

**Alma Mater Studiorum – Università di Bologna**

**DOTTORATO DI RICERCA IN  
Scienze della Terra**

**Ciclo XXV**

**Settore Concorsuale di afferenza: 04 / A2**

**Settore Scientifico disciplinare: GEO/02**

**SVILUPPO DI UNA METODOLOGIA PER LA MODELLAZIONE  
GEOLOGICA-GEOMECCANICA ED IL MONITORAGGIO DI RESERVOIR  
ADIBITI A SITI DI STOCCAGGIO DI GAS NATURALE**

**Presentata da: Francesco Luigi Guido**

**Coordinatore Dottorato**

**Prof. Roberto Barbieri**

**Relatore**

**Prof. Vincenzo Picotti**

**Co-Relatore**

**Prof. Marco Antonelini**

**Esame finale anno 2013**



*Alla memoria di mio padre,  
dal quale ho imparato più di quanto mille libri possano mai fare*



## Acknowledgements

Sincere and profound thanks to my thesis supervisor, Prof. Vincenzo Picotti, for encouraging me during this thesis and to have believed in my abilities: his constant motivations, provocations, discussions, and especially the continuous open dialogue make me growing.

Many thanks also to Prof. Marco Antonellini, for having lit me on structural geology, for being impressed with me by the development of new research tools, for having advised me on the best way to describe the problem investigated in this research project.

Many thanks to Prof. Rossella Capozzi and Dr. Alessio Ponza, for discussions, feedback, support, encouragement and time they dedicated to me

Many thanks go to Prof. Michele Cooke for introducing me to the BEM, for making me realize the importance and also the limitations of numerical methods, thanks for accepting me into his research group and for giving me the opportunity to spend a period of study in the United States; thanks to all the guys of the Department of Geosciences at the University of Massachusetts at Amherst (MA).

Thanks to Lynn Margulis Alexander, who hosted me for six months in the US, for showing me how the interest for knowledge does not finish with age, for showing me what it means to be determined, nonconformist, for her immense intelligence from which I was overwhelmed: I'll always keep in my memories!

Thanks to my PhD fellows here in Bologna, for comparing, joking, the blaspheming, but especially for the shared mutual support.

Thanks to my friends for always being available in times of need, for having understood and put up with the most complicated.

A special thanks to my family for the unconditional support, because it has never hindered my path, for having accepted my absences, for always believing in me and for their support despite distance.

My biggest thanks goes to Sara, for sharing with me most of this path, in good times but also in bad ones; thanks for the love, trust and support; thanks for making me feel a better and a complete person every day!



## Ringraziamenti

Sinceri e sentiti ringraziamenti sono rivolti al mio relatore di tesi, Prof. Vincenzo Picotti, per avermi incoraggiato durante questo percorso e per avere creduto nelle mie capacità: i suoi continui stimoli, le discussioni, le indicazioni, e soprattutto il continuo confronto aperto mi hanno fatto crescere.

Molti ringraziamenti anche al Prof. Marco Antonellini, per avermi illuminato sulla geologia strutturale, per essersi entusiasmato con me dello sviluppo di nuovi strumenti di indagine, per avermi consigliato su come descrivere al meglio il problema in esame in questo progetto di ricerca.

Profondi grazie alla Prof. Rossella Capozzi ed al Dott. Alessio Ponza, per le discussioni, le risposte, il supporto, gli incoraggiamenti ed il tempo dedicatomi.

Moltissimi ringraziamenti vanno alla Prof. Michele Cooke per avermi introdotto al BEM, per avermi fatto comprendere l'importanza ed anche i limiti dei metodi numerici; grazie per avermi accettato nel suo gruppo di ricerca e per avermi dato la possibilità di trascorrere un periodo di studi negli Stati Uniti; grazie a tutti i ragazzi del Dipartimento di Geoscienze dell'Università del Massachusetts ad Amherst (MA).

Grazie a Lynn Alexander Margulis, che mi ospitato per sei mesi negli Stati Uniti, per avermi mostrato come l'interesse per la conoscenza non si ferma con l'età, per avermi mostrato cosa significa essere testardo, controcorrente, perspicace, per la sua immensa intelligenza dalla quale ero sopraffatto: la porterò sempre nei miei ricordi!

Grazie ai miei compagni di avventura del Dottorato, per i confronti, le stupidaggini, le imprecazioni, condivise ma soprattutto per il supporto reciproco. Grazie ai miei amici per essere stati sempre disponibili nei momenti del bisogno, per avere compreso e sopportato i momenti più complicati.

Un grazie speciale alla mia famiglia, per il supporto incondizionato, per non avere mai intralciato il mio percorso, per avere accettato le mie assenze, per avere sempre creduto in me e per non avermi mai fatto mancare il supporto nonostante la lontananza.

Il mio più grande ringraziamento va a Sara, per avere condiviso con me gran parte di questo percorso, nei momenti belli ma soprattutto in quelli più brutti; grazie per l'amore, la fiducia e il sostegno; grazie di farmi sentire una persona migliore e completa ogni giorno!





# **DEVELOPMENT OF A METHODOLOGY FOR GEOLOGICAL-GEOMECHANICAL MODELING AND MONITORING OF RESERVOIRS USED AS NATURAL GAS STORAGE FACILITIES**

**FRANCESCO LUIGI GUIDO**

## **Abstract**

Temporary gas storage facilities play a fundamental role in the design of energy supply. The assessment of the risks associated with the operations of the storage systems, such as induced seismicity and subsidence, is a basic requirement for their proper management and planning, through the definition of the stress state changes induced by pore pressure variations underground.

The main aims of this project is to develop a methodology for the quantification of reservoir deformation as a function of pore pressure, and to calibrate the models used on case studies with real monitoring data, in order to compare the predictions of the models.

In this thesis, the theory of inhomogeneities has been used, by means of a semi-analytical approach, to define the elastic fields variations induced by fluids withdrawal and injection in geological reservoirs at depth.

The failure stress change concept for a Coulomb failure criterion has been used to study the extension, shape and magnitude of in induced stress changes, through the development of finite element numerical analysis.

The developed methodology has been applied and calibrated on two case studies of exploited reservoir actually converted to storage systems, which present dataset, geological and petrophysical, and various operating conditions: (I) - the Collalto storage site and (ii) Bagnolo Mella Storage project, in the planning stage for conversion.

Elastic fields variations and subsidence are calculated, and Coulomb failure stress changes have been mapped for both case studies, in both past production stages and real (case I) or provided (case II) storage scenarios.

The results show a good agreement with the observations arising from monitoring available on case studies, suggesting the reliability of the developed methodology and suggest the low likelihood of induced seismicity, based on the knowledge of the geological contexts on which two systems are located.

This project led to the creation of a quickly and effectively usable methodological base to estimate the influence of gas storage systems on the stress state of the crust; during the storage phases, it allows to monitor deformations and induced stresses; during the design stage, it allows to evaluate the operative strategies with a perspective on monitoring planning and mitigation of geological risks associated with the development of these types of storage facilities.

# **SVILUPPO DI UNA METODOLOGIA PER MODELLAZIONE GEOLOGICA-GEOMECCANICA E IL MONITORAGGIO DI RESERVOIR ADIBITI A SITI DI STOCCAGGIO DI GAS NATURALE**

**FRANCESCO LUIGI GUIDO**

## **Sommario**

I sistemi di stoccaggio temporaneo di gas naturale in sottosuolo giocano un ruolo fondamentale in ottica di pianificazione energetica. La valutazione dei rischi associati all'operatività dei sistemi di stoccaggio, quali la sismicità indotta e la subsidenza, è requisito basilare per una loro corretta gestione e progettazione, e passa attraverso la definizione dell'influenza sullo stato tensionale delle variazioni di pressione di poro nel sottosuolo.

Principale scopo di questo progetto è lo sviluppo di una metodologia in grado di quantificare le deformazioni dei reservoir in funzione della pressione di poro, di tarare i modelli utilizzati con casi studio che presentino dati di monitoraggio reali, tali da consentire un confronto con le previsioni di modello.

In questa tesi, la teoria delle inomogeneità è stata utilizzata, tramite un approccio semi-analitico, per definire le variazioni dei campi elastici derivanti dalle operazioni di prelievo e immissione di fluidi in serbatoi geologici in profondità.

L'estensione, la forma e la magnitudo delle variazioni di stress indotte sono state valutate tramite il concetto di variazione dello sforzo critico secondo il criterio di rottura di Coulomb, tramite lo sviluppo di un'analisi numerica agli elementi finiti.

La metodologia sviluppata è stata applicata e tarata su due casi studio di reservoir sfruttati e riconvertiti a sistemi di stoccaggio che presentano dataset, condizioni geologiche e petrofisiche, e condizioni operative differenti; (I) – il sito Collalto Stoccaggio e (II) la concessione di Bagnolo Mella Stoccaggio, in fase di progettazione per riconversione. Sono state calcolate le variazioni dei campi elastici e la subsidenza, ed è stata mappata la variazione di sforzo critico di Coulomb per entrambi i casi studio, in scenari corrispondenti sia alle fasi produttive passate sia alle fasi di stoccaggio reali (caso I) o previste (caso II).

I risultati ottenuti mostrano un buon accordo con le osservazioni derivanti dai monitoraggi disponibili sui casi studio, suggerendo la bontà della metodologia sviluppata, e indicando la scarsa probabilità di sismicità indotta, sulla base delle conoscenze dei contesti geologici sui quali insistono i due sistemi.

Questo progetto ha consentito la creazione di una piattaforma metodologica di rapido ed efficace utilizzo, per stimare l'influenza dei sistemi di stoccaggio di gas sullo stato tensionale della crosta terrestre; durante la fase operativa di stoccaggio, permette di monitorare le deformazioni e gli sforzi indotti; durante la fase di progettazione, consente di valutare le strategie operative in un'ottica di predisposizione di piani di monitoraggio e di mitigazione dei rischi geologici associati allo sviluppo di queste tipologie di sistemi di stoccaggio.

# INDICE

## **CAPITOLO 1 INTRODUZIONE**

1.1 BACKGROUND	1
1.2 PERICOLOSITÀ DELLO STOCCAGGIO DI FLUIDI IN SOTTOSUOLO	1
1.3 RISCHI GEOMECCANICI LEGATI ALLO STOCCAGGIO	3
1.4 MODELLAZIONE GEOMECCANICA	3
1.5 OBIETTIVI	5
1.6 SCOPO DEL PROGETTO DI RICERCA	6
1.7 METODOLOGIA	7
1.8 NOVITÀ INTRODOTTE E PRESENTATE IN QUESTO LAVORO	7
1.9 STRUTTURA DELLA TESI	8

## **CAPITOLO 2 TEORIA ELASTICA**

2.1 STRESS, TENSORE DELLO STRESS	9
2.2 STRESS PRINCIPALI	10
2.3 REGIMI DI STRESS TETTONICO	11
2.4 CERCHI DI MOHR	12
2.5 CRITERIO DI ROTTURA DI MOHR –COULOMB	13
2.6 INTERAZIONE TRA PRESSIONE DI PORO E STRESS	15
2.7 STRESS EFFICACE	15

**CAPITOLO 3**  
**REVIEW DI LETTERATURA SULLA VARIAZIONE DI STRESS**  
**INDOTTA E CONFRONTO DEI DIFFERENTI APPROCCI**

3.1 INTRODUZIONE	18
3.2 MISURA DELLE VARIAZIONI DI STRESS INDOTTE	18
3.3 MECCANISMI DI VARIAZIONE DELLO STRESS	20
3.4 STRESS ARCHING EFFECT	22
3.5 MODELLAZIONE DELLA VARIAZIONE DI STRESS INDOTTA	25
3.6 CONFRONTO TRA DIFFERENTI APPROCCI DI MODELLAZIONE DEGLI STRESS INDOTTI	36

**CAPITOLO 4**  
**SVILUPPO DELLA METODOLOGIA PER LA VALUTAZIONE**  
**GEOLOGICA E GEOMECCANICA PER SITI DI STOCCAGGIO DI**  
**GAS NATURALE**

4.1 INTRODUZIONE	45
4.2 RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI INCLUSIONE DI ESHELBY PER RESERVOIR	48
4.3 VALUTAZIONI SULLA STABILITÀ SECONDO IL CRITERIO DI ROTTURA DI COULOMB	60

## **CAPITOLO 5**

### **APPLICAZIONE E VALIDAZIONE DI UNA NUOVA METODOLOGIA DI CARATTERIZZAZIONE GEOLOGICA E GEOMECCANICA SUL SITO DI COLLALTO STOCCAGGIO**

5.1 INTRODUZIONE	68
5.2 INQUADRAMENTO	70
5.3 IL SERBATOIO GEOLOGICO DI COLLATO : CARATTERISTICHE DEL GIACIMENTO	75
5.4 STORIA PRODUTTIVA, ANDAMENTO PRESSIONI E MONITORAGGIO DEFORMAZIONI (SUBSIDENZA)	84
5.5 MODELLAZIONE GEOMECCANICA SEMI-ANALITICA DEGLI STRESS E DELLE DEFORMAZIONI INDOTTE DAL CAMPO DI COLLALTO	92
5.6 DISCUSSIONE	101
5.7 MODELLAZIONE FEM PER LA MAPPATURA DEL COULOMB FAILURE CRITERION	107
5.7 CONCLUSIONI	116

## **CAPITOLO 6**

### **CASO DI STUDIO: BAGNOLO MELLA STOCCAGGIO**

6.1 INTRODUZIONE E SCOPO DEL LAVORO	119
6.2 INQUADRAMENTO GEOLOGICO	120
6.2 IL SERBATOIO GEOLOGICO PROFONDO DI BAGNOLO MELLA: CARATTERISTICHE DEL GIACIMENTO	123
6.3 DATI E STORIA DELLA PRODUZIONE	127
6.4 VALUTAZIONE DELLE DEFORMAZIONI ALLA SUPERFICIE GEODETICA	129

6.5 MODELLAZIONE GEOMECCANICA	135
6.6 VALUTAZIONI SULLA STABILITÀ SECONDO IL CRITERIO DI ROTTURA DI COULOMB	138
6.7 ANALISI GEOMECCANICA DELLA FASE DI PRODUZIONE PRINCIPALE	142
6.8 ANALISI GEOMECCANICA DELLA FASE DI “CODA” PRODUTTIVA (BM8, 1999-2000)	144
6.9 ANALISI GEOMECCANICA DI UN CICLO DI STOCCAGGIO (INIEZIONE) OTTIMIZZATA PER TEMPO DI REFILL (CASO $P_{MAX}= 100\% P_i$ )	146
6.10 ANALISI GEOMECCANICA DI UN CICLO DI STOCCAGGIO(INIEZIONE) OTTIMIZZATA PER WORKING GAS (CASO $P_{MAX}= 100\% P_i$ )	148
6.11 RISULTATI DELLA MODELLAZIONE FEM SULLA STABILITÀ ROCCIOSA	150
6.14 CONCLUSIONI	154
 <b>CAPITOLO 7</b> <b>CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI</b>	
CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI	159
 <b>APPENDICI</b>	163
APPENDICE A – CODICE MATLAB PER PROBLEMA INOMOGENEITÀ	
APPENDICE B – DEFORMAZIONI GEODETICHE STUDIO COLLALTO	
APPENDICE C – DEFORMAZIONI GEODETICHE STUDIO BAGNOLO MELLA	
 <b>BIBLIOGRAFIA</b>	226



# **CAPITOLO 1**

## **INTRODUZIONE**

### ***1.1 BACKGROUND***

Lo stoccaggio geologico di rifiuti pericolosi nel sottosuolo non è una novità. Dal 1968 un eccesso di 110 pozzi profondi di iniezione di rifiuti industriali negli USA sono stati utilizzati per iniettare una grande quantità di rifiuti in condizioni assai differenti (Warner, 1968). Negli anni '90 l'idea dello stoccaggio geologico di biossido di carbonio (CO<sub>2</sub>) ha iniziato ad essere investigata (e.g., Koide et al., 1992). Attualmente, lo stoccaggio di fluidi idrocarburici e di gas a effetto serra come l'anidride carbonica nel sottosuolo è uno degli argomenti più caldi nei dibattiti ambientali sulle variazioni del clima globale, richiamando l'attenzione a causa dell'elevata capacità di stoccaggio e dei costi relativamente contenuti.

Il Weyburn-Midale CO<sub>2</sub> Monitoring and Storage Project in Southeast Saskatchewan, il progetto di stoccaggio Sleipner CO<sub>2</sub> nel Mare del Nord, ed il In Salah CO<sub>2</sub> Storage project in Algeria sono alcuni esempi di progetti in corso di stoccaggio a scala totale di CO<sub>2</sub>. Tuttavia, sussistono delle preoccupazioni riguardo ai potenziali rischi quali riattivazione sismica delle aree dei campi così come i timori ambientali e sanitari riguardo a possibili fuoriuscite di fluidi dalle unità di stoccaggio verso gli acquiferi e la superficie terrestre. Queste preoccupazioni, insieme ai rischi economici e tecnici, rendono necessario lo sviluppo di metodologie efficaci di monitoraggio e gestione del rischio per condurre valutazioni e sviluppare metodi per minimizzare questi rischi.

### ***1.2 PERICOLOSITÀ DELLO STOCCAGGIO DI FLUIDI IN SOTTOSUOLO***

Durante e dopo l'iniezione, i potenziali rischi legati allo stoccaggio di fluidi in sottosuolo includono la fuoriuscita del fluido dal reservoir, la sismicità, il movimento

del terreno e lo spostamento delle brine. Sono stati documentati molti casi nei quali terremoti, fino anche a magnitudo 5.5 sulla scala Richter, sono stati indotti da produzione o iniezione di gas o acqua (e.g., Wesson and Nicholson, 1987; Grasso, 1992; Guha, 2000; Adushkin et al., 2000; Sminchak and Gupta., 2003; Ottemöller et al., 2005). Sebbene siano stati profusi molti sforzi per spiegare i processi che portano alla sismicità nei campi idrocarburici produttivi, (e.g., Roest and Kuilman, 1994; Segall et al., 1994), non esistono ancora strumenti chiari e diretti per descrivere la sismicità indotta sia durante le fasi produttive che durante quelle di stoccaggio. Il meccanismo di movimento del terreno durante la produzione è stato oggetto di studio per molti anni (e.g., Geertsma, 1973; Feignier and Grasso, 1990; Chin and Nagel 2004), sebbene una previsione risulti ancora difficile (Hettinga et al., 2002). Inoltre, esistono molte prove di rottura di pozzi causate da movimenti orizzontali del terreno e scivolamenti di faglia durante la produzione (Bruno, 1992; Hilbert et al., 1996). Lo spostamento di brine, nel momento in cui si inietta la CO<sub>2</sub> in un acquifero, dipende troppo da fenomeni e caratteri locali per delinearne delle conclusioni generali sui rischi che questi possono causare (Damen et al., 2003).

Il principale scopo dello stoccaggio è quello di intrappolare i fluidi nel sottosuolo per un certo periodo di tempo. Per questo motivo, la valutazione della potenziale fuoriuscita di fluidi dal reservoir è uno dei maggiori requisiti per la selezione e la valutazione di un possibile sito. Dipendentemente dal periodo di tempo, il meccanismo di trappola dei fluidi può essere differente. Tuttavia, nel breve periodo o alla scala della fase di iniezione, l'integrità della roccia di copertura (caprock) deve essere considerata come il miglior meccanismo di trappola. Quindi, per lo stoccaggio, la stima dell'integrità del caprock è un punto critico. La fuoriuscita di fluidi può anche perdere luogo attraverso o lungo i pozzi e per rottura nel caprock. Una rottura di caprock include una varietà di meccanismi risultanti nella migrazione di fluidi attraverso zone altamente permeabili nel caprock o attraverso faglie e fratture, che si estendono eventualmente nel caprock.

La risalita di fluido lungo faglie o fratture è considerato generalmente essere il percorso naturale più importante per la fuoriuscita di fluidi (Khilyuk et al., 2000). Questi rischi sono detti rischi geomeccanici poiché sono legati alla risposta geotecnica del reservoir e del caprock a variazioni di pressione o temperatura all'interno del reservoir.

### ***1.3 RISCHI GEOMECCANICI LEGATI ALLO STOCCAGGIO***

Come già anticipato precedentemente, i meccanismi geomeccanici sono tra i maggiori aspetti riguardo alla integrità a breve termine. La variazione di pressione di poro del fluido o di temperatura nel reservoir porterà a creare degli stress meccanici in prossimità del reservoir. Potenzialmente, questi stress possono indurre rotture nel seal che circonda il reservoir. Questi eventi di rottura possono creare percorsi permeabili al flusso che consentono la fuoriuscita nelle formazioni geologiche intorno, e potenzialmente fino alla superficie e fino agli acquiferi superficiali. Pertanto, quando si valuta la possibilità di uno stoccaggio di fluidi in un reservoir, è importante riconoscere le tipologie di meccanismo di fratturazione che potrebbe verificarsi, e la sua probabilità.

Jimenez e Chalaturnyk (2002) hanno categorizzato i tipici rischi geomeccanici che potrebbero portare a fuoriuscite influenzando la integrità idraulica del caprock durante e dopo una iniezione di gas in tre differenti gruppi: indotti dallo stoccaggio, attivati dallo stoccaggio e attività tettonica. Nel loro lavoro, i meccanismi indotti dallo stoccaggio includono la fuoriuscita per capillarità, la fratturazione idraulica e quella di taglio. I meccanismi attivati da stoccaggio includono la riattivazione di faglie e riattivazione di fratture pre-esistenti. Le regioni tettonicamente attive sono considerate separatamente, e possono essere consentite localizzando il sito del progetto in una regione asismica. I pozzi sono altre entità che possono dare vita a fuoriuscite dopo aver subito una destabilizzazione geotecnica o di altra natura.

### ***1.4 MODELLAZIONE GEOMECCANICA***

Ogni modello consiste di tre parti principali: dati, sistema e risultati. Riguardo alla confidenza nel sistema di analisi, la preparazione dei dati per le analisi è una parte molto importante di un sistema modello. Generalmente, per un modello geomeccanico di stoccaggio di fluidi esistono differenti gruppi di dati richiesti che includono: la geometria del reservoir e le caratteristiche geologiche, le proprietà geomeccaniche e geotermiche, le proprietà legate al flusso dei fluidi, storia produttiva e di stoccaggio e pianificazioni future, caratteristiche dei pozzi, storia sismologica ed eventuali episodi di leakage del progetto. In un caso ideale, tutti questi dati possono essere utilizzati in un sistema di analisi perfetto per determinare la probabilità di rischi geomeccanici.

Sebbene la completezza delle analisi di sistema può richiedere più dati, in alcuni casi la scarsità di dati utili può portare ad utilizzare un modello meno complicato. In generale, il processo di collezione dei dati per un modello dipende dalla descrizione della intenzione, dalla disponibilità di dati e requisiti del sistema analitico.

I modelli esistenti per una analisi geomeccanica dei reservoir possono essere categorizzati in tre gruppi differenti: semplici modelli analitici, modelli semi-analitici e modelli numerici. Semplici modelli analitici sono stati sviluppati utilizzando concetti basici di poro-elasticità uniassiale (e.g., Hawkes et al., 2005), compattazione normale di reservoir (e.g., Gouly, 2003), o meccanismi di equilibrio frizionale (e.g., Holt et al., 2004). I modelli semi-analitici implementano le soluzioni analitiche accompagnati da procedure di integrazione numerica per trovare la distribuzione della variazione di stress attraverso un campo. Questi modelli sono solitamente sviluppati utilizzando delle assunzioni per il comportamento poro-elastico del materiale per i reservoir e per le rocce che lo circondano (e.g., Segall, 1985). Inoltre, solitamente sono caratterizzati da geometrie semplificate ed assunzioni sul flusso di fluido. Per considerare problemi con caratteristiche più complicate, quali ad esempio possono derivare da geometrie e/o proprietà materiali più realistiche, è essenziale l'utilizzo di modelli numerici. Uno dei vantaggi principali di alcuni modelli numerici è la loro abilità di modellare discontinuità, quali faglie o fratture o zone di debolezza che esistono nel campo.

Riguardo ai principi fisici e ai metodi di soluzione che sono alla base del modello selezionato, essi possono essere applicati alla geomeccanica del reservoir in due differenti modi: per fornire soluzioni generali o per fornire soluzioni sito-specifiche. Soluzioni generali sono solitamente sviluppate per fornire una migliore comprensione del comportamento del reservoir con caratteristiche molto generali. Solitamente essi sono utilizzati per condurre analisi di sensitività per scoprire l'importanza delle differenti proprietà e parametri sulla risposta del reservoir e delle rocce che lo circondano. Alternativamente, le soluzioni sito-specifiche sono sviluppate per indagare un particolare fenomeno (subsidenza, riattivazione di faglie o fratturazione indotta) in un particolare campo. Comunque, i precedenti sforzi per caratterizzare i rischi di leakage attraverso il caprock, legati alla geomeccanica, sono stati fin troppo generali per

fornire una metodologia ben definita per stabilire un framework per l'analisi della stabilità del caprock e.g., Streit and Hillis, 2002; Hawkes et al., 2005) o fin troppo specifici per il particolare sito per avere un valore applicativo per un range più ampio di processi di design di stoccaggio (e.g., Orlic, 2005).

### ***1.5 OBIETTIVI***

La chiave per una gestione soddisfacente di uno stoccaggio in reservoir porosi è l'integrità idraulica delle formazioni rocciose che circondano il reservoir. L'integrità iniziale di questo seal è governato da fattori geologici. L'obiettivo generale di questo progetto di ricerca è quello di determinare la pericolosità dei processi geologici di rottura della roccia serbatoio e /o del caprock con conseguente potenziale di leakage durante lo stoccaggio.

Gli obiettivi specifici sono:

- sviluppare una metodologia di caratterizzazione degli sforzi e deformazioni indotte in grado di stimare le deformazioni nel reservoir, nel caprock ed alla superficie topografica;
- utilizzare strumenti computazionali per investigare la riattivazione di faglie e la fratturazione di taglio e tensile indotte<sup>1</sup> per quantificare e localizzare potenziali aree a maggior rischio nell'intorno di reservoir candidati allo stoccaggio e/o in esercizio.
- validare la metodologia e gli strumenti sviluppati con case-history e modelli numerici.

I risultati sono utili sia per la valutazione del sito nelle fasi iniziali di vita produttiva (ad esempio per definire il potenzialità di alcuni percorsi di fuoriuscita creati durante la produzione di idrocarburi) e sia per il una ottimizzazione preliminare delle operazioni di stoccaggio pianificate; la procedura sviluppata in questo lavoro di tesi potrà fornire un quadro scientifico predittivo nel quale gestire ed inserire i dati di monitoraggio.

---

<sup>1</sup> Esistono due tipologie di aspetti di fratturazione tensile indotta. Uno riguarda la concentrazione di stress nell'intorno di un pozzo e le condizioni richieste per generare una frattura tensile relativamente localizzata (hydraulic fracture) sulla parte del pozzo. Il secondo che riguarda lo stato dello stress nella parte rimanente del reservoir e le condizioni richieste per generare una frattura tensile di larga scala. Questo progetto riguarda principalmente il secondo aspetto.

## ***1.6 SCOPO DEL PROGETTO DI RICERCA***

Il focus di questo progetto di ricerca riguarda reservoir di idrocarburi esauriti per lo stoccaggio del gas naturale, anche se molti dei modelli sviluppati sono anche utili per altri metodi di stoccaggio quali quelli in acquiferi salini, orizzonti di carbone e caverne di sale. Questo progetto di ricerca non riguarda tanto la caratterizzazione delle proprietà iniziali di *fault seal*, che è generalmente assunta essere buona per reservoir che hanno dato prova di contenere originariamente significativi volumi di idrocarburi, ma riguarda la caratterizzazione di fattori geomeccanici che possono aver introdotto (o intensificato) percorsi di fuoriuscita, ad un certo punto, durante la storia produttiva del reservoir, o possono farlo durante le operazioni pianificate di iniezione e stoccaggio.

In questo progetto di ricerca, il lavoro maggiore è stato rivolto allo sviluppo di una metodologia generalizzata applicabile a un'ampia varietà di progetti di stoccaggio, ed in particolare ai casi dove la disponibilità di dati risulti limitata.

I modelli sviluppati sono stati adottati esclusivamente per l'analisi geomeccanica e non per l'analisi di eventuali processi di migrazione di fluido/gas attraverso faglie o fratture. In questo progetto, lo strumento principale per l'analisi della relazione stress-strain è basato sulla modellazione elastica lineare. Il criterio applicato per la rottura delle rocce è stato il criterio di rottura di Coulomb. Come detto in precedenza, nel caso dello stoccaggio in reservoir di gas o olio esauriti, la storia produttiva può avere un'importante influenza sul comportamento geomeccanico del campo durante l'iniezione. Inoltre, le performances del reservoir durante la produzione potrebbero fornire una linea-guida per predire il suo comportamento durante l'iniezione, per una oculata gestione dello stoccaggio. Alla luce di questi fatti, particolare attenzione è stata posta a casi di studio di produzione d'idrocarburi. In questo lavoro non sono stati valutati effetti fluido-dinamici con limiti concettuali e teorici, compensati tuttavia dalla praticità, immediatezza, e relativa semplicità degli strumenti qui sviluppati.

## ***1.7 METODOLOGIA***

- 1) Dapprima verrà effettuata una review di letteratura per compilare una serie di meccanismi differenti che conducono a :
  - a) Variazione di stress dovuta a variazione di pressione /temperatura in un reservoir
  - b) Riattivazione di faglie dovute a variazioni di stress
  - c) Fratturazione di rocce dovute a variazione di stress, includendo frantumazione di taglio e tensili.
  
- 2) Derivare soluzioni analitiche, basate sulle teorie di nuclei di strain, inclusioni ed inomogeneità di Eshelby, per l'analisi geotecnica di stress-strain del reservoir e delle rocce intorno.
  
- 3) Integrare i suddetti modelli di analisi di stress-strain con strumenti di valutazione di rottura, quali il criterio di rottura di Coulomb (CFS), per sviluppare degli strumenti atti ad identificare la possibilità di avere fratturazione o riattivazione di faglie o fratture durante la iniezione/produzione del fluido nel reservoir. Queste analisi possono aiutare a comprendere anticipatamente dei modi generali di riattivazione o fratturazione.
  
- 4) Valutare gli strumenti di sviluppo e le procedure utilizzando dei dati di campo e modellando i risultati ottenuti da casi studio in letteratura.

## ***1.8 NOVITÀ INTRODOTTE E PRESENTATE IN QUESTO LAVORO.***

Sebbene l'applicazione della teoria delle inclusioni di Eshelby e la teoria delle inomogenità allo studio di reservoir poroelastici è stata oggetto di indagini precedenti, e diversi modelli di analisi dello stress sono stati già precedentemente applicati allo studio della riattivazione di faglie e all'induzione della fratturazione all'interno ed intorno a reservoir porosi, sussistono ancora oggi una serie di gap in ognuna di queste aree. Di seguito viene fornito un riassunto dei nuovi aspetti trattati in questa tesi:

- Applicazione della teoria della inomogeneità per derivare le variazioni dei campi elastici indotte dello stress intorno ad un reservoir con sezione ellissoidale con semiassi differenti, in una soluzione di strain piano (*plane strain*) per uno spazio infinito;
- Utilizzo di un modello agli elementi finiti che risolva un problema di condizioni al contorno di spostamento in un caso di plane strain bidimensionale, con geometrie reali;
- implementazione del concetto di Coulomb Failure Stress per studiare la tendenza alla riattivazione di faglie o induzione di fratturazione nella roccia;
- Utilizzo degli approcci analitici introdotti precedentemente per studiare sistematicamente le modalità di variazioni di stress indotte, l'evoluzione del campo di sforzi, la riattivazione delle faglie e la fratturazione indotta anche per progetti di stoccaggio ancora inattivi, in fase di progettazione.

### ***1.9 STRUTTURA DELLA TESI***

Questa tesi include sette capitoli, il capitolo attuale descrive il background, la descrizione di intenti, obiettivi, scopo e metodologie di questo progetto di ricerca. Il secondo capitolo fornisce invece una panoramica sulla teoria di elasticità, sulla definizione degli stress (sforzi), sui criteri di rottura della roccia e sulle interazioni tra roccia e fluidi. Una review di letteratura sui metodi di misurazioni, i meccanismi e la modellazione delle variazioni indotte dello stress più le metodologie di riattivazione di faglie e fratturazione indotta da variazioni di pressione nel reservoir è trattata nel terzo e nel quarto capitolo. Nei capitoli 5 e 6 vengono proposte delle nuove metodologie per l'analisi geologica e geomeccanica di reservoir reali, con casi studio, per analizzare la tendenza alla riattivazione di faglie e della fratturazione indotta da variazioni di pressione e deformazione nel reservoir. il capitolo 7 riassume le principali conclusioni di questa tesi ed affronta i possibili sviluppi futuri.



## CAPITOLO 2

### TEORIA ELASTICA

#### 2.1 STRESS, TENSORE DELLO STRESS

Una forza che agisce su una parte solida della crosta terrestre, in generale non genera accelerazione di codesta parte, ma causa una reazione contraria sotto forma di resistenze meccaniche. Queste resistenze che derivano dalla struttura granulare del solido, inibiscono un'accelerazione e sono definite come STRESS. In generale, su un corpo possono agire due tipologie di forze, le *Body Forces* e le *Surface forces* (forze interne e forze di superficie).

La body force agisce su un intero volume di un corpo e dipende dalla massa del corpo. In geofisica la più importante body force è il peso, generato dalla accelerazione di gravità che agisce sulla massa della terra.

il vettore dello stress  $T$ , che rappresenta una forza di superficie  $F$  che agisce su una superficie  $A$  in una direzione arbitraria sulla superficie, è definita come

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_0}{\Delta A}$$

$F_0$  può essere suddivisa in una componente normale alla superficie,  $F_n$ , ed una componente parallela alla superficie,  $F_s$ .

ed  $F_s$ , agendo su una superficie  $A$ , generano due componenti di stress, lo stress normale  $\sigma_n$  e lo stress di  $\tau$ , che sono definite di seguito

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}_N}{\Delta A}, \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}_S}{\Delta A}.$$

Tutti gli stress sia normali che di taglio che agiscono su un elemento di volume infinitesimo ( $\Delta A \rightarrow 0$ ) descrivono lo stato dello stress in questo elemento di volume infinitesimo.

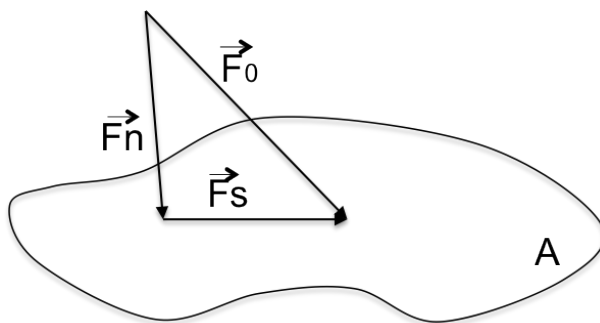
Lo stato dello stress può essere matematicamente espresso come tensore dello stress  $\sigma_{ij}$  per un sistema di coordinate tridimensionale con assi x,y,z:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

lo stress si definisce normale per  $i = j$ , e di taglio per  $i \neq j$ . il primo indice  $i$  sta per la superficie normale parallela ad uno degli assi delle coordinate, definendo quindicina superficie sulla quale sta agendo una componente dello stress. Il secondo indice  $j$  sta per la direzione lungo la quale la componente dello stress sta agendo.

Se l'elemento di volume è in equilibrio e non subisce rotazione, allora le coppie di stress di taglio devono essere uguali.

la conseguenza è che il tensore dello stress è simmetrico.



**Figura 2.1** vettore dello stress  $F_0$ , componente normale  $F_n$  e tangenziale  $F_s$  agenti su una superficie A.

## 2.2 STRESS PRINCIPALI

Effettuando una trasformazione degli assi principali, possiamo trovare un sistema di coordinate per il quale tutti gli stress di taglio siano nulli ed i tre stress normali siano paralleli agli assi delle coordinate del nuovo sistema di riferimento, detti Assi Principali. allora gli stress normali sono detti stress principali ed il tensore dello stress è definito dal massimo stress principale,  $\sigma_1$ , dallo stress principale intermedio  $\sigma_2$ , e dallo stress principale minimo  $\sigma_3$ .  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  occupano la diagonale del tensore dello stress. pertanto, in un sistema di assi principali  $\sigma_{ij}$  rappresenta una matrice diagonale.

### **2.3 REGIMI DI STRESS TETTONICO**

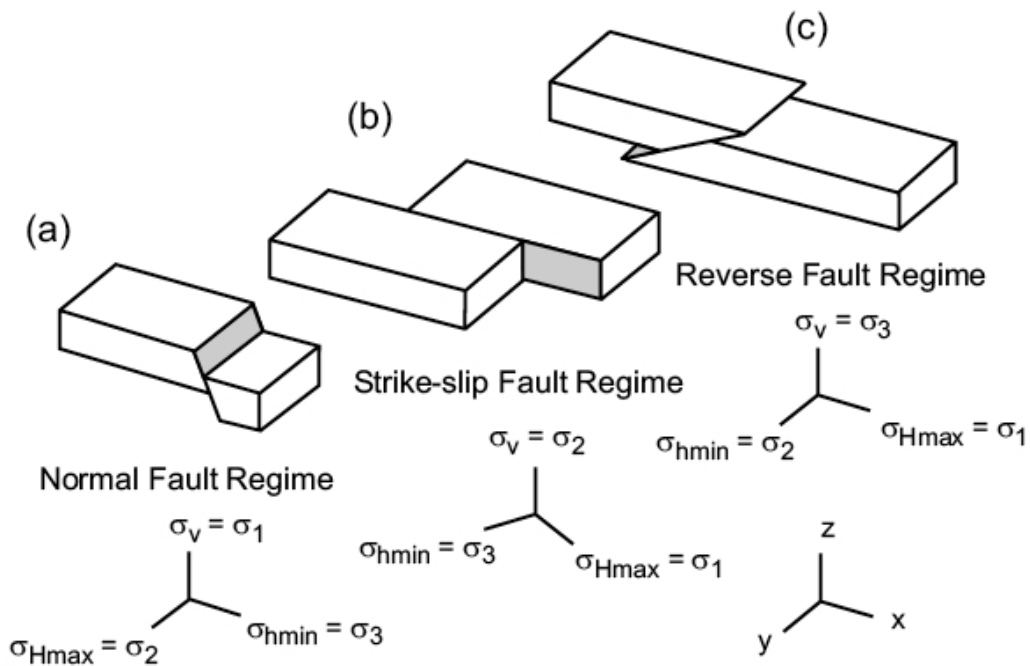
In generale, lo stress verticale  $\sigma_V$  può essere considerato come uno stress principale. quindi. in un sistema di assi principali, oltre a  $\sigma_V$  vi sono due stress principali orizzontali, lo stress orizzontale massimo  $\sigma_H$  e lo stress orizzontale minimo  $\sigma_h$ . Anderson (1905) scoprì che i tre regimi di stress tettonico , normale, strike slip e di thrust faulting possono essere caratterizzati dalle magnitudo degli stress principali  $\sigma_V$  ,  $\sigma_H$  ,e  $\sigma_h$  (figura )

Per i tre differenti regimi di stress tettonici, gli stress principali risultano:

*-Normal faulting regime:  $\sigma_1 = \sigma_V > \sigma_2 = \sigma_H > \sigma_3 = \sigma_h$*

*-Strike-slip regime:  $\sigma_1 = \sigma_H > \sigma_2 = \sigma_V > \sigma_3 = \sigma_h$*

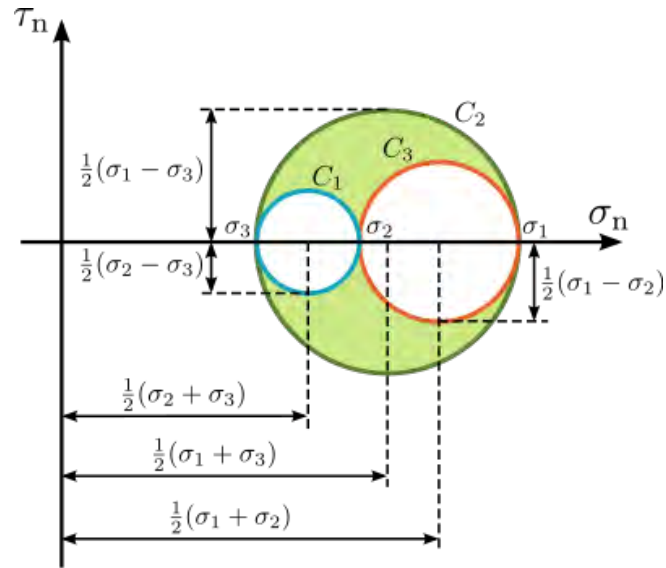
*-Thrust faulting regime:  $\sigma_1 = \sigma_H > \sigma_2 = \sigma_h > \sigma_3 = \sigma_V$*



**Figura 2.2** Condizioni per i differenti regimi di stress tettonico. Engelder, Stress Regimes in the Lithosphere (1993)

## 2.4 CERCHI DI MOHR

Mohr (1882) sviluppò uno strumento grafico per illustrare gli stress normali e di taglio su un piano di frattura di taglio orientata arbitrariamente in un campione di roccia, sul quale agiscono gli stress principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ . Tutte le possibili combinazioni di stress normale e di taglio sui potenziali piani di frattura orientati tra  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  descrivono un semicerchio, detto cerchio di Mohr, in un diagramma  $\tau$ - $\sigma_n$  (figura 2.3)



**Figura 2.3** Rappresentazione dei cerchi di Mohr.

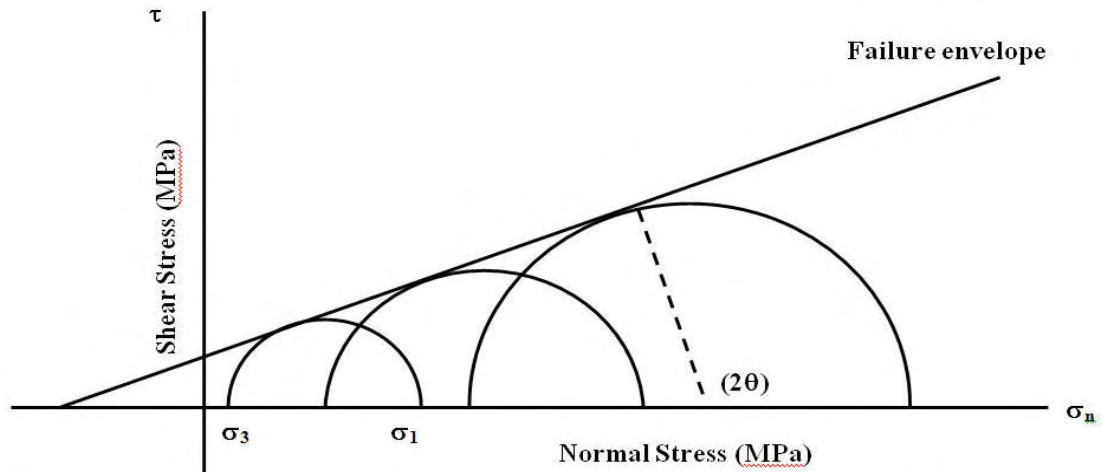
il centro del cerchio di Mohr è determinato da  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , il raggio e quindi anche il massimo stress di taglio  $\tau_{\max}$  dati da  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , dove  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  è detto stress differenziale  $\sigma_d$ .

Il massimo stress di taglio si verifica per  $2\theta = 90^\circ$ , ad es. per un angolo tra un possibile piano di rottura e lo stress principale di  $45^\circ$ .

## 2.5 CRITERIO DI ROTTURA DI MOHR -COULOMB

Un cerchio di Mohr in combinazione con un criterio di rottura consente di analizzare lo stato dello stress su un piano rispetto alla sua stabilità. Il criterio di rottura più comune è quello di Mohr-Coulomb.

Il criterio di rottura di Mohr-Coulomb descrive la relazione tra lo stress di taglio  $\tau$  e lo stress normale  $\sigma_n$  generate dagli stress principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , che agiscono su un piano potenziale di rottura inclinato di un angolo  $\theta$  (Figura 2.4).



**Figura 2.4** Sviluppo del criterio di Mohr Coulomb per la definizione del l'inviluppo di rottura

Precedentemente Coulomb (1776) ricavò un equazione per lo stress di taglio necessario per causare una rottura su un potenziale piano:

$$\tau_{crit} = C + \mu^* \sigma_n \quad (2.4)$$

dove  $C$  è una proprietà del materiale, detta coesione, e  $\mu^*$  è il coefficiente di attrito. L'eq.2.4 è una equazione lineare con il gradiente  $\mu^*$  lungo una retta.

$\mu^*$  può essere espresso dall'angolo tra l'ascissa e la linea retta che è data dall'eq. 2.4:

$$\mu^* = \tan \theta \quad (2.5)$$

con  $\theta$  l'angolo di attrito interno.  $\mu^*$  non può essere misurato direttamente e deve essere considerato come il gradiente della equazione 2.4 ,  $\mu^* = (\tau - C) / \sigma_n$  (Handin , 1969).

Il diagramma di Mohr insieme con l'equazione 2.4 rendono il criterio di rottura di Mohr-Coulomb . La linea retta data dall'equazione 2.4 è detto limite di rottura, poiché determina l'inizio della rottura.

Tutti gli stati dello stress descritti dai cerchi di Mohr che ricadono al di sotto il limite di rottura sono in uno stato stabile e non vi è sviluppo di rottura.

Se  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  non variano dello stessa quantità, le dimensioni del cerchio di Mohr cambieranno. Pertanto, considerando una variazione nel massimo stress di taglio  $\Delta\tau_{\max}$  tra due stati dello stress, questo costituisce un parametro per una variazione non uniforme di  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ .

## **2.6 INTERAZIONE TRA PRESSIONE DI PORO E STRESS**

Le variazioni di pressione di poro e stress nel sottosuolo possono generare fenomeni spettacolari e rischiosi, come ad esempio fuoriuscite e d esplosioni di pozzi che inavvertitamente perforano in sequenze in sovrimpressioni, sismicità indotta o movimenti di massa come ad esempio frane. Di seguito viene descritta l'interazione tra la pressione di poro e lo stress, matematicamente attraverso le equazioni di base, dimostrando le evidenze di campo delle variazioni accoppiate pressione di poro-stress, ed per comparazione dell'effetto dell'accoppiamento tra pressione di poro e stress per differenti regimi di stress tettonico.

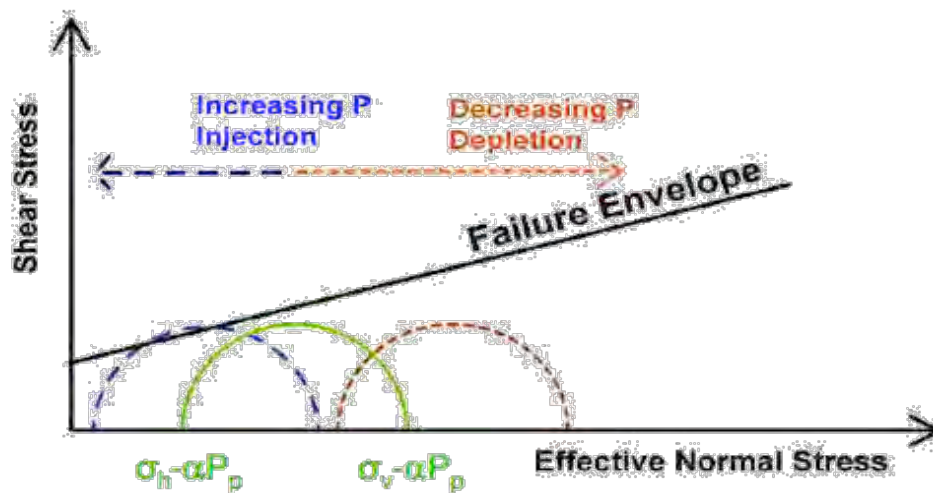
## **2.7 STRESS EFFICACE**

le variazioni di pressione di poro influenzano lo stato dello stress. Terzaghi (1943) sviluppò un concetto di come la pressione di poro possa influenzare lo stato dello stress introducendo il concetto di stress efficaci. Nel caso degli stress principali, gli stress principali efficaci  $\sigma_{V,eff}$ ,  $\sigma_{H,eff}$ ,  $\sigma_{h,eff}$  sono definiti come la sottrazione della pressione di poro  $P_p$  dagli stress principali totali  $\sigma_V$ ,  $\sigma_H$ ,  $\sigma_h$ , e pertanto sono definiti in questo modo:

$$\sigma_{V,eff} = \sigma_V - P_p, \quad \sigma_{H,eff} = \sigma_H - P_p, \quad \sigma_{h,eff} = \sigma_h - P_p \quad (3.1a,b,c)$$

Quindi, lo stato degli stress efficaci descrive lo stato dello stress considerando anche la pressione di poro, che riduce gli stress normali di una quantità pari, appunto, a quella della pressione di poro .

Assumendo che gli stress totali non varino, una maggiore pressione di poro genererà uno stress efficace minore, e viceversa. Poiché la pressione di poro descrive una pressione di un fluido, non vi è trasferimento di stress di taglio da parte della pressione di poro. Pertanto, la pressione di poro influenza solo gli stress normali efficaci o quelli principali, ma non lo stress di taglio. Il diagramma di Mohr aiuta a descrivere come questo comportamento influenza lo stato degli stress efficaci (figura 1-1)



**Figura 2.5** effetto dell'aumento (iniezione, blu) e della riduzione (produzione, rosso) della pressione di poro sugli stress efficaci.

Riassumendo il concetto di Terzaghi (1943) dello stress efficace, la pressione riduce ( $P > 0$ ) o aumenta ( $P < 0$ ) gli stress efficaci normali e principali, rispettivamente.

In questo concetto gli stress totali sono indipendenti da  $P$ , e la stessa pressione non influenza lo stress di taglio; se  $P$  varia, i cerchi di Mohr non cambiano il loro diametro, ma sul diagramma varia la loro posizione orizzontale (Figura 2.5).

Assumendo un aumento nella pressione di poro lo stato dello stress efficace diventa più instabile, mentre per una riduzione della pressione di poro si stabilizza. Poiché tutti gli stress principali efficaci aumentano o diminuiscono dell'ammontare di  $P$ , essi sono indipendenti del regime tettonico.

I sistemi geotermici potenziati generano un aumento di pressione di poro poiché viene pompata acqua nelle rocce al fine di aumentare la superficie dei joint per generare



acquiferi. Il risultato della rottura delle rocce e del successivo sviluppo di sismicità può essere ben spiegato dal concetto di stress efficace. Per una pressione di poro che aumenta, il cerchio di Mohr si sposta a sinistra verso il limite di rottura, e pertanto la roccia diventa più instabile. D'altro canto, l'estrazione di fluido aumenta gli stress normali efficaci, portando ad una stabilizzazione della roccia.

## **CAPITOLO 3**

### **REVIEW DI LETTERATURA SULLA VARIAZIONE DI STRESS INDOTTA E CONFRONTO DEI DIFFERENTI APPROCCI**

#### ***3.1 INTRODUZIONE***

Ogni modello utilizzato per analizzare i potenziali rischi geomeccanici per lo stoccaggio della CO<sub>2</sub> devono includere due moduli principali. Uno per l'analisi della variazione di stress indotta dalla iniezione della CO<sub>2</sub> ed un altro per l'analisi del comportamento delle caratteristiche geologiche (i.e roccia intatta, fratture e faglie esistenti) in risposta alla variazione di stress indotta. Comunque, alle volte risulta complicato distinguere tra questi due moduli a causa della loro natura strettamente integrata e correlata. In questo capitolo viene eseguita una review letteraria sui differenti meccanismi proposti e sui modelli sviluppati per la previsione delle variazioni di stress indotte.

#### ***3.2 MISURA DELLE VARIAZIONI DI STRESS INDOTTE***

A causa della difficoltà di misurare direttamente gli stress massimi orizzontali e verticali nei bacini sedimentari, gli studi riguardo la variazione di stress sono stati principalmente rivolti sulla misurazione e sulla previsione della variazione degli stress orizzontali minimi ( $\Delta\sigma_h$ ) - la cui magnitudo può essere misurata più direttamente. La sensibilità di  $\Delta\sigma_h$  alla variazione di pressione di poro è riconosciuta da tempo in ambito dell'industria degli idrocarburi, in particolar modo da quei gruppi che lavorano su temi quali l'hydraulic fracturing (Santarelli et al., 1996). Perciò esistono diversi casi studio

pubblicati che mostrano la relazione tra la variazione di pressione di poro e la variazione nello stress orizzontale minimo (vedi tabella 3.1).

La correlazione tra la variazione di stress orizzontale minimo e la variazione di pressione di poro ( $\Delta P$ ) è stata interpretata tramite un trend lineare da differenti autori (e.g., Teufel and Rhett, 1991; Zoback and Zinke, 2002; Gouly, 2003; Hawkes et al., 2005;). Tale relazione può essere scritta in questo modo:

$$\Delta\sigma_h = K*\Delta P \quad (3.1)$$

In tabella 2.1 vengono anche riportati una serie di valori pubblicati di K interpretati per differenti campi. Questi risultati indicano che K varia tra 0.24 e 0.84. Intuitivamente potremmo aspettarci che, per una data litologia, il valore di K debba aumentare con la porosità.

Tutti i valori di K tabulati sono stati misurati durante operazioni di produzione di fluidi (i.e con pressione di poro che tende a diminuire). A causa delle caratteristiche di isteresi delle rocce di reservoir, ci si aspettano delle differenze tra gli effetti indotti in fase di produzione ed iniezione ( rocce che vengono caricate o scaricate , i.e unloading and loading of rock) (Holt et al., 2004). Una misura delle variazioni di stress indotte dall'iniezione è stata riportata da Santarelli et al. (1996) per un reservoir sabbioso anonimo del settore Norvegese del Mare del Nord, operato dalla Saga Petroleum. I risultati mostrano variazioni insignificanti nello stato dello stress nel reservoir (4%) susseguenti all'iniezione. Questi risultati contrastano tuttavia significativamente con i valori di K di 0.42 e 0.7 interpretati per questo reservoir durante la fase di produzione. La magnitudo di questi effetti d'isteresi può sicuramente essere minore (ridursi) in altri reservoir, in dipendenza ad esempio del grado di sovra- o sotto- consolidazione e cementazione delle rocce del reservoir, dalla pressione iniziale del reservoir (se ad es. in sovra-pressione), intensità della variazione di pressione e profondità del reservoir.

### ***3.3 MECCANISMI DI VARIAZIONE DELLO STRESS***

A causa della complessità e delle eterogeneità delle formazioni rocciose, delle dimensioni spazio-temporali dei caratteri geologici, e della mancanza di dati di test sul campo, tuttora non sono state presentate ancora delle spiegazioni integrate per i meccanismi di variazione di stress durante l'iniezione o la produzione in /da un campo. Sono stati comunque sviluppati dei tentativi per spiegare i possibili differenti meccanismi di variazione dello stress. In generale sono state introdotte due categorie principali di meccanismi che includono il comportamento poro-meccanico delle rocce e l'equilibrio frizionale per interpretare gli effetti della variazioni di stress indotta durante una variazione di pressione di poro del reservoir.

### *3.3.1 MECCANISMO POROELASTICO*

L'interazione meccanica tra roccia solida e fluidi nei pori può essere spiegata utilizzando i modelli poro-meccanici che considerano la roccia come una matrice di 2 o 3 fasi che includono solidi e fluidi. A causa di questi meccanismi, in dipendenza del tasso di sovra-consolidazione e dalla natura del cemento nelle rocce, la deformazione del reservoir può seguire sia un percorso di ricarica (risposta rigida) o un percorso di carico (risposta non rigida) durante lo sfruttamento, che corrisponde ad un aumento degli stress efficaci. Durante l'iniezione, si verifica una diminuzione degli stress efficaci all'intero del reservoir che porta ad un ricarica elastico (una risposta rigida) (Goult, 2003). Solitamente, la risposta rigida del reservoir durante sia la produzione o l'iniezione viene assunta essere lineare o reversibile, i.e poroelastica. In questa condizione è possibile utilizzare i modelli poroelastici per analizzare la variazione nello stato dello stress. Ad esempio, come comunemente utilizzato, il modello di compattazione uniassiale per un reservoir fornisce il seguente risultato (e.g., Addis, 1997):

$$\Delta\sigma_H/\Delta P = \alpha[(1-2\nu)/(1-\nu)] \quad (3.2)$$

dove  $\Delta\sigma_H$  indica la variazione di stress orizzontale all'interno del reservoir e  $\alpha$  e  $\nu$ , rispettivamente, indicano il coefficiente di Biot ed il rapporto di Poisson delle rocce di reservoir. A causa della sua semplicità ed al limitato ammontare di dati di input richiesti, la modellazione poroelastica è stata largamente utilizzata dai ricercatori per studiare il comportamento geomeccanico dei reservoir (e.g., Addis, 1997, Zoback and

Zinke, 2002; Goult, 2003; Hawkes et al., 2005;). Tuttavia, prendere una decisione sulla scelta tra modelli elastici ed elasto-plastici è stata una delle maggiori sfide per la modellazione geotecnica. I modelli elastici sono considerati sufficientemente ragionevoli nel momento in cui la variazione di pressione di poro avviene abbastanza lentamente o sia sensibilmente scarsa (Morita et al., 1989) o quando le rocce del reservoir siano ben cementate (Dake, 2001) o sovraconsolidate (Goult, 2003). Tuttavia, alcune deformazioni anelastiche sono state riportate per sabbie inconsolidate (Dake, 2001) e per calcari (Johnson et al., 1989). Studi di Engelder e Fischer (1994) su settori sovra-pressione del graben del Mare del Nord nel Regno Unito e nel Sable sub-basin della Piattaforma Scozzese in Canada mostrano che la scelta di un comportamento poroelastico può ragionevolmente spiegare i pattern di variazione di stress orizzontali in questi campi.

Come strumento pratico, le registrazioni della subsidenza possono essere utilizzate per studiare il comportamento poro-meccanico dei reservoir durante la produzione. Ad esempio Segall et al. (1994) ha applicato un modello elastico per analizzare il reservoir a gas di Lacq basandosi sulla correlazione lineare esistente tra subsidenza e variazione di pressione di poro. Sulla base del comportamento della subsidenza del terreno per il reservoir sopracitato, due gruppi di reservoir sono stati categorizzati da Hettema et al. 2002. Un gruppo di reservoir (e.g. Lacq gas reservoir, Francia) mostra un trend di subsidenza pressoché lineare. Le rocce sono solitamente ben cementate e solitamente sono antiche. Questi reservoir sono relativamente profondi (>2 Km) e la loro subsidenza al livello del terreno è spesso contenuta (meno di pochi decimetri). Il secondo gruppo (e.g. Ekofisk oil and gas reservoir, Mare del Nord) mostrano inizialmente scarsa compattazione e subsidenza, indicando un comportamento elastico del reservoir, ma di seguito, prende il via la deformazione elasto-plastica del reservoir. Questi reservoir meno profondi (< 2 Km) hanno elevata porosità, contengono aggregati granulari poco cementati di sabbie e silt, e posseggono delle lenti di calcari altamente fratturati ed in alcuni casi diatomite.

### *3.3.3 EQUILIBRIO FRIZIONALE*

In stati meccanici critici, dove lo stato dello stress raggiunge il criterio di rottura, la roccia ridistribuirà gli stress dopo la rottura (fratturazione/fagliazione). Townend and Zoback (2001) ritengono che gli stress in-situ nella crosta siano controllati principalmente da questo meccanismo. In questa condizione, in dipendenza dal regime di stress in-situ (normale, di strike-slip trascorrente o inverso), esiste una relazione critica tra gli stress, laddove le faglie abbiano una angolazione di immersione appropriata. Ad esempio, in un regime di stress normale, con coesione della superficie della faglia nulla e coefficiente di frizione della faglia di  $\mu_s$  (Holt et al., 2004, Addis, 1997):

$$\Delta\sigma_H / \Delta P = 1 - ((1 + \mu_s)^{0.5} - \mu_s)^2 \quad (2.3)$$

Si ritiene che in un reservoir sovra-consolidato la competizione tra deformazione elastica ed equilibrio frizionale determini il comportamento dello stress di un reservoir (Gouly, 2003).

### ***3.4 STRESS ARCHING EFFECT***

L'assunzione di deformazione uniassiale è stato uno dei più popolari approcci per modellare il comportamento poro-meccanico dei reservoir. Per questo tipo di modello, si considera che il reservoir sia limitato lateralmente e che la deformazione avvenga solo in direzione verticale (Khan et al., 2000). Hawkes et al. (2005) hanno considerato uno scenario di compressione uniassiale per un reservoir utilizzando il criterio di rottura di Coulomb per predire il range di angoli di immersione di faglia che potrebbero essere riattivati in un reservoir durante l'iniezione e la produzione. Streit ed Hillis (2002) hanno applicato la stessa metodologia per investigare la sismicità indotta osservata nel Ekofisk oil field nel mare del Nord.

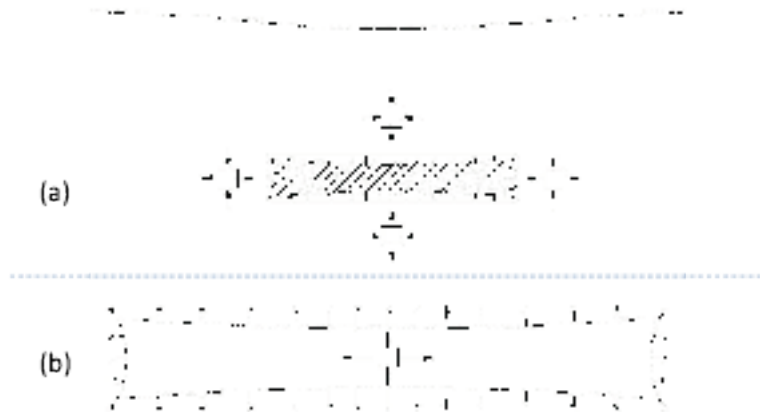
Il modello poroelastico uniassiale è, in senso stretto, appropriato esclusivamente per reservoir lateralmente infiniti. Praticamente è utile per reservoir che sono molto sottili rispetto alle loro dimensioni laterali, ma non è un modello realistico per ogni geometria di reservoir. Ad esempio, reservoir lenticolari sabbiosi hanno un chiaro percorso di variazione di stress differente da reservoir sabbioso rettangolare (Khan et al., 2000). Inoltre molti reservoir si formano in formazioni piegate che sono inclinate, in un certo

senso, rispetto alle direzioni degli stress principali in situ (e.g., Lacq gas reservoir in Francia). Inoltre il modello uniassiale può non essere una buona assunzione se esiste un significativo contrasto tra le rocce di reservoir e quelle che lo circondano, che è il caso di molti reservoir (Morita et al., 1989), specialmente se il reservoir non presenta delle dimensioni laterali elevate.

Se un reservoir fosse un corpo libero, la variazione di stress efficace risulterebbe semplicemente nella sua contrazione o espansione. Invece, il reservoir è “attaccato” alle rocce che lo circondano, che svolgono un lavoro contro la tendenza del reservoir a contrarsi o espandersi. A causa di questa competizione tra forze interne e limiti esterni, si possono indurre delle variazioni anisotropiche nello stress totale in dipendenza dalla geometria del reservoir, dal contrasto tra le proprietà meccaniche del reservoir e delle rocce che lo circondano, e la distribuzione di pressione di poro all’interno del reservoir (figura 3.1). Questo fenomeno è stato denominato arching (Muller, 2003).

Poiché possono verificarsi delle variazioni nello stress verticale così come in quello orizzontale sia all’interno sia all’esterno del reservoir, i rapporti di arching sono stati definiti per fornire una spiegazione più generale delle metodologie di variazione di stress. I rapporti di arching sono più appropriati per materiali poroelastici, dove esiste una relazione lineare tra la variazione dello stress e la variazione di pressione di poro e sono definiti in questo modo (Mulders, 2003):

$$\gamma_H = \Delta\sigma_H / \Delta P, \quad \gamma_V = \Delta\sigma_V / \Delta P \quad (3.4)$$



**Figure 3.1** Variazione di stress totale (a) intorno e (b) all'interno di un reservoir indotta da produzione.

Dove  $\gamma_H$  e  $\gamma_V$  sono rispettivamente i rapporti di arching di stress orizzontale e verticale;  $\Delta\sigma_h$  e  $\Delta\sigma_v$ , rispettivamente, sono le variazioni di stress orizzontale e verticale e  $\Delta P$  è la variazione di pressione di poro.

Il valore di rapporto di arching stress orizzontale è stato comunemente considerato trascurabile per reservoir con una estensioni laterali ampie (i.e. reservoir che si deformano in maniera uniassiale) (e.g., Zoback e Zinke, 2002). Sfortunatamente, in pratica, non esiste una misurazione di campo che determini l'importanza o la magnitudo di tale effetto. I modelli analitici e numerici mostrano comunque che l'effetto di arching può avere un effetto molto significativo che porta alla riduzione di deformazioni contrattili all'interno di un reservoir ed una redistribuzione dello stress in-situ. Ad esempio, Muller (2003) sentenzia che, per piccoli reservoir costituiti da rocce fragili (weak), circa il 50% della variazione di stress verticale efficace può essere arched away (i.e.  $\tilde{\alpha}_V \cong 0.5$ ). Utilizzando un modeling 3D Kenter et al. (1998) hanno interpretato che vi fosse probabilmente un 20-30% di arching verticale (i.e.  $\tilde{\alpha}_V \cong 0.2 - 0.3$ ) durante lo sfruttamento del reservoir a gas di Shearwater nel Mare del Nord settentrionale.



### ***3.5 MODELLAZIONE DELLA VARIAZIONE DI STRESS INDOTTA***

Oltre ai semplici approcci analitici presentati in precedenza (e.g. meccanismo di deformazione elastica uniassiale e meccanismo di equilibrio frizionale) esistono delle utili soluzioni in forma chiusa (esatta) per valutare la variazione di stress indotta nel reservoir (e.g., Segall and Fitzgerald, 1998; Fjær et al., 2008). Inoltre, esistono due gruppi di modelli per l'analisi dello stress all'interno ed intorno ad un reservoir: modelli semi-analitici e numerici. I modelli semi-analitici implementano le soluzioni analitiche accompagnandole con procedure di integrazione numerica per trovare la distribuzione della variazione di stress attraverso un campo. In realtà, questi modelli non discretizzano equazioni differenziali e la loro unica discretizzazione avviene nello schema di integrazione numerica. Spesso sono in grado di determinare la variazione dello stress sia all'interno che intorno ad un reservoir. Questi modelli sono anche basati su assunzioni geometriche e flusso di fluidi abbastanza semplificate, e solitamente sono sviluppati utilizzando l'assunzione di comportamento poroelastico lineare del materiale per il reservoir e per le rocce che lo circondano (e.g., Segall, 1985).

Per analizzare reservoir più complicati, per tenere conto di geometrie e interazioni roccia-fluido più realistiche, è richiesto l'utilizzo di modelli numerici. I modelli numerici utilizzano metodi di discretizzazione spazio-temporali e risolvono le equazioni risultanti per determinare spostamenti, deformazioni, pressioni dei fluidi e stress. Questi modelli utilizzano principalmente metodi ad elementi finiti, a differenze finite o ad elementi discreti per discretizzare. Uno dei maggiori vantaggi di alcuni modelli numerici è la loro abilità a modellare le discontinuità quali faglie o zone di debolezza che insistono sul campo.

Un breve sommario di diversi modelli sviluppati o utilizzati per studiare le variazioni di stress indotte, così come alcuni analisi di sensitività di parametri chiave utilizzando questi metodi è fornito in Tabella 3.1.

### 3.5.1 ANALISI SEMI-ANALITICA

Sebbene i modelli semi-analitici non siano abili per considerare alcune complessità derivanti da problemi reali, solitamente l'accuratezza e la stabilità dei modelli semi-analitici sono più consistenti di quelle dei modelli numerici. In ogni caso, le soluzioni semi-analitiche per i campi poroelastici di deformazione e stress indotti dalla variazione della pressione dei fluidi sottoterra sono estremamente utili perché sono relativamente facili da implementare ed offrono una facile e diretta possibilità di analizzare la sensitività dei parametri (Wong and Lau, 2008). Questi metodi generalmente tentano di risolvere le equazioni di equilibrio poroelastico che, nella loro forma generale risultano (Segall, 1992):

$$\nabla^2 u_i + (\mu/1-2\nu) * (\partial^2 u_j / \partial x_i \partial x_j) - (\alpha \partial P / \partial x_i) + f_i = 0 \quad (2.6)$$

Dove  $u_i$  sono le componenti dello spostamento,  $\mu$  denota il modulo di taglio,  $\nu$  è il rapporto di Poisson,  $P$  la pressione di poro, e  $f_i$  rappresenta le forze di volume.

#### *Teoria dei nuclei di deformazione*

Tra le prime soluzioni utilizzate per mezzi poroelastici omogenei una è stata derivata dal concetto di “nuclei di deformazione” o “nuclei di strain” (Love, 1944; Mindlin and Cheng, 1950). Questo modello è applicato a problemi in cui le proprietà del materiale sono le stesse delle rocce circostanti (i.e. problema omogeneo). Questo modello è stato utilizzato da Geertsma (1966) per trovare la subsidenza di reservoir nei quali la variazione di pressione di poro all'interno del reservoir è considerato costante nell'intero reservoir. Du e Olsen (2001) hanno applicato al teoria dei nuclei di strain in maniera discreta per studiare la subsidenza durante per differenti disposizioni di pozzi produttivi. Wong e Lau (2008) hanno anche utilizzato questa teoria per studiare il rigonfiamento del terreno osservato risultante dalla iniezione di vapore nel reservoir sabbioso ad olio di Cold Lake in Alberta, Canada. Segall (1985) ha applicato la teoria dei nuclei di strain per analizzare la distribuzione degli stress ed il potenziale di riattivazione delle faglie in rocce che circondano un reservoir sfruttato a Coalinga, California. Egli ha utilizzato il modello in combinazione con una formulazione di

estrazione di fluido per simulare la variazione di pressione di poro durante un tasso costante di produzione da una linea di pozzi posti al centro del reservoir. Baranova et al. (1999) hanno provato a rii-sviluppare essenzialmente lo stesso modello per studiare la sismicità indotta nel Bacino Sedimentario del Canada Occidentale. Come le analisi di questi autori hanno evidenziato, il loro modelling era errato perché non hanno corretto un errore di battitura esistente nel paper originale. Una versione assisimmetrica del modello è stata introdotta da Segall (1992) ed è stata applicata con successo al gas reservoir di Lacq per analizzare e predire la subsidenza (Segall et al., 1994). La teoria dei nuclei di strain è principalmente riservata all'assunzione di proprietà del reservoir identiche a quelle della roccia circostante. Questa teoria verrà descritta in dettaglio nel prossimo capitolo.

### ***Teoria delle inclusioni***

In accordo con Eshelby (1957), una inclusione è una regione in un mezzo elastico omogeneo isotropico che subirebbe una deformazione arbitraria se fosse libero, ma a causa dei limiti imposti dalla matrice che la circonda, il campo di deformazione al suo interno risulta modificato. Nei suoi ben noti lavori su questo argomento, Eshelby (1957, 1959) ha mostrato che il problema dell'inclusionione è equivalente a risolvere le equazioni di equilibrio elastico per un corpo omogeneo con un campo di distribuzione di body force nota.

Segall e Fitzgerald (1998) hanno utilizzato la teoria delle inclusioni per inclusioni ellissoidali (i.e. reservoir) in uno spazio infinito, per valutare la possibilità di riattivazione di faglie in un reservoir durante il suo sfruttamento. Quando il reservoir è assi-simmetrico con uno spessore considerevolmente minore rispetto alle sue dimensioni laterali, loro propongono utilizzando una formulazione per la variazione dello stress in un reservoir data da Mura (1982). Essi applicano questa formulazione per studiare la variazione di stress indotta nel reservoir di Ekofisk. Inoltre, sviluppano questa soluzione, in congiunzione con una semplice implementazione del concetto di Coulomb Failure Stress Change, per indagare i pattern generali di riattivazione di faglie nel reservoir e nella roccia immediatamente adiacente ad esso. La loro analisi mostra

che, durante la produzione, esiste una tendenza alla riattivazione di faglie nel reservoir e nelle zone adiacenti ai fianchi del reservoir in un regime di stress normale. Allo stesso modo, hanno mostrato una tendenza alla riattivazione negli strati al di sopra e al di sotto del reservoir in un regime di stress inverso (i.e. thrust). La principale limitazione di questo modello sono: considerare il reservoir in uno spazio infinito (i.e., le rocce intorno si estendono all'infinito in ogni direzione); una forma veramente particolare del reservoir (i.e., ellittica); proprietà del materiale identica per il reservoir e per la roccia intorno (i.e, trascurare le eterogeneità attraverso il campo).

### ***Teoria delle inomogeneità***

L'inabilità di tener conto dei contrasti tra le proprietà dei materiali è una limitazione chiave dei metodi discussi in precedenza. Esistono molti reservoir che possiedono proprietà meccaniche assai differenti da quelle delle rocce che li circondano. Ad esempio, per alcuni reservoir carbonatici sovra-pressurizzati, ad alta porosità, nel Mare del Nord, la rigidità di alcuni reservoir è circa 20 volte minore rispetto a quella delle rocce che lo circondano. La condizione opposta è stata osservata per reservoir sabbiosi compatti a bassa porosità negli Stati Uniti (Morita et al., 1989). I contrasti tra reservoir e rocce intorno possono influenzare significativamente le magnitudo degli stress indotti (Khan et al, 2000).

Quando l'inclusione (i.e. il reservoir) e la matrice (i.e. le rocce intorno) hanno differenti proprietà elastiche, l'inclusione viene riferita come inomogeneità. Eshelby (1957) ha mostrato che il problema di un'inomogeneità ellissoidale con eigenstrains costante può essere trasformato in problema di inclusione equivalente. Rudnicki (1999) ha utilizzato la teoria delle inomogeneità di Eshelby per risolvere le variazioni di stress indotte in un reservoir a forma di disco posto in uno spazio infinito con proprietà della matrice differenti da quelle del reservoir. Egli ha concluso che l'assunzione di spazio infinito fornisce una buona approssimazione per inomogeneità nella crosta in cui la profondità è maggiore della estensione laterale del reservoir. Egli applica questa teoria in concomitanza con il criterio di rottura di Coulomb per faglie che sono orientate ottimamente per uno scivolamento frizionale.; è stato mostrato anche che, per un regime

di stress inverso, le faglie tendono sempre alla stabilizzazione durante la produzione ed alla riattivazione durante l'iniezione. Per un regime di stress normale la tendenza alla riattivazione di faglie dipende, in realtà, dall'angolo frizionale della superficie di faglia e dallo stress path. Quest'ultimo parametro è funzione del rapporto di forma del reservoir ( $e$ =spessore/estensione), il rapporto dei moduli di taglio nel reservoir e nella roccia intorno, ed i rapporti di Poisson di questi due corpi.

### 3.5.2 ANALISI NUMERICA

In molti casi quali l'analisi di riattivazione di faglie o induzione di fratture, per trovare le soluzioni esatte per la variazione di stress, è necessario "rilassare" le nostre assunzioni riguardo al comportamento idealizzato del materiale, alla distribuzione della pressione, alla geometria del reservoir, ecc. Per considerare al meglio questi fattori, ed altri, in maniera più realistica, i modelli numerici hanno il vantaggio significativo di essere abili a considerare l'accoppiamento tra stress e pressione di poro mentre si risolvono, in maniera accoppiata, il flusso geomeccanico e le equazioni geomeccaniche.

I modelli numerici applicati per lo studio delle variazioni di stress indotte che avvengono durante la produzione e l'iniezione possono essere categorizzate in due gruppi principali: soluzioni generiche e soluzioni sito-specifiche. Le soluzioni generali sono sviluppate per fornire una migliore comprensione del comportamento del reservoir con caratteristiche molto generali. In generale, essi sono accompagnati da una analisi di sensitività per determinare l'importanza di differenti proprietà e parametri sulla risposta del mezzo alla variazione di pressione. Alternativamente vengono sviluppate soluzioni sito-specifiche per analizzare un particolare fenomeno (i.e. Subsidenza superficiale, riattivazione di faglie, fratturazione indotta) in uno specifico campo. Tale fenomeno è solitamente conseguenza di una variazione di stress, e viene posta la massima attenzione sullo studio del particolare fenomeno preso in considerazione.

La tabella 3.1 riporta dei modelli numerici che sono stati utilizzati per lo studio delle conseguenze di produzione o iniezione in specifici reservoir nel mondo. Questi modelli sono stati costruiti e sviluppati principalmente per studiare la sismicità osservata o

prevista in reservoir sfruttati o per studiare l'integrità del caprock dei reservoir nella fase di iniezione di fluidi.

Field	Assumed initial stress regime	Purpose of study	Degree of coupling between geomechanical and fluid flow models	Software for geomechanical analysis - numerical approach	Geometry	Rock constitutive model + Failure criterion	Fault constitutive model	Results and comments
Elevated gas reservoir, Netherlands <sup>1</sup>	Normal fault	Observed induced seismicity in the field during production	Coupled, but the extent of coupling is not been described.	FLAC <sup>3D</sup> - Finite difference	Plain strain	Elasto-plastic; Mohr-Coulomb	N/F - strength modeled by Mohr-Coulomb failure criterion	<ul style="list-style-type: none"> <li>the induced displacements on the fault's surface used as the indicator for reactivation of the fault and also for calculating the magnitude of expected seismic events</li> <li>The results supported the occurrence of observed induced seismicity in the past history of the reservoir</li> </ul>
Field B, North Sea <sup>2</sup>	Thrust fault	Evolution of stresses and the displacement of faults as the result of production	Explicit one way coupling.	N/F - Finite element	Plain strain	Elasto-plastic; Drucker-Prager - Von-Mises yield criterion	elasto-plastic joint elements with Mohr-Coulomb frictional criterion	<ul style="list-style-type: none"> <li>The induced normal and shear displacements on the fault used as the indicators for fault reactivation.</li> <li>Some faults became reactivated after depletion.</li> </ul>
Sleipner CO <sub>2</sub> sequestration project, North Sea <sup>3</sup>	Strike-slip fault	To study the caprock integrity (fractures)	N/F	VISAGE - Finite element	Axisymmetric	Elasto-plastic; Mohr-Coulomb	N/A	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fault reactivations was not studied</li> <li>The results show no evidence of induced fracturing in the caprock as a result of CO<sub>2</sub> injection in the saline aquifer beneath it.</li> </ul>
Sleipner CO <sub>2</sub> sequestration project, North Sea <sup>3</sup>	N/F	To study the caprock integrity	Coupled, but the extent of coupling is not been described.	DIANA - Finite element	Plain strain	Elasto-plastic; Mohr-Coulomb	N/F - strength modeled by Mohr-Coulomb failure criterion	<ul style="list-style-type: none"> <li>Modeled with the fictitious assumption that CO<sub>2</sub> would be injected into the same formation which the gas in this field has been produced.</li> <li>The results of this project predict an sign of the integrity deterioration for the caprock as a result of CO<sub>2</sub> injection.</li> </ul>
Flotina natural CO <sub>2</sub> accumulation, Gance and Montmiral natural CO <sub>2</sub> accumulations in France <sup>4</sup>	N/F	To study the caprock integrity	Coupled, but the extent of coupling is not been described...	DIANA - Finite element	Plain strain	Elasto-plastic; Mohr-Coulomb	N/F - strength modeled by Mohr-Coulomb failure criterion	<ul style="list-style-type: none"> <li>Both fields have been commercially exploited.</li> <li>Modeling was conducted for three stages: past CO<sub>2</sub> extraction; Future CO<sub>2</sub> extraction, and possible future CO<sub>2</sub> injection</li> <li>A possible slip along faults during injection was predicted</li> </ul>

Tabella 3.1 lista di modelli numerici pubblicati , applicati per la valutazione dei rischi geomeccanici durante la produzione/ iniezione all'interno del reservoir (da Soltanzadeh et al. 2006)

Field	Assumed initial stress regime	Purpose of study	Degree of coupling between geomechanical and fluid flow models	Software for geomechanical analysis - numerical approach	Geometry	Rock constitutive model + Failure criterion	Fault constitutive model	Results and comments
Weyburn-Midale CO <sub>2</sub> Storage and Monitoring Project	Different scenarios (i.e., normal, thrust, strike-slip and isotropic)	To study the caprock integrity	Explicit one way modeling	FLAC <sup>3D</sup> Finite difference	Three dimensional	Elasto-plastic, Hook-Brown and Mohr-Coulomb	N/A - strength modeled by Mohr-Coulomb failure criterion	<ul style="list-style-type: none"> <li>The reservoir and caprock are safe if the pressures are kept below hydraulic fracturing pressure.</li> <li>During injection the potential for the reactivation of strike-slip faults is significant. It is medium for reverse (thrust fault) regime and small for normal fault regime.</li> </ul>
A synthetic case study - deep underground injection of supercritical CO <sub>2</sub>	isotropic	Spread of CO <sub>2</sub> Plume, ground surface uplift, induced stress change and its effect on permeability, hydraulic fracturing and fault reactivation	Coupled, but the extent of coupling is not been described.	Tough2 (for fluid flow simulation) and FLAC3D (for geomechanical analysis)	Plan-stain	Brittle-elastic	Brittle-elastic vertical fault zone - strength modeled by Mohr-Coulomb failure criterion	<ul style="list-style-type: none"> <li>Breakthrough of CO<sub>2</sub> from caprock was studied by defining a high porosity fractured vertical fault zone in the caprock.</li> <li>Low-angle faults and horizontal hydraulic fracturing is mostly possible in lower part of the caprock without likelihood of propagation upward.</li> </ul>

- (1) Roest and Kuijman, 1994 (2) Samier et al., 2006 (3) Zwegel and Heil, 2003 (4) NASCENT, 2005 (5) Jimenez, 2006 (6) Rutqvist et al., 2002



Tabella 3.1 cont. lista di modelli numerici pubblicati , applicati per la valutazione dei rischi geomeccanici durante la produzione/ iniezione all'interno del reservoir (da Soltanzadeh et al. 2006)

Oltre alle modellazioni numeriche sito-specifiche listate in tabella 3.1 sono anche stati condotti degli studi più generici di variazione di stress indotta da produzione/iniezione utilizzando metodi numerici; alcuni di questi sono :

uno studio numerico sul comportamento di un reservoir (raggio di 2000 m, spessore di 50 m) durante lo sfruttamento è stato condotto da Gambolati et al (1999). Essi considerano che il reservoir si comporti elasticamente e isotropicamente. Il loro studio indica che gli stress indotti per un reservoir cilindrico, lateralmente confinato, immerso in un semi-spazio, sono quasi uniformi attraverso il reservoir ad eccezione di una regione ridotta intorno al limite del reservoir. Nella porzione interna del reservoir, lo stress di taglio è nullo ma in prossimità del limite si sviluppano dei forti stress di taglio di magnitudo comparabile a quella degli stress orizzontali. Utilizzando questo modello, si conclude che un test edometrico è il più appropriato per valutare la compressibilità di un campo di idrocarburi. La maggior limitazione dello studio è rappresentata dalla geometria specifica del reservoir preso in considerazione (i.e. un rapporto di forma molto ridotto,  $e = 0.025$ ). Per un reservoir di questo tipo alcuni dei risultati, ad esempio l'indipendenza degli stress indotti dalla profondità del reservoir (vedi tabella 2.2) non sono sorprendenti considerando il fatto che se  $e=0.025$  non esistono molte differenze da un reservoir lateralmente infinito ( $e=0$ ).

