Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

DOTTORATO DI RICERCA IN
FILOSOFIA

Ciclo XXII

Settore Concorsuale di afferenza: 11/C2

Settore Scientifico disciplinare: M-FIL/02

INTUIZIONE E VISUALIZZAZIONE IN MATEMATICA CON PARTICOLARE RIFERIMENTO A FELIX KLEIN

Presentata da:
Daniele Muttini

Coordinatore Dottorato:
Prof. Walter Tega

Relatore:
Prof.ssa Rossella Lupacchini

Esame finale anno 2012

Indice

Avvertenza

Le traduzioni delle opere in lingua straniera citate nel testo di cui non è disponibile un'edizione italiana sono mie, così come quelle dei passi di Klein tratti in parte dalle opere originali in tedesco, in parte da traduzioni inglesi quasi sempre approvate e riviste dallo stesso autore. In ogni caso, ho sempre riportato in nota il testo alla base della mia traduzione. Per i pochi testi dei quali esiste una traduzione italiana, ho utilizzato direttamente questa, senza riportare in nota l'originale, a meno che ciò non fosse necessario per evidenziare sfumature di significato utili alla comprensione del testo. Salvo diversa indicazione, eventuali enfasi sono da considerarsi presenti nel testo originale.

Introduzione

Sono certo consapevole del fatto che con questo tentativo di fondazione esco dal puro ambito della matematica e tocco problemi psicologici riguardo ai quali è estremamente difficile dire qualcosa di corretto.[1]
Felix Klein

La finalità del presente lavoro è parlare di qualcosa che sfugge alla descrizione linguistica, ossia il concetto di intuizione, con particolare riferimento alla matematica. Durante quasi tutto il corso del Novecento, l'intuizione – intesa in un senso *naïve*, e non tecnico – non ha goduto di buona fama. Se si escludono rare eccezioni, i "paradigmi" ufficiali non hanno dato grande spazio a ricerche riguardanti tale concetto, sia nel campo della matematica o delle scienze in generale, sia nel campo della filosofia. Si è invece spesso negato valore a quegli aspetti del pensiero che non fossero rigorosi, logici, formali e assiomatici, sottraendo dall'agenda filosofica ogni discussione che chiamasse in causa quella parte "tacita" del nostro pensiero che è riconducibile a conoscenze di tipo visivo. A partire dalla seconda metà dell'Ottocento circa, hanno guadagnato progressivamente terreno atteggiamenti più o meno ufficiali, a livello scientifico ed educativo, che hanno tentato di sottoporre ad una sorta di "purificazione" il discorso matematico. Il risultato è stato un appiattimento di ogni discorso significante e degno di nota al solo piano del linguaggio, del formalismo logico. Senza togliere gli indubbi meriti all'applicazione di criteri rigorosi e logico-formali in ogni campo della conoscenza, c'è da dire che però, per quanto riguarda la matematica, si è forse calcata

[1] Klein, 1873, p. 215: «Ich bin mir freilich bewußt, daß ich mit diesem Versuche einer Begründung aus dem rein mathematischen Gebiete hinaustrete und psychologische Probleme berühre, über die etwas Richtiges auszusagen außerordentlich schwierig ist.»

eccessivamente la mano nella ricerca di una *purezza di metodi* che, a mio avviso, ricorda molto quella "purezza delle essenze" che ossessionava il generale Jack D. Ripper nella celebre pellicola di Stanley Kubrick, *Il dottor Stranamore, ovvero come imparai a non preoccuparmi e ad amare la bomba*.

Negli ultimi due decenni del Novecento, le difficoltà inerenti a questa situazione hanno cominciato ad essere avvertite anche tra i matematici e i filosofi della matematica. Alcuni hanno reagito come, ad esempio, Tristan Needham. All'inizio del suo *Visual Complex Analysis*, troviamo una "parabola" particolarmente istruttiva che narra di una società apparentemente surreale, ma poi non tanto diversa, *mutatis mutandis*, dalla comunità dei matematici (e, aggiungerei, di molti filosofi):

> Immaginate una società nella quale i cittadini sono incoraggiati, e di fatto obbligati fino ad una certa età, a leggere (e qualche volta a scrivere) partiture musicali. Tutto ciò è molto ammirevole. Ma questa società – pochi ricordano come tutto sia cominciato – ha anche una legge molto curiosa e inquietante: *la musica non deve essere mai ascoltata o suonata!*
>
> Sebbene la sua importanza sia universalmente riconosciuta, per qualche ragione la musica non è largamente apprezzata in questa società. A dire il vero, i professori ancora studiano con entusiasmo le grandi opere di Bach, di Wagner e degli altri, e fanno del loro meglio per comunicare ai loro studenti la bellezza e il significato di ciò che trovano in queste opere, eppure ammutoliscono quando in modo insolente viene rivolta loro la domanda, "Perché tutto questo?"
>
> Questa parabola mostra chiaramente come sia ingiusto e irrazionale avere una legge che vieti ad aspiranti studenti di musica di sperimentare e comprendere la materia attraverso l'"intuizione sonora". Nella nostra società di matematici, però, *abbiamo* una legge del genere. Non è una legge scritta, e chi se ne fa beffe può pure prosperare, ma dice che *la matematica non deve essere visualizzata!*
>
> Con buona probabilità, se apriamo a caso un testo di matematica moderna su un soggetto a caso, ci si presenta un ragionamento simbolico astratto che è separato dalla nostra esperienza sensoriale del mondo, *nonostante* il fatto che quegli stessi fenomeni che stiamo

studiando siano spesso stati scoperti grazie all'intuizione geometrica (e forse fisica).[2]

Il problema, dell'importanza o meno dell'intuizione nel pensiero in generale, e in quello matematico in particolare, può essere anche osservato, sotto un altro punto di vista, ricorrendo all'aiuto di una storia, questa volta tratta da una raccolta di racconti autobiografici, pubblicati dal celebre neurologo americano Oliver Sachs, dal titolo *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello*.

Sachs racconta la storia del "dottor P.", un musicista, cantante e insegnante di musica, che lo aveva contattato per una visita, dato che aveva cominciato a presentare una serie di sintomi neurologici piuttosto singolari. Pur conducendo una vita apparentemente normale, l'uomo aveva cominciato a manifestare comportamenti strani se non proprio ridicoli; ad esempio, era diventato incapace di riconoscere le persone se non dalla voce o da altri particolari, oppure gli capitava di vedere persone dove non c'erano e di fermarsi a parlare con oggetti inanimati, quali idranti o pomelli di mobili. Il fatto strano,

---

[2] Needham, 1997, vii: «Imagine a society in which the citizens are encouraged, indeed compelled up to a certain age, to read (and sometimes write) musical scores. All quite admirable. However, this society also has a very curious-few remember how it all started and disturbing law: *Music must never be listened to or performed!*
Though its importance is universally acknowledged, for some reason music is not widely appreciated in this society. To be sure, professors still excitedly pore over the great works of Bach, Wagner, and the rest, and they do their utmost to communicate to their students the beautiful meaning of what they find there, but they still become tongue-tied when brashly asked the question, "What's the point of all this?!"
In this parable, it was patently unfair and irrational to have a law forbidding would-be music students from experiencing and understanding the subject directly through "sonic intuition." But in our society of mathematicians we *have* such a law. It is not a written law, and those who flout it may yet prosper, but it says, *Mathematics must not be visualized!*
More likely than not, when one opens a random modem mathematics text on a random subject, one is confronted by abstract symbolic reasoning that is divorced from one's sensory experience of the world, *despite* the fact that the very phenomena one is studying were often discovered by appealing to geometric (and perhaps physical) intuition.»

rilevato da Sachs nella visita neurologica, era che il dottor P. vedeva benissimo, non aveva problemi all'apparato visivo, ma era difficile capire *che cosa* vedesse. Sachs lo sottopose quindi ad una serie di test, tra i quali la banale richiesta di descrivere l'immagine di un paesaggio tratta dal *National Geografic*, rivelando una situazione sconcertante:

> [Il dottor P.] non riusciva a vedere l'insieme, vedeva solo dettagli, che individuava come puntini sullo schermo di un radar. Non entrò mai in relazione con l'immagine come un tutto, non affrontò mai, per così dire, la fisionomia dell'immagine. Non aveva il minimo senso di un paesaggio o di una scena.[3]

Quello che rendeva particolarmente drammatica la situazione del dottor P. era la sua incapacità di riconoscere i volti delle persone, anche quelli molto familiari, e addirittura il suo stesso volto. Inoltre egli era completamente incapace di riconoscere le espressioni. Per lui i volti erano *rompicapo* da risolvere, test astratti necessari per riconoscere il proprio interlocutore. Egli doveva trovare contrassegni inconfondibili, dettagli, per poter identificare, da un punto di vista puramente formale, la persona. Viveva in un mondo in cui *nulla era più familiare*, un mondo fatto di schemi.

Continuando la sua visita, Sachs sottopose al dottor P. un test di riconoscimento di una serie di modellini di figure geometriche, che rivelò come il paziente non avesse alcun problema ad identificare forme geometriche anche molto complesse. Ben diversa fu la reazione quando invece Sachs provò a mostrargli un guanto: il dottor P., prendendolo in mano, lo descrisse, con un'espressione astratta, come «una superficie continua, avvolta su se stessa e dotata di cinque estensioni cave»[4]. Non riusciva a capire di che cosa si trattasse e, in un certo qual modo, aveva perso la capacità di vedere l'oggetto nella sua globalità.

---

[3] Sachs, 1986, p. 28.
[4] Sachs, 1986, p. 32.

> Nessun bambino saprebbe vedere e descrivere “una superficie continua, avvolta su se stessa”, ma non c'è bambino, anche molto piccolo, che non riconoscerebbe immediatamente un guanto, un oggetto noto, che non saprebbe che serve a coprire una mano. Il dottor P. no. Nulla di quello che vedeva gli era familiare. Visivamente, era smarrito in un mondo di astrazioni inanimate. Anzi, non possedeva un mondo visivo reale, così come non possedeva un sé visivo reale. Poteva parlare delle cose, ma non le vedeva direttamente. [...] Il dottor P. funzionava esattamente come una macchina. Non soltanto perché nei confronti del mondo visivo mostrava la stessa indifferenza di un calcolatore, ma perché – cosa ancora più sorprendente – costruiva il mondo come fa un calcolatore, servendosi di caratteristiche e di relazioni schematiche.[5]

Come sottolinea lo stesso Sachs, il caso del dottor P. «può dunque servire da monito e da parabola, mostrandoci che cosa succede a una scienza che rifugga dal giudizio, dal particolare, dal personale e diventi interamente astratta e computazionale»[6].

