

Queste relazioni specializzate per  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$  diventano

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_0} = R \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} ux \\ \frac{\partial}{\partial x_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y_0} = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z_0} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{A4})$$

Invertendo le equazioni di trasformazione dei campi elettrici e magnetici date dalle (4.5) e (4.6) si ottiene

$$\begin{cases} E_{0x} = E_x & , & E_{0y} = \frac{E_y}{R} & , & E_{0z} = \frac{E_z}{R} \\ B_{0x} = B_x & , & B_{0y} = RB_y - \frac{v}{R} E_z & , & B_{0z} = RB_z + \frac{v}{R} E_y \end{cases} \quad (\text{A5})$$

Si ha perciò:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\partial E_{0x}}{\partial x_0} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y_0} + \frac{\partial E_{0z}}{\partial z_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_y}{R} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_z}{R} = \frac{1}{R} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot \mathbf{B}_0 &= \frac{\partial B_{0x}}{\partial x_0} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y_0} + \frac{\partial B_{0z}}{\partial z_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial B_x}{\partial x} + R \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{u}{R} \frac{\partial E_z}{\partial y} + R \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{u}{R} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial B_x}{\partial x} + R \frac{\partial B_y}{\partial y} + R \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{1}{R} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

$$\begin{cases} (\nabla_0 \times \mathbf{E}_0)_x = \frac{\partial E_{0z}}{\partial y_0} - \frac{\partial E_{0y}}{\partial z_0} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{R} (\nabla \times \mathbf{E})_x \\ (\nabla_0 \times \mathbf{E}_0)_y = \frac{\partial E_{0x}}{\partial z_0} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x_0} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ (\nabla_0 \times \mathbf{E}_0)_z = \frac{\partial E_{0y}}{\partial x_0} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y_0} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{cases} (\nabla_0 \times \mathbf{B}_0)_x = \frac{\partial B_{0z}}{\partial y_0} - \frac{\partial B_{0y}}{\partial z_0} = R \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{u}{R} \frac{\partial E_y}{\partial y} - R \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{u}{R} \frac{\partial E_z}{\partial z} = R (\nabla \times \mathbf{B})_x + \frac{u}{R} \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ (\nabla_0 \times \mathbf{B}_0)_y = \frac{\partial B_{0x}}{\partial z_0} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x_0} = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} = (\nabla \times \mathbf{B})_y - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ (\nabla_0 \times \mathbf{B}_0)_z = \frac{\partial B_{0y}}{\partial x_0} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y_0} = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{B})_z - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t_0} = \left( R \frac{\partial}{\partial t} - \frac{u}{R} \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{u}{R} \frac{\partial E_x}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ R \end{pmatrix} \quad (\text{A10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t_0} = \left( R \frac{\partial}{\partial t} - \frac{u}{R} \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} B_x \\ RB_y - \frac{u}{R} E_z \\ RB_z + \frac{u}{R} E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{u}{R} \frac{\partial B_x}{\partial x} \\ R^2 \frac{\partial B_y}{\partial t} - u \frac{\partial B_y}{\partial x} - u \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{u^2}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ R^2 \frac{\partial B_z}{\partial t} - u \frac{\partial B_z}{\partial x} - u \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{u^2}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (\text{A11})$$

Le trasformazioni della densità di carica  $\rho$  sono facilmente deducibili dalla loro definizione  $\rho = \frac{\Delta q}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ ,  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  tenendo conto dell'invarianza della carica per TI e di come si trasformano le lunghezze  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  e la velocità  $\mathbf{v}$  (eq.(2.39)):

$$\rho_0 = \frac{\rho}{R} \quad (\text{A12})$$

$$\mathbf{j}_0 \equiv \begin{pmatrix} j_{0x} \\ j_{0y} \\ j_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rj_x + \frac{u}{R} \rho \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \quad (\text{A13})$$

Allora, confrontando (A6) con (A12) si ha che

la prima equazione di Maxwell (legge di Gauss)  $\nabla_0 \cdot \mathbf{E}_0 = 4\pi\rho_0$  resta formalmente invariata:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{A14})$$

riconfermando quanto postulato nella (4.2).