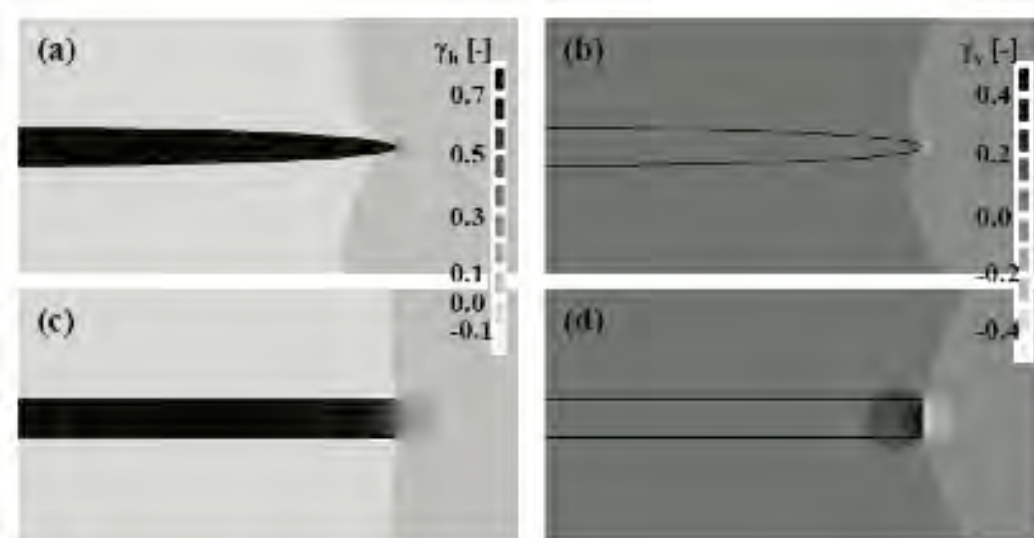
Morita et al (1989) hanno utilizzato un modello agli elementi finiti per un reservoir generico a forma discoidale per effettuare uno studio di sensitività sugli effetti che la geometria del reservoir, la profondità ed il contrasto tra le proprietà del materiale con le rocce intorno hanno sulla compattazione del reservoir, sulla subsidenza e sulla variazione degli stress indotta all'interno del reservoir. Studiando il contrasto tra il reservoir e le rocce confinanti hanno mostrato che, se il contrasto è minimo, la variazione nello stress litostatico è insignificante, sebbene aumenti leggermente verso i

fianchi del reservoir. Lo stress nel caprock aumenta significativamente se il reservoir è più fragile rispetto alle rocce intorno. Il loro studio su reservoir sottili ha evidenziato variazioni di stress verticale efficace significative e variazioni nello stress orizzontale efficace triviali, all'interno del reservoir.

Khan et al. (2000) hanno sviluppato un modello geomeccanico per determinare gli effetti dei fattori geologici e geomeccanici che controllano lo stress path del reservoir durante la produzione. Un pozzo produttivo è stato posto al centro del reservoir. Hanno valutato gli effetti della geometria del reservoir di un reservoir lenticolare ed il contrasto tra le proprietà elastiche del reservoir e delle rocce intorno. È stata considerata una profondità specifica per il reservoir e di seguito è stata modificata la geometria facendo variare il rapporto di forma. Khan et al (2000) considerano gli effetti delle proprietà elastiche e del contrasto tra il reservoir e le rocce intorno, l'anisotropia, e la plasticità. Loro concludono che l'approssimazione di sola deformazione uniassiale è ragionevole se, simultaneamente, il rapporto tra il modulo di taglio del reservoir e quello delle rocce intorno è compreso tra 0.2 e 0.15, la profondità del reservoir è maggiore della metà della estensione laterale, ed il rapporto di forma del reservoir è minore di 0.05.

Mulders (2003) ha studiato la variazione di stress all'interno ed all'esterno dei reservoir quando la distribuzione della variazione di pressione di poro è costante attraverso l'intero reservoir. Questo studio fornisce una panoramica dello sviluppo dello stress durante lo sfruttamento di reservoir idrocarburici ellissoidali e discoidali e mostra la variazione di stress calcolata nel reservoir discoidale non è costante all'interno del reservoir come invece nel reservoir ellissoidale (Figura 3.1). Esiste una variazione significativa della variazione di stress in prossimità delle rocce intorno. Comunque, esiste una distribuzione pressoché costante della variazione di stress nella parte centrale del reservoir discoidale (che è consistente con i risultati mostrati da Gambolati et al., 1999), e significa che in prossimità dei bordi del reservoir gli stress sono arched away dal reservoir. Inoltre, una analisi di sensitività è stata condotta per determinare l'influenza sullo sviluppo dello stress dentro ed intorno ai reservoir di diversi parametri, che includono le proprietà della roccia del reservoir, le proprietà delle rocce intorno, la

geometria del reservoir (profondità e aspect ratio) e la sua inclinazione. Lo studio mostra che i valori calcolati numericamente di arching ratio al centro di entrambi i reservoir, discoidale ed ellissoidale, per reservoir con un piccolo aspect ratio ( $e=0.05$ ) coincide con i valori analitici per condizioni di compattazione uniassiale del reservoir. Nelle rocce intorno, appena al di sopra ed al di sotto del centro del reservoir, si vede un aumento nello stress orizzontale in-situ ed una diminuzione nello stress verticale in-situ.



**Figura 3.1** comparazione di arching ratios calcolati in (a) e (b) un reservoir ellissoidale , (c) e (d) in un reservoir discoidale (da Mulders, 2003)

### ***3.6 CONFRONTO TRA DIFFERENTI APPROCCI DI MODELLAZIONE DEGLI STRESS INDOTTI***

Le soluzioni in forma chiusa e semi-analitiche per gli sforzi e le deformazioni poroelastiche sono estremamente importanti per il design dello stoccaggio sotterraneo di fluidi in reservoirs per la loro relativa facilità di sviluppo e la loro disponibilità alle analisi di sensitività dei parametri.

È possibile infatti modellare le variazioni di stress indotte dalla produzione o dall'iniezione di fluidi in un reservoir utilizzando la teoria delle inclusioni.

Per lo sviluppo dei nuovi modelli presentati in questo lavoro, sono state formulate le seguenti assunzioni:

- i reservoir e le rocce che lo circondano sono assunti come dei mezzi continui omogenei, elastici lineari isotropici.
- i domini del modello considerati assumono geometrie di reservoir idealizzate (Plain straini bidimensionali) immersi all'interno di uno spazio infinito (full space i.e. le rocce che circondano il reservoir si estendono all'infinito) o nel semi-spazio (i.e. tenendo conto della presenza della superficie terrestre, libera da trazioni).
- a causa dell'assunzione del comportamento meccanico continuo del materiale, gli effetti di spostamento sulla propagazione di faglie e fratture nuovamente indotte, non viene considerato. L'intento dei modelli qui sviluppati è di valutare se gli stress indotti inducano fratture o riattivino quelle esistenti; NON quello di valutare come questi caratteri si comportino una volta formati o riattivati.
- le variazioni di pressione di poro sono considerate uniformi all'interno del reservoir (sebbene ciò non sia necessario per alcuni dei modelli).
- l'interazione tra flusso di fluido e temperatura con le deformazione non viene considerato. Una risposta drenata è assunta nelle rocce intorno al reservoir; i.e. si assume che non vi sia variazione di pressione nelle rocce che circondano il reservoir durante l'iniezione o la produzione di fluido nel reservoir.
- i processi di migrazione di fluido attraverso faglie o fratture non vengono considerati.

### 3.6.1 EQUAZIONI DEI CAMPI ELASTICI

Le equazioni di equilibrio per un mezzo continuo sono:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.1)$$

dove  $\sigma_{ij}$  è il tensore dello stress e  $b_i$  rappresenta le body force (forze di volume?). In queste equazioni, ed in quelle che seguono, viene utilizzata la notazione ad indici di Einstein. Ulteriori informazioni riguardo questa notazione ad indici, che sono notoriamente utilizzate per semplificare la presentazione delle equazioni che includono campi vettoriali o tensoriali, possono essere trovate in molti testi di meccanica del continuo (e.g. Mase, 1970).

Per un mezzo termo-poro-elastico, la relazione tra il tensore degli stress e il tensore degli strain ( $\epsilon_{ij}$ ) può essere scritta in questo modo:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \alpha P \delta_{ij} - \beta_{ij} \Delta T \quad (3.2)$$

dove  $C_{ijkl}$  è il tensore di rigidità elastica,  $\alpha$  è il coefficiente di Biot,  $P$  è la pressione di poro,  $\delta_{ij}$  è il delta di Kronecker,  $\beta_{ij}$  il tensore di modulo termoelastico e  $\Delta T$  la variazione di temperatura.

Per piccoli strain, la relazione tra spostamenti ( $u_{ij}$ ) e strains è:

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (3.3)$$

sostituendo l'eq. 3.2 e l'eq. 3.3 nell'eq. 3.1, ed utilizzando le proprietà simmetriche del tensore di rigidità elastica ( $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk}$ ) si ottiene l'equazione del campo di spostamento poroelastico, di seguito:

$$C_{ijkl} u_{k,l} - \alpha P_{,i} - \beta_{ij} \Delta T_{,j} + b_i = 0 \quad (3.4)$$

Nel caso di elasticità lineare isotropa, il tensore di rigidità elastica  $C_{ijkl}$  ed il tensore di modulo termoplastico  $\beta_{ij}$ , sono espressi nel seguente modo:

$$C_{ijkl} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.6)$$

$$\beta_{ij} = 3K\eta\delta_{ij} = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \eta\delta_{ij} \quad (3.7)$$

dove  $K, \mu$  e  $\nu$ , rispettivamente, sono il modulo di rigidità, il modulo di taglio ed il rapporto di Poisson ed  $\eta$  è il coefficiente di espansione termica.

Utilizzando le eq. 3.6 e 3.7, si può ridurre l'eq. 3.5 nella seguente forma per un materiale proelastico isotropico, che rappresenta una forma generale dell'eq. 2.6 :

$$\mu \nabla^2 u_i + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,j} u_{i,i} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \eta \Delta T_j - \alpha P_j + b_i = 0 \quad (3.8)$$

### 3.6.2 TEORIA DEI NUCLEI DI STRAIN

La teoria dei nuclei di strain è stata essenzialmente sviluppata per risolvere le equazioni di campo in mezzi elastici per condizioni di carichi puntiformi, detti anche singolarità, come ad es. forze puntiformi, momenti concentrati, e centri di dilatazione (o compressione). Tuttavia, per integrazione, questa metodologia è stata estesa per risolvere problemi di condizioni di carichi distribuiti (Love, 1944).

La forma più semplice di tale soluzione è una forza puntiforme in un mezzo infinito, che è nota come problema di Kelvin. Immaginiamo una forza di magnitudo unitaria in ogni direzione che agisce su ogni punto  $x'$  all'interno del mezzo infinito. poiché in eq. 3.5 ha la natura di una body force, per considerare gli effetti di questa forza unitaria puntiforme, come equivalente, potremmo utilizzare la funzione delta di Dirac. la funzione delta di Dirac è definita come segue, per un punto  $x$  in volume arbitrario  $V$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 & \text{if } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV = 1 & \text{if } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \end{array} \right. \quad 3.12$$

in questo caso, l'eq. 3.4 può essere scritta come

$$C_{imns} G_{j,ms}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ji} = 0 \quad 3.13$$

$G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , che sono note come funzioni di Green, sono definite in questa equazione come la magnitudo dello spostamento del punto  $\mathbf{x}$  nella  $i$ -esima direzione, quando una body force unitaria nella  $j$ -esima direzione è applicata in un punto  $\mathbf{x}'$  in un mezzo elastico.

se, anziché un carico unitario puntiforme, una forza puntiforme  $F_j$  agisce sul punto  $\mathbf{x}'$ , lo spostamento al punto  $\mathbf{x}$  può essere trovato di seguito

$$u_i = F_j G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad 3.14$$

se carico  $f_j$  distribuito è applicato ad un volume  $\Omega$ , la seguente soluzione può essere utilizzata per risolvere lo spostamento al punto  $\mathbf{x}$ :

$$u_i = \int_{\Omega} f_j G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad 3.15$$

ritornando al contesto termo-poroelastico,  $f_j$  nell'eq. 3.5 potrebbe essere conseguenza di condizioni di carico come variazioni di pressione o temperatura. poiché tutte le deformazioni in questi casi sono volumetriche, esse sono note come problemi dilatazionali (o compressionali). ad esempio, nel caso della variazione di pressione ai pori, l'equazione 3.15 può essere scritta come:

$$u_i = \int_{\Omega} -\alpha P_{,j} G_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad 3.16$$

l'integrazione di questa equazione per parti risulta nella seguente equazione (Segall,1992):

$$u_i = \int_{\Omega} \alpha \Delta P G_i^D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad 3.17$$

dove  $G_i^D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  sono dette funzioni di influenza per dilatazione e sono suzioni delle funzioni di Green, come segue :

$$G_i^D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_{ij,j}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad 3.18$$

conoscendo  $u_i$  le equazioni 3.2 e 3.3 possono essere utilizzate per ritrovare gli stress indotti nel mezzo.

ciò risulta nella seguente equazione

$$\Delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \alpha \Delta P G_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \alpha \Delta P \delta_{ij} \quad (3.19)$$

dove  $G_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ , riferite come funzioni di stress, sono funzioni delle funzioni di Green come segue:

$$G_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mu(G_{ip,qs}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + G_{jp,qs}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} G_{ip,qs}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta_{ij} \quad (3.20)$$

le funzioni di Green per un full space possono essere derivate risolvendo l'equazione (3.13) utilizzando soluzione delle equazioni differenziali parziali come ad es. una trasforme di Fourier. utilizzando il processo di supposizione, differenziazione ed integrazione, ed partendo dalla soluzione delle equazioni dell'elasticità per una forza singola in full space, la soluzione per le funzioni di influenza per diversi nuclei di strani



in un mezzo infinito o semi infinito possono essere derivate (e.g Mindlin,1936: Mindlin and Cheng, 1950). Una lista estesa delle funzioni di Green e delle funzioni di influenza è data in Seremet (2003).

### 3.6.3 TEORIA DELLE INCLUSIONI

Una inclusione  $\Omega$  è una regione in un mezzo elastico isotropico omogeneo  $D$  che verrebbe sottoposto ad uno strain arbitrario se fosse non vincolato, ma a causa del vincolo imposto dalla matrice  $D-\Omega$  che lo circonda , il campo di strain al suo interno viene modificato.

lo strani arbitrario viene definito come eigenstrain. Gli eigenstrain possono essere intesi come strani interni causati da diversi meccanismi, che includono variazioni piroclastiche plastiche e termiche, in un corpo libero da forze esterne e da vincoli di superficie. Nei suoi ben noti lavori, Eshelby (1957,1959) ha mostrato che il problema di inclusione è equivalente a risolvere le equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo omogeneo con una distribuzione di body force nota. per tali corpi, le equazioni di equilibrio elastico sono risolte utilizzando le equazioni di Green elastiche. utilizzando il metodo delle equazioni di Green, le componenti  $u_i$  dello spostamento ed il campo di stress  $\sigma_{ij}$ , dovute all'eigenstrain  $\varepsilon_{ij}^*$  nell'inclusionione  $\Omega$  possono essere così scritte (Mura,1982, p. 33):

$$u_i(\mathbf{x}) = -\int_{\Omega} C_{jmnk} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.21)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -C_{ijkl} \left\{ \int_{\Omega} C_{pqmn} \varepsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') G_{ij,pq}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) \right\} \quad (3.22)$$

where  $\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) = 0$  for  $x \in D - \Omega$  .

nel caso di eigenstrain dilatazionali (i.e. la tendenza dell'inclusionione sarebbe quella di espandersi o contrarsi isotropicamente, come nel caso di strains proelastici o

termoelastici in mezzi isotropici),  $e_{ij}^*(x) = e_c(x)\delta_{ij}$  e le equazioni 3.21, 3.22 si ridurrebbero a :

$$u_i(\mathbf{x}) = -\frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \int_{\Omega} \varepsilon^c(\mathbf{x}') G_i^D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.23)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -\frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \int_{\Omega} \varepsilon^c(\mathbf{x}') G_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

dove  $\sigma'_{ij}(\mathbf{x}) = (2\mu(1+\nu))/(1-2\nu) * \delta_{ij}\varepsilon^c(\mathbf{x})$  è l'eigenstress al punto  $\mathbf{x}$ .

La teoria delle inclusioni può essere applicata ad un ampio spettro di problemi elastici per differenti tipologie di eigenstrain. tuttavia noi siamo interessati agli eigenstrain dilatazioni derivanti dalle variazioni di pressione ai pori o di temperatura; i valori di eigenstrains dilatazioni  $e_c^*$  per tali condizioni, sono rispettivamente

$$\varepsilon_c^* = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha \Delta P}{K_b} \right) = \frac{(1-2\nu)}{2\mu(1+\nu)} (\alpha \Delta P) \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_c^* = \eta \Delta T \quad (3.26)$$

dove  $K_b$  è il bulk modulus e  $\eta$  è il coefficiente lineare di espansione termica.

La trattazione di un reservoir come un'inclusione richiede inoltre l'assunzione che non vi siano variazioni di pressione o temperatura nelle rocce circostanti: i.e. no flussi guidati idraulicamente, no trasferimento di calore, e carichi completamente drained. la teoria dell'incisione consente la considerazione di reservoir di forma arbitraria. un utile risultato di questa teoria è il fatto che le variazioni di stress indotto dipendano dalla forma del reservoir (i.e. rapporto spessore/estensione laterale) e dalla relativa profondità (i.e. rapporto estensione/profondità), ma non dalle sue dimensioni assolute.

### 3.6.4 CONFRONTO TRA I DIFFERENTI METODI

Per comprendere le differenze tra i precedenti metodi ho propongo un semplice esperimento considerando un reservoir di  $100 \text{ Mm}^3$  che subisce una variazione di pressione al suo interno di  $\Delta P = -12 \text{ MPa}$ ; viene calcolata la subsidenza al di sopra del reservoir posto a 1400 metri di profondità: il valore di subsidenza è calcolata a distanza radiale crescente dalla proiezione al suolo del centro del reservoir.

In particolare verranno utilizzate per questo confronto tre differenti tecniche di analisi di subsidenza tramite due differenti approcci basati sulla teoria dei nuclei di deformazione (Geertsma 1979 e Mogi 1958) e tramite un problema di inclusione per uno sferoide.

Il metodo richiede la discretizzazione del reservoir in elementi di volume, che contengono un nucleo di deformazione. La subsidenza alla superficie libera,  $u_{0,G}$ , intorno ad un nucleo di deformazione poroelastica di volume  $V$  a profondità  $c$  che sopporta una riduzione di pressione di poro  $\Delta P$ , ammonta a:

$$u_{0,G} = (C_m * \Delta P * V) / \pi * (1-\nu) * c / (r^2 + c^2)^{3/2} \quad (3.27)$$

dove  $C_m$  è il coefficiente di compattazione uniassiale,  $r$  la coordinata radiale di un punto arbitrario sulla superficie libera,  $\nu$  il rapporto di Poisson del materiale,  $r$  la distanza dal centro del nucleo di deformazione.

Il problema di meccanica delle rocce di reservoir risolto tramite la poroelasticità è molto simile al problema di deformazione geodetica che si osserva nel monitoraggio dei vulcani; uno dei modelli analitici più diffusi è il modello di sorgente puntiforme di Mogi (Mogi, 1958).

La sorgente puntiforme di Mogi risolve il problema rappresentato da una camera magmatica che si espande o contrae immersa in un semi-spazio elastico omogeneo isotropico. La sorgente di deformazione è rappresentata da una sfera con raggio significativamente minore della sua profondità. Per questo problema, la deformazione della superficie libera  $u_{0,M}$ , è rappresentata dalla seguente relazione:

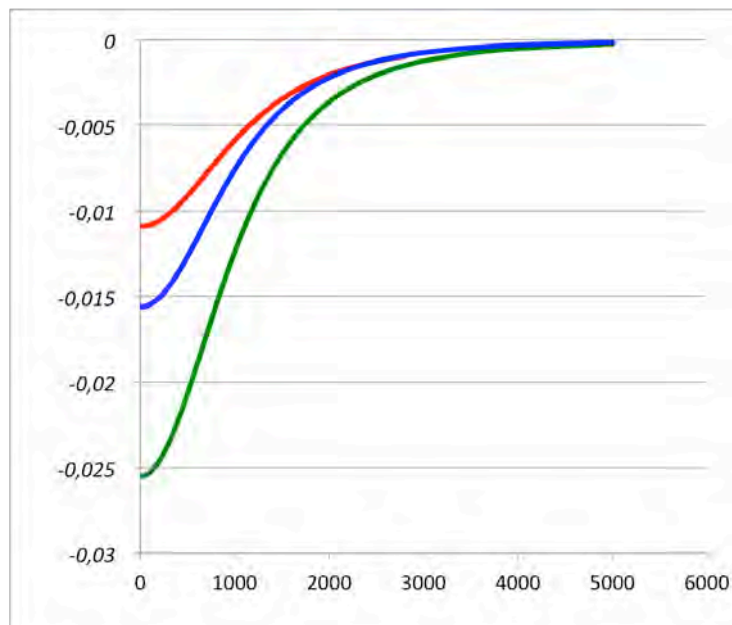
$$u_{0,G} = 3\Delta P / 4G * a^3 * c / (r^2 + c^2)^{3/2} \quad (3.28)$$

dove  $c$  è la profondità del punto sorgente,  $a$  il raggio della sorgente,  $\Delta P$  la variazione di pressione, il modulo di taglio del mezzo,  $r$  la coordinata radiale di un punto arbitrario sulla superficie libera. Questa equazione assume un rapporto di Poisson di 0.25.

La differenza tra la soluzione di Geertsma per la subsidenza e quella di Mogi si quantifica tramite un fattore dipendente dal rapporto di Poisson, ed è uguale a:

$$\alpha = (1-2\nu) / 2(1-\nu).$$

Il problema può essere risolto anche tramite un problema di inclusione, in cui lo sferoide tramite le eq 3.23 con l'ausilio di 3.25, modellando una cavità immersa in un semi-spazio lineare isotropico omogeneo.



**Figura 3.2.** Confronto subsidenza tra modello di Geertsma (blu), Mogi (verde), ed inclusione sferica (rosso); in ascissa la distanza radiale dal centro del reservoir in metri, in ordinata i valori di subsidenza in metri.

## **CAPITOLO 4**

# **SVILUPPO DELLA METODOLOGIA PER LA VALUTAZIONE GEOLOGICA E GEOMECCANICA PER SITI DI STOCCAGGIO DI GAS NATURALE**

### **4.1 INTRODUZIONE**

Una variazione della pressione dei fluidi all'interno di un reservoir poroso induce generalmente un cambiamento di stress all'interno del reservoir e delle rocce che lo circondano. Tra i potenziali pericoli derivanti da queste variazioni di stress indotte vi è la riattivazione di faglie e fratture esistenti, che possono intaccare l'integrità idraulica dei caprock che limitano i reservoir, oltre al rischio sismico legato alla loro riattivazione. Nei modelli analitici comunemente utilizzati per valutare le variazioni di stress indotte da produzione o iniezione, si ritiene che la compattazione o la dilatazione di un reservoir siano monoassiali, ovvero cambia l'ammontare totale dello stress orizzontale del reservoir, ma lo stress verticale totale rimane costante (ad esempio, Zoback e Zinke, 2002; Gouly, 2003; Streit e Hillis, 2004; Hawkes et al, 2005). La validità di questa ipotesi è stata contestata da Khan e Teufel (2000).

Le analisi semi-analitiche di mezzi porosi costituiscono un potente strumento per analizzare la risposta dei reservoir alle variazioni di pressione. Geertsma (1973) ha applicato il concetto di nuclei di strain in un mezzo poroelastico e lo ha utilizzato per

calcolare la subsidenza superficiale del terreno, sopra un reservoir assial-simmetrico di forma discoidale interessato da una diminuzione della pressione dovuta a produzione di fluidi. Segall (1985) ha usato questo concetto per determinare i campi di strain e stress poroelastici che circondano un reservoir sfruttato in Coalinga, California, e ha usato questi risultati per spiegare l'attività sismica indotta. Allo stesso modo, Segall et al. (1994) hanno utilizzato un modello poroelastico assial-simmetrico per simulare la subsidenza e la sismicità indotte dalla produzione verificatesi nei pressi del giacimento a gas di Lacq in Francia: i risultati delle loro simulazioni hanno dimostrato che le previsioni del loro modello poroelastico si correlano ragionevolmente con i dati di campo disponibili.

Tuttavia gli approcci analitici spesso tralasciano alcuni aspetti peculiari e non sempre sono applicabili in un senso più generale: Segall e Fitzgerald (1998) hanno dimostrato che, sebbene il modello uniassiale sia un buon presupposto per stimare il cambiamento di stress indotto in un reservoir orizzontale sottile, i risultati possono differire per altre geometrie del serbatoio. Gli stessi hanno inoltre osservato che strain orizzontali nulli, previsti dal modello uniassiale, sono contraddetti da osservazioni di importanti strain orizzontali in alcune situazioni che nella classica trattazione poroelastica non vengono propriamente considerati.

Generalmente, in assenza di variazioni nella pressione dei fluidi nei pori di un mezzo poroso, l'espressione per lo stress in un mezzo poroelastico è identica a quella di un solido elastico ordinario, data dalla relazione tra stress ( $\sigma$ ) e strain ( $\epsilon$ ):

$$\sigma_{ij}(x) = C_{kijmn}\epsilon_{kl} \quad (\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + (K - 2G/3)\delta_{ij}\epsilon_{kk}), \quad (4.1)$$

se il materiale è isotropico,  $G$  = modulo di taglio;

se la pressione dei pori  $p$  non è nulla allora:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + (K - 2G/3)\delta_{ij}\epsilon_{kk} - (1-K/Ks')p \delta_{ij} \quad (4.2)$$

(con  $Ks' \approx$  bulk modulus della parte solida, Rice e Cleary 1976).

Risolvendo la traccia otteniamo:

$$\sigma = K\epsilon_{kk} - (1-K/Ks')p \quad (4.3)$$

(con  $\sigma = (1/3) \sigma_{kk}$ , stress normale medio).

Un'alterazione nel contenuto di massa di fluido per unità di volume di materiale poroso,  $\Delta m$ , può anch'essa essere espressa come una combinazione lineare dello strain e della pressione dei pori:

$$\Delta m/\rho_0 = (1-K/K_s') \varepsilon_{kk} + p/K' \quad (4.4)$$

(con  $K' \approx$  bulk modulus efficace, Rice e Cleary 1976);

sostituendo  $p$  in  $\sigma_{ij}$  si ottiene:

$$\sigma = K_u \varepsilon_{kk} - \zeta K' (\Delta m/\rho_0) \quad (4.5)$$

(con  $K_u = K + (1-K/K_s')^2 K'$ ).

Eguagliando le due espressioni per  $\sigma$ :

$$\sigma = -(K_u/\zeta K') p + (K/\zeta) (\Delta m/\rho_0) \quad (4.6)$$

In condizioni "undrained"  $\Delta m = 0$ , ovvero una massa costante di fluido negli elementi del solido, la variazione nella pressione dei pori è proporzionale allo stress normale medio  $p = -B\sigma$ ,

dove  $B$  è il coefficiente di Skempton espresso come:

$$B = \zeta K' / K_u = (K_u - K) / \zeta K \quad (4.7)$$

L'approccio usato da Segall (1992) e Segall et al. (1994) è in un certo senso fondamentalmente lo stesso di quello usato da Geertsma (1966, 1973a, 1973b): entrambi derivano il campo di stress, così come la subsidenza in superficie, risultanti dall'estrazione di liquido o di gas da un reservoir. Segall e Geertsma considerano il caso di una riduzione uniforme della pressione in un serbatoio orizzontale piano, e le loro soluzioni per il campo di spostamento sono identiche (Segall, 1992). Geertsma (1966, 1973a, 1973b) trova lo stress e gli spostamenti superficiali causati dalla compattazione uniforme di un reservoir, applicando le funzioni di influenza derivate da Mindlin e Cheng (1950), le quali correlano varie sorgenti di nuclei di sforzo di intensità  $\zeta K' (\Delta m/\rho_0)$  agli spostamenti in un semispazio elastico. Per trovare gli spostamenti di

superficie, per esempio, Geertsma utilizza le espressioni di Mindlin e Cheng per gli spostamenti superficiali derivanti da una singola sorgente di strain e poi calcola il campo, integrando su tutta l'area del giacimento:

$$u_i(x) = \int_V(\xi) \zeta_{ip}(\xi, t) g_{i\alpha, \alpha}(x - \xi) dV(\xi) \quad (4.8)$$

Segall (1992), deriva la funzione di influenza di una fonte di strain da principi base dell'elasticità; il resto del calcolo è simile a Geertsma e, come già detto, i risultati sono identici. Entrambe le analisi mostrano che il reservoir si compatta uniformemente senza spostamento radiale, cioè in tensione monoassiale.

Walsh (2002) ha utilizzato un approccio differente per riesaminare il problema degli strain e delle subsidenze superficiali dovute alla estrazione di fluidi dai reservoir piani tabulari considerati da Geertsma e Segall. In particolare, utilizza una procedura detta "cut and weld", sviluppata da Eshelby (1957), accoppiata al teorema reciproco dell'elasticità. Tale teorema lega due soluzioni per lo stesso solido elastico soggetto a differenti carichi, e viene utilizzato ad es. per calcolare i campi elastici di dislocazioni con forme arbitrarie, in un solido infinito.

Nonostante un approccio differente, i risultati, anche in questo caso, sono pressoché identici tra le tre trattazioni. Rudnicki (2002) riconosce e definisce le relazioni tra i tre approcci tramite una generalizzazione dei risultati di Eshelby (1957) per inclusioni ellissoidali per solidi elastici, nell'ambito dei problemi di porelasticità.

## 4.2 RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI INCLUSIONE DI ESHELBY PER RESERVOIR

Il problema dell'inclusione descritta da Eshelby (1957) può essere descritta nel seguente modo:

Una regione (inclusione) immersa in un mezzo infinito omogeneo, isotropo ed elasticamente lineare, subisce una variazione di forma e dimensione. Sotto il vincolo



della matrice, l'inclusione possiede uno strain arbitrario omogeneo. Come valutare i campi elastici nell'inclusione e nella matrice?

Assumendo  $\Omega$  avente una forma ellissoidica, caratterizzata dai semiassi  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , con equazione:

$$x_{12}/a_{12} + x_{22}/a_{22} + x_{32}/a_{32} \leq 1$$

ed immersa in un corpo elastico isotropico infinito con strain costante nell'inclusione (eigenstrain), Eshelby (1957, 1959, 1961) derivò le soluzioni dei campi elastici per questo tipo di inclusione: il risultato più importante è che i campi di strain e stress all'interno della inclusione risultano uniformi.

Questo tipo di approccio è stato utilizzato in diversi contesti: Rudnicki (1977) ha utilizzato per analizzare lo sviluppo iniziale delle faglie, Eidelman e Reches (1992) per interpretare lo stato di stress tettonico da pattern di fratturazione in ciottoli di un conglomerato, Sharma e Ganti (2004) hanno modificato la soluzione originaria per simulare nanoinclusioni; Jiang (2007) ha utilizzato la soluzione per modellare oggetti viscosi in fluidi newtoniani con differenti viscosità e con riferimento alle orientazioni preferenziali di rocce ignee e metamorfiche; Katsman (2010) lo ha utilizzato per modellare in 2D bande di compattazione.

La definizione di eigenstrain,  $\varepsilon^*$ , definito da Mura (1987), può essere considerato come lo stato di deformazione che l'inclusione raggiunge se rimossa dal vincolo della matrice. In questo caso, Eshelby fa riferimento a stress-free strain, ovvero deformazione libera da sforzi.

In Mura (1987), un'inclusione è definita come un sottodominio  $\Omega$  in un dominio  $D$ , con eigenstrain  $\varepsilon^* = \varepsilon^*_{ij}(x)$  in  $\Omega$ , nullo in  $D - \Omega$ . Il modulo elastico nell'inclusione  $\Omega$  e nella matrice  $D - \Omega$  sono gli stessi. Lo spostamento  $u_i$ , lo strain  $\varepsilon^*_{ij}$  e lo stress  $\sigma_{ij}$  sia per l'inclusione, che per la matrice sono espressi come (Mura, 1987):

$$\begin{aligned} u_i(x) &= -C_{kjmn} \int_{\Omega} \varepsilon^*(x') G_{ij,k}(x-x') dx' & (4.9 \text{ a,b,c}) \\ \varepsilon^*_{ij}(x) &= -1/2 \int_{\Omega} C_{klmn} \varepsilon^*_{mn}(x') (G_{ik,lj}(x-x') + G_{jk,li}(x-x')) dx' \\ \sigma_{ij}(x) &= -C_{kjmn} \left( \int_{\Omega} C_{pqmn} \varepsilon^*_{mn}(x') G_{kp,ql}(x-x') dx' + \varepsilon^*_{kl}(x) \right) \end{aligned}$$

con  $C_{ijkl}$  ad indicare il tensore della rigidità (matrice dei moduli elastici);  $G_{ij}$  funzione di Green;  $x$  vettore posizione;  $x'$  indica un punto sorgente.

Utilizzando l'approccio di Mura (1987), Meng et al. (2011) hanno derivato delle espressioni quasi-analitiche per i campi elastici riferiti ad inclusioni ellissoidali in un corpo isotropico infinito, ed hanno sviluppato un codice MATLAB in grado di calcolare strain, stress e spostamento all'interno ed all'esterno di tali inclusioni, per qualsiasi tipologia di geometria ellissoidica.

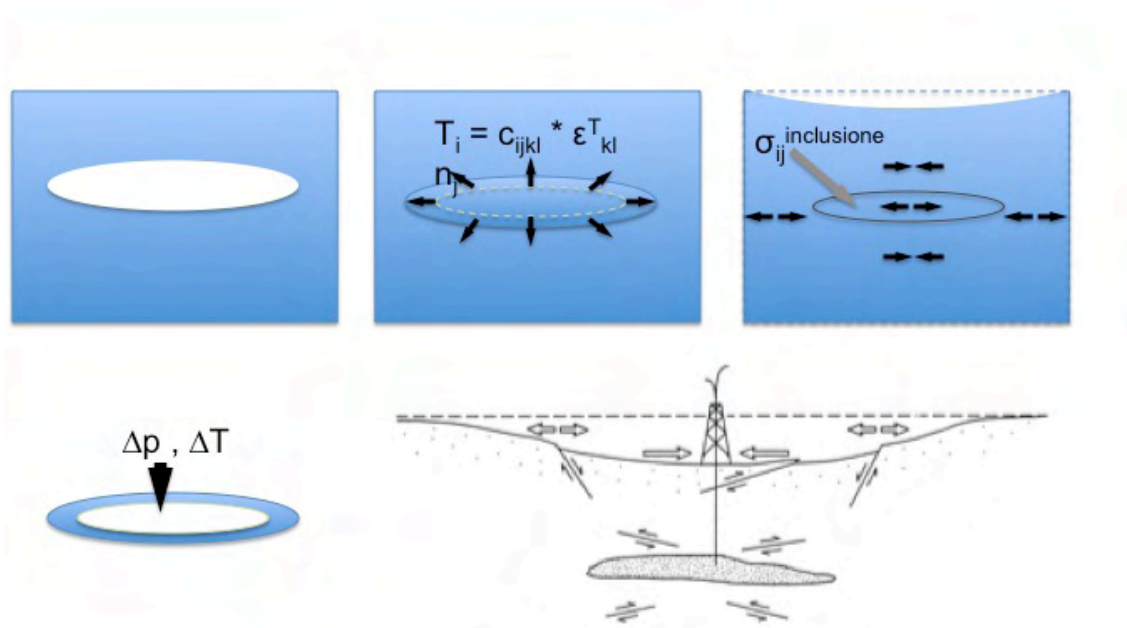


Figura 4.1 – Schema concettuale della modellazione geomeccanica di un reservoir tramite risoluzione del problema di inclusione di Eshelby.

I campi elastici intorno ed all'interno di una inomogeneità hanno diverse applicazioni nelle scienze geologiche e dei materiali. Per un'inomogeneità ellissoidale in un corpo infinito isotropico, il campo elastico è stato formulato da Eshelby (1957, 1959, 1961) con un problema d'inclusione equivalente (Mura, 1987, p. 179). Rudnicki (1977) ha utilizzato la soluzione di Eshelby per investigare l'iniziazione di una faglia. Eidelman e Recise (1992) hanno utilizzato la soluzione per interpretare lo stato dello stress tettonico sulla base del pattern di fratturazione nei pebbles in un conglomerato. Sharma e Ganti

(2004) hanno modificato al soluzione originaria per simulare nanoclusioni. Jiang (2007) ha utilizzato la soluzione per modellare oggetti viscosi in fluidi Newtoniani con differenti viscosità per analizzare il fabric di orientazione preferenziale in rocce ignee e metamorfiche. Katsman (2010) ha utilizzato la soluzione per modellare *bande di compattazione* in 2D.

La soluzione di Eshelby per una inclusione ellissodica arbitraria ( come anche una inomogeneità), richiede un calcolo molto esteso, quindi Healy (2009) e Recise (1998) hanno valutato le soluzioni semplificate per inomogeneità sferoidali, dove i semiassi son  $a_1 = a_2 \neq a_3$ .

#### 4.2.1 INCLUSIONE ELLISSOIDALE IN UNA MATRICE INFINITA ISOTROPICA

Una inclusione ellissoidale  $\Omega$  con semiassi  $a_j$  in un corpo elastico infinito isotropico D ha equazione

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 \leq 1 \quad (4.10)$$

Le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  sono equivalenti a  $x, y, z$  nelle sezioni di seguito. Per materiali isotropici, la funzione di Green è data da (Mura, 1987, p. 22) :

$$G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 1/(16\pi\mu(1-\nu)|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) * ((3-4\nu)\delta_{ij} + (x_i-x_i')(x_j-x_j')/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2) \quad (4.11)$$

Assumendo l'eigenstrain nell'inclusione sia costante, noi possiamo portare  $\varepsilon^*$  fuori dall'integrale delle eq. (4.9). Eshelby (1957, 1959, 1961) ha derivato soluzioni impressionanti per il campo elastico interno ed esterno in questa inclusione. Uno dei più prominenti risultati di Eshelby è che i campi di stress e strain nella inclusione sono uniformi,

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \text{ per } x \in \Omega, \quad (4.12)$$

dove  $S_{kl}$  è detto il tensore di Eshelby (Mura, 1987, p.77),

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$$

$$S_{1111} = [3/8\pi(1-\nu)] a_1^2 I_{11} + [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)] I_1$$

$$S_{1122} = [1/8\pi(1-\nu)] a_2^2 I_{12} + [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)] I_1$$

$$\begin{aligned}
S_{1133} &= [1/8\pi(1-\nu)] a_3^2 I_{13} + [(1-2\nu)/8\pi(1-\nu)] I_1 \\
S_{1212} &= [a_1^2 + a_2^2 / 16\pi(1-\nu)] I_{12} + [(1-2\nu)/16\pi(1-\nu)] (I_1 + I_2)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

dove  $\nu$  è il rapporto di Poisson;

$I_i$  e  $I_{ij}$  sono dati dagli integrali, Routh (1895),

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty ds / [(a_1^2 + s) \Delta(s)] , \\
I_{11} &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty ds / [(a_1^2 + s)^2 \Delta(s)] , \\
I_{12} &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty ds / [(a_1^2 + s) (a_2^2 + s) \Delta(s)] ,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

dove  $\Delta s = (a_1^2 + s)^{1/2} (a_2^2 + s)^{1/2} (a_3^2 + s)^{1/2}$ ;  $s$  è la variabile di integrazione. i restanti  $I_i$  e  $I_{ij}$  sono trovati tramite permutazioni cicliche sincronizzate di 1,2,3 e  $a_1, a_2, a_3$ .

Per  $a_1 > a_2 > a_3$ , il  $I_i$  può essere espresso da integrali ellittici standard (Gradshteyn e Ryzhik, 1965),

$$\begin{aligned}
I_1 &= (4\pi a_1 a_2 a_3) / [(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}] (F(\theta, k) - E(\theta, k)) , \\
I_3 &= (4\pi a_1 a_2 a_3) / [(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}] [(a_2(a_1^2 - a_3^2)^{1/2} / (a_1 a_3)) - E(\theta, k)] ,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Dove

$$\begin{aligned}
F(\theta, k) &= \int_0^\theta dw / [(1 - k^2 \sin^2 w)^{1/2}] , \\
E(\theta, k) &= \int_0^\theta [(1 - k^2 \sin^2 w)^{1/2}] dw , \\
\theta &= \arcsin(1 - a_3^2 / a_1^2)^{1/2} , \\
k &= ((a_1^2 - a_2^2) / (a_1^2 - a_3^2))^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Tra  $I_i$  e  $I_{ij}$  esiste una relazione (Mura, 1987),

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 &= 4\pi , \\
3I_{11} + I_{12} + I_{13} &= 4\pi / a_1^2 , \\
3a_1^2 I_{11} + a_2^2 I_{12} + a_3^2 I_{13} &= 3I_1 , \\
I_{12} + (I_2 + I_1) (a_1^2 - a_2^2) &
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Con queste relazioni e le loro controparti cicliche, è sufficiente determinare  $I_1$  e  $I_3$  dalla eq. (4.15) per esprimere gli altri  $I_i$  e  $I_{ij}$ .

Una routine numerica **elliptic12** sviluppata da Igor (2005) viene utilizzata per approssimare l'integrale ellittico in eq. (4.16) con una tolleranza nell'ordine di  $10^{-16}$ . Ciò significa che le soluzioni che presentiamo non sono analitiche (esatte) nel senso stretto. Noi ci riferiamo a questo metodo come *quasi-analitico*.

Per il campo elastico esterno (Mura, 1987)

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = D_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}^* \text{ per } \mathbf{x} \in D - \Omega, \quad (4.18) \text{ dove}$$

$$\begin{aligned} 8\pi(1-\nu)D_{ijkl}(\mathbf{x}) &= 8\pi(1-\nu)S_{ijkl}(\lambda) + 2\nu\delta_{kl}x_iI_{lj}(\lambda) \\ &- (1-\nu) (\delta_{il}x_kI_{Kj}(\lambda) + \delta_{jl}x_kI_{Ki}(\lambda) + \delta_{ik}x_lI_{Lj}(\lambda) + \delta_{jk}x_lI_{Li}(\lambda)) \\ &1) \quad \delta_{ij}x_k (I_K(\lambda) - a_1^2 I_{KI}(\lambda)),_l \\ &2) \quad (\delta_{ik}x_j + \delta_{jk}x_i)(I_J(\lambda) - a_1^2 I_{JJ}(\lambda)),_l \\ &3) \quad (\delta_{il}x_j + \delta_{jl}x_i)(I_J(\lambda) - a_1^2 I_{JJ}(\lambda)),_k \\ &1) \quad x_i x_j (I_J(\lambda) - a_1^2 I_{JJ}(\lambda)),_{kl}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Gli indici in maiuscolo prendono il valore dei corrispondenti indici minuscoli, ma solo i valori maiuscoli ripetuti sono sommati.  $\delta_{ij}$  è la funzione delta di Dirac.  $\lambda$  è la massima radice positiva di

$$x_1^2/(a_1^2 + \lambda) + x_2^2/(a_2^2 + \lambda) + x_3^2/(a_3^2 + \lambda) = 1 \quad (4.20)$$

Per  $\mathbf{x} \in D-\lambda$ , e zero per  $\mathbf{x} \in \Omega$ .  $I_{i(j)}(\lambda)$  sono definiti dalla eq.(4.14) con i limiti inferiori dell'integrale sostituiti da  $\lambda$ .  $S_{ijkl}(\lambda)$  sono dati dalla eq. (4.13) per i corrispondenti  $I_{i(j)}(\lambda)$ . Per risolvere  $D_{ijkl}(\lambda)$  nella eq.(4.19), necessitiamo di  $I_i(\lambda)$ ,  $I_{ij}(\lambda)$  e delle loro derivate di primo e secondo ordine rispetto ad  $x_i$ . Gli  $I_i(\lambda)$  e  $I_{ij}(\lambda)$ , in maniera simile alle eq. (4.15)-(4.17), diventano

$$I_1(\lambda) = (4\pi a_1 a_2 a_3)/[(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}] (F(\theta(\lambda),k) - E(\theta(\lambda),k)),$$

$$\begin{aligned}
I_3(\lambda) &= (4\pi a_1 a_2 a_3) / [(a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}] [((a_2^2 + \lambda)(a_1^2 - a_3^2)^{1/2}) / (\prod_k (a_k^2 + \lambda)^{1/2})] - \\
&E(\theta(\lambda), k) , \\
I_2(\lambda) &= (4\pi a_1 a_2 a_3) / (\prod_k (a_k^2 + \lambda)^{1/2}) - I_1(\lambda) - I_3(\lambda) , \\
I_{ij}(\lambda) &= -[I_i(\lambda) - I_j(\lambda)] / (a_i^2 - a_j^2) \quad \text{per } i \neq j , \\
I_{ii}(\lambda) &= (4\pi a_1 a_2 a_3) / 3(a_i^2 + \lambda)(\prod_k (a_k^2 + \lambda)^{1/2}) - (\sum_j I_{ij}(\lambda) / 3) \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Dove  $\prod$  è il simbolo del fattoriale,  $F(\theta(\lambda), k)$  e  $E(\theta(\lambda), k)$  sono date dalla eq. (4.16), con il parametro  $\theta$  modificato (Gradshteyn e Ryzhik, 1965):

$$\theta = \arcsin [(a_1^2 - a_3^2) / (a_2^2 + \lambda)]^{1/2} . \quad (4.22)$$

Facilitati da (Mura, 1987, 11.40.1-11.40.4) possiamo esprimere le derivate di primo e secondo ordine di  $I_i$  e  $I_{ij}$  in termini di derivate di  $\lambda$  :

$$\begin{aligned}
I_{i,j} &= [(-2\pi a_1 a_2 a_3) / ((a_i^2 + \lambda) \prod_m (a_m^2 + \lambda)^{1/2})] \lambda_{,j} , \\
I_{i,jk} &= [(-2\pi a_1 a_2 a_3) / ((a_i^2 + \lambda) \prod_m (a_m^2 + \lambda)^{1/2})]^* \\
&\quad \{ \lambda_{,ijk} - [(1/(a_i^2 + \lambda)) + 1/2 \sum_n (1/(a_n^2 + \lambda))] \lambda_{,ji} \lambda_{,k} \} , \\
I_{ij,kl} &= [(-2\pi a_1 a_2 a_3) / ((a_i^2 + \lambda) \prod_m (a_m^2 + \lambda)^{1/2})]^* \\
&\quad \{ \lambda_{,kl} - [(1/(a_i^2 + \lambda)) + (1/(a_j^2 + \lambda)) + 1/2 \sum_n (1/(a_n^2 + \lambda))] \lambda_{,k} \lambda_{,l} \} , \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Dalla eq.(14), le derivate di primo e secondo ordine di  $\lambda(x)$ ,

$$\lambda_{,i} = (2x_i / (a_i^2 + \lambda)) / (x_j x_j / (a_i^2 + \lambda)^2) , \quad \lambda_{,ij} = (F_{i,j} - \lambda_{,i} C_{,j}) / C , \quad (4.24)$$

Dove

$$F_i = 2x_i / (a_i^2 + \lambda) , \quad C = x_j x_j / (a_i^2 + \lambda)^2 . \quad (4.25)$$

Sostituendo le equazioni (4.21), (4.23) e (4.24) nella equazione (4.19), otteniamo le espressioni per  $D_{ijkl}(x)$ .

Per un dato eigenstrain  $\varepsilon_{ij}^*$  abbiamo le espressioni quasi-analitiche per il campo di strain all'interno dell'inclusione (4.12) e per la matrice (4.18). Moltiplicando lo strain per la matrice di rigidità  $C_{ijkl}$  otteniamo il corrispondente campo di stress

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x). \quad (4.26)$$

Poiché  $\varepsilon_{ij}$  in  $\Omega$  è uniforme, anche  $\sigma_{ij}$  in  $\Omega$  è uniforme.

Il campo di spostamento è dato da Mura (1987, 11.30) come

$$u_i(x) = [1 / (8\pi (1-\nu))] \Psi_{,jli} \varepsilon_{ij}^* - 2\nu \varepsilon_{ij}^* \Phi_{,i} - 4(1-\nu) \varepsilon_{il}^* \Phi_{,l}, \quad (4.27)$$

dove  $\Phi$  e  $\Psi$  sono definiti da

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{\Omega} |x-x'| dx', \\ \Psi(x) &= \int_{\Omega} (1/|x-x'|) dx', \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$ , definite da Ferrers (1877) e Dyson (1981), possono essere espresse in termini di  $I_i(\lambda)$  e  $I_{ij}(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} \Phi &= 1/2 (I(\lambda) - x_n x_n I_N(\lambda)), \\ \Psi_{,i} &= 1/2 x_i (I(\lambda) - x_n x_n I_N(\lambda)) - a_1^2 (I_i(\lambda) - x_n x_n I_{iN}(\lambda)), \end{aligned}$$

dove

$$I = [4\pi a_1 a_2 a_3 F(\theta(\lambda), k)] / (a_1^2 - a_3^2)^{1/2}.$$

Facilitati da Mura (1987, 11.40.4) esprimiamo  $\Phi_{,i}$  e  $\Psi_{,ijl}$ , in termini di  $I_i$ ,  $I_{ij}$ , e delle loro derivate di primo ordine:

$$\begin{aligned} \Phi_{,i} &= -x_i I_i(\lambda), \\ \Psi_{,ijl} &= -\delta_{ij} x_l (I_l(\lambda) - a_1^2 I_{lN}(\lambda)) - x_i x_j (I_j(\lambda) - a_1^2 I_{jN}(\lambda))_{,l} - (\delta_{il} x_j + \delta_{jl} x_i) (I_j(\lambda) - a_1^2 I_{jN}(\lambda)) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sostituendo le equazioni (4.29), (4.19), (4.21), e (4.22) nell'equazione (4.25) otteniamo le espressioni quasi-analitiche per i campi di spostamento  $u_i(x)$  per l'inclusione e per la matrice.

#### 4.2.2 METODO DELL'INCLUSIONE EQUIVALENTE

Supponiamo che il campo elastico che vogliamo valutare sia caratterizzato da differenti moduli elastici del sottodominio e della matrice, i.e.  $C^*_{ijkl}$  in  $D$  e  $C_{ijkl}$  in  $D-\Omega$ . Inoltre, anziché trasmettere lo stato di stress-free all'infinito, la matrice è soggetta ad uno stress remoto omogeneo  $\sigma_{ij}^\infty$ . Questo rende il problema, definito come *problema di inomogeneità*, differente dal *problema della inclusione* nelle sezioni precedenti. Eshelby (1957) ha per primo intuito che la perturbazione dello stress di uno stress omogeneo applicato dovuto alla presenza di una inomogeneità ellissoidale può essere determinata da un problema di inclusione se l'eigenstrain è scelto in maniera appropriata. Questo è detto metodo *dell'inclusione equivalente* (Meng et al 2011).

Per risolvere l'eigenstrain *fittizio*  $\varepsilon_{ij}^*$ , riscriviamo Mura (1987, 22.13),

$$(\Delta C_{ijkl} S_{ijkl} - C_{ijkl}) \varepsilon_{mn}^* = -\Delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\infty - C^*_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p, \quad (4.30)$$

Dove  $\Delta C_{ijkl} = C_{ijkl} - C^*_{ijkl}$ ; e dalla relazione  $\sigma_{ij}^\infty = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^\infty$ , noi otteniamo lo strain remoto  $\varepsilon_{ij}^\infty$ .  $\varepsilon_{ij}^p$  è un eigenstrain arbitrario al quale era soggetta la inomogeneità inizialmente.

Abbiamo pertanto i campi di stress e strain come di seguito (Mura, 1987, 22.8-22.13):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^\infty + S_{ijmn} \varepsilon_{mn}^*, \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^\infty + C_{ijkl} (S_{klmn} \varepsilon_{mn}^* - \varepsilon_{mn}^*) \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) &= \varepsilon_{ij}^\infty + D_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^*, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}^\infty + C_{ijkl} D_{klmn}(\mathbf{x}) \varepsilon_{mn}^* \quad \text{per } \mathbf{x} \in D-\Omega. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Da notare che l'eigenstrain è libero da stress, quindi si sottrae dallo strain totale quando calcoliamo lo stress nella inomogeneità. E poiché l'esterno non presenta eigenstrain, abbiamo la corrispondenza elastica stress-strain.

Lo spostamento  $u_i(\mathbf{x})$  è calcolato tramite l'equazione (4.25) per l'eigenstrain  $\varepsilon_{ij}^*$ . Lo spostamento qui equivale alla perturbazione di spostamento causata da una inomogeneità e non include lo spostamento dovuto a  $\sigma_{ij}^\infty$ .



#### 4.2.3 FORMULAZIONE DELLA SOLUZIONE TRAMITE MATLAB

Uno script principale **incl\_prob**, consente la definizione della la struttura dei dati di input, richiama un codice per risolvere il problema di Eshelby, **Esh\_sol**, e fornisce poi i risultati finali.

La struttura di input, *incl*, ha attributi

- $E_m$  modulo di Young per la matrice,
- $\nu_m$  rapporto di Poisson per la matrice;
- $E_h$  modulo di Young per la inomogeneità;
- $\nu_h$  rapporto di Poisson per la inomogeneità;
- *dim* raccoglie le dimensioni  $a_i$  dell'ellissoide;
- *ang* angoli di rotazione intorno agli assi di coordinate;
- *stressvec* lo stress remoto  $\sigma_{ij}^\infty$  ;
- *eigp* eigenstrain iniziale  $\varepsilon_{ij}^p$  ;
- *Grid* griglie di osservazione dove valutiamo le soluzioni,

Dove i tensori dello stress e dello strain sono nella forma di vettori a sei componenti, a causa della simmetria.

La funzione **Esh\_sol** legge i dati di input e gli argomenti di output “disp”, “stress” e “strain.” ; gli output sono valutati su griglie di osservazione per specifici argomenti di output. Le routines richiamate da questa funzione in ordine di apparizione nel codice sono:

**Ctensord** costruisce i tensori di rigidità  $C_{ijkl}$  e  $C_{ijkl}^*$  per i dati moduli elastici ( $E_m, \nu_m$ ) ed ( $E_h, \nu_h$ ). Dalla corrispondenza stress-strain, equazione (20), calcoliamo lo strain remoto  $\varepsilon_{ij}^\infty$  per lo stress remoto  $\sigma_{ij}^\infty$ . Da notare che se  $C_{ijkl} = C_{ijkl}^*$  allora  $\sigma_{ij}^\infty = 0$  e  $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ , quindi otteniamo il problema dell'inclusione originario.

**Esh\_int** costruisce il tensore di Eshelby  $S_{ijkl}$  per un dato  $\nu_m$  e dimensione dell'ellissoide ai utilizzando le equazioni (4.11)-(4.15). Con  $C_{ijkl}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^\infty$ ,  $S_{ijkl}$  calcoliamo l'eigenstrain fittizio  $\varepsilon_{ij}^p$  tramite l'equazione (4.30).

**Esh\_D4** costruisce il tensore  $D_{ijkl}(x)$  tramite le equazioni (4.17)-(4.22) per dati  $\nu_m$ ,  $a_i$  e coordinate  $x_i$ . Con  $D_{ijkl}(x)$ , calcoliamo lo stress e lo strain esterno tramite l'equazione (4.31).

Esh\_disp costruisce gli spostamenti  $u_i$  tramite le equazioni (4.25)-(4.29) per dati  $v_m$ ,  $a_i$ ,  $x_i$  e  $\varepsilon_{ij}^*$ .

Esh\_D4\_disp unisce le funzionalità di Esh\_D4 e Esh\_disp.

Poiché gli spostamenti  $u_i(x)$ , richiedono derivate di differenti ordini di  $I_{i(j)}$ , equazione (4.21), allora lo strain  $\varepsilon_{ij}$ , o lo stress, eq.(4.26), noi scegliamo una routine tra Esh\_D4, Esh\_disp e Esh\_D4\_disp per calcolare gli output in maniera efficiente. Ad esempio, se solo “disp” appare negli argomenti di output, Esh\_sol richiama solo Esh\_disp. Pertanto il codice gira più velocemente per minori outputs.

Alla fine di incl\_prob, selettivamente possiamo plottare gli output per le date griglie di osservazione.

Con questo approccio, il valore di strain derivante dall'estrazione e/o iniezione di fluidi dal reservoir e dalla conseguente riduzione e/o aumento di pressione è stato definito tenendo conto della compressibilità del mezzo e dello stress efficace ai quali avviene la deformazione.

poiché i valori di input del codice consistono nelle valutazioni di parametri riferiti alla inclusione (dimensioni dei semiassi, moduli di Young e rapporti di Poisson) e dell'iniziale valore di eigenstrain, noi utilizzeremo questo codice per definire i campi elastici derivanti dalle interazioni poroelastiche, cioè variazione di massa, variazione di pressione e di volume con associata variazione di superficie topografica (subsidenza), che fornisce un controllo dell'entità degli spostamenti in superficie, relazioni tra massa, pressione e strain descritte in precedenza). Nel caso in oggetto, il valore di strain derivante dall'estrazione di fluidi dal reservoir e dalla conseguente riduzione di pressione, come quelle evidenziate nei paragrafi precedenti, fornisce la base per la definizione dell'eigenstrain da inserire nel codice.

Durante la produzione di gas, la pressione di poro diminuisce (vice versa per l'iniezione). Poiché il carico litostatico (ovvero lo stress litostatico) non varia, lo stress efficace  $S_{eff} = S_{tot-P}$ , ( $S_{tot}$  = stress totale;  $P$  = pressione dei pori) sulla struttura granulare della roccia aumenta. Come conseguenza si assiste ad una compattazione del reservoir, ovvero il suo volume diminuisce. Se le dimensioni laterali del reservoir sono molto

maggiori del suo spessore, la compattazione si manifesta principalmente in una riduzione dell'altezza del reservoir (il suo spessore diminuisce, Geertsma, 1973b). In questo caso, la compattazione del reservoir può essere descritta dallo strain verticale  $\varepsilon_z$ ,

$$\varepsilon_z = dz/z \quad (4.32)$$

(z, altezza del reservoir, dz variazione dell'altezza)

che rappresenta la variazione nell'altezza del reservoir dz relativamente alla sua altezza iniziale z, in seguito ad un aumento dello stress efficace causato da una diminuzione della pressione di poro sotto un carico costante (quello litostatico). La compattazione del reservoir in direzione verticale è caratterizzata dal coefficiente di compattazione uni-assiale (verticale)  $c_M$ :

$$c_M = 1/z * dz/dp \quad (\text{bar}^{-1} \text{ oppure } \text{Pa}^{-1}) \quad (4.33)$$

che descrive la compattazione per variazione unitaria di pressione dei pori.

La compattazione totale  $\Delta H$ , ad un certo punto nel tempo, dipende dalla differenza di pressione dei pori  $\Delta p$  fin dall'inizio della produzione e dallo spessore iniziale del reservoir H:

$$\Delta H = c_M * \Delta p * H \quad (4.34)$$

La compressibilità delle rocce del reservoir in direzione laterale è specificata dal rapporto di Poisson  $\nu$ , che rappresenta il rapporto tra strain laterale e strain verticale.

### *4.3 VALUTAZIONI SULLA STABILITÀ SECONDO IL CRITERIO DI ROTTURA DI COULOMB*

Esistono differenti criteri utilizzati per caratterizzare le condizioni sotto le quali avviene una rottura nelle rocce. Uno dei più utilizzati è il criterio di rottura di Coulomb (Coulomb Failure Criteria, si veda tra gli altri King et al., 1994), il quale richiede che sia lo stress di taglio che quello normale su una faglia incipiente soddisfino condizioni di frizione analoghe a quelle su una superficie pre-esistente.

Nel criterio di Coulomb, la rottura avviene su un piano quando lo Stress di Coulomb  $\sigma_f$  supera un valore specifico

$$\sigma_f = \tau_\beta - \mu \sigma_\beta - p$$

dove  $\tau_\beta$  rappresenta lo stress di taglio su un piano di rottura,  $\sigma_\beta$  lo stress normale,  $p$  la pressione di poro e  $\mu$  il coefficiente di frizione. Il valore di  $\tau$  deve sempre essere positivo in questa espressione, mentre solitamente il processo di risoluzione dello stress su un piano può fornire valori positivi o negativi dipendentemente da come il potenziale di scivolamento sia right o left-lateral (destra o sinistra, senso orario o antiorario). In questo caso il valore di  $\tau$  deve essere scelto in maniera appropriata.

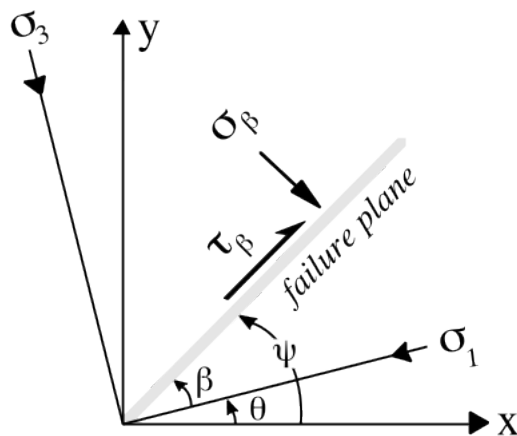


Figura 4.2 – Determinazione di  $\tau_\beta - \sigma_\beta$  su piano di rottura a partire dagli stress principali.

In generale, tuttavia, si può mappare la variazione di Coulomb Failure Stress su un piano (Fig. 17), includendo nella equazione le variazioni di  $\tau$  e  $\sigma$ .

Se il piano di faglia è orientato con un angolo  $\beta$  rispetto allo stress principale  $\sigma_1$  allora possiamo esprimere le componenti dello stress applicate ad esso in termini di stress principale :

$$\sigma_{\beta} = 1/2 \sigma_1 + \sigma_3 - 1/2 \sigma_1 - \sigma_3 \cos 2\beta$$

$$\tau_{\beta} = 1/2 \sigma_1 - \sigma_3 \sin 2\beta$$

dove  $\sigma_1$  è lo stress principale maggiore e  $\sigma_3$  quello minore;

in questo caso l'equazione del Coulomb Failure Stress (CFS) diviene:

$$\sigma_f = 1/2 \sigma_1 - \sigma_3 \sin 2\beta - \mu \cos 2\beta - 1/2 \mu \sigma_1 + \sigma_3 + \mu p$$

Differenziando questa equazione in funzione di  $\beta$  otteniamo che il Coulomb stress massimo si misura quando:

$$\tan 2\theta = 1/\mu$$

Coulomb, sulla base dei suoi studi sulla frizione, assume che una frattura in una roccia avvenga lungo un piano a causa di uno stress di taglio  $\tau$  che agisce lungo questo piano. il movimento lungo questo piano è assunto comunque essere contrastato dalla forza coesiva del materiale. Tale forza riflette il fatto che, in assenza di uno stress normale, uno stress di taglio finito,  $S_0$ , è ancora tipicamente necessario affinché si abbia una rottura.

Queste considerazioni portano alla formulazione del criterio matematico secondo il quale che la rottura avviene lungo un piano qualora fosse verificata la seguente condizione

$$|\tau| = S_0 + \mu \sigma$$

il segno dello stress di taglio tau indica esclusivamente la direzione di scivolamento dopo la rottura.

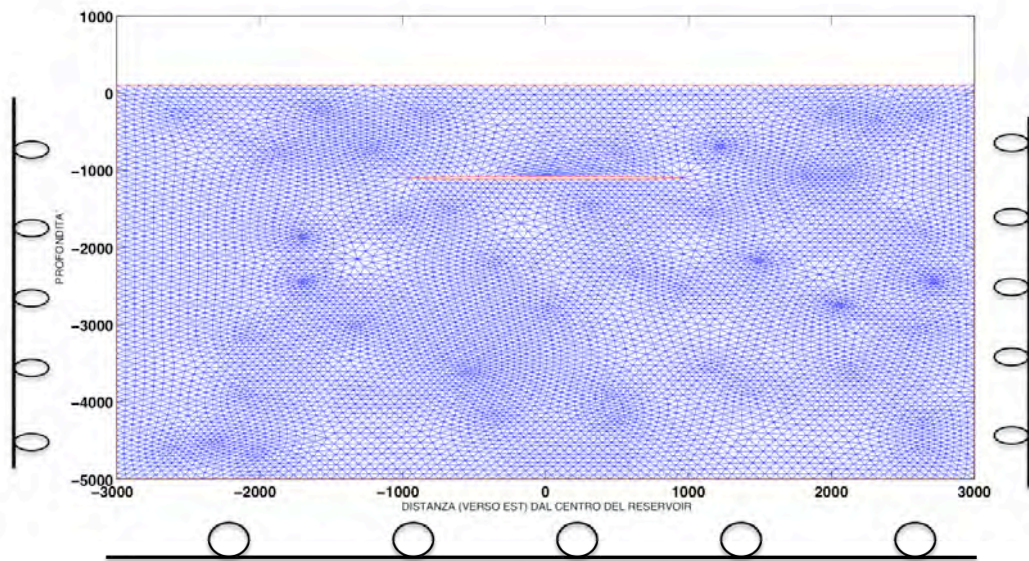
Allo stesso modo, la rottura non avverrà su alcun piano se  $|\tau| < S_o + \mu \cdot \sigma$

Per comprendere come gli stress indotti possano sviluppare fratture nella roccia di copertura o nelle rocce intorno al reservoir, abbiamo analizzato il valore di Coesive Strength, o coesione C (inteso come valore rappresentativo del limite di resistenza di una roccia alla fratturazione).

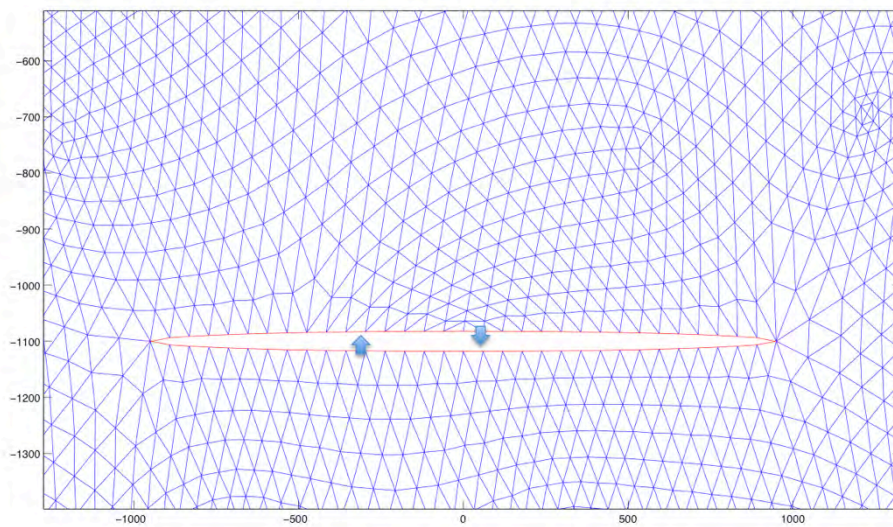
La coesione è in genere definita come  $C=2S_o$  (con  $S_o$ , Unconfined Compressive Strength (MPa) ): questo valore, risulta in generale nell'ordine delle decine di MPa (tra 20 MPa, fino a 300 Mpa, per rocce più resistenti tipo graniti o basalti).

#### 4.3.1 MODELLAZIONE AD ELEMENTI FINITI PER VALUTAZIONE $\Delta CFS$

Per valutare la stabilità degli ammassi rocciosi in concomitanza con le perturbazioni dello stress derivanti dalle operazioni di stoccaggio, si è ritenuto opportuno mappare i valori di  $S_o$  derivanti dall'analisi degli stress derivati dalla modellazione al FEM (figura 18 e 19) e ottenere una stima della possibilità che questo  $S_o$  superi il valore tipico per la rottura.



**Figura 4.3** – Maglia FEM di un reservoir lenticolare reservoir. In ogni cella viene calcolato il valore di  $\Delta CFS$  per quell'area. Ai lati si notano le boundary conditions, bloccate.



**Figura 4.4** – Zoom del modello di Fig. 18. Le due frecce indicano la condizione al contorno del reservoir utilizzate per la modellazione, ricavate dagli output della modellazione semianalitica del problema di inclusione equivalente.

#### 4.3.2 PLANE STRESS

Nella meccanica strutturale, le equazioni che legano stress e strain derivano dal bilanciamento di forze nel mezzo materiale. La condizione di plane stress è un' condizione che prevale in una placca piatta nel piano x-y, caricata solo sul proprio piano e senza limitazioni lungo la direzione z-.

La relazione stress strain può essere scritta, assumendo condizioni isotropiche ed isoterme

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix},$$

Dove  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  sono gli stress normali in direzione x ed y, e  $\tau_{xy}$  è lo shear stress. Le proprietà del materiale sono espresse come combinazione di E, modulo elastico o Modulo di Young, e  $\nu$ , rapporto di Poisson.

La deformazione del materiale è descritta dagli spostamenti in direzione x- ed y- dai quali definiamo gli strains sono definiti come

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Le equazioni di bilancio della forza sono

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= K_x \\ -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= K_y, \end{aligned}$$

Combinando le precedenti relazioni, le equazioni dello spostamento possono essere ricavate come

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{k},$$



dove  $\mathbf{c}$  è un tensore di quarto rango (<http://www.mathworks.it/it/help/pde/ug/c.html>) che può essere scritto come matrici 2x2  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{21}$ , e  $c_{22}$ :

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2G + \mu & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ G & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{21} = \begin{pmatrix} 0 & G \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 2G + \mu \end{pmatrix},$$

Dove  $G$ , il modulo di taglio, è definito come

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

e  $\mu$  è definito come

$$\mu = 2G \frac{\nu}{1-\nu}.$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \end{pmatrix} \quad \text{sono le forze di volume.}$$

Questo rappresenta un sistema di PDE ellittico ( $u$  è bidimensionale), nel quale bisogna solo impostare il modo di applicazione **Structural Mechanics, Plane Stress** e quindi inserire i parametri  $E$  e  $\nu$  e le eventuali forze di volume  $\mathbf{k}$ .

In questo modo possiamo anche risolvere problemi di autovalori, descritti come

$$-\nabla \cdot (\mathbf{c} \otimes \nabla \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{d} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

Nelle specifiche del materiale è possibile anche specificare la densità  $\rho$ .

Oltre a risolvere per u vengono anche determinati 15 espressioni di tensori scalari:

2)  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$

3)  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$

4)  $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$

5)  $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

6)  $e_{xx}$ , lo strain in direzione x- ( $\epsilon_x$ )

7)  $e_{yy}$ , o strain in direzione y- ( $\epsilon_y$ )

8)  $e_{xy}$ , lo strain di taglio ( $\gamma_{xy}$ )

9)  $s_{xx}$ , lo stress in direzione x- ( $\sigma_x$ )

10)  $s_{yy}$ , lo stress in direzione y- ( $\sigma_y$ )

11)  $s_{xy}$ , lo stress di taglio ( $\tau_{xy}$ )

12)  $e_1$ , il primo strain principale ( $\epsilon_1$ )

13)  $e_2$ , il secondo strain principale ( $\epsilon_2$ )

14)  $s_1$ , il primo stress principale ( $\sigma_1$ )

15)  $s_2$ , il secondo stress principale ( $\sigma_2$ )

16) von Mises, lo stress efficace di von Mises  $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$ .

Il problema impostato tramite FEM consente, applicando la reale geometria del reservoir, consente pertanto di calcolare in maniera abbastanza rapida, per ogni nodo del triangolo della Mesh, i valori di stress sul piano in direzioni x ed y,  $s_{xy}$  e di avere già

una stima degli stress principali. In questo modo, le matrici ottenute, possono facilmente essere elaborate per l'applicazione della valutazione di criteri di rottura, e per la determinazione di comportamenti elasto-plastici della matrice.

Uno stato deformativo nel quale non vi siano spostamenti in direzione z, e dove gli spostamenti in direzione -x e -y siano funzioni di x e y ma non di z è definito come *plane strain*. La relazione stress-strain è solo leggermente differente rispetto al caso di *plane stress*, ma vengono utilizzati gli stessi tipi di parametri.

Le differenze tra le equazioni di *plane stress* e di *plane strain* sono:

- il parametro  $\mu$  nel tensore c è definito come

$$\mu = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu}.$$

- lo stress efficace di von Mises è calcolato come

$$\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\nu^2 - \nu + 1) + \sigma_1 \sigma_2 (2\nu^2 - 2\nu - 1)}.$$

I problemi di *plane strain* sono solitamente meno comuni rispetto ai problemi di *plane stress*. Un esempio è dato da una sezione di un tunnel sotterraneo che ricade lungo l'asse z. Esso si deforma essenzialmente in condizioni di *plane strain*.

Impostando quindi nel FEM gli stessi parametri meccanici utilizzati per la modellazione semianalitica dell'inclusione equivalente ed utilizzando la reale geometria del reservoir, impostando le condizioni al contorno, sono stati risolti gli integrali ellittici per il problema elastico in approssimazione di *plane strain*. Gli output sono usati successivamente elaborati per ottenere una mappatura del parametro della variazione dello Sforzo Critico di Coulomb.

## **CAPITOLO 5**

### **APPLICAZIONE E VALIDAZIONE DI UNA NUOVA METODOLOGIA DI CARATTERIZZAZIONE GEOLOGICA E GEOMECCANICA SUL SITO DI COLLALTO STOCCAGGIO**

#### ***5.1 INTRODUZIONE***

Le metodologie descritte nel capitolo precedente forniscono la base conoscitiva ed analitica per risolvere il problema scientifico alla base del progetto di studio di questa tesi.

L'influenza delle variazioni di pressione e stress nel reservoir, la sua geometria, il contrasto con le rocce che lo circondano, le caratteristiche geologiche della formazione del reservoir e le sue proprietà geomeccaniche sono tutti fattori che ne influenzano da un lato le performance, in termini di volumi stoccati, efficienza di processi, strategie di stoccaggio ecc.. dall'altro i potenziali rischi in termini di stress indotti, subsidenza, fratturazione del caprock, microsimicITÀ indotta o attivata.

In questo capitolo verrà descritta, testata e valutata una metodologia di analisi geologica e geomeccanica per uno reservoir reale adibito a sito di stoccaggio di gas naturale (Collato Stoccaggio - di proprietà di EDISON STOCCAGGI S.p.A.) per affrontare e determinare i fattori che potenzialmente possono creare rischi legati all'attività di stoccaggio.

In questo capitolo sono definiti, descritti e testati gli step concettuali ed analitici (geologico, semi-analitico e numerico) utilizzati per questo studio:

- Dapprima verrà caratterizzato geologicamente il reservoir: litologia, caratteristiche petrofisiche e geomeccaniche, geometria, ed “analisi di vita” del reservoir (produzione, pressione) sono state utilizzate per definire, alla scala del reservoir, il comportamento tra deformazione e stress al suo interno. I risultati dell’analisi geologica (variazione di volume, variazione di pressione, geometria e caratteristiche petrofisiche) fornisco i dati di input per lo metodo semi-analitico successivo.
- Contestualmente verrà trattata l’analisi dell deformazione della superficie topografica: tramite l’analisi e la elaborazione di dati forniti dal gestore dello stoccaggio, questo dato verrà utilizzato dapprima per l’analisi e la comprensione della “trasmissione” della deformazione nel reservoir al pacco di rocce che lo dividono dalla superficie topografica, e successivamente verrà utilizzato come termine di paragone per la bontà dei modelli semi-analitici e numerici utilizzati in seguito.
- In seguito verrà applicata una modellazione semi-analitica basata sul metodo della inomogeneità (come descritto da Eshelby e sviluppato da Mura) per il reservoir immerso in uno spazio elastico isotropo omogeneo infinito: i limiti dell’assunzione di spazio infinito su un caso reale verranno inoltre discussi. Questa analisi consentirà di definire i campi elastici (stress, strain e spostamento) nel caprock indotti dalla variazione di deformazione nel reservoir: i valori di spostamento lungo il bordo del reservoir costituiscono i valori di condizioni al contorno per la successiva analisi agli elementi finiti.
- L’analisi agli elementi finiti viene condotta su una sezione 2D con geometrie reali, per determinare le aree di maggiore instabilità generate dalla variazione di strain nel reservoir; questa analisi viene condotta tramite un metodo di mappatura dello stress di Coulomb, intesa come variazione dei rapporti tra stress normali e di taglio lungo la

sezione considerata. Il modello consentirà anche di confrontare i risultati ottenuti numericamente con quelli ottenuti semi-analiticamente per valutarne appieno la bontà.

Le principali innovazioni scientifiche derivanti da questo studio, sono costituite dall'applicazione di un modello geomeccanico per la valutazione dei campi elastici indotti dal reservoir, attraverso l'applicazione del metodo di inomogeneità tridimensionale: a conoscenza dell'autore, nonostante il metodo sia già stato utilizzato in precedenza con lo stesso scopo, ma procedura utilizzata in questo lavoro rappresenta il primo tentativo di risoluzione del problema in uno spazio tridimensionale e per geometrie ellissoidali con assi di differenti dimensioni.

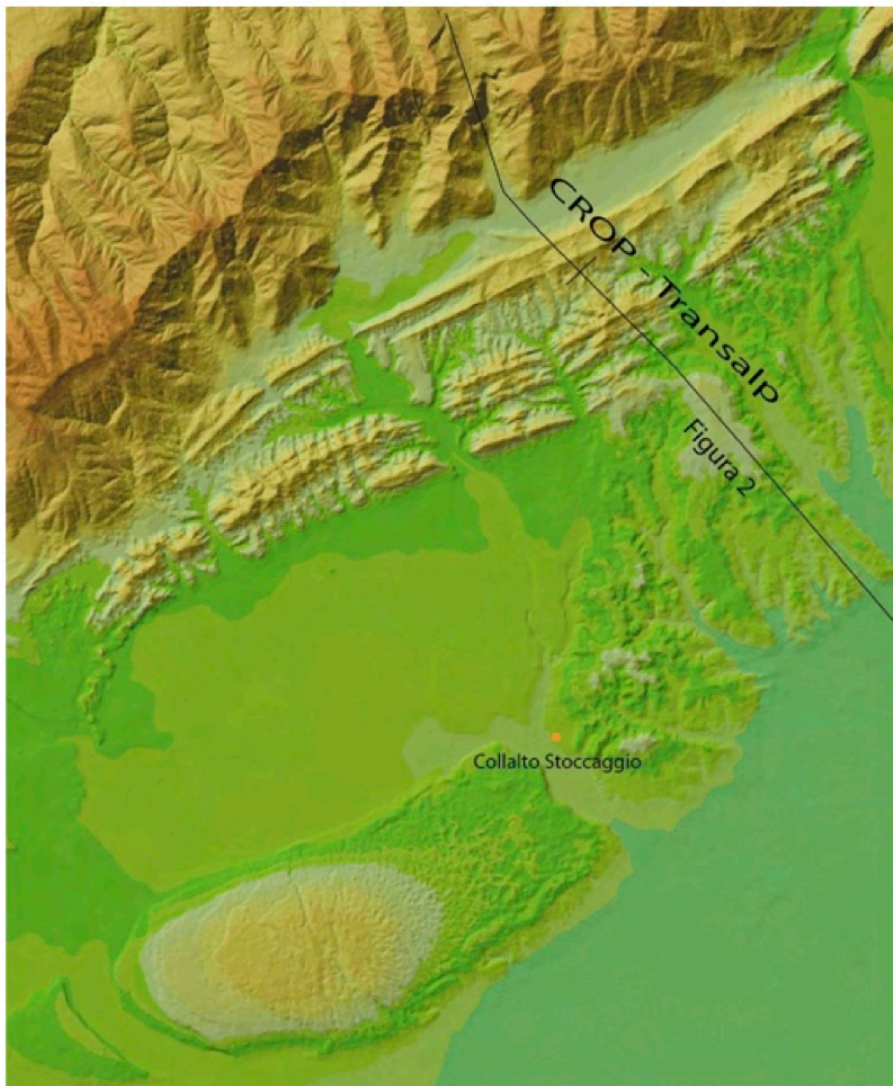
La determinazione del comportamento della curva stress-strain nel reservoir costituisce un bellissimo esempio di analisi della deformazione elasto-plastica: questo tipo di comportamento è infatti solitamente analizzabile tramite prove in laboratorio, su campioni, con condizioni al contorno controllate. In questo caso però si è in grado di non perdere le informazioni a scala di reservoir e si è in grado di fornire informazioni importanti sulle deformazioni (e quindi sui volumi) non più recuperabili dal reservoir.

Viene inoltre valutato il comportamento della roccia di copertura in termini di trasmissione della deformazione, e viene dimostrato come il caprock risenta ancora oggi della deformazione derivante da anni di produzione prima della riconversione a stoccaggio del reservoir.

## ***5.2 INQUADRAMENTO***

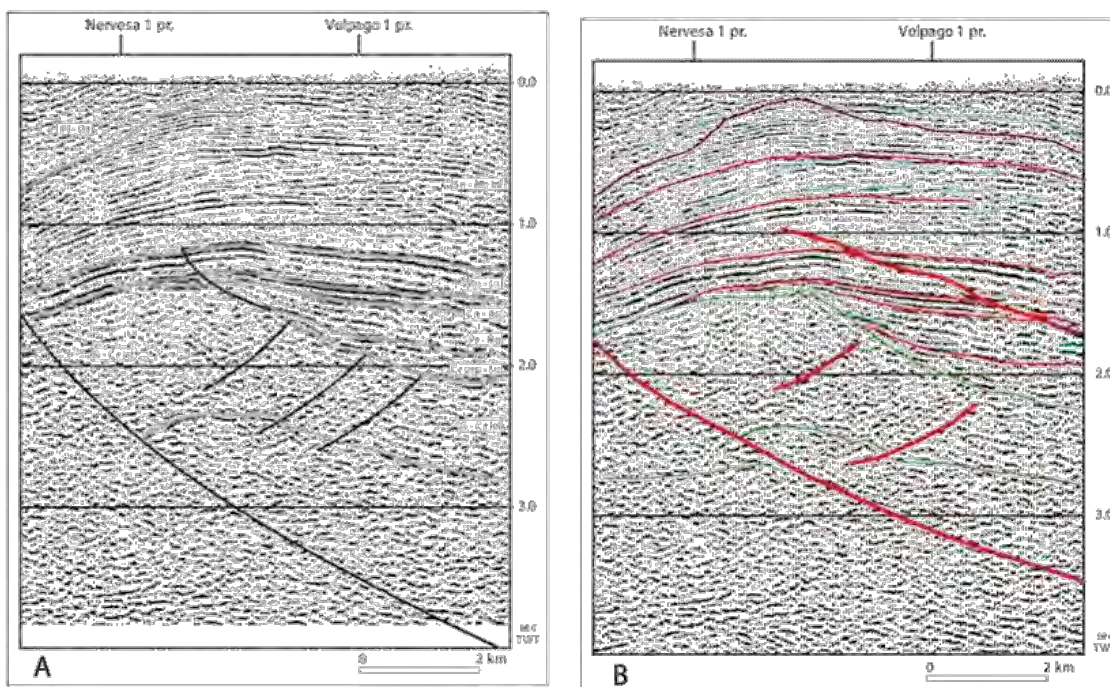
Le colline di Susegana – Collalto nel cui sottosuolo si sviluppa il giacimento “Conegliano” costituiscono i primi rilievi del versante meridionale delle Alpi. Si trovano a Nord di Treviso nell'omonima Provincia. Esse sono divise dalla collina del Montello dalla valle del Piave che attraversa quest'ultimo rilievo prealpino prima di svolgere il suo percorso nella pianura. Nonostante la contiguità, l'appartenenza alla

medesima struttura geologica e la stessa costituzione litologica (vedi capitolo successivo) i due rilievi conglomeratici in destra ed in sinistra del Piave sono molto differenti come morfologia e aspetto del paesaggio. La collina del Montello è infatti caratterizzata dall'assenza di importante erosione canalizzata, cioè di corsi d'acqua, mentre presenta un'alta densità di doline che documentano l'importanza del drenaggio carsico. In destra Piave, le colline di Susegana non mostrano segni di carsismo e sono attraversate da un efficiente drenaggio da Nord verso Sud (Fig. 5.1). Questa diversità ha una motivazione geologica che verrà discussa in seguito.