Terminando la sua visita, Sachs racconta inoltre di essersi intrattenuto a conversare con la moglie del dottor P. e, mentre parlavano, la sua attenzione era stata catturata dai quadri appesi alle pareti. Erano stati dipinti dal dottor P., ed erano disposti in ordine cronologico. Nell’osservarli, Sachs non poté fare a meno di notarne l’evoluzione artistica: mentre le prime erano opere naturalistiche e realistiche, con un *vivido contenuto emotivo*, con il passare degli anni si facevano via via più astratte e geometriche, fino a diventare, le ultime, quasi incomprensibili, puri aggregati di linee e macchie di colore: «il dottor P. era effettivamente passato dal realismo al non figurativismo e alla pittura astratta» – pensò Sachs tra sé – «ma si trattava di un percorso non artistico bensì patologico»[7].

Commentando retrospettivamente i fatti, Sachs osserva come ciò che mancava al dottor P. fosse proprio quella capacità di vedere e stabilire relazioni tra le cose e noi stessi che è propria del giudizio «intuitivo, personale, comprensivo e concreto»[8].

---

[5] Sachs, 1986, p. 33.
[6] Sachs, 1986, p. 40.
[7] Sachs, 1986, p. 36.
[8] Sachs, 1986, p. 38.

Aveva perso la capacità di pensare il mondo come rappresentazione visiva.

Questo breve racconto mostra quanto sia importante il pensiero visivo e, più in generale, l'intuizione, quali elementi inerenti a qualsiasi forma di pensiero, anche quello matematico. Pertanto, sarebbe auspicabile una riflessione su come il sistema dell'istruzione abbia ormai da tempo relegato a privilegio per pochi eletti – coloro che sono "naturalmente portati" –, un fondamentale elemento della nostra capacità di conoscere e relazionarci con il mondo: l'espressione grafica, o il disegno nel senso più generale del termine. Il disegno non esprime soltanto una parte essenziale del nostro funzionamento mentale, ma sembra anche un elemento indispensabile affinché gli strumenti più formali e astratti possano essere in qualche misura efficaci. Come osserva Barbara Maria Stafford, docente di storia dell'arte presso l'Università di Chicago – le cui ricerche sono sempre state condotte sul confine tra le arti visive, le scienze fisiche e quelle biologiche – le immagini sono un sostegno alla continuità del pensiero:

> Nella diffusa denigrazione postmoderna dell'estetica, ciò che viene dimenticato è che da Leibniz a Schiller, il termine connotava l'integrazione dell'attività mentale con il sentimento. L'*Aisthesis*, come percezione o sensazione, è stata, nel pensiero post-cartesiano e specialmente post-kantiano, separata dalla cognizione. Riscoprire la sua capacità paradigmatica di fare da ponte tra esperienza e razionalità, emozione e logica, sembra ancora più importante nell'era della realtà virtuale e dei media apparentemente non mediati. La consapevolezza che le immagini possano sostenere la continuità del pensiero, non semplicemente come finzioni romanzate o prodotti pseudointellettuali, porta sia una dimensione etica che una dimensione estetica nell'era del computer.[9]

[9] Stafford, 1996, p. 52: «In the widespread postmodern denigration of the aesthetic, what is forgotten is that from Leibniz to Schiller, the term connoted the integration of mental activity with feeling. *Aisthesis*, as perception or sensation, has in post-Cartesian and especially post-Kantian thought become separated from cognition. Rediscovering its pragmatic capacity to bridge experience and rationality, emotion and logic, seems all the more important in the era of virtual reality and seemingly non mediated media. The

Rimanendo nell'ambito dell'arte e degli studi di confine tra arte e neuroscienze, le considerazioni di Betty Edwards, oggi docente emerito di arte alla *California State University* di Long Beach, sono, a mio avviso, particolarmente illuminanti, aiutano a comprendere quella forma di pensiero senza parole che chiamiamo "intuizione". A partire dagli anni Settanta, come insegnante di disegno, Betty Edwards ha cercato di portare avanti la sua personale convinzione che il disegno non dovesse essere una dote naturale di pochi. Se tale era considerato, era solo perché la società non ne permetteva l'insegnamento e non incoraggiava lo sviluppo delle capacità "mentali" che ne sono alla base. Da qui, cominciò a ricercare un metodo e una teoria che, appoggiandosi sugli studi di neurologia di Roger W. Sperry, permettessero di dimostrare come tutti possono imparare la misteriosa arte del disegno.

Roger W. Sperry, psicobiologo, è colui che ha dato avvio alle ricerche sul cosiddetto "cervello diviso". Mediante lo studio di pazienti in cui gli emisferi cerebrali erano, o erano stati, divisi, e di pazienti completamente privi di uno dei due emisferi, si è arrivati a comprendere che le diverse funzioni cerebrali sono collocate in aree diverse del cervello. C'è una differenza sostanziale tra le modalità di pensiero dei due emisferi: quella dell'emisfero destro, principalmente visiva, percettiva e globale; quella dell'emisfero sinistro, prevalentemente verbale, analitica e sequenziale. Usando questi risultati, Betty Edwards è riuscita a trovare un metodo per rivitalizzare le funzioni "destre" sopite attraverso esercizi che aiutino ad arginare l'usuale dominanza delle funzioni "sinistre", tipiche della nostra cultura cosiddetta occidentale.

Uno degli esempi base più interessanti, che credo fornisca un'ottima rappresentazione "intuitiva" di ciò che si intende con "intuizione", è l'esercizio di disegnare un'immagine capovolta. Grazie a questo accorgimento, ossia sottoponendo agli studenti il compito di riprodurre un'immagine capovolta, la Edwards

awareness that images can sustain the continuity of thinking, not merely serve as fictionalizing counterfeits of pseudo intellectual goods, brings both an ethical and an aesthetic dimension to the computer age.»

ottenne, con sorpresa da parte degli studenti stessi, risultati che superavano ogni aspettativa. Nell'esercizio, il capovolgimento della figura che fa da modello rende difficile, se non impossibile, alle funzioni sinistre di entrare in azione, ossia non si riesce a interpretare in termini linguistico-concettuali ciò che si vede. La percezione è in un certo senso "pura", depurata da intromissioni di tipo verbale, dato che non è possibile riconoscere alcunché di noto e di nominabile in essa. In questo modo, si consente alle funzioni destre di prendere il comando e di svolgere il proprio compito, imparando così, davvero, a vedere.

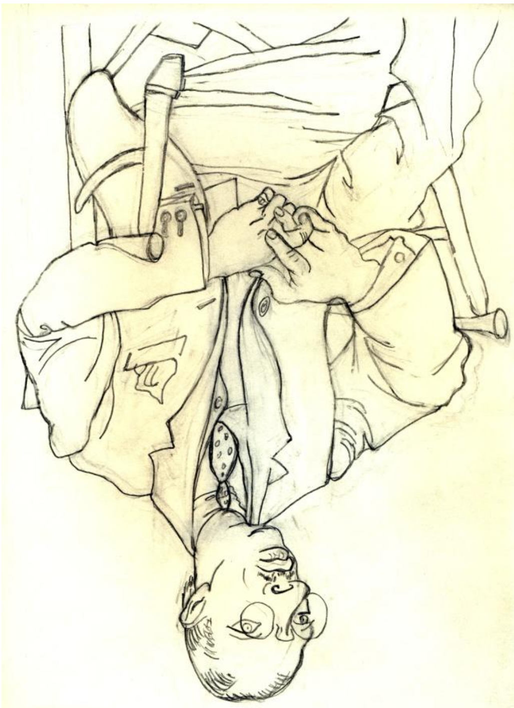

Figura 1. Esercizio, suggerito da Betty Edwards, al fine di ridurre il conflitto tra funzioni mentali (Edwards, 2002, pp. 72-73): l'autrice suggerisce di riprodurre l'immagine tenendola capovolta al fine di rendere difficile il riconoscimento dei dettagli e la possibilità di nominare ciò che si sta guardando. La Edwards osserva come in questo modo si mettano fuori uso le "funzioni S" del nostro cervello, permettendogli di vedere veramente per mezzo delle "funzioni D". L'immagine è una mia riproduzione eseguita seguendo il metodo proposto dalla Edwards, ed è una copia di un disegno di Pablo Picasso, Ritratto di Igor Stravinskyij, (Collezione privata).

L'idea alla base delle ricerche di Sperry, secondo cui esistono due modalità di pensiero correlate alla distinzione tra emisferi cerebrali, risulta particolarmente utile ed efficace per la chiarificazione del significato del termine "intuizione" e dei suoi legami con il pensiero visivo. Un articolo che raccoglie una serie di esperimenti realizzati da Sperry assieme a Laura Franco, *Hemisphere Lateralization for Cognitive Processing of Geometry* (1977), mostra come nelle persone sottoposte a disconnessione chirurgica degli emisferi «le operazioni aritmetiche sembrano essere prevalentemente una funzione dell'emisfero sinistro [...]. La geometria, dall'altro lato, con la sua struttura fortemente spaziale sembrerebbe più verosimilmente elaborata nell'emisfero destro»[10]. Questo fatto pone in evidenza come la matematica, al pari di qualsiasi altra attività umana, sia il prodotto di un pensiero integrato che, come tale, non può essere scisso, se non artificialmente, in una parte logico-formale e in una parte visivo-intuitiva.

I risultati delle neuroscienze e, in particolare, gli studi relativi alle reti neurali hanno confermato l'esistenza di una *dualità* nel processo di elaborazione delle informazioni da parte del cervello che distingue tra un'elaborazione *sequenziale* e un'elaborazione *parallela*. È stato mostrato come i processi sequenziali siano coscienti, essenzialmente temporali e basati su regole esplicite definite mediante passi che si susseguono l'uno all'altro, mentre i processi paralleli risultano inconsci e ignari dello scorrere del tempo, colgono in maniera immediata e globale l'*input* sensoriale e ne afferrano in maniera diretta le caratteristiche strutturali, il cosiddetto *pattern*.

Renate Huber, in un recente articolo in cui cerca di analizzare il rapporto tra la conoscenza intuitiva e la formazione delle teorie, suggerisce l'identificazione di queste due modalità di pensiero con, rispettivamente, gli aspetti "discorsivi" e gli aspetti "intuitivi" della conoscenza:

---

[10] Franco & Sperry, 1977, p. 107: «[...] arithmetical operations appear to be predominantly a left hemisphere function [...]. Geometry, on the other hand, with its highly spatial structure would seem more likely to be processed in the right hemisphere, [...].»

> Sembra plausibile identificare la conoscenza intuitiva con l'elaborazione parallela dell'informazione e l'elaborazione sequenziale dell'informazione con la conoscenza discorsiva - nel senso di una controparte del concetto di conoscenza intuitiva.[11]

Questa distinzione, osserva la Huber, può essere posta facilmente in relazione con la classica distinzione che, nell'ambito della matematica, ha storicamente opposto l'approccio metodologico di tipo analitico-algebrico a quello di tipo sintetico-geometrico. Una distinzione che appare quindi dotata di risvolti che vanno oltre la superficiale analogia, fino a toccare le radici profonde di quella dicotomia tra pensiero intuitivo e pensiero logico-analitico all'origine della diffidenza nei confronti della conoscenza intuitiva e del pensiero visivo che è diventata una caratteristica saliente della matematica cosiddetta "moderna".