Dalle (A8) e (A11) si ottiene la legge di induzione di Faraday  $\nabla_0 \times \mathbf{E}_0 + \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t_0} = 0$ :

separando nelle tre componenti cartesiane, per la componente  $x$  si ha

$$\frac{1}{R} (\nabla \times \mathbf{E})_x + R \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{u}{R} \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\left[ \nabla \times \mathbf{E} + R^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]_x = 0 \quad (\text{A15})$$

per la componente  $y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + R^2 \frac{\partial B_y}{\partial t} - u \frac{\partial B_y}{\partial x} - u \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{u^2}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \\
\left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - u \frac{\partial E_z}{\partial t} - u \frac{\partial B_y}{\partial x} + R^2 \frac{\partial B_y}{\partial t} &= 0 \\
\left[ \nabla \times \mathbf{E} + R^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]_y &= 0
\end{aligned} \tag{A16}$$

e per la componente  $z$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + R^2 \frac{\partial B_z}{\partial t} - u \frac{\partial B_z}{\partial x} + u \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{u^2}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \\
\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + R^2 \frac{\partial B_z}{\partial t} - u \frac{\partial B_z}{\partial x} + u \frac{\partial E_y}{\partial t} &= 0 \\
\left[ \nabla \times \mathbf{E} + R^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]_z &= 0
\end{aligned} \tag{A17}$$

osservando che vale  $\left[ \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]_x = 0$  in quanto la velocità assoluta  $\mathbf{u}$  è stata scelta nella direzione delle  $x$ , si possono sintetizzare le precedenti relazioni in

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -R^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \tag{A18}.$$

L'equazione della circuitazione di Ampere–Maxwell  $\nabla_0 \times \mathbf{B}_0 - \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t_0} = 4\pi \mathbf{j}_0$ ,

confrontando le equazioni (A9), (A10) e (A13) e considerando come prima le tre componenti cartesiane, diventa:

Per la componente  $x$

$$\begin{aligned}
R(\nabla \times \mathbf{B})_x + \frac{u}{R} \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - R \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 4\pi \left( R j_x + \frac{u}{R} \rho \right) \\
R \left[ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - 4\pi \mathbf{j} \right]_x + \frac{u}{R} (\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi \rho) &= 0
\end{aligned}$$

che si semplifica in

$$\left[ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - 4\pi \mathbf{j} \right]_x = 0 \tag{A19}$$



a causa della (A14):  $(\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0$ .

Per la componente y

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_y - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= 4\pi j_y \\ \left[ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - 4\pi \mathbf{j} \right]_y &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

e per la componente z

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B})_z - \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{u}{R^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 4\pi j_z \\ \left[ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - 4\pi \mathbf{j} \right]_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Si può porre in forma vettoriale osservando così che anche questa equazione è formalmente invariante per TI

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{j} \quad (\text{A22})$$

Infine per l'equazione  $\nabla_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$  abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot \mathbf{B}_0 &= \frac{\partial B_{0x}}{\partial x_0} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y_0} + \frac{\partial B_{0z}}{\partial z_0} = \frac{1}{R} \frac{\partial B_x}{\partial x} + R \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{u}{R} \frac{\partial E_z}{\partial y} + R \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{u}{R} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial B_x}{\partial x} + R \frac{\partial B_y}{\partial y} + R \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{1}{R} \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \left( \frac{1}{R} - R \right) \frac{\partial B_x}{\partial x} + R \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) - \frac{\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}{R} = \\ &= R \nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{R} \left[ u^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \right] \end{aligned}$$

ma

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\mathbf{u}}{u} \cdot \nabla, \quad B_x = \frac{\mathbf{u}}{u} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})}{u^2}$$

per cui

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{B}_0 = R \nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})}{R} - \frac{\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}{R} = R \nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{R} \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{E}]$$

quindi  $\nabla_0 \cdot \mathbf{B}_0 = 0$  se e solo se

$$\nabla \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{R^2} \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{E}] = 0. \quad (\text{A23})$$

La (A18) ci dice che  $\nabla \times \mathbf{E} + R^2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$ . Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{u}$  e osservando che  $\mathbf{u} \cdot \left( \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$ , otteniamo  $\mathbf{u} \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{E}] = R^2 \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  che sostituito in (A23) fornisce

$$\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (\text{A24})$$

Conviene introdurre l'operatore  $\tilde{\nabla} \equiv \nabla + \frac{\partial}{\partial t}$

cosicché la (A24) diventa

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$$

e la (A18) può essere scritta in forma semplificata :

$$\begin{aligned} \left( \nabla + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \mathbf{E} &= -(1 - u^2) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \left( \nabla + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left[ \mathbf{u} \cdot \left( \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) \right] \mathbf{B} \\ \tilde{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{B} \end{aligned}$$

Riassumendo: in un SRI di velocità assoluta  $\mathbf{u}$  le equazioni dei campi elettrico e magnetico nel vuoto in presenza di cariche e correnti libere di densità  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  rispettivamente, assumono la forma<sup>53</sup>

<sup>53</sup> Esprimendo le equazioni in forma vettoriale si può far decadere la limitazione di  $\mathbf{u}$  nella direzione delle  $x$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\nabla} \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \tilde{\nabla}) \mathbf{B} \\ \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4 \pi \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4 \pi \rho \end{array} \right.$$

dove si è posto  $\tilde{\nabla} \equiv \nabla + \frac{\partial}{\partial t}$ .