**Figura 5.1** modello digitale del terreno (DTM) dell'area prealpina tra il Montello e Conegliano. La traccia nera indica la sezione di Figura 5.3 . La porzione di questa linea da Sud al trattino trasversale indica la porzione dei dati in Figura 5.2 .

In Figura 5.2 A è riportata l'interpretazione di questo segmento della linea Transalp, che attraversa il settore di Conegliano, tarata con i pozzi Volpago e Nervesa, tratta da Fantoni et al. (2002). Questa linea è stata reinterpretata in occasione di questo lavoro e viene presentata in Figura 5.2 B. In essa si vede la struttura plicativa nota col nome di anticlinale del Montello e la faglia (sovrascorrimento) che la genera ad una profondità tra i 2 e i 3 secondi. Nell'interpretazione di Figura 5.2 B si nota una faglia più superficiale tra 1 e 2 secondi con un rigetto che tende a diminuire verso l'alto stratigrafico. Questa struttura, tende a scomparire in prossimità dell'intervallo arenaceo tortoniano che costituisce il reservoir del giacimento; essa potrebbe corrispondere alla faglia NE – SW che taglia l'orizzonte A così come è stata ricostruita negli studi del giacimento. Da notare che questi studi dimostrano che questa faglia non è presente nell'orizzonte E, il più alto stratigraficamente (vedi paragrafo successivo).



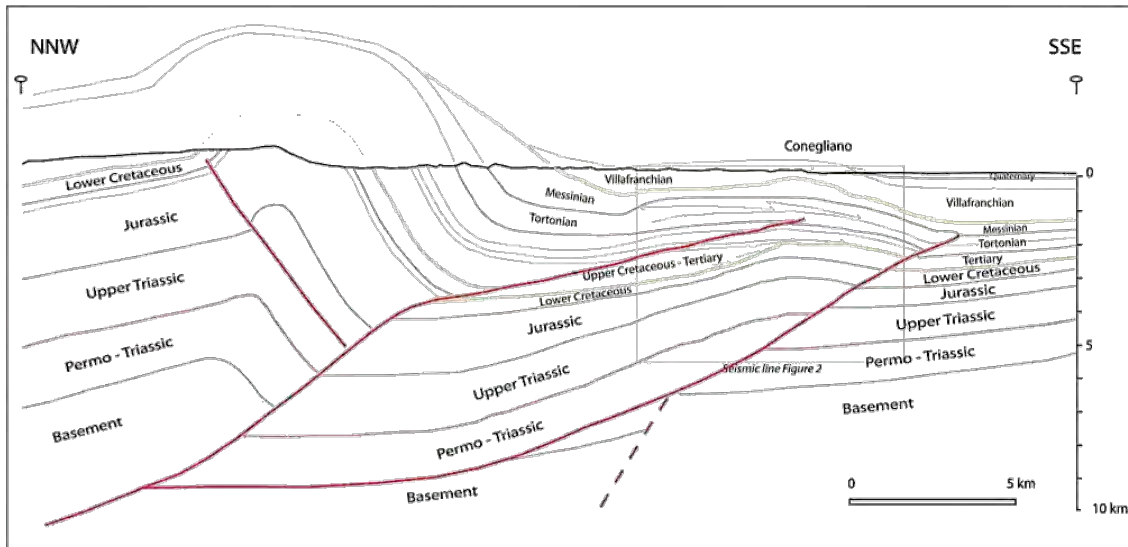
**Figura 2** – Profilo Transalp, nel tratto che attraversa la struttura del Montello (vedi Figura 5.1 per la localizzazione) con A) interpretazione di Fantoni et al. (2002), e B) quella adottata in questo lavoro.

Ancora più in alto, tra 0,6 e 0,8 sec, nella linea sismica sono evidenziati alcuni riflettori cliniformi, di cui Fantoni et al. (2002) facevano rapida menzione nel testo. Le discordanze di down- e toplap delineano una sequenza sismica progradante, da mettere in relazione all'avanzamento di un sistema deltizio nel tardoTortoniano. Il dislivello



documentato da queste clinoforni è di circa 150 m: questa era la paleobatimetria dei corpi arenacei sottostanti che costituiscono il reservoir. Infine tra 0,5 e 0,1 sec si vede nettamente una discordanza che separa due corpi conglomeratici di età diversa: quello inferiore, in continuità di sedimentazione sopra il delta tortoniano, è quindi del Messiniano (il cosiddetto Pontico degli autori precedenti e del foglio geologico al 1:100.000), quello superiore si correla all'unità villafranchiana di Venzo (1977) che a Cornuda ricopre le peliti marine a foraminiferi del passaggio Pliocene inferiore – Pliocene medio. Si ipotizza che sia proprio questa superficie di discordanza, legata ad una lunga emersione di una paleo - collina del Montello della durata circa 2,5 Ma, a costituire l'attuale superficie topografica della collina del Montello. La presenza di un fitto reticolato di doline in destra Piave sarebbe dunque da mettere in relazione alla riesumazione di una superficie incarsita possibilmente in un lungo periodo particolarmente umido e caldo come il Messiniano sommitale ed il Pliocene inferiore. In sinistra Piave, invece, affiora il corpo di conglomerati del Villafranchiano, che non mostrano evidenze di carsismo, e sono efficacemente solcati da un reticolo di drenaggio. Poiché gli studi di sottosuolo non fanno vedere grandi variazioni di quota in senso parallelo alla struttura attraverso la valle del Piave, vale a dire la struttura anticlinale non ha importanti culminazioni o depressioni periclinliche a cavallo della valle del Piave, è possibile ipotizzare che la variazione di quota della superficie di discordanza, più bassa in sinistra Piave di qualche centinaio di metri, sia legata ad una maggiore erosione locale del corpo conglomeratico inferiore, avvenuta tra Messiniano superiore e Pliocene inferiore.

Sulla base del profilo CROP-Transalp, è possibile costruire una sezione geologica, dove i principali segnali della sezione in tempi sono stati convertiti in profondità usando la taratura dei pozzi Volpago 1 e Cavalletto 1 e 2, nonché valori di letteratura per le unità mesozoiche del settore Nord (Passo San Boldo). Questo profilo (Figura 5.3) permette di tratteggiare brevemente l'evoluzione geologica dell'area in esame.



**Figura 5.3** Sezione geologica del settore interessato dalla struttura del Montello e quella di Bassano, il riquadro evidenzia l'area di interesse del reservoir. Profilo geologico tratto dalla sezione sismica CROP – Transalp riportato in profondità. Per la traccia del profilo si veda Figura 1. Nel riquadro piccolo è tracciato il limite dei dati sismici presentati in Figura 2B.

Il profilo (Fig. 5.3) mostra la struttura del Montello come un blind thrust, cioè un sovrascorrimento cieco che non raggiunge la superficie. In questo tipo di strutture, la deformazione avviene per scivolamento dei due lembi in profondità e, man mano che la struttura si propaga verso l'alto, la deformazione è assorbita in modo plicativo: dunque il rigetto della struttura diminuisce dal basso verso l'alto. La struttura del Montello è associata cinematicamente ad una più importante struttura nota come sovrascorrimento di Bassano, di cui rappresenta una propaggine di minor entità. Anche il sovrascorrimento di Bassano è una struttura cieca, ma lo spessore di roccia coinvolta è maggiore e altrettanto maggiore è il raccorciamento a essa associato. In particolare, la grande piega visibile nel profilo, e nota come “flessura frontale” costituisce l'anticlinale di rampa, caratterizzata da geometrie tipiche delle fault propagation fold, cioè di pieghe per propagazione di faglia.

La stratigrafia della successione precedente gli eventi compressivi, cioè dal Mesozoico al Tortoniano, è dominata dal passaggio, da Nord verso Sud dal dominio paleogeografico noto come Bacino di Belluno a quello noto come Piattaforma Friulana. La caratteristica principale di quest'ultimo è un minore spessore di sedimenti, con evidente situazione di chiusura degli spessori di questo intervallo verso Sud, da circa 8 a

4 km circa. E' probabile che questa diminuzione di spessore fosse controllata da alcune strutture distensive attive durante l'evoluzione del rifting tra il Trias ed il Giura (vedi interpretazione profonda nel profilo di Figura 3). A partire dal Serravalliano, ma soprattutto tra Tortoniano e Pliocene, si sviluppa un potente prisma sedimentario che si ispessisce verso Nord a causa della flessurazione dell'avampaese sudalpino. Questo cuneo di sedimenti è evidente nel profilo, particolarmente nell'intervallo Tortoniano-Messiniano. In questo contesto si forma la successione che costituisce il reservoir del giacimento, che inizia a deformarsi precocemente a causa dell'attivazione della struttura del Montello.

La crescita della piega associata al sovrascorrimento di Bassano ha prodotto discordanze progressive nella successione Tortoniana-Pliocenica, descritte da autori precedenti e inserite nel disegno del profilo di Figura 3. Grazie a queste discordanze è stato possibile assegnare l'inizio della deformazione a un periodo tardo Tortoniano (circa 9 Ma) e retrodeformare la struttura al periodo Messiniano superiore (circa 5,5 Ma), quando si è originata la marcata discordanza già presentata in Figura 2. Il tasso di basculamento del lembo meridionale della piega calcolato sulla base di queste discordanze è costante nel tempo e di circa  $7^\circ/\text{Ma}$ . La discordanza sommitale del corpo Villafranchiano è di circa  $15^\circ$  e permette di stimare una età di circa 2 Ma (Pliocene sommitale) per il tetto di questa unità, fino ad oggi mai datato, e da molti autori ritenuto assai più recente (cf. Fantoni et al., 2002, Galadini et al., 2005). Inoltre, questa linea di ragionamento implica che il basculamento della piega, e con questo l'attività del sovrascorrimento, sia un processo ancora attivo. Infine, il profilo paleogeologico retrodeformato al Messiniano superiore, prima dell'accentuazione dell'anticlinale di rampa, indica un raccorciamento già intorno ai 4,5 km.

### ***5.3 IL SERBATOIO GEOLOGICO DI COLLATO : CARATTERISTICHE DEL GIACIMENTO***

Le caratteristiche petrofisiche, geometriche e strutturali del reservoir, descritte da molte relazioni di Edison (si vedano, tra le altre: "Campo di Conegliano – Stima volumetrica

del giacimento (aggiornamento” del Gennaio 1995 e “Campo di Conegliano – Aggiornamento dopo la perforazione dei pozzi Conegliano 15d, 19d, 20d” del giugno 1996) permettono di stilare una sintesi genetica del giacimento.

La deposizione degli strati che fanno da reservoir avvenne nel Tortoniano in ambiente di piattaforma continentale esterna a profondità intorno ai 150 m. In queste condizioni, alle peliti che costituiscono la decantazione tipica dei periodi tranquilli, si alternano depositi grossolani prodotti da piene fluviali particolarmente forti il cui carico solido poteva superare l'area deltizia, che si doveva trovare parecchi chilometri più a Nord, all'altezza di Belluno (Massari et al. 1986). Oltre alle piene, anche tempeste particolarmente forti o correnti tidali amplificate potevano mettere in sospensione materiale dal fronte deltizio. La geometria lenticolare di questi corpi che tendono a disporsi secondo un asse Nordovest-Sudest, perpendicolare alla linea di costa, ne documenta la genesi come sand ribbons. La sostanza organica terrestre trasportata insieme ai clasti costituisce la source, per lo più preservata negli intervalli fini. Questa interpretazione è preliminare e necessita di conferme dalle analisi degli isotopi stabili del Carbonio, attualmente in corso da parte di Edison. Nelle prime fasi di seppellimento, in condizioni aerobiche, l'attività batterica degrada la sostanza organica con produzione di metano e anidride carbonica che iniziano a disciogliersi nelle acque contenute nelle sabbie sigillate dalla deposizione degli strati pelitici. In una fase più avanzata della diagenesi, a partire da un seppellimento modesto (qualche decina di centimetri o qualche metro dall'interfaccia acqua-sedimento) si passa a condizioni anaerobiche per l'avvenuto consumo di ossigeno, fissato nell'anidride carbonica. In queste condizioni inizia l'attività di batteri anaerobi, che utilizzano l'anidride carbonica e producono ancora metano e acido solfidrico. L'allontanamento dalla soluzione di anidride carbonica impone la precipitazione di calcite (in questo caso ricca di ferro proveniente dalla sostanza organica vegetale) che costituisce il cemento precoce che borda i pori e crea la prima impalcatura della roccia. Contemporaneamente, precipita solfuro di ferro (pirite) causa la disponibilità di acido solfidrico e ferro.

Naturalmente per poter precipitare questi minerali, doveva essere presente in tutto il reservoir una efficace circolazione di acqua di strato. Questa era data dalla presenza di squilibri laterali di carico legati alla incipiente deformazione con la creazione della

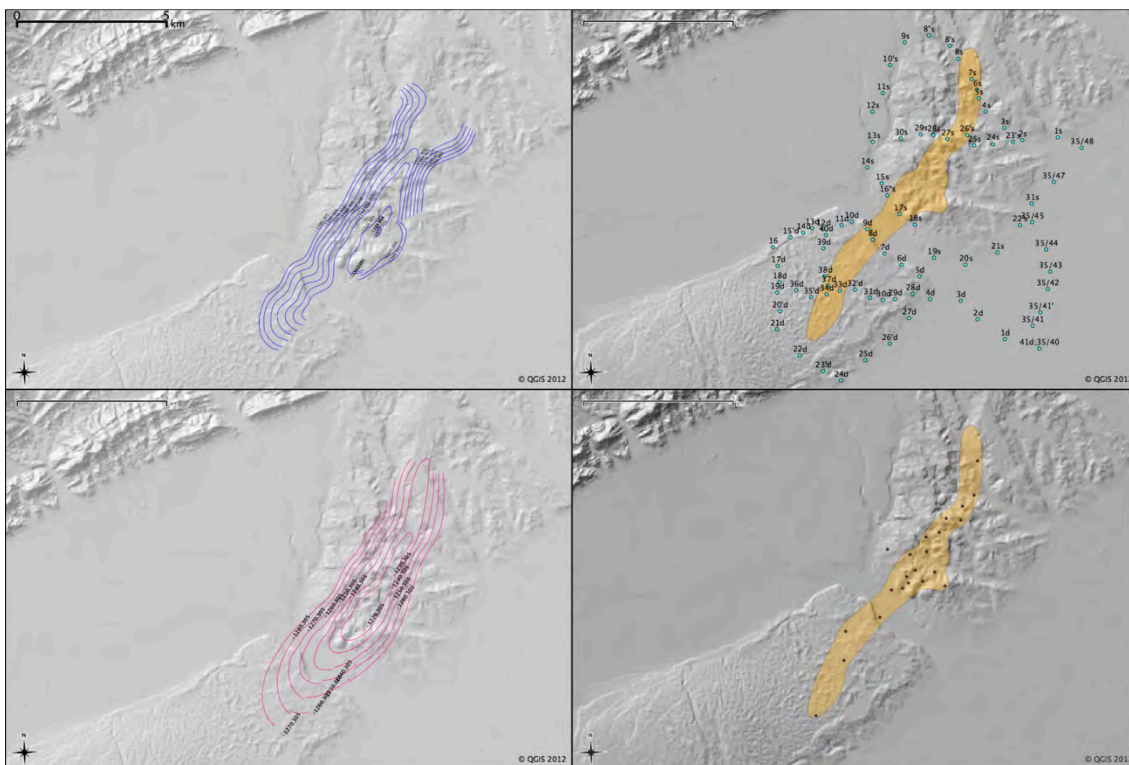
blanda anticlinale del Montello, in un contesto di buona porosità di tutto l'intervallo arenaceo. Il gas metano tendeva dunque in questa fase ad accumularsi nella trappola strutturale del culmine dell'anticlinale occupando la porosità residua e terminando localmente la diagenesi.

Nelle fasi finali della diagenesi, con il sollevamento e la deformazione negli strati tortoniani presenti a Nord nel lembo frontale dell'anticlinale di Bassano, il reservoir inizia a caricarsi di acqua meteorica, che immette nel sistema nuova anidride carbonica e calcio, permettendo la precipitazione e l'occlusione di tutti i pori del reservoir, eccezion fatta per il culmine dell'anticlinale, ove l'acqua non poteva arrivare per la presenza del gas intrappolato. Le diverse salinità riscontrate nei livelli mineralizzati del reservoir indicano differenti livelli di miscelamento con le acque meteoriche in una situazione di compartimentazione molto spinta. La variazione laterale di cementazione nel reservoir trova dunque una spiegazione nella competizione tra deformazione tettonica (formazione della trappola) e migrazione dei fluidi. Il momento privilegiato per questa fase diagenetica finale è il Messiniano superiore (tra 5,5 e 5,3 Ma), un periodo di forti precipitazioni e d'importante abbassamento del livello di base marino, capace di aumentare il carico idraulico sul reservoir.

### ***5.3.1 DATI GENERALI DEL GIACIMENTO***

Il campo a gas di CONEGLIANO si estende nella concessione Collalto posta a cavallo del fiume Piave, nell'area compresa tra i comuni di Nervesa della Battaglia, Falzé di Piave e Montello, in provincia di Treviso (figura 5.4 ).

Il campo fa parte della Concessione "Collalto", conferita a Edison Gas con D.M. in data 29/04/1980, con decorrenza a partire dal 06/08/1978 e durata trentennale. L'operatore del campo è la società EDISON Gas (100%). Nel giugno del 1994 è stata accordata la concessione "Collalto Stoccaggio" per la conversione del campo alle attività di stoccaggio sotterraneo del gas naturale.



**Figura 5.4** Dall'alto a sinistra in senso antiorario: isobate del top del livello A; isobate del top del livello E; disposizione dei pozzi nella concessione Collalto Stocaggio e traccia del reservoir; localizzazione dei punti della rete di livellazione ottica per il monitoraggio delle deformazioni superficiali. Sfondo DEM, la linea nera in alto a sinistra rappresenta 5 km

Nella concessione sono stati perforati 23 pozzi, tutti produttivi ad eccezione dei pozzi CN11d (sostituito con il pozzo CN11d S.T.) e CN18d, che presentava scarse prestazioni.

L'inizio della ricerca di idrocarburi nell'area di Collalto risale al 1960, con la perforazione del pozzo Volpago 4 da parte della Società Piave. Successivamente, dopo una lunga fase di stasi, l'attività di ricerca venne ripresa dalla joint-venture ELF, MONTEDISON, APIT (FINA), e GULF ITALIA che perforò all'interno dell'adiacente concessione di Montebelluna i pozzi Cavalletto 1 e 2 nel 1974, Cavalletto 3 nel 1975 e, dopo l'ingresso nella joint-venture della PETROREP, i pozzi Vittorio Veneto 1 tra il 1975 e il 1976 e Cavalletto 4 nel 1977.

Nel 1980 la MONTEDISON, che con la rinuncia delle altre compagnie dal 1978 rimase titolare e operatore unico della concessione di Montebelluna, ottenne anche la Concessione "Collalto".

Nel 1981 venne ripresa l'attività esplorativa dell'area con la perforazione del pozzo CN1 (Conegliano 1), che risultò produttivo e rappresentò il pozzo di scoperta del campo di CONEGLIANO.

La produzione primaria iniziò nel mese di maggio del 1983 dal pozzo CN4 (Conegliano 4). Attualmente la Società EDISON Gas detiene il 100% della concessione "Collalto".

Il campo di Conegliano è costituito da arenarie carbonatiche e dolocalcareni più o meno argillose (F.ne Marne di Tarzo), di ambiente deltizio (arenarie di delta front e siltiti di prodelta) ed età tortoniana (Miocene sup.). Sono presenti sette livelli mineralizzati idraulicamente separati (pools), con spessori variabili tra un massimo di circa 15 m in corrispondenza al depocentro della struttura e un minimo di circa 1 m .

Tutti i livelli hanno spessori metrici:

1. Pool A;
2. Pool B (suddiviso a sua volta arealmente in due unità idraulicamente distinte, separate da una fascia argillosa, denominate pool Bnord e pool Bsud);
3. Pool C;
4. Pool D (suddiviso a sua volta verticalmente in due unità idraulicamente distinte, separate da un'intercalazione argillosa, denominate pool D1 e pool D2);
5. Pool E;
6. Pool F;
7. Pool G.

I pool sono stati denominati a partire dal più profondo (A) al più superficiale (G) e si incontrano ad una profondità compresa tra i 1200 e i 1400 msl. I livelli più importanti risultano essere il pool A ed il pool E, rispettivamente contenenti quasi il 60% e circa il 17% del gas in posto di tutto il campo.

Dopo le operazioni di trattamento e di compressione il gas prodotto viene convogliato per la distribuzione alla centrale di raccolta di Collalto, ubicata in prossimità del piazzale del pozzo CN4.

L'avvio della produzione primaria del campo di CONEGLIANO è iniziata in data 02/05/1983 dal pozzo CN4, completato all'interno del pool E.

#### - Pool A

Il pool A costituisce il livello principale e più profondo del campo. La sua profondità media è pari a 1350 m ss. Il livello è costituito da arenarie calcareo-dolomitiche a cemento carbonatico, con grana medio-grossa passante talora a sabbia calcareo-dolomitica e intercalazioni sottili di argilla più o meno siltosa.

Gli spessori totali del livello variano tra 13.5 m (pozzi CN21d e CN22d) e 6 m (CN6); lo spessore massimo del net pay (10.5 m) è stato riscontrato ai pozzi CN1 e CN22d.

La ricostruzione delle isopache mostra un evidente trend di ispessimento in direzione NW, normale rispetto all'asse della struttura, mentre verso i fianchi SW e NW si rileva un peggioramento delle caratteristiche petrofisiche.

Il contatto originale gas/acqua (OGWC) è stato rinvenuto alla quota di 1382 m ssl.

#### - Pool B

Il pool B è costituito da un'arenaria sabbiosa compatta, calcareo-dolomitica, con presenza di granuli quarzitici, intercalata talora a sottili livelletti di argilla.

Il livello presenta uno spessore piuttosto contenuto ma pressoché costante in tutto il campo.

Il pool mostra una evidente zona di argillificazione nella fascia centrale del campo, che determina una compartimentazione areale con la presenza di due trappole e di due pools distinti, denominati Bnord e Bsud.

Lo spessore massimo del net-pay nella zona nord del pool è pari a 2 m (ai pozzi CN6 e CN13d), mentre nella zona sud è di 1.5 m (zona pozzo Cavalletto 4).

All'interno del pool B non è stata individuata la posizione originaria dell'acquifero. La massima profondità alla quale è stato rinvenuto il gas (GDT, gas-down-to) è pari a 1367 m ssl, in corrispondenza del pozzo CN5 (pool Bsud).

#### - Pool C

Il pool C costituisce un "complesso sabbioso" che presenta generalmente caratteristiche petrofisiche estremamente scadenti (permeabilità praticamente trascurabile). Il livello si



è rivelato mineralizzato soltanto al pozzo Cavalletto 1; il pozzo si è esaurito dopo una produzione di circa 10 106 mSC3. Per tale livello non è disponibile alcuna stima volumetrica e, considerate le sue caratteristiche, non è stato incluso nella fase di modellizzazione del presente studio.

#### - Pool D1

Il pool D1 è un livello di arenaria calcareo-dolomitica, con granuli medio-fini subarrotondati e tracce di fossili. Il pool presenta un forte peggioramento delle caratteristiche petrofisiche verso NE e SO.

Lo spessore del livello varia tra un massimo di 8.5 m (pozzo CN7) e 2.5 m (CN6 e CN10); il net pay risulta massimo nella zona delimitata dai pozzi CN3, CN9 e CN22d ed è pari a 4 m.

La posizione dell'acquifero venne originariamente individuata alla profondità di 1276.5 m ss. Il livello D1 è stato incluso nella fase di modellizzazione del presente studio con la denominazione di "pool D".

#### - Pool D2

Il pool D2 si colloca tra i livelli minori del campo, in quanto risulta estremamente ridotto sia come estensione areale sia come spessore, con un net pay medio di circa 50 cm.

Litologicamente il livello è costituito da sabbie arenacee calcareo-dolomitiche intercalate da sottili livelli argillosi. Il pool, indiziato di mineralizzazione dai logs elettrici registrati in cinque pozzi del campo, non ha mai prodotto. Per tale livello non è disponibile alcuna stima volumetrica e, considerate le sue caratteristiche, non è stato incluso nella fase di modellizzazione del presente studio.

#### - Pool E

Il pool E rappresenta il secondo livello per importanza del campo ed è costituito da sabbia calcarea e da arenarie calcaree a cemento carbonatico.

Lo spessore totale del livello varia da un massimo di 13.5 m (pozzo CN4) ad un minimo di 2 m (pozzi CN13 e CN23). Lo spessore massimo è individuato nell'area dei pozzi

CN4 e CN8 e decresce nettamente nelle direzioni NE, SE e SW. Il net pay massimo si attesta intorno ai 9 m in corrispondenza del pozzo CN4.

La posizione originale dell'acquifero non è stata individuata in alcun pozzo. La massima profondità alla quale è stato rinvenuto il gas (GDT, gas-down-to) corrisponde alla quota di 1260 m ss.

#### - Pool F

Il pool F è un livello poco importante con spessore medio di soli 1.5 m. Mostra indizi di mineralizzazione al solo pozzo CN3. Il livello F non è stato incluso nella fase di modellizzazione del presente studio.

#### - Pool G

Il pool G è risultato mineralizzato in corrispondenza dei pozzi CN11d S.T., CN12 e CN16, perforati in prossimità dell'alto strutturale.

L'andamento delle isopache non si discosta molto dai livelli sottostanti e mostra un ispessimento in direzione NW.

La posizione originale dell'acquifero è stata individuata alla profondità di 1189 m ss.

#### *Caratteristiche petrofisiche dedotte da carota*

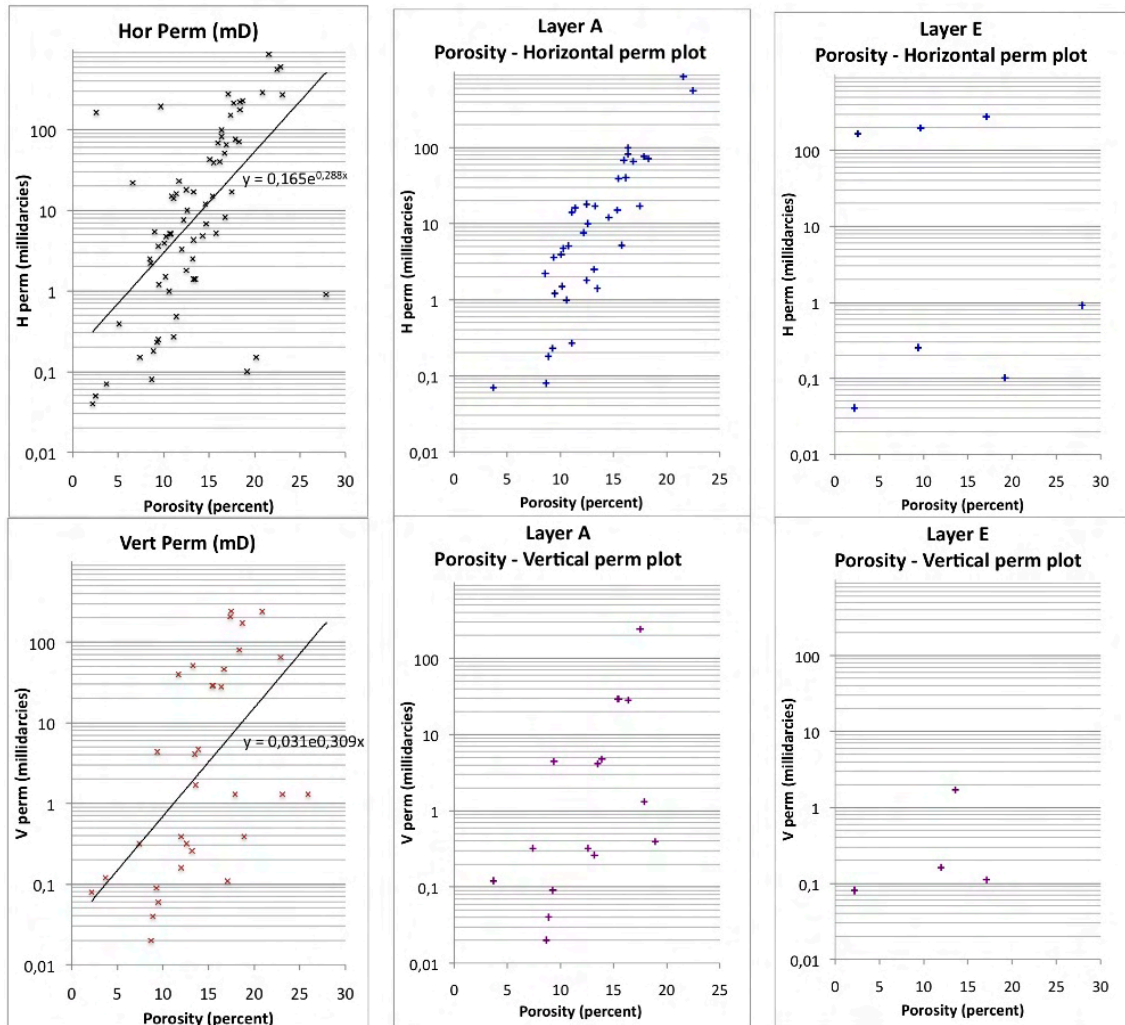
Accanto all'analisi dei dati di produzione ho proseguito ad una migliore definizione delle caratteristiche petrofisiche delle rocce serbatoio dei livelli attualmente interessati dall'attività di stoccaggio; in particolare sono state ricalcolate la porosità e permeabilità relative a campioni di carote provenienti dal pozzo Conegliano 7, situato nel centro del campo, in prossimità del culmine dell'anticlinale che caratterizza la trappola stratigrafica.

Nei seguenti plot (figura 5.5 ) vengono riportati i valori di porosità e permeabilità orizzontali e verticali per l'intero intervallo de reservoir, e successivamente quelli riferiti ai due livelli di interesse:

i grafici riportati evidenziano le correlazioni tra porosità e permeabilità (log) su campioni di carota tra 1425 e 1574 metri di profondità sull'intero campo e sui livelli destinati allo stoccaggio.

Le porosità variano tra 2 e 28% con valori di permeabilità massimi di quasi 1 Darcy. Le correlazioni risultano abbastanza buone per il campo in generale, e per il livello A; si osservano altresì correlazioni basse per il livello E, tenendo tuttavia presente la scarsità di dati disponibili.

La permeabilità orizzontale risulta in generale meglio correlata, rispetto a quella verticale, con la porosità.



**Figura 5.5** correlazioni porosità e permeabilità per i livelli di stoccaggio del campo di Collalto

#### **5.4 STORIA PRODUTTIVA, ANDAMENTO PRESSIONI E MONITORAGGIO DEFORMAZIONI (SUBSIDENZA)**

##### *- Produzione*

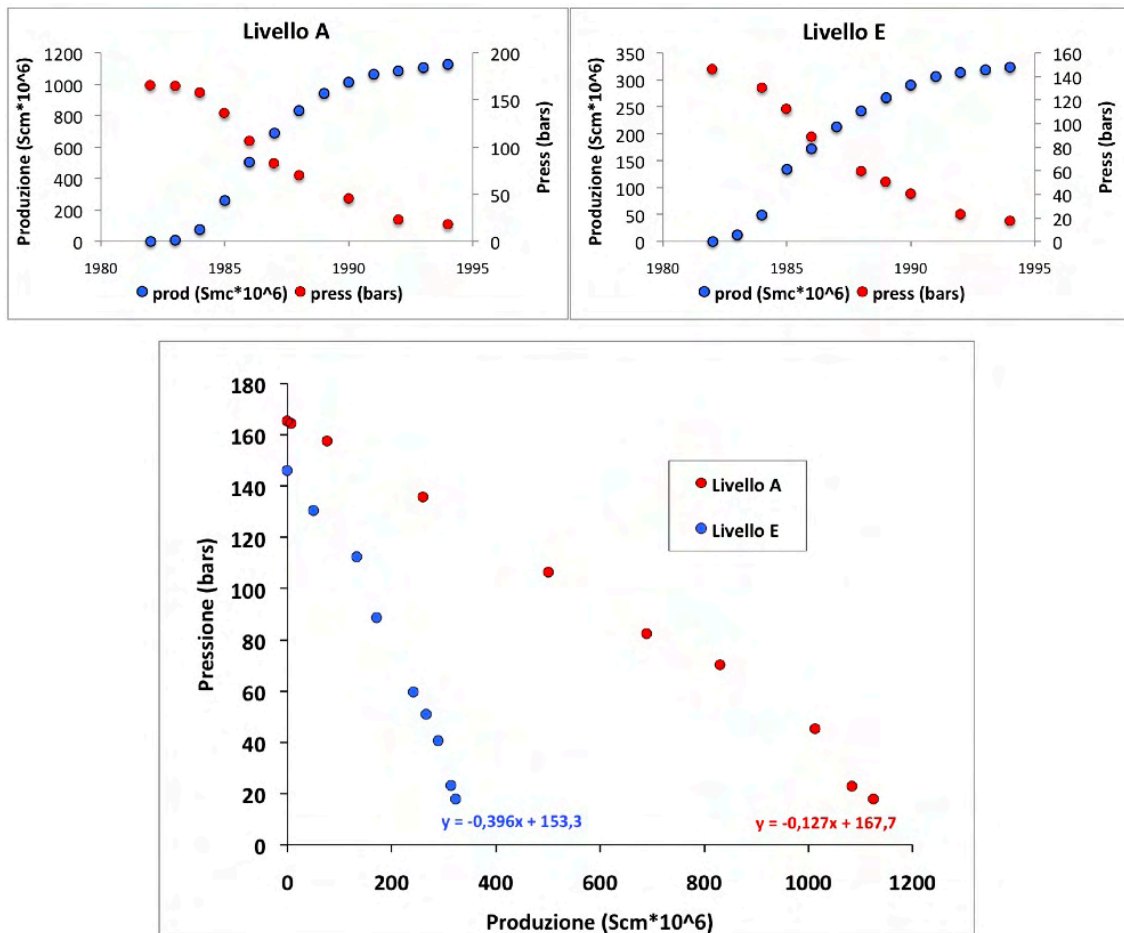
I livelli che maggiormente hanno inciso sulla produttività del campo sono i livelli A (il più profondo del campo) ed il livello E, tra i più superficiali: rispettivamente le produzioni totali di questi livelli si sono attestate intorno ai 1550 e 337 MSmc di gas (milioni di metri cubi Standard).

Le percentuali relative ad ogni livello ammontano a 61, 17, 6, 9, 0, 4, 2 % rispettivamente per i livelli A,E, Bnord, Bsud, C, D1, G.

Poiché i due livelli A ed E costituiscono i pools nei quali si effettuano le operazioni di stoccaggio, ho proceduto ad un ulteriore approfondimento delle loro storie produttive, analizzando i dati relativi alle variazioni di pressione derivanti dall'attività estrattiva: i grafici che seguono mostrano gli andamenti delle pressioni e della produzione dei livelli fino al 1994, anno in cui sono poi iniziate le prove di stoccaggio.

Com'è possibile notare dai plots in figura 5.6, i trend positivi di produzione (in blu nei primi due plot in alto) sono bilanciati da trend negativi nelle pressioni del reservoirs (pressure drop, in rosso): per il livello A, la variazione di pressione ammonta a quasi 148 bars, dai quasi 168 di inizio produzione ai 17,65 di chiusura produzione, e, per il livello E una variazione di pressione di quasi 130 bars, da 146 a 17,65.

I tassi di pressure-drop ammontano a circa 0,13 e 0,40 bars di pressione (o MPa) per ogni milione di metro cubo di gas Standard prodotto, per il livello A ed E rispettivamente.



**Figura 5.6** in alto a sinistra: livello A - andamento temporale della produzione e della pressione nel reservoir ; in alto a destra livello E - andamento temporale della produzione e della pressione nel reservoir In basso correlazione pressione - produzione (in milioni di metri cubi standard di gas) per i livelli A ed E

*- Stoccaggio*

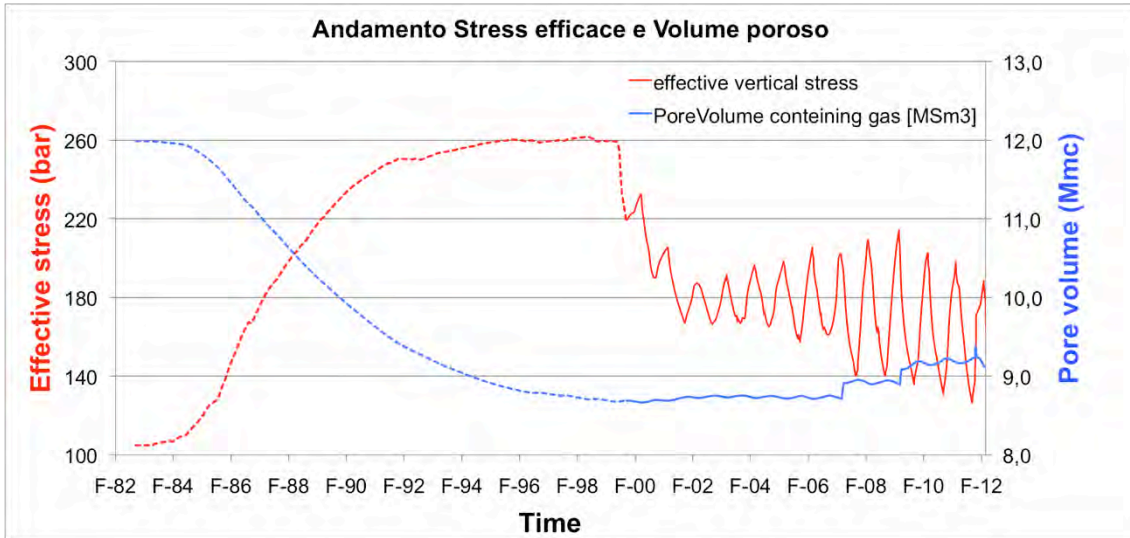
Il campo di Conegliano, è stato riconvertito a sistema di stoccaggio di gas naturale, a partire dal 1993, nel livello E e successivamente dal 1998 nel livello A. La principale caratteristica delle prime fasi dello stoccaggio, per entrambi i livelli consiste nella immissione nel reservoir, dagli stessi pozzi produttivi, di una quantità di gas tale da fornire un sistema di ammortamento, caratterizzato dal cosiddetto “gas cuscino” . Attualmente lo stoccaggio lavora con un cushion gas pari a quasi il 50% del GOIP originario dei due livelli (implica che il 50 % del volume del reservoir non sia

direttamente connesso allo stoccaggio); il cushion gas ha un duplice ruolo: da un lato consente di tenere occupati i volumi porosi nelle fasi di estrazione del gas naturale, evitando deformazioni plastiche o compattazione nelle aree dove successivamente verrà re-iniettato gas naturale; dall'altro, fornisce una base per il build-up di pressione necessaria alla successiva fase di estrazione del gas. Inoltre, il cushion gas "isola" il working gas dall'eventuale influenza dell'acquifero (influenza praticamente nulla nel reservoir di Collalto).

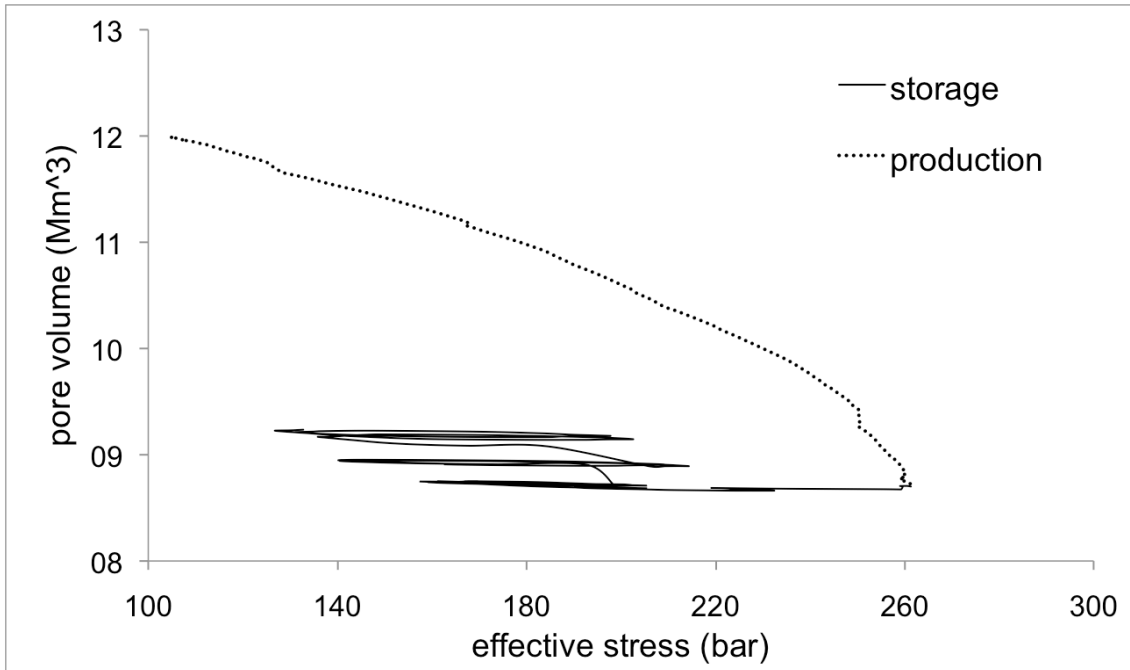
Per lo stoccaggio di Collalto, i cicli iniezione-svaso sono semestrali : la fase di pompaggio di fluido nel reservoir inizia tra marzo ed aprile, terminando tra ottobre e novembre; generalmente tra una fase e l'altra dello stoccaggio il reservoir viene tenuto "fermo" per eventuali lavori di manutenzione o monitoraggio; in inverno, a partire dalle richieste inviate dal Ministero delle Attività Produttive, vengono estratti i quantitativi necessari ed immessi direttamente nella rete metanifera.

#### *- Deformazioni del reservoir*

Sulla base dei dati ottenuti dalle modellazioni di reservoir (ed in particolare tramite la stima del GOIP dinamico) è stato ricostruito l'andamento del volume poroso del reservoir; il grafico in figura 5.7 mostra l'andamento temporale dello stress verticale efficace e del volume poroso (pore volume) del reservoir; si può notare come nella fase produttiva il volume poroso segua l'andamento dello stress efficace, discostandosene però nel periodo di stoccaggio; è altresì evidente come il volume poroso, in fase di stoccaggio, non raggiunga mai i valori originari.



**Figura 5.7** Andamento temporale dello stress verticale efficace (in ordinata a sinistra) e del volume poroso (pore volume, a destra) del reservoir

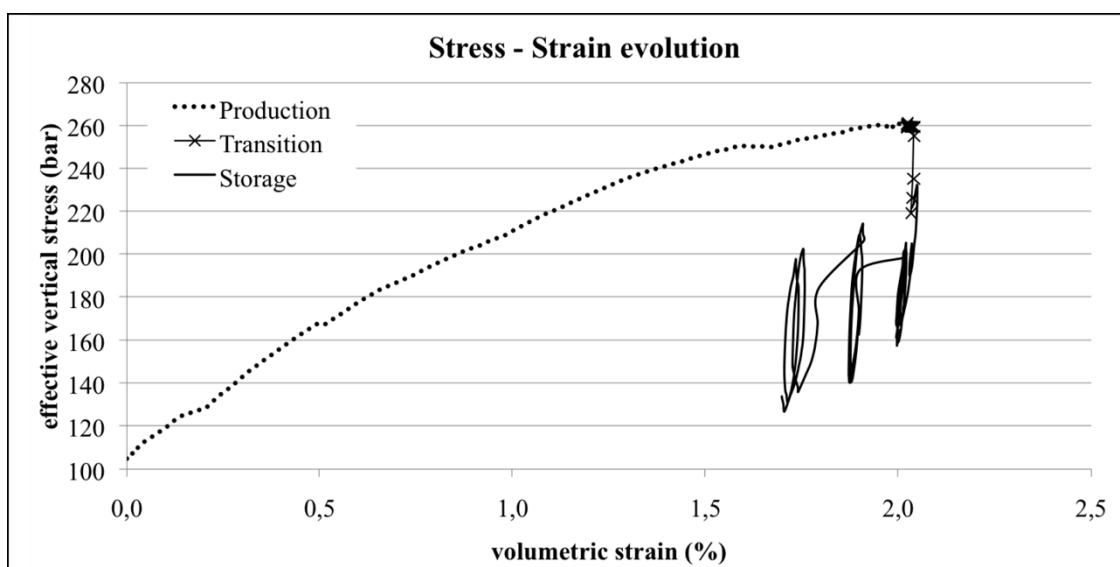


**Figura 5.8** Correlazione stress efficace - volume poroso

Questi andamenti tra pressione (stress efficace) e volume poroso risultano ancora più evidenti se si correlano le due variabili (figura 5.8).

La variazione di volume poroso è anche una misura della deformazione volumetrica del reservoir derivanti dalla produzione e dallo stoccaggio, ovvero dalle variazioni di stress efficace; sulla base delle conoscenze petrografiche e geometriche del reservoir, è stato ricostruito il valore di queste deformazioni al variare dello stress efficace (figura 5.9).

In questo modo è stata costruita una curva di stress-strain che evidenzia il comportamento della deformazione volumetrica del reservoir derivanti dall'andamento dello stress nel reservoir (ovvero dalla pressione); l'analisi di questa curva consente di cogliere informazioni molto importanti sul comportamento elastico-plastico del reservoir, e consente, in particolare, di analizzare l'influenza delle diverse fasi di vita del reservoir caratterizzandone l'andamento.



**Figura 5.9** curva stress-strain per il reservoir di Collalto, suddivisa per le differenti fasi di vita del reservoir.

Dal grafico in figura 5.9 possiamo notare come a partire dalla produzione il reservoir abbia subito una deformazione volumetrica pari a circa il 2% del suo volume: questo implica, su un reservoir costituito da due livelli (quelli dello stoccaggio) una variazione massima di circa 60 cm nella componente verticale totale (spessore) del reservoir (altezza di 15 metri max per i due livelli) qualora tutta al deformazione fosse dovuta a compattazione del reservoir. Durante la riconversione a stoccaggio (transition nel grafico in figura 5.9) non si osserva una deformazione di particolare entità, ma si assiste esclusivamente alla diminuzione dello stress efficace in conseguenza dell'aumento di



pressione di poro dovuta alla iniezione di fluido nel reservoir. Durante lo stoccaggio, la curva stress-strain sembra recuperare in parte la deformazione raggiunta dalla fase di produzione, ed il sistema nel suo complesso, presenta un comportamento simil-isteretico: teoricamente, nel momento in cui la pressione statica in fase di stoccaggio raggiungerà quella originaria, si potrà ottenere una stima del valore di deformazione permanente; la deformazione permanente altro non è che una stima del volume poroso di reservoir che non potrà più essere utilizzato per lo stoccaggio, in quanto rappresentativo di un volume ormai perduto (plasticamente, o per compattazione, o cementazione intragranulo), al netto del volume poroso utilizzabile; quest'ultima osservazione rappresenta una condizione al contorno del problema, poiché variando la disponibilità di volume poroso, ad esempio costruendo nuovi pozzi, possibilmente orizzontali, o generando delle microfratture, varia anche il dominio del problema: cambiano i valori della deformazione, così come i volumi in gioco ed in questo caso è necessario nuovamente tarare il modello stress-strain.

#### *- Deformazioni della superficie geodetica*

Come già ampiamente introdotto nei capitoli e paragrafi precedenti, una delle ricadute principali (nei casi più estremi, dei rischi principali) derivanti da attività di estrazione-immissione di fluidi nel sottosuolo riguarda la deformazione della superficie topografica.

Per il caso di studio del campo di Collalto avevo a disposizione dati di livellazione ottica, forniti da EDISON STOCCAGGI SpA, effettuati lungo delle poligoni chiuse (Figura 5.4 ), collegate alla rete di livellazione IGM-95, che ha fornito lo zero relativo; queste misurazioni sono state condotte in diversi momenti della vita del campo, a partire dal 1985, e sono state da me elaborate statisticamente in maniera da ottenere un data set in cui per ogni punto della rete che è entrato a far parte del calcolo della subsidenza, fossero presenti misurazioni per ogni intervallo temporale: in questo modo sono stati scartati dati che presentavano serie temporali discontinue. In appendice..?.. sono riportate le mappe prodotte da questa elaborazione insieme con alcuni profili longitudinali e trasversali per meglio osservare gli andamenti e le intensità delle

deformazioni: si rimanda pertanto il lettore maggiormente interessato a questo aspetto alla lettura dell'appendice. Nei successivi paragrafi i valori delle deformazioni e dei relativi spostamenti verticali verranno presentati come valori medi dei dati trattati, per una maggiore chiarezza e sintesi.

Di seguito viene riportata una tabella (tabella 5.1 ) con i valori di stress efficace, strain percentuale e subsidenza misurati al tempo di ogni monitoraggio della deformazione superficiale.

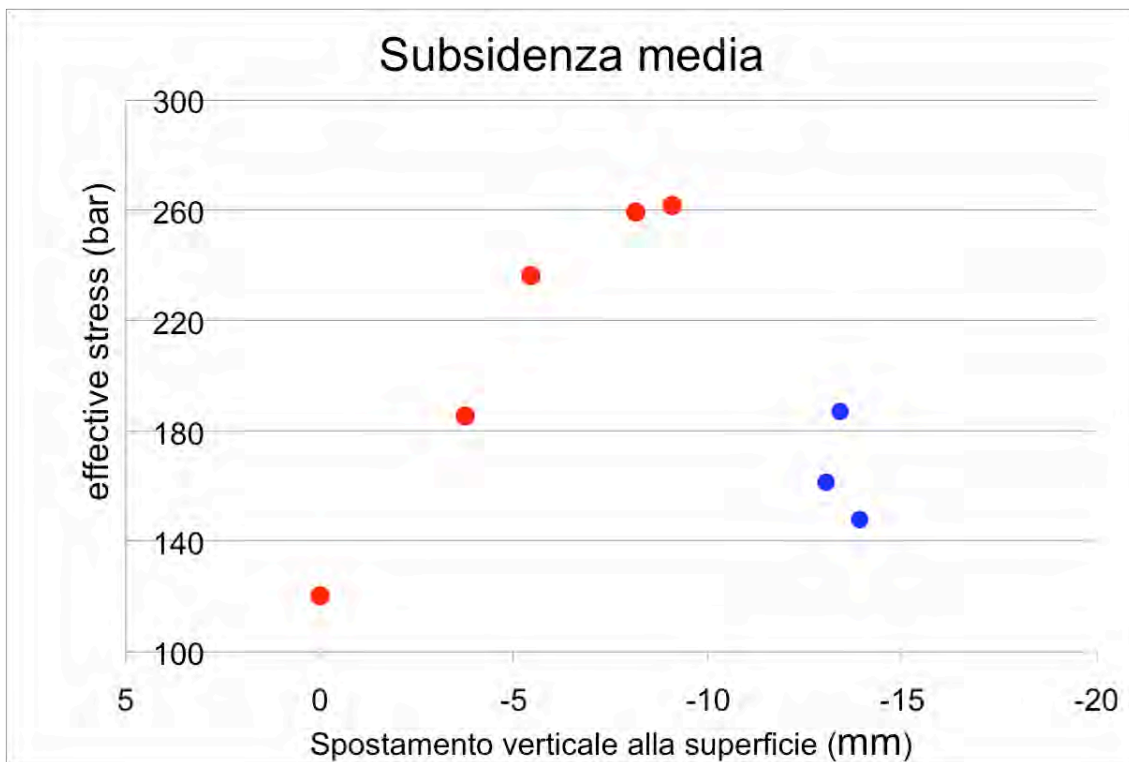
**Tabella 5.1** pressione del reservoir, volume poroso, volume totale, strain (%), volumi di gas estratto e subsidenza media (in nero in metri, in azzurro in millimetri) per il reservoir di Collalto alle date di misurazione delle livellazioni ottiche (prima colonna a sinistra)

DATA	STRESS EFFICACE *		VOLUME POROSO	DEFORMAZIONE VOLUMETRICA	SUBSIDENZA MEDIA	
	<i>Bar</i>	<i>Mm<sup>3</sup></i>			<i>(%)</i>	<i>(mm)</i>
<b>1-gen-83</b>	105	<i>(165)</i>	11987	<b>0</b>	-1,648	<i>(0)</i>
<b>1-mar-85</b>	120	<i>(150)</i>	11811	<b>0,108</b>	0	<i>(1,648)</i>
<b>1-lug-87</b>	185,5	<i>(84,5)</i>	10887	<b>0,679</b>	3,743	<i>(5,388)</i>
<b>1-mag-90</b>	236,5	<i>(33,5)</i>	9867	<b>1,309</b>	5,437	<i>(7,088)</i>
<b>1-giu-95</b>	259,5	<i>(10,5)</i>	8883	<b>1,916</b>	8,137	<i>(9,785)</i>
<b>1-LUG-98</b>	<u>261,7</u>	<u><i>(8,3)</i></u>	<u>8710</u>	<u><b>2,023</b></u>	<u>9,073</u>	<u><i>(10,718)</i></u>
<b>15-mag-06</b>	187	<i>(83)</i>	8717	<b>2,019</b>	13,391	<i>(15,04)</i>
<b>1-nov-06</b>	161	<i>(109)</i>	8757	<b>1,994</b>	13,027	<i>(14,675)</i>
<b>30-nov-10</b>	148	<i>(122)</i>	9226	<b>1,704</b>	13,894	<i>(15,542)</i>

L'andamento temporale della subsidenza media (tabella 5.1 e APPENDICE B) mostra come nella fase di produzione vi sia un trend lineare molto accentuato nonostante appaia comunque risentire, almeno in parte, delle variazioni di pressione o strain del reservoir dovute allo stoccaggio.

Per meglio analizzare l'influenza delle operazioni di estrazione ed iniezione di fluidi nel reservoir con le deformazioni superficiali ho correlato i valori di stress efficace nel reservoir al tempo delle misurazioni della deformazione in funzione dei valori medi di subsidenza misurati (figura 5.10).

Questa correlazione presenta un pattern differente rispetto a quello, ad esempio, tra lo strain nel reservoir e lo stress efficace (figura 5.9). Si può notare come in corrispondenza della fase produttiva la correlazione subsidenza-stress efficace sia lineare positiva, con una pendenza che non varia; questo comportamento viene ribaltato invece nelle fasi successive all'inizio dello stoccaggio, dove la correlazione presenta invece una pendenza opposta: all'aumentare della pressione di poro aumenta anche la subsidenza.



**Figura 5.10** Correlazione subsidenza media (in mm) - stress efficace nel reservoir (bar)

### ***5.5 MODELLAZIONE GEOMECCANICA SEMI-ANALITICA DEGLI STRESS E DELLE DEFORMAZIONI INDOTTE DAL CAMPO DI COLLALTO***

Le deformazioni indotte sul reservoir dalle attività di stoccaggio, come anche quelle dovute dalle attività di produzione, ne influenzano le performance, e si riflettono anche sulla roccia di copertura, fino ad interessare, come visto in precedenza, la superficie topografica.

L'entità di tale influenza dipende principalmente dalla geometria (profondità, forma, estensione) e dalle caratteristiche petrofisiche del reservoir, oltre che alle caratteristiche della roccia di copertura. Quantificare quanto la deformazione e le variazioni di stress nel reservoir si trasmettano alla roccia circostante è di fondamentale importanza se si vogliono comprendere e valutare i potenziali rischi di riattivazione di faglie o innesco di fratture derivanti dalle variazioni di pressione nel reservoir.

Per determinare i campi elastici nell'intorno del reservoir, dovute alla variazione di volume di quest'ultimo, mi sono servito di un approccio di modellazione semi-analitica utilizzando il problema di inomogeneità ellissoidale.

La modellazione tramite risoluzione di questo problema è già stata introdotta nei capitoli precedenti; per questo caso di studio mi sono servito di un codice MATLAB, sviluppato da Meng et al. 2011, (in Appendice B viene snocciolata la metodologia esatta, compresa di passaggi matematico-algebrici e vengono riportati i codici utilizzati) che risolve il problema di una inomogeneità ellissoidale generica con caratteristiche meccaniche differenti da quelle della roccia intorno (la matrice): gli assi dell'ellissoide rappresentano le dimensioni del reservoir di Collalto (livello A e livello E considerati come un'unica inomogeneità), i valori di modulo di Young e rapporto di Poisson sono stati ricavati tramite l'analisi della curva stress-strain e corrispondono a 1 GPa e 5 GPa per il reservoir e per il caprock, rispettivamente.

Imponendo un valore di strain percentuale, alla inomogeneità, il codice è in grado di calcolare gli stress, gli strain e gli spostamenti che derivano da tale deformazione lungo piani prescelti (anche questi definiti a piacimento dell'utente): in questo modo è

possibile quantificare i valori dei campi elastici, considerando che il campo di deformazione all'interno del reservoir sia omogeneo, come previsto da Eshelby (1957). La modellazione è stata effettuata per intervalli caratteristici della vita del reservoir : in particolare il primo valore di eigenstrain utilizzato rappresenta quello caratteristico di un periodo produttivo del reservoir, mentre il secondo rappresenta un intervallo di iniezione nel ciclo di stoccaggio. Per meglio confinare il problema, i valori di deformazione corrispondono a quelli per periodi corrispondenti agli intervalli di misurazione delle deformazioni alla superficie: in questo modo è possibile valutare, da un lato, la bontà della modellazione, confrontando quanto calcolato dal codice con un dato reale (la subsidenza), e dall'altro lato, se quest' approccio possa fornire uno strumento predittivo per un futuro monitoraggio delle deformazioni indotte.

In tabella 5.2 sono riportati i valori principali di input (modulo di Young e rapporti di Poisson per l'inomogeneità e per la matrice, geometria del reservoir, valore di strain applicato alla inomogeneità) del modello geomeccanico per i due momenti presi in considerazione.

	<i>Reservoir</i>		<i>Caprock</i>					
	Eh	Vh	Em	Vm	Xdim	Ydim	Zdim	$\epsilon_{zz}$
	<i>GPa</i>		<i>GPa</i>		<i>m</i>	<i>m</i>	<i>m</i>	<i>millistrain</i>
<b>Produzione 83-90</b>	1	0.25	5	0.28	2400	5200	15	-1.32
<b>Stoccaggio 2006</b>	1	0.25	5	0.28	2400	5200	15	-0.03

Gli intervalli presi in considerazione sono quelli tra l'inizio della produzione ed il 1990 (alla data di misurazione delle deformazioni superficiali) e l'intervallo tra maggio e novembre 2006, per stimare il comportamento del reservoir in fase di produzione ed in fase di iniezione.

I valori ottenuti dal modello saranno poi confrontati con quelli reali e successivamente discussi.

Di seguito vengono presentati alcuni risultati di modellazione.

- Periodo Produzione 83-90

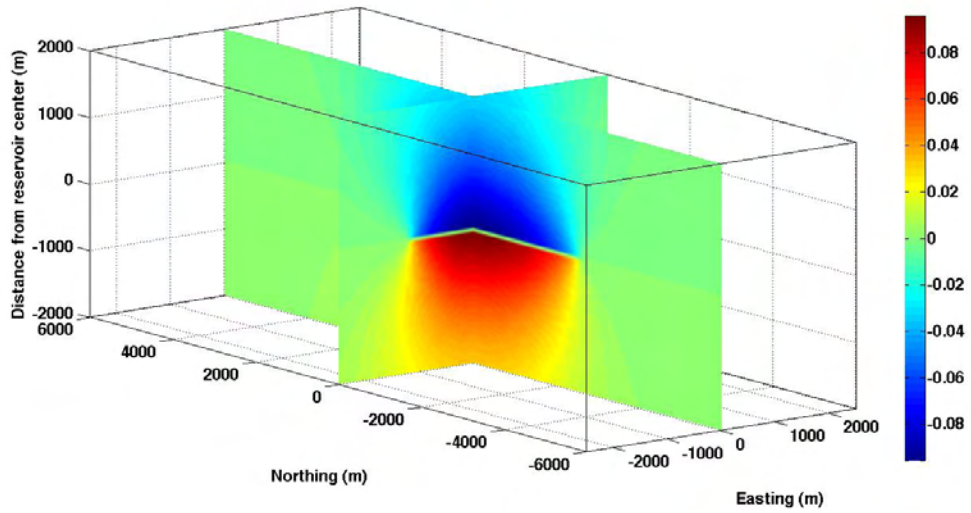


Figura 5.11 spostamento lungo la direzione z per simulazione periodo produttivo 1983-1990

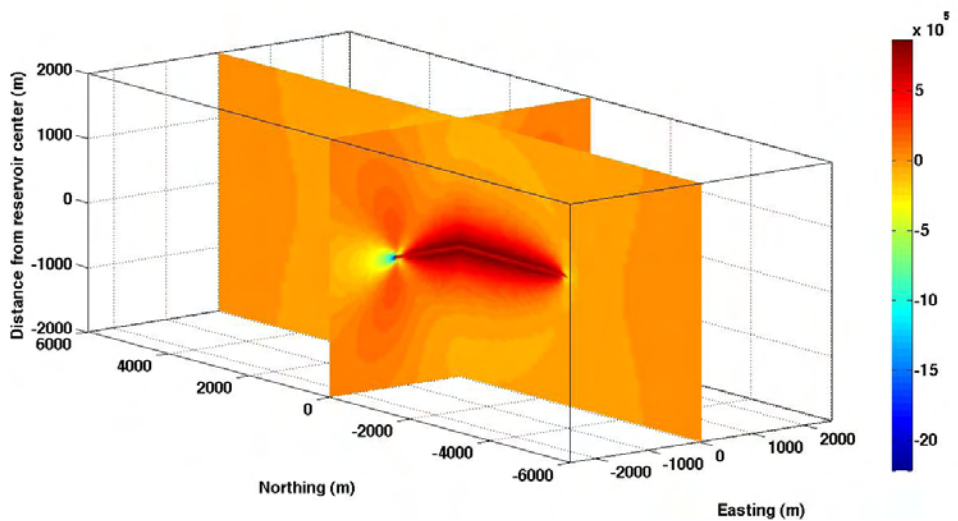
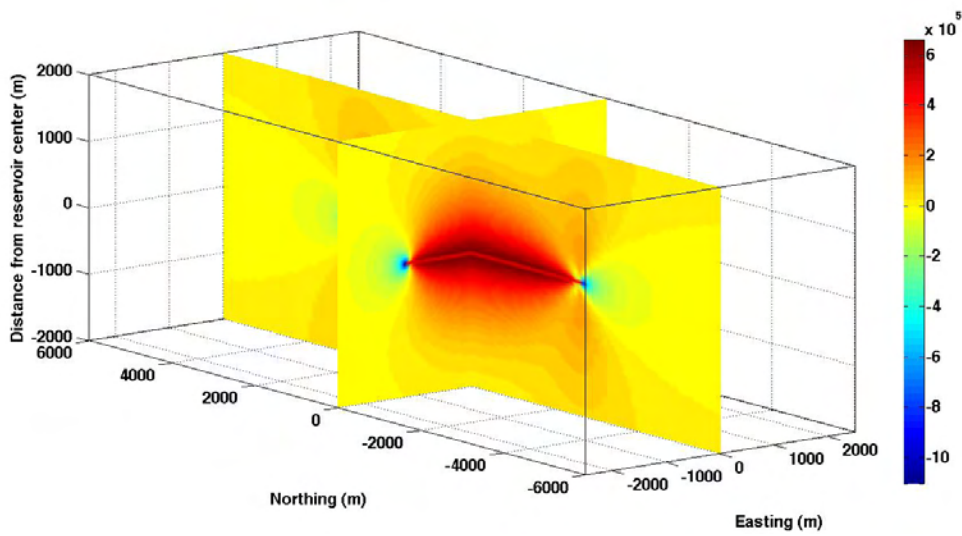
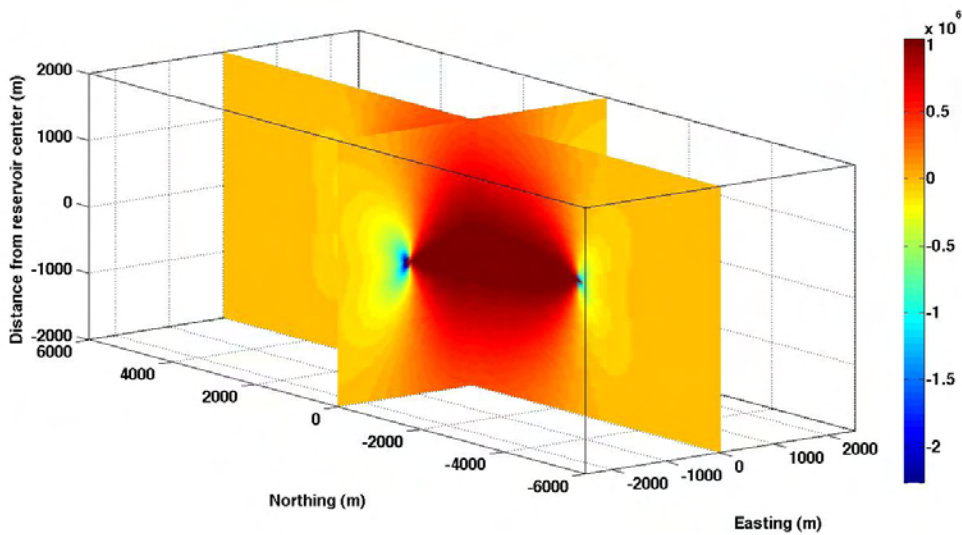


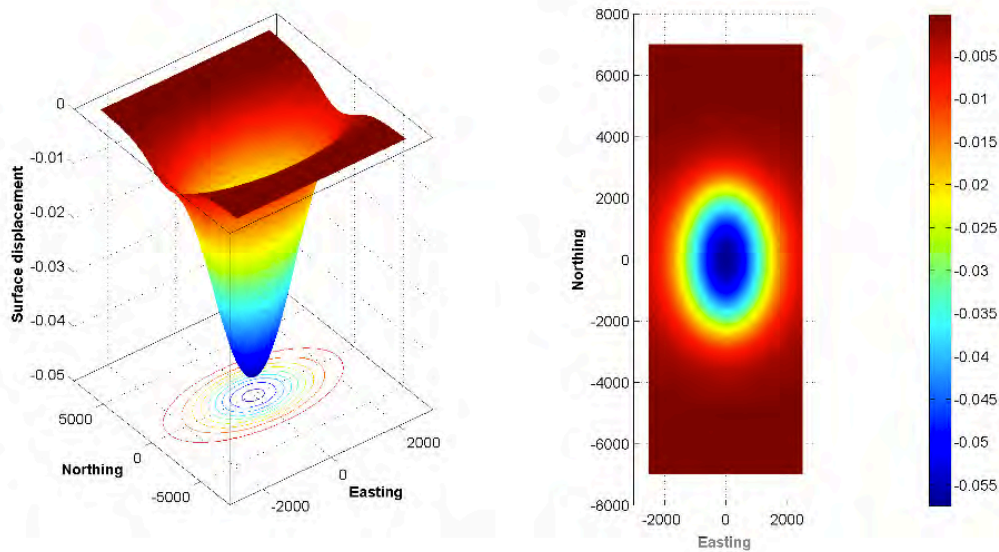
Figura 5.12 componente Sxx del tensore degli stress lungo piani perpendicolari per il centro del reservoir per simulazione periodo produttivo 1983-1990



**Figura 5.13** componente  $S_{yy}$  del tensore degli stress lungo piani perpendicolari per il centro del reservoir per simulazione periodo produttivo 1983-1990



**Figura 5.14** componente  $S_{zz}$  del tensore degli stress lungo piani perpendicolari per il centro del reservoir per simulazione periodo produttivo 1983-1990



**Figura 5.15** . (sx) (non in scala) visione tridimensionale del campo di spostamento lungo il piano  $z=1400$  m rappresentativo dello zero topografico, con relative isocinetiche; (dx) stesso campo (subsidenza in metri) visto dall'alto ed in scala , per simulazione periodo produttivo 1983-1990

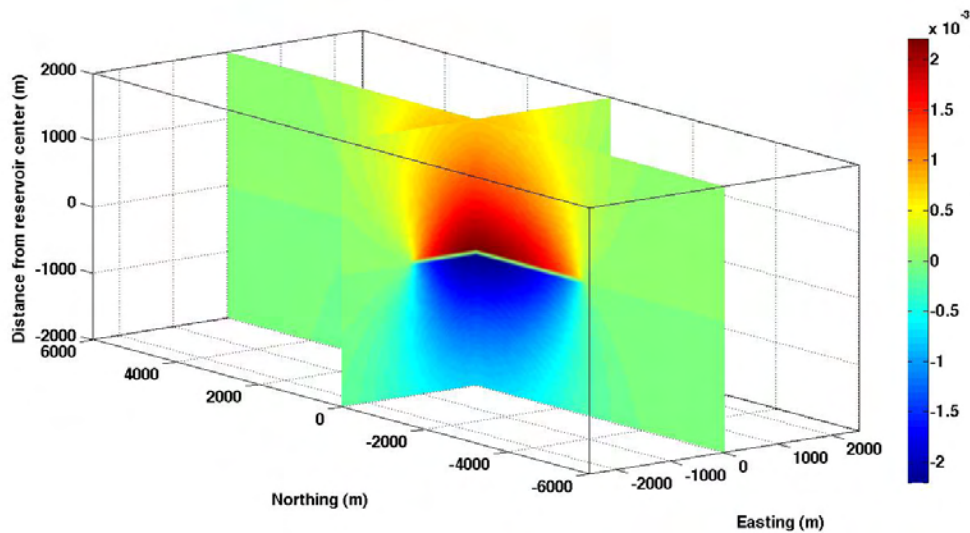
Analizzando uno per uno i dati di output riportati nelle figure precedenti (figure 5.11-5.15) si possono osservare i campi deformativi dovuti alla produzione fino al maggio 1990 e gli associati campi di sforzo che ne derivano. In figura 5.11 possiamo notare il campo di spostamento nell'intorno del reservoir: in particolare è da notare come, al limite dell'inomogeneità la somma degli spostamenti risulti in un massimo di variazione di spessore di quasi 20 cm lungo l'asse verticale, esattamente a centro dell'ellissoide. In figura è possibile osservare la forma del campo di spostamento, che tende a zero in prossimità delle zone meno influenzate dalla inomogeneità.

Le successive tre figure (figure 5.12-5.14) evidenziano invece i campi di sforzo, in particolare le componenti  $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{zz}$  (ovvero le componenti ortogonali) del tensore dello stress indotto. La scelta di mostrare esclusivamente queste componenti deriva dalla peculiare scelta di geometria del modello e dei piani di osservazione: questi ultimi infatti giacciono sugli stessi piani sui quali giacciono gli assi della inomogeneità: i massimi valori in termini assoluti di attestano intorno ai 20 MPa: anche in questo caso i valori massimi si concentrano principalmente in prossimità delle culminazioni della inomogeneità;

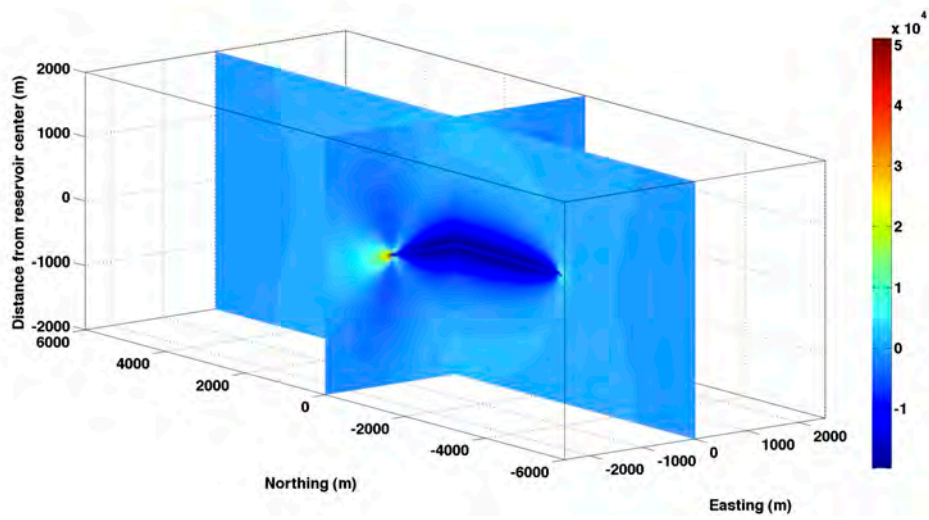


In figura 5.15 è riportato il campo di spostamento calcolato lungo il piano  $z = 1400$  m, un piano rappresentativo della superficie topografica, che dista appunto circa 1400 metri dal centro del reservoir (inomogeneità). A sinistra in figura 5.15 viene riportata una rappresentazione tridimensionale mentre sulla destra una visione dall'alto: i valori di spostamento su questo piano variano tra 0 e 57 mm, con un valor medio di 9.5 millimetri simile a quello misurato realmente (9.03 mm); i valori tendono a zero in un raggio di circa 4000 metri rispetto alla proiezione sul piano del centro della inomogeneità.

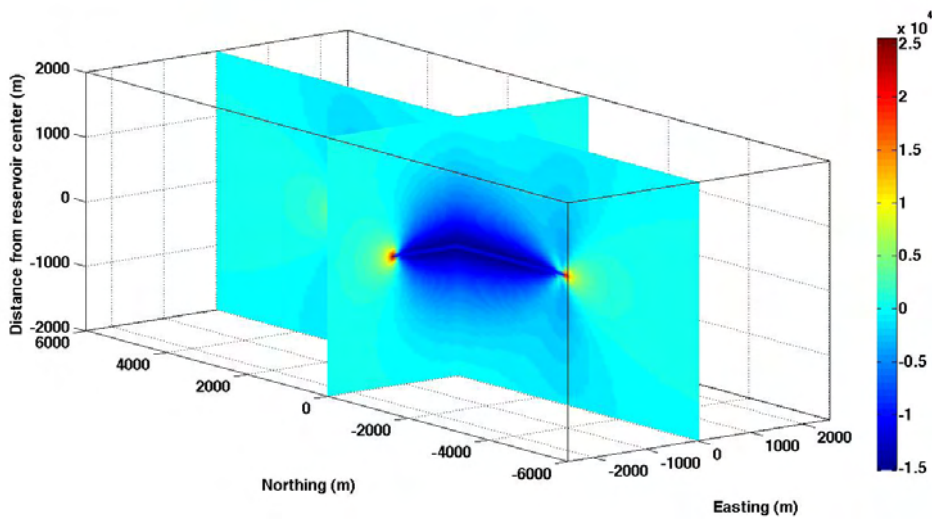
- *Periodo iniezione Maggio-novembre 2006*



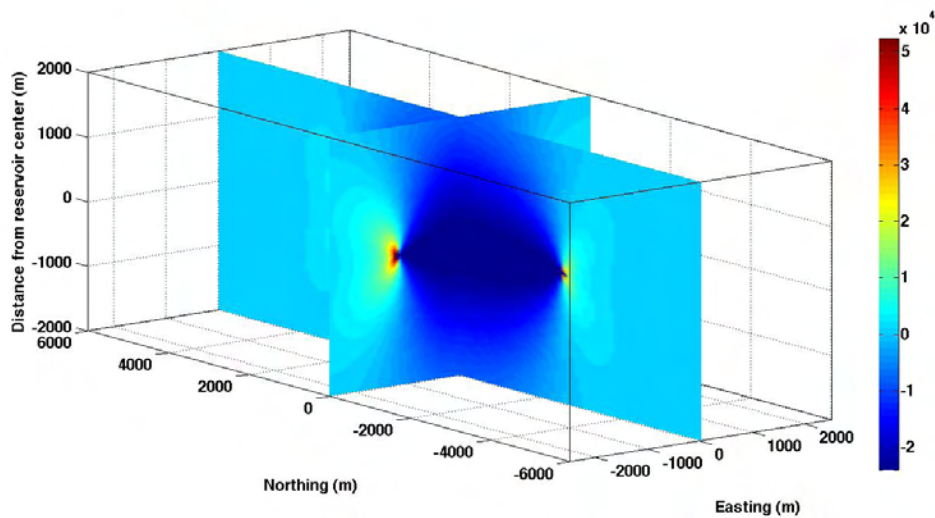
**Figura 5.16** spostamento lungo la direzione z per simulazione periodo produttivo 1983-1990



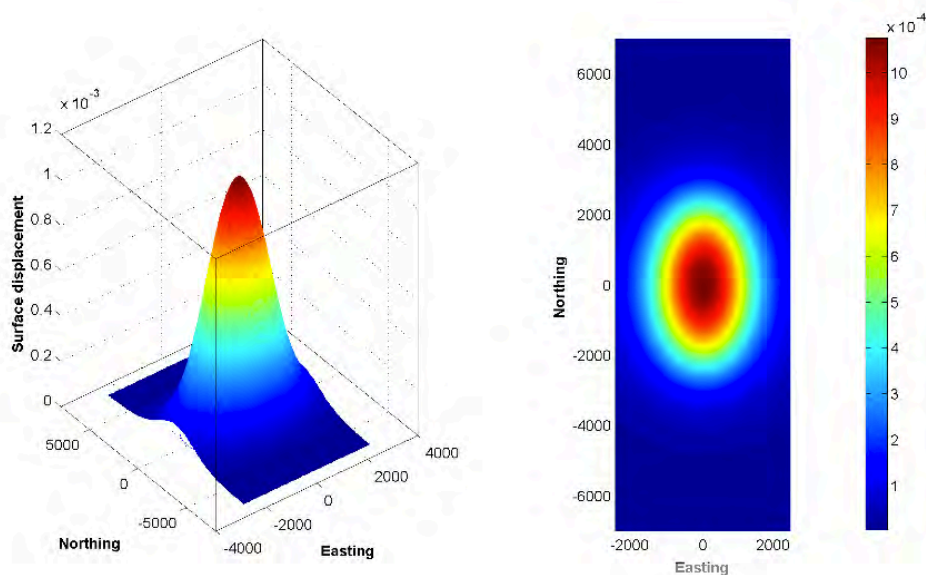
**Figura 5.17** componente Sxx del tensore degli stress lungo piani perpendicolari per il centro del reservoir per simulazione periodo produttivo 1983-1990



**Figura 5.18** componente Sxx del tensore degli stress lungo piani perpendicolari per il centro del reservoir per simulazione periodo di iniezione maggio-novembre 2006



**Figura 5.19** componente  $S_{xx}$  del tensore degli stress lungo piani perpendicolari per il centro del reservoir per simulazione periodo di iniezione maggio-novembre 2006



**Figura 5.20** . (sx) (non in scala) visione tridimensionale del campo di spostamento lungo il piano  $z=1400$  m rappresentativo dello zero topografico, con relative isocinetiche; (dx) stesso campo (subsidenza) visto dall'alto ed in scala , per periodo di iniezione maggio-novembre 2006

Analizzando i dati di output riportati nelle figure precedenti (5.16 -5.20) si possono osservare i campi deformativi dovuti al periodo maggio - novembre 2006 e gli associati campi di sforzo che ne derivano. In figura 5.16 possiamo notare il campo di spostamento nell'intorno del reservoir: in particolare da notare come, al limite

dell'inomogeneità la somma degli spostamenti risulti in un massimo di variazione di spessore di quasi 5 mm lungo l'asse verticale, esattamente a centro dell'ellissoide. In figura è possibile osservare la forma del campo di spostamento, che tende a zero in prossimità delle zone meno influenzate dalla inomogeneità.

Le successive tre figure (figure 5.17-5.19 ) evidenziano invece i campi di sforzo, in particolare le componenti  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$ ,  $s_{zz}$  (ovvero le componenti ortogonali) del tensore dello stress indotto. La scelta di mostrare esclusivamente queste componenti deriva dalla peculiare scelta di geometria del modello e dei piani di osservazione: questi ultimi infatti giacciono sugli stessi piani sui quali giacciono gli assi della inomogeneità: i massimi valori in termini assoluti di attestano intorno ai 0,5 MPa: anche in questo caso i valori massimi si concentrano principalmente in prossimità delle culminazioni della inomogeneità;

In figura 5.20 È riportato il campo di spostamento calcolato lungo il piano  $z = 1400$  m, un piano rappresentativo della superficie topografica, che dista appunto circa 1400 metri dal centro del reservoir (inomogeneità). A sinistra viene riportata una rappresentazione tridimensionale mentre sulla destra una visione dall'alto: i valori di spostamento su questo piano variano tra 0 e 1,05 mm, con un valor medio di 0.5 mm; i valori tendono a zero, anche in questo caso, in un raggio di circa 4000 metri rispetto alla proiezione sul piano del centro della inomogeneità.

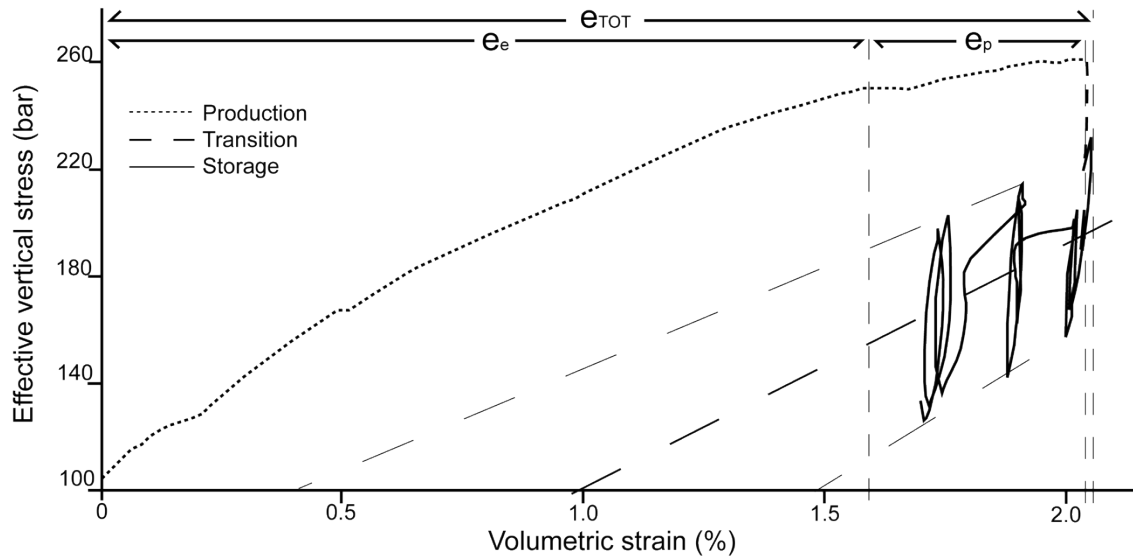
## **5.6 DISCUSSIONE**

L'analisi delle attività di produzione e stoccaggio del sito di Collalto solleva alcuni spunti di riflessione:

- Con quale trend la subsidenza ha “registrato” e sta attualmente “registrando” le variazioni nel reservoir?
- Per quale motivo, variazioni simili di pressione nel reservoir, in fase di produzione e di stoccaggio, non corrispondono a variazioni di subsidenza paragonabili tra le due fasi ?
- il modello geomeccanico riesce a spiegare le deformazioni osservate?
- Il modello geomeccanico può fornire uno strumento metodologico applicabile ad altre tipologie di sistemi di stoccaggio, simili a quelli di Collalto? E a quelli differenti?

Per rispondere a queste domande bisogna considerare due aspetti principali: il comportamento del reservoir, poroso e sottile, ed il comportamento della roccia di copertura.