Guardando alla storia della matematica a partire dal diciassettesimo secolo, Philip J. Davis vede in essa la realizzazione di una sorta di «declino storico dell'immagine», una «devisualizzazione» o «despazializzazione»[12], per usare le parole di Davis, dove l'immagine perde progressivamente importanza e viene rimpiazzata da surrogati analitici o algebrici. Un processo, questo, che colpì in maniera significativa la geometria, la quale, da studio dello spazio fisico e territorio incontrastato dell'intuizione visiva, è andata progressivamente trasformandosi in un astratto sistema deduttivo, non diversa dagli altri rami della matematica.

È bene sottolineare che, sebbene l'intuizione non sia mai veramente scomparsa dal discorso matematico, tuttavia il concetto di intuizione sopravvissuto al cosiddetto processo di aritmetizzazione e rigorizzazione, e ricomparso in vari modi nel corso del Novecento, è un concetto di portata molto ridotta, al più assimilabile ad una sorta di *intuizione pura* nel senso di Kant. In precedenza, invece, con il termine intuizione si indicava principalmente la cosiddetta "intuizione geometrica", ed il concetto era connotato in senso fortemente visivo e concreto.

---

[11] Huber, 2006, p. 308.
[12] Vedi Davis, 1993, p. 334.

A partire dalla seconda metà del diciannovesimo secolo, vari eventi agirono sommandosi fra loro. Anzitutto, come accennato, un ruolo fondamentale è stato giocato dal processo di rigorizzazione della matematica, strettamente connesso alla scoperta di funzioni che sembravano mostrare proprietà controintuitive. Tra queste, le funzioni continue non derivabili in alcun punto, come ad esempio la funzione di Weierstrass, battezzate da Henri Poincaré con il nome di "mostri matematici". Quindi, dal lato della geometria, è ben nota la "crisi" dell'intuizione causata dalla scoperta delle geometrie non euclidee e dalla successiva loro applicazione alla fisica. Vale la pena di sottolineare che ciò che conosciamo come teoria della relatività non costituisce una semplice teoria, ma un intero capitolo della fisica riguardante la scelta delle regole di base che definiscono lo spaziotempo, il palcoscenico comune che fa da sfondo a tutta la fisica. Vicino a questi due principali attori, si trovano altre figure tutt'altro che di secondo piano, quali il fraintendimento che si diffuse riguardo al metodo assiomatico e che ne fece "il" metodo della matematica. Un fraintendimento che, tra l'altro, fece di Hilbert il campione del "formalismo". Si arrivò così a una sorta di "fondamentalismo" tutt'oggi evidente che fa della matematica un mondo di metodi rigorosi, puri, astratti, logici e formali. Altri attori minori, ma non certo semplici comparse, furono la rottura definitiva, consumatasi proprio tra fine Ottocento e primi del Novecento, tra filosofia e psicologia, la contemporanea svolta linguistica e, non ultimo, l'empirismo logico con il diffondersi della cosiddetta *Standard* o *Received View* all'interno della filosofia della scienza.

Tutto questo portò al crescente predominio di un atteggiamento ostile verso l'intuizione in matematica, com'è oramai riconosciuto da più parti. Negli anni Ottanta del Novecento, questo atteggiamento era divenuto pressoché incontrastato all'interno di un'epistemologia della matematica che ponendo un'eccessiva enfasi sulle questioni ontologiche, per usare un'espressione di Paolo Mancosu, si era fondamentalmente ridotta ad un "torso".

L'indagine qui condotta cercherà di mettere in luce come le motivazioni e gli esempi addotti al fine di mostrare l'inaffidabilità e il supposto carattere ingannevole dell'intuizione presentino in realtà una serie di falle. Ad un'analisi più attenta, tali esempi rivelano piuttosto il ruolo essenziale svolto in essi dall'intuizione e dal pensiero visivo. Un caso emblematico è quello delle cosiddette "false dimostrazioni", esaminate sia da Hilbert che da Klein; si tratta di dimostrazioni "per casi" basate sull'uso di figure specifiche e non abbastanza generali, che – si supponeva – conducessero a falsi risultati, laddove invece è proprio l'errore concettuale a determinare la falsità della conclusione, e non quello grafico, il quale è semplicemente indotto da pregiudizi di tipo logico-formale che agiscono inconsapevolmente proprio a causa dalle scarse capacità intuitive, visive e grafiche del soggetto. Un altro caso è quello della "curva di Koch", una curva (anch'essa non derivabile in alcun punto) costruita come limite di un processo infinito e reiterato; l'esempio, recentemente ripreso da Solomon Feferman (2012), mostra come sia proprio l'intuizione a rendere possibile la comprensione di oggetti controintuitivi che coinvolgono processi infiniti, e che quindi non sono rappresentabili tramite un medium visivo.

Nel periodo storico in cui maggiormente si manifestò il contrasto tra il "vecchio stile" della matematica, intuitivo e geometrico, e lo stile della cosiddetta matematica "moderna", furono pochi i matematici di un certo rilievo che scelsero di porsi nettamente in contrasto con quella tendenza verso la rigorizzazione e l'aritmetizzazione che riduceva sempre più la matematica ad un "gioco di formule". Fra questi oppositori, assieme al già citato Henri Poincaré, spicca sicuramente la figura Felix Klein, una personalità importante nel panorama matematico del suo tempo, non solo per i notevoli contributi nei più vari settori della ricerca, ma anche per le sue capacità di organizzatore "politico" e di didatta della matematica.

La posizione di Klein verso gli sviluppi "aritmetizzanti" della matematica del suo tempo, sebbene dettata senz'altro dalla sua formazione principalmente geometrica, non fu mai acritica o, tantomeno, reazionaria. Klein cercò piuttosto di limitare quelle derive che percepiva come "fondamentaliste", in quanto intendevano imporre una pratica matematica *purificata* da elementi visivi o intuitivi e mettere al bando proprio quegli aspetti che lui riteneva essenziali per dare significato, vitalità e potenzialità creative alla matematica stessa.

La vastissima produzione di Klein costituisce quindi un eccellente caso storico mediante il quale è possibile mostrare un modo di concepire la matematica profondamente diverso da quello tramandato a partire dai primi decenni del secolo scorso fino ai giorni nostri. Un modello di pratica matematica in cui *intuizione* e *pensiero visivo* sono pienamente integrati nel ragionamento matematico.

Il presente lavoro è concepito in modo da presentare, nella prima parte, alcuni risultati raggiunti dalla ricerca contemporanea nell'ambito di un rinnovato interesse per intuizione e pensiero visivo che consentono di individuare strumenti concettuali utili per la successiva analisi, condotta nella seconda parte, dell'epistemologia di Klein. La prima parte copre un arco temporale che va dalla fine degli anni Ottanta fino ad oggi.

La riscoperta dell'intuizione matematica

Mio figlio mi chiede: devo imparare la matematica?
Perché, vorrei rispondergli. Che due pezzi di pane sono più di uno
te ne accorgerai egualmente.[13]
Bertolt Brecht

Non vi è alcuna apparente coerenza nel modo in cui il termine intuizione è stato utilizzato da matematici e filosofi nel corso dei secoli. Le poche monografie esistenti, anche relativamente recenti, riguardanti l'intuizione, hanno cercato invano di trovare una caratterizzazione sistematica di questa evanescente presunta forma di conoscenza, ottenendo, al massimo, una collezione di significati, usi e funzioni, all'interno di interessanti ricostruzioni storico-filosofiche. Degno di nota in tal senso, tra le opere più recenti, è ad esempio il breve saggio di Mario Bunge dal titolo *Intuition and Science* (1962).

Bunge apre la sua ricerca proprio ricordando come tale termine sia, e sia sempre stato, ambiguo e a tal punto fuorviante che, se non fosse «saldamente radicato»[14] nel nostro linguaggio, sia ordinario che tecnico, sarebbe quasi da escludere dal dizionario. Al suo posto bisognerebbe però introdurre un'infinità di nuovi termini, poiché l'intuizione può designare sia facoltà *pre-razionali*, sia atteggiamenti *sovra-razionali* e perfino qualche varietà di *ragione*. Nel caso più specifico del lavoro scientifico, rileva Bunge, è inoltre impossibile accertare quali meccanismi siano all'opera caso per caso.

[13] Brecht, 1961, p. 150.
[14] Bunge, 1962, p. ix: «Firmly entrenched.»

> In ogni lavoro scientifico, a partire dalla ricerca del problema, e dalla conseguente enunciazione dello stesso, fino al controllo della soluzione, e dall'invenzione delle ipotesi guida al relativo processo deduttivo, è possibile trovare la percezione delle cose, degli eventi e dei segni; la rappresentazione per immagini o visiva; la formazione di concetti di vario grado di astrattezza; la comparazione che conduce all'analogia, e la generalizzazione induttiva a fianco di congetture azzardate; la deduzione sia informale che formale; analisi rozze e raffinate; e probabilmente molti altri modi di formazione, combinazione, e rigetto di idee – poiché, incidentalmente, la scienza è fatta di idee e non di fatti.
>
> Quando non sappiamo esattamente quale dei meccanismi elencati sopra ha giocato un qualche ruolo, quando non ricordiamo le premesse, e neppure abbiamo una chiara consapevolezza dei processi inferenziali, o quando non siamo stati abbastanza sistematici e rigorosi, tendiamo a dire che tutto ciò è stato opera dell'*intuizione*. L'intuizione è quell'insieme contenente un po' di tutto dove collochiamo tutti i meccanismi intellettuali che non sappiamo come analizzare o addirittura nominare con precisione, o che non siamo interessati ad analizzare o nominare.[15]

Bunge elenca una serie di usi del termine intuizione, tra quelli che egli ritiene maggiormente accettati nell'ambito della letteratura scientifica:

1. Intuizione come *percezione*: identificazione rapida di una cosa, un evento o un segno; chiara comprensione del significato e/o della mutua relazione di un insieme di

---

[15] Bunge, 1962, p. 68: «In any scientific work, from the search for and statement of the problem to the control of the solution, and from the invention of the guiding hypotheses to their deductive processing, we find the perception of things, events, and signs; imagery or visual representation; the formation of concepts of various degrees of abstractness; the comparison which leads to analogy, and the inductive generalization alongside the wild guess; deduction both informal and formal; rough and refined analysis; and probably many other ways of forming, combining, and rejecting ideas – because, incidentally, science is made up of ideas and not of facts.
When we do not know exactly which of the above listed mechanisms has played a part, when we do not remember the premises, nor have a clear consciousness of the inferential processes, or when we have not been systematic and rigorous enough, we tend to say it has all been the work of *intuition*. Intuition is the collection of odds and ends where we place all the intellectual mechanisms which we do not know how to analyze or even name with precision, or which we are not interested in analyzing or naming.»

segni; capacità di interpretare senza sforzo i segni; capacità rappresentativa.