## Appendice B

### *Forza esercitata dai campi sulla carica elettrica*

Vediamo come si trasformano energia e quantità di moto.

Sappiamo che nel SRI  $S_0$  per una particella di massa  $m$  e velocità  $\mathbf{v}_0$  l'energia e la quantità di moto sono rispettivamente

$$E_0 = \frac{m}{\sqrt{1-v_0^2}}$$

$$\mathbf{p}_0 = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v_0^2}}$$

dal momento che nella relatività con sincronizzazione assoluta il coefficiente

$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \sqrt{(1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2}$  sostituisce il fattore  $\gamma(\mathbf{v})^{-1} \equiv \sqrt{1-v^2}$  della relatività standard, assumiamo<sup>54</sup> che energia e momento in un SRI di velocità assoluta  $\mathbf{u}$ , siano definiti da

$$E = \frac{m}{\sqrt{(1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2}} \quad (\text{B1})$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{(1-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2}} \quad (\text{B2})$$

Dalla legge di composizione delle velocità (2.39) si ha

$$\mathbf{v}_0 = R\mathbf{v} + \left(1 - \frac{R}{1+R}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right)\mathbf{u} \quad (\text{B3})$$

dove qui  $R \equiv R(0, \mathbf{u}) = \sqrt{1-u^2}$ .

Sostituendo (B3) in (B1) e (B2) si ottengono le trasformazioni dell'energia e della quantità di moto:

$$\begin{cases} E = RE_0 \\ \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \left(\frac{1}{R} - 1\right) \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_0}{u^2} \mathbf{u} - \frac{E_0}{R} \mathbf{u} \end{cases} \quad (\text{B4})$$

---

<sup>54</sup> Si può dimostrare che queste assunzioni non sono arbitrarie se si vuole mantenere la conservazione dell'energia e della quantità di moto.

a questo punto determino una relazione tra  $\frac{dE}{dt}$  e  $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$  che sarà utile in seguito.

Da (B1) e (B2) si hanno le evidenti relazioni  $\mathbf{p} = E\mathbf{v}$  e  $\frac{m^2}{E^2} = (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2$

Derivando rispetto al tempo  $t$  si ottiene rispettivamente

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dE}{dt} \mathbf{v} + E \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{B5})$$

e

$$[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{m^2}{E^3} \frac{dE}{dt} \quad (\text{B6})$$

moltiplicando scalarmente (B5) per  $[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}]$  e utilizzando (B6) si ha

$$\begin{aligned} [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \cdot \left( \frac{dE}{dt} \mathbf{v} + E \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \\ &= [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} \frac{dE}{dt} + E \frac{m^2}{E^3} \frac{dE}{dt} = \left[ (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + v^2 + \frac{m^2}{E^2} \right] \frac{dE}{dt} = \\ &= \left[ (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + v^2 + ((1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - v^2) \right] \frac{dE}{dt} = (1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{dE}{dt} = \left( \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \right) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\text{B7})$$

Considero ora le inverse delle trasformazioni (B4) specializzate per  $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$

$$\begin{cases} E_0 = \frac{E}{R} \\ p_{0x} = Rp_x + \frac{u}{R} E \\ p_{0y} = p_y \\ p_{0z} = p_z \end{cases} \quad (\text{B8})$$

e le trasformazioni inerziali (2.1) con lo stesso  $\mathbf{u}$

$$\begin{cases} t = Rt_0 \\ x = \frac{x_0 - ut_0}{R} \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad (\text{B9})$$

da (B8) e (B9) si può calcolare  $\frac{dp_{0x}}{dt_0} = \frac{dt}{dt_0} \frac{dp_{0x}}{dt} = R^2 \frac{dp_x}{dt} + u \frac{dE}{dt}$ , utilizzando la (B7) e ricordando che  $R^2 = 1 - u^2$  si ricava

$$\frac{dp_{0x}}{dt_0} = \frac{1}{1 - uv_x} \left[ \frac{dp_x}{dt} + u \left( v_y \frac{dp_y}{dt} + v_z \frac{dp_z}{dt} \right) \right] \quad (\text{B10})$$

similmente si determinano

$$\frac{dp_{0y}}{dt_0} = R \frac{dp_y}{dt} \quad (\text{B11})$$

e

$$\frac{dp_{0z}}{dt_0} = R \frac{dp_z}{dt} \quad (\text{B12})$$

queste sono le formule per la trasformazione della forza secondo le TI (con  $\mathbf{u}$  parallelo all'asse  $x$ ).

Vediamo ora come si trasformano le velocità  $\mathbf{v}_0$ .