Osservando il grafico in figura 5.21 che riporta la curva stress-strain si nota come la pendenza della retta tenda a diminuire con l'aumento della deformazione in atto, fino al punto da diventare quasi parallela all'asse delle ascisse. Il punto in cui la pendenza della curva cambia rappresenta anche il punto in cui, superato un certo valore di stress (limite elastico) efficace, la deformazione non è più elastica, bensì plastica, duttile. Questa deformazione rappresenta una porzione dello strain totale del reservoir e non potrà più essere recuperata, a meno di interventi di miglioramento dell'efficienza dello stoccaggio nel reservoir;



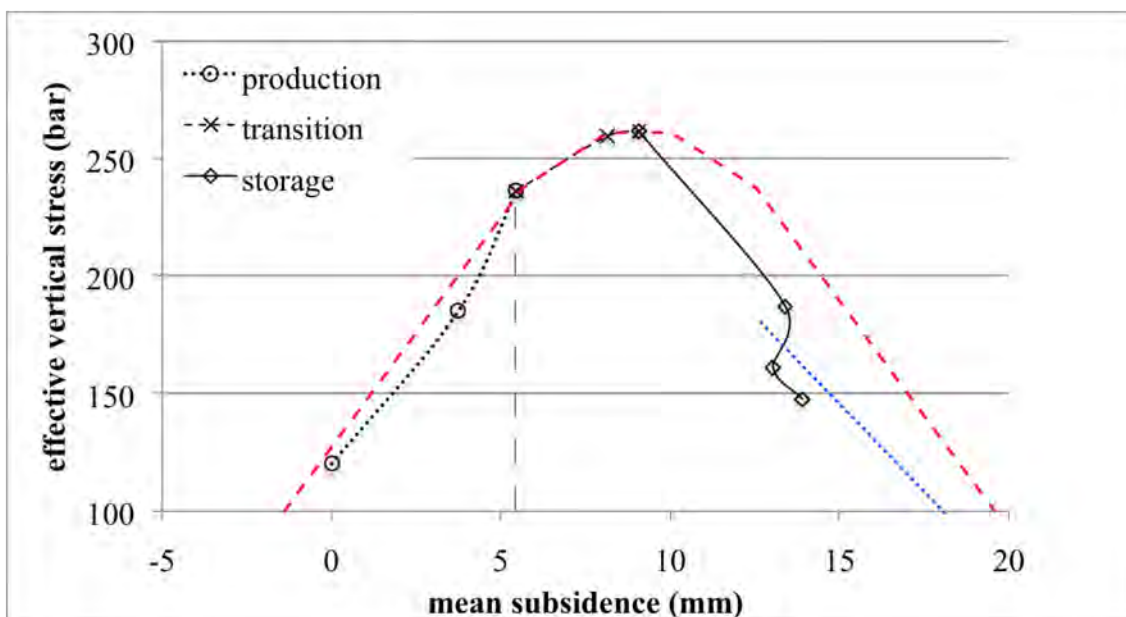
**Figura 5.21** evoluzione della curva stress-strain reinterpretata per definire le deformazioni elastiche e non-elastiche.

La quantificazione della deformazione plastica non risulta esattamente immediata, in quanto la curva presenta alcuni punti di flesso locali, ma con buona approssimazione il valore di strain plastico,  $\epsilon_p$ , raggiunge lo 0,5 %; traducendo questa informazione in termini volumetrici rappresenterebbe una perdita di quasi  $1 \text{ Mm}^3$  di volume poroso non più utilizzabile per lo stoccaggio; sulla base delle attuali performance dello stoccaggio sono state tracciate le intercette che uniscono i valori di massimo e minimo stress efficace raggiunti durante i cicli di stoccaggio: queste rette intersecano l'asse delle ascisse, in corrispondenza della pressione originaria, con valori di 0,5 ed 1,5% ,rispettivamente. Tuttavia, il massimo di pressione raggiungibile dalle attività di stoccaggio non può superare il 10 % della pressione originaria, prevista dalla normativa nazionale: il minimo di stress efficace rappresenta il massimo della pressione misurata nel reservoir, e pertanto, sulla base di quanto previsto dalle simulazioni di stoccaggio e sulla base dei limiti di esercizio massimi consentiti è molto più plausibile che la deformazione non più recuperabile si aggiri intorno all'1,5% del volume del reservoir, con una stima quindi di quasi  $3 \text{ Mm}^3$  persi.

Quest'analisi, oltre a suggerire i possibili pattern di deformazione del reservoir, consente anche di intuire come la deformazione dovuta ai cicli di stoccaggio non sia

perfettamente elastica: i differenti percorsi seguiti dalla curva in figura 5.21 suggeriscono che parte della deformazione sia plastica, in particolare durante alcuni cicli di immissione, ma soprattutto durante i cicli di estrazione, a sfavore del recupero delle condizioni originarie del reservoir.

Questa ipotesi riscontra favori nell'analisi della deformazione superficiale; in figura 5.22 sono correlati i valori di subsidenza media con i corrispettivi valori di stress efficace.



**Figura 5.22** subsidenza media - stress efficace. In rosso percorso di subsidenza nell'ipotesi di elasticità piena del reservoir. In blu, influenza dei cicli di stoccaggio.

In questo caso si può notare la differenza tra la curva stress-strain e quella stress-subsidenza: in quest'ultima infatti non si assiste ad un "recupero" della subsidenza, come invece avviene, almeno in parte, per lo strain. In questo caso bisogna tuttavia tenere presente che la subsidenza dipende oltre che alle deformazioni del reservoir, anche alle caratteristiche della copertura rocciosa tra il reservoir e la superficie topografica. Esistono due possibili fenomeni per giustificare il comportamento della subsidenza osservato:

- nel reservoir non si è ancora raggiunta la pressione originaria di giacimento; questo aspetto risulta molto importante nella fase di scarico, ovvero in quella parte di curva che parte dal massimo di deformazione e segue il percorso dello stoccaggio, in questo caso sussiste un “deficit” di volume che potenzialmente può ancora trasferire deformazione alla roccia di copertura; il deficit è fornito e giustificato dalla variazione di moduli di compressibilità predetti e verificati (Teatini et al. 2011 ) tra fase di carico (corrispondente alla fase produttiva) e fase di scarico (corrispondente alla fase di stoccaggio); ricordando che  $e = C_m \Delta p = (\Delta H/H)$  allora possiamo notare come a stesse quantità di  $\Delta p$  dovrebbe corrispondere un valore di  $e$  uguale, se  $C_m$  fosse costante. Dal momento che, nel reservoir, non si verifica questa condizione, ovvero in fase di stoccaggio il rapporto  $e/\Delta p$  non è costante, ciò significa che  $C_m$ , e quindi la compressibilità del mezzo poroso del reservoir, è cambiata. In particolare questa variazione di  $C_m$  determina una riduzione di circa un ordine di grandezza rispetto alla fase di carico;

- il reservoir e la copertura rocciosa rispondono, per la propria natura petrofisica, in maniera differente alla deformazione nel reservoir; questo si traduce anche in tempi di risposta differenti; il reservoir risponde immediatamente alla variazione di pressione, seguita da fenomeni più o meno elastici; al contrario il comportamento della roccia di copertura non è altrettanto sensibile. Questa differenza può spiegare perché esista una sorta di inerzia della roccia di copertura, almeno in parte, parzialmente mitigata dalle variazioni “pulsate” dei cicli di stoccaggio. Qualora si avanzasse l’ipotesi che questa inerzia della roccia di copertura rispetto alle variazioni del reservoir sia reale, allora il percorso stress-subsidenza seguirebbe la spezzata in rosso in figura... : la superficie topografica continuerà a manifestare per altri anni la subsidenza, almeno fino a quando le condizioni del reservoir non avranno raggiunto quelle originarie antecedenti alla produzione. Gli impulsi dello stoccaggio, insieme con la programmazione di massimo recupero possibile del volume originario, influenza il caprock e la sua risposta a lungo termine; a favore di questo modello basta notare come tra novembre 2006 e novembre 2010 la subsidenza non sia diminuita, nonostante i valori corrispondenti di stress e strain (tabella) inducano a pensare ed anche a predire l’esatto contrario. In quest’ottica,



qualora non venissero effettuate delle variazioni in termini di efficienza di stoccaggio, il pattern di subsidenza previsto per il sito di Collalto prevede mediamente una continua subsidenza secondo il pattern in blu in figura 5.22: la subsidenza continuerà fino a quando non verranno ripristinate le condizioni di stress efficace (e pressione dei pori) pre-produzione.

Dopo l'analisi della deformazioni indotte, a livello del reservoir, ed al livello di superficie topografica, passiamo ora a discutere di quanto il modello geomeccanico possa essere rappresentativo dei fenomeni reali, ed il tipo di informazioni che possono essere dedotte.

La peculiarità del modello, basato sul problema di inomogeneità soggetta ad eigenstrain, prevede che la deformazione all'interno del reservoir sia omogenea (Eshelby, 1957 ; Mura, 1972) e costante; nella matrice invece, la forma dei differenti campi, o componenti dei campi, non varia al variare delle condizioni di pressione, o eigenstrain utilizzato: l'unico parametro che influisce sulla forma dei campi è la geometria del reservoir. Va ricordato che il codice utilizzato per la risoluzione del problema elastico, vale per una inomogeneità ellissoidale immersa in uno spazio infinito, e trascura, almeno formalmente, l'effetto della superficie topografica (trazione nulla ); va altresì ricordato che differenti studi (biblio), hanno dimostrato come le soluzioni analitiche / semianalitiche dei problemi di inclusione o inomogeneità, siano pressoché equivalenti per un rapporto di forma del reservoir molto minore a uno, e risultino soluzioni esatte per rapporti tra estensione e spessore dell'inclusione/inomogeneità tendenti ad  $\infty$  e con estensione laterale  $\leq$  alla distanza dalla superficie topografica. Nel caso in esame, lo spessore considerato nel modello, 15 metri, prevede un rapporto  $e \approx 15/1000 \approx 0.015$ , se non  $e \approx 15/2500 \approx 0.006$ , e con un  $n = D/a \leq 1$  ( $D$ =profondità  $\approx 1300-1400$  metri,  $a$ =semiasse ellissoide =  $1/2$  estensione laterale  $\approx 500 -1250$  metri ) possiamo ritenere i risultati ottenuti validi anche in un contesto di semi-spazio elastico omogeneo: in questo caso, i valori dei campi, ed in particolare dello spostamento sul piano  $z=1400$  possono considerarsi rappresentativi della subsidenza "reale" osservata.

Sulla base della discussione tra le relazioni subsidenza - deformazione del reservoir - variazione di stress efficace in questo caso il valore di eigenstrain (ovvero il valore di strain al quale l'inomogeneità è sottoposta), nelle due simulazioni (produzione - stoccaggio) tiene conto della variazione di compressibilità, determinata in funzione della retta stress-strain.

In generale i risultati offerti dalla modellazione confermano quanto osservato in termini di subsidenza :

#### *Periodo 83-90*

- la subsidenza media modellata per l'intervallo 83-90, con  $\Delta p \approx - 130$  bar e strain = - 1.3% mostra un valore di 0.0076 m, in buon accordo con quella misurata (0.071). In questo caso la compattazione ( $\Delta V/V \approx \Delta H/H$ ) risulta di circa 0.02 metri al centro del reservoir, diminuendo ai lati; il valore di compressibilità che ne deriva prevede  $C_m = 1.3\%/130 \text{ bar} \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ bar}$  , in accordo con quanto determinato anche dai modelli di reservoir ( $4 \cdot 10^{-4} \text{ bar}$ )
- i massimi valori di stress misurati lungo i piani (figure 5.12- 5.14 ), per le componenti del tensore dello stress normali ai piani risultano piuttosto elevati, nell'ordine di 20 MPa (circa 200 bar), ma questi valori si concentrano in corrispondenza di culminazioni dell'inclusione; al di là queste aree localizzate, che difficilmente trovano un corrispettivo "naturale", sopra e sotto il reservoir si aggirano tra 6 e 10 MPa (massimi); in questa modellazione non si tiene tuttavia conto della dinamica e delle tempistiche dell'accumulo dello stress e del tempo di distribuzione: i dati qui osservati fanno riferimento infatti ad un periodo di tempo di circa 7 anni, e nella "realtà" del modello sono applicati "istantaneamente". Pertanto i valori di stress indotto sulla matrice potrebbero risultare minori in termini assoluti rispetto a quelli risultanti dalla modellazione.

#### *Periodo maggio - novembre 2006*

La subsidenza media modellata sul piano  $z = 1400$  m per l'intervallo di iniezione maggio-novembre 2006, con  $\Delta p \approx + 25$  bar e strain = +0.003% , mostra un valore di 0.0002 m, rispetto a 0.00035 m misurati. In questo caso la compattazione è "negativa"

(il reservoir riacquista volume) e risulta di circa 0.005 metri al centro del reservoir, diminuendo ai lati; il valore di compressibilità che ne deriva prevede  $C_m = 0.003\%/25 \text{ bar} \approx 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ bar}$ , anche in questo caso simile a quella determinata dai modelli di reservoir ( $3 \cdot 10^{-5} \text{ bar}$ ) almeno nell'ordine di grandezza (biblio).

- i massimi valori di stress misurati lungo i piani (figura 5.17-5.19), per le componenti del tensore dello stress normali ai piani, risultano piuttosto contenuti rispetto a quelli della fase di produzione, nell'ordine di 0,5 MPa (circa 5 bar), ma anche in questo caso questi valori si concentrano in corrispondenza di culminazioni della inomogeneità; al di là di queste aree localizzate, che difficilmente trovano un corrispettivo “naturale”, sopra e sotto il reservoir i massimi valori di stress indotto si aggirano tra 0.1 e 0.2 MPa.

### ***5.7 MODELLAZIONE FEM PER LA MAPPATURA DEL COULOMB FAILURE CRITERION***

Come già introdotto in precedenza, per determinare un criterio di individuazione delle aree intorno al reservoir che maggiormente corrono il rischio di superare il limite elastico, ho ritenuto opportuno risolvere il problema tramite una modellazione agli

elementi finiti. In particolare il problema è posto con condizioni al contorno di spostamento: ovvero ai contorni del dominio (costituito dal volume roccioso) vengono applicati degli spostamenti i cui valori sono determinati dalla modellazione semianalitica. Alla superficie topografica e ai limiti laterali ed inferiore del modello vengono applicate condizioni iniziali di spostamento nullo; ai bordi del reservoir vengono applicate condizioni di spostamento verticale che variano lateralmente in funzione della compattazione (maggiore spostamento al centro, minore spostamento ai lati), suggeriti dai risultati del modello di inomogeneità.

Il software determina i valori di stress nelle due direzioni x- e y-, lo stress di taglio e i due stress principali derivanti dalla risoluzione del problema elastico dato dalle condizioni al contorno determinando i campi elastici.

Una successiva fase di manipolazione dei risultati restituisce il valore di  $S_0$ , che fornisce una indicazione per mappare il criterio di rottura di Coulomb: l'informazione ottenuta è indicativa delle zone in cui risulta più probabile che vi siano delle deformazioni anelastiche (rotture, deformazioni plastiche...); lo scopo di questa modellazione non risiede nella comprensione di quale meccanismo di deformazione si sviluppi, nè tantomeno di definire come avviene la deformazione: in maniera più semplice ed immediata, gli output definiscono le zone che superano il limite elastico.

Poiché la base di input è determinata dai risultati di modellazione semianalitica, per la mappatura del criterio di Coulomb in 2D, sono stati sviluppati due scenari rappresentativi: uno della fase produttiva del reservoir di Collalto e l'altro della fase di iniezione tra maggio e novembre 2006.

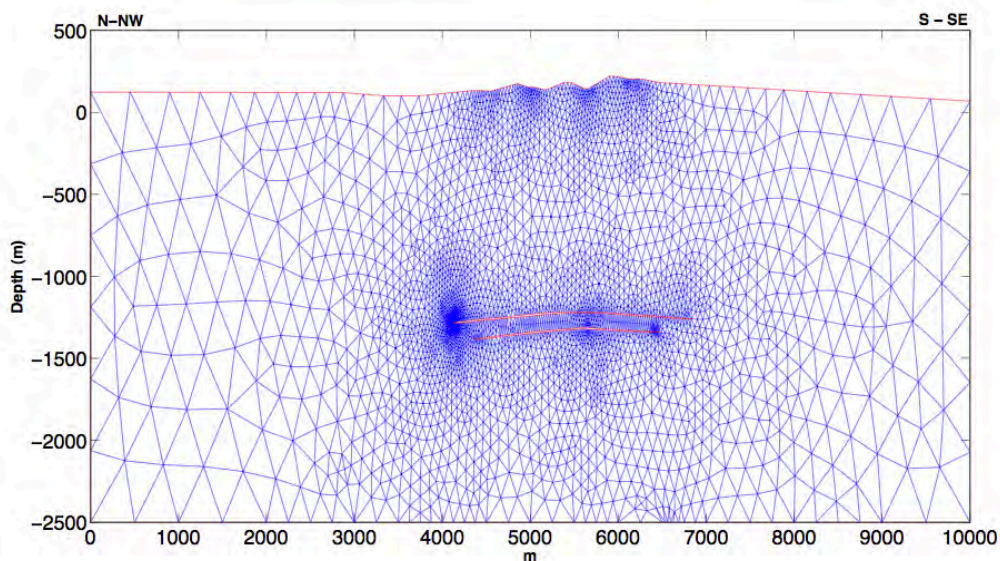
In figura 5.23 è riportata la mesh che rappresenta gli elementi del Metodo ad elementi finiti, con nodi posti al centro di ogni triangolo sui quali avviene la risoluzione delle equazioni ellittiche definite nella metodologia; la mesh è rappresentativa delle reali geometrie del reservoir oggetto di stoccaggio a Collalto: i due livelli A ed E (rispettivamente il più profondo ed il più superficiale) sono considerati come due volumi "cavi" ai quali vengono applicate le condizioni di spostamento dettate dagli output di modellazione semianalitica. Il limite superiore rappresenta la reale superficie topografica. L'intero modello rappresenta una sezione in scala reale dell'area del

reservoir, lungo un profilo perpendicolare NW-SE all'asse dell'anticlinale nella quale si è trova il reservoir.

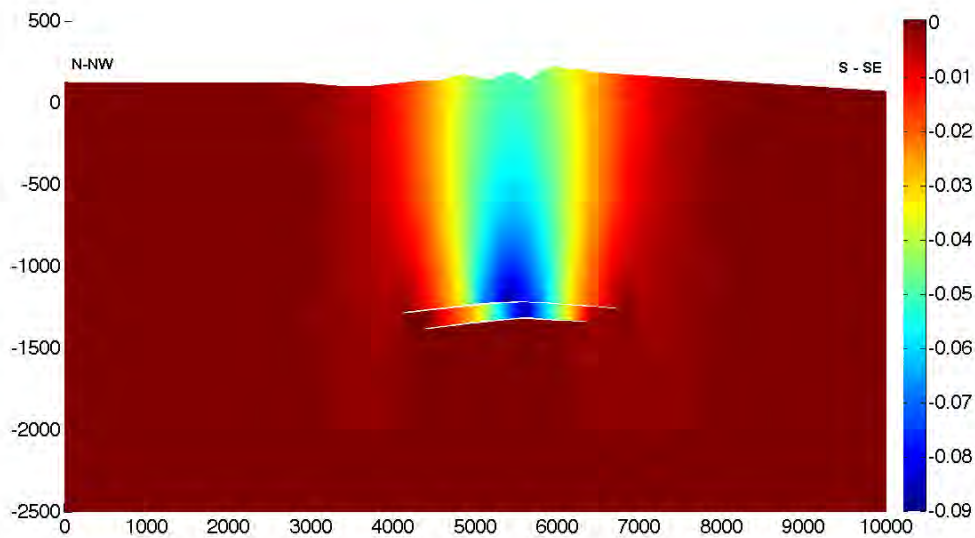
L'estensione laterale dei livelli destinati a stoccaggio risulta maggiore di quella considerata nel problema di inomogeneità ed in realtà il volume e la superficie sulle quali l'influenza dello stoccaggio è esercitata risultano minori di quelle dell'intero reservoir rappresenta nella Mesh: in questo caso, non conoscendo con esattezza i limiti geometrici di influenza della variazione di pressione e della deformazione indotta, si ipotizza che l'intero reservoir venga deformato.

Di seguito vengono presentati i risultati più indicativi dell'analisi agli elementi finiti, introdotti dapprima per il caso della produzione passata, e di seguito per il caso dello stoccaggio; successivamente segue una discussione dei risultati.

### ***PRODUZIONE 83-90***



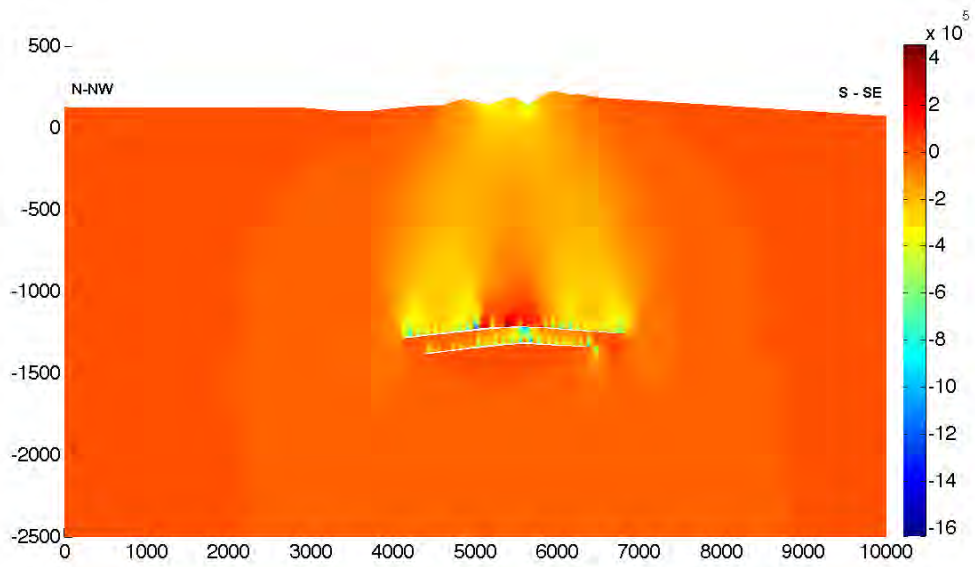
**Figura 5.23** Mesh per analisi elementi finiti riferita al reservoir di Collalto. In questo caso sono utilizzate le reali geometrie di reservoir e di superficie geodetica.



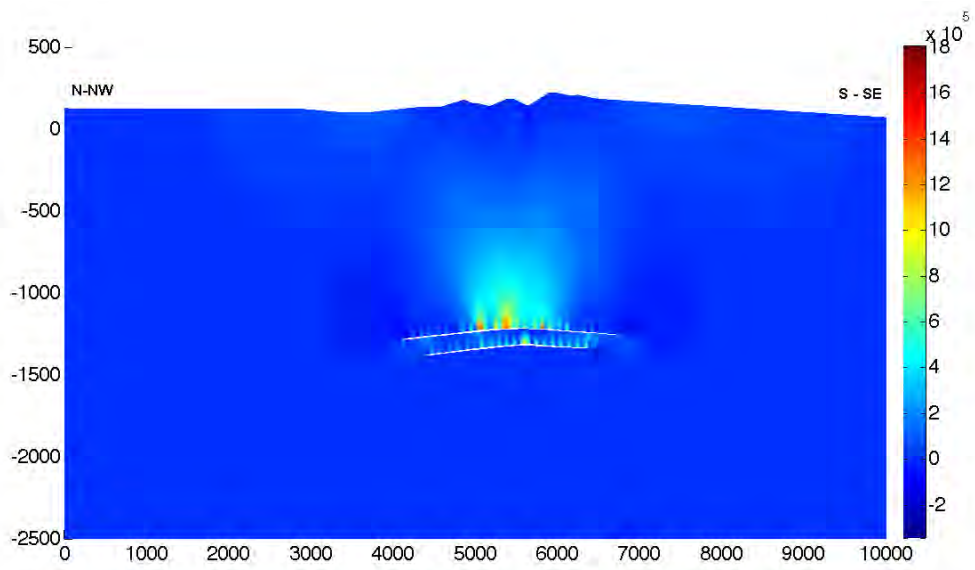
**Figura 5.24** Campo di spostamento verticale da FEM

In figura 5.24 possiamo notare la distribuzione della componente di spostamento verticale, generato dalla variazione di strain nel reservoir (o meglio nei due livelli presi in considerazione): il campo di spostamento verticale si distribuisce anche in aree laterali, con componenti modeste, fino anche a  $\approx 1000$  metri di distanza dalle culminazioni dei livelli del reservoir; lo stesso si può osservare sulla superficie topografica con una subsidenza che si estende per circa 5000m (tra 3000 ed 8000 metri lungo l'asse-x in figura 5.24 ) con valori massimi intorno a 0.05 metri in prossimità delle zone sopra al reservoir in corrispondenza del suo centro: a supporto della validità delle condizioni al contorno, i valori pressoché comparabili con quelli derivanti dalla modellazione semianalitica (figura 5.11 e figura 5.15); un'ulteriore informazione riguarda il campo di spostamento tra i due livelli, con valori massimi di spostamento lungo la componente -y del modello fino a circa 0.9 metri.

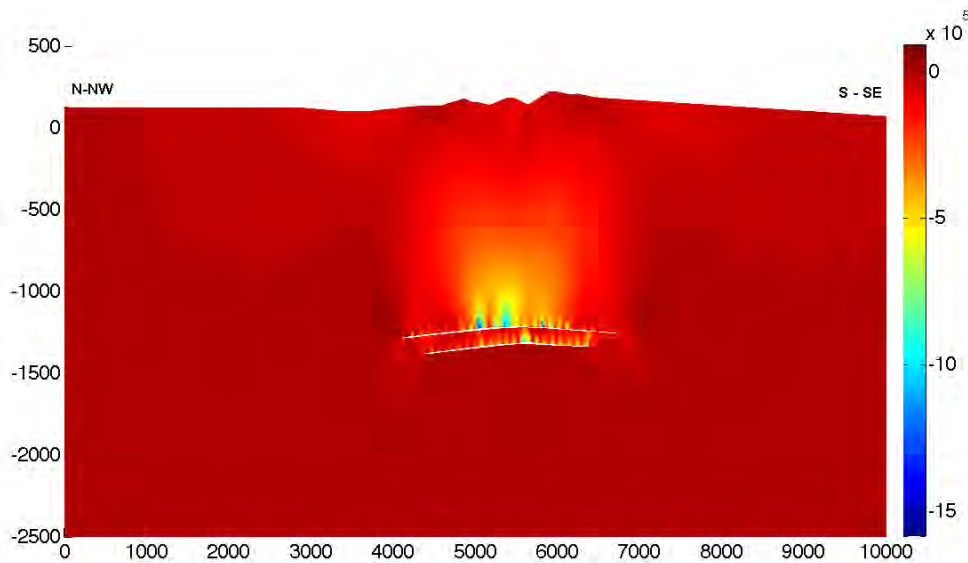
Come intuibile, i valori di spostamento decrescono in valore assoluto ai bordi del reservoir, ma la deformazione influenza anche aree laterali a profondità maggiori rispetto a quelle del reservoir.



**Figura 5.25** valori di stress principale massimo da FEM



**Figura 5.26** valori di stress principale minimo da FEM



**Figura 5.27** valori di  $S_o$  da FEM

Nelle figure precedenti (figura 5.25 -5.27) sono riportati i valori di stress principali massimi (figura 5.25) e minimi (figura 5.26) ed i valori mappati di  $S_o$  (figura 5.27) che ne derivano, calcolati per  $\mu=0.65$ . I massimi valori in senso assoluto si trovano disposti subito a ridosso dei contatti tra reservoir e roccia di copertura, decadendo poi a valori al di sotto di 1 MPa (il celeste in figura 5.27) : questi andamenti, ed i relativi valori di  $S_o$  calcolati vanno comparati con i valori di coesione tipica per materiali rocciosi consolidati, solitamente nell'ordine di 1-10 MPa per rocce meno coese: qualora fossero infatti presenti dei corpi rocciosi meno consolidati, in corrispondenza dei massimi valori di  $S_o$ , verrebbero superate le condizioni di elasticità, e potrebbero verificarsi deformazioni fragili o plastiche.

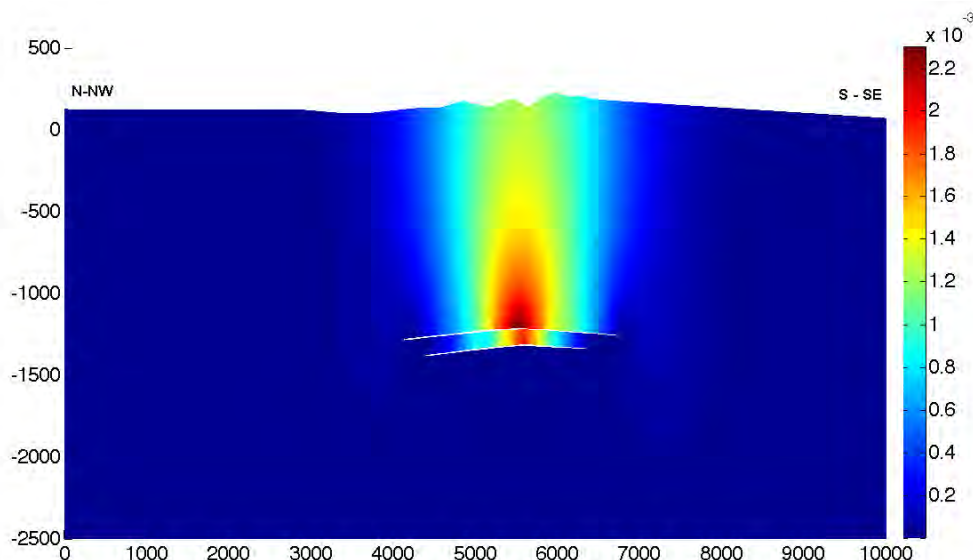
Il campo di  $S_o$  qui derivato dipende principalmente da due fattori:

- la geometria del modello e quindi la mesh sulla quale viene effettuato il calcolo;
- le condizioni al contorno ad ogni elemento della mesh lungo il bordo del reservoir.

In questo caso infatti, nonostante i valori di spostamento imposti ad ogni segmento del contorno del reservoir varino di pochi centimetri (0.5 - 1 cm ) tra due segmenti contigui del bordo, questo è sufficiente a generare alcuni punti di instabilità locali (in particolare nelle aree centrali del reservoir).



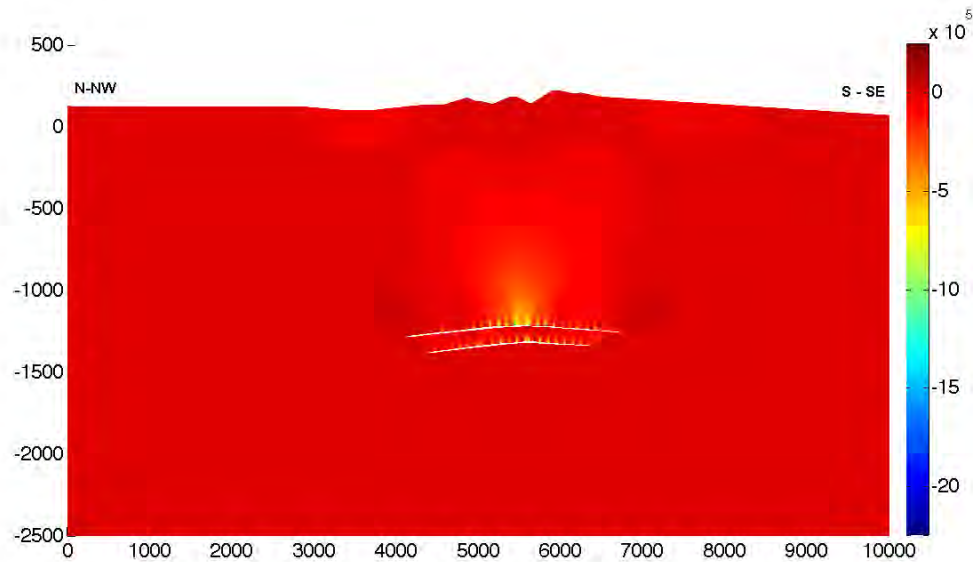
## STOCCAGGIO



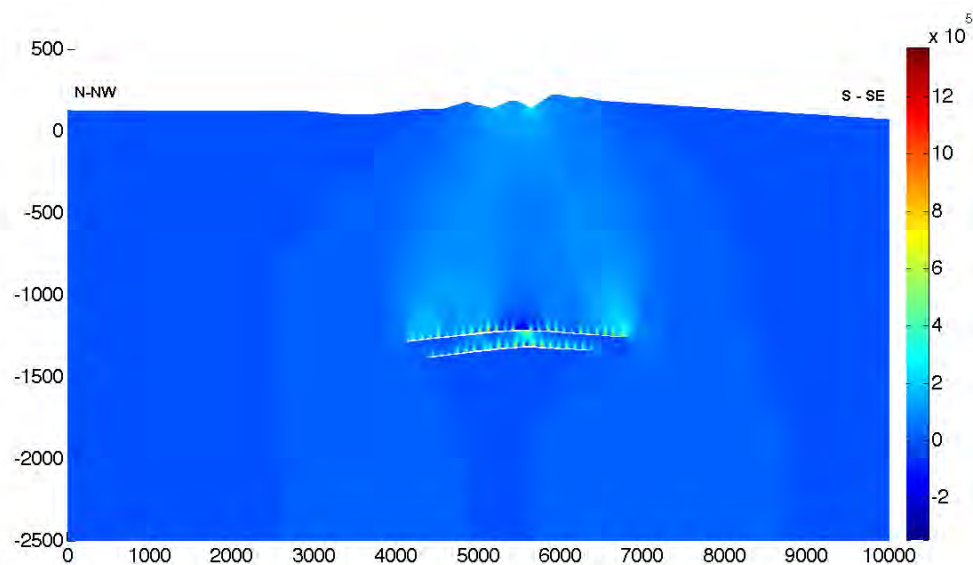
**Figura 5.28** Campo di spostamento verticale da FEM per simulazione stoccaggio 2006

In figura 5.28 possiamo notare la distribuzione della componente di spostamento verticale, generato dalla variazione di strain nel reservoir: il campo di spostamento verticale si distribuisce anche in aree laterali, con componenti modeste, fino anche a  $\approx 1000$  metri di distanza dalle culminazioni dei livelli del reservoir; lo stesso si può osservare sulla superficie topografica con una subsidenza che si estende per circa 5000m (tra 3000 ed 8000 metri lungo l'asse-x in figura 5.28) con valori massimi intorno a 0.0005 metri (mezzo millimetro) in prossimità delle zone sopra al reservoir in corrispondenza del suo centro: a supporto della validità delle condizioni al contorno, i valori pressoché comparabili con quelli derivanti dalla modellazione semianalitica (figura 5.16 e 5.20 ); un'ulteriore informazione riguarda il campo di spostamento tra i due livelli, con valori massimi di spostamento lungo la componente -y del modello fino a circa 0.002 metri.

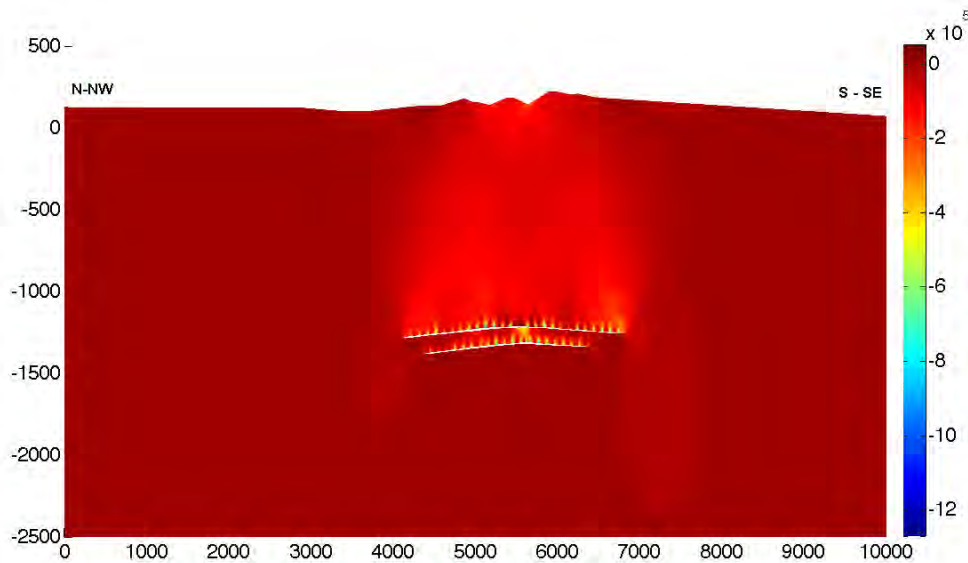
Come intuibile i valori di spostamento decrescono in valore assoluto ai bordi del reservoir, ma la deformazione influenza anche aree laterali a profondità maggiori rispetto a quelle del reservoir.



**Figura 5.29** valori di stress principale massimo da FEM



**Figura 5.30** valori di stress principale minimo da FEM per simulazione stoccaggio 2006



**Figura 5.31** Valori derivati di  $S_o$  da FEM per simulazione stoccaggio 2006

Nelle figure precedenti (figura 5.29 - 5.31 ) sono riportati i valori di stress principali massimi (figura 5.29) e minimi (figura 5.30) ed i valori mappati di  $S_o$  (figura 5.31) che ne derivano, calcolati per coefficiente di attrito interno  $\mu=0.65$ . I massimi valori in senso assoluto si trovano disposti subito a ridosso dei contatti tra reservoir e roccia di copertura, decadendo immediatamente poi a valori al di sotto di 1 MPa (il blu in figura 5.31) : questi andamenti, ed i relativi valori di  $S_o$  calcolati vanno comparati con i valori di coesione tipica per materiali rocciosi consolidati, solitamente nell'ordine di 1-10 MPa per rocce meno coese: qualora fossero infatti presenti dei corpi rocciosi meno consolidati, in corrispondenza dei massimi valori di  $S_o$ , verrebbero superate le condizioni di elasticità, e potrebbero verificarsi deformazioni fragili o plastiche.

Il campo di  $S_o$  qui derivato dipende, oltre che ai valori di stress principali anche da altri due fattori:

- la geometria del modello e quindi la mesh sulla quale viene effettuato il calcolo;
- le condizioni al contorno ad ogni elemento della mesh lungo il bordo del reservoir.

In questo caso infatti, nonostante i valori di spostamento imposti ad ogni segmento del contorno del reservoir varino di pochi centimetri (0.5 - 1 cm ) tra due segmenti contigui del bordo, questo è sufficiente a generare alcuni punti di instabilità locali (in particolare nelle aree centrali del reservoir).

## **5.7 CONCLUSIONI**

Questo studio è stato sviluppato per determinare una nuova metodologia di indagine geologica - geomeccanica atta a calcolare i campi elastici indotti dalla variazione di pressione in un reservoir adibito a sito di stoccaggio di gas naturale. Gli obiettivi principali consistono nella validazione di una procedura metodologica che segue le seguenti tappe, che possono essere così descritte:

analisi di produzione, caratterizzazione geologica e geometrica del reservoir; qui vengono definite le caratteristiche petrofisiche del materiale, le geometrie dei corpi rocciosi e le relazioni con le rocce che lo circondano; inoltre, in questa fase viene affrontata l'analisi della deformazione volumetrica del reservoir che consente di definire una curva di stress-strain, mettendo in relazione la variazione di pressione di poro (ed indirettamente lo stress efficace) con i fenomeni di compattazione/espansione del reservoir ;

analisi delle deformazioni della superficie geodetiche;

analisi semi-analitica tramite risoluzione del problema di inomogeneità; il problema, risolto tramite modellazione semianalitica tridimensionale prevede un reservoir di forma ellissoidale con semiassi  $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ , immerso in uno spazio infinito elastico omogeneo

analisi a elementi finiti tramite applicazione di un problema in 2D con condizioni di spostamento al contorno;

L'applicazione di questa procedura ha consentito di ottenere:

La costruzione di una curva stress-strain per il reservoir di Collalto; la stessa curva rappresenta un utile risultato perchè consente di caratterizzare l'evoluzione deformativa del reservoir in funzione del suo andamento produttivo. La curva consente inoltre di definire il range di deformazione non elastica, che si traduce in un quantitativo di volume di reservoir non più recuperabile ed utilizzabile per le operazioni di stoccaggio.

In ottica futura questa informazione è fondamentale per la definizione dei volumi e delle pressioni di immissione e di estrazione nei cicli di stoccaggio.

Le relazioni tra deformazioni del reservoir e deformazioni della superficie geodetica; in questo modo è stato possibile comprendere come:

- a) esista un trend di subsidenza ancora in atto, nonostante la fine della produzione e la riconversione a stoccaggio,
- b) esista un percorso di recupero della subsidenza messo in atto tramite la riconversione a stoccaggio del reservoir, e
- c) il comportamento del caprock sia assimilabile a quello di un aquitardo, con la deformazione indotta dal reservoir che si trasmette più lentamente rispetto quella all'interno del reservoir, date le possibili eterogeneità che caratterizzano la roccia di copertura.

La comprensione e la quantificazione dei campi elastici indotti dalla attività del reservoir di Collalto, tramite l'utilizzo del problema di inomogeneità in un full space elastico isotropico omogeneo; i campi elastici sono risolti semi-analiticamente in 3D, su piani definiti dall'utente, tramite l'utilizzo di uno specifico pacchetto MATLAB, che risolve il problema della inclusione equivalente (Mura ,1972); in particolare

- a) alla data odierna e per conoscenza dell'autore di questo elaborato, questo rappresenta il primo caso di applicazione tridimensionale di questo problema all'analisi delle deformazioni indotte dall'attività di produzione e/o stoccaggio su un caso di reservoir reale, non sintetico.
- b) nonostante una serie di approssimazioni, metodologiche ed analitiche, introdotte per la definizione delle condizioni al contorno, il modello semi-analitico spiega in maniera efficace i risultati ottenuti in termini di deformazioni reali alla superficie geodetica, misurate tramite livellazioni ottiche ripetute nel tempo.

La definizione delle aree a maggior rischio di deformazione non-elastica derivate dalla attività del reservoir di Collalto tramite l'utilizzo di una analisi agli elementi finiti in 2D, con condizioni di spostamento al contorno, sulla reale geometria del sistema di

stoccaggio di Collalto Stoccaggio; in particolare sono state definite le zone dove si sviluppano i maggiori gradienti di stress, che si localizzano nelle immediate vicinanze del reservoir, con valori al di sotto di 1 MPa, ma con influenze anche in aree laterali, con minore intensità;

Quindi, l'intero studio ha consentito la creazione di una piattaforma metodologica ed applicativa che potrà essere utilizzata, in futuro, per monitorare in tempo reale le deformazioni indotte dal reservoir. In questo punto è insito lo scopo principale, non solo dello studio sul reservoir di Collalto, ma anche sull'intero progetto scientifico della tesi, ovvero quello di sviluppare una metodologia rapida ed efficace di stima delle deformazioni indotte tramite caratterizzazione geologica e geomeccanica.

Le ricadute di questo lavoro di tesi, ed in particolare dello studio sul sistema di stoccaggio del reservoir di Collalto vanno a coprire dei gap sul piano tecnico-amministrativo, per le richieste degli enti pubblici (sempre più esigenti in materia di controllo sulle attività legate all'estrazione ed allo stoccaggio di idrocarburi) alla società gestore dello stoccaggio, ma soprattutto sul piano scientifico, interfacciandosi positivamente con ulteriori monitoraggi, quale ad esempio quello microsismico, messo a punto per il sito di Collalto; un esempio pratico ed utile di queste ricadute è data dalla possibilità di fornire delle linee guida per lo studio dei microsismi, in funzione dei tassi di deformazione, delle variazioni dei campi elastici e della loro quantificazione, ed in generale delle aree che maggiormente risentono della influenza delle variazioni del reservoir: questo fornisce difatti una base ed uno spunto di indagine al monitoraggio sismico, che, ad oggi, non è ancora riuscito a fornire indicazioni utili, data la elevatissima mole di microsismi registrati.

Infine, questo approccio metodologico - analitico, fornisce uno strumento utilizzabile su differenti reservoir, e risulta particolarmente adatto per reservoir riconvertiti a stoccaggio dopo la fase produttiva: nel capitolo seguente, viene presentato un ulteriore caso di studio di valutazione di rischi geologico-geomeccanico di stoccaggio ytramite la procedura qui sviluppata.

## CAPITOLO 6

### CASO DI STUDIO: BAGNOLO MELLA STOCCAGGIO

#### *6.1 INTRODUZIONE E SCOPO DEL LAVORO*

Come anticipato nel capitolo precedente, questo studio rappresenta un ulteriore esempio di applicazione della procedura per la caratterizzazione geologica e geomeccanica di un reservoir adibito a stoccaggio di gas naturale precedentemente sviluppata.

A differenza del caso Collalto Stoccaggio , in questo caso ci troviamo di fronte ad un sito candidato a divenire un reservoir per stoccaggio di gas naturale, dopo essere stato sfruttato, negli anni '60 come campo a gas.

A causa della “veneranda età” non si dispone di dati di studio di reservoir molto accurati, nonostante siano stati recentemente ricalcolati i valori di GOIP, e siano state nuovamente definite geometrie e caratteristiche del sito.

Tuttavia, come spesso si è costretti a fare, in questo studio utilizzerò parametri petrofisici e geomeccanici non misurati direttamente, ma desunti dalla letteratura.

L'impostazione di caratterizzazione geologica-geomeccanica tramite determinazione di parametri di giacimento, petrofisica della roccia, studio del comportamento del reservoir (pressione, strain) e valutazione dei campi elastici indotti dalle operazioni sul reservoir (modellazione semi-analitica tramite problema di inomogeneità ed analisi numerica tramite elementi finiti) è del tutto analoga a quella descritta e testata sul campo di Collato, sebbene con dati di partenza derivanti da metodi di indagine differenti: un'ulteriore riprova, qualora fosse necessaria, della bontà e della “elasticità” della metodologia utilizzata.

In questo studio infatti vengono analizzati i movimenti geodetici avvenuti in occasione di una produzione molto limitata nel tempo e nei volumi, ma in una finestra temporale favorevole all'utilizzo della tecnica di tele-rilevamento InSAR. Si tratta di una riapertura mineraria del pozzo Bagnolo Mella 8 avvenuta tra il 1999 ed il 2000. Su richiesta del gestore, la società TRE srl ha condotto uno studio dei movimenti geodetici

fornendo i dati che hanno permesso di calibrare i modelli dello studio geologico-geomeccanico: questi dati costituiscono parte integrante del presente studio.

Una volta riconosciuta con ragionevole certezza la corrispondenza tra produzione e subsidenza, si è in grado di calibrare un modello geo-meccanico capace di onorare i dati osservati. Questo modello fornisce i parametri che permettono un'ulteriore modellizzazione per ottenere informazioni sulla perturbazione tensionale associabile all'attività di stoccaggio. Infine, un ultimo passaggio è la valutazione della stabilità, cioè della possibilità di rottura della roccia in seguito allo sviluppo di tale perturbazione.

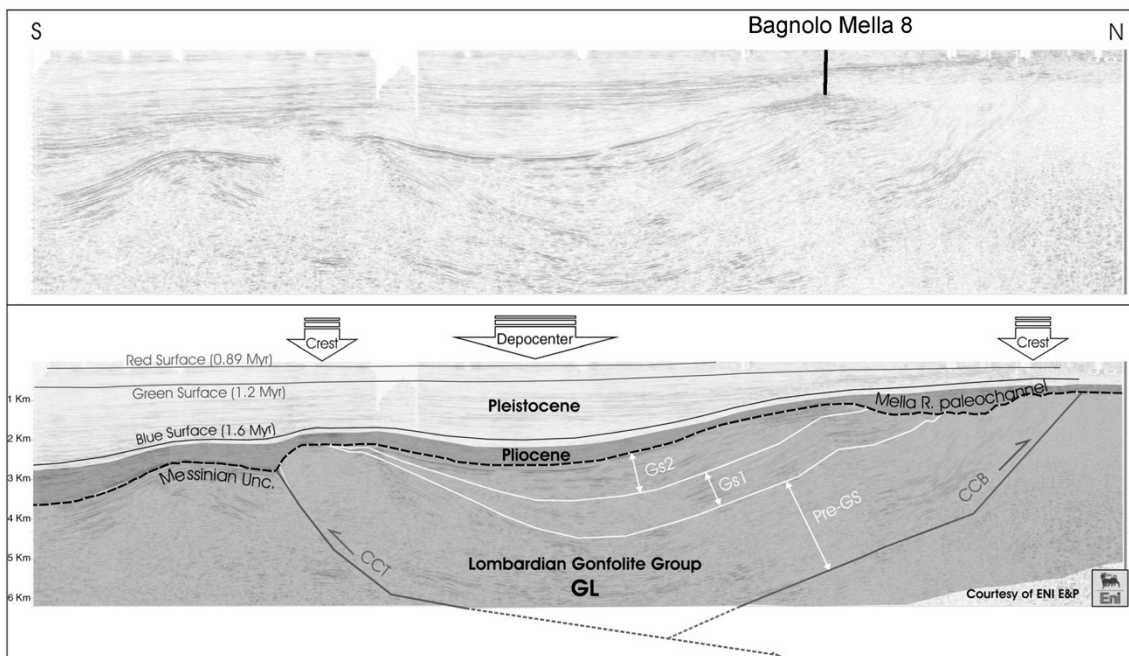
## **6.2 INQUADRAMENTO GEOLOGICO**

Il giacimento esaurito “Bagnolo Mella” è situato nella Pianura Padana in un'area contesa dall'avampaese Sudalpino e da quello Appenninico. Il primo è stato attivo a partire dal Cretaceo ed ha permesso l'accumulo di imponenti successioni di avanfossa, note con il nome di bacino della Flysch Lombardo e della Gonfolite. Queste potenti successioni sono state deformate tra il Langhiano ed il Tortoniano da una serie di pieghe e sovrascorrimenti, ed erose in ambiente continentale tra il Serravalliano ed il Messiniano. La trasgressione successiva è avvenuta a partire dal Messiniano superiore, quando l'avampaese è stato flesso verso Sud dalla subduzione appenninica. Le strutture tettoniche così sviluppate sono state parzialmente riattivate soprattutto nel Pleistocene Inferiore (Livio et al., 2009). Nell'area del giacimento, la struttura più importante è il sovrascorrimento di Capriano del Colle, che comprende le unità di avampaese ed il sottostante Mesozoico per circa 4 km di spessore, interessate da un sovrascorrimento vergente a Sudovest, a cui si associa un retroscorrimento vergente a Nordest (Figg. 6. 3 e 6.4 ). La struttura del giacimento è posizionata sulla culminazione di un'anticlinale secondaria da scivolamento flessurale (CCB – FSF in Fig. 6.4).

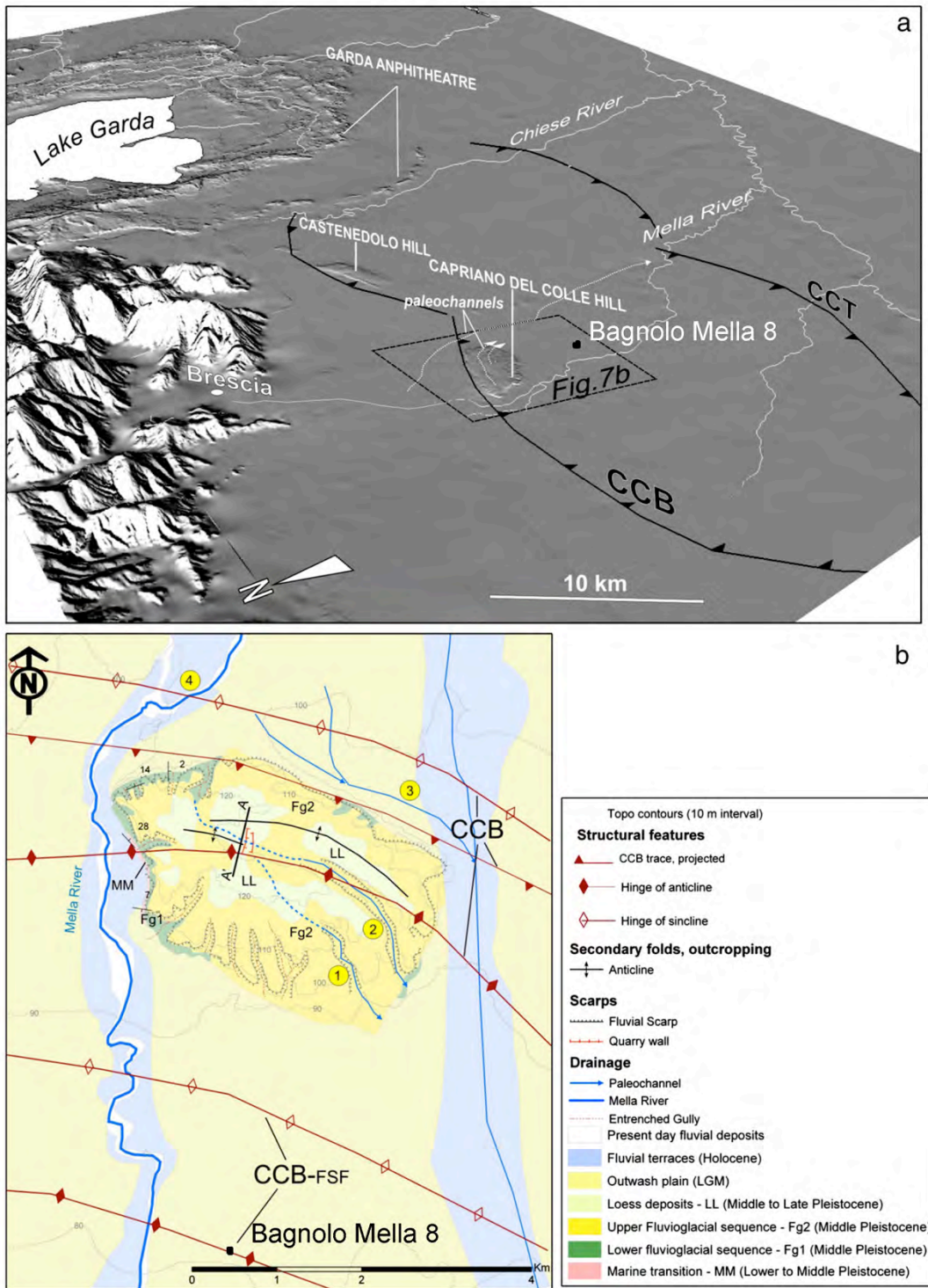
Il cambiamento da avampaese Sudalpino ad avampaese Appenninico è rimarcato da una superficie di inconformità molto accentuata (Messinian unc. in Fig. 6.3), formatasi tra il Tortoniano superiore ed il Messiniano in ambiente continentale. Durante questo periodo l'area in studio, come il resto del Sudalpino meridionale ha visto l'azione erosiva di un



fiume, localizzato in prossimità del corso attuale (Mella R. paleochannel in Fig. 6.3), in una situazione di livello di base più basso dell'attuale. Queste condizioni si sono realizzate alla fine del Tortoniano, con una prima importante caduta del livello marino di oltre 50 m, ma soprattutto, in misura ancora più importante, alla fine del Messiniano, durante il famoso “disseccamento” avvenuto 5,5 Milioni di anni fa, ove si valuta che il livello marino del golfo padano sia calato repentinamente di diverse centinaia di metri, costringendo i fiumi ad approfondire notevolmente il substrato. Questo evento ha permesso al fiume Mella di scavarsi un alveo nel substrato per un'incisione di oltre 500 m, come evidenziato dal profilo sismico di Fig. 6.3.



**Figura 6.3** – Una sezione sismica attraverso la struttura anticlinale di Bagnolo Mella, un'anticlinale legata ad una faglia minore associata al retroscorrimento di Capriano del Colle (da Livio et al., 2009). Si noti che in realtà questa linea corre alcuni km ad ovest del giacimento, pertanto in questo esempio il paleocanale del Mella non coincide con la culminazione dell'anticlinale.



**Figura 6.4** – La posizione del giacimento Bagnolo Mella (il punto nero localizza il pozzo Bagnolo Mella 8) rispetto al retroscorrimento di Capriano del Colle (CCB) (modificata da Livio et al., 2009)

## **6.2 IL SERBATOIO GEOLOGICO PROFONDO DI BAGNOLO MELLA: CARATTERISTICHE DEL GIACIMENTO**

Come visto nel precedente capitolo, dal punto di vista geologico quella di Bagnolo Mella è una trappola di tipo misto “strutturale-stratigrafica”. Essa si presenta come un’anticlinale orientata NW-SE e troncata su un fianco per shale-out.

La copertura è garantita dal complesso delle “Argille del Santerno” (Pliocene Inferiore – Pleistocene Inferiore). Si tratta di una unità di grande spessore, formata in prevalenza da peliti con qualche intercalazione di sabbie soprattutto nella parte alta, ove passa gradualmente ad unità più grossolane legate al progressivo riempimento del bacino padano (Sabbie di Asti). Il serbatoio appartiene alle Ghiaie di Sergnano ed è costituito da 2 sottolivelli (denominati “A”, e “B”) separati da un setto argilloso, apparentemente continuo su tutto il campo, ma non perfettamente isolato idraulicamente.

Il giacimento di Bagnolo Mella è entrato in produzione nel luglio del 1956. Esso è stato coltivato con 4 pozzi, e la produzione cumulativa del campo è stata pari a circa 639 Milioni Smc. Il meccanismo di produzione dominante in giacimento è stato la “forte spinta d’acqua”. L’acquifero ha fatto sentire la sua presenza fin dall’inizio della produzione; tuttavia, la massima influenza si è manifestata nel momento in cui la produzione ha cominciato a declinare, fino alla chiusura. La fine produttiva e la chiusura di tutti i pozzi (2001) sono avvenute per annegamento progressivo in seguito alla risalita delle acque di strato. Il contatto originario gas - acqua è stato identificato a - 1152 m s.l.m. L’acquifero è unico per entrambi i livelli. Si stima che al 1° gennaio 2007 esso sia risalito di oltre 73 metri rispetto alla posizione originaria, raggiungendo la quota di -1078,7 m s.l.m. La permeabilità media del serbatoio, valutata rielaborando i dati delle prove di produzione, risulta pari a 33 mD, la porosità media è pari a circa il 24%.

### *Stratigrafia*

Le unità stratigrafiche incontrate durante la perforazione dei pozzi del campo sono le seguenti:

- Alluvioni: si tratta di depositi grossolani ghiaiosi e sabbiosi, deposti in ambiente

fluviale e fluvio-glaciale all'esterno degli anfiteatri morenici dei grandi ghiacciai pleistocenici. Spessore circa 70 m, età Pleistocene Medio-Superiore.

- Sabbie di Asti: comprende le successioni di sabbie e peliti legate alla progradazione del sistema pendio – piattaforma che ha causato il riempimento del bacino padano. Si tratta di granulometrie prevalentemente sabbiose, con interstrati pelitici che possono localmente prevalere nella parte inferiore dell'unità. Spessore circa 200 m, età Pleistocene Inferiore.

- Argille del Santerno (Argille Azzurre): unità pelitica deposta in ambiente di rampa di avampaese ad opera di processi emipelagici, ed eteropica alle unità più grossolane alimentate dai depositi gravitativi (note nel sottosuolo della pianura come Fm Porto Corsini e Porto Garibaldi). Ricopre in drappeggio la superficie di inconformità Messiniana. Spessore circa 900 m, età Pliocene Inferiore – Pleistocene Inferiore; poggia sulla discordanza del Messiniano.

- Ghiaie di Sergnano: unità costituita da depositi grossolani, soprattutto ghiaie e sabbie con rare intercalazioni pelitiche, depositi in ambiente continentale all'interno di una valle incisa. Spessori variabili intorno ai 45 m nell'area del giacimento, con variabilità più ampie fino ad oltre 100 m nei settori più incisi del paleocanale, età Messiniano Superiore (post-evaporitico, cicli pev 1 e pev 2).

#### *Superficie di inconformità*

- Marne di Gallare: unità emipelagica costituita da marne talora siltose facenti parte della parte superiore del Gruppo della Gonfolite, depositi sugli alti strutturali (anticlinali) che venivano sollevate rispetto al depocentro. Spessore non verificato, età Miocene Inferiore.

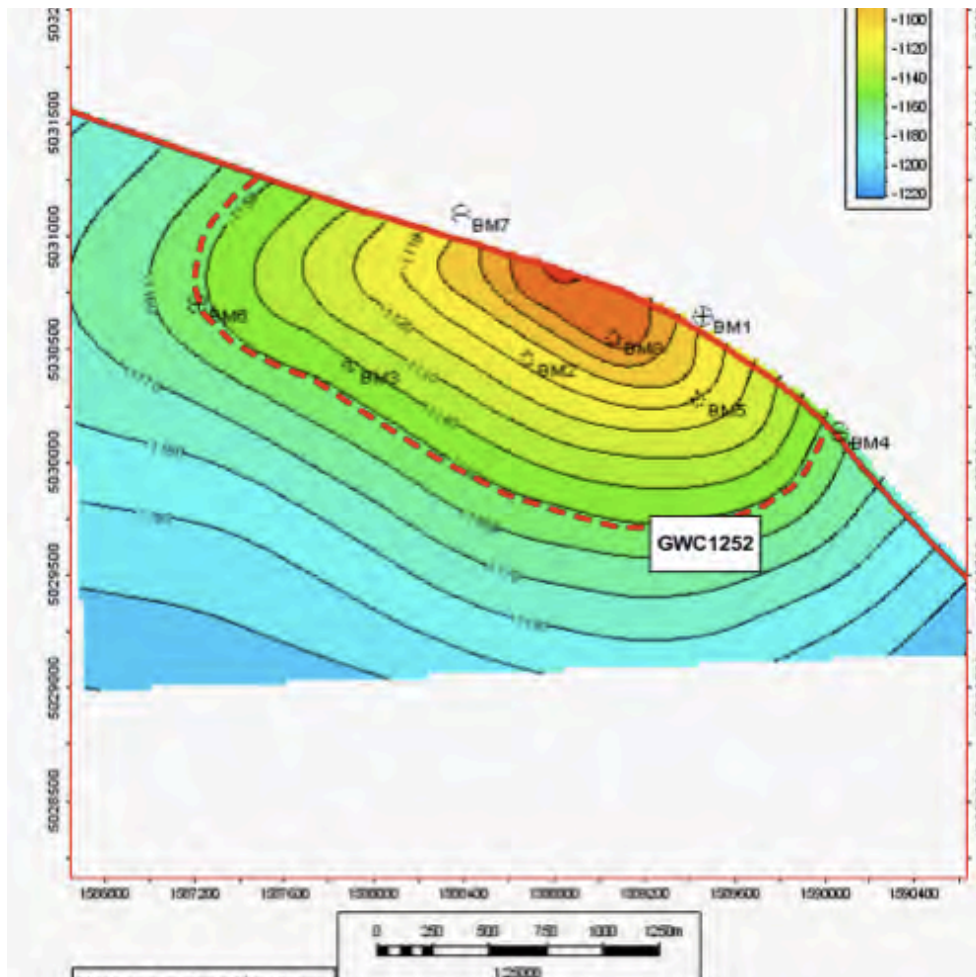
Come già accennato a pagina 11, all'interno delle Ghiaie di Sergnano è risultato mineralizzato a gas un livello suddiviso da un setto argilloso in due livelli, A e B. I due livelli sono stati drenati da quattro pozzi; i pozzi 2 e 5 hanno erogato unitamente dai due livelli (commingle) mentre i pozzi 3 e 8 hanno erogato dal solo livello A.

Dal 1955 al 1963 nell'area del giacimento Bagnolo Mella sono stati perforati complessivamente otto pozzi (1,2,3,4,5,6,7,8), dei quali soltanto il pozzo 7 è risultato

sterile, non avendo ritrovato il serbatoio principale. Il pozzo di scoperta Bagnolo Mella 1 ha riscontrato mineralizzata a gas una lente inferiore al livello A+B ma a bassa produttività e non è dunque mai stato messo in produzione, mentre il pozzo Bagnolo Mella 4 ha raggiunto la tavola d'acqua ed è stato pertanto abbandonato.

#### *Assetto strutturale*

Dal punto di vista strutturale, il giacimento è molto semplice, come evidenziato dalla Figura 6.7, ove è visibile la struttura brachi-anticlinale allungata in senso WNW – ESE. La troncatura netta verso NNE è legata alla chiusura delle Ghiaie di Sergnano verso il fianco del paleocanale del Mella.



**Figura 6.7** – Mappa delle isobate del tetto del serbatoio nel campo Bagnolo Mella (s.l.m.). Si noti la localizzazione del contatto originale gas-acqua (GCW) e degli otto pozzi.

### *Parametri iniziali di giacimento, caratterizzazione dei fluidi e della roccia*

Le condizioni statiche di riferimento sono rappresentate dalla pressione e dalla temperatura con riferimento al datum del giacimento, e dal gradiente idraulico dei pori presentati qui di seguito :

Datum del campo = -1140 m s.l.m.

Pressione iniziale di giacimento ( $P_i$ ) al datum = 136,1 Kg/cm<sup>2</sup><sub>a</sub>

Temperatura statica di giacimento ( $T_s$ ) al datum = 41 °C (314 °K)

Gradiente idraulico dei pori = 0,11938 Kg/cm<sup>2</sup> /m

Contatto gas-acqua originario -1152 m s.l.m.

L'acquifero è particolarmente attivo. Il massimo declino della pressione di giacimento rispetto alla originaria (136 Kg/cm<sup>2</sup>) si è verificato dopo 10 anni di produzione, quando la pressione media raggiunse il valore minimo di 88 Kg/cm<sup>2</sup>. L'acquifero ha invaso successivamente il giacimento per circa il 95% raggiungendo praticamente il top strutturale. A fine produzione si è avuta una forte ripressurizzazione del giacimento. La pressione è risalita fino a circa 126 Kg/cm<sup>2</sup>.

I parametri caratteristici dell'acqua di strato e della roccia nelle condizioni iniziali sono presentati nella tabella seguente:

#### *Caratterizzazione dell'acqua di strato*

Salinità acqua di strato NaCl = 45 g/l Pressione di strato $P_i$ = 1936 psia Temperatura di strato $T_s$ = 106 °F
Fattore di volume dell'acqua $B_w$ = 1,0022 mc/mcST Viscosità acqua di strato ( $P_i, T_s$ ) $\mu_w$ = 0,6914 cp Compressibilità acqua di strato ( $P_i, T_s$ ) $C_w$ = 3,868 10 <sup>-5</sup> 1/Kg/cm <sup>2</sup>

#### *Caratterizzazione della roccia*

Pressione di strato $P_i$ = 1936 psia Porosità $\phi$ = 24% Profondità media = 4034 ft
Compressibilità della roccia ( $P_i, T_s$ ) $C_f$ = 4,693 10 <sup>-5</sup> 1/Kg/cm <sup>2</sup>

### 6.3 DATI E STORIA DELLA PRODUZIONE

La produzione è iniziata nel luglio del 1956. La vita produttiva è stata regolare fino al 1962 quando i primi arrivi d'acqua che si sono manifestati quasi contemporaneamente sui tre pozzi aperti BM-2-3-5 hanno provocato il rapido declino della produzione. La chiusura dei tre pozzi avvenuta fra il 1963 e il 1965, quindi immediatamente dopo i primi segnali d'acqua, ha favorito l'ingresso d'acqua che ha compromesso in breve tempo anche il pozzo di culmine BM-8 aperto nel 1963 e chiuso nel 1979. La lunga vita produttiva del pozzo BM-8 è dovuta alla ridotta portata di gas (dell'ordine di 5-8.000 Smc/g), ed alla sua posizione strutturale alta che ne ha prevenuto l'annegamento. Il grafico della produzione storica è riportato nella figura 6.8.



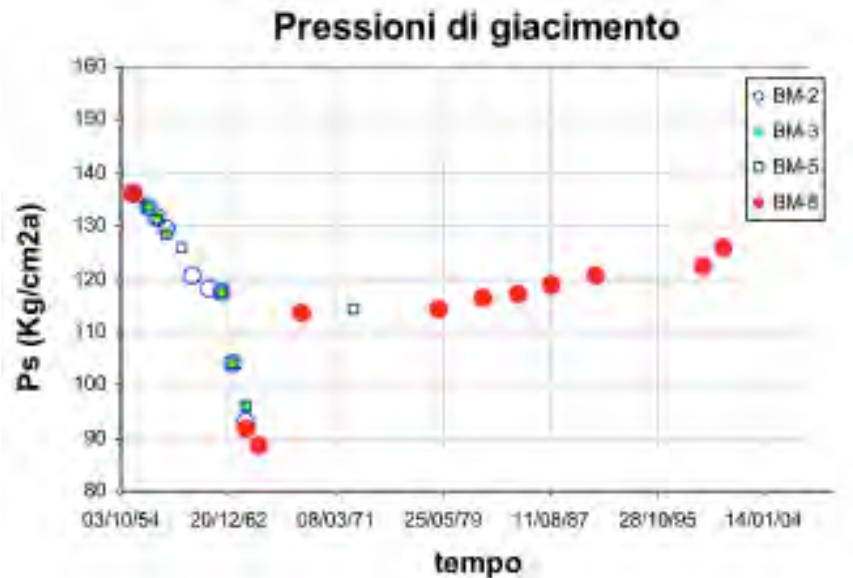
**Figura 6.8** – Produzioni annuali per pozzo nel giacimento Bagnolo Mella

La produzione cumulativa del campo alla chiusura nel marzo 1979 è stata di 636,3 Milioni di Smc.

Si deve rilevare tuttavia che dal 1956 al 1966 (cioè in soli 10 anni) è stato prodotto il 95% della produzione cumulativa totale del campo. Nel novembre 1999 il pozzo BM-8 è stato riaperto per alimentare un impianto di generazione elettrica, e dopo 9 mesi, con

una produzione di circa 3 Milioni di Smc, è stato definitivamente chiuso (agosto 2000). Questo significa che l'acquifero ha invaso quasi totalmente il giacimento poiché il pozzo BM-8 è ubicato in culmine strutturale.

Il comportamento del campo è stato ben monitorato con frequenti controlli al fondo che hanno evidenziato il rapido declino dovuto al grande ritmo di produzione (pressione statica minima di circa 88 Kg/cm<sup>2</sup><sub>a</sub> misurata sul pozzo BM-8 nel 1965). A seguito della chiusura dei pozzi per acqua e della conseguente riduzione di produzione si assiste ad una ripressurizzazione dovuta all'espansione dell'acquifero. Il comportamento delle pressioni storiche registrate ai pozzi (datum -1140 m s.l.m.) è presentato nella figura 6.9.



**Figura 6.9**– Andamento temporale della pressione interstiziale nel giacimento Bagnolo Mella.

Il comportamento della pressione statica di fondo documenta l'esistenza di un supporto acquifero attivo che si manifesta con grande vigore dal momento in cui la produzione diminuisce fino alla chiusura del campo e oltre. Durante la produzione gli effetti non sono così evidenti per l'inerzia naturale dell'acquifero.



## **6.4 VALUTAZIONE DELLE DEFORMAZIONI ALLA SUPERFICIE GEODETICA**

### *Analisi dei dati per il riconoscimento di subsidenza indotta dalla produzione*

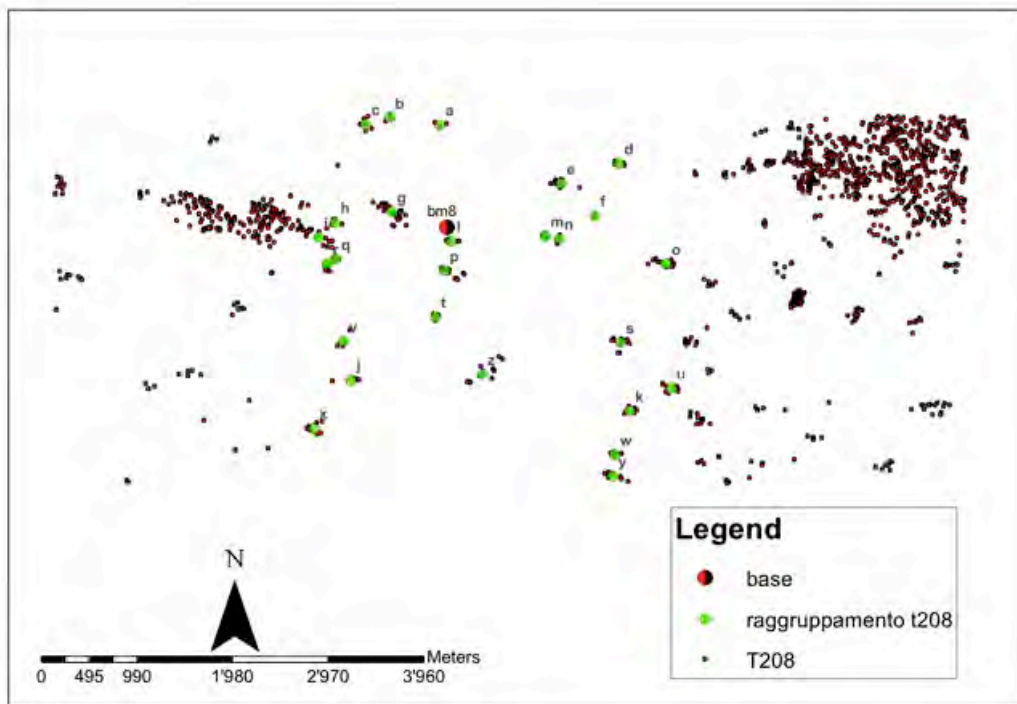
La valutazione delle deformazioni superficiali è stata condotta per determinare gli eventuali campi di spostamento generati durante la fase di attività del campo Bangolo Mella nel periodo a cavallo tra il 1999 ed il 2000.

A tale scopo sono stati elaborate variazioni altimetriche derivanti dal monitoraggio Squee-sar di TRE, che ha fornito dati a partire dal 1992 fino al Dicembre 2000.

Una prima e fondamentale premessa, della quale bisogna tener conto, risiede nella distribuzione spaziale di tali dati: essi risultano di non facile interpretazione in corrispondenza delle aree interessate dalla concessione, fatto dovuto alla scarsità di riferimenti utilizzabili dalla tecnologia InSAR.

Tuttavia, sulla base dei dati forniti, sono state analizzate le serie temporali discendenti, che hanno mostrato una maggiore copertura del dato , e che pertanto offrono maggiore affidabilità.

Per ricavare l'andamento nell'intorno del campo, tenendo comunque come punto di riferimento quello fornito da TRE, sono stati selezionati i punti di misura in un intorno statisticamente più rappresentativo del campo, tralasciando molti punti di misura nelle aree più distanti (Fig. 6.10).



**Figura 6.10** – Suddivisione dei raggruppamenti ricavati dai dati Squee-sar; i punti di raggruppamento sono riportati con dei pallini verdi; per confronto è riportata la posizione del pozzo BM8; i puntini rossi rappresentano tutte le misurazioni Squee-sar della serie discendente.

Successivamente, poiché i punti selezionati ricadevano in particolar modo intorno a manufatti distribuiti nelle aree agricole ed industriali all'interno dell'area della concessione, e pertanto densamente distribuiti in clusters, sono stati raggruppati in 25 gruppi (denominati con lettere minuscole dell'alfabeto): le misure che ne derivano sono dunque rappresentative di medie di gruppi in un'intorno del punto rappresentativo del raggruppamento. In questo modo, gli errori casuali nelle misurazioni vengono "smussati", preservando l'informazione principale.

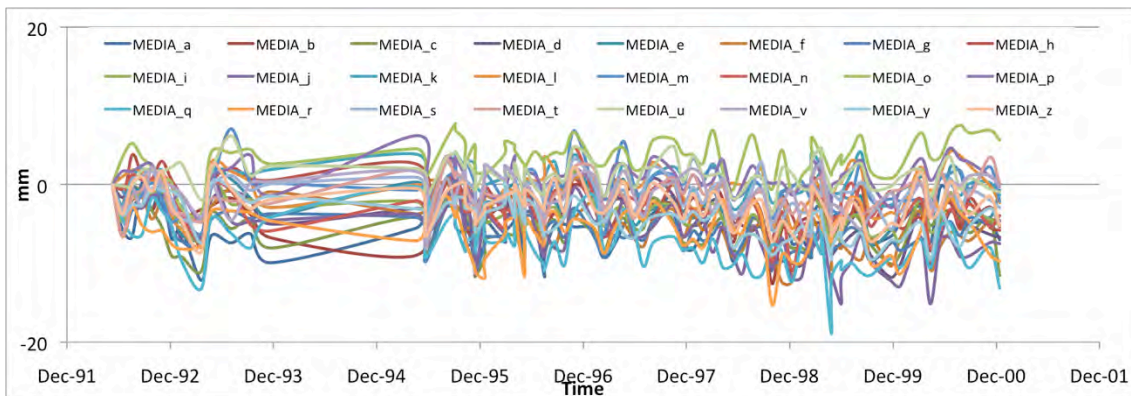
Ad esempio, il gruppo denominato "gruppo l" è rappresentativo dei punti A0QDT, A0QDU, A0QDV, A0QDW, A0QDX, A0QDY, A0QDZ, che ricadono tutti intorno ad un manufatto. Essi rappresentano i punti di misurazione più prossimi al pozzo BM 8, e quindi, almeno in linea teorica, maggiormente dovrebbero risentire dell'influenza del reservoir. Con la stessa tipologia di approccio sono stati determinati gli altri punti di raggruppamento.

Per definire le serie temporali di ogni raggruppamento è stata elaborata la media di ogni misurazione per i punti appartenenti ad ogni raggruppamento.

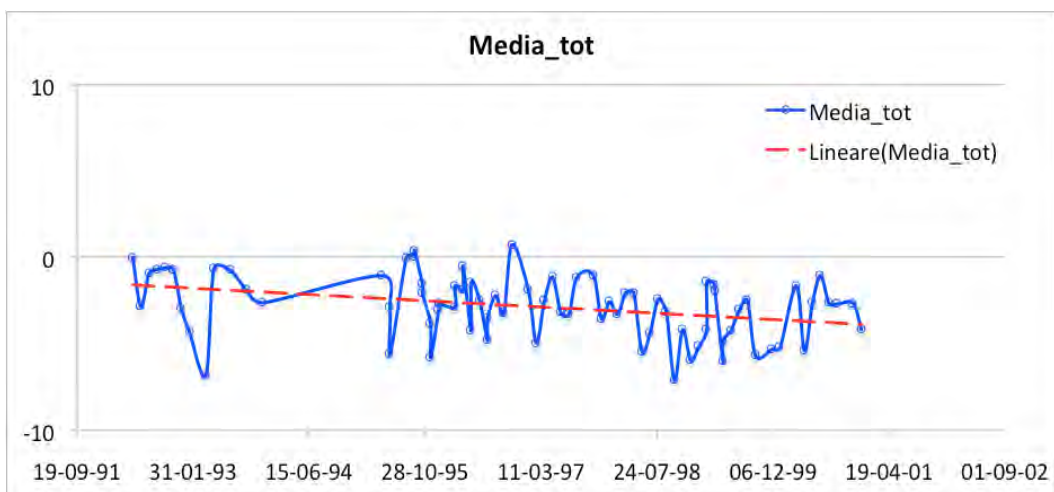
Le venticinque serie così determinate rappresentano l'andamento medio di quel particolare gruppo di punti.

L'analisi delle serie temporali (Fig. 6.11) evidenzia delle oscillazioni di natura ciclica con dei minimi relativi nei periodi di maggio e novembre in particolare, legati all'espansione termica e probabilmente anche all'oscillazione (naturale e antropogenica) degli acquiferi più superficiali, dovuta all'alternarsi di evaporazione/sfruttamento e periodi di ricarica.

Nell'area intorno al reservoir, mediando sulla base dei raggruppamenti tutti i valori nell'arco temporale analizzato di quasi 12 anni (Fig. 6.12), si ottiene un valore di subsidenza di circa 5 mm, con un tasso di 0,4 mm annui, in linea con i valori di subsidenza naturale per quest'area (Carminati e Di Donato, 1999)

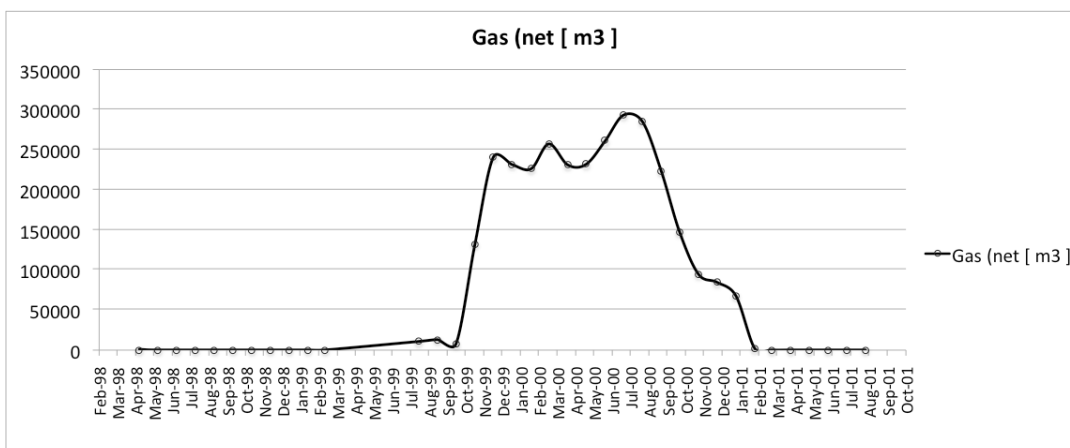


**Figura 6.11** – Andamento della subsidenza per i diversi gruppi di PS individuati nel decennio 1992 - 2001



**Figura 6.12** – Andamento temporale della media di tutte le serie di raggruppamento (blu); è riportata anche la linea di tendenza (rosso) che evidenzia un andamento di continua subsidenza dei raggruppamenti.

Per evidenziare le eventuali corrispondenze tra produzione di gas/acqua dovute all'estrazione del 1999, le serie dei raggruppamenti sono state analizzate rispecchiando le variazioni principali dei tassi di produzione nell'intervallo 1999-2000 (Fig. 6.13); sono stati così derivati differenti intervalli di misurazioni delle deformazioni superficiali, ognuna corrispondente allo scarto rispetto al valore della misurazione nella data precedente (riportate in tabella 6.1). La tabella 6.2 riporta invece gli stessi valori riferiti ad uno zero arbitrario precedente l'apertura del pozzo; questa ulteriore elaborazione consente di osservare una correlazione temporale tra variazioni topografiche e produzione di gas (Fig. 6.14), ed in particolar modo consente di definire geograficamente tale correlazione: ciò permette di definire l'area di influenza del reservoir sulla superficie, ed in base alle variazioni spazio-temporali, consente di trarre informazioni importanti riguardo alla dinamica del reservoir stesso.