2. Intuizione come *immaginazione*: capacità di rappresentazione principalmente geometrica; abilità nel formare metafore, nel senso di stabilire isomorfismi (relazioni strutturali); immaginazione creativa;
3. Intuizione come *ragione*: inferenza *catalitica* nel senso di capacità di effettuare salti di ragionamento, senza la necessità di passaggi intermedi; capacità di sintesi o di visione globale o sinottica;
4. Intuizione come *valutazione*: giudizio sensato, capacità di stimare rapidamente e correttamente le cose.

Quello che risulta chiaro da questo elenco – e, più in generale, da tutta la riflessione di Bunge – è senz'altro la carenza di sintesi. Non emerge un singolo concetto di intuizione, ma tutta una serie di significati, anche molto lontani fra loro, raccolti in un insieme piuttosto caotico e scoordinato in cui il significato del termine "intuizione" può spaziare dalla percezione all'immaginazione, alla capacità inferenziale, alla capacità di sintesi, alla comprensione e perfino alla capacità di valutazione.

Alla fine, quello che Bunge ci propone è un'analisi senz'altro interessante, che però non riesce a fare luce, ad andare oltre la sistematizzazione di ciò che, in fondo, è noto a tutti. Purtroppo, a causa di questa confusione ed approssimazione, anche metodologica, caratterizzante la maggior parte delle ricerche del passato, possiamo affermare che, di fatto, i pochi studi riguardanti il concetto di intuizione in matematica fino ad oggi sono sempre stati considerati alla stregua di riflessioni da matematici in pensione, repertori «di aneddoti e curiosità senili»[16], per usare le parole di Giulio Giorello. E il carattere aneddotico ed a-sistematico, dovuto in parte alla carenza di avanzati studi sperimentali sull'argomento, si manifesta evidentemente anche nel celebre saggio pubblicato dal matematico francese Jacques Hadamard, nel 1945, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico* (1993), dove gli stessi

[16] Giorello, 1993, p. VII.

termini intuizione, invenzione e creatività si mescolano senza una chiara distinzione.

Un elenco un po' diverso, riguardante usi e significati del termine intuizione lo ritroviamo anche in un saggio del 1981, *The Mathematical Experience*, scritto dai matematici Philip J. Davis e Reuben Hersh, il quale però vede la luce proprio alle soglie di quel periodo di cambiamento di mentalità che prenderà lentamente campo quantomeno in una parte minoritaria di matematici e filosofi. Philip J. Davis, protagonista di tale rinnovamento dal lato dei matematici, sottolineerà, infatti, in seguito, come negli anni Settanta egli fosse quasi isolato nell'affrontare tematiche *eretiche* come quella del "pensiero visivo". Con un evidente salto di qualità, Davis ed Hersh presentano nel testo sopra citato una comprensiva esposizione dell'esperienza matematica in generale, alternando parti storiche a parti più propriamente filosofiche, passando attraverso argomenti più strettamente tecnici o riguardanti la didattica. Ma ciò che qui interessa sottolineare è il fatto che il testo contiene anche un breve capitolo riguardante l'intuizione in matematica dove, a loro volta, anche Davis e Hersh cercano di raccogliere in una lista, gli usi principali generalmente attribuiti al termine intuizione.

> Intuitivo è l'opposto di rigoroso. Questo uso non è di per sé completamente chiaro poiché lo stesso significato di rigoroso non è mai dato con precisione. Potremmo dire che in questo uso intuitivo significhi carente dal punto di vista del rigore, e, a sua volta, il concetto di rigore è di per sé definito intuitivamente piuttosto che rigorosamente.
>
> Intuitivo significa visivo. Così la topologia o la geometria intuitive differiscono dalla topologia o dalla geometria rigorose in due aspetti. Da una parte, la versione intuitiva ha un significato, un referente nel dominio delle curve e delle superfici visualizzabili che è escluso dalla versione rigorosa (cioè formale o astratta). A questo riguardo l'intuitivo è superiore; esso ha una qualità che alla versione rigorosa manca. Dall'altra parte, la visualizzazione può indurci a considerare come ovvie o auto evidenti affermazioni che sono dubbie o addirittura false. (L'articolo di Hahn "The Crises in Intuition" fornisce una bella collezione di esempi di tali affermazioni.)
>
> Intuitivo nel senso di plausibile o convincente in assenza di una dimostrazione. Un significato correlato è "che cosa ci si potrebbe

aspettare che sia vero in questo genere di situazione sulla base dell'esperienza generale con situazioni simili o soggetti correlati." "Intuitivamente plausibile" significa ragionevole come congettura, cioè come candidato per una dimostrazione.

Intuitivo nel senso di incompleto. Se si pongono limiti sotto il segno di integrale senza usare il teorema di Lebesgue, se si rappresenta una funzione per mezzo di una serie di potenze senza controllare che la funzione sia analitica, allora il salto logico viene riconosciuto chiamandolo argomento intuitivo.

Intuitivo significa che poggia su un modello fisico, o su qualche esempio guida. In questo senso è quasi lo stesso che euristico.

Intuitivo significa olistico o integrativo in quanto opposto a dettagliato o analitico. Quando pensiamo ad una teoria matematica in modo ampio, quando vediamo che una certa affermazione deve essere vera per il modo in cui si integra con tutto ciò che conosciamo al riguardo, stiamo ragionando "intuitivamente." Ad essere rigorosi, dovremmo giustificare la nostra conclusione deduttivamente, per mezzo di una catena di ragionamento dove ogni passo può essere difeso da critiche, e dove il primo passo è considerato noto, e l'ultimo passo è il risultato desiderato.[17]

---

[17] Davis & Hersh, 1981, pp. 391-392: «Intuitive is the opposite of rigorous. This usage is itself not completely clear, for the meaning of rigorous itself is never given precisely. We might say that in this usage intuitive means lacking in rigor, and yet the concept of rigor is itself defined intuitively rather than rigorously.
Intuitive means visual. Thus intuitive topology or geometry differ from rigorous topology or geometry in two respects. On the one hand, the intuitive version has a meaning, a referent in the domain of visualized curves and surfaces, which is excluded from the rigorous (i.e., formal or abstract) version. In this respect, the intuitive is superior; it has a quality that the rigorous version lacks. On the other hand, the visualization may lead us to regard as obvious or self-evident statements which are dubious or even false. (The article by Hahn, "The Crises in Intuition" gives a beautiful collection of examples of such statements.)
Intuitive means plausible or convincing in the absence of proof. A related meaning is, "what one might expect to be true in this kind of situation, on the basis of general experience with similar situations or related subjects." "Intuitively plausible" means reasonable as a conjecture, i.e., as a candidate for proof.
Intuitive means incomplete. If one takes limits under the integral sign without using Lebesgue's theorem, if one represents a function by a power series without checking that the function is analytic, then the logical gap is acknowledged by calling the argument intuitive.

Benché anche questa potrebbe apparire una lista per certi versi non molto diversa da quella in precedenza descritta da Mario Bunge, in realtà, essa scaturisce da un contesto culturale differente.

Philip J. Davis, insieme a Rueben Hersh, benché matematici, si possono accostare facilmente a quei *maverick philosophers* che, per primi, cominciarono a percepire, sul finire degli anni ottanta, un mutamento di interessi, e ad auspicare un allargamento degli orizzonti della filosofia della matematica. In particolare Davis e Hersh sono tra coloro i cui contributi compaiono nella celebre antologia curata da Thomas Tymozcko, e pubblicata per la prima volta nel 1986, *New directions in the philosophy of mathematics*, la quale, assieme a *The Nature of Mathematical Knowledge* (1984) di Kitcher, e *History and Philosophy of Modern Mathematics* (1988) di Aspary and Kitcher, hanno dato l'avvio a quella reazione nei confronti della filosofia della matematica concepita esclusivamente in termini di ricerca fondazionale che era stata iniziata, negli anni sessanta, da Imre Lakatos.

L'anti-fondazionalismo e la maggiore attenzione alla pratica matematica in generale contribuirono ad una graduale ricomparsa di studi riguardanti l'intuizione ed il pensiero visivo, fino ad allora banditi dalla ricerca "seria". In generale, si può senz'altro affermare che durante quasi tutto il corso del Novecento – salvo importanti, ma rare, eccezioni – quale ad esempio, l'opera di Malcom Westcott, *Towards a Contemporary Psychology of Intuition* (1968), in grado di combinare l'analisi teorica con la ricerca sperimentale – non si sia vista alcuna ricerca sistematica capace di apportare un nuovo punto di vista

Intuitive means relying on a physical model, or on some leading examples. in This sense it is almost the same as heuristic.
Intuitive means holistic or integrative as opposed to detailed or analytic. When we think of a mathematical theory in the large, when we see that a certain statement must be true because of the way it would fit in with everything else we know about it, we are reasoning "intuitively." To be rigorous, we must justify our conclusion deductively, by a chain of reasoning where each step can be defended from criticism, and where the first step is considered known, and the last step is the desired result.»

sul tema dell'intuizione. È solo a partire dalla fine degli anni ottanta che nella letteratura scientifica hanno cominciato a comparire i primi studi riguardanti intuizione, pensiero visivo e pensiero diagrammatico, e ciò è avvenuto più o meno contemporaneamente, all'interno di diversi, ma tra loro connessi, settori disciplinari, i quali possono essere grossolanamente suddivisi in due filoni di ricerca principali e paralleli: da una parte l'ambito della filosofia della matematica in senso stretto e, dall'altra, una serie di contributi provenienti da diverse scienze – quali, neuroscienze, scienze cognitive, pedagogia e psicologia – in stretta connessione tra loro ed anche con gli ambienti matematici (ad esempio, Stanislas Dehaene è un matematico prestato alle neuroscienze). C'è da dire, tra l'altro, che non è da sottovalutare l'influenza esercitata in ambito matematico dalla cosiddetta *Computer Science* che, mettendo a disposizione nuovi ed efficaci strumenti, ha permesso di introdurre un approccio quasi sperimentale non solo nel cosiddetto contesto della scoperta – permettendo, attraverso metodi di *rendering*, la costruzione di modelli visuali manipolabili di strutture matematiche complesse – ma anche nella conferma induttiva di ipotesi matematiche, nell'uso di calcoli nelle dimostrazioni e nella verifica di queste ultime.

Per quanto riguarda l'ambito della matematica, e della filosofia della matematica, è ormai ampiamente accettato il fatto che in passato si sia posta eccessiva attenzione sugli aspetti puramente dimostrativi, dimenticando che la matematica stessa è, come tutte le attività umane, complessa e dotata di molte sfaccettature.

Il già citato Philip J. Davis, in un articolo del 1993, dal titolo *Visual Theorems*, richiama alla memoria l'atmosfera culturale, il *background*, in cui scrisse un articolo di argomento analogo vent'anni prima, con le seguenti, eloquenti, parole:

> [...] Era stata una mia percezione (all'epoca condivisa solo da una minoranza dei miei colleghi) che a partire all'incirca dal 1840 i matematici si fossero sempre di più aggrappati ad un aspetto dell'impresa matematica, cioè la dimostrazione, ed avessero posto su di essa un'enfasi esagerata e sbilanciata fino all'esclusione di altri

aspetti. L'articolo fu scritto nel tentativo di rimediare allo sbilanciamento e di farlo in un modo specifico.