Utilizziamo l'equazione (2.39) specializzata con  $\mathbf{u}_1 = 0$ ,  $\mathbf{v}_{21} \rightarrow \mathbf{u} = (u, 0, 0)$ ,

$\mathbf{v}_{31} \rightarrow \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_{32} \rightarrow \mathbf{v}_1$  e quindi  $R_{21} \rightarrow R = \sqrt{1 - u^2}$ . Si ha  $\mathbf{v}_0 = R\mathbf{v} + \left[ 1 - \frac{R}{u} (1 - R) v_x \right] \mathbf{u}$

e quindi

$$\begin{cases} v_{0x} = R^2 v_x + u \\ v_{0y} = R v_y \\ v_{0z} = R v_z \end{cases} \quad (\text{B13})$$

Consideriamo ora la forza di Lorentz nella forma che sappiamo essere corretta nel sistema privilegiato  $S_0$ :

$$\frac{1}{q} \frac{d\mathbf{p}_0}{dt_0} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0$$

il secondo membro si trasforma per mezzo delle trasformazioni dei campi (4.5), (4.6) e delle velocità (B13). È conveniente considerare le componenti cartesiane separatamente:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0]_x &= E_{0x} + v_{0y}B_{0z} - v_{0z}B_{0y} = E_x + Rv_y \left( RB_z - \frac{u}{R} E_y \right) - Rv_z \left( RB_y - \frac{u}{R} E_z \right) = \\ &= E_x + u(v_y E_y + v_z E_z) + R^2(v_y B_z - v_z B_y) = (1 - uv_x)E_x + u\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + R^2(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x = \\ &= [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{u} + (1 - u^2)(\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_x \end{aligned} \quad (\text{B14})$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0]_y &= E_{0y} + v_{0z}B_{0x} - v_{0x}B_{0z} = \frac{E_y}{R} + Rv_z B_x - (R^2 v_x + u) \left( RB_z + \frac{u}{R} E_y \right) = \\ &= \left( \frac{1 - u^2}{R} - Ruv_x \right) E_y + R(v_z B_x - v_x B_z) - uR(1 - uv_x)B_z = R[(1 - uv_x)E_y + (v_z B_x - v_x B_z) - u(1 - uv_x)B_z] = \\ &= R[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \times \mathbf{B}]_y \end{aligned} \quad (\text{B15})$$

e similmente per la componente  $z$

$$[\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0]_z = E_{0z} + v_{0y}B_{0x} - v_{0x}B_{0y} = R[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \times \mathbf{B}]_z \quad (\text{B16})$$

Abbiamo quindi confrontando (B11) e (B12) con (B15) e (B16), per le componenti ortogonali alla velocità  $\mathbf{u}$

$$\frac{dp_\perp}{dt} = q[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + [(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}] \times \mathbf{B}]_\perp \quad (\text{B17})$$

dove  $\perp$  sta per  $y$  o  $z$ .

Per la componente  $x$  parallela ad  $\mathbf{u}$  confrontando (B10) con (B14) si ha

$$\frac{1}{1 - uv_x} \left[ \frac{dp_x}{dt} + u \left( v_y \frac{dp_y}{dt} + v_z \frac{dp_z}{dt} \right) \right] = q[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{u} + (1 - u^2)(\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_x$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= q(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})[(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{E} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{u} + (1 - u^2)(\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_x - u \left[ v_y \frac{dp_y}{dt} + v_z \frac{dp_z}{dt} \right] = \\ &= q(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \left\{ E_x + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})u + R^2(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x - uv_y E_y - uv_z E_z + \left[ \left( \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \right) \times \mathbf{B} \right]_y + \right. \\ &\quad \left. + uv_z E_z + uv_y \left[ \left( \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} \right) \times \mathbf{B} \right]_z \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\left\{E_x + R^2(v_y B_z - v_z B_y) + uv_x \frac{v_y B_z - v_z B_y}{1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} + u^2(v_y B_z - v_z B_y)\right\} = \\
&= q(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\left\{E_x + \left(1 + \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B})_x\right\} = q(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})E_x + q(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B})_x
\end{aligned}$$

si può aggiungere a quest'ultima espressione una quantità proporzionale a  $(\mathbf{u}\times\mathbf{B})_x$  che è nulla perché  $\mathbf{u}$  è nella direzione  $x$ . Possiamo quindi scrivere

$$\frac{dp_x}{dt} = q[(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{E} + [(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}]\times\mathbf{B}]_x$$

questa equazione, insieme alla (B17), si possono scrivere in forma vettoriale

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q[(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{E} + [(1-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + \mathbf{v}]\times\mathbf{B}]$$

che rappresenta la forza che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  esercitano sulla carica  $q$  nel SRI S di velocità assoluta  $\mathbf{u}$ .<sup>55</sup>

---

<sup>55</sup> Ovviamente la forma vettoriale (B18) assicura la sua validità per ogni velocità  $\mathbf{u}$  comunque orientata.