**Figura 6.13** – Andamento temporale della produzione di gas nel periodo di riapertura del pozzo BM 8

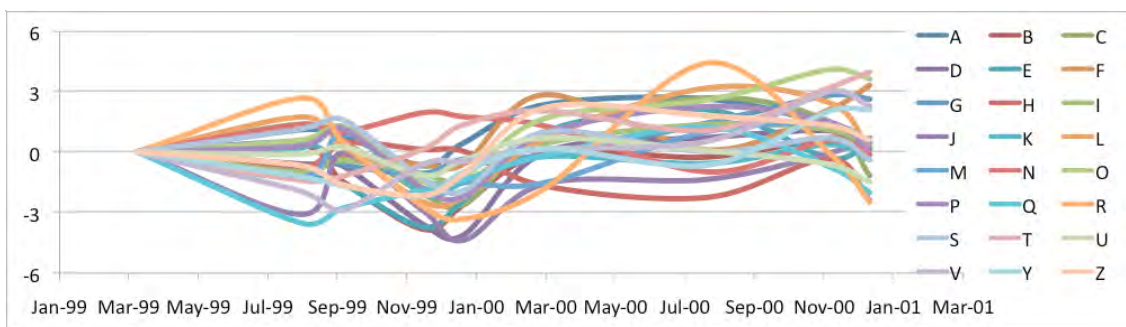
**Tabella 6.1** – Intervalli di misurazioni delle deformazioni superficiali, ognuna corrispondente corrispondente allo scarto rispetto al valore della misurazione nella data precedente

	RAGGR 29-03-99	17-08-99	21-09-99	30-11-99	04-01-00	14-03-00	01-08-00	14-11-00	19-12-00
<b>a</b>	0	-0,770	0,370	0,083	-1,414	-0,273	1,606	1,881	0,558
<b>b</b>	0	-0,951	-0,572	-2,363	-4,750	-3,522	-0,986	-1,179	-0,225
<b>c</b>	0	-0,843	0,545	-0,289	-2,925	-3,444	0,016	1,860	0,677
<b>d</b>	0	-2,492	-3,075	-3,166	-6,088	-6,590	-2,488	-1,762	-1,419
<b>e</b>	0	-0,569	-1,704	-2,136	-4,280	-2,924	0,467	1,548	-0,861
<b>f</b>	0	-2,745	-3,577	-2,943	-3,353	-3,308	0,120	-2,614	-0,623
<b>g</b>	0	-1,518	-1,025	-2,112	-2,552	-1,850	-1,661	-0,058	1,317
<b>h</b>	0	-0,475	-1,203	-0,014	-0,328	-0,424	-2,127	-2,680	-0,781
<b>i</b>	0	-0,999	-1,943	-1,363	-2,081	-2,386	-0,550	0,391	0,137
<b>j</b>	0	-2,148	-5,222	-2,186	-5,051	-6,496	-3,694	-3,486	-2,186
<b>k</b>	0	-0,374	-0,148	0,902	-2,436	-1,884	-0,592	-0,940	0,005
<b>l</b>	0	-0,954	0,811	-0,602	-3,394	-3,137	-0,255	2,243	1,521
<b>m</b>	0	-0,204	-1,400	0,775	-1,570	-1,653	-1,666	0,838	1,164
<b>n</b>	0	-1,559	-0,175	-0,564	0,407	0,204	-0,261	-2,550	-0,959
<b>o</b>	0	-0,792	-0,156	0,492	-2,214	-1,966	0,907	1,812	3,315
<b>p</b>	0	-0,304	0,019	0,882	-2,124	-2,504	0,630	1,966	1,207
<b>q</b>	0	-1,062	-4,540	-3,805	-2,905	-2,409	-1,205	0,187	-1,755
<b>r</b>	0	-1,024	1,665	-0,463	-3,734	-4,332	-2,805	3,411	-1,051
<b>s</b>	0	-0,869	0,306	0,768	-2,178	-2,759	0,140	-0,828	-0,152
<b>t</b>	0	-0,588	-1,952	-1,753	-0,406	0,804	1,482	0,526	2,624
<b>u</b>	0	-0,436	-0,533	-0,161	-1,579	-0,811	0,282	-0,356	-1,036
<b>v</b>	0	-0,537	-2,449	-3,374	-1,093	-0,944	-0,363	0,031	2,477
<b>y</b>	0	-1,720	-2,947	-3,389	-3,897	-2,696	-1,536	-2,360	0,319
<b>z</b>	0	-1,386	-2,057	-3,011	-3,528	-2,433	0,835	0,428	-0,059

**Tabella 6.2** – Intervalli di misurazioni delle deformazioni superficiali in millimetri, riferite allo zero della misura del 29-03-99

<b>RAGGR</b>	<b>29-03-99</b>	<b>17-08-99</b>	<b>21-09-99</b>	<b>30-11-99</b>	<b>04-01-00</b>	<b>14-03-00</b>	<b>01-08-00</b>	<b>14-11-00</b>	<b>19-12-00</b>
<b>a</b>	0	1,140	0,853	-0,645	0,497	2,376	2,651	1,328	0,264
<b>b</b>	0	0,379	-1,412	-3,799	-2,572	-0,036	-0,228	0,726	0,474
<b>c</b>	0	1,389	0,554	-2,082	-2,601	0,859	2,703	1,520	-1,180
<b>d</b>	0	-0,583	-0,674	-3,596	-4,098	0,003	0,730	1,073	0,314
<b>e</b>	0	-1,136	-1,568	-3,711	-2,355	1,036	2,117	-0,292	0,498
<b>f</b>	0	-0,833	-0,198	-0,608	-0,563	2,864	0,130	2,122	3,338
<b>g</b>	0	0,493	-0,594	-1,035	-0,332	-0,143	1,460	2,835	2,644
<b>h</b>	0	-0,728	0,461	0,147	0,051	-1,652	-2,205	-0,305	-2,355
<b>i</b>	0	-0,944	-0,364	-1,082	-1,387	0,449	1,390	1,136	0,320
<b>j</b>	0	-3,074	-0,038	-2,903	-4,348	-1,545	-1,337	-0,038	0,720
<b>k</b>	0	0,225	1,276	-2,062	-1,510	-0,218	-0,566	0,379	-0,379
<b>l</b>	0	1,766	0,352	-2,440	-2,183	0,699	3,198	2,475	0,140
<b>m</b>	0	-1,196	0,980	-1,365	-1,449	-1,462	1,042	1,368	0,587
<b>n</b>	0	1,384	0,995	1,966	1,763	1,298	-0,991	0,600	-0,128
<b>o</b>	0	0,636	1,284	-1,422	-1,174	1,699	2,604	4,107	3,652
<b>p</b>	0	0,323	1,186	-1,820	-2,200	0,934	2,270	1,511	0,128
<b>q</b>	0	-3,479	-2,744	-1,844	-1,347	-0,144	1,249	-0,694	-1,972
<b>r</b>	0	2,689	0,561	-2,710	-3,308	-1,781	4,435	-0,027	-2,466
<b>s</b>	0	1,176	1,638	-1,309	-1,890	1,009	0,042	0,718	-0,364
<b>t</b>	0	-1,364	-1,165	0,181	1,391	2,070	1,114	3,212	4,001
<b>u</b>	0	-0,097	0,275	-1,143	-0,375	0,718	0,080	-0,600	-1,482
<b>v</b>	0	-1,913	-2,838	-0,556	-0,408	0,174	0,568	3,014	2,286
<b>y</b>	0	-1,227	-1,669	-2,178	-0,976	0,184	-0,641	2,038	2,113
<b>z</b>	0	-0,671	-1,625	-2,142	-1,047	2,221	1,814	1,327	0,61

Questi stessi valori sono stati poi riportati in Tabella 2, a confronto con il dato del 29-3-99, posto come 0 relativo.



**Figura 6.14** – Andamento temporale della subsidenza utilizzando i dati della tabella 2. Si noti l’andamento di subsidenza nel periodo di apertura del pozzo BM 8.

Dal grafico in alto possiamo notare come per quasi tutti i raggruppamenti si osservi un andamento pronunciato nel periodo Agosto-Dicembre 1999, corrispondente alla maggior produzione subito dopo la riapertura del pozzo; il sistema sembra tuttavia “recuperare” questa subsidenza nonostante non siano diminuiti i tassi di estrazione. Una plausibile spiegazione può risiedere nella forte influenza dell’acquifero, capace di ripristinare i livelli di pressione originari in poco tempo.

*- Considerazioni conclusive sulle relazioni tra produzione e subsidenza*

Per meglio visualizzare la corrispondenza temporale e spaziale della subsidenza in prossimità del pozzo BM 8, durante il periodo di riapertura del pozzo, abbiamo preparato delle mappe e dei profili che mostrano il comportamento del cono di subsidenza creato dall’emungimento del gas, associato ad un rimbalzo elastico dei margini del cono stesso. Inoltre, si può visualizzare la complessa risposta dell’acquifero che nel giro di pochi mesi tende a recuperare la precedente situazione di pressione dei pori. (IN APPENDICE C SONO FORNITE LE ELABORAZIONI DELLE MAPPE DI SUBSIDENZA MODELLATE DA DATI SQUESSAR)

## **6.5 MODELLAZIONE GEOMECCANICA**

### *Introduzione metodologica*

Utilizzando l'approccio di Mura (1987), Meng et al. (2011) hanno derivato delle espressioni quasi-analitiche per i campi elastici riferiti ad inclusioni ellissoidali in un corpo isotropico infinito, ed hanno sviluppato un codice MATLAB in grado di calcolare strain, stress e spostamento all'interno ed all'esterno di tali inclusioni, per qualsiasi tipologia di geometria ellissoidica:

poiché i valori di input del codice consistono nelle valutazioni di parametri riferiti alla inclusione (dimensioni dei semiassi, moduli di Poisson e Young) e dell'iniziale valore di eigenstrain, noi utilizzeremo questo codice per definire i campi elastici derivanti dalle interazioni poroelastiche, cioè variazione di massa, variazione di pressione e di volume con associata variazione di superficie topografica (subsidenza), che fornisce un controllo dell'entità degli spostamenti in superficie, relazioni tra massa, pressione e strain descritte in precedenza). Nel caso in oggetto, il valore di strain derivante dall'estrazione di fluidi dal reservoir e dalla conseguente riduzione di pressione, come quelle evidenziate nei paragrafi precedenti, fornisce la base per la definizione dell'eigenstrain da inserire nel codice.

#### ***Applicazione del modello semianalitico al caso di Bagnolo Mella***

Nel caso oggetto di studio, il valore di strain derivante dall'estrazione e/o iniezione di fluidi dal reservoir e dalla conseguente riduzione e/o aumento di pressione è stato definito tenendo conto della compressibilità del mezzo e dello stress efficace ai quali avviene la deformazione.

Durante la produzione di gas, la pressione di poro diminuisce (vice versa per l'iniezione). Poiché il carico litostatico (ovvero lo stress litostatico) non varia, lo stress efficace  $S_{\text{eff}} = S_{\text{tot}} - P$ , ( $S_{\text{tot}}$  = stress totale;  $P$  = pressione dei pori) sulla struttura granulare della roccia aumenta. Come conseguenza si assiste ad una compattazione del reservoir, ovvero il suo volume diminuisce. Se le dimensioni laterali del reservoir sono molto maggiori del suo spessore, come nel caso del reservoir di Bagnolo Mella, (2500 m / 35-40m), la compattazione si manifesta principalmente in una riduzione dell'altezza del reservoir (il suo spessore diminuisce, Geertsma, 1973b). In questo caso, la compattazione del reservoir può essere descritta dallo strain verticale  $\varepsilon_z$ ,

$$\varepsilon_z = dz/z$$



(z, altezza del reservoir, dz variazione dell'altezza)

che rappresenta la variazione nell'altezza del reservoir dz relativamente alla sua altezza iniziale z, in seguito ad un aumento dello stress efficace causato da una diminuzione della pressione di poro sotto un carico costante (quello litostatico). La compattazione del reservoir in direzione verticale è caratterizzata dal coefficiente di compattazione uni-assiale (verticale)  $c_M$ :

$$c_M = 1/z * dz/dp \quad (\text{bar}^{-1})$$

che descrive la compattazione per variazione unitaria di pressione dei pori.

La compattazione totale  $\Delta H$ , ad un certo punto nel tempo, dipende dalla differenza di pressione dei pori  $\Delta p$  fin dall'inizio della produzione e dallo spessore iniziale del reservoir H:

$$\Delta H = c_M * \Delta p * H$$

La compressibilità delle rocce del reservoir in direzione laterale è specificata dal rapporto di Poisson  $\nu$ , che rappresenta il rapporto tra strain laterale e strain verticale.

Sulla base di dati presenti in letteratura (Teatini et al.2011), un valore di coefficiente di compressibilità uni-assiale (verticale) è stato testato per le rocce del reservoir di Bagnolo Mella; il valore di questo coefficiente è stato determinato tramite analisi con radiomarkers che hanno misurato, per determinate profondità all'interno di un pozzo del bacino padano lombardo, i differenti valori di compattazione delle rocce a differenti condizioni di stress efficace  $\sigma_z$ :

$$c_{M,load} = 1.3696 \times 10^{-2} \sigma_z^{-1.1347}$$

Questo valore fornisce il riferimento per la derivazione della compressibilità (e quindi degli strain) in condizioni “vergini” del reservoir (o di I ciclo, ovvero all'inizio della fase produttiva).

L'espansione della roccia, dovuta ad iniezione di fluidi all'interno del reservoir, è invece caratterizzata da un'ulteriore valore di compressibilità che dipende da un coefficiente di II ciclo, definita  $c_{M,unloading}$ ; questa differenziazione risiede nel fatto che le rocce del reservoir non si comportano in maniera del tutto elastica, e subiscono una variazione di volume da I ciclo che non viene del tutto recuperata in una successiva fase di iniezione e/o stoccaggio, a causa di variazioni delle proprietà meccaniche ed elastiche del mezzo (ad esempio compattazione dei granuli, diminuzione del volume poroso, minore capacità del reservoir di compattarsi).

In un contesto come quello Padano, simile a quello del reservoir di Bagnolo Mella (Fig. 16), il rapporto  $s$ , tra  $c_M$  di I e II carico, varia tra 1.8 e 3.5 per  $100 < \sigma_z < 600$  bar (Teatini et al. 2011) (riferito ad un range di profondità tra 1000 e 6000 metri in condizioni di pressurizzazione normale), con  $s$  che diminuisce con l'aumento di  $\sigma_z$  (quindi diminuisce a profondità minori per stessi  $\sigma_z$ ).

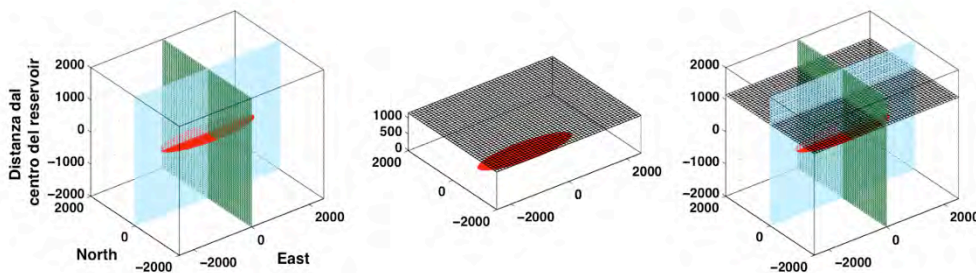


Figura 16 – Geometria reale di Bagnolo Mella adottata per la modellazione semianalitica; il reservoir (in rosso) è rappresentato da un ellissoide con semiassi di 1600, 450 e 20 m. Le griglie rappresentano i piani lungo i quali sono stati calcolati i campi elastici.

### 6.7 Valutazioni sulla stabilità secondo il criterio di rottura di Coulomb

Esistono differenti criteri utilizzati per caratterizzare le condizioni sotto le quali avviene una rottura nelle rocce. Uno dei più utilizzati è il criterio di rottura di Coulomb (Coulomb Failure Criteria, si veda tra gli altri King et al., 1994), il quale richiede che

sia lo stress di taglio che quello normale su una faglia incipiente soddisfino condizioni di frizione analoghe a quelle su una superficie pre-esistente.

Nel criterio di Coulomb, la rottura avviene su un piano quando lo Stress di Coulomb  $\sigma_f$  supera un valore specifico

$$\sigma_f = \tau_\beta - \mu \sigma_\beta - p$$

dove  $\tau_\beta$  rappresenta lo stress di taglio su un piano di rottura,  $\sigma_\beta$  lo stress normale,  $p$  la pressione di poro e  $\mu$  il coefficiente di frizione. Il valore di  $\tau$  deve sempre essere positivo in questa espressione, mentre solitamente il processo di risoluzione dello stress su un piano può fornire valori positivi o negativi dipendentemente da come il potenziale di scivolamento sia right o left-lateral (destra o sinistra, senso orario o antiorario). In questo caso il valore di  $\tau$  deve essere scelto in maniera appropriata.

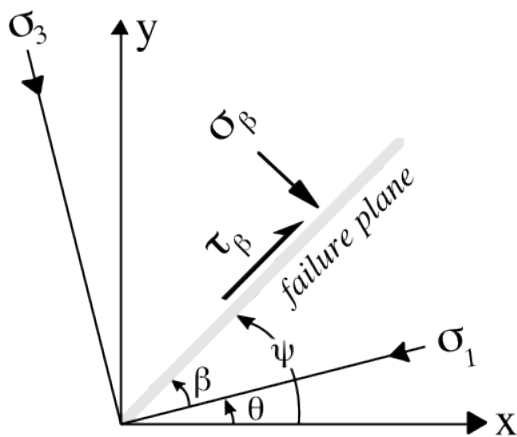


Figura 17 – Determinazione di  $\tau_\beta - \sigma_\beta$  su piano di rottura a partire dagli stress principali.

In generale, tuttavia, si può mappare la variazione di Coulomb Failure Stress su un piano (Fig. 17), includendo nella equazione le variazioni di  $\tau$  e  $\sigma$ .

Se il piano di faglia è orientato con un angolo  $\beta$  rispetto allo stress principale  $\sigma_1$  allora possiamo esprimere le componenti dello stress applicate ad esso in termini di stress principale :

$$\sigma_{\beta} = 1/2 \sigma_1 + \sigma_3 - 1/2 \sigma_1 - \sigma_3 \cos 2\beta$$

$$\tau_{\beta} = 1/2 \sigma_1 - \sigma_3 \sin 2\beta$$

dove  $\sigma_1$  è lo stress principale maggiore e  $\sigma_3$  quello minore;

in questo caso l'equazione del Coulomb Failure Stress (CFS) diviene:

$$\sigma_f = 1/2 \sigma_1 - \sigma_3 \sin 2\beta - \mu \cos 2\beta - 1/2 \mu \sigma_1 + \sigma_3 + \mu p$$

Differenziando questa equazione in funzione di  $\beta$  otteniamo che il Coulomb stress massimo si misura quando:

$$\tan 2\theta = 1/\mu$$

Coulomb, sulla base dei suoi studi sulla frizione, assume che una frattura in una roccia avvenga lungo un piano a causa di uno stress di taglio  $\tau$  che agisce lungo questo piano. il movimento lungo questo piano è assunto comunque essere contrastato dalla forza coesiva del materiale. Tale forza riflette il fatto che, in assenza di uno stress normale, uno stress di taglio finito,  $S_0$ , è ancora tipicamente necessario affinché si abbia una rottura.

Queste considerazioni portano alla formulazione del criterio matematico secondo il quale che la rottura avviene lungo un piano qualora fosse verificata la seguente condizione

$$|\tau| = S_0 + \mu \sigma$$

il segno dello stress di taglio  $\tau$  indica esclusivamente la direzione di scivolamento dopo la rottura.

Allo stesso modo, la rottura non avverrà su alcun piano se  $|\tau| < S_o + \mu * \sigma$

Per comprendere come gli stress indotti possano dare vita a fratture nella roccia di copertura o nelle rocce intorno al reservoir, abbiamo analizzato il valore di Coesive Strength, o coesione  $c$  (inteso come valore rappresentativo del limite di resistenza di una roccia alla fratturazione).

La coesione è in genere definita come  $C=2S_o$  (con  $S_o$ , Unconfined Compressive Strength (MPa) ): questo valore, risulta in generale nell'ordine delle decine di MPa (tra 20 MPa, fino a 300 Mpa, per rocce più resistenti tipo graniti o basalti).

Per valutare la stabilità degli ammassi rocciosi in concomitanza con le perturbazioni dello stress derivanti dalle operazioni di stoccaggio, si è ritenuto opportuno mappare i valori di  $S_o$  derivanti dall'analisi degli stress derivati dalla modellazione al FEM (figura 6.18 e 6.19) e ottenere una stima della possibilità che questo  $S_o$  superi il valore tipico per la rottura.

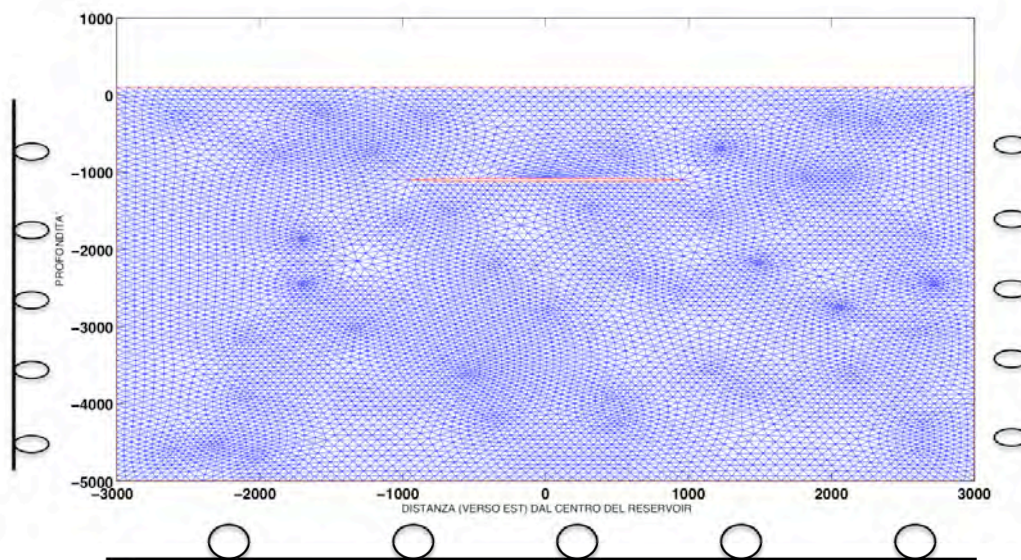


Figura 6.18 – Modellazione FEM del reservoir di Bagnolo Mella. In ogni cella viene calcolato il valore di  $\Delta CFS$  per quell'area. Ai lati si notano le boundary conditions, bloccate.

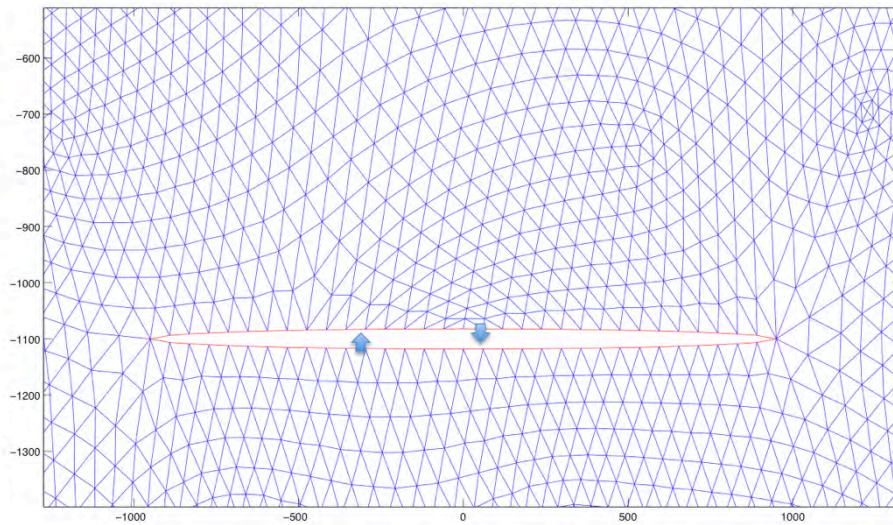


Figura 6.19 – Zoom del modello di Fig. 6.18. Le due frecce indicano la condizione al contorno del reservoir utilizzate per la modellazione

### 6.8 Analisi Geomeccanica della fase di produzione principale

Sulla base delle simulazioni, la deformazione nel reservoir è stata calcolata intorno al 2% (e.g. perdita di volume dovuta principalmente a compattazione dei granuli per diminuzione della pressione di poro e aumento dello stress efficace sulla matrice granulare).

I seguenti valori sono caratteristici di questa fase di vita del reservoir:

- |   |  |
|---|--|
| • Deformazione volumetrica                      | $\varepsilon = \Delta V/V_{tot} = 2,15\%$  |
| • Coeff.di compressibilità uniassiale verticale | $c_M = 4.3 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$ |
| • Pressione iniziale                            | $P_i = 136 \text{ bar}$                    |
| • Variazione di pressione nel reservoir         | $\Delta P = 50 \text{ bar}$                |

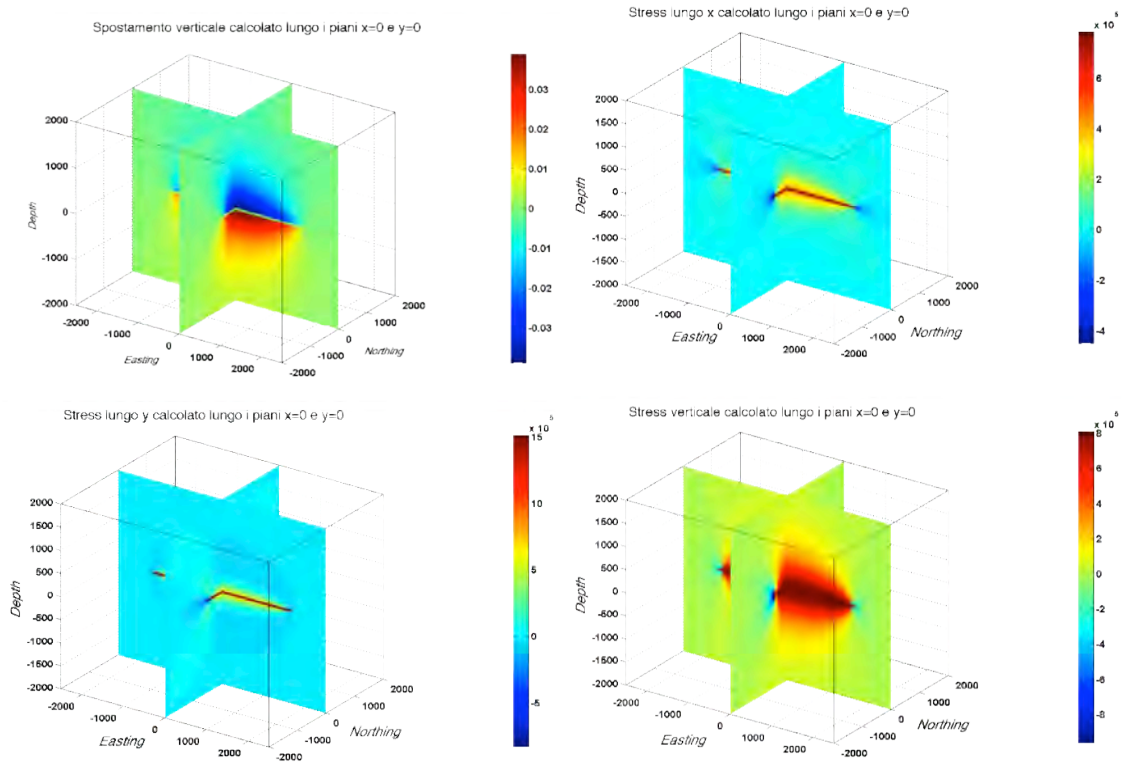


Figura 6.20- Da Sinistra in alto in senso orario: spostamento verticale, stress in direzione x, y, e z lungo i piani  $x=0$  ed  $y=0$  durante la fase di produzione principale del reservoir.

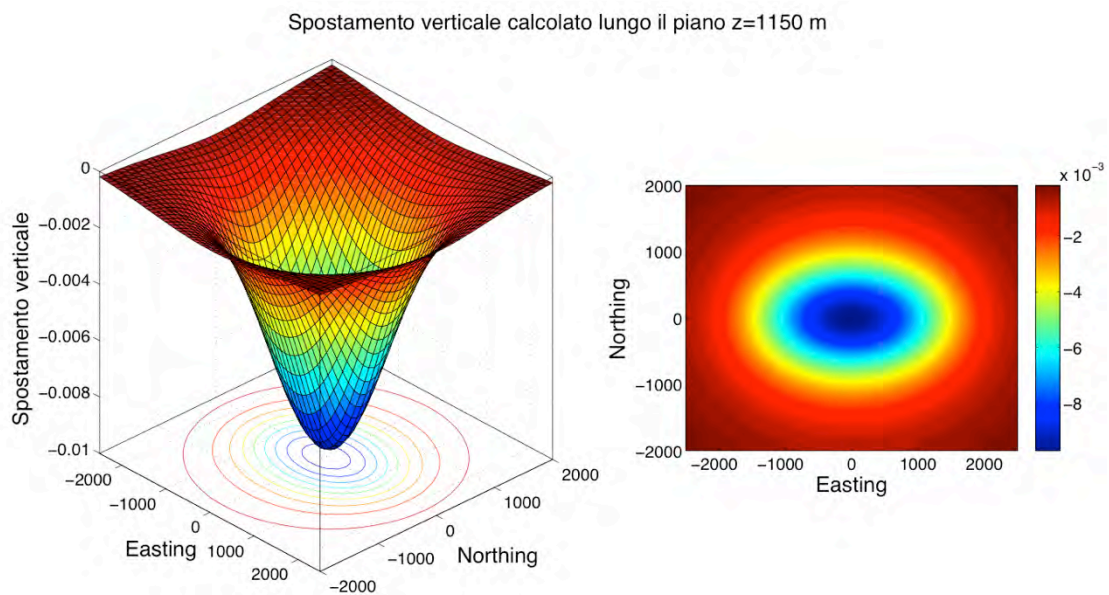


Figura – 6.21 Visione tridimensionale (a sinistra) e in piano (a destra) del campo di spostamento verticale (valore misurato in metri) alla superficie topografica, durante la fase di produzione principale del reservoir.

### 6.9 Analisi Geomeccanica della fase di “coda” produttiva (BM8, 1999-2000)

Lo stesso approccio è stato utilizzato per caratterizzare geo-meccanicamente un altro momento della vita del reservoir, corrispondente alla “coda” produttiva del BM8 (1999-2000); questo momento rappresenta in realtà la base della modellazione e della ricostruzione dei parametri meccanici ed elastici utilizzati anche per lo studio di scenari futuri.

È stato dimostrato che, in generale, la compressibilità di una roccia di reservoir cambia, assieme ad altri parametri petrofisici (porosità, permeabilità), dopo la fase principale di produzione a causa dei cambiamenti tessiturali dell’impalcatura granulare. Come già anticipato, per la modellazione è stato utilizzato il coefficiente di compressibilità  $C_{M,unload}$ , riferito dunque alla fase di stoccaggio.

I seguenti valori sono quelli caratteristici di questa fase di vita del reservoir:

- deformazione volumetrica  $\varepsilon = \Delta V/V_{tot} = 0,54\%$
- Coeff.di compressibilità uni-assiale verticale  $c_M = 2.15 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$
- Pressione iniziale  $P_i = 111 \text{ bars}$
- Variazione di pressione nel reservoir  $\Delta P = 25 \text{ bars}^* *$

\*\* il valore qui considerato di  $\Delta p$  non corrisponde temporalmente con il valore tabulato nella storia produttiva; in particolare il drop di pressione sembra verificarsi dopo il prelievo del gas, in concomitanza con la produzione di acqua; a nostro giudizio, tale andamento risulta anomalo, in particolar modo poiché alla luce dell’elaborazione, il pb è tanto più importante in quanto si è verificata una subsidenza istantanea con l’apertura dei pozzi, e non esistono in letteratura casi di subsidenza in assenza di  $\Delta p$  adeguato a spiegarne l’occorrenza;



a maggior ragione, la modellazione “suggerisce” che il calo di pressione possa essersi effettivamente verificato in concomitanza con la seppur esigua produzione di gas, in quanto i valori di subsidenza derivanti dal modello i corrispondono con quelli osservati nelle serie SQUESSAR.

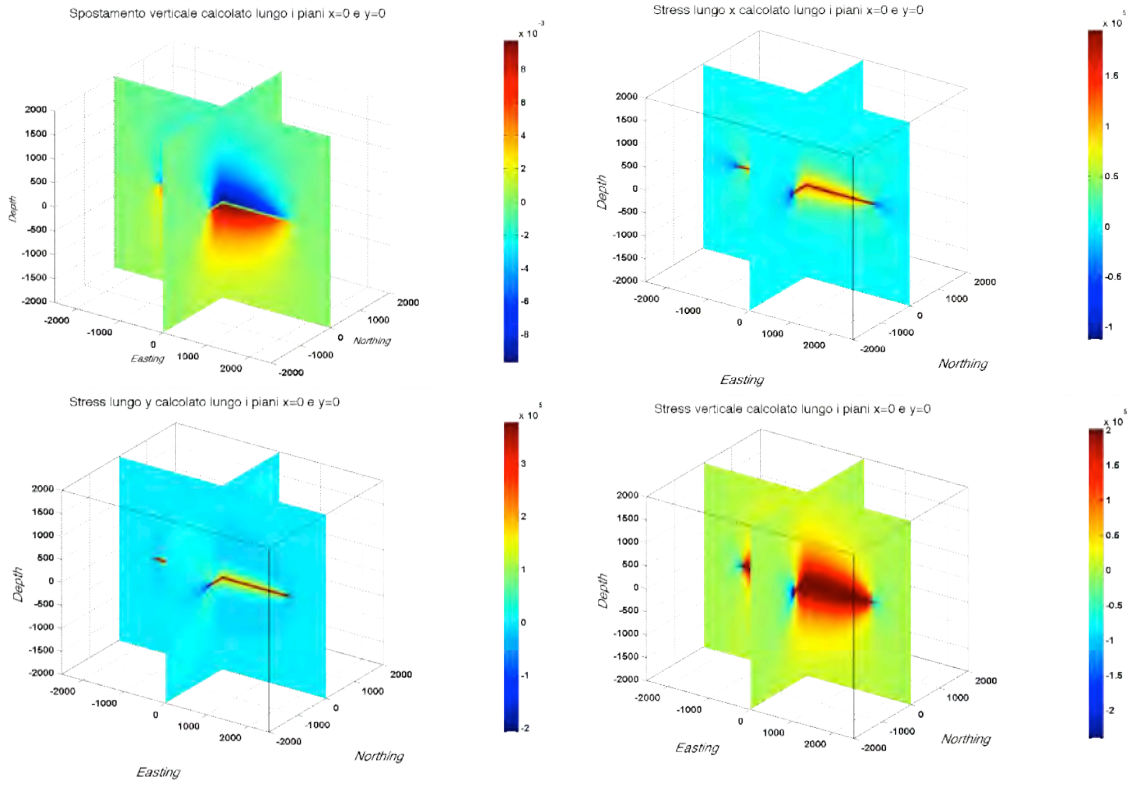


Figura – 22 Da Sinistra in alto in senso orario: spostamento verticale, stress in direzione x, y, e z lungo i piani x=0 ed y=0. durante la coda produttiva.

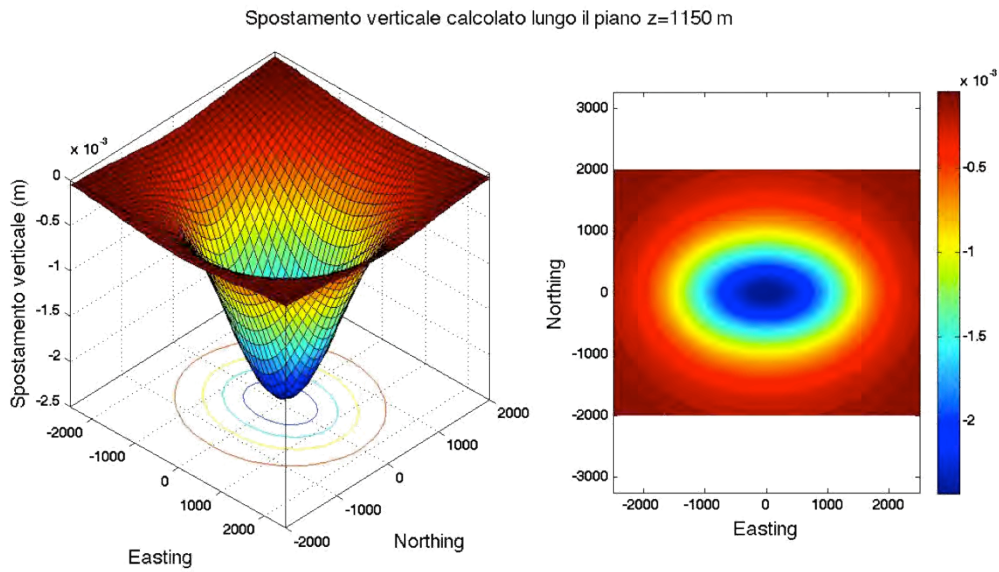


Figura – 23 Visione tridimensionale (a sinistra) e in piano (a destra) del campo di spostamento verticale (valore misurato in metri) alla superficie topografica, la coda produttiva.

#### 6.10 Analisi Geomeccanica di un ciclo di stoccaggio (iniezione) ottimizzata per tempo di refill (Caso $P_{max} = 100\% P_i$ )

Sulla base degli studi di giacimento in nostro possesso, abbiamo studiato le condizioni di deformazione e sforzo che derivano da un ciclo iniettivo regimato per ottenere una ottimizzazione del tempo di refill. La variazione di pressione tra la fase iniziale di iniezione e quella finale fornisce la base per l'elaborazione del modello: il  $\Delta P$  è infatti utilizzato per determinare lo stress efficace in quel particolare momento nel reservoir e viene utilizzato per determinare il valore di deformazione associato alla variazione di pressione.

Anche in questo caso il valore di compressibilità corrisponde a  $C_{M,unload}$

I seguenti valori sono caratteristici di questa fase di vita del reservoir:

- deformazione volumetrica  $\varepsilon = \Delta V/V_{tot} = 0,215\%$
- Coeff.di compressibilità uniassiale verticale  $c_M = 2.15 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$
- Pressione iniziale  $P_i = 126 \text{ bars}$
- Variazione di pressione nel reservoir  $\Delta P = 10 \text{ bars}$

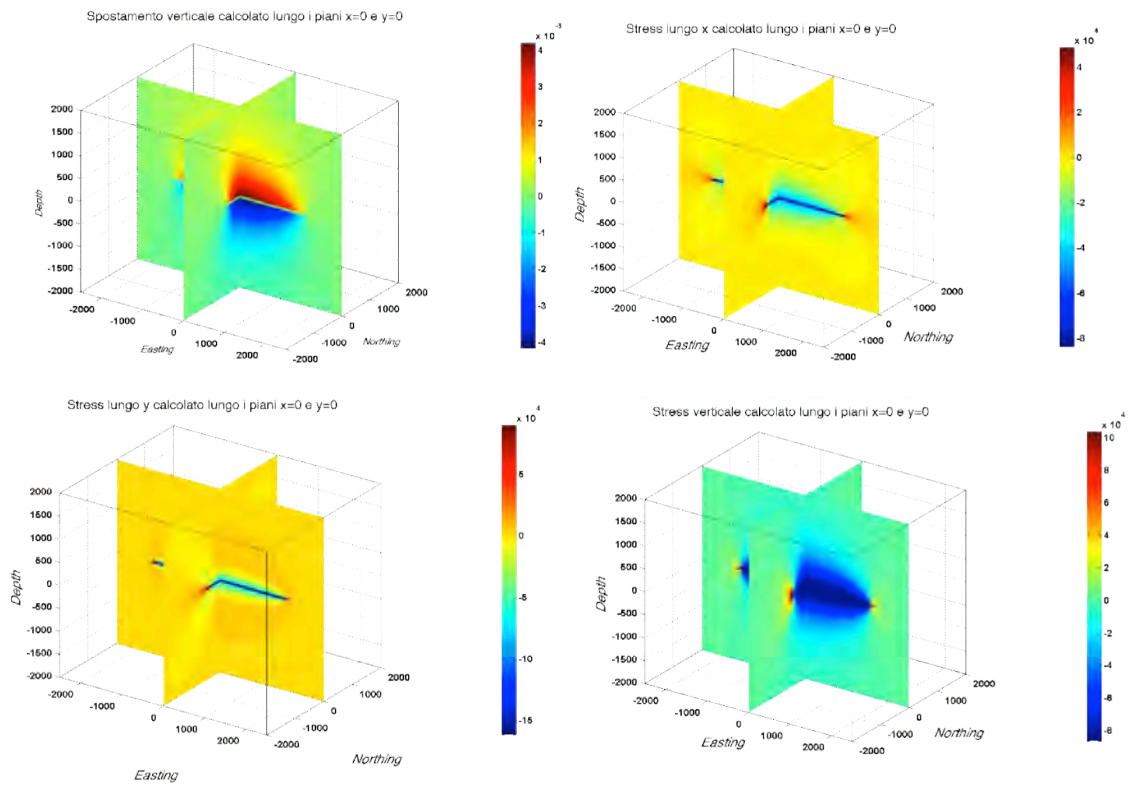


Figura – 24 Da Sinistra in alto in senso orario: spostamento verticale, stress in direzione x, y, e z lungo i piani  $x=0$  ed  $y=0$  durante una fase di iniezione del ciclo di stoccaggio regimato per tempo di refill

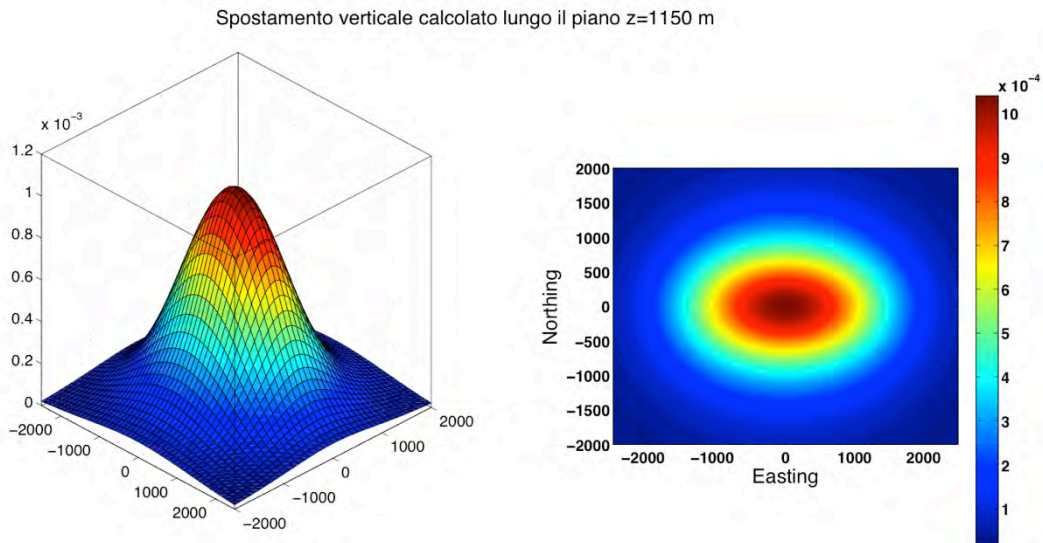


Figura – 25 Visione tridimensionale (a sinistra) e in piano (a destra) del campo di spostamento verticale (valore misurato in metri) alla superficie topografica durante una fase di iniezione del ciclo di stoccaggio regimato per tempo di refill

### 6.11 Analisi Geomeccanica di un ciclo di stoccaggio (iniezione) ottimizzata per working gas

(Caso  $P_{max} = 100\% P_i$ )

Sulla base degli studi di giacimento in nostro possesso, abbiamo studiato le condizioni di deformazione e sforzo che derivano da un ciclo iniettivo regimato per ottenere una ottimizzazione del working gas.

La variazione di pressione tra la fase iniziale di iniezione e quella finale fornisce la base per l'elaborazione del modello: il  $\Delta P$  è infatti utilizzato per determinare lo stress efficace in quel particolare momento nel reservoir e viene utilizzato per determinare il valore di deformazione associato alla variazione di pressione.

Di nuovo, anche in questo caso, il valore di compressibilità corrisponde a  $C_{M,unload}$ ,

ed i seguenti valori sono quelli caratteristici di questa fase di vita del reservoir:

- deformazione volumetrica  $\varepsilon = \Delta V/V_{tot} = 0,3\%$
- Coeff. di compressibilità uniassiale verticale  $c_M = 2.15 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$
- Pressione iniziale  $P_i = 126 \text{ bars}$
- Variazione di pressione nel reservoir  $\Delta P = 14 \text{ bars}$

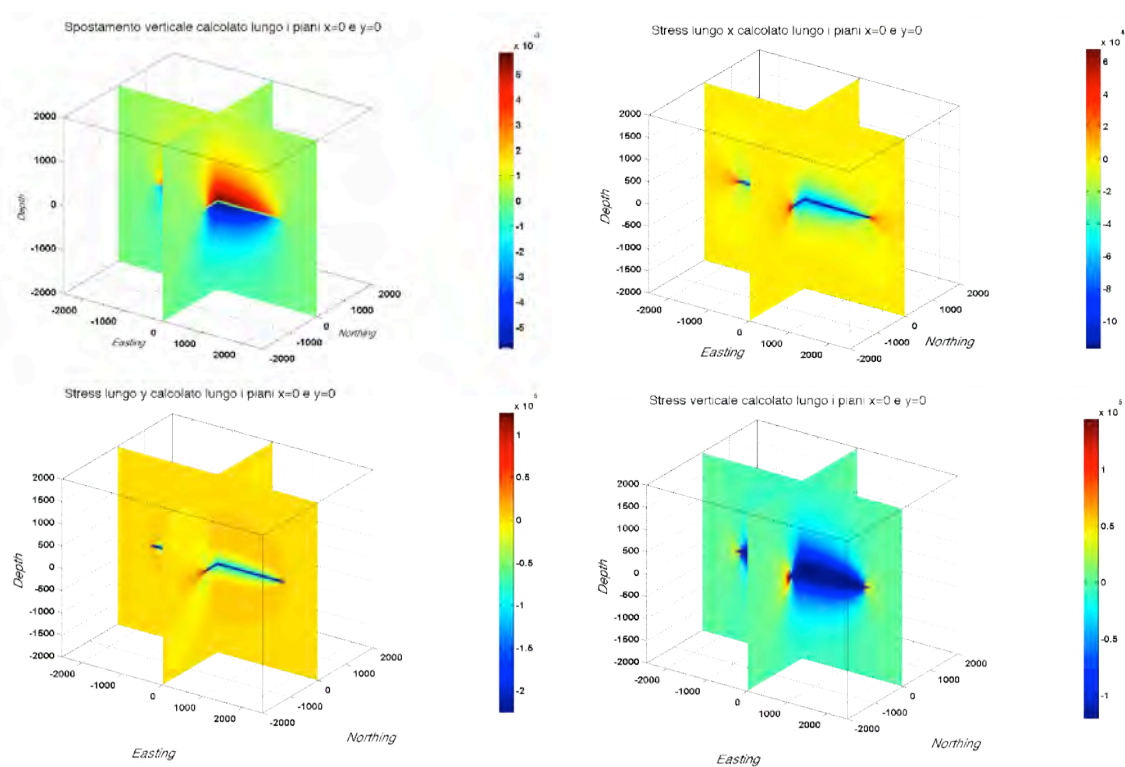


Figura – 26 Da Sinistra in alto in senso orario: spostamento verticale, stress in direzione x, y, e z lungo i piani x=0 ed y=0 durante una fase di iniezione del ciclo di stoccaggio regimato per Working Gas

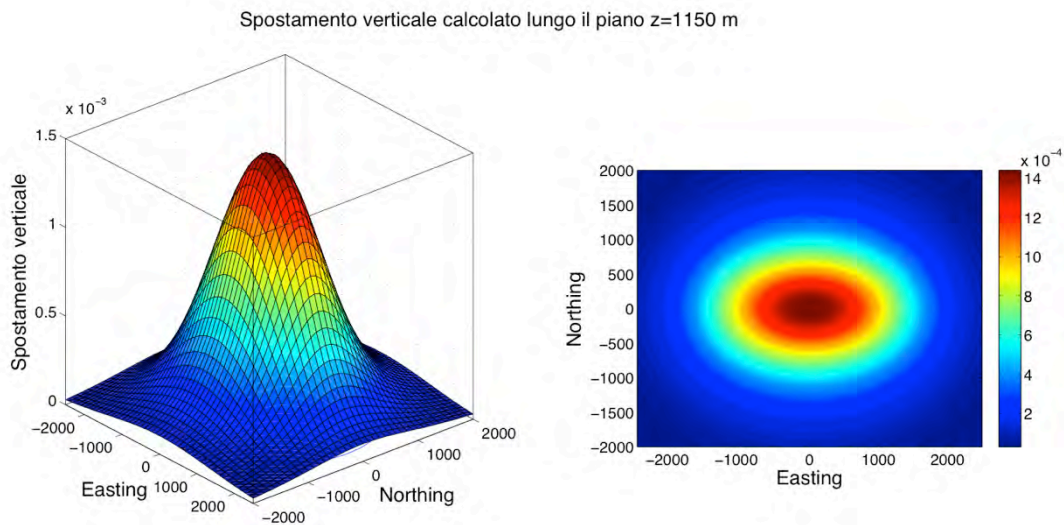


Figura – 27 Visione tridimensionale (a sinistra) e in piano (a destra) del campo di spostamento verticale (valore misurato in metri) alla superficie topografica, durante una fase di iniezione del ciclo di stoccaggio regimato per Working Gas

## 6.12 RISULTATI DELLA MODELLAZIONE FEM SULLA STABILITÀ ROCCIOSA

Per il periodo produttivo sono stati ricostruiti gli stress principali, misurati in Mpa (megapascal), ed il valore di  $S_o$ . La massima entità misurata (il valore assoluto) per  $S_o$  è nell'ordine di 2 MPa.

Di seguito vengono presentate delle figure che riportano i valori degli stress principali  $\sigma_1$  (sinistra) e  $\sigma_2$  (centro), ed il valore di  $S_o$  (destra) per un piano fittizio passante per il centro del reservoir, da ovest verso est, con il centro del reservoir puntato nel valore di asse  $x = 0$  m; l'asse  $y$  rappresenta la 'profondità rispetto al livello del mare (in metri); i quattro casi di seguito riportati hanno le stesse condizioni al contorno delle

modellazioni presentate precedentemente (Produzione passata, coda di produzione, stima stoccaggi con regimazione per Work.Gas e per tempo di refill).

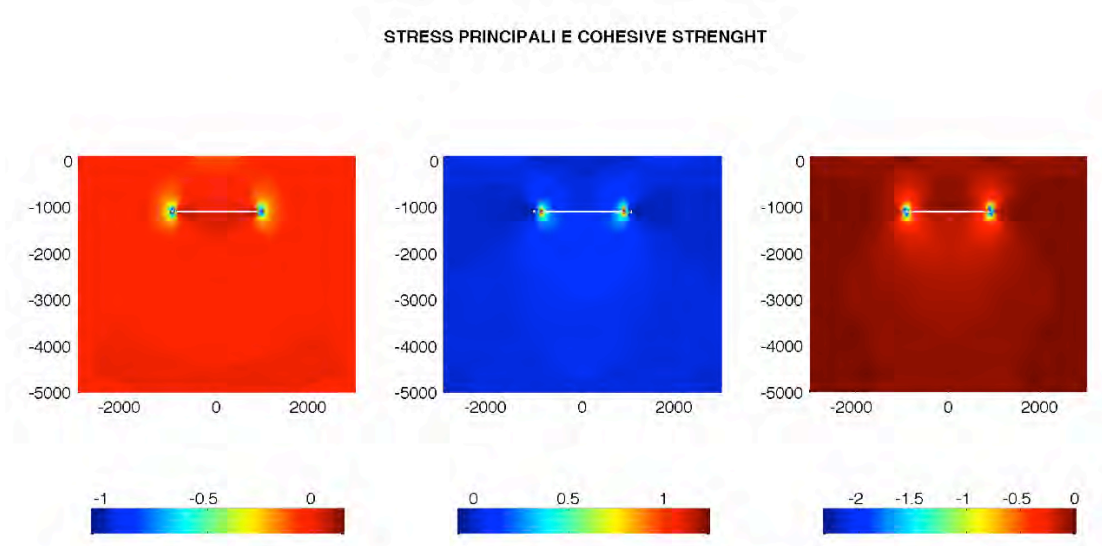


Figura – 28  $\sigma_1$  (sinistra) e  $\sigma_2$  (centro), ed il valore di  $S_o$  (destra) per la simulazione della storia produttiva passata

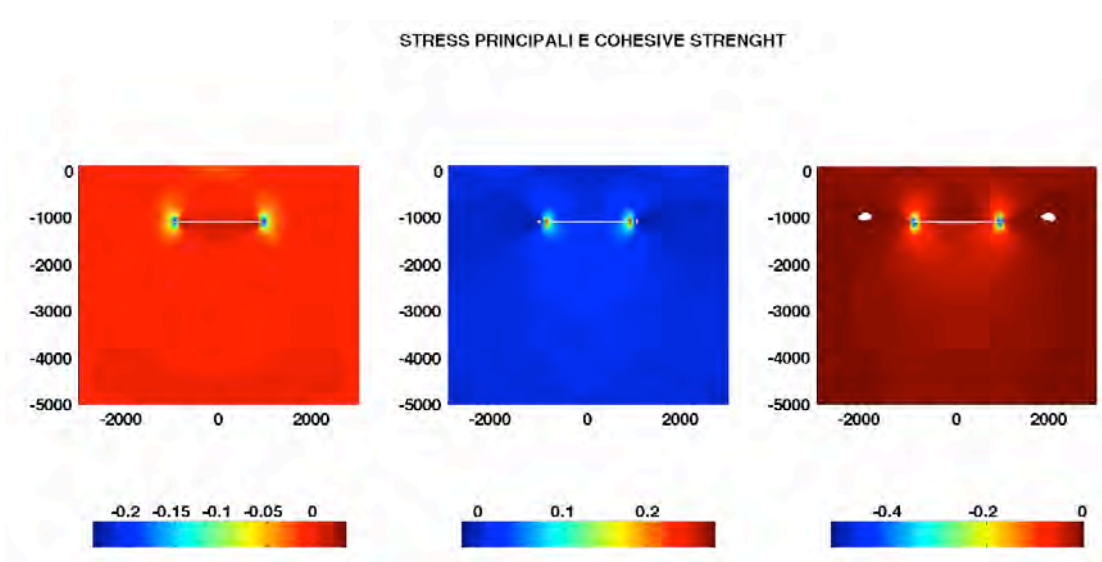


Figura -29-  $\sigma_1$  (sinistra) e  $\sigma_2$  (centro), ed il valore di  $S_o$  (destra) per la simulazione della coda di produzione

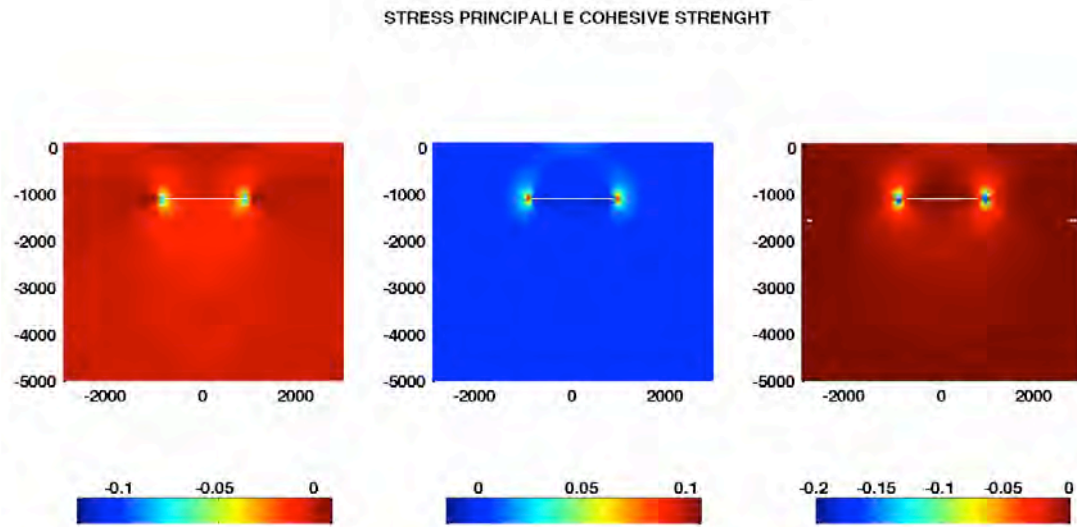


Figura- 30  $\sigma_1$  (sinistra) e  $\sigma_2$  (centro), ed il valore di  $S_o$  (destra) per la simulazione di stoccaggio con regimazione per tempo di refill.

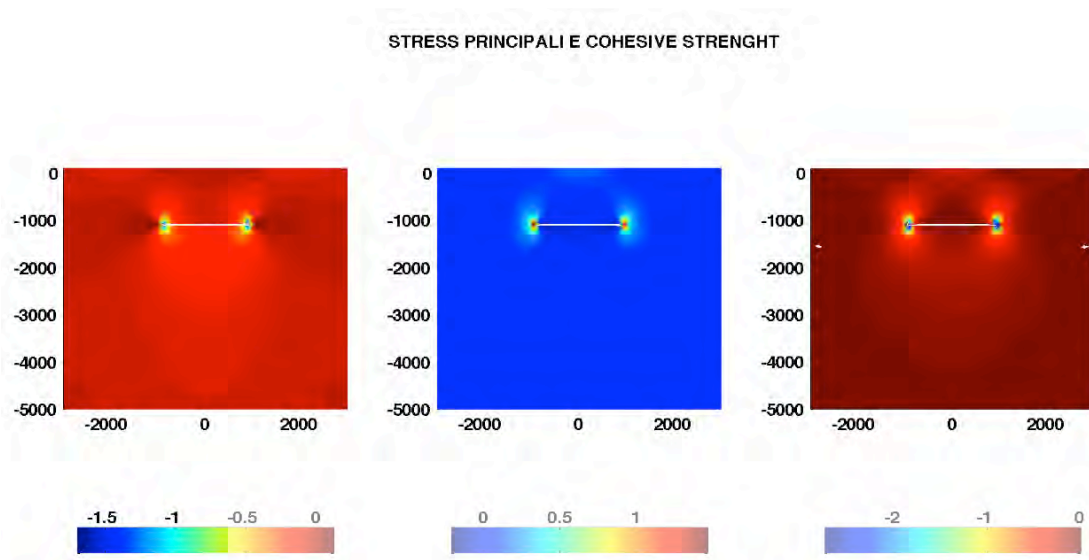


Figura – 31  $\sigma_1$  (sinistra) e  $\sigma_2$  (centro), ed il valore di  $S_o$  (destra) per la simulazione di stoccaggio con regimazione per Working Gas.

Nei grafici precedenti (in particolare nelle prime due immagini di ogni figura ) sono riportati i valori degli stress principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , calcolati sulla base del modello FEM prima descritto.

Questi valori indicano come gli stress massimi indotti dalla produzione, e dalla iniezione, siano nell'ordine massimo di 2 MPa.



Questi valori devono essere poi confrontati con gli stress tettonici che insistono sul reservoir e sul suo intorno.

Per comprendere come gli stress indotti possano dare vita a fratture nella roccia di copertura o nelle rocce intorno al reservoir, abbiamo analizzato il valore di Coesive Strength (inteso come valore rappresentativo del limite di resistenza di una roccia alla fratturazione).

Questo valore, risulta in generale nell'ordine delle decine di MPa (da 20 MPa, fino a 300 Mpa, per rocce più resistenti tipo graniti o basalti).

Una analisi del valore di C, dedotto secondo la seguente formula:

$$C_o = \{[(1+\mu^2)^{1/2} - \mu] * \sigma_1\} - \{[(1+\mu^2)^{1/2} + \mu] * \sigma_2\} = 2 * S_o$$

Il valore di  $S_o$  graficato nella terza immagine (a dx) di ognuno dei grafici, indica che, se venisse superato il valore di Coesive Strength uniassiale, allora potrebbero verificarsi delle rotture nella roccia.

Il massimo valore di  $S_o$  calcolato è di circa 2,5 Mpa, ben al di sotto dei valori minimi di Coesive Strength uniassiale ( $C = 2 * S_o = 5$  Mpa rispetto ai 20-25 minimi richiesti dal contesto geologico) descritti precedentemente.

Questo confronto suggerisce pertanto la buona tenuta delle rocce, comprese quelle dell'intorno del reservoir alle perturbazioni generate dalle variazioni di pressione (in statica) di esercizio.

Inoltre, il campo di  $C_o$  calcolato tende molto rapidamente a zero, e poiché non sussistono prove di faglie presenti a lambire il reservoir, ma distanti almeno 5 km dallo stesso, possiamo suggerire che l'influenza della perturbazione è minima, se non appunto nulla.

## 6.14 CONCLUSIONI

Con il presente studio ci eravamo prefissi l'obiettivo di ricostruire:

- i moduli di compressibilità, attraverso i dati petrofisici e la storia di produzione del giacimento (vedesi analisi semianalitica  $c_{M,Load}$  e  $c_{M,Unload}$ );
- i campi di tensione e deformazione, attraverso modellazioni 3D semi-analitiche (vedasi analisi semianalitica)
- il campo elastico del modello reale in 2D, attraverso modelli ad elementi finiti (vedasi valutazione della stabilità rocciosa tramite FEM)
- la vicinanza al campo dell'instabilità in termini di criterio di rottura di Coulomb (vedasi valutazione della stabilità rocciosa tramite FEM)

### *MODULI DI COMPRESSIBILITA'*

Sulla base della ricostruzione della subsidenza derivata dall'analisi delle serie PS discendenti con metodo SQUEESAR, tendono conto dei parametri di reservoir (geometrici e petrofisici) è stato possibile ricostruire i moduli di compressibilità per la storia passata del reservoir, in particolare con riferimento alla fase di produzione primaria ed alla successiva riapertura temporanea del campo nel 1999; sulla base della "taratura" e della validazione della compressibilità prevista in fase di produzione è stato possibile ricostruire anche i moduli di compressibilità per le fasi di stoccaggio, sulla base di una previsione di pressione statica massima nel reservoir pari al 100% della pressione originaria di giacimento (136 bar al datum del campo).

Ricordiamo che

$$\Delta H = c_M * \Delta p * H$$

con

$\Delta H$  variazione dello spessore del reservoir per il periodo in esame

$c_M$  = compressibilità della roccia in toto (coefficiente compattazione verticale) misurato in  $\text{bar}^{-1}$

$\Delta p$  = variazione di pressione per il periodo in esame

$H$  = spessore originario del reservoir

Riassumendo, i moduli di compressibilità risultano:

per la fase di produzione primaria =  $4.5 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$

per la fase di coda produttiva (1999-2000) =  $2.15 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$

Previsti per lo stoccaggio:

per regimazione a tempo di refill =  $2.15 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$

per regimazione a Working Gas =  $2.15 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$

Questo significa che l'altezza del reservoir, e quindi anche il suo volume, varia di un fattore  $4.5 \cdot 10^{-5}$  e/o  $2.15 \cdot 10^{-5}$  volte per ogni bar di pressione che diminuisce e/o aumenta a seconda del processo in atto.

### *CAMPI DI TENSIONE E DEFORMAZIONE*

Sulla base dei moduli di compressibilità è possibile anche capire quanto il reservoir di Bagnolo Mella sia cambiato durante la sua storia e quanto eventualmente cambierà, in termini di variazione di volume.

A queste variazioni di volume corrispondono anche delle tensioni che si generano per l'interazione tra la roccia del reservoir e quelle circostanti; queste variazioni di tensione, ovvero stress nella roccia, sono state calcolate tramite la modellazione semi-analitica descritta nell'elaborato.

In particolare sono tre le grandezze fisiche che racchiudono le informazioni riguardo lo stato tensione e le deformazioni indotte dalla storia produttiva e dalla futura conversione a stoccaggio del campo di Bagnolo Mella:

1) gli strain, indicati con  $\epsilon$  (intesi come una misura relativa della deformazione che rappresenta uno spostamento relativo tra le componenti rocciose )

2) gli stress, indicati con  $\sigma$  (intesi come forza che agisce tra le componenti rocciose)

3) gli spostamenti, indicati con  $u$  (intesi come misura dello spostamento di un punto rispetto alla posizione iniziale)

Analizzando queste grandezze possiamo riassumere che :

a) Durante la fase produttiva primaria, lo strain volumetrico del reservoir è nell'ordine del 2% in corrispondenza di un  $\Delta p$  di circa 50 bar.

lo stress massimo ricostruito (valori assoluti), indotto dalla produzione, è nell'ordine dei 5 MPa; tuttavia questa misura ricade nell'intorno delle culminazioni del reservoir e possono pertanto essere "amplificate" nel modello semi-analitico, in quanto il valore di stress indotto in generale non supera quasi mai i 2 MPa (ricordiamo che 1MPa= 10 bar); i massimi spostamenti, con particolare riferimento alla subsidenza, sono valutabili nell'ordine dei 1-10 mm in un raggio di 3 km dal centro del reservoir, con i valori assoluti massimi in corrispondenza dei minimi topografici e dipendenti dalla distanza dalla proiezione del centro del reservoir.

b) Durante la fase di coda produttiva, lo strain volumetrico del reservoir è nell'ordine dello 0,5% in corrispondenza di un  $\Delta p$  di circa 25 bar;

lo stress massimo ricostruito, indotto dalla coda di produzione, è nell'ordine dei 1.5 MPa: anche in questo caso tuttavia questa misura ricade nell'intorno delle culminazioni del reservoir e può pertanto essere "amplificata" nel modello semianalitico;

i massimi spostamenti, con particolare riferimento alla subsidenza, sono valutabili nell'ordine dei 2.5-0 mm in un raggio di 3 km dal centro del reservoir, con i valori assoluti massimi in corrispondenza dei minimi topografici e dipendenti dalla distanza dalla proiezione del centro del reservoir.

c) Nelle previsioni per un ciclo di iniezione ottimizzato per tempo di refill, lo strain volumetrico del reservoir è previsto nell'ordine dello 0,02% in corrispondenza di un  $\Delta p$  di circa 10 bar;

lo stress massimo ricostruito, indotto dalla iniezione, è nell'ordine dei 0.6 MPa; i massimi spostamenti, con particolare riferimento all'uplift (al contrario della subsidenza), sono valutabili nell'ordine di 1-0 mm in un raggio di 3 km dal centro del reservoir, con i valori assoluti massimi in corrispondenza dei minimi topografici e dipendenti dalla distanza dalla proiezione del centro del reservoir.

d) Nelle previsioni per un ciclo di iniezione ottimizzato per tempo di working gas, o strain volumetrico del reservoir è previsto nell'ordine dello 0,03% in corrispondenza di un  $\Delta p$  di circa 14 bar

lo stress massimo ricostruito, indotto dalla iniezione, è nell'ordine di 1 MPa;

i massimi spostamenti, con particolare riferimento all'uplift (al contrario della subsidenza), sono valutabili nell'ordine di 1.5-0 mm in un raggio di 3 km dal centro del reservoir, con i valori assoluti massimi in corrispondenza dei minimi topografici e dipendenti dalla distanza dalla proiezione del centro del reservoir.

#### *CAMPO ELASTICO REALE IN 2D TRAMITE METODO ELEMENTI FINITI (FEM)*

Gli stress calcolati tramite la modellazione semianalitica e precedentemente illustrati sono stati rivalutati tramite un modello ad elementi finiti lungo una sezione longitudinale che "tagliasse" il reservoir nel suo centro lungo un direttrice E-W di circa 6 Km, ed avente una estensione verticale di 5 Km al di sotto del livello medio del mare (Figura 18).

In questo modello, per i 4 periodi analizzati, sono state imposte le condizioni di strain al poligono corrispondente alla sezione del reservoir (Figura 19), e per ogni caso sono stati determinati gli stress principali, che altro non sono che la risultante nello spazio di tutte le componenti dello stress calcolato lungo i piani scelti per la modellazione semianalitica.

Come evidenziato nel paragrafo relativo ai risultati di questa modellazione e come descritto nei relativi metodi si è potuto mappare un valore di resistenza compressiva  $S_o$ , per un valore di coefficiente di attrito di 0.65 ( $\mu = 0.65$ , con  $\mu = \tan(\Phi)$ , con  $\Phi$  angolo di attrito interno), che fornisce una indicazione del possibile insorgere di fratture o, in generale, rotture negli ammassi rocciosi dovute alle variazioni dello stato di tensione, ovvero dello stato degli stress, indotte dall'attività del campo Bagnolo Mella.

I valori di  $S_o$  calcolati forniscono una misura della variazione nella coesione del materiale roccioso e come già evidenziato in precedenza, i massimi valori stimati sono nell'ordine dei 2MPa (per previsione di stoccaggio regimato a Working Gas, risultano molto più basse nell'altro caso di iniezione): confrontati con i valori di coesione presenti in letteratura per le rocce che variano in un range da 20 a 300 MPa, risulterebbero ininfluenti in un'ottica di limite di rottura del materiale.

Una ulteriore considerazione da fare riguarda il campo di  $S_o$ , che descrive quanto le variazioni nella coesione dei materiali si "diffondono" nell'intorno del reservoir.

Dai risultati della modellazione le variazioni di  $S_o$  sono concentrate quasi esclusivamente nell'intorno del reservoir, ed in particolare nelle culminazioni, dove i valori calcolati potrebbero anche in questo caso risentire degli effetti geometrici della modellazione. Tuttavia, il campo di variazioni di  $S_o$  tende molto rapidamente a 0 o a valori molto al di sotto di 1 MPa (immagine a sinistra in Figura 31), suggerendo pertanto la non influenza della variazione degli stress indotti su faglie o fratture preesistenti ad oggi mappate e riconosciute.

## **CAPITOLO 7**

### **CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI**

Questo studio è stato sviluppato per determinare una nuova metodologia di indagine geologica - geomeccanica atta a calcolare i campi elastici indotti dalla variazione di pressione in un reservoir adibito a sito di stoccaggio di gas naturale. Gli obiettivi principali consistono nella validazione di una procedura metodologica che segue le seguenti tappe, che possono essere così descritte:

analisi di produzione, caratterizzazione geologica e geometrica del reservoir; qui vengono definite le caratteristiche petrofisiche del materiale, le geometrie dei corpi

rocciosi e le relazioni con le rocce che lo circondano; inoltre, in questa fase viene affrontata l'analisi della deformazione volumetrica del reservoir che consente di definire una curva di stress-strain, mettendo in relazione la variazione di pressione di poro (ed indirettamente lo stress efficace) con i fenomeni di compattazione/espansione del reservoir ;

analisi delle deformazioni della superficie geodetiche;

analisi semi-analitica tramite risoluzione del problema di inomogeneità; il problema, risolto tramite modellazione semianalitica tridimensionale prevede un reservoir di forma ellissoidale con semiassi  $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ , immerso in uno spazio infinito elastico omogeneo

analisi a elementi finiti tramite applicazione di un problema in 2D con condizioni di spostamento al contorno;

L'applicazione di questa procedura ha consentito di ottenere :

La costruzione di una curva stress-strain per il reservoir di Collalto; la stessa curva rappresenta un utile risultato perchè consente di caratterizzare l'evoluzione deformativa del reservoir in funzione del suo andamento produttivo. La curva consente inoltre di definire il range di deformazione non elastica, che si traduce in un quantitativo di volume di reservoir non più recuperabile ed utilizzabile per le operazioni di stoccaggio. In ottica futura questa informazione è fondamentale per la definizione dei volumi e delle pressioni di immissione e di estrazione nei cicli di stoccaggio.

Per il reservoir di Collalto le relazioni tra deformazioni del reservoir e deformazioni della superficie geodetica; in questo modo è stato possibile comprendere come:

- a) esista un trend di subsidenza ancora in atto, nonostante la fine della produzione e la riconversione a stoccaggio,
- b) esista un percorso di recupero della subsidenza messo in atto tramite la riconversione a stoccaggio del reservoir, e
- c) il comportamento del caprock sia assimilabile a quello di un aquitardo, con la deformazione indotta dal reservoir che si trasmette più lentamente rispetto quella



all'interno del reservoir, date le possibili eterogeneità che caratterizzano la roccia di copertura.

La comprensione e la quantificazione dei campi elastici indotti dalla attività del reservoir di Collalto e di Bagnolo Mella, tramite l'utilizzo del problema di inomogeneità in un full space elastico isotropico omogeneo; i campi elastici sono risolti semi-analiticamente in 3D, su piani definiti dall'utente, tramite l'utilizzo di uno specifico pacchetto MATLAB, che risolve il problema della inclusione equivalente (Mura ,1972); in particolare

- a) alla data odierna e per conoscenza dell'autore di questo elaborato, questo rappresenta il primo caso di applicazione tridimensionale di questo problema all'analisi delle deformazioni indotte dall'attività di produzione e/o stoccaggio su un caso di reservoir reale, non sintetico.
- b) nonostante una serie di approssimazioni, metodologiche ed analitiche, introdotte per la definizione delle condizioni al contorno, il modello semi-analitico spiega in maniera efficace i risultati ottenuti in termini di deformazioni reali alla superficie geodetica, misurate tramite livellazioni ottiche ripetute nel tempo.

La definizione delle aree a maggior rischio di deformazione non-elastica derivate dalla attività del reservoir di Collalto e di Bagnolo Mella tramite l'utilizzo di una analisi agli elementi finiti in 2D, con condizioni di spostamento al contorno, sulla reale geometria del sistema di stoccaggio di Collalto Stoccaggio; in particolare sono state definite le zone dove si sviluppano i maggiori gradienti di stress, che si localizzano nelle immediate vicinanze del reservoir, con valori al di sotto di 1 MPa, ma con influenze anche in aree laterali, con minore intensità;

Quindi, l'intero studio ha consentito la creazione di una piattaforma metodologica ed applicativa che potrà essere utilizzata, in futuro, per monitorare in tempo reale le deformazioni indotte dal reservoir. In questo punto è insito lo scopo principale, non solo dello studio sul reservoir di Collalto , ma anche sull'intero progetto scientifico della

tesi, ovvero quello di sviluppare una metodologia rapida ed efficace di stima delle deformazioni indotte tramite caratterizzazione geologica e geomeccanica.

Le ricadute di questo lavoro di tesi, ed in particolare dello studio sul sistema di stoccaggio del reservoir di Collalto vanno a coprire dei gap sul piano tecnico-amministrativo, per le richieste degli enti pubblici (sempre più esigenti in materia di controllo sulle attività legate all'estrazione ed allo stoccaggio di idrocarburi) alla società gestore dello stoccaggio, ma soprattutto sul piano scientifico, interfacciandosi positivamente con ulteriori monitoraggi, quale ad esempio quello microsismico, messo a punto per il sito di Collalto; un esempio pratico ed utile di queste ricadute è data dalla possibilità di fornire delle linee guida per lo studio dei microsismi, in funzione dei tassi di deformazione, delle variazioni dei campi elastici e della loro quantificazione, ed in generale delle aree che maggiormente risentono della influenza delle variazioni del reservoir: questo fornisce difatti una base ed uno spunto di indagine al monitoraggio sismico, che, ad oggi, non è ancora riuscito a fornire indicazioni utili, data la elevatissima mole di microsismi registrati.

Infine, questo approccio metodologico - analitico, fornisce uno strumento utilizzabile su differenti reservoir, e risulta particolarmente adatto per reservoir riconvertiti a stoccaggio dopo la fase produttiva: nel capitolo seguente, viene presentato un ulteriore caso di studio di valutazione di rischi geologico-geomeccanico di stoccaggio ytramite la procedura qui sviluppata.

**APPENDICI**

**APPENDICE A - CODICE MATLAB PER PROBLEMA INOMOGENEITÀ**

**APPENDICE B - DEFORMAZIONI GEODETICHE STUDIO COLLALTO**

**APPENDICE C- DEFORMAZIONI GEODETICHE STUDIO BAGNOLO**

**MELLA**

## APPENDICE A

### CODICI MATLAB PER PROBLEMA DI INOMOGENEITA' DI ESHELBY

In questa appendice vengono riportati i codici sorgente da Meng et al. 2011 utilizzati per la modellazione semianalitica del problema di inclusione equivalente (inomogeneità) di Eshelby.