Negli anni che sono trascorsi, hanno avuto luogo molti sviluppi nel campo della matematica e dei computer; e sento che le mie opinioni hanno trovato una certa approvazione e supporto nelle comunità di educatori, ricercatori e filosofi.

Penso che l'influenza del nucleo irriducibile formalista/logicista dell'establishment matematico si sia ora attenuata in qualche modo. È cresciuta una generazione che potrebbe essere molto più visiva che verbale (Ahimè, possibilmente. […])[18]

Occupandomi nel presente contesto prevalentemente dell'intuizione in matematica, è opportuno prendere in considerazione il fatto che, nonostante il generale clima di ostilità nei confronti di tale "facoltà", durante il Novecento un numero considerevole di matematici e fisici di primo piano rimasero convinti che approcci di tipo logico (come quelli di Frege e Russell o degli empiristi logici), assieme alla teoria degli insiemi e al metodo assiomatico, non fornissero strumenti sufficienti ed adeguati per una fondazione sicura di matematica e fisica. Ciononostante, essi manifestarono idee anche molto distanti fra loro riguardo a che cosa dovesse intendersi con il termine intuizione e, salvo sicuramente i casi eccezionali di Felix Klein e Henri Poincaré, il punto di vista generale rimase confinato all'interno di indagini fondazionaliste che avevano come punto di riferimento l'intuizione pura di Kant. Questo è sicuramente il caso non solo di Brouwer e dell'intuizionismo in

[18] Davis, 1993, p. 333: «[…] it had been my perception (then shared with only a small minority of my own colleagues) that since about 1840 mathematicians have increasingly latched onto to one aspect of the mathematical enterprise, viz., proof, and have placed an exaggerated and unbalanced emphasis on it to the exclusion of other aspects. The article was written in an attempt to redress the unbalance and to do it in one particular way.
In the years that have passed, many mathematical and computer developments have taken place; and I feel that my opinions have found a measure of approbation and support both in the educational, research, and philosophic communities.
I think that the influence of the hard core formalist/logicist mathematical establishment has now abated somewhat. A generation has grown up that may be far more visual than verbal (Alas, possibly. […]).»

generale, di Kurt Gödel ed Hermann Weyl, ma anche, in particolare, di David Hilbert.

Quello che, ad ogni modo, è emerso chiaramente dalle ricerche storico-filosofiche recenti riguardarti l'epistemologia hilbertiana, le quali hanno preso in esame i manoscritti inediti delle lezioni universitarie tenute a Göttingen, è che, a differenza di quanto tradizionalmente tramandato, il punto di vista di Hilbert in merito alla conoscenza matematica prendeva in considerazione un approccio formalista solo per quanto riguarda le sue ricerche sui fondamenti della matematica e, anche in quel caso, attribuendo al metodo assiomatico solamente un ruolo di verifica retrospettiva dei sistemi formali. Quello che è, pertanto, emerso dai lavori, per citarne alcuni, di Ulrich Mayer, Leo Corry, Michel Hallet, Tilman Sauer, è che Hilbert attribuiva un ruolo essenziale all'intuizione, non solo per assicurare solide basi all'aritmetica, ma anche alla geometria e alla fisica, mostrando un'epistemologia essenzialmente di stampo kantiano.

Ad ogni modo, l'idea di intuizione cui voglio riferirmi nel presente lavoro, è stata senz'altro difesa, per l'ultima volta con forza solo da Klein e da Poincaré. Esulando dal presente lavoro la possibilità di trattare il punto di vista di Poincaré, mi limiterò a dire qualcosa sul punto di vista di Klein e su come solamente negli ultimi due decenni del secolo scorso si sia riaperta una discussione riguardante l'intuizione in un senso vicino a quello inteso da Klein.

Infatti con Klein è in gioco una visione globale della matematica che la vede inserita all'interno di una rete interconnessa di discipline. Per Klein, ma in fondo anche per Hilbert e per buona parte dei matematici della "scuola di Göttingen", la conoscenza matematica è una forma di conoscenza che non si esaurisce nella ricerca di dimostrazioni e, tantomeno, si può distinguere nettamente dalle altre scienze con cui entra in contatto. Vi è un *continuum* che ha ai suoi estremi matematica pura e matematica applicata, e, in questo quadro, la pratica matematica può e deve essere sottoposta non solo a indagini logiche e fondazionali, ma, al fine di dirimere annose controversie, anche alla ricerca psicologica e fisiologica. Una posizione quantomeno fuori dagli schemi per gran parte della matematica e della filosofia della matematica che conosciamo oggi; una posizione che trova una sua *seconda possibilità* solo dopo quasi un secolo, nella ricerca contemporanea di matematici come i già citati Davis e Hersh, oppure, dal lato della filosofia, di autori (oltre a Tymozcko, Aspray e Kitcher) i quali stanno riproponendo un approccio che guarda alla pratica matematica in modo più aperto e generale. Tra questi, Solomon Feferman, Paolo Mancosu e Marcus Giaquinto, sono alcuni tra quelli che stanno dato un contributo particolarmente significativo alla riscoperta del ruolo del pensiero visivo e dell'intuizione in matematica.

Per quanto riguarda, invece, l'apporto proveniente dalla ricerca in quell'ambito multidisciplinare che, comunque, potremmo catalogare sotto l'etichetta generale delle *scienze cognitive*, una buona parte dei contributi appartengono a studi sulla didattica della matematica e sui suoi relativi risvolti psicologici e neurofisiologici.

A partire da un punto di vista a cavallo tra pedagogia e scienze cognitive, potremmo infatti enumerare i lavori di George Polya o quelli di Seymour Papert riguardanti lo sviluppo del linguaggio di programmazione LOGO. Quindi i contributi di Andrea DiSessa, il quale tuttora dirige il progetto BOXER, evoluzione del LOGO, e che ha condotto alcune tra le più interessanti ricerche sperimentali al fine di costruire una teoria dell'intuizione. Mentre, guardando ad un punto di vista più generale e filosofico, non strettamente matematico, possiamo ricordare l'opera di Michael Polanyi.

Significativo e decisamente innovativo è invece l'apporto di Stanislas Dehaene che, come detto, è un matematico che si è dedicato al tentativo di fornire una comprensione dell'attività matematica dal punto di vista del funzionamento cerebrale. Degno di nota, oltre al suo volume *The Number Sense*, è la creazione di un vero e proprio progetto di ricerca "kantiano" che ha visto la luce attraverso l'organizzazione del *24th Attention & Performance meeting* riguardante "Space, Time and Number: Celebral Foundations of Mathematical Intuitions" che si è tenuto a Vaux de Cernay presso Parigi nel 2010, i cui contributi sono confluiti nel volume *Space Time and Number in the Brain*, pubblicato nel 2011.

Più di tutti, è però particolarmente degno di nota il lavoro compiuto da Efraim Fischbein, psicologo di origine rumena nonché presidente e fondatore della *School of Education* della *Tel Aviv University*, il quale, raccogliendo i risultati di tutte le precedenti ricerche, nel suo *Intuition in Sciences and Mathematics* (1987), cerca di esporre una teoria dell'intuizione basata su una più ampia evidenza proveniente dalla ricerca sperimentale.

Il ritorno alla pratica matematica

Da un punto di vista storico, il significato dei termini "intuizione" e "visualizzazione" è sempre stato sovrapposto in vari modi. In questa sede, seguendo la presentazione del tema dei rapporti tra visualizzazione e logica in matematica, data da Mancosu (2005), assumerò un significato ampio di visualizzazione che comprende sia il ragionamento per mezzo di immagini mentali, l'immaginazione, sia la percezione visiva di immagini, siano queste disegni, grafici su un foglio di carta, diagrammi oppure immagini, spesso dinamiche e manipolabili, costruite con l'aiuto della *computer grafica*. In questo senso il ragionamento per mezzo di diagrammi in matematica è pertanto un particolare ambito di applicazione del ragionamento visivo. Per ora, quindi, assumerò che il termine "intuizione" sia in qualche modo assimilabile a quello di "visualizzazione", chiarito con ciò che non si intenda l'intuizione in senso tecnico kantiano. Seguendo Valeria Giardino, possiamo condividere l'affermazione secondo cui «intuizione e visualizzazione sono parti interconnesse di una vasta rete di conoscenze che ha per risultato l'apprendimento e l'applicazione della pratica matematica»[19].

Benché una spiegazione generale, storica e filosofica, delle cause che hanno determinato un tale stato di cose sia lungi

[19] Giardino 2010, 39: «Intuition and visualization are interconnected parts of a vast web of knowledge that results in the learning and in the application of a mathematical practice.»

dall'essere raggiunta, nel corso del Novecento una serie di fattori concomitanti condussero al prevalere di un atteggiamento diffuso di diffidenza nei confronti dell'uso di diagrammi, specialmente nelle dimostrazioni, e, più in generale, nei confronti di tutto ciò che era considerato visuale. Questo atteggiamento contribuì a gettare discredito su quanto era in qualche modo assimilabile a uno strumento visivo e in particolare colpì il concetto di intuizione geometrica. Esempi particolarmente noti di questo atteggiamento sono la pubblicazione di testi come *Einführung in die Differential- und Integralrechnung* (1934) di Edmund Landau (1934), un testo di calcolo differenziale ed integrale nel quale non compare nemmeno una figura, ma anche, più in generale, l'emergere in Francia della cosiddetta "scuola di Boubaki".

La cattiva reputazione che accompagna il pensiero visivo può senz'altro considerarsi legata all'emergere degli studi fondazionali e alla diffusione di standard di maggior rigore logico-formale, riassumibili in quella generale tendenza che prese il nome di "aritmetizzazione" e, di conseguenza, ad una caratterizzazione in senso sempre più linguistico-formale del concetto di dimostrazione. Infatti, in generale, le menti meno fondamentaliste, come, ad esempio, David Hilbert, ammettevano l'uso di figure e, anzi, ne fecero ampio ricorso, raccomandando sempre però una particolare attenzione e l'appello, in ultima analisi, alla logica, al fine di verificare la correttezza delle conclusioni raggiunte.

In generale si escluse nettamente ogni ricorso all'intuizione e alla visualizzazione all'interno dei processi dimostrativi, ma si lasciò comunque spesso aperta la possibilità di ricorrervi all'interno del contesto della scoperta, dove queste potevano avere un ruolo coadiuvante, di semplificazione, ma, assolutamente, non di fondazione. Solo negli ultimi venti anni circa del Novecento, si è ricominciato, da più parti, a guardare alla matematica come a una pratica complessa nella quale i processi visivi potevano giocare un ruolo imprescindibile non solo nella scoperta, ma anche nella stessa dimostrazione. E, anche in questo caso, al cambiamento di «stile matematico»[20] hanno contribuito diversi fattori.