## Appendice C

### Analisi secondo la TRS standard della desincronizzazione causata dal moto

Il moto consiste in due fasi: una fase di *identica accelerazione* quindi una fase *avvicinamento* degli orologi (Fig.21 e Fig.22).

1<sup>a</sup> fase: *identica accelerazione*

Consideriamo due orologi identici  $O_A$  e  $O_B$  a riposo nei punti  $x = x_A$  e  $x = x_B = x_A + d$  sull'asse delle  $x$  del SRI  $S_0$ . Inizialmente sincronizzati con il metodo standard. Al tempo  $t_0 = 0$  entrambi gli orologi iniziano un identico moto accelerato nella direzione delle  $x$  positive, cioè, osservati da  $S_0$ , si muovono entrambi con la stessa velocità  $v(t)$  per un periodo di tempo  $\tau$  misurato in  $S_0$ . Alla fine del moto accelerato ( $t_0 = \tau$ ) la loro velocità sia definitivamente  $v(\tau) = u$ , cosicché da quel momento in poi, viaggiando a velocità costante in  $S_0$ , si trovano a riposo in un altro SRI che si muove a velocità  $u$  rispetto a  $S_0$ .

Consideriamo i seguenti quattro eventi:

$\mathcal{A}_1$ :  $O_A$  inizia ad accelerare

$\mathcal{A}_2$ :  $O_A$  termina il moto accelerato

$\mathcal{B}_1$ :  $O_B$  inizia ad accelerare

$\mathcal{B}_2$ :  $O_B$  termina il moto accelerato

In  $S_0$  questi eventi hanno coordinate (trascurando le coordinate  $y$  e  $z$  che restano costanti):

$\mathcal{A}_1$ :  $(0, x_A)$ ,  $\mathcal{A}_2$ :  $(\tau, x_A + L)$ ,  $\mathcal{B}_1$ :  $(0, x_B)$ ,  $\mathcal{B}_2$ :  $(\tau, x_B + L)$  dove  $L = \int_0^\tau v(t) dt$  è la distanza

percorsa sull'asse  $x$  nel tempo  $\tau$  da  $O_A$  e  $O_B$ .

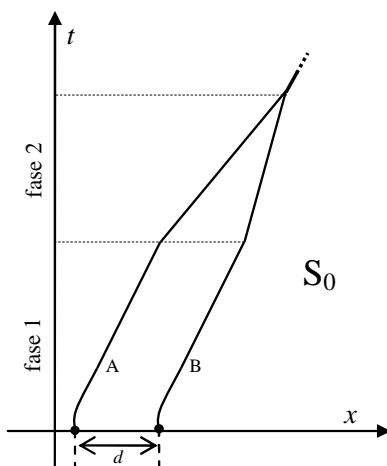


Fig.21 – Digramma orario del moto osservato dal riferimento inerziale  $S_0$ .

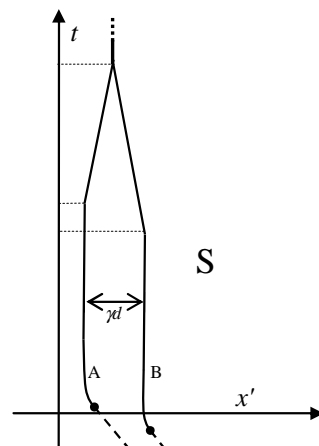


Fig.22 – Digramma orario del moto osservato dal riferimento inerziale  $S$ .

Usando le trasformazioni di Lorentz:  $t' = \gamma(t_0 - ux_0/c^2)$ ,  $x' = \gamma(x_0 - ut_0)$  con  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ , troviamo le coordinate di questi eventi nel SRI S che si muove con velocità  $u$  rispetto ad  $S_0$  secondo la TRS standard:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1: & \left(-\gamma ux_A/c^2, \gamma x_A\right), & \mathcal{A}_2: & \left(\gamma[\tau - u(x_A + L)/c^2], \gamma(x_A + L - u\tau)\right), \\ \mathcal{B}_1: & \left(-\gamma ux_B/c^2, \gamma x_B\right), & \mathcal{B}_2: & \left(\gamma[\tau - u(x_B + L)/c^2], \gamma(x_B + L - u\tau)\right). \end{aligned}$$

È immediato osservare che dall'inizio alla fine della accelerazione la distanza propria tra  $O_A$  e  $O_B$  è aumentata da  $x_B - x_A$  a  $\gamma(x_B - x_A)$  e che gli orologi hanno perso la sincronizzazione che avevano in  $S_0$ . Infatti la fine dell'accelerazione avviene in tempi successivi in S con un anticipo di  $O_B$  su  $O_A$  dato da

$$\Delta T = \gamma[\tau - u(x_A + L)/c^2] - \gamma[\tau - u(x_B + L)/c^2] = \frac{\gamma u}{c^2}(x_B - x_A) = \frac{\gamma u d}{c^2}. \quad (C1)$$