#### Incl\_prob.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% construct the data structure needed for an ellipsoid inhomogeneity problem;
% solve the problem with an equevilent Eshelby inclusion problem;
% demonstrate the outputs.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
% Sharma's ellpdoidal heterogeneity with observation line
%clear all;
%poisson ratio of matrix
incl.v= 0.25;
%elastic modulus of matrix
incl.E=2.2e10;
%heterogeneity poisson ratio
incl.vh=0;
%heterogeneity elastic modulus
incl.Eh=0;

% dimensiona of the ellipsoid.
incl.dim=[10 .2 1];
% ortation angles in radian applied to the ellipsoid in sequence of [x y z];
incl.ang = [0 0 0];

% remote stress ordered by sigma11, sigma12, sigma13, sigma22,sigma23,sigma33
incl.stressvec=[-1e6;0;0;0;1e6;0];
incl.eigp=[0;0;0;0;0;0];
% first observaton grid
x = 0;
y = -25:.5:25;
z = -25:.5:25;
incl.grid{1} = {x,y,z};
% second observation grid
x = -25:.5:25;
y = 0;
z = -25:.5:25;
incl.grid{2} = {x,y,z};
% third observation grid
x = -25:.5:25;
y = -25:.5:25;
z = 0;
incl.grid{3} = {x,y,z};
clear x y z
% add more grids if needed
```

```

% call Eshelby solver,arg: 'disp','stress','strain' only output displacements
by default
incl.sol = Esh_sol(incl,'disp','stress','strain');

% demonstrate the third grid's results for the first and second components of
% the output displacement and stress.
X = squeeze(incl.sol.grid{1,1});
Y = squeeze(incl.sol.grid{1,2});
Z = squeeze(incl.sol.grid{1,3});
u = squeeze(incl.sol.u{1});
stress = squeeze(incl.sol.stress{1});
figure
az = 0;
el = 90;
subplot(2,2,1)
surf(X,Y,stress(:,:,1),'LineStyle','none');
colorbar;
view(az, el);
subplot(2,2,2)
surf(X,Y,stress(:,:,2),'LineStyle','none');
colorbar;
view(az, el);
subplot(2,2,3)
surf(X,Y,stress(:,:,3),'LineStyle','none');
colorbar;
view(az, el);
subplot(2,2,4)
surf(X,Y,stress(:,:,4),'LineStyle','none');
view(az, el);
colorbar;

% demonstrate the third grid's results for the first and second components of
% the output displacement and stress.
% X2 = squeeze(incl.sol.grid{2,1});
% Y2 = squeeze(incl.sol.grid{2,2});
% Z2 = squeeze(incl.sol.grid{2,3});
% u2 = squeeze(incl.sol.u{1});
% stress2 = squeeze(incl.sol.stress{2});
% figure
% az2 = 0;
% el2 = 90;
% subplot(2,2,1)
% surf(X2,Y2,stress2(:,:,1),'LineStyle','none');
% colorbar;
% view(az2, el2);
% subplot(2,2,2)
% surf(X2,Y2,stress2(:,:,2),'LineStyle','none');
% colorbar;
% view(az2, el2);
% subplot(2,2,3)
% surf(X2,Y2,stress2(:,:,3),'LineStyle','none');
% colorbar;
% view(az2, el2);
% subplot(2,2,4)
% surf(X2,Y2,stress2(:,:,4),'LineStyle','none');
% view(az2, el2);
% colorbar;
%
% % demonstrate the third grid's results for the first and second components of
% % the output displacement and stress.
% X3 = squeeze(incl.sol.grid{3,1});

```

```

% Y3 = squeeze(incl.sol.grid{3,2});
% Z3 = squeeze(incl.sol.grid{3,3});
% u3 = squeeze(incl.sol.u{3});
% stress3 = squeeze(incl.sol.stress{3});
% figure
% az3 = 0;
% el3 = 90;
% subplot(2,2,1)
% surf(X3,Y3,stress3(:,:,1),'LineStyle','none');
% colorbar;
% view(az3, el3);
% subplot(2,2,2)
% surf(X3,Y3,stress3(:,:,2),'LineStyle','none');
% colorbar;
% view(az3, el3);
% subplot(2,2,3)
% surf(X3,Y3,stress3(:,:,3),'LineStyle','none');
% colorbar;
% view(az3, el3);
% subplot(2,2,4)
% surf(X3,Y3,stress3(:,:,4),'LineStyle','none');
% view(az3, el3);
% colorbar;

```

---

### Cmatrix.m

```
function matr=Cmatrix(Cm)
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Cmatrix.m
%this function converts the 4th order isotropic stiffness tensor into 6 x 6
matrix
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

clear i;
clear j;
clear m;
clear n;
clear p;
clear q;

```

```

for i=1:6
for j=1:6

```

```

    [m,n]=index6(i);
    [p,q]=index6(j);

```

```

    if j==2
matr(i,j)=Cm(m,n,p,q)+Cm(m,n,q,p);
    elseif j==3
matr(i,j)=Cm(m,n,p,q)+Cm(m,n,q,p);
    elseif j==5
matr(i,j)=Cm(m,n,p,q)+Cm(m,n,q,p);
    else
matr(i,j)=Cm(m,n,p,q);
    end
end
end

```

```
clear i;
clear j;
clear m;
clear n;
clear p;
clear q;
```

---

### Ctensord.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ctensord.m
% this function calculates the 4th order elastic stiffness tensor given elastic
% modulus and poisson's ratio for an isotropic material
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function q=Ctensord(Em,vm)

Gm=Em/(2+2*vm);
lamem=2*Gm*vm/(1-2*vm);
q=zeros(6,6);

q=[lamem+2*Gm,0,0,lamem,0,lamem;
0,2*Gm,0,0,0,0;
0,0,2*Gm,0,0,0;
lamem,0,0,lamem+2*Gm,0,lamem;
0,0,0,0,2*Gm,0;
lamem,0,0,lamem,0,lamem+2*Gm];
```

---

### elliptic12.m

```
function [A_21,A_22]=buildtensors(a)

% builds tensors of up to rank 2 for elementwise multiplication to avoid
% nested for loop evaluations

% Output naming convention is inputvector_## where the first # is the
% tensor order and the second # is the coordinate direction in which the
% elements of the input vector are advanced (i.e. in which the elements are
% unique)
A_11 = a;
A_21=cat(2,A_11',A_11',A_11');
A_22=cat(2,a(1)*ones(3,1),a(2)*ones(3,1),a(3)*ones(3,1));
```

---

### Esh\_D4\_disp.m

```
function [D4 u]=Esh_D4_disp(vm,a,x,eigen)

% todo search for todos in function
% are the case statements supposed to be exact or with a tolerance like in
eshint
% get rid of all vars not used

%*****%
%Calculation of F and E integrals
%*****%
```

```

% this subroutines finds the largest positive root of
%  $x(1)^2/(a(1)+\lambda) + x(2)^2/(a(2)+\lambda) + x(3)^2/(a(3)+\lambda) = 1$ 
% (Mura 11.37) for the exterior point x and ellipsoid dimensions a. When
% expanded and like terms in lambda are collected, the coefficients of
%  $\lambda^3, \lambda^2$ , etc. are as below

coef3=1; % coefficient of  $\lambda^3$  term
coef2=a(1)^2+a(2)^2+a(3)^2-(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2); % coefficient of  $\lambda^2$ 
term
coef1=a(1)^2*a(2)^2+a(1)^2*a(3)^2+a(2)^2*a(3)^2-
((a(2)^2+a(3)^2)*x(1)^2+(a(1)^2+a(3)^2)*x(2)^2+(a(1)^2+a(2)^2)*x(3)^2); %
coefficient of  $\lambda$  term
coef0=a(1)^2*a(2)^2*a(3)^2-
(a(2)^2*a(3)^2*x(1)^2+a(1)^2*a(3)^2*x(2)^2+a(1)^2*a(2)^2*x(3)^2); % coefficient
of constant term
poly=[coef3,coef2,coef1,coef0]; % matlab polynomial format
lambda=0; % initialize lambda to zero

if x(1)^2/a(1)^2+x(2)^2/a(2)^2+x(3)^2/a(3)^2>1 % if x is exterior point set
    % lambda to the largest positive real root, otherwise lambda=0
    lambdaroots=roots(poly); % store the roots of the cubic equation
    for i=1:3 % find the largest positive real root
        if isreal(lambdaroots(i)) && lambdaroots(i)>lambda
            lambda=lambdaroots(i);
        end
    end
end
end

theta=asin(((a(1)^2-a(3)^2)/(a(1)^2+lambda))^(1/2)); % the amplitude
% todo this argument was taken from the previous code (with the lambda) and
% modified with the arcsin. need to see if can get here via Gradshteyn and
% Ryzhik from Mura 11.36
k=((a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2))^(1/2); % the elliptic modulus
m=(a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2); %  $m=k^2$  is the parameter
[F,E,Z]=elliptic12(theta,m); %this sets the tolerance to eps, add a third
argument to set to a larger tol

%*****%
%Calculation of I's
%*****%

if a(1)==a(2) && a(1)==a(3)
    % Spherical Case
    del=sqrt(prod(a.^2+lambda));
    % can simplify to  $\text{del}_3=\sqrt{(a(1)^2+\lambda)^3}$  for sphere
    Ifir=(4/3)*pi*a(1)^3/(a(1)^2+lambda)^(3/2)*ones(1,3);
    Isec=(4/5)*pi*a(1)^3/(a(1)^2+lambda)^(1/2)*ones(3); % todo: i changed the
5/2 to 1/2 to make units right--not sure if correct

elseif a(1)>a(2)&& a(3)==a(2)
    %fprintf('Prolate case..\n')

    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    bbar=sqrt(a(1)^2+lambda)/sqrt(a(3)^2+lambda);
    dbar=sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/sqrt(a(3)^2+lambda);
    I=(acosh(bbar))*4*pi*a(1)*a(2)^2/sqrt(a(1)^2-a(2)^2);
    Ifir(1)=4*pi*a(1)*a(2)^2*(acosh(bbar)-dbar/bbar)/(a(1)^2-a(2)^2)^1.5;
    Ifir(2)=2*pi*a(1)*a(2)^2*(-acosh(bbar)+dbar*bbar)/(a(1)^2-a(2)^2)^1.5;
    Ifir(3)=Ifir(2);

    Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);

```



```

Isec(1,3)=Isec(1,2);
Isec(2,1)=Isec(1,2);
Isec(3,1)=Isec(1,3);
Isec(2,3)=pi*prod(a)/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)/4;
Isec(3,2)=Isec(2,3);
Isec(1,1)=((4*pi*prod(a))/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
Isec(2,2)=Isec(2,3);
Isec(3,3)=Isec(2,3);

```

```

elseif a(1)==a(2)&& a(2)>a(3)
    %fprintf('Oblate case...\n')
    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    bnonbar=sqrt(a(3)^2+lambda)/sqrt(a(1)^2+lambda);
    dnonbar=sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/sqrt(a(1)^2+lambda);
    I=(acos(bnonbar))*4*pi*a(1)^2*a(3)/sqrt(a(1)^2-a(3)^2);
    Ifir(1)=2*pi*a(1)^2*a(3)*(acos(bnonbar)-dnonbar*bnonbar)/(a(1)^2-
a(3)^2)^1.5;
    Ifir(2)=Ifir(1);
    Ifir(3)=4*pi*prod(a)/del-2*Ifir(1);

```

```

Isec(1,3)=(Ifir(3)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(3)^2);
Isec(3,1)=Isec(1,3);
Isec(2,3)=Isec(1,3);
Isec(3,2)=Isec(2,3);

```

```

Isec(1,1)=pi*prod(a)/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)/4;
Isec(1,2)=Isec(1,1);
Isec(2,1)=Isec(1,2);

```

```

Isec(2,2)=Isec(1,1);
Isec(3,3)=((4*pi*prod(a))/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)-Isec(2,3))/3;

```

```

else
    %fprintf('triaxial ellipsoid case ..\n')
    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    I=4*pi*prod(a)*F/sqrt(a(1)^2-a(3)^2);
    Ifir(1)=I*(1-E/F)/(a(1)^2-a(2)^2);

    Ifir(2)=4*pi*prod(a)*(E*sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/((a(1)^2-a(2)^2)*(a(2)^2-
a(3)^2))-F/((a(1)^2-a(2)^2)*sqrt(a(1)^2-a(3)^2))-(1/(a(2)^2-
a(3)^2))*sqrt((a(3)^2+lambda)/((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda))));

```

```

    Ifir(3)=4*pi*prod(a)/del-Ifir(1)-Ifir(2);

```

```

Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
Isec(2,1)=Isec(1,2);
Isec(1,3)=(Ifir(3)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(3)^2);
Isec(3,1)=Isec(1,3);
Isec(2,3)=(Ifir(3)-Ifir(2))/(a(2)^2-a(3)^2);
Isec(3,2)=Isec(2,3);
Isec(1,1)=((4*pi*prod(a))/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
Isec(2,2)=((4*pi*prod(a))/((a(2)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(2,3))/3;
Isec(3,3)=((4*pi*prod(a))/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)-Isec(2,3))/3;

```

```

end

```

```

%*****
%I derivatives
%*****

```

```

[a_21,a_22]=builddensors(a);

```

```

ultadelfir=-2*pi*prod(a)./((a.^2+lambda)*del);
[ultadelfir_21,ultadelfir_22]=builddensors(ultadelfir);
ultadelsec=-2*pi*prod(a)./((a_21.^2+lambda).*(a_22.^2+lambda)*del);

% derivatives of lambda
c1=sum((x.^2)./((a.^2+lambda).^2));
c2=sum((x.^2)./((a.^2+lambda).^3));
c3=sum((x.^2)./((a.^2+lambda).^4));

F=2*x./(a.^2+lambda);
[F_21,F_22]=builddensors(F);

if lambda==0
    fderlambda=zeros(1,3);
else
    fderlambda=F/c1;
end
[fderlambda_21,fderlambda_22]=builddensors(fderlambda);

diagvals=eye(3);
nondiagvals=ones(3)-eye(3);
fderF=nondiagvals.*(1./(a_21.^2+lambda)).*(-
F_21.*fderlambda_22)+diagvals.*(1./(a_21.^2+lambda)).*(2-F_21.*fderlambda_22);
fderc1=F./(a.^2+lambda)-2*c2*fderlambda;
[fderc1_21,fderc1_22]=builddensors(fderc1);
fderc2=F./(a.^2+lambda).^2-3*c3*fderlambda;
[fderc2_21,fderc2_22]=builddensors(fderc2);

if lambda==0
    sderlambda=zeros(3);
else
    sderlambda=(fderF-fderlambda_21.*fderc1_22)/c1;
end

sderc1=(1./(a_21.^2+lambda)).*(fderF-fderlambda_22.*F_21./(a_21.^2+lambda))-
2*(fderc2_22.*fderlambda_21+c2*sderlambda);
fderIfir=ultadelfir_21.*fderlambda_22;

for q=1:3
    for p=1:3
        for r=1:3
            sderF(q,p,r)=-
(fderF(q,p)*fderlambda(r)+fderF(q,r)*fderlambda(p)+F(q)*sderlambda(p,r))/(a(q)^
2+lambda);
        end
    end
end

zeefir=1./(a.^2+lambda)+0.5*sum(1./(a.^2+lambda));
zeesec=1./(a_21.^2+lambda)+1./(a_22.^2+lambda)+0.5*sum(1./(a.^2+lambda));
for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            sderIfir(i,j,k)=ultadelfir(i)*(sderlambda(j,k)-
fderlambda(j)*fderlambda(k)*zeefir(i));
        end
    end
end

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3

```

```

        fderIsec(i,j,k)=ultadelsec(i,j)*fderlambda(k);
    end
end
end
for i=1:3;
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                sderIsec(i,j,k,l)=ultadelsec(i,j)*(sderlambda(k,l)-
fderlambda(k)*fderlambda(l)*zeesecc(i,j));
            end
        end
    end
end
for q=1:3
    for p=1:3
        for r=1:3
            if lambda==0
                tderlambda(q,p,r)=0;
            else
                tderlambda(q,p,r)=(-1/c1)*(sderlambda(q,p)*fderc1(r)-
sderF(q,p,r)+sderlambda(q,r)*fderc1(p)+fderlambda(q)*sderc1(p,r));
            end
        end
    end
end
%*****
%Calculation of V-potentials
%*****
for i=1:3
    for p=1:3
        for q=1:3
            sderVfir(i,p,q)=- (kdelta(p,q)*Isec(p,i)+x(p)*fderIsec(p,i,q));
        end
    end
end
for i=1:3
    for p=1:3
        for q=1:3
            for r=1:3
                tderVfir(i,p,q,r)=-
(kdelta(p,q)*fderIsec(p,i,r)+kdelta(p,r)*fderIsec(p,i,q)+x(p)*sderIsec(p,i,q,r)
);
            end
        end
    end
end
%*****
%calculation of phi and psi potentials
%*****
%calculation of phi derivatives
fderphi=-x.*Ifir;
for p=1:3

```

```

    for q=1:3
        sderphi(p,q)=-(kdelta(p,q)*Ifir(p)+x(p)*fderIfir(p,q));
    end
end

for p=1:3
    for q=1:3
        for r=1:3
            tderphi(p,q,r)=
(kdelta(p,q)*fderIfir(p,r)+kdelta(p,r)*fderIfir(p,q)+x(p)*sderIfir(p,q,r));
        end
    end
end

%*****
%psi's
%*****

for i=1:3
    for j=1:3
        for l=1:3
            tderpsi(i,j,l)=-kdelta(i,j)*x(l)*(Ifir(l)-a(i)^2*Isec(i,l))-
x(i)*x(j)*(fderIfir(j,l)-a(i)^2*fderIsec(i,j,l))-
(kdelta(i,l)*x(j)+kdelta(j,l)*x(i))*(Ifir(j)-a(i)^2*Isec(i,j));
        end
    end
end

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                foderpsi(i,j,k,l)=kdelta(i,j)*(sderphi(k,l)-
a(i)^2*sderVfir(i,k,l))+kdelta(i,k)*(sderphi(j,l)-
a(i)^2*sderVfir(i,j,l))+kdelta(i,l)*(sderphi(j,k)-
a(i)^2*sderVfir(i,j,k))+x(i)*(tderphi(j,k,l)-a(i)^2*tderVfir(i,j,k,l));
            end
        end
    end
end

%*****
%calculation of D4
%*****
premult1=1/(8*pi*(1-vm));

%calculation of D4

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                D4(i,j,k,l)=premult1*(foderpsi(k,l,i,j)-
2*vm*kdelta(k,l)*sderphi(i,j)-(1-
vm)*(sderphi(k,j)*kdelta(i,l)+sderphi(k,i)*kdelta(j,l)+sderphi(l,j)*kdelta(i,k)
+sderphi(l,i)*kdelta(j,k)));
            end
        end
    end
end

%calculate disp
eigenM = [eigen(1:3)';eigen([2 4 5])'; eigen([3 5 6])'];

```

```

diag = eigenM(1,1)+eigenM(2,2)+eigenM(3,3);
u = (premult1*(tprod(tderpsi,[1 -1 -2],eigenM,[-1 -2])-2*vm*diag*fderphi'-4*(1-vm)*(eigenM*fderphi'))');
return

```

---

### Esh\_D4.m

```
function D4 = Esh_D4(vm,a,x)
```

```
% todo search for todos in function
```

```
% are the case statements supposed to be exact or with a tolerance like in eshint
```

```
% get rid of all vars not used
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Calculation of F and E integrals
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% this subroutines finds the largest positive root of
```

```
%  $x(1)^2/(a(1)+\lambda) + x(2)^2/(a(2)+\lambda) + x(3)^2/(a(3)+\lambda) = 1$ 
```

```
% (Mura 11.37) for the exterior point x and ellipsoid dimensions a. When
```

```
% expanded and like terms in lambda are collected, the coefficients of
```

```
%  $\lambda^3, \lambda^2$ , etc. are as below
```

```
coef3=1; % coefficient of  $\lambda^3$  term
```

```
coef2=a(1)^2+a(2)^2+a(3)^2-(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2); % coefficient of  $\lambda^2$  term
```

```
coef1=a(1)^2*a(2)^2+a(1)^2*a(3)^2+a(2)^2*a(3)^2-
```

```
((a(2)^2+a(3)^2)*x(1)^2+(a(1)^2+a(3)^2)*x(2)^2+(a(1)^2+a(2)^2)*x(3)^2); %
```

```
coefficient of  $\lambda$  term
```

```
coef0=a(1)^2*a(2)^2*a(3)^2-
```

```
(a(2)^2*a(3)^2*x(1)^2+a(1)^2*a(3)^2*x(2)^2+a(1)^2*a(2)^2*x(3)^2); % coefficient of constant term
```

```
poly=[coef3,coef2,coef1,coef0]; % matlab polynomial format
```

```
lambda=0; % initialize lambda to zero
```

```
if x(1)^2/a(1)^2+x(2)^2/a(2)^2+x(3)^2/a(3)^2>1 % if x is exterior point set
```

```
    % lambda to the largest positive real root, otherwise lambda=0
```

```
    lambdaroots=roots(poly); % store the roots of the cubic equation
```

```
    for i=1:3 % find the largest positive real root
```

```
        if isreal(lambdaroots(i)) && lambdaroots(i)>lambda
```

```
            lambda=lambdaroots(i);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
theta=asin(((a(1)^2-a(3)^2)/(a(1)^2+lambda))^(1/2)); % the amplitude
```

```
% todo this argument was taken from the previous code (with the lambda) and
```

```
% modified with the arcsin. need to see if can get here via Gradshteyn and
```

```
% Ryzhik from Mura 11.36
```

```
%  $k=((a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2))^(1/2)$ ; % the elliptic modulus
```

```
m=(a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2); %  $m=k^2$  is the parameter
```

```
[F,E,Z]=elliptic12(theta,m); %this sets the tolerance to eps, add a third argument to set to a larger tol
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%Calculation of I's
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
if a(1)==a(2) && a(1)==a(3)
```

```
    % Spherical Case
```

```

del=sqrt(prod(a.^2+lambda));
% can simplify to del3=sqrt((a(1)^2+lambda)^3) for sphere
Ifir=(4/3)*pi*a(1)^3/(a(1)^2+lambda)^(3/2)*ones(1,3);
Isec=(4/5)*pi*a(1)^3/(a(1)^2+lambda)^(1/2)*ones(3); % todo: i changed the
5/2 to 1/2 to make units right--not sure if correct

elseif a(1)>a(2)&& a(3)==a(2)
    %fprintf('Prolate case..\n')

    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    bbar=sqrt(a(1)^2+lambda)/sqrt(a(3)^2+lambda);
    dbar=sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/sqrt(a(3)^2+lambda);
    I=(acosh(bbar))*4*pi*a(1)*a(2)^2/sqrt(a(1)^2-a(2)^2);
    Ifir(1)=4*pi*a(1)*a(2)^2*(acosh(bbar)-dbar/bbar)/(a(1)^2-a(2)^2)^1.5;
    Ifir(2)=2*pi*a(1)*a(2)^2*(-acosh(bbar)+dbar*bbar)/(a(1)^2-a(2)^2)^1.5;
    Ifir(3)=Ifir(2);

    Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
    Isec(1,3)=Isec(1,2);
    Isec(2,1)=Isec(1,2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);
    Isec(2,3)=pi*prod(a)/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)/4;
    Isec(3,2)=Isec(2,3);
    Isec(1,1)=((4*pi*prod(a))/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
    Isec(2,2)=Isec(2,3);
    Isec(3,3)=Isec(2,3);

elseif a(1)==a(2)&& a(2)>a(3)
    %fprintf('Oblate case...\n')
    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    bnonbar=sqrt(a(3)^2+lambda)/sqrt(a(1)^2+lambda);
    dnonbar=sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/sqrt(a(1)^2+lambda);
    I=(acos(bnonbar))*4*pi*a(1)^2*a(3)/sqrt(a(1)^2-a(3)^2);
    Ifir(1)=2*pi*a(1)^2*a(3)*(acos(bnonbar)-dnonbar*bnonbar)/(a(1)^2-
a(3)^2)^1.5;
    Ifir(2)=Ifir(1);
    Ifir(3)=4*pi*prod(a)/del-2*Ifir(1);

    Isec(1,3)=(Ifir(3)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(3)^2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);
    Isec(2,3)=Isec(1,3);
    Isec(3,2)=Isec(2,3);

    Isec(1,1)=pi*prod(a)/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)/4;
    Isec(1,2)=Isec(1,1);
    Isec(2,1)=Isec(1,2);

    Isec(2,2)=Isec(1,1);
    Isec(3,3)=((4*pi*prod(a))/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)-Isec(2,3))/3;
else
    %fprintf('triaxial ellipsoid case ..\n')
    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    I=4*pi*prod(a)*F/sqrt(a(1)^2-a(3)^2);
    Ifir(1)=I*(1-E/F)/(a(1)^2-a(2)^2);

    Ifir(2)=4*pi*prod(a)*(E*sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/((a(1)^2-a(2)^2)*(a(2)^2-
a(3)^2))-F/((a(1)^2-a(2)^2)*sqrt(a(1)^2-a(3)^2))-(1/(a(2)^2-
a(3)^2))*sqrt((a(3)^2+lambda)/((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda))));

    Ifir(3)=4*pi*prod(a)/del-Ifir(1)-Ifir(2);

```

```

Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
Isec(2,1)=Isec(1,2);
Isec(1,3)=(Ifir(3)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(3)^2);
Isec(3,1)=Isec(1,3);
Isec(2,3)=(Ifir(3)-Ifir(2))/(a(2)^2-a(3)^2);
Isec(3,2)=Isec(2,3);
Isec(1,1)=((4*pi*prod(a))/(a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
Isec(2,2)=((4*pi*prod(a))/(a(2)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(2,3))/3;
Isec(3,3)=((4*pi*prod(a))/(a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)-Isec(2,3))/3;
end

%*****
%*****
%I derivatives
%*****
%*****

[a_21,a_22]=buildtensors(a);
ultadelfir=-2*pi*prod(a)./(a.^2+lambda)*del);
[ultadelfir_21,ultadelfir_22]=buildtensors(ultadelfir);
ultadelsec=-2*pi*prod(a)./(a_21.^2+lambda).*(a_22.^2+lambda)*del);

% derivatives of lambda
c1=sum((x.^2)./(a.^2+lambda).^2));
c2=sum((x.^2)./(a.^2+lambda).^3));
c3=sum((x.^2)./(a.^2+lambda).^4));

F=2*x./(a.^2+lambda);
[F_21,F_22]=buildtensors(F);

if lambda==0
    fderlambda=zeros(1,3);
else
    fderlambda=F/c1;
end
[fderlambda_21,fderlambda_22]=buildtensors(fderlambda);

diagvals=eye(3);
nondiagvals=ones(3)-eye(3);
fderF=nondiagvals.*(1./(a_21.^2+lambda)).*(-
F_21.*fderlambda_22)+diagvals.*(1./(a_21.^2+lambda)).*(2-F_21.*fderlambda_22);
fderc1=F./(a.^2+lambda)-2*c2*fderlambda;
[fderc1_21,fderc1_22]=buildtensors(fderc1);
fderc2=F./(a.^2+lambda).^2-3*c3*fderlambda;
[fderc2_21,fderc2_22]=buildtensors(fderc2);

if lambda==0
    sderlambda=zeros(3);
else
    sderlambda=(fderF-fderlambda_21.*fderc1_22)/c1;
end

sderc1=(1./(a_21.^2+lambda)).*(fderF-fderlambda_22.*F_21./(a_21.^2+lambda))-
2*(fderc2_22.*fderlambda_21+c2*sderlambda);
fderIfir=ultadelfir_21.*fderlambda_22;

for q=1:3
    for p=1:3
        for r=1:3
            sderF(q,p,r)=-
(fderF(q,p)*fderlambda(r)+fderF(q,r)*fderlambda(p)+F(q)*sderlambda(p,r))/(a(q)^
2+lambda);

```

```

        end
    end
end

zeefir=1./(a.^2+lambda)+0.5*sum(1./(a.^2+lambda));
zeesec=1./(a_21.^2+lambda)+1./(a_22.^2+lambda)+0.5*sum(1./(a.^2+lambda));
for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            sderIfir(i,j,k)=ultadelfir(i)*(sderlambda(j,k)-
fderlambda(j)*fderlambda(k)*zeefir(i));
        end
    end
end

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            fderIsec(i,j,k)=ultadelsec(i,j)*fderlambda(k);
        end
    end
end

for i=1:3;
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                sderIsec(i,j,k,l)=ultadelsec(i,j)*(sderlambda(k,l)-
fderlambda(k)*fderlambda(l)*zeesec(i,j));
            end
        end
    end
end

for q=1:3
    for p=1:3
        for r=1:3
            if lambda==0
                tderlambda(q,p,r)=0;
            else
                tderlambda(q,p,r)=(-1/c1)*(sderlambda(q,p)*fderc1(r)-
sderF(q,p,r)+sderlambda(q,r)*fderc1(p)+fderlambda(q)*sderc1(p,r));
            end
        end
    end
end

%*****
%Calculation of V-potentials
%*****

for i=1:3
    for p=1:3
        for q=1:3
            sderVfir(i,p,q)=-(kdelta(p,q)*Isec(p,i)+x(p)*fderIsec(p,i,q));
        end
    end
end

for i=1:3
    for p=1:3
        for q=1:3

```



```

        for r=1:3
            tderVfir(i,p,q,r)=-(kdelta(p,q)*fderIsec(p,i,r)+kdelta(p,r)*fderIsec(p,i,q)+x(p)*sderIsec(p,i,q,r)
        );
        end
    end
end

%*****
%calculation of phi and psi potentials
%*****

%calculation of phi derivatives
for p=1:3
    for q=1:3
        sderphi(p,q)=-(kdelta(p,q)*Ifir(p)+x(p)*fderIfir(p,q));
    end
end

for p=1:3
    for q=1:3
        for r=1:3
            tderphi(p,q,r)=-(kdelta(p,q)*fderIfir(p,r)+kdelta(p,r)*fderIfir(p,q)+x(p)*sderIfir(p,q,r));
        end
    end
end

%*****
%psi's
%*****

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                foderpsi(i,j,k,l)=kdelta(i,j)*(sderphi(k,l)-
a(i)^2*sderVfir(i,k,l))+kdelta(i,k)*(sderphi(j,l)-
a(i)^2*sderVfir(i,j,l))+kdelta(i,l)*(sderphi(j,k)-
a(i)^2*sderVfir(i,j,k))+x(i)*(tderphi(j,k,l)-a(i)^2*tderVfir(i,j,k,l)));
            end
        end
    end
end

%*****
%calculation of D4
%*****
premult1=1/(8*pi*(1-vm));

%calculation of D4

for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                D4(i,j,k,l)=premult1*(foderpsi(k,l,i,j)-
2*vm*kdelta(k,l)*sderphi(i,j)-(1-
vm)*(sderphi(k,j)*kdelta(i,l)+sderphi(k,i)*kdelta(j,l)+sderphi(l,j)*kdelta(i,k)
+sderphi(l,i)*kdelta(j,k)));
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
return

```

---

### Esh\_disp.m

```
function u=Esh_disp(vm,a,x,eigen)
```

```

% todo search for todos in function
% are the case statements supposed to be exact or with a tolerance like in
eshint
% get rid of all vars not used

```

```

%*****%
%Calculation of F and E integrals
%*****%

```

```

% this subroutines finds the largest positive root of
%  $x(1)^2/(a(1)+\lambda) + x(2)^2/(a(2)+\lambda) + x(3)^2/(a(3)+\lambda) = 1$ 
% (Mura 11.37) for the exterior point x and ellipsoid dimensions a. When
% expanded and like terms in lambda are collected, the coefficients of
%  $\lambda^3$ ,  $\lambda^2$ , etc. are as below

```

```

coef3=1; % coefficient of lambdas^3 term
coef2=a(1)^2+a(2)^2+a(3)^2-(x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2); % coefficient of lambdas^2
term
coef1=a(1)^2*a(2)^2+a(1)^2*a(3)^2+a(2)^2*a(3)^2-
((a(2)^2+a(3)^2)*x(1)^2+(a(1)^2+a(3)^2)*x(2)^2+(a(1)^2+a(2)^2)*x(3)^2); %
coefficient of lambdas term
coef0=a(1)^2*a(2)^2*a(3)^2-
(a(2)^2*a(3)^2*x(1)^2+a(1)^2*a(3)^2*x(2)^2+a(1)^2*a(2)^2*x(3)^2); % coefficient
of constant term
poly=[coef3,coef2,coef1,coef0]; % matlab polynomial format
lambda=0; % initialize lambda to zero

```

```

if x(1)^2/a(1)^2+x(2)^2/a(2)^2+x(3)^2/a(3)^2>1 % if x is exterior point set
    % lambda to the largest positive real root, otherwise lambda=0
    lambdaroots=roots(poly); % store the roots of the cubic equation
    for i=1:3 % find the largest positive real root
        if isreal(lambdaroots(i)) && lambdaroots(i)>lambda
            lambda=lambdaroots(i);
        end
    end
end
end

```

```

theta=asin(((a(1)^2-a(3)^2)/(a(1)^2+lambda))^(1/2)); % the amplitude
% todo this argument was taken from the previous code (with the lambda) and
% modified with the arcsin. need to see if can get here via Gradshteyn and
% Ryzhik from Mura 11.36
k=((a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2))^(1/2); % the elliptic modulus
m=(a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2); % m=k^2 is the parameter
[F,E,Z]=elliptic12(theta,m); %this sets the tolerance to eps, add a third
argument to set to a larger tol

```

```

%*****%
%Calculation of I's
%*****%

```

```

if a(1)==a(2) && a(1)==a(3)
    % Spherical Case
    del=sqrt(prod(a.^2+lambda));

```

```

% can simplify to del3=sqrt((a(1)^2+lambda)^3) for sphere
Ifir=(4/3)*pi*a(1)^3/(a(1)^2+lambda)^(3/2)*ones(1,3);
Isec=(4/5)*pi*a(1)^3/(a(1)^2+lambda)^(1/2)*ones(3); % todo: i changed the
5/2 to 1/2 to make units right--not sure if correct

elseif a(1)>a(2)&& a(3)==a(2)
    %fprintf('Prolate case..\n')

    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    bbar=sqrt(a(1)^2+lambda)/sqrt(a(3)^2+lambda);
    dbar=sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/sqrt(a(3)^2+lambda);
    %I=(acosh(bbar))*4*pi*a(1)*a(2)^2/sqrt(a(1)^2-a(2)^2);
    Ifir(1)=4*pi*a(1)*a(2)^2*(acosh(bbar)-dbar/bbar)/(a(1)^2-a(2)^2)^1.5;
    Ifir(2)=2*pi*a(1)*a(2)^2*(-acosh(bbar)+dbar*bbbar)/(a(1)^2-a(2)^2)^1.5;
    Ifir(3)=Ifir(2);

    Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
    Isec(1,3)=Isec(1,2);
    Isec(2,1)=Isec(1,2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);
    Isec(2,3)=pi*prod(a)/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)/4;
    Isec(3,2)=Isec(2,3);
    Isec(1,1)=((4*pi*prod(a))/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
    Isec(2,2)=Isec(2,3);
    Isec(3,3)=Isec(2,3);

elseif a(1)==a(2)&& a(2)>a(3)
    %fprintf('Oblate case...\n')
    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    bnonbar=sqrt(a(3)^2+lambda)/sqrt(a(1)^2+lambda);
    dnonbar=sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/sqrt(a(1)^2+lambda);
    %I=(acos(bnonbar))*4*pi*a(1)^2*a(3)/sqrt(a(1)^2-a(3)^2);
    Ifir(1)=2*pi*a(1)^2*a(3)*(acos(bnonbar)-dnonbar*bnonbar)/(a(1)^2-
a(3)^2)^1.5;
    Ifir(2)=Ifir(1);
    Ifir(3)=4*pi*prod(a)/del-2*Ifir(1);

    Isec(1,3)=(Ifir(3)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(3)^2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);
    Isec(2,3)=Isec(1,3);
    Isec(3,2)=Isec(2,3);

    Isec(1,1)=pi*prod(a)/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)/4;
    Isec(1,2)=Isec(1,1);
    Isec(2,1)=Isec(1,2);

    Isec(2,2)=Isec(1,1);
    Isec(3,3)=((4*pi*prod(a))/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)-Isec(2,3))/3;
else
    %fprintf('triaxial ellipsoid case ..\n')
    del=sqrt((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)*(a(3)^2+lambda));
    I=4*pi*prod(a)*F/sqrt(a(1)^2-a(3)^2);
    Ifir(1)=I*(1-E/F)/(a(1)^2-a(2)^2);
    Ifir(2)=4*pi*prod(a)*(E*sqrt(a(1)^2-a(3)^2)/((a(1)^2-a(2)^2)*(a(2)^2-
a(3)^2))-F/((a(1)^2-a(2)^2)*sqrt(a(1)^2-a(3)^2))-(1/(a(2)^2-
a(3)^2))*sqrt((a(3)^2+lambda)/((a(1)^2+lambda)*(a(2)^2+lambda)))));
    Ifir(3)=4*pi*prod(a)/del-Ifir(1)-Ifir(2);
    Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
    Isec(2,1)=Isec(1,2);
    Isec(1,3)=(Ifir(3)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(3)^2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);

```

```

Isec(2,3)=(Ifir(3)-Ifir(2))/(a(2)^2-a(3)^2);
Isec(3,2)=Isec(2,3);
Isec(1,1)=(4*pi*prod(a))/((a(1)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
Isec(2,2)=(4*pi*prod(a))/((a(2)^2+lambda)*del)-Isec(1,2)-Isec(2,3))/3;
Isec(3,3)=(4*pi*prod(a))/((a(3)^2+lambda)*del)-Isec(1,3)-Isec(2,3))/3;
end

%*****
%*****
%I derivatives
%*****
%*****

[a_21,a_22]=buildtensors(a);
ultadelfir=-2*pi*prod(a)./(a.^2+lambda)*del);
[ultadelfir_21,ultadelfir_22]=buildtensors(ultadelfir);
ultadelsec=-2*pi*prod(a)./(a_21.^2+lambda).*(a_22.^2+lambda)*del);

% derivatives of lambda
c1=sum((x.^2)./(a.^2+lambda).^2));
F=2*x./(a.^2+lambda);

if lambda==0
    fderlambda=zeros(1,3);
else
    fderlambda=F/c1;
end
[fderlambda_21,fderlambda_22]=buildtensors(fderlambda);

fderIfir=ultadelfir_21.*fderlambda_22;
for i=1:3
    for j=1:3
        for k=1:3
            fderIsec(i,j,k)=ultadelsec(i,j)*fderlambda(k);
        end
    end
end

% calculate phi derivative
fderphi=-x.*Ifir;

% psi's
for i=1:3
    for j=1:3
        for l=1:3
            tderpsi(i,j,l)=-kdelta(i,j)*x(l)*(Ifir(l)-a(i)^2*Isec(i,l))-
x(i)*x(j)*(fderIfir(j,l)-a(i)^2*fderIsec(i,j,l))-
(kdelta(i,l)*x(j)+kdelta(j,l)*x(i))*(Ifir(j)-a(i)^2*Isec(i,j));
        end
    end
end

premult1=1/(8*pi*(1-vm));

%calculate disp
eigenM = [eigen(1:3)';eigen([2 4 5])'; eigen([3 5 6])'];
diag = eigenM(1,1)+eigenM(2,2)+eigenM(3,3);
u = (premult1*(tprod(tderpsi,[1 -1 -2],eigenM,[-1 -2])-2*vm*diag*fderphi'-4*(1-vm)*(eigenM*fderphi'))');
return
end

```

## Esh\_sol.m

```
function output = Esh_sol(inp,varargin)
%poisson ratio of matrix
vm=inp.vm;
%elastic modulus of matrix
Em=inp.Em;
%heterogeneity poisson ratio
vh=inp.vh;
%heterogeneity elastic modulus
Eh=inp.Eh;
%converts isotropic constants into a matrix
Cm=Ctensord(Em,vm);
Ch=Ctensord(Eh,vh);

%dimensiona of the ellipsoid. Must always be a1>=a2>=a3 and ortation angles
%[alpha beta sigam]
dim = inp.dim;
ang = inp.ang;

% fake a1>=a2>=a3
exh = zeros(3,3);
for i=1:2
    for j=2:3
        if dim(i)<dim(j)
            exh(i,j) = 1;
            tmp = dim(i);
            dim(i) = dim(j);
            dim(j) = tmp;
        end
    end
end
end
% pre-rotation in order of [z,y,x]
ang_init = pi/2*[exh(2,3) exh(1,3) exh(1,2)];
Rx = [1 0 0;0 cos(ang_init(1)) -sin(ang_init(1));0 sin(ang_init(1))
cos(ang_init(1))];
Ry = [cos(ang_init(2)) 0 sin(ang_init(2));0 1 0;-sin(ang_init(2)) 0
cos(ang_init(2))];
Rz = [cos(ang_init(3)) -sin(ang_init(3)) 0;sin(ang_init(3)) cos(ang_init(3))
0;0 0 1];
R_init = Rx*Ry*Rz;
angb_init = -ang_init;
Rx = [1 0 0;0 cos(angb_init(1)) -sin(angb_init(1));0 sin(angb_init(1))
cos(angb_init(1))];
Ry = [cos(angb_init(2)) 0 sin(angb_init(2));0 1 0;-sin(angb_init(2)) 0
cos(angb_init(2))];
Rz = [cos(angb_init(3)) -sin(angb_init(3)) 0;sin(angb_init(3))
cos(angb_init(3)) 0;0 0 1];
Rb_init = Rz*Ry*Rx;

delC=Cm-Ch;
%stress ordering is: sigma11, sigma12, sigma13, sigma22,sigma23,sigma33
%this is the applied stress
stressvec=inp.stressvec;
eigp=inp.eigp;
% rotation matrices w.r.t the ellipsoid
```

```

Rx = [1 0 0;0 cos(ang(1)) -sin(ang(1));0 sin(ang(1)) cos(ang(1))];
Ry = [cos(ang(2)) 0 sin(ang(2));0 1 0;-sin(ang(2)) 0 cos(ang(2))];
Rz = [cos(ang(3)) -sin(ang(3)) 0;sin(ang(3)) cos(ang(3)) 0;0 0 1];
R = Rz*Ry*Rx;
Rx = [1 0 0;0 cos(-ang(1)) -sin(-ang(1));0 sin(-ang(1)) cos(-ang(1))];
Ry = [cos(-ang(2)) 0 sin(-ang(2));0 1 0;-sin(-ang(2)) 0 cos(-ang(2))];
Rz = [cos(-ang(3)) -sin(-ang(3)) 0;sin(-ang(3)) cos(-ang(3)) 0;0 0 1];
Rb = Rx*Ry*Rz;
% rotate stress against oblique ellipsoid
stressten_init = [stressvec(1:3)';stressvec([2 4 5])'; stressvec([3 5 6])'];
stressten_rot = R_init*Rb*stressten_init*(R_init*Rb)';
stressvec = [stressten_rot(1,:) stressten_rot(2,[2,3]) stressten_rot(3,3)'];
%correspondingly, the applied strain
epsvec=Cm\stressvec;
%call the internal eshelby tensor.
S4=Eshint(vm,dim);
eigen=(delC*S4-Cm)\(-delC*epsvec-Ch*eigp);
% for all the observations grids
Ng = length(inp.grid);

for n=1:Ng
    x = inp.grid{n}{1};
    y = inp.grid{n}{2};
    z = inp.grid{n}{3};
    [X Y Z] = meshgrid(x,y,z);
    Nx = size(x,2);
    Ny = size(y,2);
    Nz = size(z,2);
    u = [];
    rD4 = [];
    stress = [];
    strain = [];
    if Nx == max([Nx Ny Nz])
        for k=1:Nz;
            for i=1:Ny
                if length(varargin)>=2 && ismember('disp',lower(varargin))
                    parfor j=1:Nx
                        pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                        [D4 disp] = Esh_D4_disp(vm,dim,pos,eigen);
                        rD4(i,j,k,,:) = Cmatrix(D4);
                        u(i,j,k,:) = R*Rb_init*disp';
                    end
                elseif length(varargin)>=1 && ~ismember('disp',lower(varargin))
                    parfor j=1:Nx
                        pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                        D4 = Esh_D4(vm,dim,pos);
                        rD4(i,j,k,,:) = Cmatrix(D4);
                    end
                else
                    parfor j=1:Nx
                        pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                        u(i,j,k,:) = R*Rb_init*Esh_disp(vm,dim,pos,eigen)';
                    end
                end
            end
        end
    end
    elseif Ny == max([Nx Ny Nz])
        for k=1:Nz;
            for j=1:Nx
                if length(varargin)>=2 && ismember('disp',lower(varargin))
                    parfor i=1:Ny
                        pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';

```

```

        [D4 disp] = Esh_D4_disp(vm,dim,pos,eigen);
        rD4(i,j,k,,:) = Cmatrix(D4);
        u(i,j,k,:) = R*Rb_init*disp';
    end
elseif length(varargin) >= 1 && ~ismember('disp', lower(varargin))
    parfor i=1:Ny
        pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
        D4 = Esh_D4(vm,dim,pos);
        rD4(i,j,k,,:) = Cmatrix(D4);
    end
    else
        parfor i=1:Ny
            pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
            u(i,j,k,:) = R*Rb_init*Esh_disp(vm,dim,pos,eigen)';
        end
    end
end
end
end
else
    for j=1:Nx
        for i=1:Ny
            if length(varargin) >= 2 && ismember('disp', lower(varargin))
                parfor k=1:Nz
                    pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                    [D4 disp] = Esh_D4_disp(vm,dim,pos,eigen);
                    rD4(i,j,k,,:) = Cmatrix(D4);
                    u(i,j,k,:) = R*Rb_init*disp';
                end
            elseif length(varargin) >= 1 && ~ismember('disp', lower(varargin))
                parfor k=1:Nz
                    pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                    D4 = Esh_D4(vm,dim,pos);
                    rD4(i,j,k,,:) = Cmatrix(D4);
                end
            else
                parfor k=1:Nz
                    pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                    u(i,j,k,:) = R*Rb_init*Esh_disp(vm,dim,pos,eigen)';
                end
            end
        end
    end
end
end
fstress = ismember('stress', lower(varargin));
fstrain = ismember('strain', lower(varargin));
if ~isempty(rD4)
    for j=1:Nx
        for i=1:Ny
            for k=1:Nz
                pos = (R_init*Rb*[X(i,j,k) Y(i,j,k) Z(i,j,k)]')';
                if
pos(1)^2/dim(1)^2+pos(2)^2/dim(2)^2+pos(3)^2/dim(3)^2 <= 1 % for interior points
                    if fstrain
                        strainr = epsvec+S4*eigen;
                        strainten = [strainr(1:3)'; strainr([2 4 5])'];
                    strainr([3 5 6])'];
                        strainten = R*Rb_init*strainten*(R*Rb_init)';
                        strain(i,j,k,:) = [strainten(1,:)
                    strainten(2,[2,3]) strainten(3,3)]';
                    end
                    if fstress
                        stressr = stressvec+Cm*(S4*eigen-eigen);

```

```

stressr([3 5 6])'];
stressrten = [stressr(1:3)';stressr([2 4 5])'];
stressrten = R*Rb_init*stressrten*(R*Rb_init)';
stress(i,j,k,:) = [stressrten(1,:)
stressrten(2,[2,3]) stressrten(3,3)]';
end
else % exterior points
if fstress
stressr =
stressvec+Cm*squeeze(rD4(i,j,k,:,:)*)eigen;
stressrten = [stressr(1:3)';stressr([2 4 5])'];
stressr([3 5 6])'];
stressrten = R*Rb_init*stressrten*(R*Rb_init)';
stress(i,j,k,:) = [stressrten(1,:)
stressrten(2,[2,3]) stressrten(3,3)]';
end
if fstrain
strainr = epsvec+squeeze(rD4(i,j,k,:,:)*)eigen;
strainten = [strainr(1:3)';strainr([2 4 5])'];
strainr([3 5 6])'];
strainten = R*Rb_init*strainten*(R*Rb_init)';
strain(i,j,k,:) = [strainten(1,:)
strainten(2,[2,3]) strainten(3,3)]';
end
end
end
end
end
end
output.grid{n,1} = X;
output.grid{n,2} = Y;
output.grid{n,3} = Z;
output.u{n} = u;
output.stress{n} = stress;
output.strain{n} = strain;
End

```

---

Eshint.m

```
function [S4,PVector]=Eshint(vm,a)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Eshint.m
```

```
% Calculates the internal Eshelby tensors (see
```

```
% Eshelby '57 eqn. 3.8)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%% Changes made
```

```
% error checking
```

```
% change all var names to get rid of orlin1
```

```
% make the case decisions dependent on 1e-6 * dimension, instead of the  
absolute size 1e-6
```

```
% fix the case decision logic
```

```
% fix case and statements to use logical and (&&) rather than elementwise and  
(&)
```

```
% general formatting
```

```
% verified and corrected I formulations from Mura
```

```
%% Changes to do
```



```

% Finish verification of functions starting in line 97

%*****%
%Calculation of I's
%*****%

if a(1)<=0 || a(2)<=0 || a(3)<=0
error('Ellipsoid dimensions (a) must be positive')
end

if abs(a(1)-a(2))<(1e-6*a(1)) && abs(a(2)-a(3))<(1e-6*a(1)) % checks that
geometric mean of ellipsoid dimensions is not more than 1e-6 different from
first dimension
    % Spherical Case
    Ifir=(4/3)*pi*ones(1,3);
    Isec=(4/5)*pi*a(1)^2*ones(3);

elseif (a(1)-a(2))>(1e-6*a(1)) && abs(a(3)-a(2))<(1e-6*a(1))
    % Prolate Spheriod Case
    rat=a(1)/a(3);

    Ifir=zeros(1,3);
    Ifir(2)=(2*pi*a(1)*a(3)^2/((a(1)^2-a(3)^2)^(3/2)))*(rat*(rat^2-1)^(1/2)-
acosh(rat));
    Ifir(3)=Ifir(2);
    Ifir(1)=4*pi-2*Ifir(2);

    Isec=zeros(3);
    Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
    Isec(1,3)=Isec(1,2);
    Isec(2,1)=Isec(1,2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);
    Isec(1,1)=(4*pi/a(1)^2-2*Isec(1,2))/3;
    Isec(2,3)=pi/(a(2)^2)-(Ifir(2)-Ifir(1))/(4*(a(1)^2-a(2)^2));
    Isec(3,2)=Isec(2,3);
    Isec(2,2)=Isec(2,3);
    Isec(3,3)=Isec(2,3);

elseif abs(a(1)-a(2))<(1e-6*a(1)) && (a(2)-a(3))>(1e-6*a(2))
    % Oblate Spheriod Case
    rat=a(3)/a(1);

    Ifir=zeros(1,3);
    Ifir(1)=(2*pi*a(1)^2*a(3)/((a(1)^2-a(3)^2)^(3/2)))*(acos(rat)-rat*(1-
rat^2)^(1/2));
    Ifir(2)=Ifir(1);
    Ifir(3)=4*pi-2*Ifir(1);

    Isec=zeros(3);
    Isec(1,3)=(Ifir(1)-Ifir(3))/(a(3)^2-a(1)^2);
    Isec(3,1)=Isec(1,3);
    Isec(2,3)=Isec(1,3);
    Isec(3,2)=Isec(2,3);
    Isec(1,2)=pi/a(1)^2-Isec(1,3)/4;
    Isec(2,1)=Isec(1,2);
    Isec(1,1)=Isec(1,2);
    Isec(2,2)=Isec(1,2);
    Isec(3,3)=(4*pi/a(3)^2-2*Isec(1,3))/3;

else
    % Triaxial Ellipsoid Case
    theta=asin((1-(a(3)/a(1))^2)^(1/2)); % amplitude

```

```

% k=((a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2)^(1/2); % the elliptic modulus
m=(a(1)^2-a(2)^2)/(a(1)^2-a(3)^2); % m=k^2 is the parameter;
[F,E,Z]=elliptic12(theta,m); %this sets the tolerance to eps, add a third
argument to set to a larger tol
% Mura 11.17
Ifir=zeros(1,3);
Ifir(1)=(4*pi*prod(a)/((a(1)^2-a(2)^2)*sqrt(a(1)^2-a(3)^2)))*(F-E);
Ifir(3)=(4*pi*prod(a)/((a(2)^2-a(3)^2)*sqrt((a(1)^2-
a(3)^2)))*(a(2)*sqrt((a(1)^2-a(3)^2))/(a(1)*a(3))-E);
Ifir(2)=4*pi-Ifir(1)-Ifir(3);

Isec=zeros(3);
Isec(1,2)=(Ifir(2)-Ifir(1))/(a(1)^2-a(2)^2);
Isec(2,3)=(Ifir(3)-Ifir(2))/(a(2)^2-a(3)^2);
Isec(3,1)=(Ifir(1)-Ifir(3))/(a(3)^2-a(1)^2);
Isec(2,1)=Isec(1,2);
Isec(3,2)=Isec(2,3);
Isec(1,3)=Isec(3,1);
Isec(1,1)=(4*pi/a(1)^2-Isec(1,2)-Isec(1,3))/3;
Isec(2,2)=(4*pi/a(2)^2-Isec(2,3)-Isec(2,1))/3;
Isec(3,3)=(4*pi/a(3)^2-Isec(3,1)-Isec(3,2))/3;
end

denom=8*pi*(1-vm);

S1111=(3*a(1)^2*Isec(1,1)+(1-2*vm)*Ifir(1))/denom;
S2222=(3*a(2)^2*Isec(2,2)+(1-2*vm)*Ifir(2))/denom;
S3333=(3*a(3)^2*Isec(3,3)+(1-2*vm)*Ifir(3))/denom;

S1122=(a(2)^2*Isec(1,2)-(1-2*vm)*Ifir(1))/denom;
S2233=(a(3)^2*Isec(2,3)-(1-2*vm)*Ifir(2))/denom;
S3311=(a(1)^2*Isec(3,1)-(1-2*vm)*Ifir(3))/denom;

S1133=(a(3)^2*Isec(1,3)-(1-2*vm)*Ifir(1))/denom;
S2211=(a(1)^2*Isec(2,1)-(1-2*vm)*Ifir(2))/denom;
S3322=(a(2)^2*Isec(3,2)-(1-2*vm)*Ifir(3))/denom;

S1212=((a(1)^2+a(2)^2)*Isec(1,2)+(1-2*vm)*(Ifir(1)+Ifir(2)))/(2*denom);
S2323=((a(2)^2+a(3)^2)*Isec(2,3)+(1-2*vm)*(Ifir(2)+Ifir(3)))/(2*denom);
S3131=((a(3)^2+a(1)^2)*Isec(3,1)+(1-2*vm)*(Ifir(3)+Ifir(1)))/(2*denom);
S1313=S3131;

S4=[S1111, 0, 0, S1122, 0, S1133;
0, 2*S1212, 0, 0, 0, 0;
0, 0, 2*S1313, 0, 0, 0;
S2211, 0, 0, S2222, 0, S2233;
0, 0, 0, 0, 2*S2323, 0;
S3311, 0, 0, S3322, 0, S3333];

PI3131=(Ifir(1)-Ifir(3))/(8*pi);

PI1212=(Ifir(2)-Ifir(1))/(8*pi);

PI2323=(Ifir(3)-Ifir(2))/(8*pi);

PI1313=-PI3131;
PI2121=-PI1212;
PI3232=-PI2323;

PIvector=[2*PI3232;2*PI1313;2*PI2121];

```

## Etprod.m

```
function [C,Atp,Btp]=etprod(Cidx,A,Aidx,B,Bidx)
% tprod wrapper to make calls more similar to Einstein Summation Convention
%
% [C,Atp,Btp]=etprod(Cidx,A,Aidx,B,Bidx);
% Wrapper function for tprod to map between Einstein summation
% convection (ESC) and tprod's numeric calling convention e.g.
% 1) Matrix Matrix product:
%   ESC: C_ij = A_ik B_kj <=> C = etprod('ij',A,'ik',B,'kj');
% 2) Vector outer product
%   ESC: C_ij = A_i B_j   <=> C = etprod('ij',A,'i',B,'j');   % A,B col vec
%                               C = etprod('ij',A,' i',B,' j'); % A,B row vec
% N.B. use spaces ' ' to indicate empty/ignored *singlenton* dimensions
% 3) Matrix vector product
%   ESC: C_i  = A_ik B_k   <=> C = etprod('i',A,'ik',B,'k');
% 4) Spatial Filtering
%   ESC: FX_fte = A_cte B_cf <=> C = etprod('fte',A,'cte',B,'cf')
% OR:
%   C = etprod({'feat','time','epoch'},A,{'ch','time','epoch'},B,{'ch','feat'})
%
% Inputs:
% Cidx -- the list of dimension labels for the output
% A     -- [n-d] array of the A values
% Aidx  -- [ndims(A) x 1] (array, string, or cell array of strings)
%        list of dimension labels for A array
% B     -- [m-d] array of the B values
% Bidx  -- [ndims(B) x 1] (array, string or cell array of strings)
%        list of dimension labels for B array
%
% Outputs:
% C     -- [p-d] array of output values. Dimension labels are as in Cidx
% Atp   -- [ndims(A) x 1] A's dimsvec as used in the core tprod call
% Btp   -- [ndims(B) x 1] B's dimsvec as used in the core tprod call
%
% See Also: tprod, tprod_testcases
%
% Copyright 2006-      by Jason D.R. Farquhar (jdrf@zepler.org)
% Permission is granted for anyone to copy, use, or modify this
% software and accompanying documents for any uncommercial
% purposes, provided this copyright notice is retained, and note is
% made of any changes that have been made. This software and
% documents are distributed without any warranty, express or
% implied
if ( iscell(Aidx)~=iscell(Bidx) || iscell(Cidx)~=iscell(Aidx) )
    error('Aidx,Bidx and Cidx cannot be of different types, all cells or arrays');
end

Atp = zeros(size(Aidx));
Btp = zeros(size(Bidx));
% Map inner product dimensions, to unique *negative* index
for i=1:numel(Aidx)
    if ( iscell(Aidx) ) Bmatch = strcmp(Aidx{i}, Bidx);
    else                Bmatch = (Aidx(i)==Bidx);
    end
    if ( any(Bmatch) ) Btp(Bmatch)=-i; Atp(i)=-i; end;
end
% Spaces/empty values in the input become 0's, i.e. ignored dimensions
if ( iscell(Aidx) )
    Btp(strcmp(' ',Bidx))=0;Btp(strcmp('',Bidx))=0;
    Atp(strcmp(' ',Aidx))=0;Atp(strcmp('',Aidx))=0;
else
    Btp(' '==Bidx)=0;
```

```

    Atp(' '==Aidx)=0;
end

% Map to output position numbers, to correct *positive* index
for i=1:numel(Cidx);
    if ( iscell(Aidx) )
        Atp(strcmp(Cidx{i}, Aidx))=i;
        Btp(strcmp(Cidx{i}, Bidx))=i;
    else
        Atp(Cidx(i)==Aidx)=i;
        Btp(Cidx(i)==Bidx)=i;
    end
end

% now do the tprod call.
global LOG; if ( isempty(LOG) ) LOG=0; end; % N.B. set LOG to valid fd to log
if ( LOG>0 )
    fprintf(LOG,'tprod(%s, [%s], %s, [%s])\n',mxPrint(A),sprintf('%d
',Atp),mxPrint(B),sprintf('%d ',Btp));
end
C=tprod(A,Atp,B,Btp,'n');
return;

function [str]=mxPrint(mx)
sz=size(mx);
if ( isa(mx,'double') ) str='d'; else str='s'; end;
if ( isreal(mx) ) str=[str 'r']; else str=[str 'c']; end;
str=[str ' [' sprintf('%dx',sz(1:end-1)) sprintf('%d',sz(end)) '] '];
return;

%-----
function testCase();
A=randn(10,10); B=randn(10,10);
C2 = tprod(A,[1 -2],B,[-2 2]);
C = etprod('ij',A,'ik',B,'kj'); mad(C2,C)
C = etprod({'i' 'j'},A,{'i' 'k'},B,{'k' 'j'});
A=randn(100,100);B=randn(100,100,4);
C3 = tprod(A,[-1 -2],B,[-1 -2 3]);
C3 = tprod(B,[-1 -2 1],A,[-1 -2]);
C3 = tprod(A,[-1 -2],B,[-1 -2 1]);
C = etprod('3',A,'12',B,'123');
C = etprod([3],A,[1 2],B,[1 2 3]);
C = etprod({'3'},A,{'1' '2'},B,{'1' '2' '3'})

```

## index6.m

```

function [m,n]=index6(i)

%%%%%%%%%%
% index6.m
% converts from a vector index to a tensor index
%%%%%%%%%%

if i==1
    m=1;n=1;
elseif i==2
    m=1;n=2;
elseif i==3
    m=1;n=3;
elseif i==4
    m=2;n=2;

```

```

elseif i==5
    m=2;n=3;
elseif i==6
    m=3;n=3;
end

```

---

### kdelta.m

```

function q=kdelta(i,j)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% kdelta.m
% this function calculates the Kroneker Delta of two variables
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if i==j,
    q=1;
else
    q=0;
end

```

---

### orderTests.m

```

function [Z2]=orderTests(X,Y,sz)
if ( nargin < 1 ) X=[]; end;
if( nargin<2 || isempty(Y) ) if(~isstr(X)) Y=randn(size(X)); else Y=[]; end;end
if ( nargin < 3 || isempty(sz) ) sz=[11 29 51]; end;
if ( isempty(X)||isstr(X) || isempty(Y)||isstr(Y) )
    if ( isstr(X) ) X=feval(X,randn(sz)); else X=randn(sz); end;
    if ( isstr(Y) ) Y=feval(Y,randn(sz)); else Y=randn(sz); end;
end
if ( isa(X,'single') ) cX='s'; else cX='d'; end;
if ( isa(Y,'single') ) cY='s'; else cY='d'; end;

% linear over last dim, ip over 1st, op over 2nd
Z=[];for i=1:size(X,3); Z(:,:,i)=X(:,:,i).*Y(:,:,i); end;
Z2=tprod(X,[-1 1 3],Y,[-1 2 3],'m');
unitTest([cX 'X,[-1 1 3], ' cY 'Y,[-1 2 3]'],Z2,Z,1e-4);

Z=[];for i=1:size(X,3); Z(:,:,i)=Y(:,:,i).*X(:,:,i); end;
Z2=tprod(X,[-1 2 3],Y,[-1 1 3],'m');
unitTest([cX 'X,[-1 2 3], ' cY 'Y,[-1 1 3]'],Z2,Z,1e-4);

% linear over last dim, op over 1st, ip over 2nd
Z=[];for i=1:size(X,3); Z(:,:,i)=(Y(:,:,i)*X(:,:,i)).'; end;
Z2=tprod(X,[1 -2 3],Y,[2 -2 3],'m');
unitTest([cX 'X,[1 -2 3], ' cY 'Y,[2 -2 3]'],Z2,Z,1e-4);

Z=[];for i=1:size(X,3); Z(:,:,i)=X(:,:,i)*Y(:,:,i).'; end;
z2=tprod(X,[2 -2 3],Y,[1 -2 3],'m');
unitTest([cX 'X,[2 -2 3], ' cY 'Y,[1 -2 3]'],Z2,Z,1e-4);

return;

% linear over last dim, op over 1+2nd, op over 2+1
Z2=tprod(permute(X,[2 1 3]),[-1 2 3], Y, [1 -1 3]);
unitTest('X,[-1 2 3],Y,[1 -1 3] ',Z2,Z);

```

```

Z2=tprod( X, [1 -1 3],permute(Y,[2 1 3]),[-1 2 3]);
unitTest('X,[1 -1 3],Y,[-1 2 3]',Z2,Z)

%-----

szs={ [11 29 51] [29 11 13] [51 277 93] };
Xs=cell(20,numel(szs)); Ys=cell(20,numel(szs)); Zs=cell(20,numel(szs));
for i=1:1000;
    szi=ceil(rand(1,1)*numel(szs));
    tri=ceil(rand(1,1)*size(Xs,1));
    if ( ~isempty(Xs{tri,szi}) ) % use to check validity
        sum(Xs{tri,szi}(:));sum(Xs{tri,szi}(:));sum(Zs{tri,szi}(:));
        Zs{tri,szi}=orderTests(Xs{tri,szi},Ys{tri,szi});
    end
    % Overwrite with new
    Xs{tri,szi}=randn(szs{szi});Ys{tri,szi}=randn(szs{szi});
    if ( randn(1,1)>0 ) Xs{tri,szi}=single(Xs{tri,szi}); end
    if ( randn(1,1)>0 ) Ys{tri,szi}=single(Ys{tri,szi}); end
end

```

---

### tprod\_testcases.m

```

function []=tprod_testcases(testCases,debugin)
% This file contains lots of test-cases to test the performance of the tprod
% files vs. the matlab built-ins.
%
%
% Copyright 2006- by Jason D.R. Farquhar (jdrf@zepler.org)
% Permission is granted for anyone to copy, use, or modify this
% software and accompanying documents for any uncommercial
% purposes, provided this copyright notice is retained, and note is
% made of any changes that have been made. This software and
% documents are distributed without any warranty, express or
% implied
if ( nargin < 1 || isempty(testCases) ) testCases={'acc','timing','blksz'};
end;
if ( ~iscell(testCases) ) testCases={testCases}; end;
if ( nargin < 2 ) debugin=1; end;
global DEBUG; DEBUG=debugin;

% fprintf('----- memory execption test -----\n');
% ans=tprod(randn(100000,1),1,randn(100000,1)',1);
% ans=tprod(randn(100000,1),1,randn(100000,1)',1,'m');

%-----
% Real , Real
if ( ~isempty(strmatch('acc',testCases)) )
fprintf('----- Accuracy tests -----\n');

X=complex(randn(101,101,101),randn(101,101,101));
Y=complex(randn(101,101),randn(101,101));
fprintf('\n*****\n Double Real X, Double Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(real(X),real(Y),'dRdR');
fprintf('\n*****\n Double Real X, Double Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(real(X),Y,'dRdC');
fprintf('\n*****\n Double Complex X, Double Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(X,real(Y),'dCdR');

```

```

fprintf('\n*****\n Double Complex X, Double Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(X,Y,'dCdC');

fprintf('\n*****\n Double Real X, Single Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(real(X),single(real(Y)),'dRsR');
fprintf('\n*****\n Double Real X, Single Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(real(X),single(Y),'dRsC');
fprintf('\n*****\n Double Complex X, Single Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(X,single(real(Y)),'dCsR');
fprintf('\n*****\n Double Complex X, Single Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(X,single(Y),'dCsC');

fprintf('\n*****\n Single Real X, Double Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(real(X)),real(Y),'sRdR');
fprintf('\n*****\n Single Real X, Double Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(real(X)),Y,'sRdC');
fprintf('\n*****\n Single Complex X, Double Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(X),real(Y),'sCdR');
fprintf('\n*****\n Single Complex X, Double Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(X),Y,'sCdC');

fprintf('\n*****\n Single Real X, Single Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(real(X)),single(real(Y)),'sRsR');
fprintf('\n*****\n Single Real X, Single Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(real(X)),single(Y),'sRsC');
fprintf('\n*****\n Single Complex X, Single Real
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(X),single(real(Y)),'sCsR');
fprintf('\n*****\n Single Complex X, Single Complex
Y\n*****\n')
accuracyTests(single(X),single(Y),'sCsC');

fprintf('All tests passed\n');
end

% fprintf('----- Timing tests -----\n');
if ( ~isempty(strmatch('timing',testCases)) )
%Timing tests
X=complex(randn(101,101,101),randn(101,101,101));
Y=complex(randn(101,101),randn(101,101));
fprintf('\n*****\n Real X, Real Y\n*****\n')
timingTests(real(X),real(Y),'RR');
fprintf('\n*****\n Real X, Complex Y\n*****\n')
timingTests(real(X),Y,'RC');
fprintf('\n*****\n Complex X, Real Y\n*****\n')
timingTests(X,real(Y),'CR');
fprintf('\n*****\n Complex X, Complex Y\n*****\n')
timingTests(X,Y,'CC');
end

```

```

% fprintf('----- Scaling tests -----\n');
% scalingTests([32,64,128,256]);

if( ~isempty(strmatch('blkSz',testCases)) )
fprintf('----- BlkSz tests -----\n');
blkSzTests([128 96 64 48 40 32 24 16 0],[128,256,512,1024,2048]);
end

return;

function []=accuracyTests(X,Y,str)
unitTest([str ' OuterProduct,
[1],[2]'],tprod(X(:,1),1,Y(:,1),2,'m'),X(:,1)*Y(:,1).');
unitTest([str ' Inner product, [-1],[-1]'],tprod(X(:,1),-1,Y(:,1),-
1,'m'),X(:,1).*Y(:,1));
unitTest([str ' Matrix product, [1 -1],[-1 2]'],tprod(X(:,1),[1 -1],Y,[-1
2],'m'),X(:,1)*Y);
unitTest([str ' transposed matrix product, [-1 1],[-1 2]'],tprod(X(:,1),[-1
1],Y,[-1 2],'m'),X(:,1).*Y);
unitTest([str ' Matrix frobenius norm, [-1 -2],[-1 -2]'],tprod(X(:,1),[-1 -
2],Y,[-1 -2],'m'),sum(sum(X(:,1).*Y)));

unitTest([str ' transposed matrix frobenius norm, [-1 -2],[-2 -
1]'],tprod(X(:,1),[-1 -2],Y,[-2 -1],'m'),sum(sum(X(:,1).*Y)));

unitTest([str ' ignored dims, [0 -2],[-2 2 1]'],tprod(Y(1,:),[0 -2],X(:,1,:),[-
2 2 1],'m'),reshape(Y(1,:)*reshape(X,size(X,1),[]),size(X,2),size(X,3)).');

% Higher order matrix operations
unitTest([str ' spatio-temporal filter [-1 -2 1],[-1 -2]'],tprod(X,[-1 -2
1],Y,[-1 -
2],'m'),reshape(Y(:).*reshape(X,size(X,1)*size(X,2),size(X,3)),[size(X,3)
1]));

unitTest([str ' spatio-temporal filter (fallback) [-1 -2 1],[-1 -
2]'],tprod(X,[-1 -2 1],Y,[-1 -
2]),reshape(Y(:).*reshape(X,size(X,1)*size(X,2),size(X,3)),[size(X,3) 1]));

unitTest([str ' spatio-temporal filter (order) [-1 -2],[-1 -2 1]'],tprod(Y,[-1
-2],X,[-1 -2
1]),reshape(Y(:).*reshape(X,size(X,1)*size(X,2),size(X,3)),[size(X,3) 1]));

unitTest([str ' spatio-temporal filter (order) [-1 -2],[-1 -2 3]'],tprod(Y,[-1
-2],X,[-1 -2 3]),reshape(Y(:).*reshape(X,size(X,1)*size(X,2),size(X,3)),[1 1
size(X,3)]));

unitTest([str ' transposed spatio-temporal filter [1 -2 -3],[-2 -
3]'],tprod(X,[1 -2 -3],Y,[-2 -
3],'m'),reshape(reshape(X,size(X,1),size(X,2)*size(X,3))*Y(:),[size(X,1) 1]));

unitTest([str ' matrix-vector product [-1 1 2][-1]'],tprod(X,[-1 1 2],Y(:,1),[-
1],'m'),reshape(Y(:,1).*reshape(X,[size(X,1) size(X,2)*size(X,3)]),[size(X,2)
size(X,3)]));

unitTest([str ' spatial filter (fallback): [-1 2 3],[-1 1]'],tprod(X,[-1 2
3],Y,[-1 1]),reshape(Y.*reshape(X,[size(X,1) size(X,2)*size(X,3)]),[size(Y,2)
size(X,2) size(X,3)]));

```



```

unitTest([str ' spatial filter: [-1 2 3],[ -1 1]'],tprod(X,[-1 2 3],Y,[-1
1],'m'),reshape(Y.*reshape(X,[size(X,1) size(X,2)*size(X,3)]),[size(Y,2)
size(X,2) size(X,3)]));

unitTest([str ' temporal filter [1 -2 3],[2 -2]'],tprod(X,[1 -2 3],Y(1,:),[2 -
2],'m'),sum(X.*repmat(Y(1,:),[size(X,1) 1 size(X,3)]),2));

unitTest([str ' temporal filter [2 -2],[1 -2 3]'],tprod(Y(1,:),[2 -2],X,[1 -2
3],'m'),sum(X.*repmat(Y(1,:),[size(X,1) 1 size(X,3)]),2));

unitTest([str ' temporal filter [-2 2],[1 -2 3]'],tprod(Y(1,:).',[ -2 2],X,[1 -2
3],'m'),sum(X.*repmat(Y(1,:),[size(X,1) 1 size(X,3)]),2));

unitTest([str ' temporal filter [-2 2],[1 -2 3]'],tprod(Y(1,:).',[ -2 2],X,[1 -2
3],'m'),sum(X.*repmat(Y(1,:),[size(X,1) 1 size(X,3)]),2));

Xp=permute(X,[1 3 2]);
unitTest([str ' blk-code [-1 1 -2] [-1 2 -2]'],tprod(X,[-1 1 -2],X,[-1 2 -
2],'m'),reshape(Xp,[],size(Xp,3)).'*reshape(Xp,[],size(Xp,3)));

return;

function []=timingTests(X,Y,str);

% outer product simulation
fprintf([str ' OuterProduct [1][2]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic; for i=1:1000; Z=tprod(X(:,1),1,Y(:,1),2); end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/1000); % = .05 / .01
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic; for i=1:1000; Zm=tprod(X(:,1),1,Y(:,1),2,'m'); end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/1000); % = .05 / .01
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;T=X(:,1)*Y(:,1).';end;
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/1000); % = .03 / .01

% matrix product
fprintf([str ' MatrixProduct [1 -1] [-1 2]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;Z=tprod(X(:,:,1),[1 -1],Y,[-1 2]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/1000);% = .28 / .06
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;Zm=tprod(X(:,:,1),[1 -1],Y,[-1 2],'m');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/1000);% = .28 / .06
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;T=X(:,:,1)*Y;end
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/1000);% = .17 / .06

% transposed matrix product simulation
fprintf([str ' transposed Matrix Product [-1 1][2 -1]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;Z=tprod(X(:,:,1),[-1 1],Y,[2 -1]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/1000);% =.3 / .06
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;Zm=tprod(X(:,:,1),[-1 1],Y,[2 -1],'m');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/1000);% =.3 / .06
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:1000;T=X(:,:,1).'*Y.';end
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/1000); % =.17 / .06

% Higher order matrix operations % times: P3-m 1.8Ghz 2048k / P4 2.4Ghz 512k
fprintf([str ' spatio-temporal filter [-1 -2 1] [-1 -2]\n']);

```

```

A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:500;Z=tprod(X,[-1 -2 1],Y,[-1 -2]);end,
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/500);%=.26 / .18
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:500;Zm=tprod(X,[-1 -2 1],Y,[-1 -2],'m');end,
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/500);%=.26 / .18
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for
i=1:500;T=reshape(Y(:).'*reshape(X,size(X,1)*size(X,2),size(X,3)),[size(X,3)
1]);end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/500);%=.21 / .18

fprintf([str ' transposed spatio-temporal filter [1 -2 -3] [-2 -3]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:50;Z=tprod(X,[1 -2 -3],Y,[-2 -3]);end,
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/50);%=.27 / .28
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:50;Zm=tprod(X,[1 -2 -3],Y,[-2 -3],'m');end,
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/50);%=.27 / .28
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for
i=1:50;T=reshape(reshape(X,size(X,1),size(X,2)*size(X,3))*Y(:),[size(X,1)
1]);end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/50);%=.24 / .26

% MATRIX vector product
fprintf([str ' matrix-vector product [-1 1 2] [-1]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:500; Z=tprod(X,[-1 1 2],Y(:,1),[-1]);end,
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/500);%=.27 / .26
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:500; Zm=tprod(X,[-1 1 2],Y(:,1),[-1],'m');end,
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/500);%=.27 / .26
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:500; T=reshape(Y(:,1).'*reshape(X,[size(X,1)
size(X,2)*size(X,3)]),[1 size(X,2) size(X,3)]);end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (reshape)',toc/500);%=.21 / .28
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic,for i=1:500; T=zeros([size(X,1),1,size(X,3)]);for k=1:size(X,3);
T(:,:,k)=Y(1,:)*X(:,:,k); end,end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (loop)',toc/500);%=.49 /

% spatial filter
fprintf([str ' Spatial filter: [-1 2 3],[-1 1]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic;for i=1:500;Z=tprod(X,[-1 2 3],Y(:,1:2),[-1 1]);end;
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/500);%=.39/.37
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic;for i=1:500;Zm=tprod(X,[-1 2 3],Y(:,1:2),[-1 1],'m');end;
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/500);%=.39/.37
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic;for i=1:500; T=reshape(Y(:,1:2).'*reshape(X,[size(X,1)
size(X,2)*size(X,3)]),[2 size(X,2) size(X,3)]);end;
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/500);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic;for i=1:500;T=zeros(2,size(X,2),size(X,3));for
k=1:size(X,3);T(:,:,k)=Y(:,1:2).'*X(:,:,k);end;end;
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (loop)',toc/500);%=.76/.57

% temporal filter
fprintf([str ' Temporal filter: [1 -2 3],[2 -2]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?

```

```

tic, for i=1:50; Z=tprod(X,[1 -2 3],Y,[2 -2]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/50); %=.27 / .31
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:50; T=zeros([size(X,1),size(Y,1),size(X,3)]); for k=1:size(X,3);
T(:,:,k)=X(:,:,k)*Y(:,:,:).'; end,end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (loop)',toc/50); % = .50 /
%tic, for i=1:50; T=zeros([size(X,1),size(Y,1),size(X,3)]); for k=1:size(Y,1);
T(:,k,:)=sum(X.*repmat(Y(k,:),[size(X,1) 1 size(X,3)]),2);end,end;
%fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (repmat)',toc/50); % = 3.9 / 3.3

fprintf([str ' Temporal filter2: [1 -2 3],[-2 2]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:50; Z=tprod(X,[1 -2 3],Y,[-2 2]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/50); %=.27 / .31
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:50; T=zeros([size(X,1),size(Y,1),size(X,3)]); for k=1:size(X,3);
T(:,:,k)=X(:,:,k)*Y(:,:,:); end,end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (loop)',toc/50); % = .50 /

% Data Covariances
fprintf([str ' Channel-covariance/trial(3) [1 -1 3] [2 -1 3]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic; for i=1:50; Z=tprod(X,[1 -1 3],[],[2 -1 3]);end;
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/50); % = 8.36/7.6
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:50; T=zeros(size(X,1),size(X,1),size(X,3)); for k=1:size(X,3);
T(:,:,k)=X(:,:,k)*X(:,:,k)';end,end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB (loop)',toc/50); % = 9.66/7.0

% N.B. --- aligned over dim 1 takes 2x longer!
fprintf([str ' Channel-covariance/trial(1) [1 -1 2] [1 -1 3]\n']);
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic; for i=1:10; Z=tprod(X,[1 -1 2],[],[1 -1 3]);end;
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/10); % = /37.2
A=complex(randn(size(X)),randn(size(X))); % flush cache?
tic, for i=1:10; T=zeros(size(X,1),size(X,1),size(X,3)); for
k=1:size(X,3); T(k,:,:)=shiftdim(X(k,:,:))'*shiftdim(X(k,:,:));end,end,
fprintf('%30s %gs\n','MATLAB',toc/10); % = 17.2/25.8

return;

function []=scalingTests(Ns);
% Scaling test
fprintf('Simple test of the effect of the acc size\n');
for N=Ns;
fprintf('X=[%d x %d]\n',N,N*N); X=randn(N,N*N); Y=randn(N*N,1);
fprintf('[1 -1] [-1]\n');
tic, for i=1:1000; Z=tprod(X,[1 -1],Y,[-1], 'n');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/1000); % = .28 / .06
tic, for i=1:1000; Z=tprod(X,[1 -1],Y,[-1], 'mn');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/1000); % = .28 / .06
end

fprintf('Simple mat vs non mat tests\n');
for N=Ns;
fprintf('N=%d\n',N); X=randn(N,N,N); Y=randn(N,N);
fprintf('[1 -1 -2] [-1 -2]\n');
tic, for i=1:1000; Z=tprod(X,[1 -1 -2],Y,[-1 -2]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/1000); % = .28 / .06
tic, for i=1:1000; Z=tprod(X,[1 -1 -2],Y,[-1 -2], 'm');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/1000); % = .28 / .06

```

```

fprintf('[-1 -2 1][-1 -2]\n');
tic, for i=1:1000;Z=tprod(X,[-1 -2 1],Y,[-1 -2]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/1000);% = .28 / .06
tic, for i=1:1000;Z=tprod(X,[-1 -2 1],Y,[-1 -2],'m');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/1000);% = .28 / .06
fprintf('[-1 2 3][-1 1]\n');
tic, for i=1:100;Z=tprod(X,[-1 2 3],Y,[-1 1]);end
fprintf('%30s %gs\n','tprod',toc/100);% = .28 / .06
tic, for i=1:100;Z=tprod(X,[-1 2 3],Y,[-1 1],'m');end
fprintf('%30s %gs\n','tprod m',toc/100);% = .28 / .06
end

function []=blkSzTests(blkSzs,Ns);

fprintf('Blksz optimisation tests\n');
%blkSzs=[64 48 40 32 24 16 0];
tptime=zeros(numel(blkSzs+2));
for N=Ns;%[128,256,512,1024,2048];
    X=randn(N,N);Y=randn(size(X));
    for i=1:5;

        % use tprod without matlab
        for b=1:numel(blkSzs); blkSz=blkSzs(b);
            clear T;T=randn(1024,1024); % clear cache
            tic,for j=1:3;tprod(X,[1 -1],Y,[-1 2],'mn',blkSz);end;
            tptime(b)=tptime(b)+toc;
        end;

        % tprod with defaults & matlab if possible
        clear T;T=randn(1024,1024); % clear cache
        tic,for j=1:3;tprod(X,[1 -1],Y,[-1 2]);end;
        tptime(numel(blkSzs)+1)=tptime(numel(blkSzs)+1)+toc;

        % the pure matlab code
        clear T;T=randn(1024,1024); % clear cache
        tic,for j=1:3; Z=X*Y;end;
        tptime(numel(blkSzs)+2)=tptime(numel(blkSzs)+2)+toc;
    end;
    for j=1:numel(blkSzs);
        fprintf('blk=%d, N = %d -> %gs \n',blkSzs(j),N,tptime(j));
    end
    fprintf('tprod, N = %d -> %gs \n',N,tptime(numel(blkSzs)+1));
    fprintf('MATLAB, N = %d -> %gs \n',N,tptime(numel(blkSzs)+2));
    fprintf('\n');
end;
return;

% simple function to check the accuracy of a test and report the result
function [testRes,trueRes,diff]=unitTest(testStr,testRes,trueRes,tol)
global DEBUG;
if ( nargin < 4 )
    if ( isa(trueRes,'double') ) tol=1e-11;
    elseif ( isa(trueRes,'single') ) tol=1e-5;
    elseif ( isa(trueRes,'integer') )
        warning('Integer inputs!'); tol=1;
    elseif ( isa(trueRes,'logical') ) tol=0;
    end
end
diff=abs(testRes-trueRes)./max(1,abs(testRes+trueRes));
fprintf('%60s = %0.3g ',testStr,max(diff(:)));
if ( max(diff(:)) > tol )

```

```

if ( exist('mimage') )
    mimage(squeeze(testRes),squeeze(trueRes),squeeze(diff))
end
fprintf(' **FAILED**\n');
if ( DEBUG>0 )
    warning([testStr ': failed!']),
    fprintf('Type return to continue\b');keyboard;
end;
else
    fprintf('Passed \n');
end

```

---

### tprod.m

```

function [varargout]=tprod(varargin)
% Multi-dimensional generalisation of matrix multiplication
%
% function [Z]=tprod(X,xdimspec,Y,ydimspec[,optStr,blksz])
%
% This function computes a generalised multi-dimensional matrix product
% based upon the Einstein Summation Convention (ESC). This means
% given 2 n-d inputs:
%   X = [ A x B x C x E .... ], denoted in ESC as X_{abce}
%   Y = [ D x F x G x H .... ], denoted in ESC as Y_{dfgh}
% we define a particular tensor operation producing the result Z as
%   Z_{cedf} = X_{abce}Y_{dfab}
% where, we form an inner-product (multiply+sum) for the dimensions with
% *matching* labels on the Right Hand Side (RHS) and an outer-product over
% the remaining dimensions. Note, that in conventional ESC the *order* of
% dimensions in Z is specified on the LHS where the matching label specifies
% its location.
%
% Tprod calls closely follow this convention, the tprod equivalent of the
% above is[1]:
%   Z = tprod(X,[-1 -2 1 2],Y,[3 4 -1 -2])
% here, *matching negatively* labelled RHS dimensions are inner-product
% dimensionss, whilst the *positively* labelled dimensions directly
% specify the position of that dimension in the result Z. Hence only 2
% dimension-specifications are needed to unambiguously specify this
% tensor product.
%
% [1] Note: if you find this syntax to difficult the ETPROD wrapper function
% is provided to directly make calls in ESC syntax, e.g.
%   Z = etprod('cedf',X,'abce',Y,'dfab');
%
% It is perhaps easiest to understand the calling syntax with some simple
% examples:
% Simple 1-d cases
%   X = randn(100,1);           % make 100 1-d data points
%   Z = tprod(X,1:ndims(X),X,1:ndims(X)); % element-wise multiply
%   Z = tprod(X,1:ndims(X),X,ndims(X)+1:ndims(X)); % outer-product
%   Z = tprod(X,-1,X,-1);      % inner product
% Some 2-d statistical examples
%   X=randn(10,100);           % 10d points x 100 trials
%   Z=tprod(X,[-1 2],X,[-1 2]); % squared norm of each trial
%   Z=tprod(X,[1 -2],X,[2 -2]); % covariance over trials
% More complex 3-d cases
%   X = randn(10,20,100);      % dim x samples x trials set of timeseries
%   sf= randn(10,1);           % dim x 1 spatial filter
%   tf= randn(20,1);           % samples x 1 temporal filter
%   Z=tprod(X,[-1 1 2],sf,[-1 1]); % spatially filter Z -> [1 x samp x trials ]

```

```

% Z=tprod(X,[1 -2 3],tf,[-2 2]); % temporary filter Z -> [dim x 1 x trials ]
% % OP over dim, IP over samples, sequ over trial = per trial covariance
% Z=tprod(X,[1 -2 3],X,[2 -2 3])/size(X,3);
%
% INPUTS:
% X      - n-d double/single matrix
%
% xdimspec - signed label for each X dimension. Interpreted as:
%           1) 0 labels must come from singleton dims and means they are
%              squeezed out of the input.
%           2) NEGATIVE labels must come in matched pairs in both X and Y
%              and denote inner-product dimensions
%           3) POSITIVE labels denote the position of this dimension in
%              the output matrix Z. Positive labels must be unique in X.
%              Depending on whether the same label occurs in Y 2 conditions
%              can occur:
%                 a) X label has NO match in Y. Then this is an
%                    outer-product dimension.
%                 b) X label matches a label in Y. Then this dimension is an
%                    aligned in both X and Y, such that they increment together
%                    -- as if there was an outer loop over these dims indices
%
% Y      - m-d double/single matrix,
%          N.B. if Y==[], then it is assumed to be a copy of X.
%
% ydimspec - signed label for each Y dimension. If not given yaccdim
%           defaults to -(1:# negative labels in (xdimspec)) followed by
%           enough positive labels to put the remaining dims after the X
%           dims in the output. (so it accumulates the first dims and
%           outer-prods the rest)
%
% optStr - String of single character control options,
%          'm'= don't use the, fast but perhaps not memory efficient,
%           MATLAB code when possible.
%          'n'=use the *new* calling convention: tprod(X,xdimspec,Y,ydimspec)
%          'o'=use the *old* calling convention: tprod(X,Y,xdimspec,ydimspec)
%
% blksize - Internally tprod computes the results in blocks of blksize size in
%           order to keep information efficiently in the cache. TPROD
%           defaults this size to a size of 16, i.e. 16x16 blocks of doubles.
%           On different machines (with different cache sizes) tweaking this
%           parameter may result some speedups.
%
% OUTPUT:
% Z      - n-d double matrix with the size given by the sizes of the
%          POSITIVE labels in xdimspec/ydimspec
%
% See Also: tprod_testcases, etprod
%
% Class support of input:
%   float: double, single
%
% Copyright 2006-      by Jason D.R. Farquhar (jdrf@zepler.org)
%
% Permission is granted for anyone to copy, use, or modify this
% software and accompanying documents for any uncommercial
% purposes, provided this copyright notice is retained, and note is
% made of any changes that have been made. This software and
% documents are distributed without any warranty, express or
% implied

```

```

% The rest of this code is a mex-hiding mechanism which compiles the mex if
% this runs and recursively calls itself.
% Based upon code from: http://theoval.sys.uea.ac.uk/matlab
cwd = pwd; % store the current working directory
name = mfilename('fullpath'); % get the directory where we are
% find out what directory it is defined in
name(name=='\')='/';
dir=name(1:max(find(name == '/')-1));
try % try changing to that directory
    cd(dir);
catch % this should never happen, but just in case!
    cd(cwd);
    error(['unable to locate directory containing '' name '.m'']);
end

try % try recompiling the MEX file
    fprintf(['Compiling ' mfilename ' for first use\n']);

mex('ddtprod.c','dstprod.c','sdtprod.c','sstprod.c','tprod_util.c','tprod_mex.c
','mxInfo.c','mxInfo_mex.c','-0','-output',mfilename);
    fprintf('done\n');
catch
    % this may well happen happen, get back to current working directory!
    cd(cwd);
    error('unable to compile MEX version of ''%s''%s\n%s%s', name, ...
        ', please make sure your', 'MEX compiler is set up correctly', ...
        ' (try ''mex -setup'').');
end

cd(cwd); % change back to the current working directory
rehash; % refresh the function and file system caches

% recursively invoke MEX version using the same input and output arguments
[varargout{1:nargout}] = feval(mfilename, varargin{:});

% bye bye...

return;

```

---

## APPENDICE B – Analisi subsidenza Campo Collalto Stoccaggio

I valori di monitoraggio della subsidenza per il campo di Collalto sono riportati nella seguente tabella. I valori riportano le differenze di quota relative ai periodi in esame (ad se. L'intervallo temporale 1985-1987). Questi valori rappresentano quindi le serie temporali della variazione geodetica nell'intorno del reservoir di Collalto. Nelle prime due colonne sono riportati i valori di Longitudine e Latitudine riferite alla proiezione Gauss Boaga, fuso Ovest. Di seguito vengono riportate anche le mappe elaborate tramite metodo della distanza inversa pesata. **I valori di variazione geodetica sono riportati in metri.**