Mancosu elenca sicuramente come prima concausa lo sviluppo delle tecnologie nell'ambito della *computer science*, le quali hanno permesso di dotare la matematica di importanti strumenti e tecniche di visualizzazione. Egli elenca due aree principali paradigmatiche di come la computer grafica si sia mostrata in tutte le sue potenzialità, ossia la teoria dei frattali, la quale sarebbe stata altrimenti impossibile, e la geometria differenziale, dove, ad esempio, la possibilità di costruire immagini di superfici attraverso l'approssimazione numerica ha permesso di cogliere indizi, riguardanti proprietà matematiche, essenziali al raggiungimento di risultati rigorosi. Inoltre, benché l'enfasi sugli aspetti visuali della matematica sia il più delle volte relegata al loro valore euristico e pedagogico, una sorta di concessione momentanea rispetto all'esigenza del rigore, vi sono interessanti eccezioni a questa regola: filosofi e matematici che mettono in discussione il concetto stesso di dimostrazione e che cercano di stimolare un allargamento degli orizzonti della matematica oltre il contesto della giustificazione.

Il ruolo epistemico della visualizzazione

La recente raccolta di saggi dal titolo *The Philosophy of Mathematical Practice*, a cura di Paolo Mancosu – preceduta dall'altra a cura dello stesso autore, *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, pubblicata nel 2005 – ha «l'ambizione di portare un po' di aria fresca nella filosofia della matematica»[21]. I saggi contenuti nel volume cercano, infatti, di estendere le questioni trattate dall'epistemologia della matematica oltre quei confini che, perlomeno negli ultimi cinquant'anni, sono stati eccessivamente ristretti e concentrati su questioni ontologiche. Stando agli autori, è necessario che l'attenzione venga rivolta verso «produttività, evidenza,

[20] Mancosu, 2005, p. 17.
[21] Mancosu, 2008, p. 1: «The ambitious aim of bringing some fresh air to the philosophy of mathematics.»

visualizzazione, ragionamento diagrammatico, comprensione, spiegazione ed altri aspetti dell'epistemologia della matematica che sono ortogonali al problema dell'accesso agli "oggetti astratti"»[22], focalizzando contemporaneamente l'attenzione sulla pratica matematica, considerata come «una condizione necessaria per un rinnovamento della filosofia della matematica»[23]. Il libro affronta otto argomenti principali, otto differenti aspetti: *visualizzazione, ragionamento diagrammatico, spiegazione purezza dei metodi, concetti e definizioni, aspetti filosofici dell'uso della computer science in matematica, teoria delle categorie e fisica matematica* – ma ciò che è più importante è il fatto che questi autori non si impegnano in alcuna forma di polemica nei confronti della tradizione fondazionalista e per questo si differenziano nettamente da autori precedenti che si sono occupati di filosofia della pratica matematica come, ad esempio, Lakatos e i lakatosiani, Kitcher o Tymoczko. Come ribadisce Mancosu stesso nella sua introduzione:

> Noi stiamo chiedendo, in generale, un'apertura verso una filosofia della matematica che sia capace di affrontare argomenti che la tradizione fondazionalista ha ignorato. Ma ciò non significa che noi pensiamo che i risultati di questa tradizione dovrebbero essere buttati via o ignorati in quanto irrilevanti per la filosofia della matematica. […], noi non accantoniamo la tradizione analitica in filosofia della matematica ma piuttosto cerchiamo di estendere le sue radici ad una molteplicità di aree che sono state, nel complesso, ignorate.[24]

---

[22] Mancosu, 2008, pp. 1-2: «Fruitfulness, evidence, visualization, diagrammatic reasoning, understanding, explanation, and other aspects of mathematical epistemology which are orthogonal to the problem of the access to "abstract objects".»

[23] Mancosu, 2008, p. 2: «A necessary condition for a renewal of the philosophy of mathematics.»

[24] Mancosu, 2008, p. 18: «We are, by and large, calling for an extension to a philosophy of mathematics that will be able to address topics that the foundationalist tradition has ignored. But that does not mean that we think that the achievements of this tradition should be discarded or ignored as being irrelevant to philosophy of mathematics. […], we do not dismiss the analytic tradition in philosophy of mathematics but rather seek to extend its roots to a variety of areas that have been, by and large, ignored.»

All'interno di questo gruppo di autori merita una particolare menzione Marcus Giaquinto. Infatti, Giaquinto propone un programma di ricerca che, per usare le parole di Mancosu, ha «un sapore kantiano»[25], dato che egli cerca di *riscoprire un ruolo epistemico* per il pensiero visivo. Egli cerca, infatti, di mostrare in che modo il pensiero visivo possa andare oltre il ruolo euristico che tradizionalmente viene accettato all'interno del processo della scoperta. E, nel fare ciò, fa appello alla psicologia cognitiva.

Egli mostra innanzitutto come la visualizzazione possa essere usata al fine di scoprire nuove verità, quantomeno nell'ambito della geometria elementare, ponendo il vincolo fondamentale di considerare questo processo di scoperta nel senso di una scoperta *individuale*, ossia il processo per mezzo del quale ciascuno di noi giunge a credere, in un modo ritenuto affidabile, una verità. In questo senso egli intende riportare l'accento su un modo di impostare la ricerca epistemologica da tempo caduto in disuso, e che pone al centro dell'attenzione l'individuo. Ponendo l'accento sull'individuo, risulta molto più facile riconoscere il ruolo basilare e diffuso che il pensiero visivo ha in tutti gli ambiti della matematica.

> Perché [...] non riaprire l'indagine propria dei primi pensatori, da Platone a Kant, riguardo alla natura e all'epistemologia delle basilari credenze e abilità matematiche di un individuo? Perché non guardare ad ogni genere di pensiero in matematica, partendo dal più semplice, al fine di capire la sua natura e valutarne la posizione epistemica? Non è necessario andare molto lontano lungo questa strada per notare l'onnipresenza del pensiero visivo in matematica.[26]

[25] Mancosu, 2005, p. 22.
[26] Giaquinto, 2007, p. 7: «Why not [...] reopen the investigation of earlier thinkers from Plato to Kant into the nature and epistemology of an individual's basic mathematical beliefs and abilities? Why not look at every kind of thinking in mathematics, starting with the simplest, in order to understand its nature and assess its epistemic standing? One does not need to go very far along this road in order to notice the omnipresence of visual thinking in mathematics.»

Il punto di riferimento di Giaquinto non è quindi l'attività di ricerca propria dei matematici di professione la quale, in generale, è sempre stata riduttivamente considerata solo limitatamente alla dimostrazione di teoremi. Quindi, come primo passo, l'indagine epistemologica di Giaquinto suggerisce uno spostamento dell'attenzione dalla comunità all'individuo e, come secondo passo, cerca di comprendere il modo in cui gli individui giungano a credere che qualcosa sia vero, interrogandosi sulla provenienza delle premesse ultime, accettate dalle persone, aprendo la sua ricerca con la domanda: «Da dove acquisiamo le nostre credenze geometriche di base?»[27].

Egli suggerisce che possediamo delle «disposizioni alla formazione di credenze»[28] le quali vengono innescate dalla percezione visiva o dall'immaginazione, e che le credenze così acquisite costituiscono *una sorta di conoscenza sintetica a priori*, dato che si suppone che queste tendenze alla formazione di credenze siano affidabili. Nel suo *Visual Thinking in Mathematics* (2007), Giaquinto raccoglie i vari aspetti della sua proposta epistemologica, approfondendo sia il ruolo della visualizzazione nella scoperta sia nella dimostrazione di semplici verità geometriche, proposta che riprende anche in *Visualizing in Mathematics* del 2008.

Dimostrazioni e diagrammi

Come mostra Giaquinto dimostrandolo per casi semplici, il ruolo epistemico dell'intuizione e del pensiero visuale riguarda anche quell'attività che è considerata la più pura di tutte, ossia la dimostrazione dei teoremi. Tradizionalmente le tecniche di visualizzazione sono sempre state permesse nel contesto della scoperta, ad un livello puramente euristico, ma sono sempre state bandite dal contesto della giustificazione. Si riteneva che esse potessero solo semplificare o facilitare la conoscenza, ma che non fossero affidabili nel momento in cui si voleva darle solide fondamenta. Questa posizione è stata messa in discussione

[27] Giaquinto, 2005, p. 31: «How do we acquire our basic geometric beliefs?»
[28] Giaquinto, 2005, p. 31: «Belief forming dispositions.»

da Jon Barwise e John Etchemendy, i quali hanno affermato la necessità di attribuire un ruolo legittimo a forme di rappresentazione visiva nelle dimostrazioni matematiche.

Benché il loro lavoro sia in gran parte inserito nella tradizione teorica fondazionalista, Barwise ed Etchemendy sono stati i sostenitori di un punto di vista eretico che prevede la possibilità di dimostrazioni basate non solo sul linguaggio ma su forme di rappresentazione multiple, le quali includono anche il ragionamento cosiddetto *diagrammatico*. La loro assunzione di fondo è che il ragionamento è un'attività eterogenea e, sulla base di questo, mirano a sviluppare sistemi formali che utilizzino elementi diagrammatici, mostrando che la semantica è altrettanto importante quanto la sintassi. Ciononostante, come già osservato, il loro approccio è ancora ampiamente inserito nell'ambito della teoria della dimostrazione ed essi non mettono in questione la nozione stessa di dimostrazione ma vogliono solo ampliarne le potenzialità introducendo al suo interno elementi visuali. I due autori non sono però direttamente interessati al problema della visualizzazione e neppure forniscono adeguati chiarimenti riguardo ai criteri che dovrebbero permettere di distinguere un sistema visuale da un sistema puramente linguistico. Come osserva Mancosu, Barwise ed Etchemendy mostrano come il modello tradizionale del rigore linguistico possa essere espanso al fine di comprendere forme rigorose di inferenza contenenti elementi diagrammatici. Ciononostante essi non superano il tradizionale atteggiamento che vede la matematica ridotta ad attività dimostrativa.

> Vi sono altre importanti finalità epistemiche come la scoperta (nel senso descritto da Giaquinto), la spiegazione, la comprensione, la genesi dei concetti ecc., di cui la filosofia della matematica dovrebbe rendere conto.[29]

Se da una parte Mancosu osserva che «il lavoro riguardante il ragionamento diagrammatico rende conto solo di una parte

[29] Mancosu, 2005, p. 26: «There are any other important epistemic goals, such as discovery (in Giaquinto's sense), explanation, understanding, genesis of concepts etc., that philosophy of mathematics should account for.»

molto limitata del nostro uso di strumenti visuali nella nostra esperienza logica e matematica»[30], dall'altra egli rileva come questo lavoro mostri quanto gli strumenti visivi siano meno problematici di quanto si pensi normalmente. Infatti il medium visivo richiede di essere attentamente controllato, caso per caso, al fine di non introdurre presupposizioni o limitazioni che sono estranee alla rappresentazione di volta in volta considerata.