2<sup>a</sup> fase: *avvicinamento*

Consideriamo la seconda fase del moto in cui  $O_A$  e  $O_B$  inizialmente in quiete in S sono riavvicinati. L'inizio di questo moto sia simultaneo in  $S_0$  e avvenga con velocità uguali ed opposte se osservate da S:  $O_A$  alla velocità  $w$  e  $O_B$  alla velocità  $-w$ . Supponiamo inoltre che queste velocità siano costanti ad eccezione della breve accelerazione iniziale che può essere trascurata.

In  $S_0$  le velocità di  $O_A$  e  $O_B$  si ottengono componendo relativisticamente  $w$  e  $-w$  con la velocità  $u$  di S rispetto  $S_0$ . Si trova

$$v_A = \frac{u + w}{1 + \frac{uw}{c^2}} \quad \text{e} \quad v_B = \frac{u - w}{1 - \frac{uw}{c^2}} \quad (C2)$$

Ora si ha in  $S_0$ ,  $O_A$  che viaggia a velocità  $v_A$  nella direzione positiva delle  $x$ , e  $O_B$  che viaggia a velocità (inferiore)  $v_B$  con un vantaggio di spazio iniziale uguale a  $d$ . Indichiamo con  $\tau$  il tempo necessario, in  $S_0$ , affinché  $O_A$  raggiunga  $O_B$ . Uguagliando gli spazi percorsi in questo tempo  $v_A \tau = v_B \tau + d$  si ottiene:

$$\tau = \frac{d}{v_A - v_B}$$

Sostituendo  $v_A$  e  $v_B$  date dalle (C2) si ottiene:

$$\tau = \frac{d}{2w} \frac{1 - u^2 w^2 / c^4}{1 - u^2 / c^2} \quad (C3)$$

I tempi propri  $\tau_A$  e  $\tau_B$  di avvicinamento per  $O_A$  e  $O_B$  sono ridotti rispetto a  $\tau$  secondo il solito fattore relativistico  $1/\gamma$ , cioè rispettivamente:

$$\tau_A = \tau \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}, \quad \tau_B = \tau \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}} \quad (C5)$$

Sostituendo nelle (C5) le velocità date dalle (C2) e il tempo  $\tau$  dato dalla (C4), dopo alcuni passaggi si trova:

$$\tau_A = \frac{d}{2w} \sqrt{\frac{c^2 - w^2}{c^2 - u^2}} \left(1 - \frac{wu}{c^2}\right), \quad \tau_B = \frac{d}{2w} \sqrt{\frac{c^2 - w^2}{c^2 - u^2}} \left(1 + \frac{wu}{c^2}\right)$$

e infine la differenza di tempo segnata dai due orologi :

$$\Delta\tau = \tau_B - \tau_A = \frac{ud}{c^2} \sqrt{\frac{c^2 - w^2}{c^2 - u^2}} \quad (C6)$$

Si può osservare che  $\Delta\tau$  è tanto maggiore quanto minore è  $w$ . Se  $w$  tende a zero la (C6) si riduce alla (C1). Il significato del limite  $w \rightarrow 0$  è infatti quello di "trasporto infinitamente lento" degli orologi e, come si è visto, questo tipo di trasporto conserva la sincronizzazione standard.

## Appendice D

### *Implicazioni delle trasformazioni parametriche*

Consideriamo le trasformazioni parametriche (2.1) dal SRI  $S_0$  a  $S$  qui riportate insieme con le inverse:

$$\begin{cases} t = Rt_0 + e(x_0 - ut_0) \\ x = \frac{x_0 - ut_0}{R}, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \end{cases} \quad (D1)$$

$$\begin{cases} t_0 = \frac{t}{R} - e x \\ x_0 = (R - eu)x + \frac{u}{R}t, \quad y_0 = y, \quad z_0 = z \end{cases} \quad (D2)$$

#### *Velocità della luce*

Un segnale luminoso parte al tempo  $t_0 = t = 0$  dalle origini coincidenti di  $S_0$  e  $S$  ed è rilevato in un punto  $P$  che dista  $L_0$  dall'origine nella direzione che forma un angolo  $\theta_0$  con l'asse delle  $x$ . Supponiamo inoltre di aver opportunamente ruotato gli assi di  $S_0$  e  $S$  in modo tale che la propagazione avvenga nel piano  $z_0 = z = 0$ . Perciò in  $S_0$  l'evento relativo all'arrivo del segnale in  $P$  ha coordinate