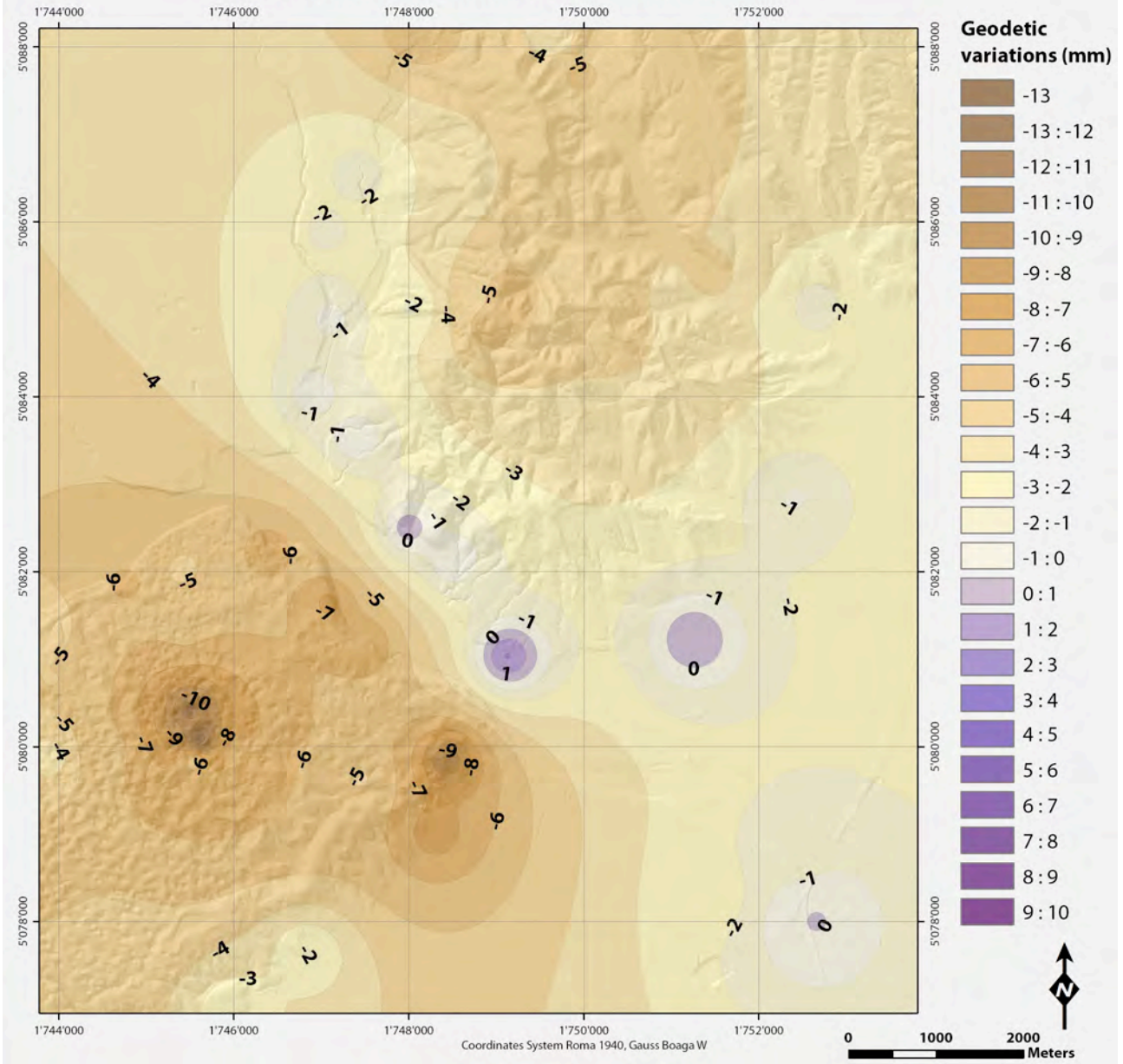
X	Y	85-87	85-90	85-95	85-M06	85-N06	85-N10
1743763,420	5081393,157	-0,00423	-0,00653	-0,00672	-0,00933	-0,00683	-0,0104
1743899,437	5078657,706	-0,00512	-0,00408	-0,00372	-0,00802	-0,00362	-0,00864
1743904,475	5079871,783	-0,00346	-0,00431	-0,00405	-0,00826	-0,00783	-0,00999
1743929,663	5080773,524	-0,00499	-0,00715	-0,01018	-0,01573	-0,01606	-0,01631
1744534,765	5079946,318	-0,00564	-0,0055	-0,00798	-0,0144	-0,01293	-0,0168
1744655,086	5077781,153	-0,00458	-0,00443	-0,00879	-0,0117	-0,00794	-0,01284
1744770,953	5081866,697	-0,00619	-0,00768	-0,00865	-0,01172	-0,00925	-0,01231
1745440,962	5081982,563	-0,00452	-0,00541	-0,00644	-0,00794	-0,00473	-0,00694
1745447,751	5081353,749	-0,00576	-0,00638	-0,00856	-0,0131	-0,00936	-0,01253
1745500,158	5080413,183	-0,01147	-0,01695	-0,01687	-0,02529	-0,0332	-0,02583
1745530,499	5081799,174	-0,00555	-0,00658	-0,00914	-0,01183	-0,00923	-0,01337
1745546,753	5079806,293	-0,00567	-0,00574	-0,00681	-0,00906	-0,00579	-0,01222
1745618,763	5080098,741	-0,01234	-0,01286	-0,01682	-0,02194	-0,03186	-0,02755
1746000,142	5079927,197	-0,00646	-0,00931	-0,02026	-0,03177	-0,03235	-0,03616
1746035,406	5076944,901	-0,00205	-0,00371	-0,00276	-0,00897	-0,00843	-0,00763
1746050,519	5082123,618	-0,006	-0,00906	-0,01409	-0,01946	-0,0162	-0,01862
1746383,004	5082239,484	-0,00667	-0,00865	-0,01085	-0,01524	-0,01119	-0,01463
1746846,469	5077619,948	-0,00197	-0,00446	-0,00466	-0,00909	-0,00728	-0,00718



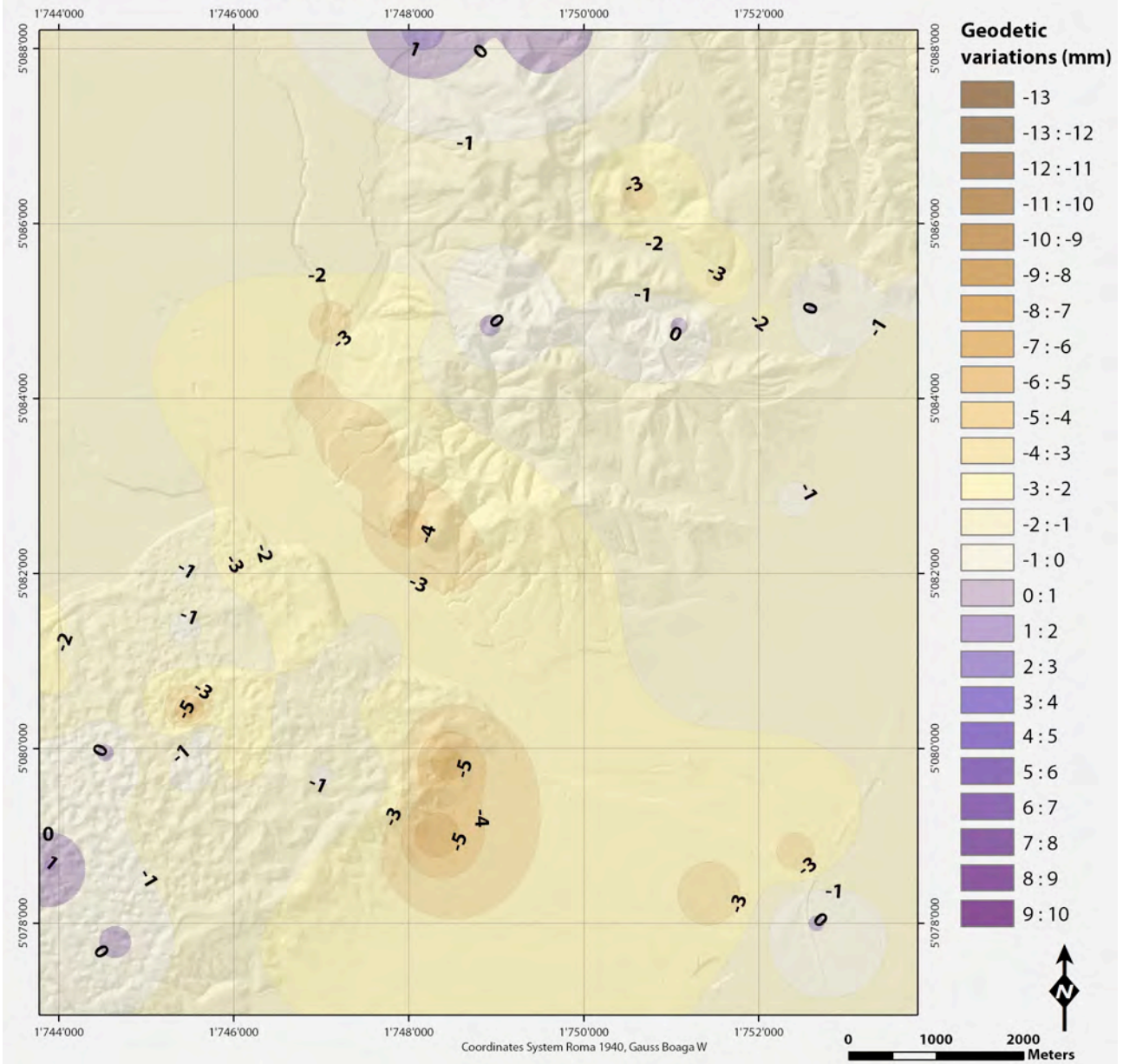
1746910,736	5084045,877	-0,00029	-0,00352	-0,00774	-0,01197	-0,01062	-0,01076
1747017,750	5079690,427	-0,00596	-0,00683	-0,00839	-0,0146	-0,00936	-0,01371
1747076,530	5085901,096	-0,00181	-0,00287	-0,00533	-0,00968	-0,00961	-0,00897
1747088,277	5081629,927	-0,00724	-0,0099	-0,00918	-0,01522	-0,016	-0,02229
1747491,290	5081176,537	-0,00699	-0,0081	-0,00942	-0,01373	-0,01034	-0,01494
1747112,238	5084893,247	-0,00064	-0,00404	-0,00654	-0,01109	-0,0108	-0,0103
1747400,429	5083514,884	-0,00011	-0,00405	-0,00827	-0,01268	-0,01214	-0,01186
1747427,380	5086528,234	-0,00156	-0,00265	-0,00393	-0,00891	-0,00923	-0,00881
1747440,914	5079624,937	-0,00491	-0,00599	-0,00675	-0,01221	-0,00768	-0,00833
1748003,856	5082498,913	0,00056	-0,00404	-0,00983	-0,01572	-0,01393	-0,01393
1748036,758	5085020,992	-0,0019	-0,00492	-0,00773	-0,01239	-0,01167	-0,01166
1748165,989	5088209,620	-0,00582	-0,00448	-0,00523	-0,01224	-0,01105	-0,01286
1748302,354	5079015,380	-0,00754	-0,01343	-0,00838	-0,01604	-0,01754	-0,0076
1748428,295	5079826,444	-0,00968	-0,01523	-0,02805	-0,03748	-0,0395	-0,03798
1748502,266	5082132,611	-3,00E-05	-0,00351	-0,01051	-0,01767	-0,02291	-0,01644
1748691,298	5085141,091	-0,00441	-0,00452	-0,00903	-0,0137	-0,01167	-0,01212
1748931,496	5084840,843	-0,00579	-0,00554	-0,00882	-0,01292	-0,01088	-0,01229
1749117,649	5085135,086	-0,00592	-0,00657	-0,00977	-0,01606	-0,01412	-0,01556
1749132,786	5081027,700	0,00203	-0,00044	-0,00378	-0,00763	-0,00741	-0,00699
1749664,100	5088089,521	-0,00369	-0,00279	-0,00353	-0,01032	-0,00942	-0,00607
1749958,342	5087681,185	-0,00521	-0,00542	-0,00541	-0,01141	-0,01125	-0,01202
1750480,773	5084780,794	-0,00468	-0,00507	-0,00945	-0,01419	-0,01197	-0,01345
1750582,857	5086648,333	-0,00498	-0,00699	-0,01036	-0,01962	-0,02168	-0,02333
1750633,048	5086352,971	-0,00471	-0,00828	-0,01354	-0,0252	-0,0285	-0,03098
1751093,278	5084828,833	-0,0034	-0,00326	-0,00581	-0,00944	-0,00967	-0,01147
1751258,539	5081219,858	0,00091	-0,00059	-0,00301	-0,0063	-0,00729	-0,00669
1751492,732	5085369,279	-0,00431	-0,00746	-0,01071	-0,0201	-0,02254	-0,02373
1751505,403	5078313,970	-0,00253	-0,00618	-0,01806	-0,0217	-0,02243	-0,02534
1752093,227	5084960,942	-0,00292	-0,00502	-0,00804	-0,01569	-0,01882	-0,02038
1752408,676	5082836,255	-0,00093	-0,00186	-0,00462	-0,00748	-0,00939	-0,00868
1752432,776	5078770,178	-0,00137	-0,00481	-0,00729	-0,01303	-0,01192	-0,01498

1752533,000	5078022,900	0	0	0	0	0	0
1752613,000	5085020,000	-0,0014	-0,00136	-0,00341	-0,00832	-0,0107	-0,0109
1753806,000	5085146,000	-0,00267	-0,00362	-0,00654	-0,01176	-0,01345	-0,01089

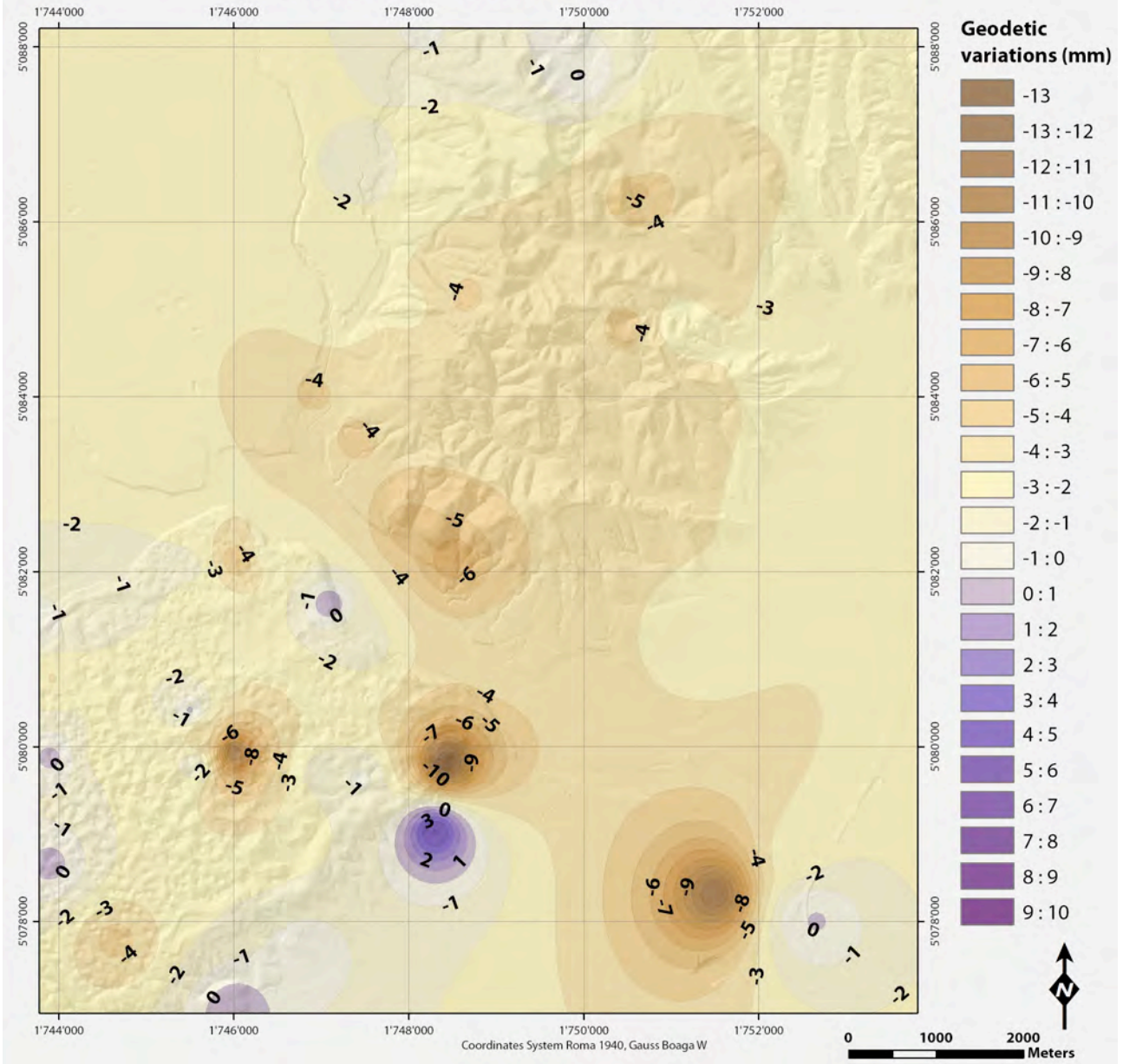
### Geodetic Variation for 1985 - 1987 time interval



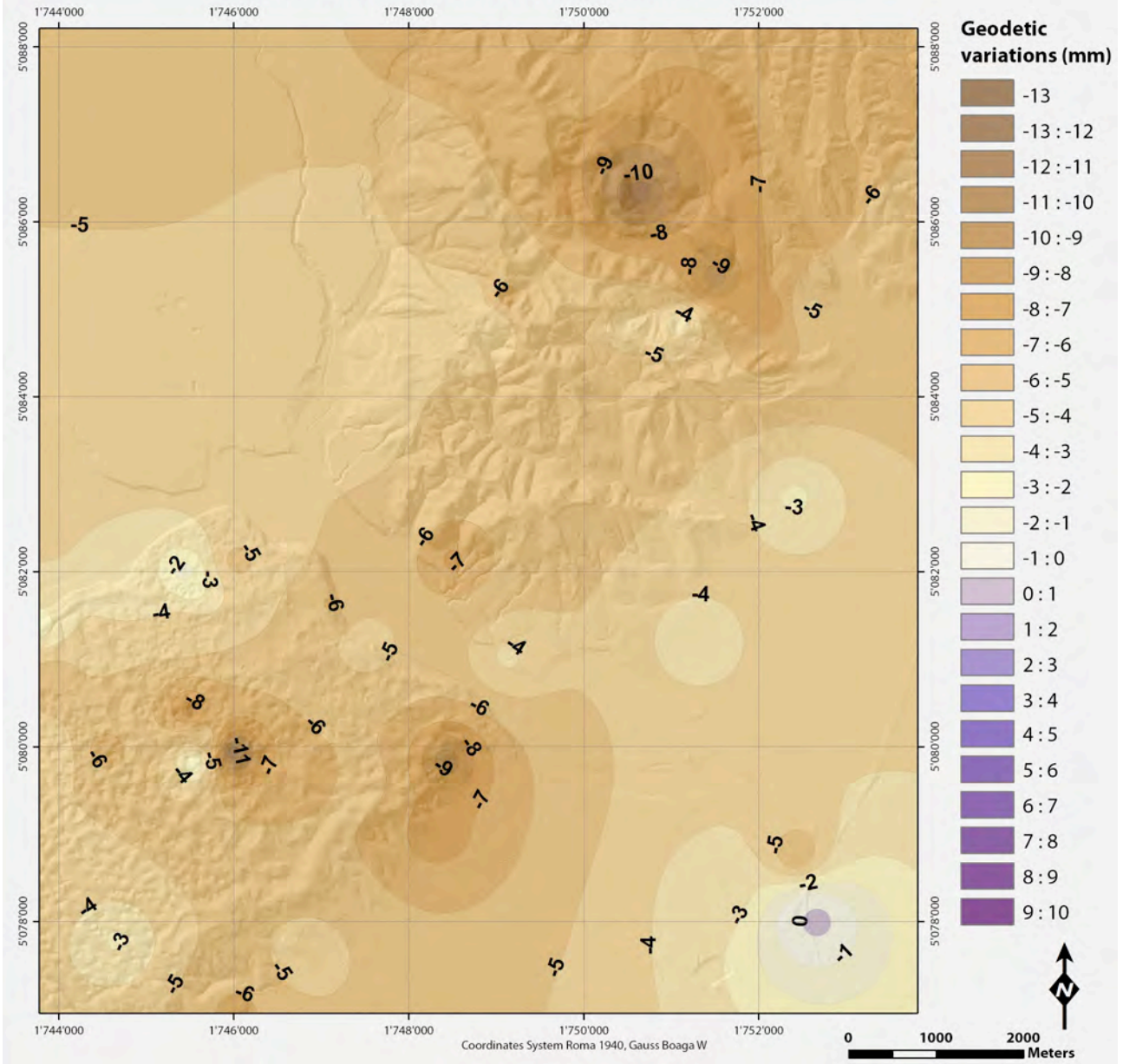
### Geodetic Variation for 1987 - 1990 time interval



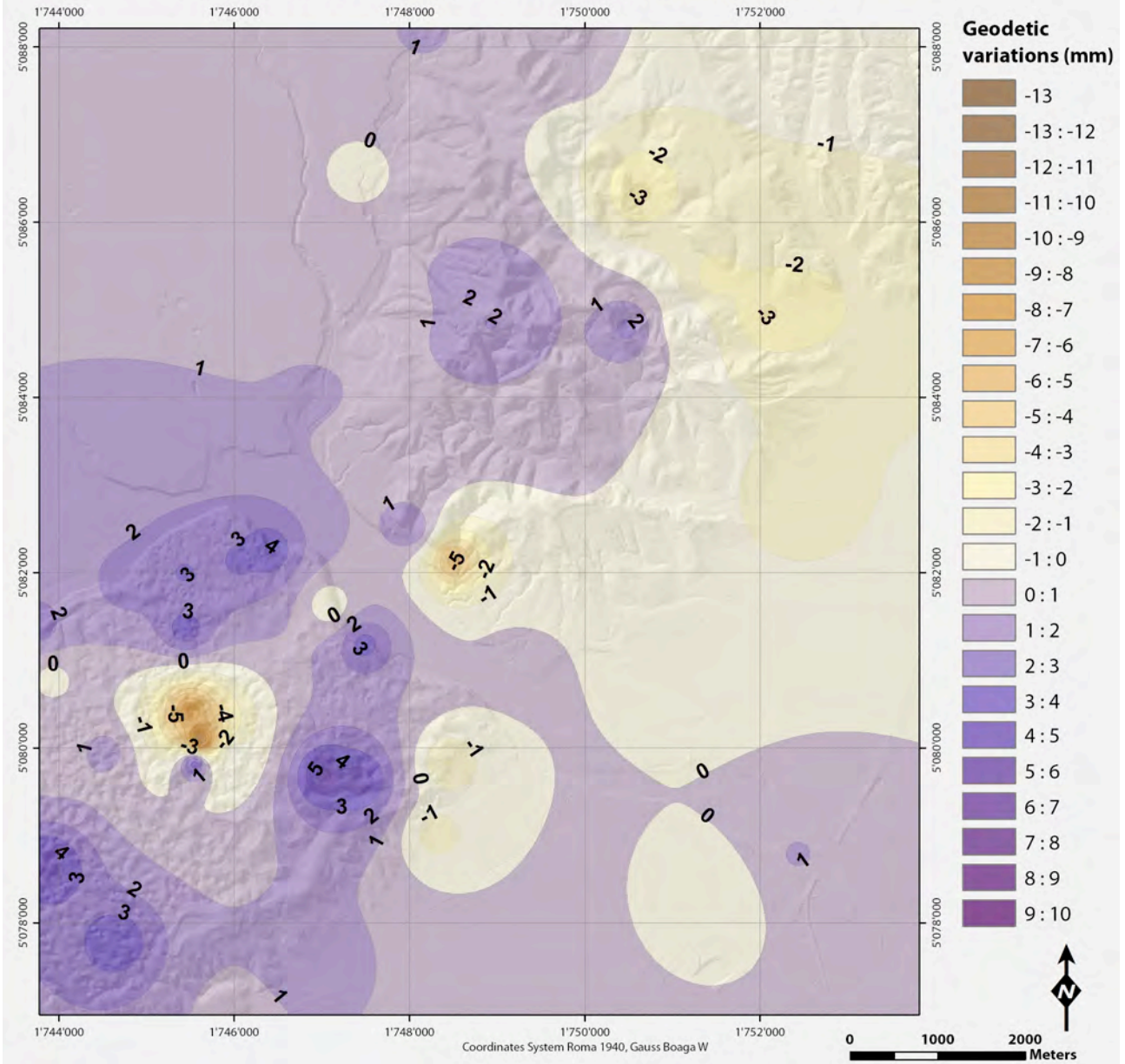
### Geodetic Variation for 1990 - 1995 time interval



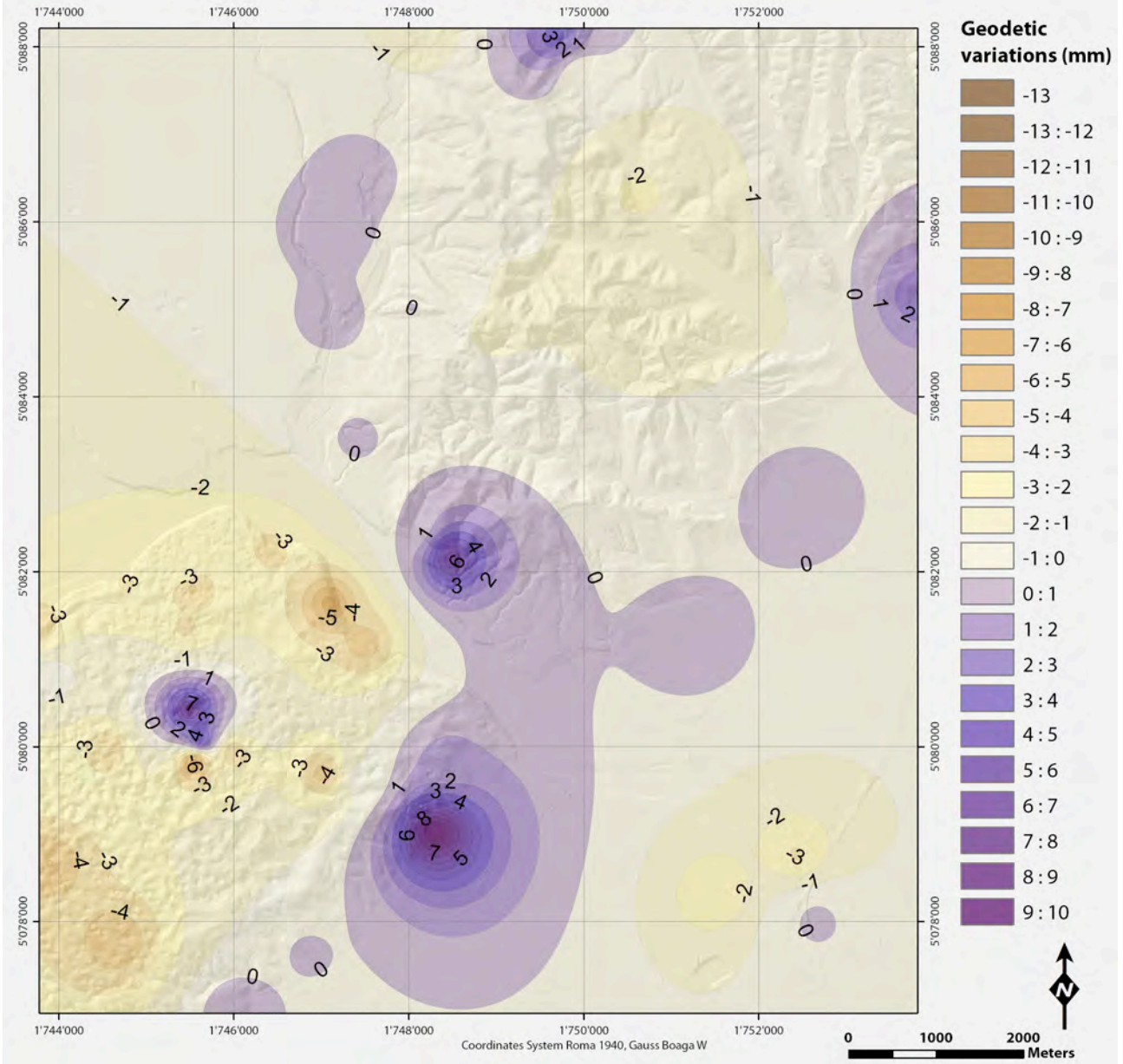
### Geodetic Variation for 1995 - May 2006 time interval



### Geodetic Variation for May 2006 - November 2006 time interval



### Geodetic Variation for November 2006 - 2010 time interval





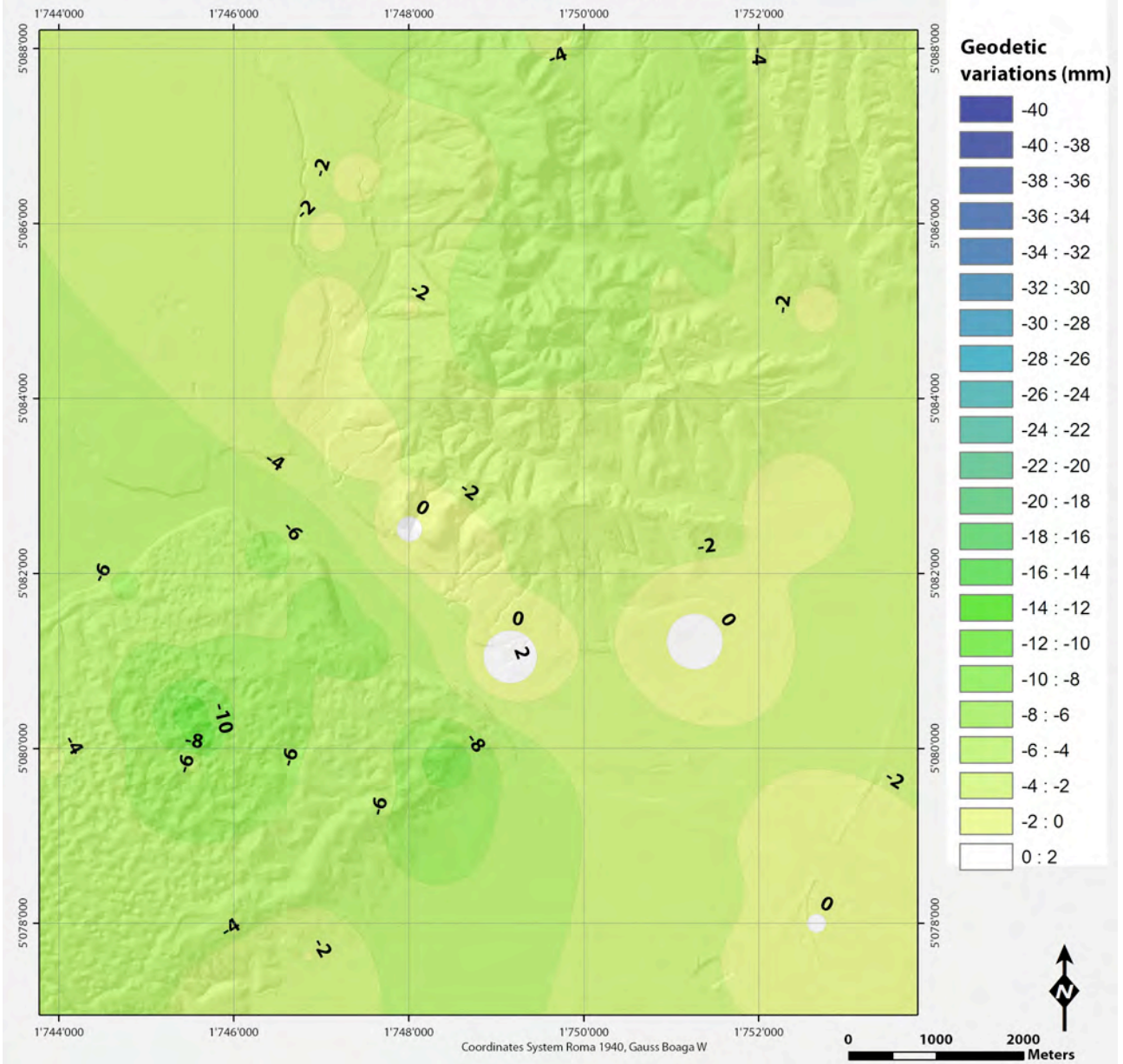
Nella tabella successiva sono riportati i valori differenze di quota relative ai periodi in esame (ad se. L'intervallo temporale maggio 2006-novembre 2006). Questi valori rappresentano quindi le misure della variazione geodetica consecutiva per ogni tempo di misurazione nell'intorno del reservoir di Collalto. Nelle prime due colonne sono riportati i valori di Longitudine e Latitudine riferite alla proiezione Gauss Boaga, fuso Ovest. Di seguito vengono riportate anche le mappe elaborate tramite metodo della distanza inversa pesata. **I valori di variazione geodetica sono riportati in mm.**

X	Y	85-87	87-90	90-95	95-M06	M06-N06	N06-N10
1743763,4 20	5081393,1 57	-0,00423	-0,0023	-0,00019	-0,00261	0,0025	-0,00357
1743899,4 37	5078657,7 06	-0,00512	0,00104	0,00036	-0,0043	0,0044	-0,00502
1743904,4 75	5079871,7 83	-0,00346	-0,00085	0,00026	-0,00421	0,00043	-0,00216
1743929,6 63	5080773,5 24	-0,00499	-0,00216	-0,00303	-0,00555	-0,00033	-0,00025
1744534,7 65	5079946,3 18	-0,00564	0,00014	-0,00248	-0,00642	0,00147	-0,00387
1744655,0 86	5077781,1 53	-0,00458	0,00015	-0,00436	-0,00291	0,00376	-0,0049
1744770,9 53	5081866,6 97	-0,00619	-0,00149	-0,00097	-0,00307	0,00247	-0,00306
1745440,9 62	5081982,5 63	-0,00452	-0,00089	-0,00103	-0,0015	0,00321	-0,00221
1745447,7 51	5081353,7 49	-0,00576	-0,00062	-0,00218	-0,00454	0,00374	-0,00317
1745500,1 58	5080413,1 83	-0,01147	-0,00548	8,00E-05	-0,00842	-0,00791	0,00737
1745530,4 99	5081799,1 74	-0,00555	-0,00103	-0,00256	-0,00269	0,0026	-0,00414
1745546,7 53	5079806,2 93	-0,00567	-7,00E-05	-0,00107	-0,00225	0,00327	-0,00643
1745618,7 63	5080098,7 41	-0,01234	-0,00052	-0,00396	-0,00512	-0,00992	0,00431
1746000,1 42	5079927,1 97	-0,00646	-0,00285	-0,01095	-0,01151	-0,00058	-0,00381

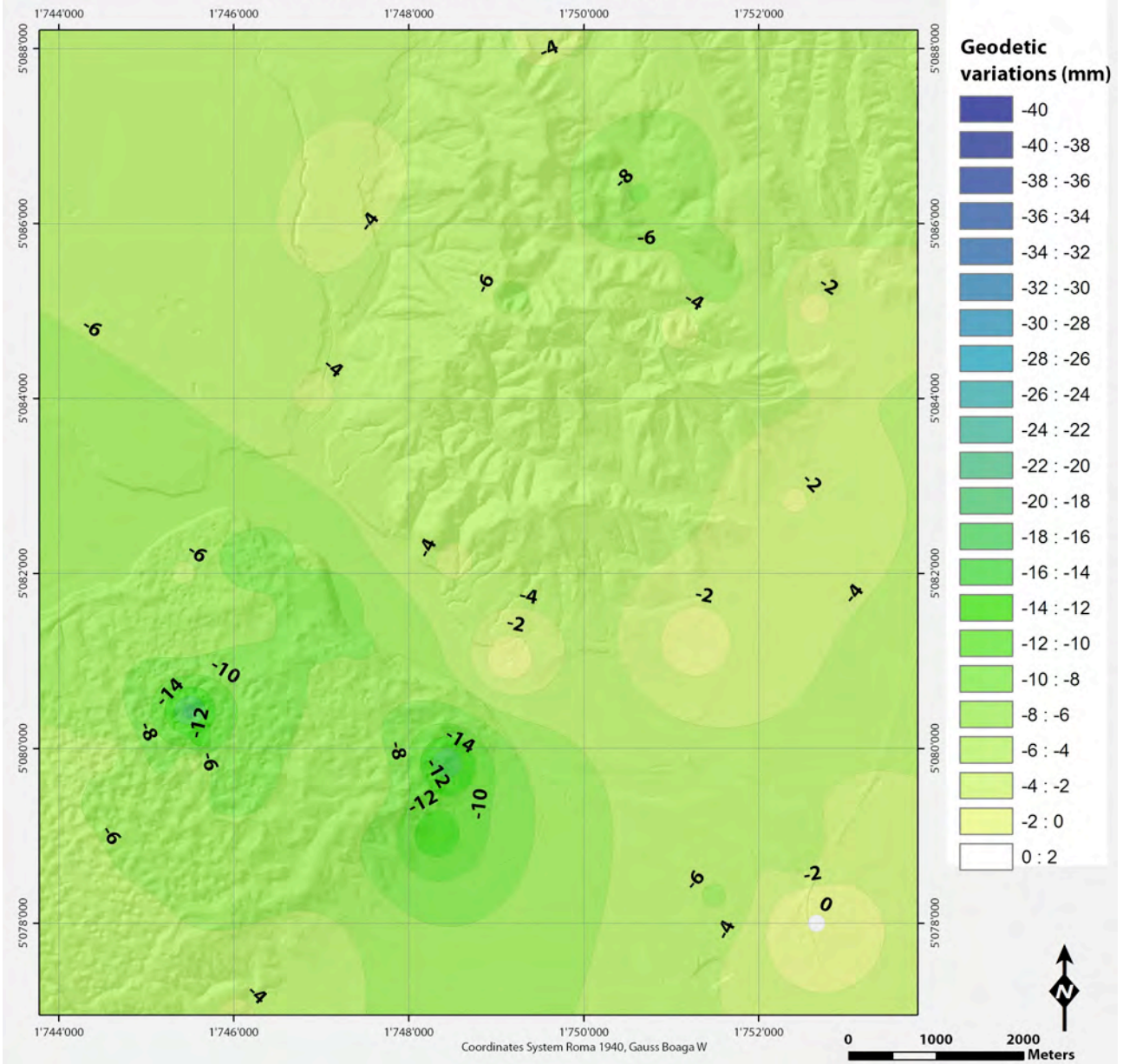
1746035,4 06	5076944,9 01	-0,00205	-0,00166	0,00095	-0,00621	0,00054	0,0008
1746050,5 19	5082123,6 18	-0,006	-0,00306	-0,00503	-0,00537	0,00326	-0,00242
1746383,0 04	5082239,4 84	-0,00667	-0,00198	-0,0022	-0,00439	0,00405	-0,00344
1746846,4 69	5077619,9 48	-0,00197	-0,00249	-0,0002	-0,00443	0,00181	0,0001
1746910,7 36	5084045,8 77	-0,00029	-0,00323	-0,00422	-0,00423	0,00135	-0,00014
1747017,7 50	5079690,4 27	-0,00596	-0,00087	-0,00156	-0,00621	0,00524	-0,00435
1747076,5 30	5085901,0 96	-0,00181	-0,00106	-0,00246	-0,00435	7,00E-05	0,00064
1747088,2 77	5081629,9 27	-0,00724	-0,00266	0,00072	-0,00604	-0,00078	-0,00629
1747491,2 90	5081176,5 37	-0,00699	-0,00111	-0,00132	-0,00431	0,00339	-0,0046
1747112,2 38	5084893,2 47	-0,00064	-0,0034	-0,0025	-0,00455	0,00029	0,0005
1747400,4 29	5083514,8 84	-0,00011	-0,00394	-0,00422	-0,00441	0,00054	0,00028
1747427,3 80	5086528,2 34	-0,00156	-0,00109	-0,00128	-0,00498	-0,00032	0,00042
1747440,9 14	5079624,9 37	-0,00491	-0,00108	-0,00076	-0,00546	0,00453	-0,00065
1748003,8 56	5082498,9 13	0,00056	-0,0046	-0,00579	-0,00589	0,00179	0
1748036,7 58	5085020,9 92	-0,0019	-0,00302	-0,00281	-0,00466	0,00072	1,00E-05
1748165,9 89	5088209,6 20	-0,00582	0,00134	-0,00075	-0,00701	0,00119	-0,00181
1748302,3 54	5079015,3 80	-0,00754	-0,00589	0,00505	-0,00766	-0,0015	0,00994
1748428,2 95	5079826,4 44	-0,00968	-0,00555	-0,01282	-0,00943	-0,00202	0,00152
1748502,2 66	5082132,6 11	-3,00E-05	-0,00348	-0,007	-0,00716	-0,00524	0,00647
1748691,2 98	5085141,0 91	-0,00441	-0,00011	-0,00451	-0,00467	0,00203	-0,00045

1748931,4 96	5084840,8 43	-0,00579	0,00025	-0,00328	-0,0041	0,00204	-0,00141
1749117,6 49	5085135,0 86	-0,00592	-0,00065	-0,0032	-0,00629	0,00194	-0,00144
1749132,7 86	5081027,7 00	0,00203	-0,00247	-0,00334	-0,00385	0,00022	0,00042
1749664,1 00	5088089,5 21	-0,00369	0,0009	-0,00074	-0,00679	0,0009	0,00335
1749958,3 42	5087681,1 85	-0,00521	-0,00021	1,00E-05	-0,006	0,00016	-0,00077
1750480,7 73	5084780,7 94	-0,00468	-0,00039	-0,00438	-0,00474	0,00222	-0,00148
1750582,8 57	5086648,3 33	-0,00498	-0,00201	-0,00337	-0,00926	-0,00206	-0,00165
1750633,0 48	5086352,9 71	-0,00471	-0,00357	-0,00526	-0,01166	-0,0033	-0,00248
1751093,2 78	5084828,8 33	-0,0034	0,00014	-0,00255	-0,00363	-0,00023	-0,0018
1751258,5 39	5081219,8 58	0,00091	-0,0015	-0,00242	-0,00329	-0,00099	0,0006
1751492,7 32	5085369,2 79	-0,00431	-0,00315	-0,00325	-0,00939	-0,00244	-0,00119
1751505,4 03	5078313,9 70	-0,00253	-0,00365	-0,01188	-0,00364	-0,00073	-0,00291
1752093,2 27	5084960,9 42	-0,00292	-0,0021	-0,00302	-0,00765	-0,00313	-0,00156
1752408,6 76	5082836,2 55	-0,00093	-0,00093	-0,00276	-0,00286	-0,00191	0,00071
1752432,7 76	5078770,1 78	-0,00137	-0,00344	-0,00248	-0,00574	0,00111	-0,00306
1752533,0 00	5078022,9 00	0	0	0	0	0	0
1752613,0 00	5085020,0 00	-0,0014	4,00E-05	-0,00205	-0,00491	-0,00238	-0,0002
1753806,0 00	5085146,0 00	-0,00267	-0,00095	-0,00292	-0,00522	-0,00169	0,00256

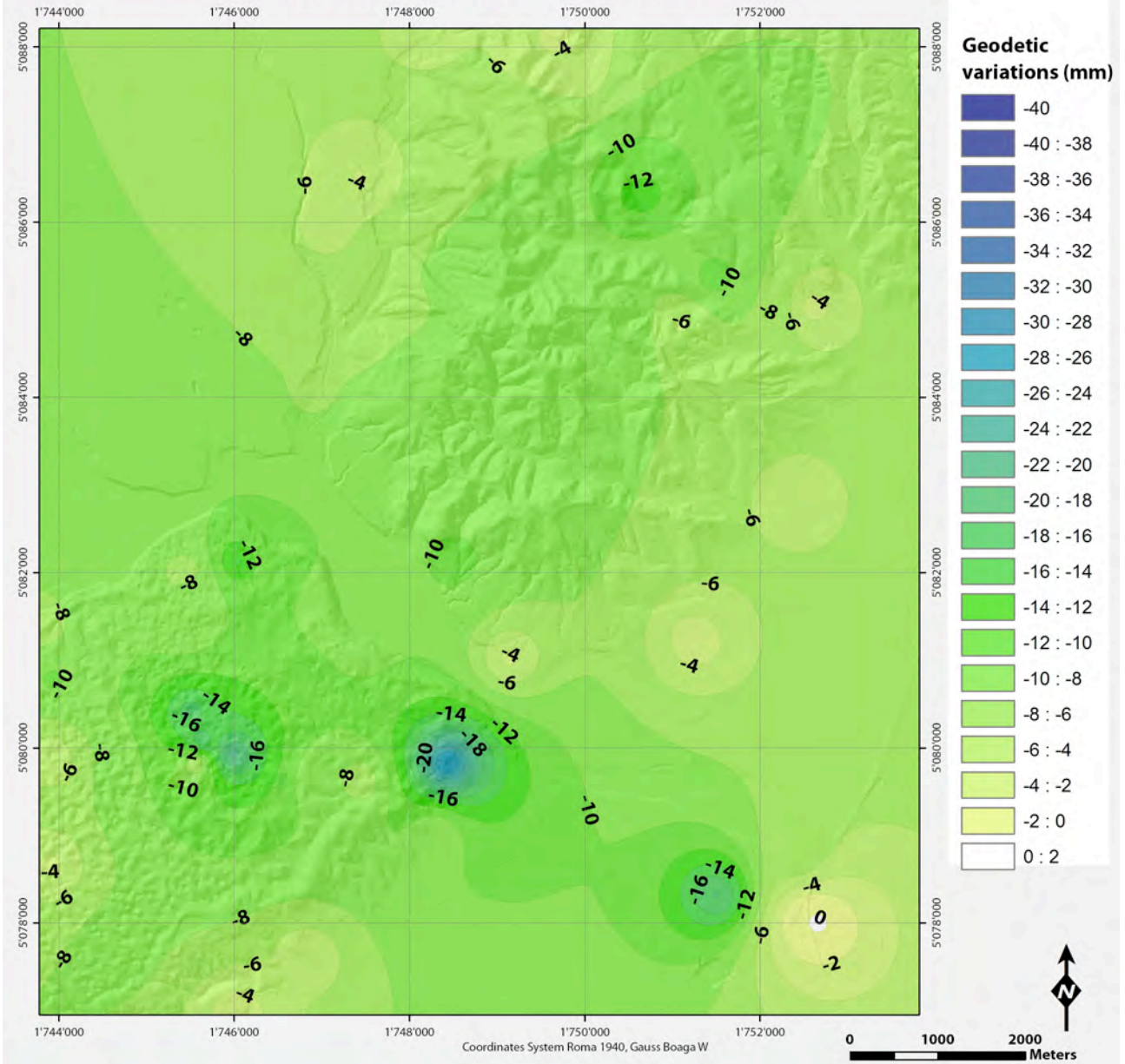
### Geodetic Variation for 1985 - 1987 time interval



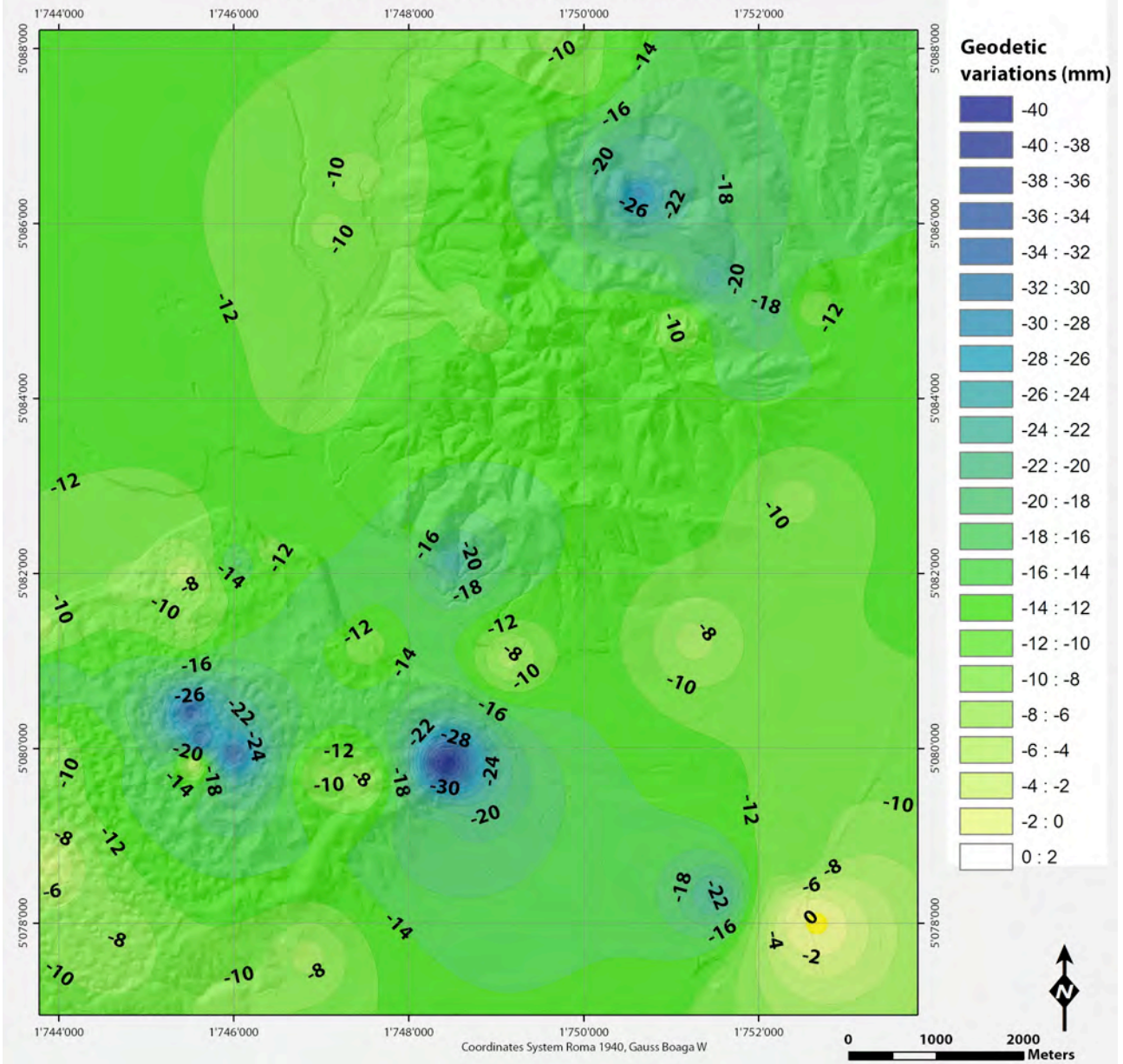
### Geodetic Variation for 1985 - 1990 time interval



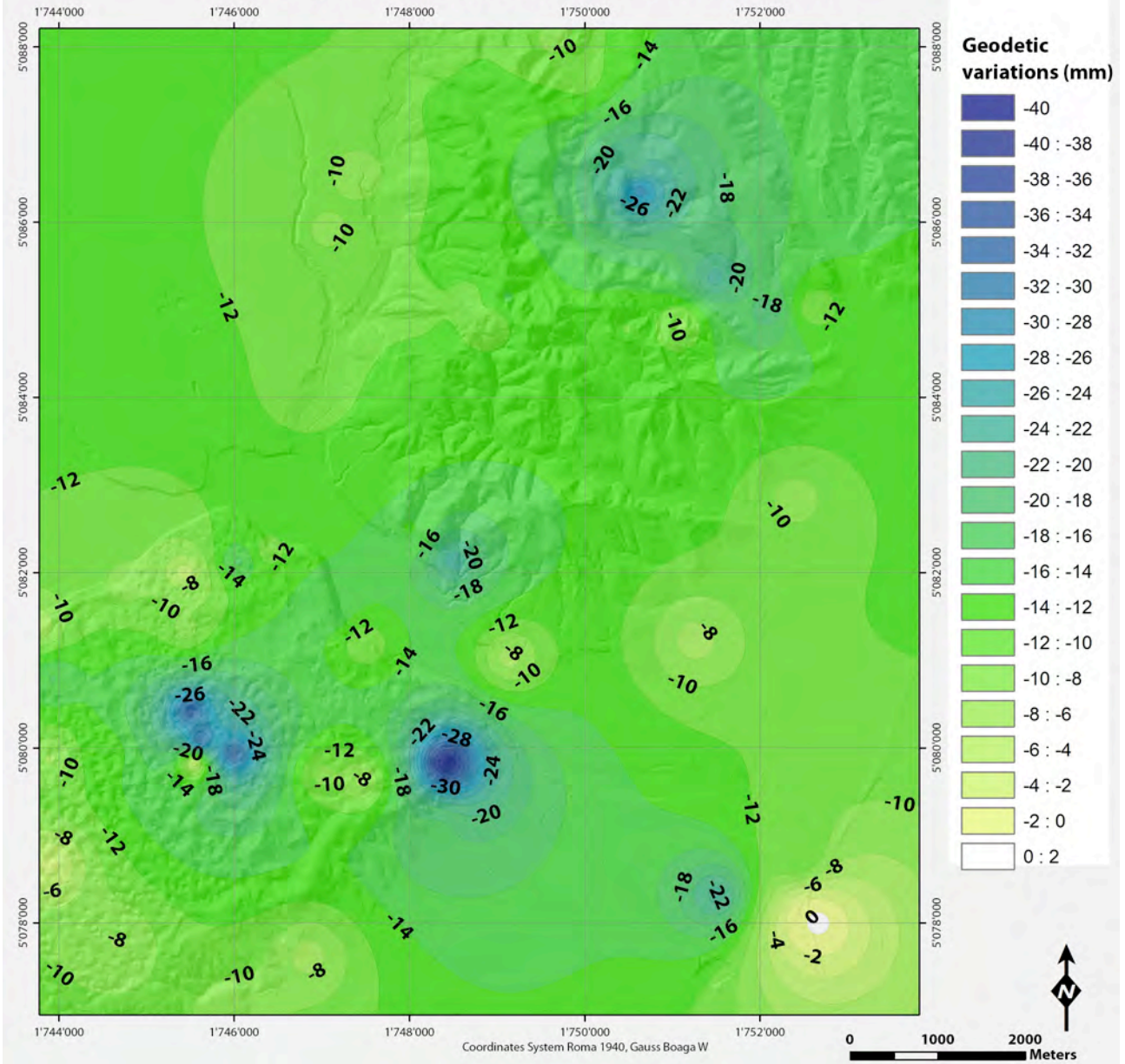
### Geodetic Variation for 1985 - 1995 time interval



### Geodetic Variation for 1985 - May 2006 time interval

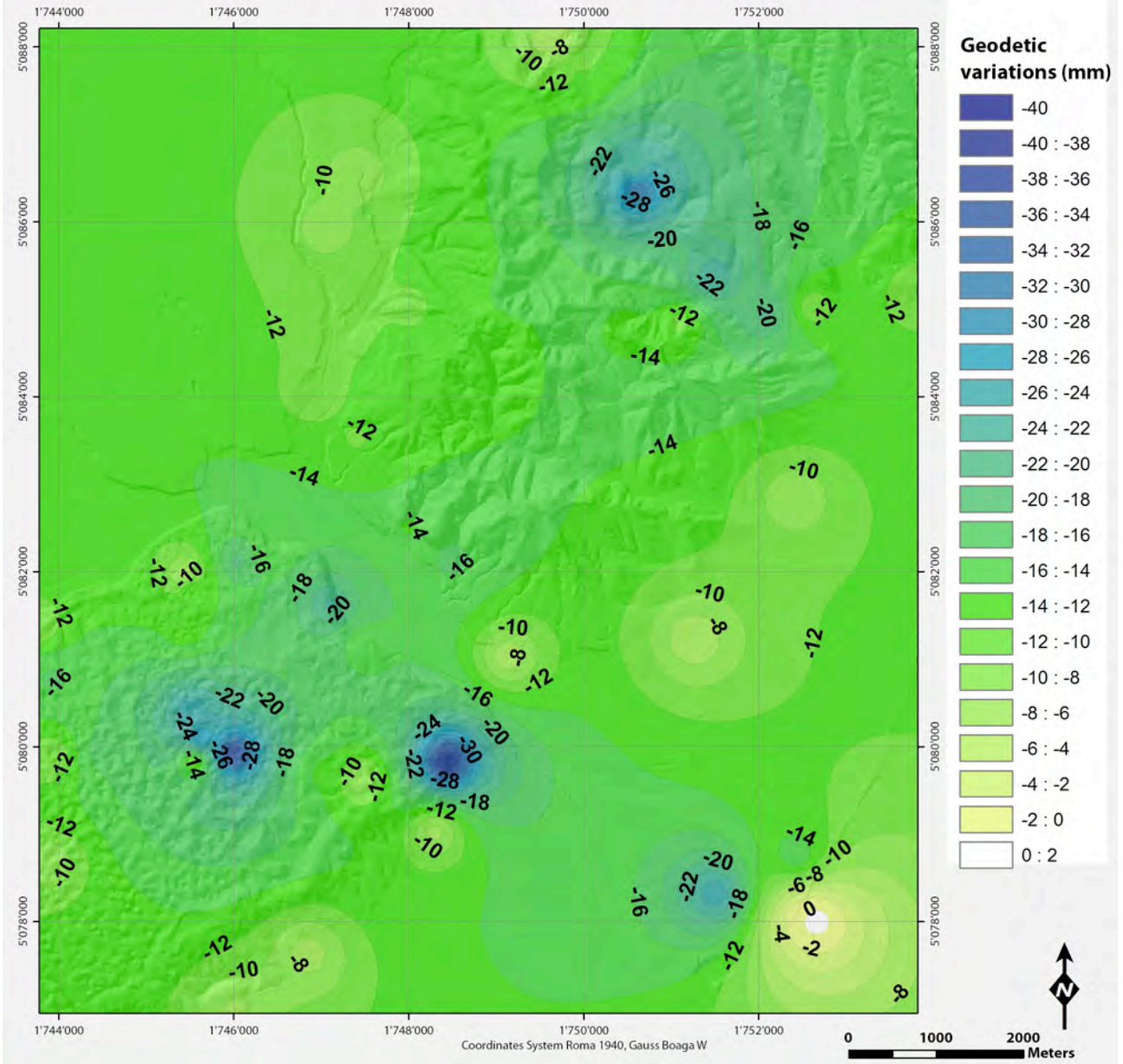


### Geodetic Variation for 1985 - November 2006 time interval





### Geodetic Variation for 1985 - November 2010 time interval



## **APPENDICE C**

### **DEFORMAZIONI GEODETICHE PER BAGNOLO MELLA**

In questa appendice sono riportate le mappe di subsidenza elaborate sulla base delle tabelle 5.1 e 5.2 .

Oltre alle mappe, sono stati elaborati dei profili delle variazioni geodetiche attraverso un profilo posto in direzione W-E passante per il pozzo BM8, riportato nelle figure.

In aggiunta sono inseriti ulteriori grafici che riportano l'evoluzione temporale relativa alla produzione di Gas nel periodo di riapertura mineraria del 1999.

## APPENDICE B – Analisi subsidenza Campo Collalto Stoccaggio

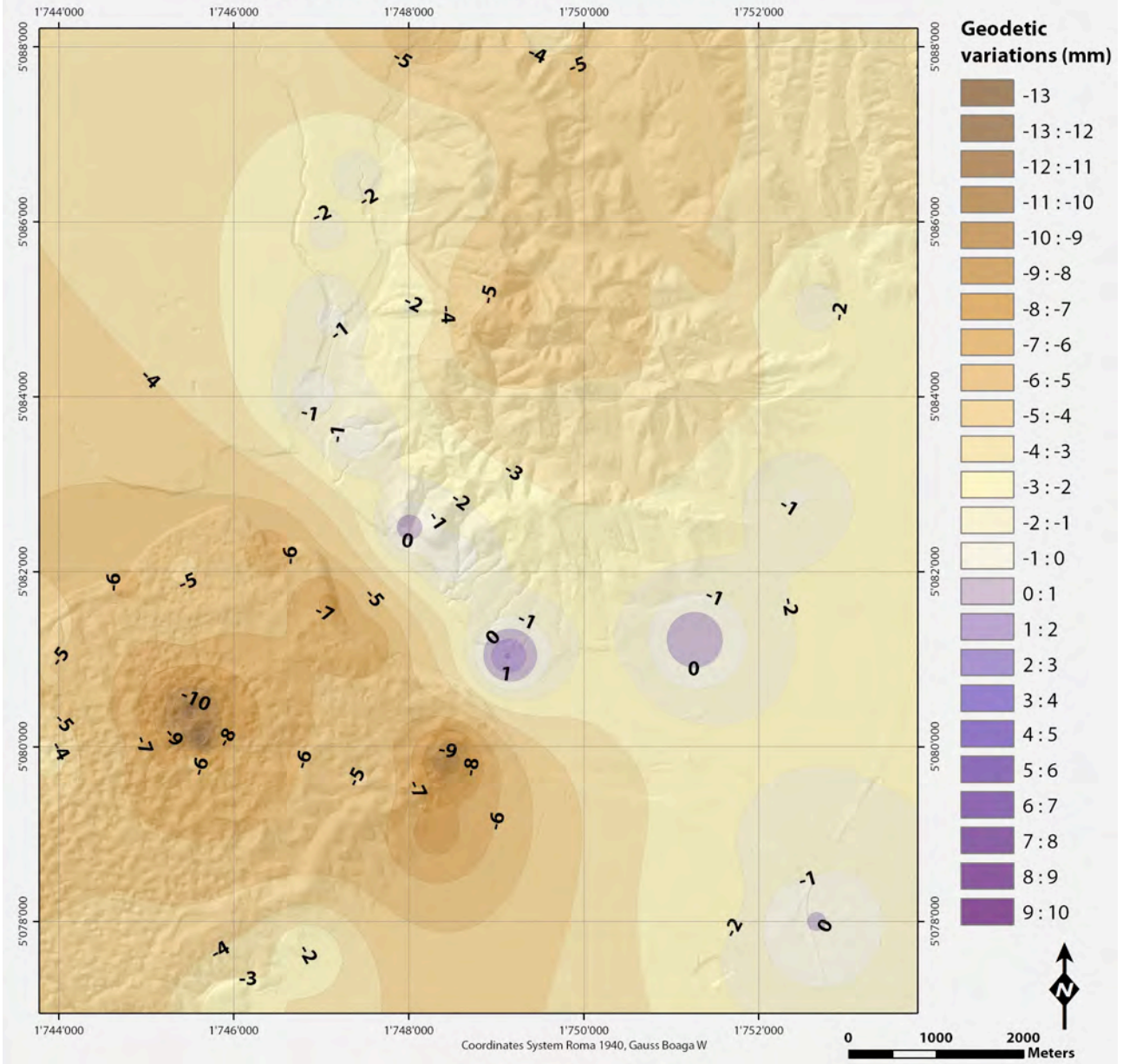
I valori di monitoraggio della subsidenza per il campo di Collalto sono riportati nella seguente tabella. I valori riportano le differenze di quota relative ai periodi in esame (ad se. L'intervallo temporale 1985-1987). Questi valori rappresentano quindi le serie temporali della variazione geodetica nell'intorno del reservoir di Collalto. Nelle prime due colonne sono riportati i valori di Longitudine e Latitudine riferite alla proiezione Gauss Boaga, fuso Ovest. Di seguito vengono riportate anche le mappe elaborate tramite metodo della distanza inversa pesata. **I valori di variazione geodetica sono riportati in metri.**

X	Y	85-87	85-90	85-95	85-M06	85-N06	85-N10
1743763,420	5081393,157	-0,00423	-0,00653	-0,00672	-0,00933	-0,00683	-0,0104
1743899,437	5078657,706	-0,00512	-0,00408	-0,00372	-0,00802	-0,00362	-0,00864
1743904,475	5079871,783	-0,00346	-0,00431	-0,00405	-0,00826	-0,00783	-0,00999
1743929,663	5080773,524	-0,00499	-0,00715	-0,01018	-0,01573	-0,01606	-0,01631
1744534,765	5079946,318	-0,00564	-0,0055	-0,00798	-0,0144	-0,01293	-0,0168
1744655,086	5077781,153	-0,00458	-0,00443	-0,00879	-0,0117	-0,00794	-0,01284
1744770,953	5081866,697	-0,00619	-0,00768	-0,00865	-0,01172	-0,00925	-0,01231
1745440,962	5081982,563	-0,00452	-0,00541	-0,00644	-0,00794	-0,00473	-0,00694
1745447,751	5081353,749	-0,00576	-0,00638	-0,00856	-0,0131	-0,00936	-0,01253
1745500,158	5080413,183	-0,01147	-0,01695	-0,01687	-0,02529	-0,0332	-0,02583
1745530,499	5081799,174	-0,00555	-0,00658	-0,00914	-0,01183	-0,00923	-0,01337
1745546,753	5079806,293	-0,00567	-0,00574	-0,00681	-0,00906	-0,00579	-0,01222
1745618,763	5080098,741	-0,01234	-0,01286	-0,01682	-0,02194	-0,03186	-0,02755
1746000,142	5079927,197	-0,00646	-0,00931	-0,02026	-0,03177	-0,03235	-0,03616
1746035,406	5076944,901	-0,00205	-0,00371	-0,00276	-0,00897	-0,00843	-0,00763
1746050,519	5082123,618	-0,006	-0,00906	-0,01409	-0,01946	-0,0162	-0,01862
1746383,004	5082239,484	-0,00667	-0,00865	-0,01085	-0,01524	-0,01119	-0,01463
1746846,469	5077619,948	-0,00197	-0,00446	-0,00466	-0,00909	-0,00728	-0,00718

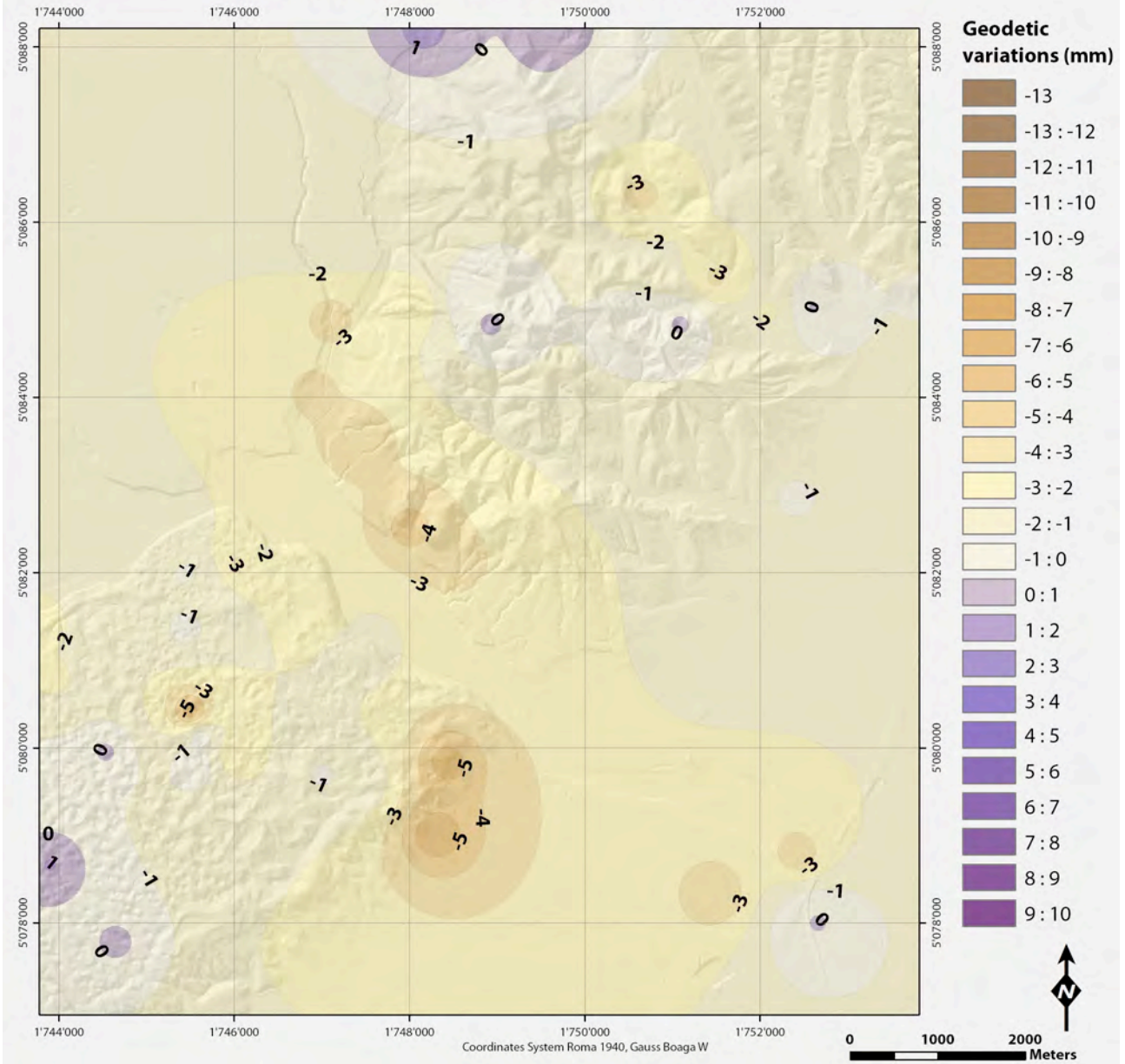
1746910,736	5084045,877	-0,00029	-0,00352	-0,00774	-0,01197	-0,01062	-0,01076
1747017,750	5079690,427	-0,00596	-0,00683	-0,00839	-0,0146	-0,00936	-0,01371
1747076,530	5085901,096	-0,00181	-0,00287	-0,00533	-0,00968	-0,00961	-0,00897
1747088,277	5081629,927	-0,00724	-0,0099	-0,00918	-0,01522	-0,016	-0,02229
1747491,290	5081176,537	-0,00699	-0,0081	-0,00942	-0,01373	-0,01034	-0,01494
1747112,238	5084893,247	-0,00064	-0,00404	-0,00654	-0,01109	-0,0108	-0,0103
1747400,429	5083514,884	-0,00011	-0,00405	-0,00827	-0,01268	-0,01214	-0,01186
1747427,380	5086528,234	-0,00156	-0,00265	-0,00393	-0,00891	-0,00923	-0,00881
1747440,914	5079624,937	-0,00491	-0,00599	-0,00675	-0,01221	-0,00768	-0,00833
1748003,856	5082498,913	0,00056	-0,00404	-0,00983	-0,01572	-0,01393	-0,01393
1748036,758	5085020,992	-0,0019	-0,00492	-0,00773	-0,01239	-0,01167	-0,01166
1748165,989	5088209,620	-0,00582	-0,00448	-0,00523	-0,01224	-0,01105	-0,01286
1748302,354	5079015,380	-0,00754	-0,01343	-0,00838	-0,01604	-0,01754	-0,0076
1748428,295	5079826,444	-0,00968	-0,01523	-0,02805	-0,03748	-0,0395	-0,03798
1748502,266	5082132,611	-3,00E-05	-0,00351	-0,01051	-0,01767	-0,02291	-0,01644
1748691,298	5085141,091	-0,00441	-0,00452	-0,00903	-0,0137	-0,01167	-0,01212
1748931,496	5084840,843	-0,00579	-0,00554	-0,00882	-0,01292	-0,01088	-0,01229
1749117,649	5085135,086	-0,00592	-0,00657	-0,00977	-0,01606	-0,01412	-0,01556
1749132,786	5081027,700	0,00203	-0,00044	-0,00378	-0,00763	-0,00741	-0,00699
1749664,100	5088089,521	-0,00369	-0,00279	-0,00353	-0,01032	-0,00942	-0,00607
1749958,342	5087681,185	-0,00521	-0,00542	-0,00541	-0,01141	-0,01125	-0,01202
1750480,773	5084780,794	-0,00468	-0,00507	-0,00945	-0,01419	-0,01197	-0,01345
1750582,857	5086648,333	-0,00498	-0,00699	-0,01036	-0,01962	-0,02168	-0,02333
1750633,048	5086352,971	-0,00471	-0,00828	-0,01354	-0,0252	-0,0285	-0,03098
1751093,278	5084828,833	-0,0034	-0,00326	-0,00581	-0,00944	-0,00967	-0,01147
1751258,539	5081219,858	0,00091	-0,00059	-0,00301	-0,0063	-0,00729	-0,00669
1751492,732	5085369,279	-0,00431	-0,00746	-0,01071	-0,0201	-0,02254	-0,02373
1751505,403	5078313,970	-0,00253	-0,00618	-0,01806	-0,0217	-0,02243	-0,02534
1752093,227	5084960,942	-0,00292	-0,00502	-0,00804	-0,01569	-0,01882	-0,02038
1752408,676	5082836,255	-0,00093	-0,00186	-0,00462	-0,00748	-0,00939	-0,00868
1752432,776	5078770,178	-0,00137	-0,00481	-0,00729	-0,01303	-0,01192	-0,01498

1752533,000	5078022,900	0	0	0	0	0	0
1752613,000	5085020,000	-0,0014	-0,00136	-0,00341	-0,00832	-0,0107	-0,0109
1753806,000	5085146,000	-0,00267	-0,00362	-0,00654	-0,01176	-0,01345	-0,01089

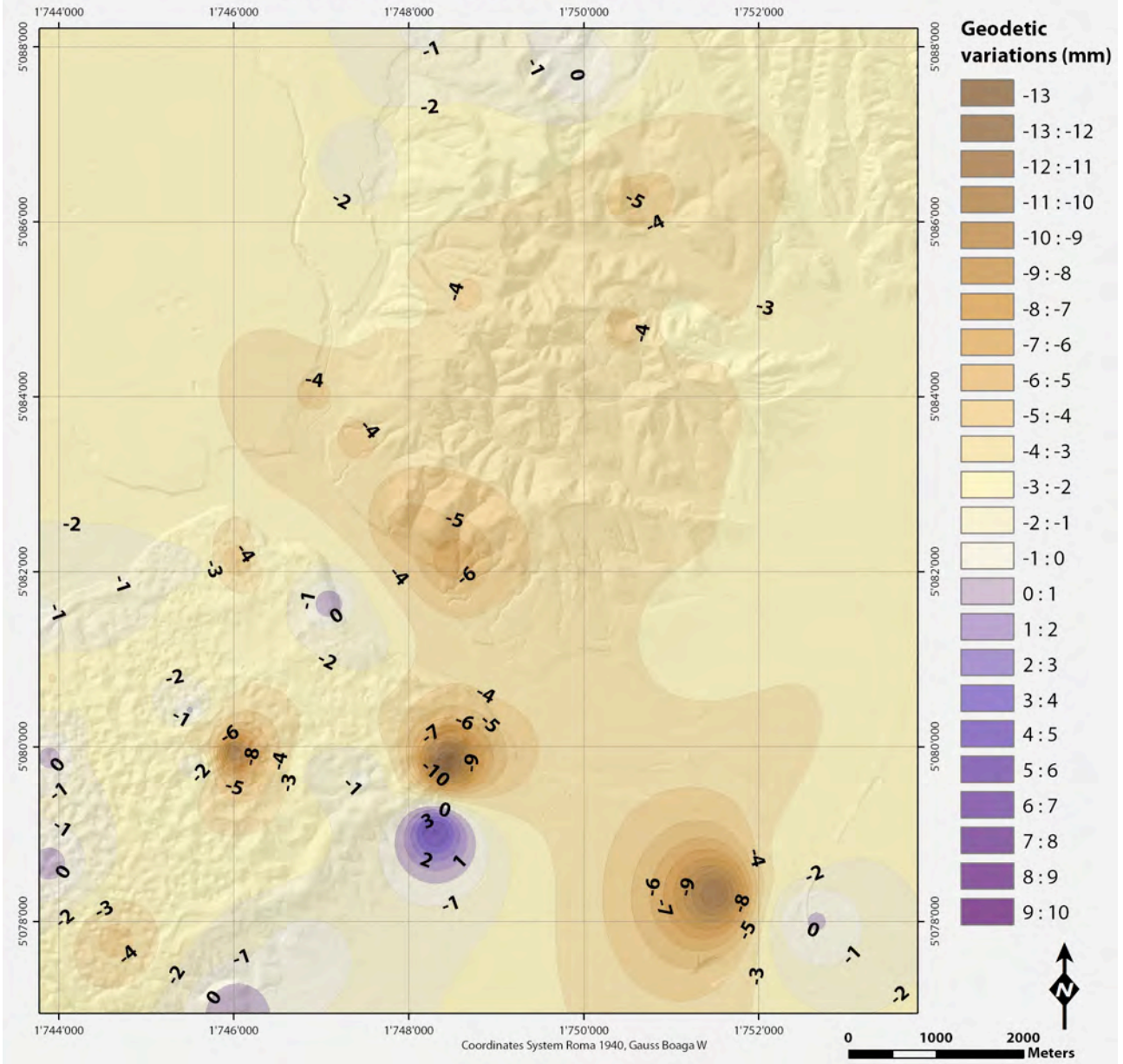
### Geodetic Variation for 1985 - 1987 time interval



### Geodetic Variation for 1987 - 1990 time interval

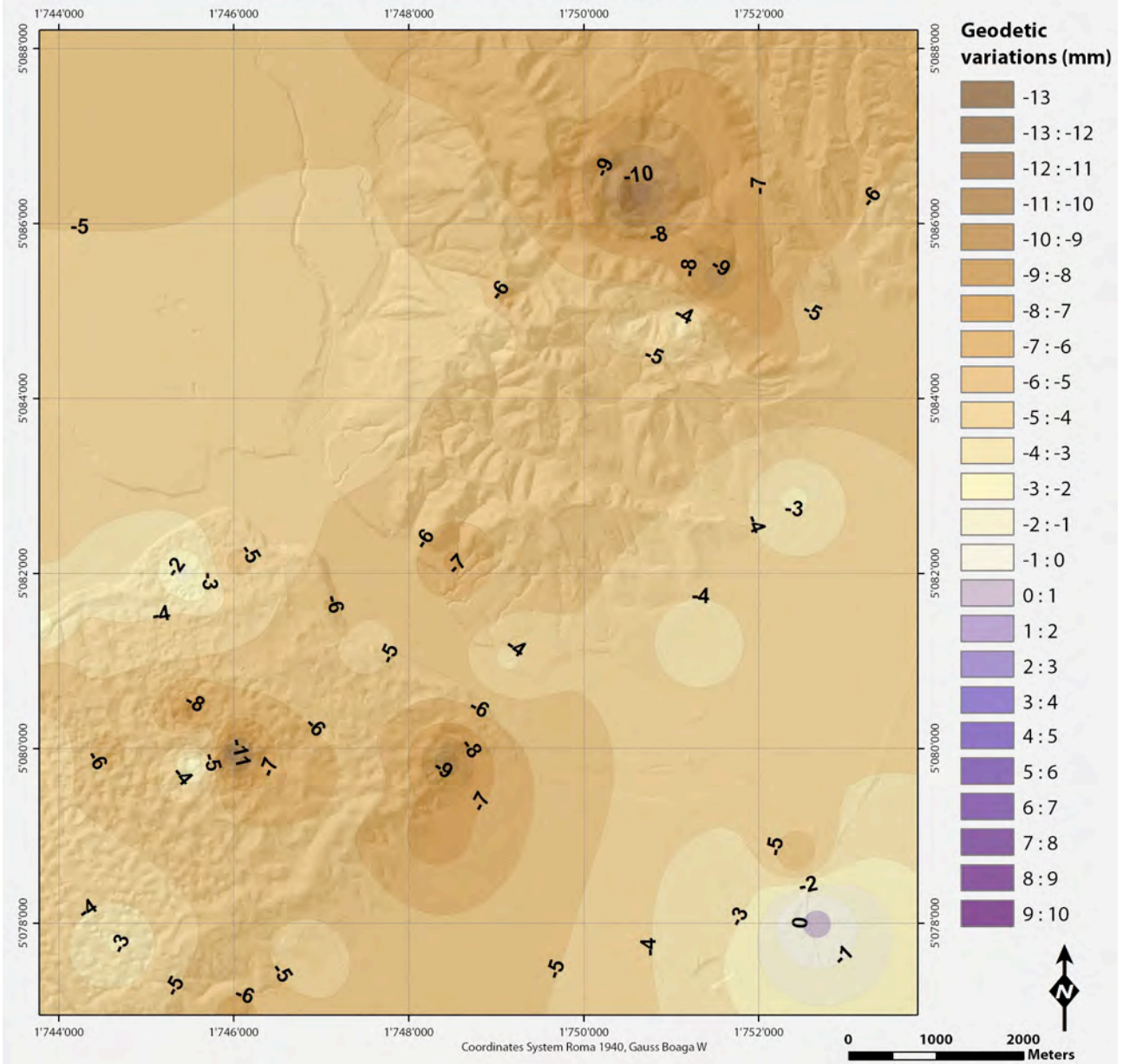


### Geodetic Variation for 1990 - 1995 time interval

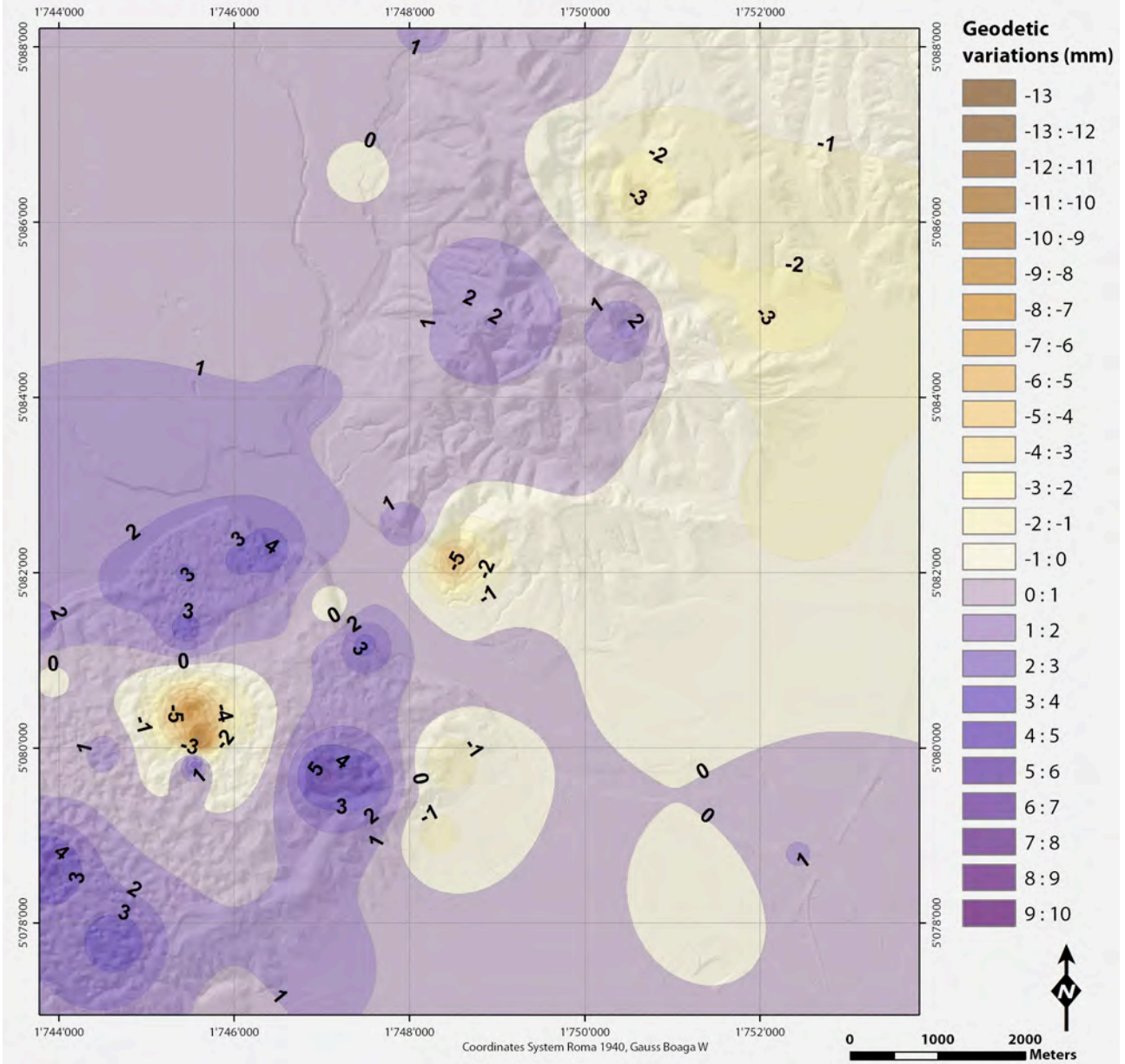




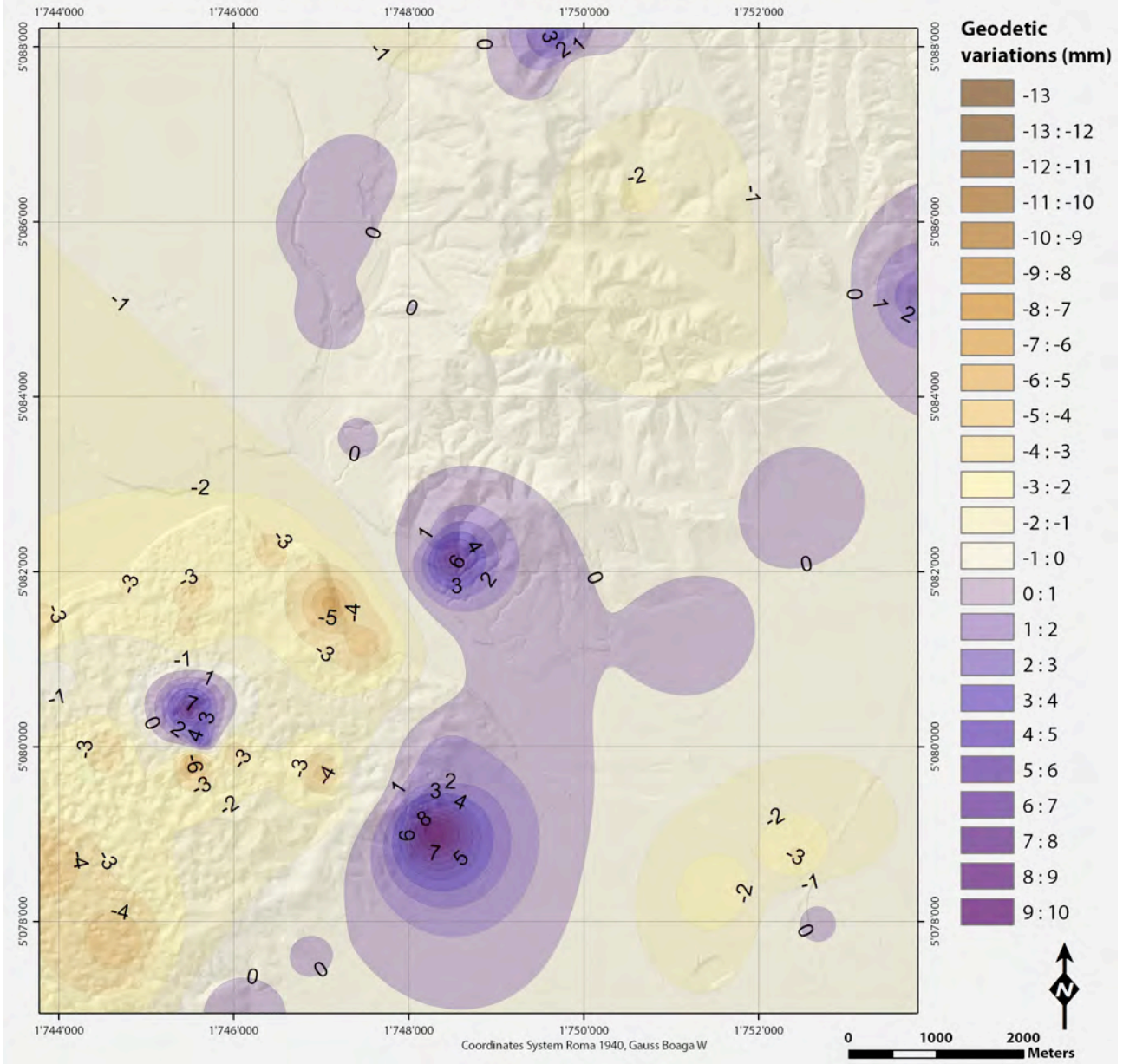
### Geodetic Variation for 1995 - May 2006 time interval