Riguardo al ruolo dell'intuizione nell'ambito della dimostrazione, Malcom R. Westcott, nel suo *Psychology of Intuition* cita Alfred Cyril Ewing, filosofo inglese di certo molto lontano dalla filosofia analitica anglosassone. Questi, infatti, in *Intuition and Reason* (1941), propone l'idea che anche il ragionamento deduttivo richieda una sorta di visione immediata nel passaggio da una premessa alla conclusione, un passaggio che non ha alcun'altra giustificazione se non il fatto di essere *visto*. Egli afferma che la ragione non ha la possibilità di giustificare la deduzione, può solo dedurre dalle premesse la relativa conclusione, ma ogni atto deduttivo deve essere visto come vero intuitivamente. Ogni passaggio di una deduzione logica, ogni inferenza non ulteriormente analizzata è di fatto una connessione intuitiva. In ogni passo dalla premessa alla conclusione si è solo spostato il ruolo dell'intuizione un livello più indietro, all'interno dell'inferenza implicita in ogni passaggio.

> L'inferenza e l'intuizione sono collegate. L'inferenza presuppone sempre l'intuizione per fornire i collegamenti nell'inferenza, ma d'altra parte l'inferenza è necessaria a supportare, preparare e sviluppare l'intuizione.[31]

L'interazione tra inferenza e intuizione ha quattro caratteristiche: primo, ciò che può essere visto immediatamente

---

[30] Mancosu, 2005, p. 26: «The work on diagrammatic reasoning accounts for a very minimal part of our employment of visual tools in our logical and mathematical experience.»

[31] Ewing, 1941, p. 102, citato in Westcott, 1968, p. 18: «So inference and intuition are linked together. Inference always presupposes intuition to provide the links in the inference, but on the other hand inference is needed to support, prepare for, and develop intuition.»

può essere testato ma non dimostrato in maniera mediata, valutando la sua coerenza in relazione alla conoscenza a disposizione; secondo, il ragionamento può rendersi necessario al fine di chiarire ciò che è stato visto attraverso l'intuizione; terzo, l'allenamento all'intuizione per mezzo dell'esplorazione razionale di un soggetto aiuta a produrre intuizioni corrette; quarto, le intuizioni false possono essere eliminate per mezzo della ragione, chiarificando la provenienza dell'errore.

L'intuizione per Ewing è dunque un processo basilare che fornisce le verità elementari che sono usate nell'inferenza deduttiva e, dunque, nella dimostrazione.

Visualizzazione e interpretazione

In opposizione alla proposta epistemologica di Marcus Giaquinto, si muovono Kajsa Bråting e Johanna Pejlare (2008) e, indipendentemente, Valeria Giardino (2010), le quali, pur ritenendo che una giusta considerazione del ruolo assunto dalla visualizzazione nella pratica matematica permetta di affermare che essa possa incrementare la nostra capacità di comprensione, e che, in generale, non vi siano ragioni valide per concludere che l'intuizione non sia affidabile, condividono un approccio critico nei confronti dell'idea avanzata da Giaquinto riguardo alla possibilità di poter isolare un contributo puro del pensiero visuale, ossia libero da elementi linguistici, affermando che non esiste una netta distinzione tra le due aree.

La principale critica nei confronti di Giaquinto è costituita dall'idea che una rappresentazione intuitiva o visiva sia sempre dipendente dal bagaglio di conoscenze e dall'esperienza propria del soggetto di volta in volta considerato. In altre parole, intuizione e pensiero visuale sono dipendenti dal livello di conoscenza matematica della singola persona e, in particolare, l'interpretazione di una visualizzazione non è unica ma dipende dall'osservatore. È proprio il livello individuale di questa conoscenza di fondo che permette ad un osservatore di vedere in senso lato la generalità delle conclusioni ottenute per mezzo di strumenti visivi. Perciò l'espressione inglese "I see nel senso di “capisco”, con il suo richiamo al comprendere nel senso di *vedere distintamente*, sottintende un livello di comprensione diretta ed intuitiva profonda che trova senz’altro espressione nell’intuizione geometrica la quale, però, affermano Bråting e Pejlare, è dipendente dal soggetto, dato che la possibilità di capire intuitivamente dipende dalle conoscenze pregresse e dal tipo di cultura di ciascuno. Le due autrici, senza voler togliere valore alla visualizzazione, puntano l’attenzione sul ruolo che la conoscenza e l’esperienza dell’osservatore giocano nell’interpretazione di un diagramma, nella comprensione di ciò che in esso rimane non detto o detto “tra le righe”. Quindi la visualizzazione ha un significato dipendente dal livello di conoscenza matematica e dall’esperienza del singolo osservatore, cosa che Giaquinto, nella sua analisi, tralascia di considerare.

Parallelamente, in un saggio congiunto, Mario Piazza e Valeria Giardino, si esprimono in maniera analoga:

> Per “vedere” si sottintende il risultato di un percorso culturale, che porta a sapere cosa cercare in un’immagine guidati da un sviluppato senso di rilevanza e di aspettativa. Dobbiamo pazientemente imparare a leggere anche le immagini.[32]

Per gli autori una conoscenza di cosa sia realmente significativo in una figura porta ad indebite semplificazioni o ad arricchimenti del messaggio che la visualizzazione, magari, non era intesa a convogliare. Nel sottolineare il fatto che «non esiste un vedere e basta»[33], essi ritengono che la distinzione tra immagini e linguaggio sia una falsa dicotomia. Affermano cioè che non sia possibile distinguere nettamente visivo e non visivo, le forme geometriche dal linguaggio che le esprime. Se però il riconoscimento del carattere necessariamente integrato del ragionamento matematico è, a mio avviso, facilmente condivisibile, non altrettanto è l’affermazione che “non esista un vedere e basta”. Questa apre, infatti, la questione di cosa sia, allora, quel pensiero “tacito” che ognuno può sperimentare in prima persona, imponendo, ad esempio, il silenzio al pensiero

[32] Giardino & Piazza, 2008, p. 32.
[33] Giardino & Piazza, 2008, p. 32.

linguistico e mettendo in pratica le tecniche di “disegno capovolto” suggerite da Betty Edwards (2002). Concludendo, a questo proposito, mi pare si dimentichino troppo spesso gli insegnamenti della *Gestaltenpsychologie*, che qui di seguito possono essere ricordati con le parole di Rudolf Arnheim:

> Io sostengo che le operazioni cognitive chiamate pensiero non siano il privilegio di processi mentali al di sopra ed oltre la percezione ma sono gli ingredienti essenziali della percezione stessa. […] Queste operazione non sono la prerogativa di nessuna funzione mentale; esse sono il modo in cui le menti sia dell’uomo che dell’animale trattano il materiale cognitivo ad ogni livello. Non vi è differenza di base in questo rispetto tra ciò che accade quando una persona guarda il mondo direttamente e quando siede con gli occhi chiusi e “pensa”.
>
> […]
>
> Devo ampliare il significato dei termini “cognitivo” e “cognizione” fino ad includere la percezione. Similmente, non vedo modo di negare il nome di “pensiero” da ciò che accade nella percezione. Non sembrano esistere processi di pensiero che non possano essere trovati in azione, almeno di principio, nella percezione. La percezione visiva è il pensiero visivo.[34]

Verso una teoria dell’intuizione

Il termine “intuizione” può essere collocato all’interno di diverse aree di indagine: anzitutto, nell’ambito della risoluzione dei problemi e quindi del pensiero produttivo, dell’euristica,

[34] Arnheim, 1969, pp. 13-14: «My contention is that the cognitive operations called thinking are not the privilege of mental processes above and beyond perception but the essential ingredients of perception itself. […] These operations are not the prerogative of any one mental function; they are the manner in which the minds of both man and animal treat cognitive material at any level. There is no basic difference in this respect between what happens when a person looks at the world directly and when he sits with his eyes closed and “thinks”.
[…]
I must extend the meaning of the terms “cognitive” and “cognition” to include perception. Similarly, I see no way of withholding the name of “thinking” form what goes on in perception. No thought processes seem to exist that cannot be found to operate, at least in principle, in perception. Visual perception is visual thinking.»

dell'intuizione intesa come illuminazione; quindi nel campo delle immagini visive e dei modelli, delle rappresentazioni, dell'immaginazione mentale; ancora in quello delle credenze e dei relativi livelli di fiducia, dell'intuizione come conoscenza non mediata ed apparentemente certa; e, non ultimo, anche nell'ambito della dimostrazione.

Ciò che emerge osservando l'insieme delle casistiche in cui una qualche forma di intuizione è direttamente o indirettamente chiamata in causa, è l'assenza di una comune definizione, al posto della quale si trova solo una serie di concetti confusi e, spesso, scorrelati, quando non reciprocamente contraddittori. Ciò che appare chiaro è l'assenza totale di una teoria coerente dell'intuizione.

Nel panorama desolante della letteratura scientifica riguardante l'intuizione, il volume *Intuition in Science and Mathematics*, pubblicato nel 1987 dallo psicologo rumeno Efraim Fischbein, costituisce senza dubbio il più importante contributo alla chiarificazione del concetto di intuizione in matematica.[35]

Fischbein, cerca di enucleare una teoria soddisfacente che metta ordine nella complessa rete di significati che emergono dalla tradizione filosofica e scientifica facendo uso – e questa è la novità della sua proposta – degli strumenti messi a disposizione dalla ricerca sperimentale, in particolare nell'ambito della didattica della matematica. Per Fischbein il motivo per cui l'uso del termine intuizione, nonostante le sue ripetute delegittimazioni, risulta ancora difficile da scalzare in tutti i campi della conoscenza è dato dal fatto che esso esprime un'esigenza naturale, quasi istintiva, propria di ogni essere umano. Questa è data dalla necessità di agire, la quale può avvenire solo in presenza di rappresentazioni certe, assolutamente affidabili: l'intuizione esprime la necessità di

[35] Un progetto di ricerca, quello di Fischbein, continuato tutt'oggi da uno dei suoi allievi, David Tall, "Professor in Mathematical Thinking" presso l'università di Warwick, i cui contributi al tema dell'intuizione e della visualizzazione in matematica sono di notevole importanza. Purtroppo però, proprio a causa della vastità della sua opera, non è stato possibile trattarla in questa sede.

vedere con la mente allo stesso modo in cui vediamo con gli occhi, dal momento che, a differenza della realtà percepita, quella parte del mondo che è costituita dal ragionamento e dal linguaggio possiede solo una forma di certezza indiretta, convenzionale e priva di una valenza pratica.

Presupposto fondamentale della teoria di Fischbein è il fatto che, essendo ogni passaggio di un ragionamento logico o matematico, di fatto, una scelta, il ragionamento nel suo complesso è esso stesso una forma di comportamento, e, in quanto tale, richiede di essere basato su rappresentazioni certe dotate di un significato comportamentale.