$$\left( \frac{L_0}{c}, L_0 \cos \theta_0, L_0 \sin \theta_0, 0 \right)$$

per mezzo delle trasformazioni (D1) si trovano le coordinate dello stesso evento in  $S$ :

$$\left( L_0 \left[ \frac{R}{c} + e \left( \cos \theta_0 - \frac{u}{c} \right) \right], \frac{L_0}{R} \left( \cos \theta_0 - \frac{u}{c} \right), L_0 \sin \theta_0, 0 \right)$$

quindi in  $S$  il segnale percorre la distanza  $L$  data da

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left[ \frac{L_0}{R} \left( \cos \theta_0 - \frac{u}{c} \right) \right]^2 + (L_0 \sin \theta_0)^2} = \left( 1 - \frac{u}{c} \cos \theta_0 \right) \frac{L_0}{R}$$

e forma con l'asse  $x$  un angolo  $\theta$  tale che

$$\cos \theta = \frac{x}{L} = \frac{\frac{L_0}{R} \left( \cos \theta_0 - \frac{u}{c} \right)}{\frac{L_0}{R} \left( 1 - \frac{u}{c} \cos \theta_0 \right)} = \frac{\cos \theta_0 - \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta_0}$$

risolvendo rispetto  $\cos \theta_0$  si ha

$$\cos \theta_0 = \frac{\cos \theta + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c} \cos \theta} \quad (\text{D3})$$

La velocità  $c(\theta)$  della luce in S è quindi

$$c(\theta) = \frac{L}{t} = \frac{\left( 1 - \frac{u}{c} \cos \theta_0 \right) \frac{L_0}{R}}{L_0 \left[ \frac{R}{c} + e \left( \cos \theta_0 - \frac{u}{c} \right) \right]} = \frac{c - u \cos \theta_0}{1 + eR(c \cos \theta_0 - u)} \quad (\text{D4})$$

sostituendo  $\cos \theta_0$  con l'espressione data da (D3) si trova infine

$$c(\theta) = \frac{c}{1 + \left( \frac{u}{c} + eR \right) \cos \theta}$$

### *Contrazione delle lunghezze*

Consideriamo una barra di lunghezza propria  $L_{\text{pr}}$  a riposo sull'asse  $X$  di un SRI S con i due estremi nei punti di coordinata  $x$  e  $x + L_{\text{pr}}$ . Nel riferimento stazionario  $S_0$  la barra è in moto con velocità  $u$  nella direzione delle  $x$  crescenti e al tempo  $t_0$  i suoi estremi hanno coordinate  $x_0$  e  $x_0 + L_{S_0}$ . Le trasformazioni parametriche (D1) ci permettono di scrivere

$$x = \frac{x_0 - ut_0}{R} \quad \text{e} \quad x + L_{\text{pr}} = \frac{x_0 + L_{S_0} - ut_0}{R}$$

da cui

$$L_{S_0} = RL_{\text{pr}}$$

Sia invece, ora la sbarra a riposo sull'asse  $X$  del riferimento stazionario  $S_0$  e i suoi estremi abbiano coordinate  $x_0$  e  $x_0 + L_{\text{pr}}$ . Nel riferimento S dove la barra è in moto nella direzione delle  $x$  crescenti, al tempo  $t$  i suoi estremi hanno coordinate  $x$  e  $x + L_S$ . Utilizzando le (D2) si ha

$$x_0 = (R - eu)x + \frac{u}{R}t \quad \text{e} \quad x_0 + L_{pr} = (R - eu)(x + L_S) + \frac{u}{R}t$$

da cui

$$L_S = \frac{L_{pr}}{R - eu}$$

### *Dilatazione del tempo*

Consideriamo due eventi che corrispondono a due "tic" successivi di un orologio a riposo nel SRI S. I due eventi hanno quindi in S coordinate  $(t, x, y, z)$  e  $(t + \Delta t_{pr}, x, y, z)$  dove  $\Delta t_{pr}$  è la durata dell'intervallo di tempo proprio tra i due "tic".

Secondo le trasformazioni (D2) in  $S_0$  le coordinate temporali dei due eventi sono rispettivamente

$$t_{01} = \frac{t}{R} - ex \quad \text{e} \quad t_{02} = \frac{t + \Delta t_{pr}}{R} - ex$$

da cui

$$\Delta t_{S_0} \equiv t_{02} - t_{01} = \frac{\Delta t_{pr}}{R}$$

questa è la durata dell'intervallo di tempo tra i due "tic" misurato in  $S_0$ .

Viceversa, se l'orologio è a riposo in  $S_0$ , i due eventi corrispondenti a due "tic" successivi dell'orologio hanno in  $S_0$  coordinate  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$  e  $(t_0 + \Delta t_{pr}, x_0, y_0, z_0)$ . Con le trasformazioni (D1) si trovano le coordinate temporali dei due eventi in S:

$$t_1 = (R - eu)t_0 + ex_0 \quad \text{e} \quad t_2 = (R - eu)(t_0 + \Delta t_{pr}) + ex_0$$

da cui

$$\Delta t_S \equiv t_2 - t_1 = (R - eu)\Delta t_{pr}$$

è la durata dell'intervallo di tempo tra i due "tic" misurato in S.