### Geodetic Variation for May 2006 - November 2006 time interval



### Geodetic Variation for November 2006 - 2010 time interval



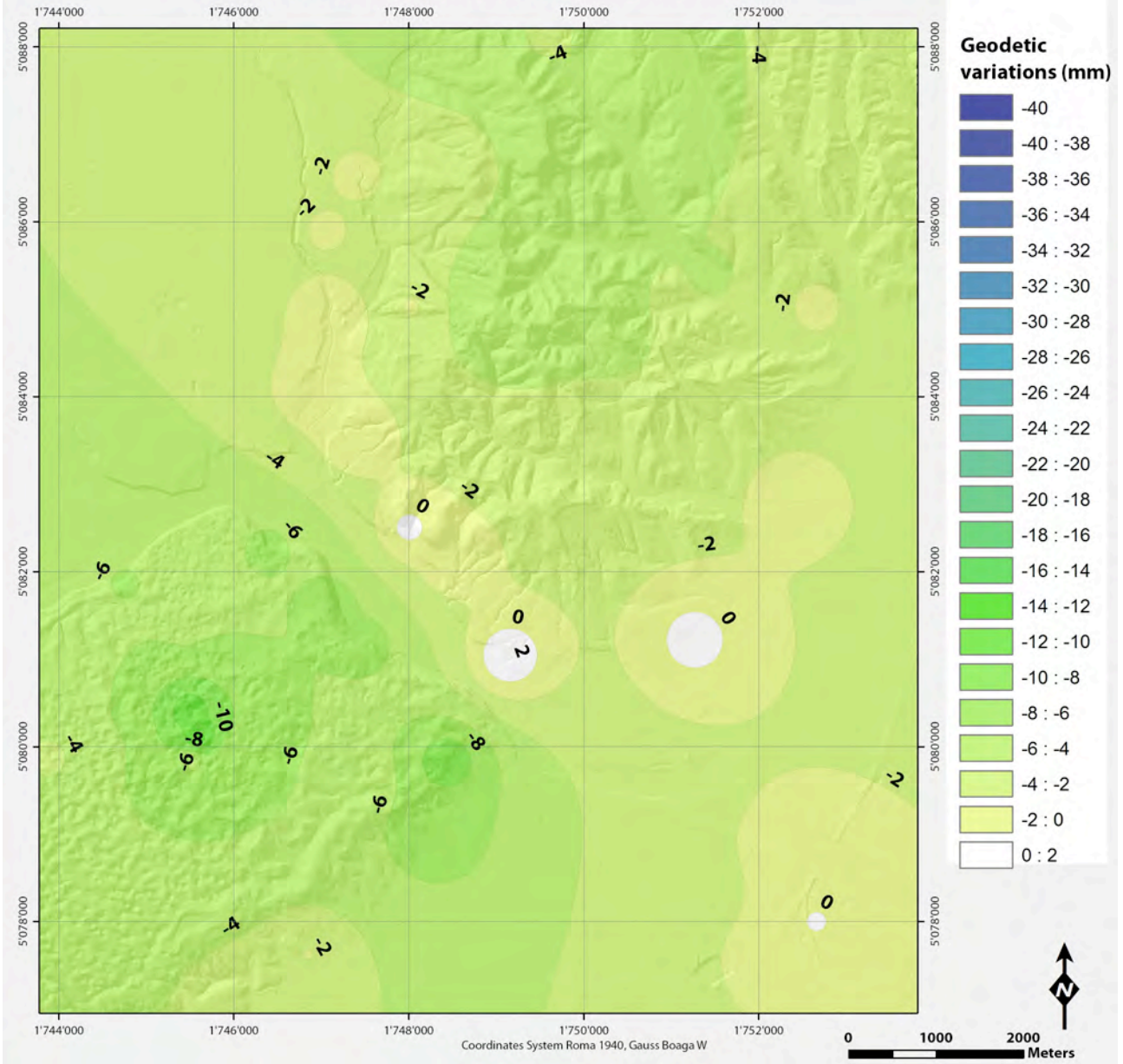
Nella tabella successiva sono riportati i valori differenze di quota relative ai periodi in esame (ad se. L'intervallo temporale maggio 2006-novembre 2006). Questi valori rappresentano quindi le misure della variazione geodetica consecutiva per ogni tempo di misurazione nell'intorno del reservoir di Collalto. Nelle prime due colonne sono riportati i valori di Longitudine e Latitudine riferite alla proiezione Gauss Boaga, fuso Ovest. Di seguito vengono riportate anche le mappe elaborate tramite metodo della distanza inversa pesata. **I valori di variazione geodetica sono riportati in mm.**

X	Y	85-87	87-90	90-95	95-M06	M06-N06	N06-N10
1743763,4 20	5081393,1 57	-0,00423	-0,0023	-0,00019	-0,00261	0,0025	-0,00357
1743899,4 37	5078657,7 06	-0,00512	0,00104	0,00036	-0,0043	0,0044	-0,00502
1743904,4 75	5079871,7 83	-0,00346	-0,00085	0,00026	-0,00421	0,00043	-0,00216
1743929,6 63	5080773,5 24	-0,00499	-0,00216	-0,00303	-0,00555	-0,00033	-0,00025
1744534,7 65	5079946,3 18	-0,00564	0,00014	-0,00248	-0,00642	0,00147	-0,00387
1744655,0 86	5077781,1 53	-0,00458	0,00015	-0,00436	-0,00291	0,00376	-0,0049
1744770,9 53	5081866,6 97	-0,00619	-0,00149	-0,00097	-0,00307	0,00247	-0,00306
1745440,9 62	5081982,5 63	-0,00452	-0,00089	-0,00103	-0,0015	0,00321	-0,00221
1745447,7 51	5081353,7 49	-0,00576	-0,00062	-0,00218	-0,00454	0,00374	-0,00317
1745500,1 58	5080413,1 83	-0,01147	-0,00548	8,00E-05	-0,00842	-0,00791	0,00737
1745530,4 99	5081799,1 74	-0,00555	-0,00103	-0,00256	-0,00269	0,0026	-0,00414
1745546,7 53	5079806,2 93	-0,00567	-7,00E-05	-0,00107	-0,00225	0,00327	-0,00643
1745618,7 63	5080098,7 41	-0,01234	-0,00052	-0,00396	-0,00512	-0,00992	0,00431
1746000,1 42	5079927,1 97	-0,00646	-0,00285	-0,01095	-0,01151	-0,00058	-0,00381

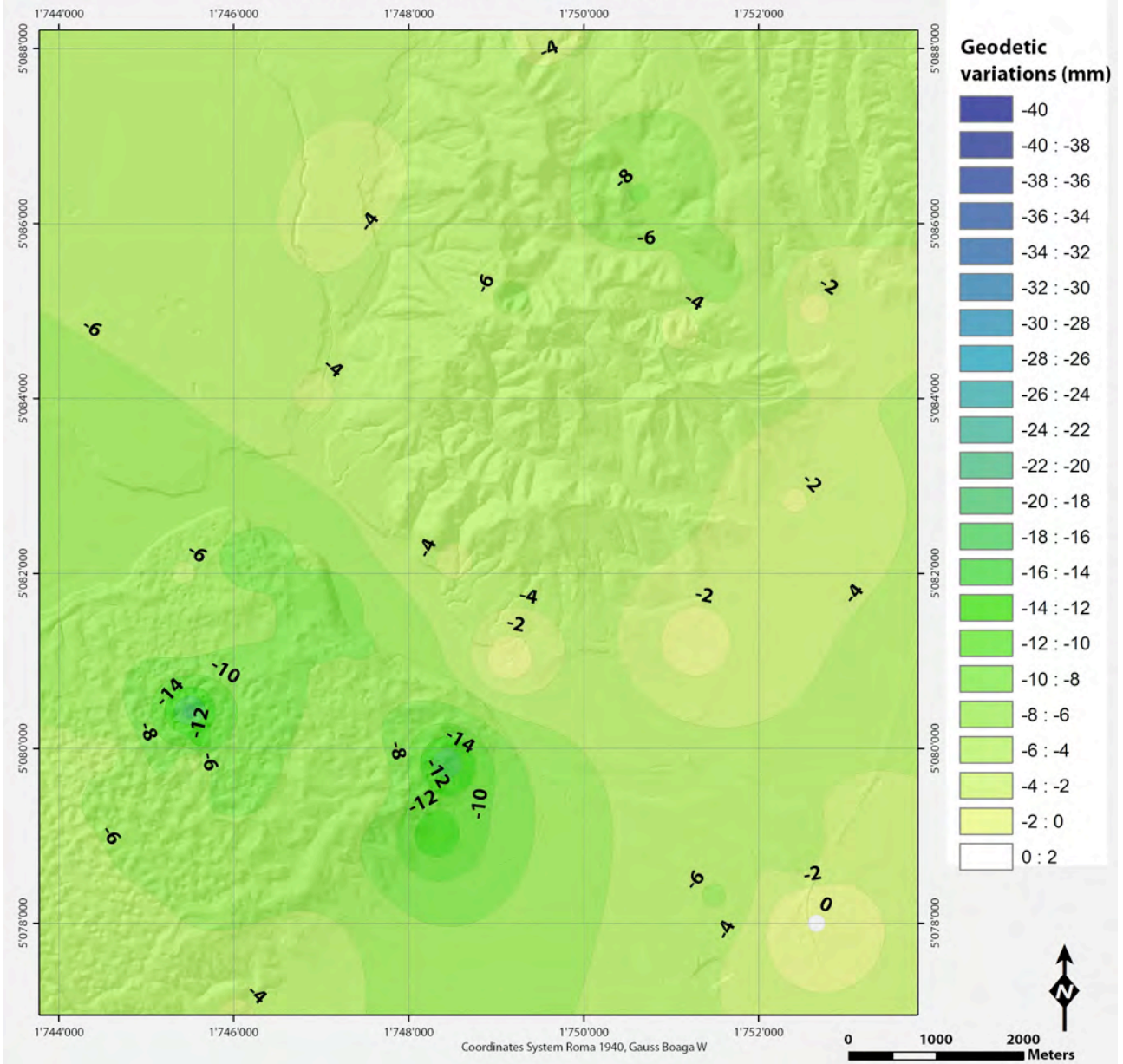
1746035,4 06	5076944,9 01	-0,00205	-0,00166	0,00095	-0,00621	0,00054	0,0008
1746050,5 19	5082123,6 18	-0,006	-0,00306	-0,00503	-0,00537	0,00326	-0,00242
1746383,0 04	5082239,4 84	-0,00667	-0,00198	-0,0022	-0,00439	0,00405	-0,00344
1746846,4 69	5077619,9 48	-0,00197	-0,00249	-0,0002	-0,00443	0,00181	0,0001
1746910,7 36	5084045,8 77	-0,00029	-0,00323	-0,00422	-0,00423	0,00135	-0,00014
1747017,7 50	5079690,4 27	-0,00596	-0,00087	-0,00156	-0,00621	0,00524	-0,00435
1747076,5 30	5085901,0 96	-0,00181	-0,00106	-0,00246	-0,00435	7,00E-05	0,00064
1747088,2 77	5081629,9 27	-0,00724	-0,00266	0,00072	-0,00604	-0,00078	-0,00629
1747491,2 90	5081176,5 37	-0,00699	-0,00111	-0,00132	-0,00431	0,00339	-0,0046
1747112,2 38	5084893,2 47	-0,00064	-0,0034	-0,0025	-0,00455	0,00029	0,0005
1747400,4 29	5083514,8 84	-0,00011	-0,00394	-0,00422	-0,00441	0,00054	0,00028
1747427,3 80	5086528,2 34	-0,00156	-0,00109	-0,00128	-0,00498	-0,00032	0,00042
1747440,9 14	5079624,9 37	-0,00491	-0,00108	-0,00076	-0,00546	0,00453	-0,00065
1748003,8 56	5082498,9 13	0,00056	-0,0046	-0,00579	-0,00589	0,00179	0
1748036,7 58	5085020,9 92	-0,0019	-0,00302	-0,00281	-0,00466	0,00072	1,00E-05
1748165,9 89	5088209,6 20	-0,00582	0,00134	-0,00075	-0,00701	0,00119	-0,00181
1748302,3 54	5079015,3 80	-0,00754	-0,00589	0,00505	-0,00766	-0,0015	0,00994
1748428,2 95	5079826,4 44	-0,00968	-0,00555	-0,01282	-0,00943	-0,00202	0,00152
1748502,2 66	5082132,6 11	-3,00E-05	-0,00348	-0,007	-0,00716	-0,00524	0,00647
1748691,2 98	5085141,0 91	-0,00441	-0,00011	-0,00451	-0,00467	0,00203	-0,00045

1748931,4 96	5084840,8 43	-0,00579	0,00025	-0,00328	-0,0041	0,00204	-0,00141
1749117,6 49	5085135,0 86	-0,00592	-0,00065	-0,0032	-0,00629	0,00194	-0,00144
1749132,7 86	5081027,7 00	0,00203	-0,00247	-0,00334	-0,00385	0,00022	0,00042
1749664,1 00	5088089,5 21	-0,00369	0,0009	-0,00074	-0,00679	0,0009	0,00335
1749958,3 42	5087681,1 85	-0,00521	-0,00021	1,00E-05	-0,006	0,00016	-0,00077
1750480,7 73	5084780,7 94	-0,00468	-0,00039	-0,00438	-0,00474	0,00222	-0,00148
1750582,8 57	5086648,3 33	-0,00498	-0,00201	-0,00337	-0,00926	-0,00206	-0,00165
1750633,0 48	5086352,9 71	-0,00471	-0,00357	-0,00526	-0,01166	-0,0033	-0,00248
1751093,2 78	5084828,8 33	-0,0034	0,00014	-0,00255	-0,00363	-0,00023	-0,0018
1751258,5 39	5081219,8 58	0,00091	-0,0015	-0,00242	-0,00329	-0,00099	0,0006
1751492,7 32	5085369,2 79	-0,00431	-0,00315	-0,00325	-0,00939	-0,00244	-0,00119
1751505,4 03	5078313,9 70	-0,00253	-0,00365	-0,01188	-0,00364	-0,00073	-0,00291
1752093,2 27	5084960,9 42	-0,00292	-0,0021	-0,00302	-0,00765	-0,00313	-0,00156
1752408,6 76	5082836,2 55	-0,00093	-0,00093	-0,00276	-0,00286	-0,00191	0,00071
1752432,7 76	5078770,1 78	-0,00137	-0,00344	-0,00248	-0,00574	0,00111	-0,00306
1752533,0 00	5078022,9 00	0	0	0	0	0	0
1752613,0 00	5085020,0 00	-0,0014	4,00E-05	-0,00205	-0,00491	-0,00238	-0,0002
1753806,0 00	5085146,0 00	-0,00267	-0,00095	-0,00292	-0,00522	-0,00169	0,00256

### Geodetic Variation for 1985 - 1987 time interval

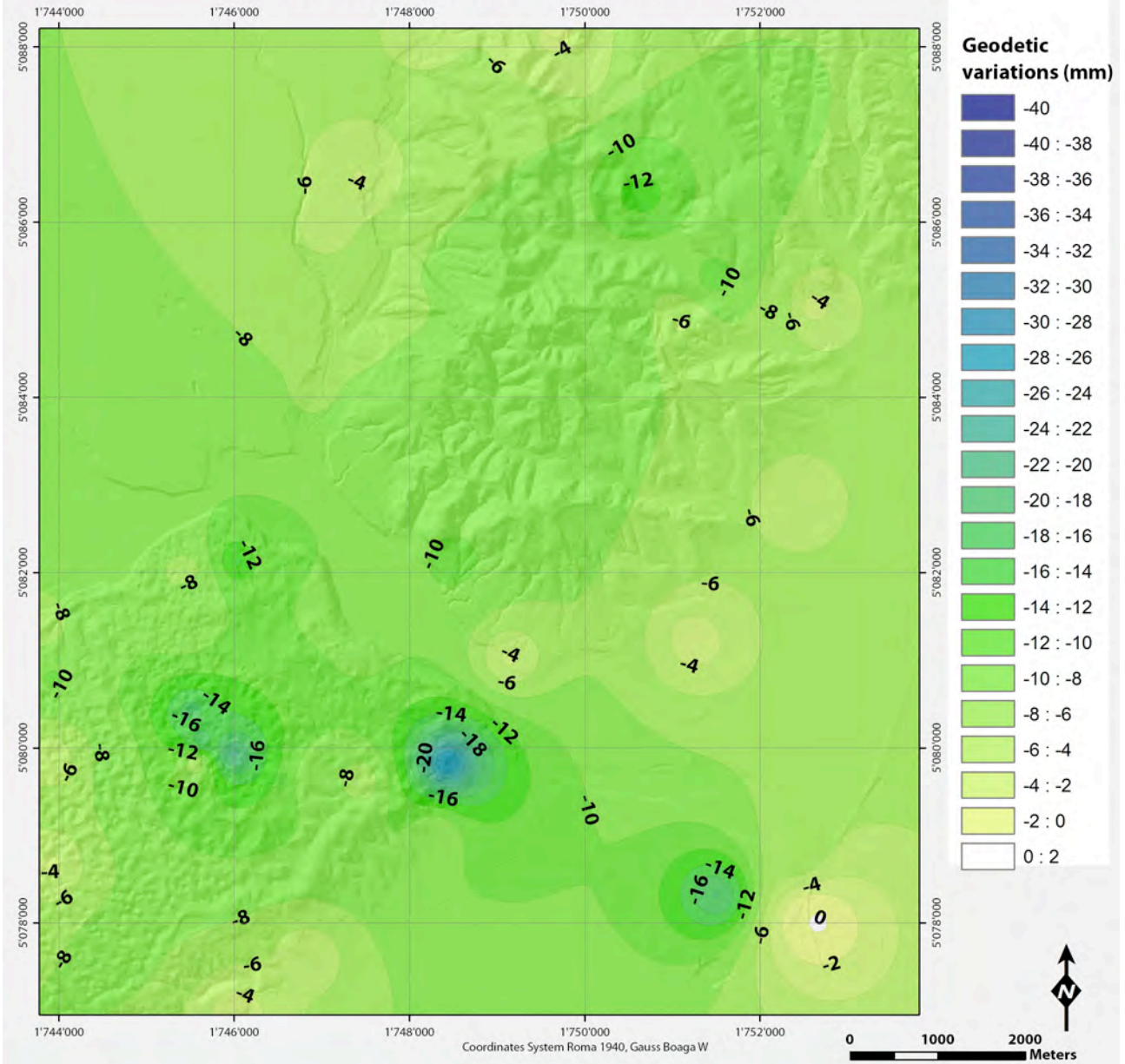


### Geodetic Variation for 1985 - 1990 time interval

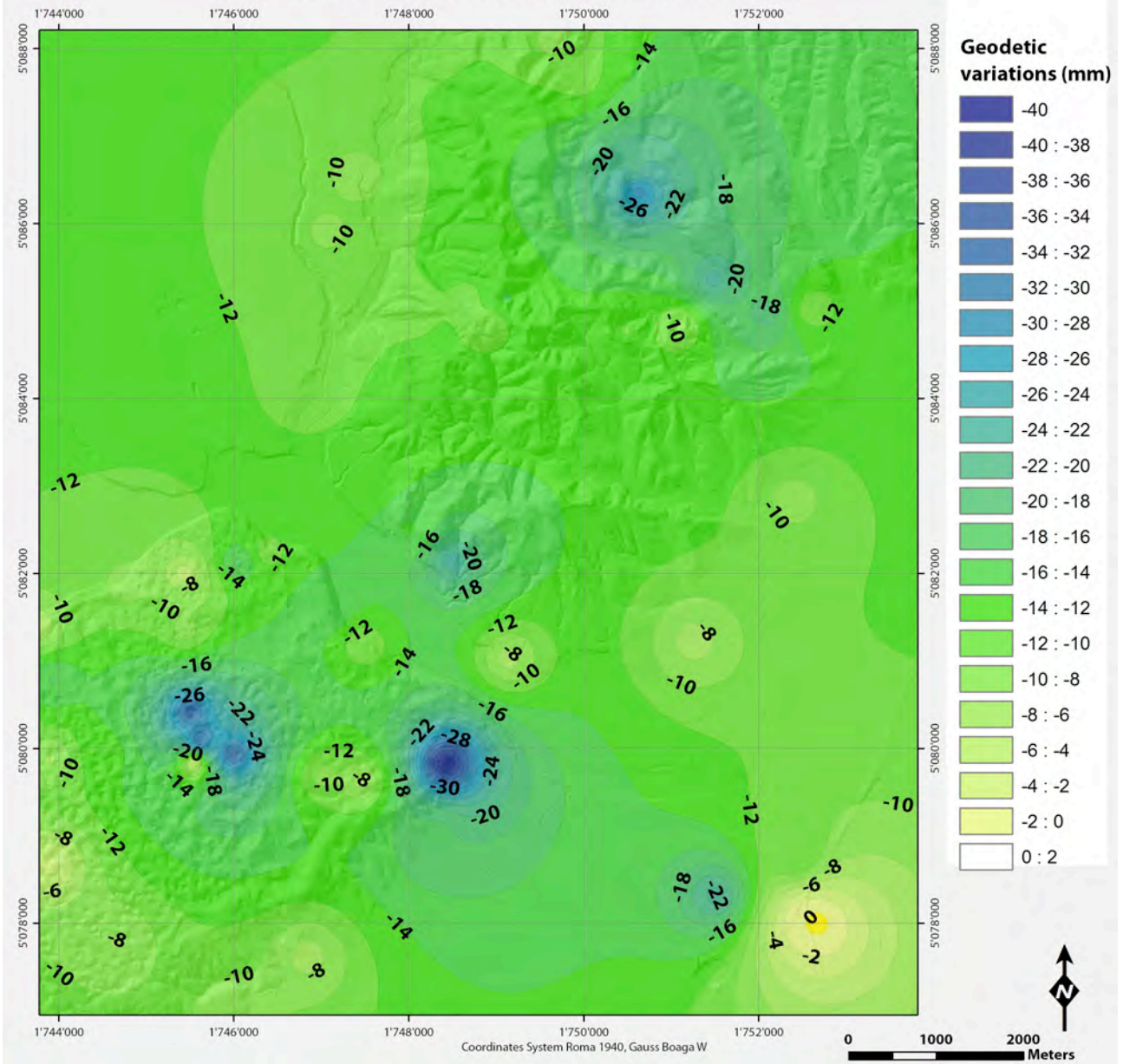




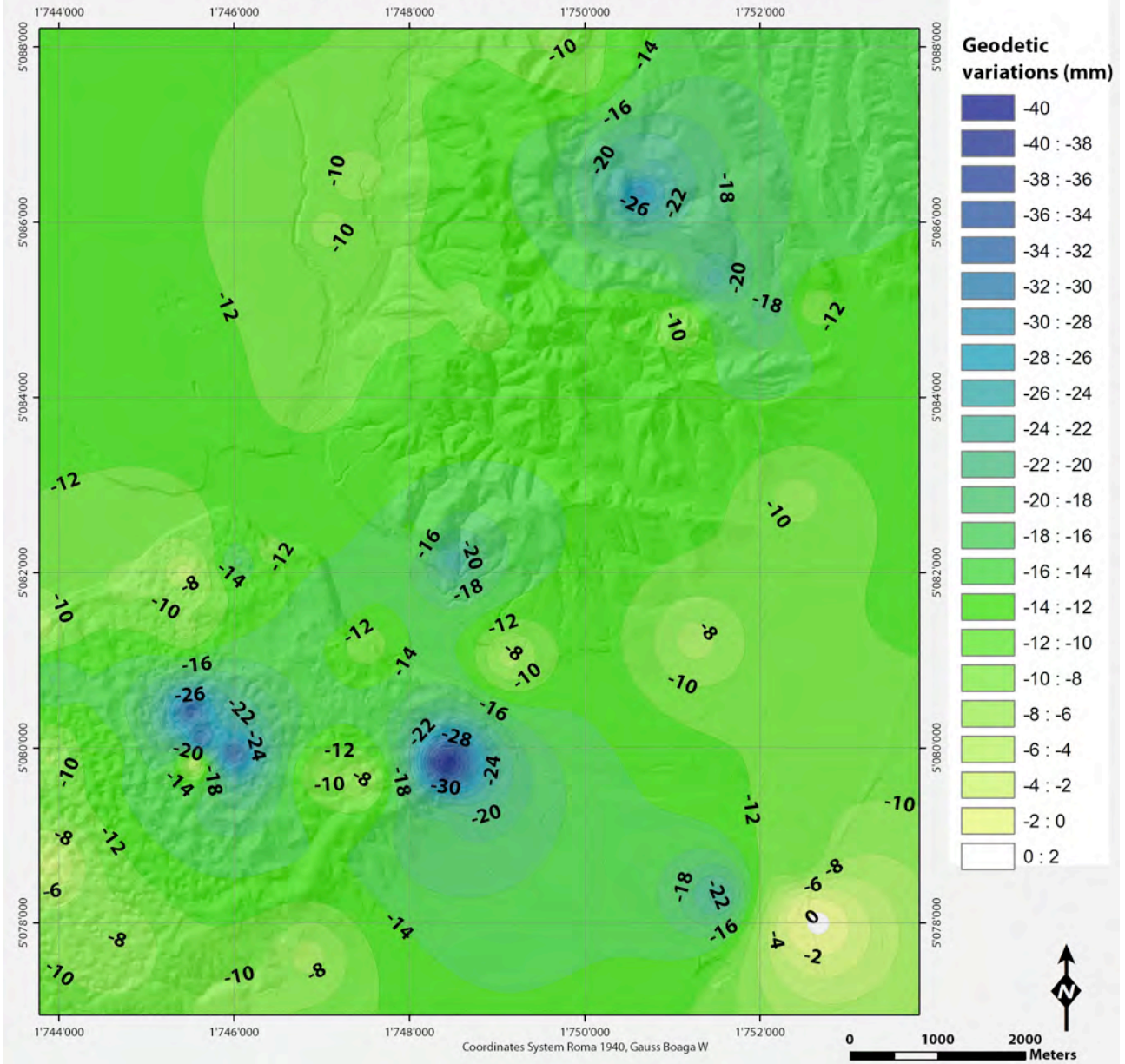
### Geodetic Variation for 1985 - 1995 time interval



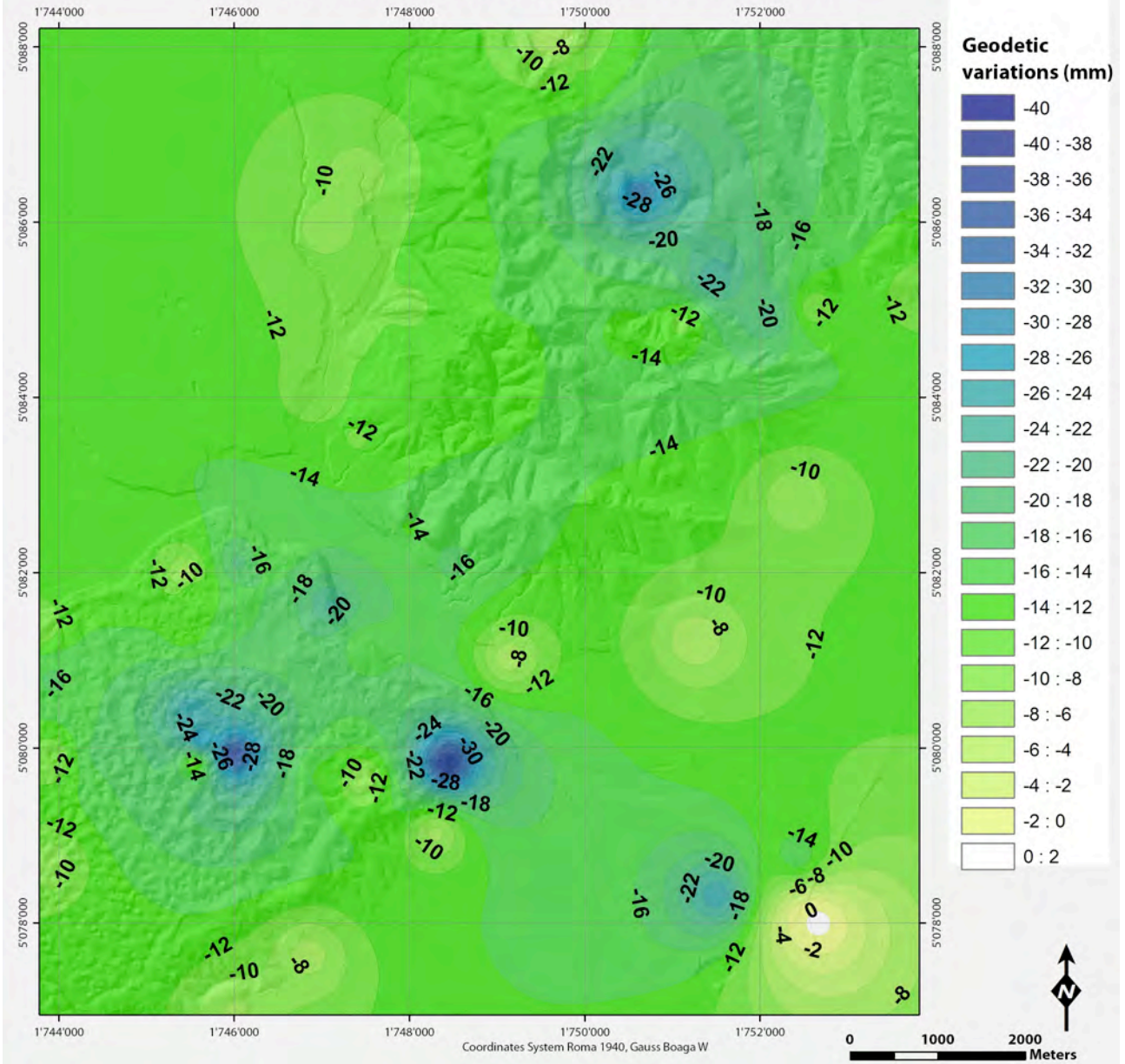
### Geodetic Variation for 1985 - May 2006 time interval



### Geodetic Variation for 1985 - November 2006 time interval



### Geodetic Variation for 1985 - November 2010 time interval



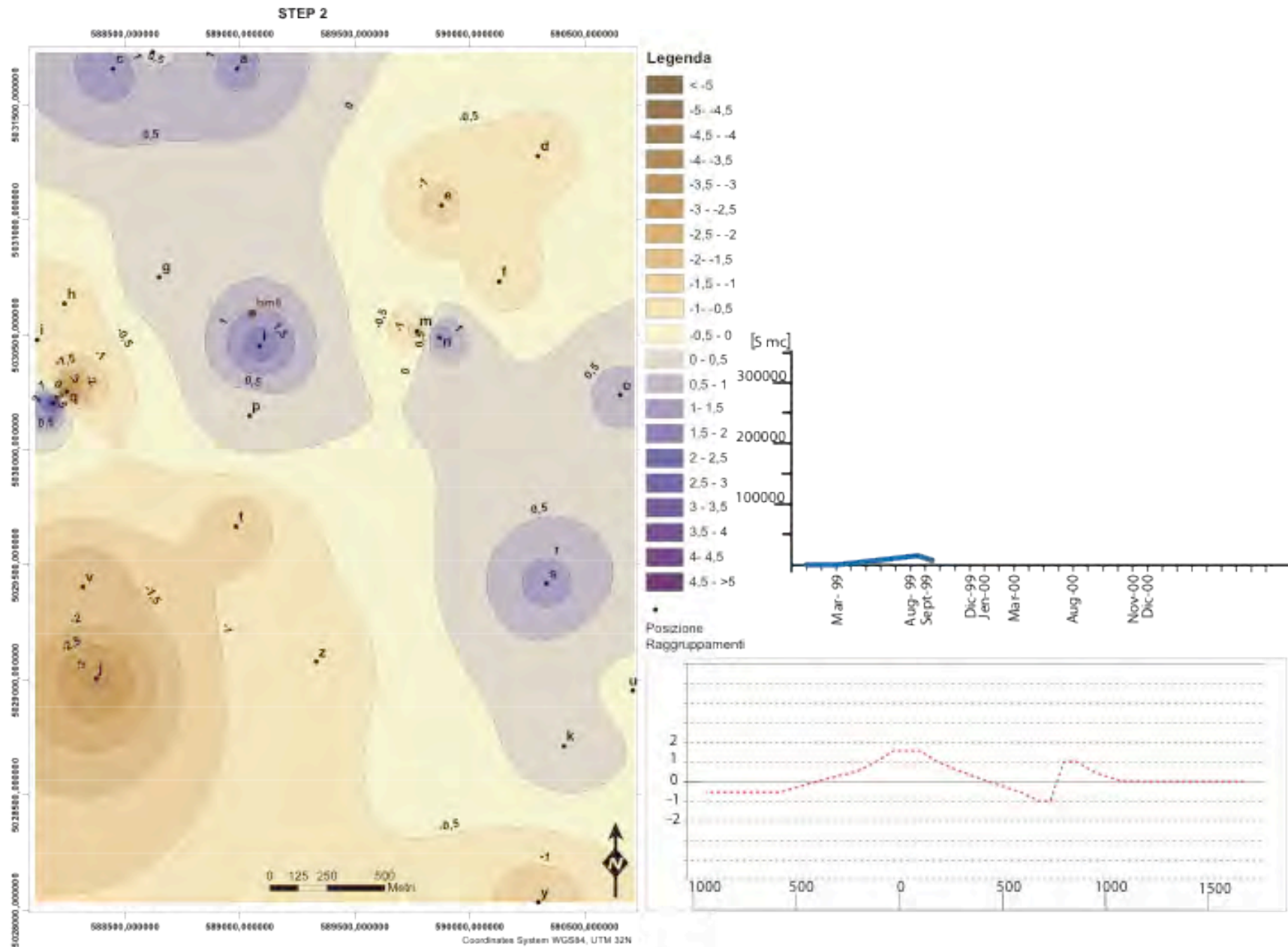
## **APPENDICE C**

### **DEFORMAZIONI GEODETICHE PER BAGNOLO MELLA**

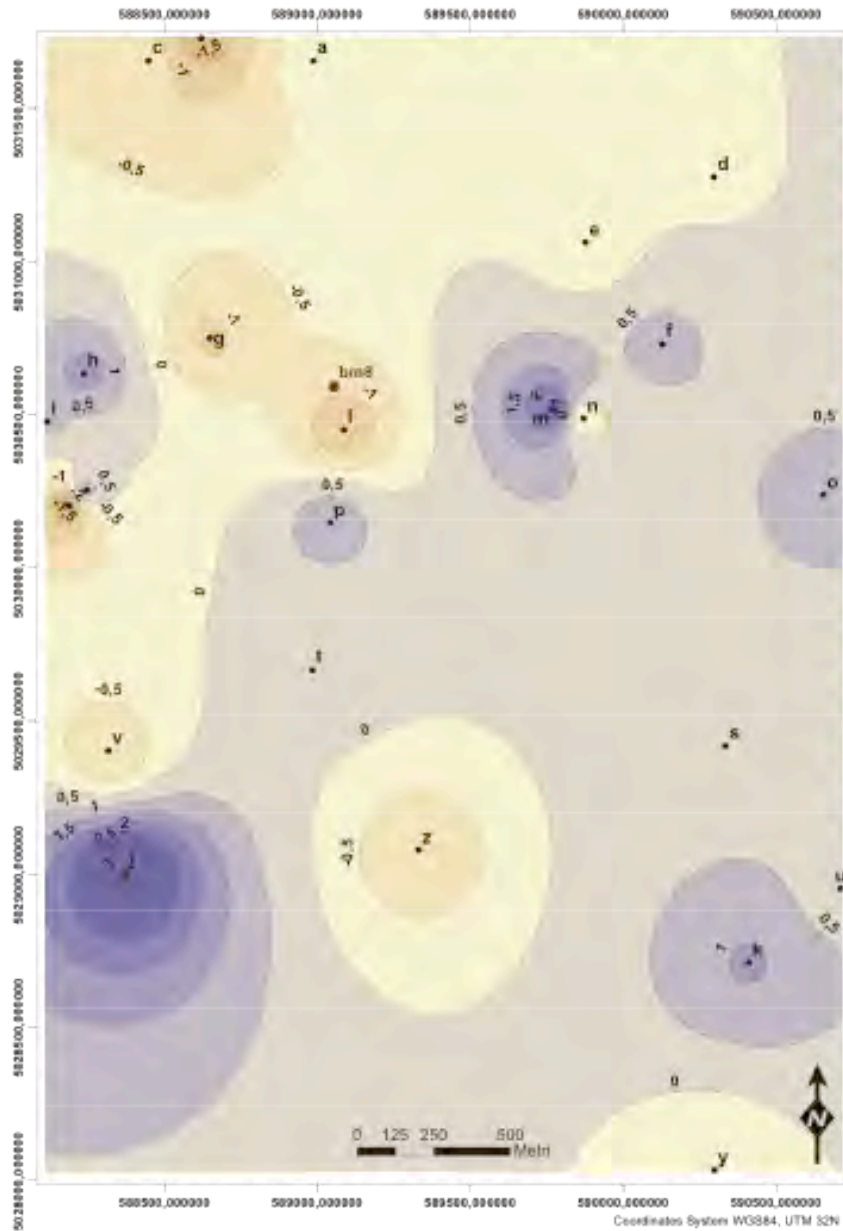
In questa appendice sono riportate le mappe di subsidenza elaborate sulla base delle tabelle 5.1 e 5.2 .

Oltre alle mappe, sono stati elaborati dei profili delle variazioni geodetiche attraverso un profilo posto in direzione W-E passante per il pozzo BM8, riportato nelle figure.

In aggiunta sono inseriti ulteriori grafici che riportano l'evoluzione temporale relativa alla produzione di Gas nel periodo di riapertura mineraria del 1999.



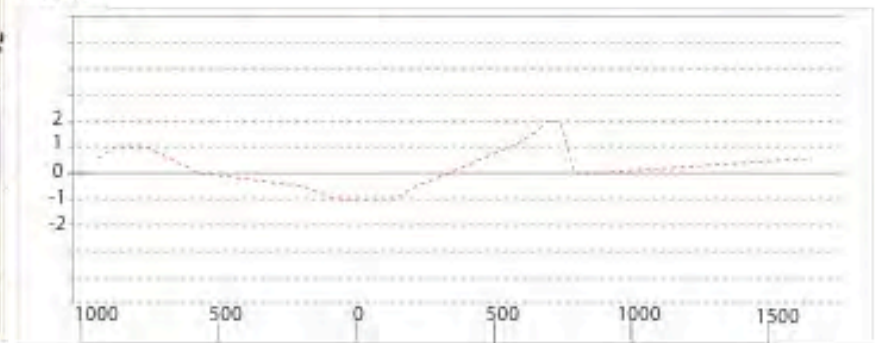
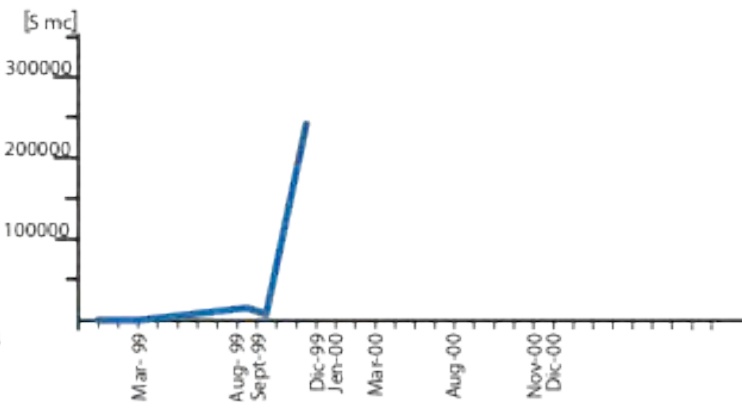
STEP 3



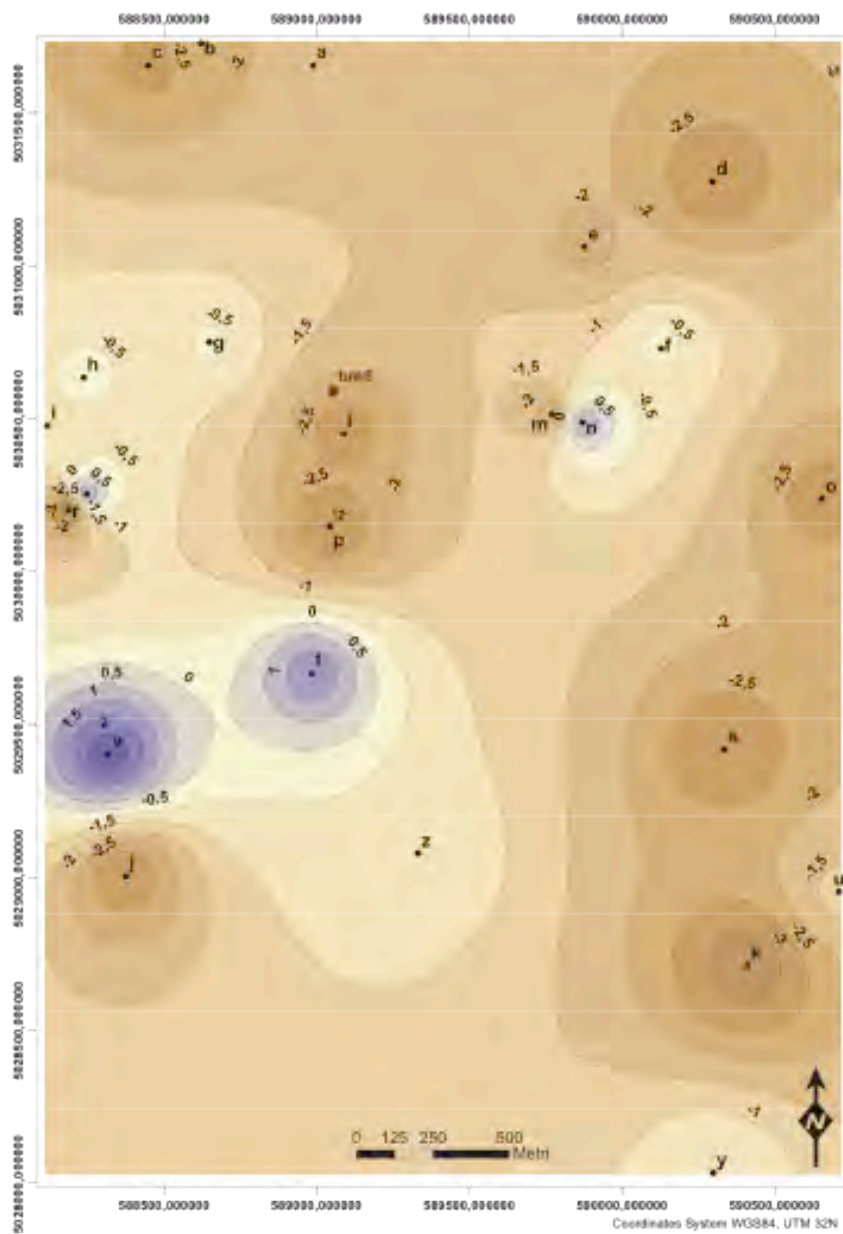
Legenda



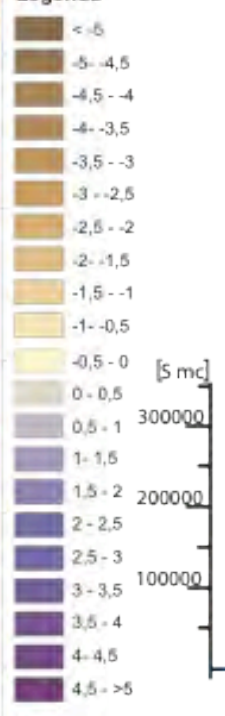
Posizione  
Raggruppamenti



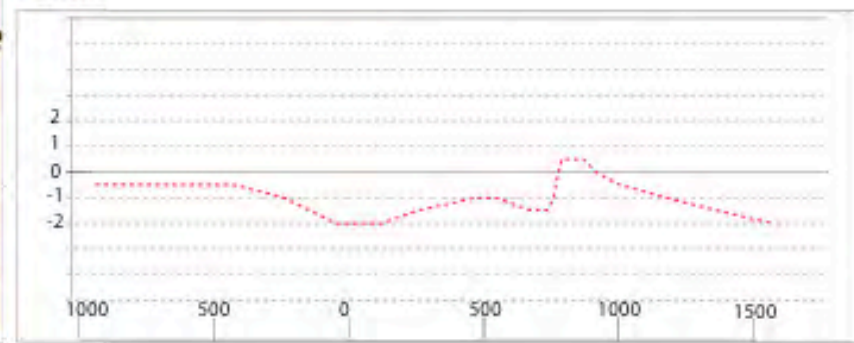
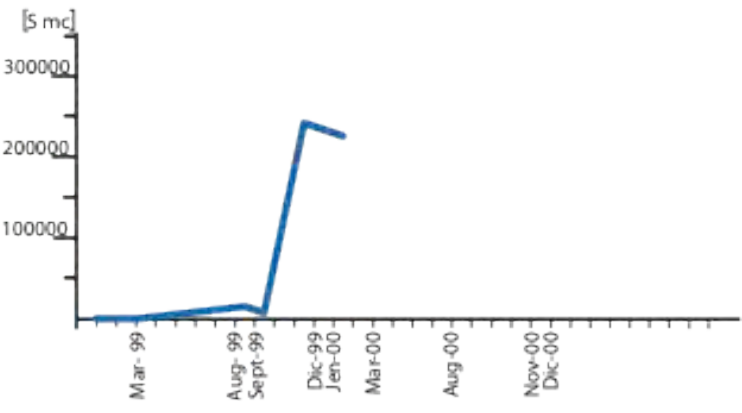
STEP 4



Legenda

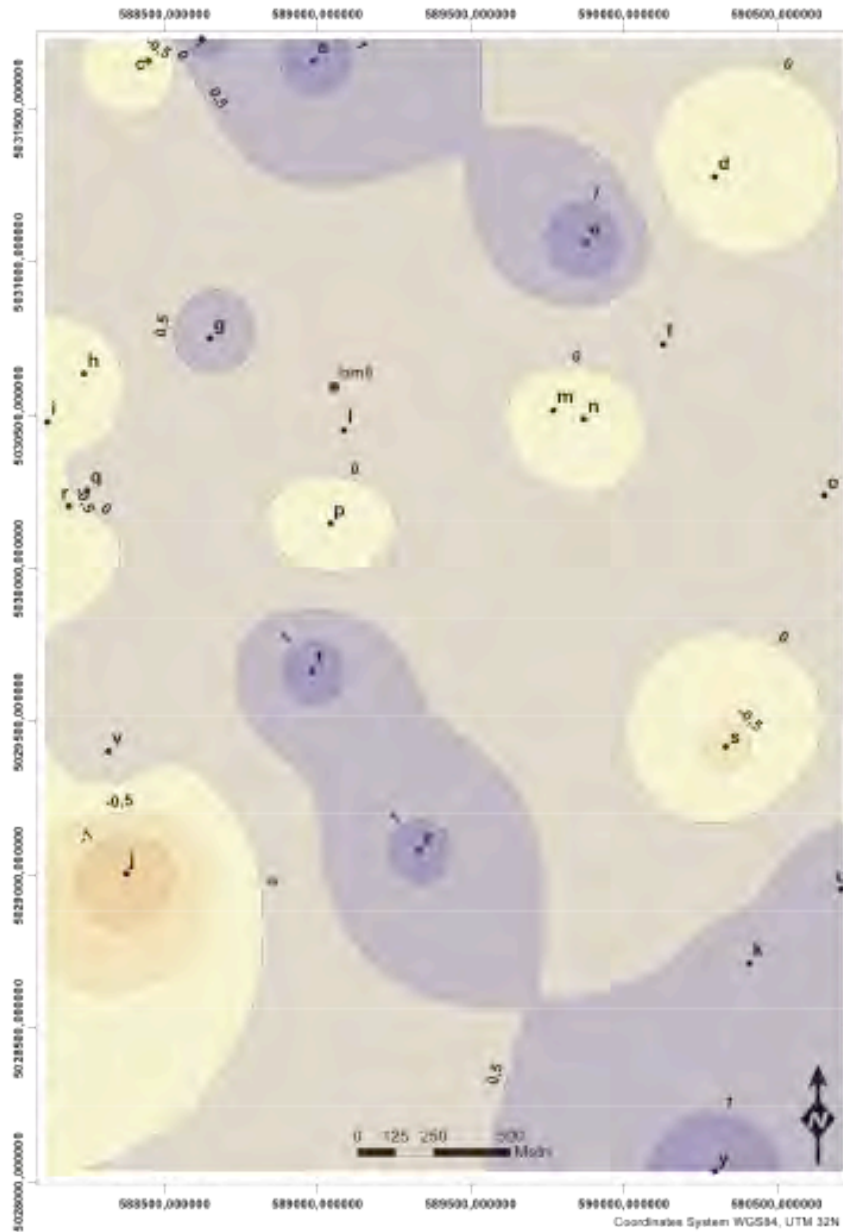


Posizione  
Raggruppamenti

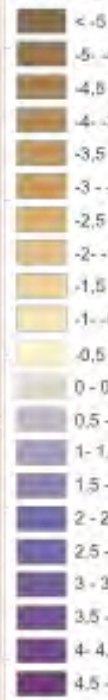




STEP 5

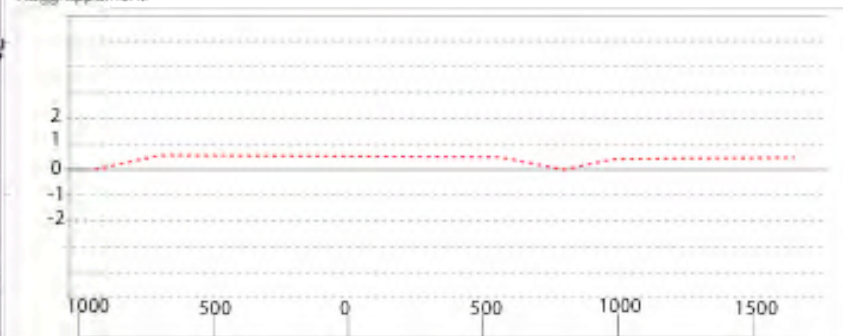
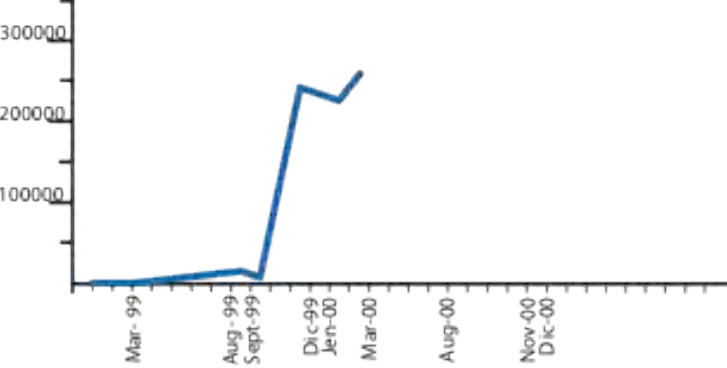


Legenda

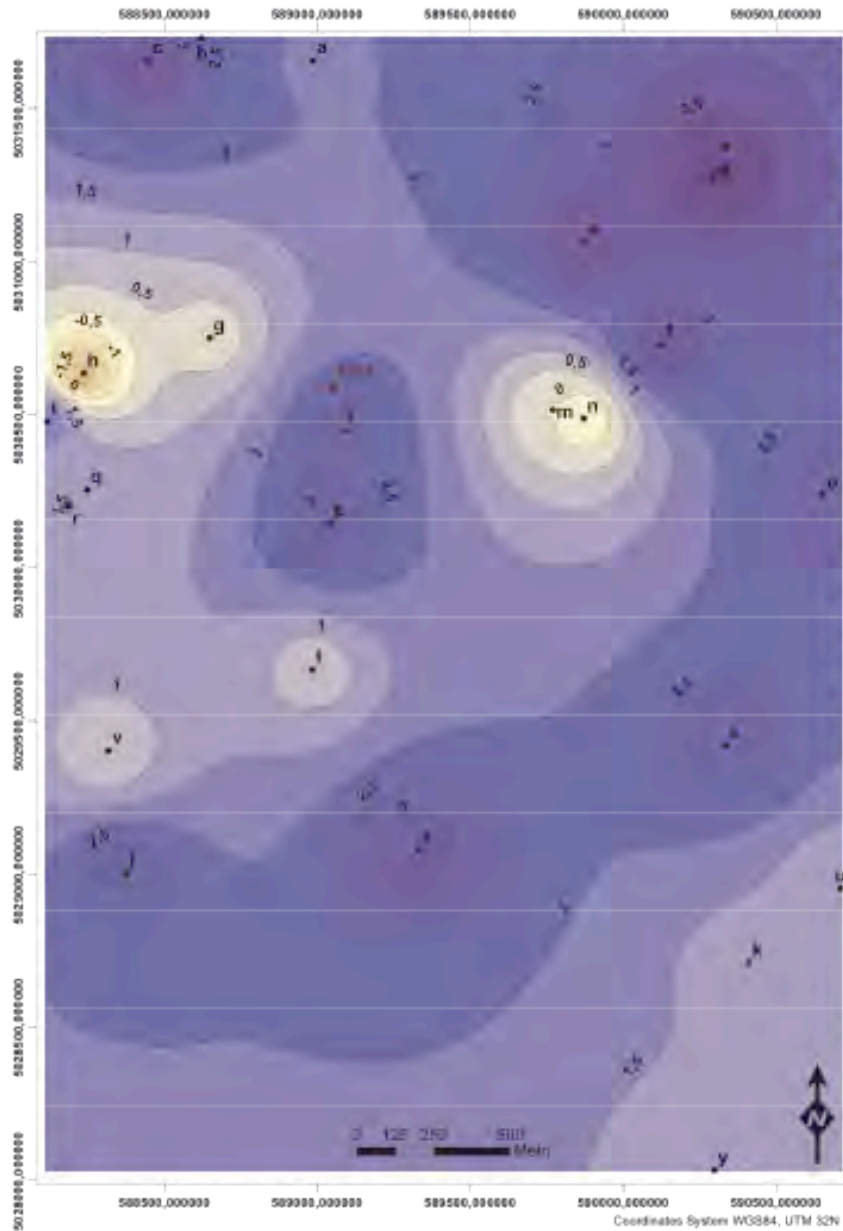


Posizione  
Raggruppamenti

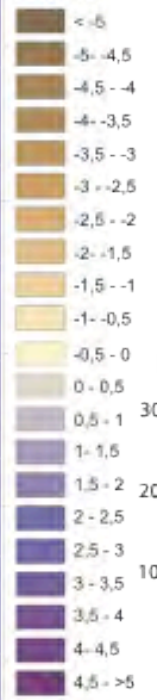
[S mc]



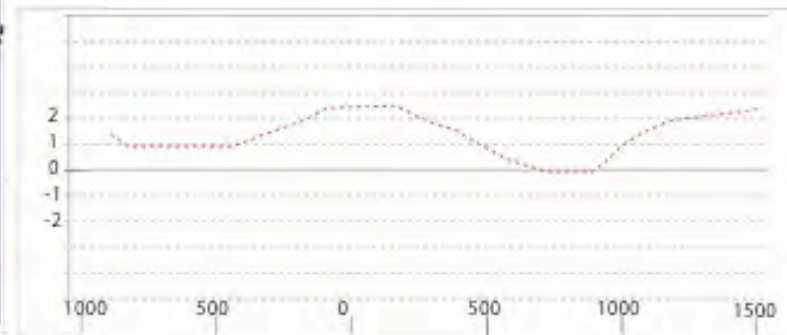
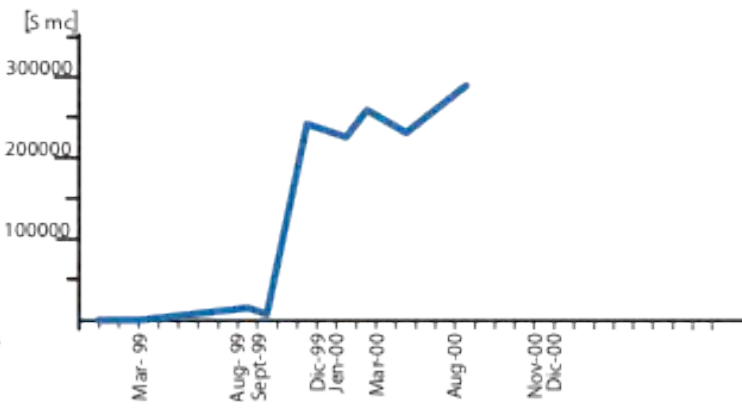
STEP 6



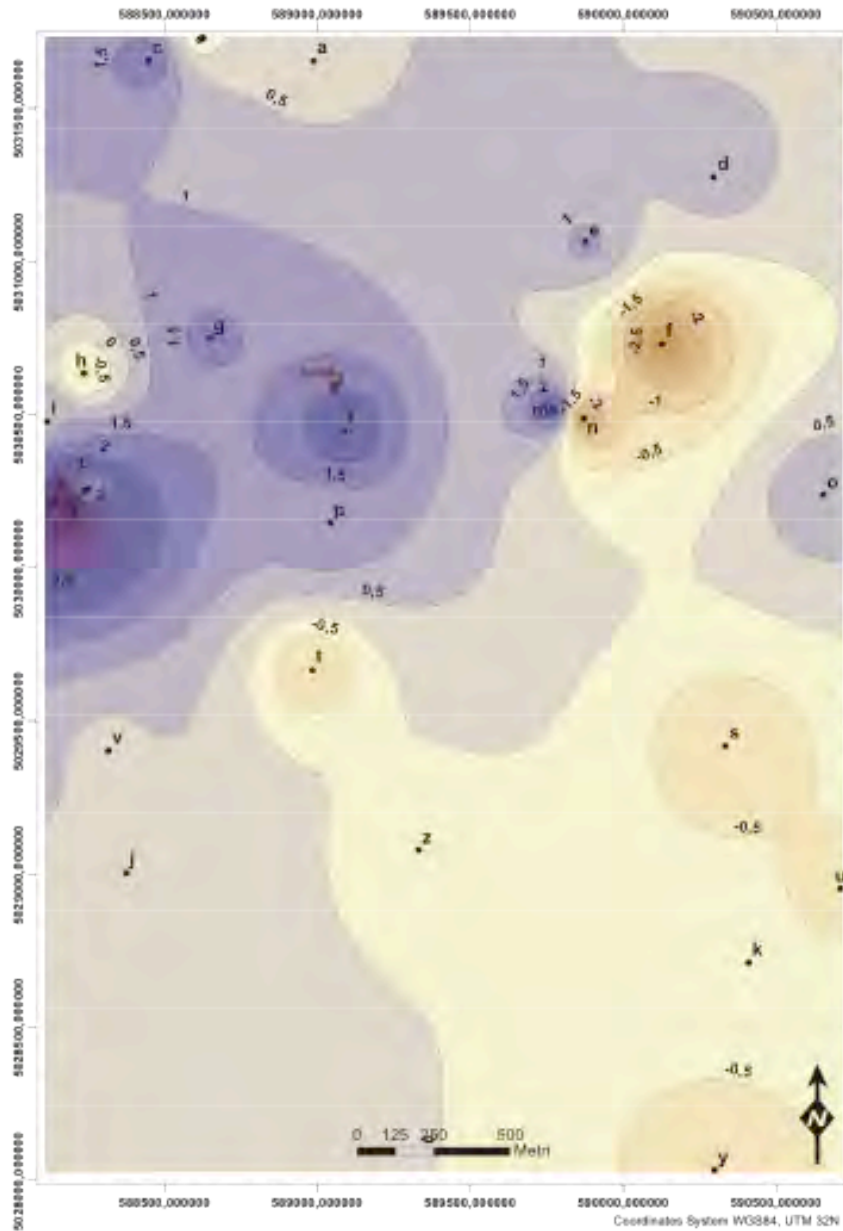
Legenda



Posizione  
Raggruppamenti



STEP 7

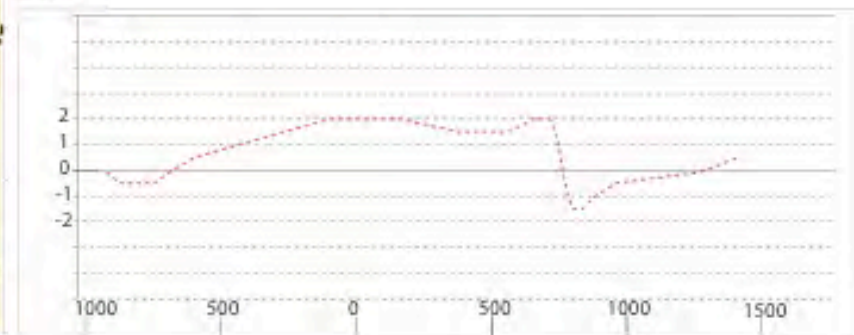
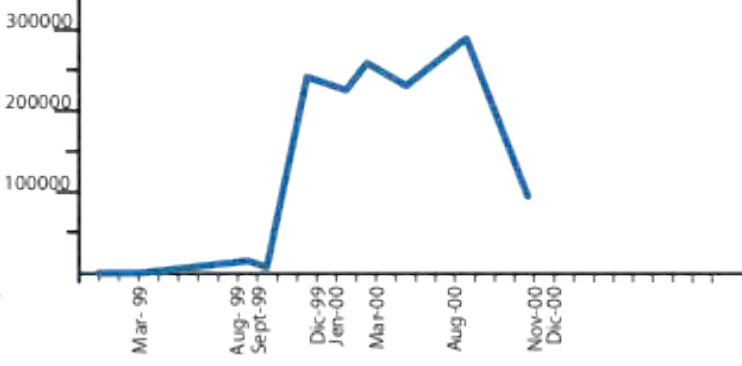


Legenda

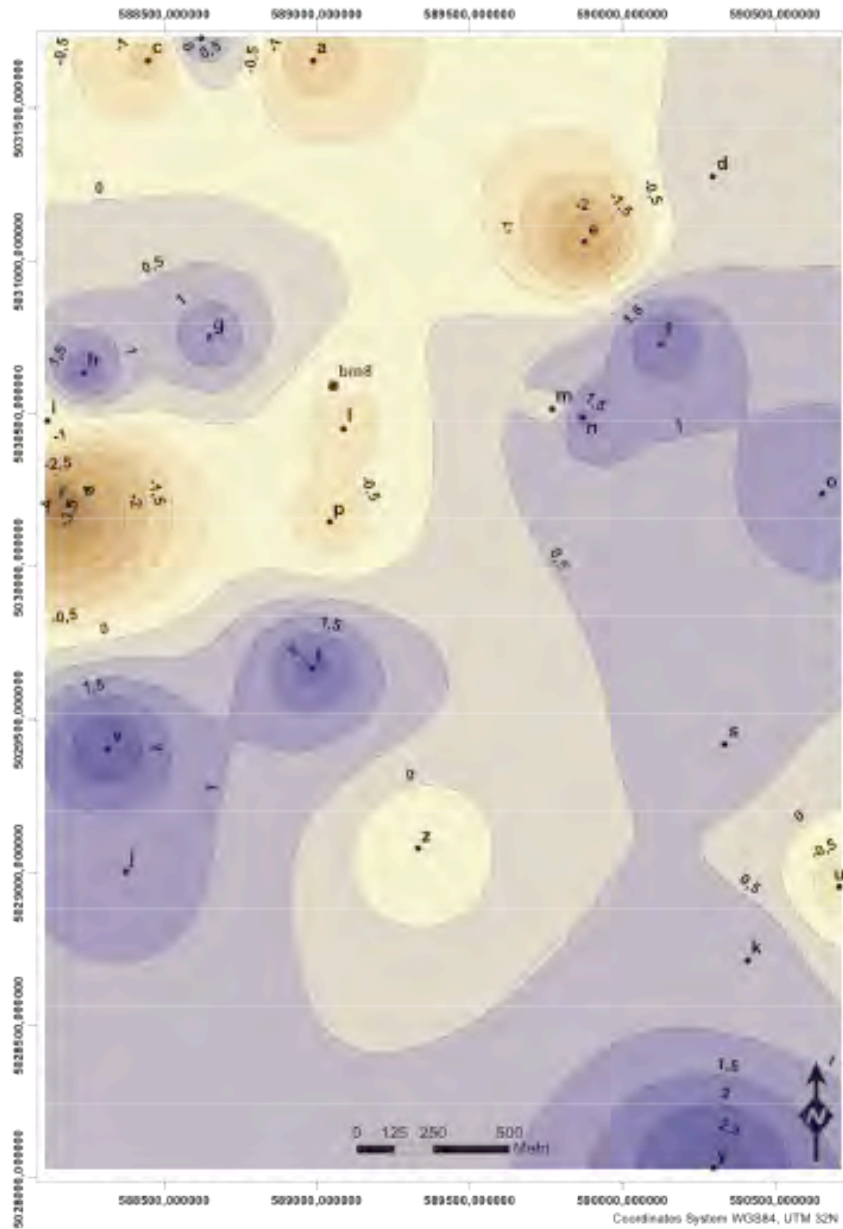


Posizione Raggruppamenti

[S mc]



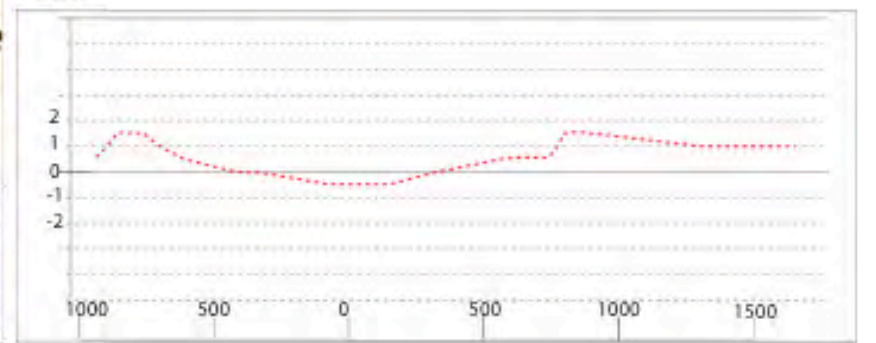
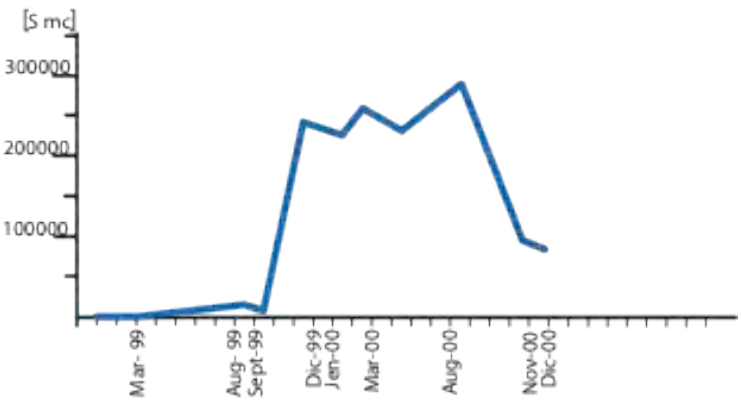
STEP 8



Legenda



Posizione  
Raggruppamenti



## **BIBLIOGRAFIA**

Altmann, J. B. (2010). Poroelastic effects in reservoir modeling. Phd Dissertation, Karlsruhe Institut für Technologie, 133 pp.

Carminati E. and Di Donato G. (1999). Separating natural and anthropogenic vertical movements in fast subsiding areas: the Po Plain (N. Italy) case. *Geophys. Res. Lett.*, 26, 2291–2294.

Dyson, F.D., 1981. The potentials of ellipsoids of variable densities. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 25, 259–288.

Eidelman, A., and Reches, Z. (1992). Fractured pebbles. A new stress indicator. *Geology*, 20, 301-304.

Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A* 241, 376–396.

Eshelby, J. D. (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 252, 561–569.

Eshelby, J. D. (1961). Elastic inclusion and inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics* 2, 89–140.

Ferrers, N.M., 1877. On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings of variable densities. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 14, 1–22.

Geertsma, J. (1966). Problems of rock mechanics in petroleum engineering. In *Proceedings, First Congress International Society of Rock Mechanics, Lisbon*, pp. 585–594. National Laboratory of Civil Engineering.

Geertsma, J. (1973a). A basic theory of subsidence due to reservoir compaction: the homogeneous case. *Verhandelingen Kon. Ned. Geol. Mijnbouwk* 28, 43–62.

Geertsma, J. (1973b). Land subsidence above compacting oil and gas reservoirs. *Journal of Petroleum Technology* 25, 734–744.

Goult, N. R. (2003). Reservoir stress path during depletion of Norwegian chalk oilfields. *Petroleum Geoscience* 9, 233-241, doi: 10.1144/ 1354-079302-545

Hawkes C.D., Barchu S., Haung K., Thompson A.W., (2005). Analysis of in-situ stress regime in the Alberta Basin, Canada, for performance assessment of CO<sub>2</sub> geological sequestration sites. IN : 4th annual conference on carbon capture and sequestration DOE/NETL

Hawkes, C., McLellan, P.J. and Bachu, S. (2005). Geomechanical Factors Affecting Geological Storage of CO<sub>2</sub> in Depleted Oil and Gas Reservoirs, *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 44(10), 52-61.

Healy, D., 2009. Short note: Elastic field in 3d due to a spheroidal inclusion- MATLAB code for Eshelby's solution. *Computers & Geosciences* 35, 2170–2173.

Jiang, D., 2007. Numerical modeling of the motion of deformable ellipsoidal objects in slow viscous flows. *Journal of Structural Geology* 29, 435–452.

Jiang C., Feng X., Zhan Y., Zhang Y., (2007) New methodology to explore gas bearing volcanic reservoir in Xujiaweizi Fault Depression of the northern Songliao Basin. *Petroleum Geology & Oilfield Development in Daqing*;2007-04

Katsman, R. (2010). Extensional veins induced by self-similar dissolution at stylolites: analytical modeling. *Earth and Planet. Sci. Lett.*, 299, 33–41.

Khan, M. and Teufel, L. (2000). The effect of geological and geomechanical parameters on reservoir stress path and its importance in studying permeability anisotropy. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*

King, G. C. P., Stein, R. S. and Lin, J. (1994). Static stress changes and the triggering of earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84, 935-953.

Livio F., Berlusconi A., Michetti A. M., Sileo G., Zerboni A., Trombino L., Cremaschi M., Mueller K., Vittori E., Carcano C. and Rogledi S. (2009). Active fault-related folding in the epicentral area of the December 25, 1222 (Io=IX MCS) Brescia earthquake (Northern Italy): Seismotectonic implications. *Tectonophysics*, 476, 320–335.

Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4th ed.). Cambridge University Press.

Meng, C., Heltsey, W. and Pollard, D. D. (2011). Evaluation of the Eshelby solution for the ellipsoidal inclusion and heterogeneity. *Computers & Geosciences*, doi:10.1016/j.cageo.2011.07.008

Mindlin, R. D. and Cheng, D. H. (1950). Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid. *J. Appl. Phys.* 21, 926, DOI:10.1063/1.1699785

Mura, T. (1987). *Micromechanics of Defects in Solids* (second, revised ed.). Kluwer Academic Publishers.

Nabarro, F. R. N. (1940). The strains produced by precipitation in alloys. *Proceedings of the Royal Society* 175, 519–538.

Okada, Y. (1992). Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America* 82, 1018–1040.

Pierdominici, S., Mariucci, M. T., Montone, P. and Cesaro, M. (2005). Comparison between active stress field and tectonic structures in Northern Italy, Lombardy Region. *Annals of Geophysics*, 48, 6, 867-881.

Reches, Z., 1998. Tensile fracturing of stiff rock layers under triaxial compressive stress states. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 35 (4–5).

Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1976). Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics and Space Physics* 14, 227–241.

Routh, E.J., 1895. Theorems on the attraction of ellipsoids for certain laws of force other than the inverse square. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 186, 897–950.

Rudnicki, J. W. (1977). The inception of faulting in a rock mass with a weakened zone. *Journal of Geophysical Research* 82, 844–854.

Rudnicki, J. W. (2002). Alteration of regional stress by reservoirs and other inhomogeneities: Stabilizing or destabilizing? In Volume 3 of the Proceedings of the Ninth International Congress on Rock Mechanics. Paris, France, August 25-28, 1999.

Segall, P. (1985). Stress and Subsidence resulting from subsurface fluid withdrawal in the epicentral region of the 1983 Coalinga earthquake. *Journal of Geophysical Research* 90, B8, 6801-6816, doi:10.1029/JB090iB08p06801

Segall, P. (1989). Earthquakes triggered by fluid extraction. *Geology* 17, 942–946.

Segall, P. (1992). Induced stresses due to fluid extraction from axisymmetric reservoirs. *Pure and Applied Geophysics* 139, 535–560.

Segall, P., Grasso, J. R. and Mossop, A. (1994). Poroelastic stressing and induced seismicity near the Lacq gas field, southwestern France. *Journal of Geophysical Research* 99, 15,423– 15,438.

Segall, P. and Fitzgerald, S. (1998). A note on induced stress changes in hydrocarbon and geothermal reservoirs. *Tectonophysics* 289, 117-128.



Seo, K. and Mura, T. (1979). The elastic field in a half space due to ellipsoidal inclusions with uniform dilatational eigenstrains. *Journal of Applied Mechanics* 46, 568–572.

Sharma, P. and Ganti, S. (2004). Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies. *Journal of Applied Mechanics* 71, 663-671.

Sokolnikoff, S. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity* (second ed.). McGraw-Hill Book Company, Inc.

Teatini, P., Castelletto, N., Ferronato, M., Gambolati, G., Janna, C., Cairo, E., Marzorati, D., Colombo, D., Ferretti, A., Bagliani, A., Bottazzi F. (2011). Geomechanical response to seasonal gas storage in depleted reservoirs: A case study in the Po River basin, Italy. *Journal of Geophysical Res.*, 116, F02002, doi:10.1029/2010JF001793.

Zoback, M. and Zinke, J. (2002). Production-induced normal faulting in the Valhall and Ekofisk oil fields. *Pure and Applied Geophysics as storage in depleted reservoirs: a case study in the Po River basin, Italy.* *Journal of Geophysical Res.*, 116, F02002, doi:10.1029/2010JF001793.

Walsh, J. B. (2002). Subsidence above a planar reservoir. *Journal of Geophysical Research* 107, B9, 2202, doi:10.1029/2001JB000606

## **BIBLIOGRAFIA**

Altmann, J. B. (2010). Poroelastic effects in reservoir modeling. Phd Dissertation, Karlsruhe Institut für Technologie, 133 pp.

Carminati E. and Di Donato G. (1999). Separating natural and anthropogenic vertical movements in fast subsiding areas: the Po Plain (N. Italy) case. *Geophys. Res. Lett.*, 26, 2291–2294.

Dyson, F.D., 1981. The potentials of ellipsoids of variable densities. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 25, 259–288.

Eidelman, A., and Reches, Z. (1992). Fractured pebbles. A new stress indicator. *Geology*, 20, 301-304.

Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London A* 241, 376–396.

Eshelby, J. D. (1959). The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 252, 561–569.

Eshelby, J. D. (1961). Elastic inclusion and inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics* 2, 89–140.

Ferrers, N.M., 1877. On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings of variable densities. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 14, 1–22.

Geertsma, J. (1966). Problems of rock mechanics in petroleum engineering. In *Proceedings, First Congress International Society of Rock Mechanics, Lisbon*, pp. 585–594. National Laboratory of Civil Engineering.

Geertsma, J. (1973a). A basic theory of subsidence due to reservoir compaction: the homogeneous case. *Verhandelingen Kon. Ned. Geol. Mijnbouwk* 28, 43–62.

Geertsma, J. (1973b). Land subsidence above compacting oil and gas reservoirs. *Journal of Petroleum Technology* 25, 734–744.

Goult, N. R. (2003). Reservoir stress path during depletion of Norwegian chalk oilfields. *Petroleum Geoscience* 9, 233-241, doi: 10.1144/ 1354-079302-545

Hawkes C.D., Barchu S., Haung K., Thompson A.W., (2005). Analysis of in-situ stress regime in the Alberta Basin, Canada, for performance assessment of CO<sub>2</sub> geological sequestration sites. IN : 4th annual conference on carbon capture and seuestration DOE/NETL

Hawkes, C., McLellan, P.J. and Bachu, S. (2005). Geomechanical Factors Affecting Geological Storage of CO<sub>2</sub> in Depleted Oil and Gas Reservoirs, *Journal of Canadian Petroleum Technology*, 44(10), 52-61.

Healy, D., 2009. Short note: Elastic field in 3d due to a spheroidal inclusion- MATLAB code for Eshelby's solution. *Computers & Geosciences* 35, 2170–2173.

Jiang, D., 2007. Numerical modeling of the motion of deformable ellipsoidal objects in slow viscous flows. *Journal of Structural Geology* 29, 435–452.

Jiang C., Feng X., Zhan Y., Zhang Y., (2007) New methodology to explore gas bearing volcanic reservoir in Xujiaweizi Fault Depression of the northern Songliao Basin. *Petroleum Geology & Oilfield Development in Daqing*;2007-04

Katsman, R. (2010). Extensional veins induced by self-similar dissolution at stylolites: analytical modeling. *Earth and Planet. Sci. Lett.*, 299, 33–41.

Khan, M. and Teufel, L. (2000). The effect of geological and geomechanical parameters on reservoir stress path and its importance in studying permeability anisotropy. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*

King, G. C. P., Stein, R. S. and Lin, J. (1994). Static stress changes and the triggering of earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84, 935-953.

Livio F., Berlusconi A., Michetti A. M., Sileo G., Zerboni A., Trombino L., Cremaschi M., Mueller K., Vittori E., Carcano C. and Rogledi S. (2009). Active fault-related folding in the epicentral area of the December 25, 1222 (Io=IX MCS) Brescia earthquake (Northern Italy): Seismotectonic implications. *Tectonophysics*, 476, 320–335.

Love, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4th ed.). Cambridge University Press.

Meng, C., Heltsey, W. and Pollard, D. D. (2011). Evaluation of the Eshelby solution for the ellipsoidal inclusion and heterogeneity. *Computers & Geosciences*, doi:10.1016/j.cageo.2011.07.008

Mindlin, R. D. and Cheng, D. H. (1950). Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid. *J. Appl. Phys.* 21, 926, DOI:10.1063/1.1699785

Mura, T. (1987). *Micromechanics of Defects in Solids* (second, revised ed.). Kluwer Academic Publishers.

Nabarro, F. R. N. (1940). The strains produced by precipitation in alloys. *Proceedings of the Royal Society* 175, 519–538.

Okada, Y. (1992). Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America* 82, 1018–1040.

Pierdominici, S., Mariucci, M. T., Montone, P. and Cesaro, M. (2005). Comparison between active stress field and tectonic structures in Northern Italy, Lombardy Region. *Annals of Geophysics*, 48, 6, 867-881.

Reches, Z., 1998. Tensile fracturing of stiff rock layers under triaxial compressive stress states. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 35 (4–5).

Rice, J. R. and Cleary, M. P. (1976). Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics and Space Physics* 14, 227–241.

Routh, E.J., 1895. Theorems on the attraction of ellipsoids for certain laws of force other than the inverse square. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A* 186, 897–950.

Rudnicki, J. W. (1977). The inception of faulting in a rock mass with a weakened zone. *Journal of Geophysical Research* 82, 844–854.

Rudnicki, J. W. (2002). Alteration of regional stress by reservoirs and other inhomogeneities: Stabilizing or destabilizing? In Volume 3 of the Proceedings of the Ninth International Congress on Rock Mechanics. Paris, France, August 25-28, 1999.

Segall, P. (1985). Stress and Subsidence resulting from subsurface fluid withdrawal in the epicentral region of the 1983 Coalinga earthquake. *Journal of Geophysical Research* 90, B8, 6801-6816, doi:10.1029/JB090iB08p06801

Segall, P. (1989). Earthquakes triggered by fluid extraction. *Geology* 17, 942–946.

Segall, P. (1992). Induced stresses due to fluid extraction from axisymmetric reservoirs. *Pure and Applied Geophysics* 139, 535–560.

Segall, P., Grasso, J. R. and Mossop, A. (1994). Poroelastic stressing and induced seismicity near the Lacq gas field, southwestern France. *Journal of Geophysical Research* 99, 15,423– 15,438.

Segall, P. and Fitzgerald, S. (1998). A note on induced stress changes in hydrocarbon and geothermal reservoirs. *Tectonophysics* 289, 117-128.

Seo, K. and Mura, T. (1979). The elastic field in a half space due to ellipsoidal inclusions with uniform dilatational eigenstrains. *Journal of Applied Mechanics* 46, 568–572.

Sharma, P. and Ganti, S. (2004). Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies. *Journal of Applied Mechanics* 71, 663-671.

Sokolnikoff, S. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity* (second ed.). McGraw-Hill Book Company, Inc.

Teatini, P., Castelletto, N., Ferronato, M., Gambolati, G., Janna, C., Cairo, E., Marzorati, D., Colombo, D., Ferretti, A., Bagliani, A., Bottazzi F. (2011). Geomechanical response to seasonal gas storage in depleted reservoirs: A case study in the Po River basin, Italy. *Journal of Geophysical Res.*, 116, F02002, doi:10.1029/2010JF001793.

Zoback, M. and Zinke, J. (2002). Production-induced normal faulting in the Valhall and Ekofisk oil fields. *Pure and Applied Geophysics as storage in depleted reservoirs: a case study in the Po River basin, Italy.* *Journal of Geophysical Res.*, 116, F02002, doi:10.1029/2010JF001793.

Walsh, J. B. (2002). Subsidence above a planar reservoir. *Journal of Geophysical Research* 107, B9, 2202, doi:10.1029/2001JB000606