## Bibliografia

1. Poincaré, H., “La Mesure du Temps,” *Revue de Métaphysique et de Morale*, 6: 1–13 (1898); Traduzione in inglese in *The Foundations of Science*, pp. 223–234 Science Press, New York (1913)
2. Einstein, A., “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Annalen der Physik* 17, 891–921 (1905)
3. Reichenbach, H., “The Philosophy of Space & Time”, Dover, New York, (1958).
4. Ellis, B. and Bowman, P.,. “Conventionality in Distant Simultaneity”, *Philosophy of Science*, 34: 116–136 (1967)
5. Pellegrini, G. N. and Swift, A. R. ,“Maxwell’s equations in a rotating medium: Is there a problem?”, *Am. J. Phys.* 63, 694–705 (1995)
6. Wilson, M. and Wilson, H.A., “On the Electric Effect of Rotating a Magnetic Insulator in a Magnetic Field”, *Proc. Roy. Soc. London* A89, 99 (1913)
7. Chang, T., “Maxwell’s Equations in Anisotropic Space”, *Phys. Lett.* 70 A, 1, 1–2 (1979)
8. Tangherlini F.R., “An introduction to the General Theory of Relativity”, *Suppl. Nuovo Cim, Ser. X, v. 20*, 1–86 (1961)
9. Mansouri, R. and Sexl, R., *General Relat. Gravit.* 8, 497, 515, 809 (1977)
10. Grünbaum, A., “Philosophical Problems of Space and Time”, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, vol. XII. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Co. (1973)
11. Krisher et al., “Test of the isotropy of the one-way speed of light using hydrogen-maser frequency standards”, *Physical Review D* 42 (2): 731–734 (1990)
12. Greaves, E. D.; Rodríguez, An Michel; Ruiz-Camacho, J., “A one-way speed of light experiment”, *American Journal of Physics* 77 (10): 894–896 (2009)
13. Finkelstein, J., “One-way speed of light?”, *American Journal of Physics* 78 (8): 877 (2009)

14. Zhang, Y. Z., “Special relativity and its experimental foundations”, World Scientific, Singapore (1997)
15. Malament, D., “Causal theories of time and the conventionality of simultaneity”, *Noûs* 11, 293 (1977)
16. Selleri, F., *Chin. Jour. Syst. Eng. El.* Vol. 6, p. 25 (1995)
17. Eddington, A., “The Mathematical Theory of Relativity”, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge (1924)
18. Torretti, R., “Relativity and geometry”, Dover, New York (1996)
19. Torretti, R., “The Philosophy of Physics”, Cambridge University Press, Cambridge (1999)
20. Selleri F., “Noninvariant one-way velocity of light” *Foundation of Physics*, 26 (5), 641–644, (1996)
21. Bell, John Stewart “Speakable and unspeakable in quantum mechanics”, chapter 9, Cambridge University Press, Cambridge (1987)
22. Hafele, J. C., Keating, R. E., “Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains”, *Science* 177 (1972)
23. Rossi, B.; Hall, D. B. “Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum”, *Physical Review* 59 (3): 223–228 (1941)
24. Pauli, W., “Theory of Relativity”, Dover Publications (1981)
25. Herglotz, G., “Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als starr zu bezeichnenden Körper”, *Annalen der Physik* 336 (2): 393–415 (1909)
26. Landau, L. D., Lifshits, E. M., “Teoria dei Campi”, Editori Riuniti Edizioni Mir (1976)
27. Puccini, G. D., “Electrodynamics under a Possible Alternative to the Lorentz Transformation”, *Found. Phys. Lett.* 16, 481–94 (2003)
28. Rembielinski, J., “The Relativistic Ether Hypothesis”, *Phys. Lett.* 78 A, 1, 33–36 (1980)
29. Feynman, P.R., Leighton R. B. & Sands M. L., “The Feynman Lectures on Physics”. San Francisco: Pearson/Addison–Wesley. Vol. II, 13–6 (2006)
30. Elliott, R. S., “Electromagnetics”, McGraw–Hill, New York (1966)



31. Becker, R., Sauter, F., "Electromagnetic Field and Interactions", Blaisdell Publishing Company (1964)
32. Grøn, Ø., "Relativistic description of a rotating disk", Am. J. Phys 43, (10), 869–876 (1975)
33. David, L. W., "Schiff's Charges and Currents in Rotating Matter", Am. J. Phys. 31, 590–597 (1963).