> Per quanto possa apparire paradossale, è stato principalmente un effetto dello sforzo scientifico verso il rigore il fatto che, nella storia della scienza, le ricche implicazioni della conoscenza intuitiva sono state rivelate e descritte.
>
> È attraverso lo sforzo di esplicitare e purificare quella che è la struttura formale, deduttiva della scienza che gli scienziati e i filosofi hanno scoperto gli effetti fondamentali (sia positivi che negativi) dei meccanismi intuitivi presenti nel comprendere, nel risolvere, nell'inventare e nell'imparare.[36]

L'intuizione è quindi una forma di conoscenza radicata nel nostro comportamento e un prodotto del nostro adattamento evolutivo. Ciò non significa che l'intuizione sia la fonte di una conoscenza vera, ma solo che essa deve *apparire* tale. L'intuizione crea l'apparenza della certezza in merito alle nostre interpretazioni e rappresentazioni. Essa può certamente condurre a errori, dato che il processo di *traduzione intuitiva* deve offrire solo una rappresentazione globale, internamente strutturata, che implica un estrapolazione che va necessariamente oltre l'informazione direttamente accessibile.

---

[36] Fischbein, 1987, p. 8: As paradoxical as it may appear, it is mainly as an effect of the scientific endeavor towards rigour, in the history of science, that the rich implications of intuitive knowledge have been revealed and described.
It is by striving to render explicit and to purify the formal, the deductive structure of science that scientists and philosophers have discovered the fundamental effects (both positive and negative) of intuitive mechanisms in understanding, solving, inventing and learning.

In quest'ottica, osserva Fischbein, la varietà dei significati attribuiti al termine deriva dalla moltitudine di situazioni che è necessario affrontare e dai differenti strumenti attraverso i quali si può fornire l'apparenza di una certezza *intrinseca*, che non necessita di alcun fondamento ulteriore.

Il linguaggio, la logica, e, più in generale, il ragionamento, hanno distrutto l'unità tra conoscenza e comportamento. Da una parte questi strumenti permettono di ottenere informazioni non direttamente accessibili, dall'altra sono privi di requisiti comportamentali. È quindi necessaria una traduzione in termini di rappresentazioni orientate all'azione. Nel caso della matematica, in particolare con l'elaborazione del metodo assiomatico, «la mente umana sembra aver imparato dalle proprietà generali di base della realtà empirica come creare un mondo immaginario, strutturato, similmente governato da regole e similmente capace di consistenza e credibilità»[37]. «*Ciononostante*» osserva Fischbein, «*sembra che l'intero sistema rimanga sterile se non mantiene un intimo contatto con le sue fonti pratiche, originali e autentiche*»[38].

È l'intuizione che conferisce agli elementi concettuali quelle proprietà che ne permettono la manipolazione all'interno del pensiero produttivo, assegnando, inconsciamente, ai concetti e alle operazioni formali delle interpretazioni che soddisfano alcuni requisiti comportamentali. Le rappresentazioni devono essere dirette e globali, capaci di essere *mappe* per il comportamento, di suggerire *un'attività costruttiva*, e, infine, di *andare oltre* la particolare rappresentazione data, ossia essere delle istantanee di processi dinamici.

> Il nostro punto di vista *è che si tende sempre, quasi automaticamente, a produrre interpretazioni complementari delle strutture concettuali le quali, per loro propria natura, saranno capaci di conferire ai concetti*

[37] Fischbein, 1987, p. 16: «The human mind seems to have learned from the basic general properties of empirical reality how to build an imaginary, structured world, similarly governed by rules and similarly capable of consistency and credibility.»

[38] Fischbein, 1987, p. 17: «*Nevertheless, it seems that the whole system remains sterile if it does not keep an intimate contact with its original, authentic, practical sources.*»

usati la diretta credibilità, la consistenza e la necessità intrinseca richieste da un normale comportamento produttivo.[39]

Il nostro comportamento simbolico, esattamente come il nostro comportamento pratico, necessita di essere fondato su fatti che siano apparentemente oggettivi e indubitabili. Un esempio elementare è la nozione di "linea retta", la quale non è un oggetto, ma solo un concetto normativo, dato che non esistono linee rette in natura: ha solo un significato pratico. Ciononostante esso ha delle caratteristiche di autoevidenza e credibilità che non ci fanno dubitare di sapere con certezza di cosa stiamo parlando.

I principali attributi della conoscenza intuitiva sono quindi l'*immediatezza* – ossia, nella terminologia di Fischbein, l'evidenza intrinseca – e la *certezza diretta*: un comportamento, anche se mentale, non è possibile se non basandosi, in modo automatico ed inconscio, su una certa quantità di dati accettabili come intrinsecamente affidabili.

> Le rappresentazioni intuitive non scompariranno dagli sforzi della matematica semplicemente perché si decide che tali rappresentazioni danneggino il rigore di un processo di ragionamento formale. Essi rimarranno perché sono una parte integrante di ogni attività intellettuale produttiva.[40]

Riassumendo, Fischbein elenca otto caratteristiche generali comuni alle conoscenze intuitive:

1. L'autoevidenza: il *sentimento* che una conoscenza non ha bisogno di alcuna giustificazione, è auto-esplicativa, come un giudizio analitico kantiano.

---

[39] Fischbein, 1987, p. 19: «Our point of view is that *one tends always, almost automatically, to produce complementary interpretations of the conceptual structures which, by their very nature, will be able to confer on the concepts used the direct credibility, consistency and intrinsic necessity acquired by a normal, productive behavior*.»

[40] Fischbein, 1987, p. 21: «Intuitive representations will not disappear from mathematical endeavors merely because one decides that such representations do harm to the rigor of a formal reasoning process. They will remain because they are an integral part of any intellectual productive activity.»

2. La certezza intrinseca: il *sentimento* di convinzione o confidenza con cui una conoscenza si impone.
3. La perseveranza: ossia la capacità a sopravvivere agli attacchi, alle contraddizioni, quali ad esempio quelle mostrate da un'analisi formale.
4. La *coercitività*: il fatto che le intuizioni si impongono soggettivamente come se nessun'altra alternativa è possibile, cioè sono viste come interpretazioni o rappresentazioni assolute.
5. Lo *stato di teoria*: un'intuizione è una mini-teoria, poiché include in sé *l'universalità* di ciò che rappresenta attraverso una particolare realtà. È una "visione dinamica" che, pur usando una particolare rappresentazione, un modello, va oltre l'evidenza che è praticamente possibile realizzare.
6. L'*estrapolatività*: il fatto che un'intuizione va sempre oltre i dati a disposizione sebbene ciò sia inconsapevole. L'intuizione nasconde la sua incompletezza, non ha le caratteristiche del tirare a indovinare, dato che è percepita come certa.
7. La *globalità*: un carattere che rimanda al concetto di *Gestalt*, dato che l'intuizione è una conoscenza strutturata la quale offre una visione unitaria e globale.
8. L'*implicitezza*: ossia il fatto che i processi mediante i quali le intuizioni prendono corpo sono in gran parte inconsci.

In definitiva, conclude Fischbein, il quadro può prendere corpo e coerenza se si pensa all'intuizione attraverso l'analogia con la percezione visiva. Ma la teoria che egli propone è qualcosa di più di una semplice analogia:

> L'intuizione realizza, a livello intellettivo, la funzione che la percezione adempie a livello sensoriale: l'intuizione è il preludio cognitivo diretto all'azione (mentale o pratica). Essa organizza

> l'informazione in una struttura significativa dal punto di vista comportamentale ed intrinsecamente credibile.[41]

Ciò può essere facilmente compreso se pensiamo a quel che accade in un comportamento comune quale attraversare la strada. In uno sguardo rapido e globale otteniamo un'immagine strutturata della velocità delle auto, delle relative distanze, prevedendo, contemporaneamente, ciò che potrà avvenire in futuro. Pur non conoscendo con certezza le variabili in gioco, adattiamo il nostro comportamento in maniera automatica sulla base di quell'immagine composita, fatta di eventi passati e futuri, in cui ciò che è plausibile è indistinguibile da ciò che è certo.

Il pensiero tacito

La conclusione a cui giunge Fishbein di un'analogia fondamentale tra l'intuizione e la percezione rimanda direttamente all'opera di Michael Polaniyi.

Quest'ultimo, infatti, affrontando il problema della scoperta scientifica in *The Logic of Tacit Inference* (1964), rileva un'analogia profonda tra la logica della scoperta e la percezione, dato che entrambe possono essere ottenute solo per mezzo di quelli che egli chiama i "poteri taciti" della mente.

> […] La capacità degli scienziati di percepire nella natura la presenza di forme durevoli differisce dalla percezione ordinaria solo per il fatto che essa può integrare forme che la percezione ordinaria non può facilmente gestire. *La conoscenza scientifica consiste nel discernimento di Gestalten che indicano una vera coerenza presente in natura*.[42]

---

[41] Fischbein, 1987, p. 56: «Intuition fulfills, at the intellectual level, the function fulfilled by perception at the sensorial level: intuition is the direct, cognitive prelude to action (mental or practical). It organizes information in a behaviorally meaningful and intrinsically credible structure.»

[42] Polanyi, 1969, p. 138: «The capacity of scientists to perceive in nature the presence of lasting shake differs from ordinary perception only by the fact that it can integrate shapes that ordinary perception cannot readily handle.

Polanyi mette in rilievo l'importanza degli studi sulla percezione condotti dalla *Gestaltenpsychologie*, i quali hanno mostrato quali operazioni e quali leggi sovrintendono alla determinazione di tale coerenza nell'ambito della visione. Il potere di *percepire* la coerenza si basa infatti sull'integrazione di indizi mutevoli che costituiscono l'oggetto della percezione stessa.

> Mentre l'integrazione di indizi nelle percezioni può essere virtualmente facile, l'integrazione di indizi che portano ad una scoperta può richiedere sforzi prolungati sotto la guida di doti naturali eccezionali. Ma la differenza è solo di estensione e di grado: la transizione dalla percezione alla scoperta è continua. La logica dell'integrazione percettiva può servire perciò come un modello della logica della scoperta.[43]

Tale processo integrativo è basato su due generi di "indizi", ossia gli indizi *subliminali* e quelli *marginali* laddove i primi sono inconsapevoli, come ad esempio le contrazioni muscolari che sono implicate in una percezione, e i secondi sono invece quelli che, pur essendo appartenenti al campo percettivo, rimangono al di fuori della nostra attenzione. Vi sono quindi, in relazione a questi indizi, due tipi di consapevolezza, una *sussidiaria* ed una *focale*, laddove la prima è, per l'appunto, sussidiaria alla seconda ed entrambe sono fondamentali per l'*apprensione tacita* della coerenza.

Polanyi osserva come già William Wehwell[44] aveva descritto il modo in cui osservazioni isolate cambiano la loro apparenza funzionale quando, con la scoperta, si uniscono in un tutto a formare una teoria scientifica.

Scientific knowing consists in discerning gestalten that indicate a true coherence in nature.»

[43] Polanyi, 1969, p. 139: «While the integration of clues to perceptions may be virtually effortless, the integration of clues to discoveries may require sustained efforts guided by exceptional gifts. But the difference is only of range and degree: the transition from perception to discovery is unbroken. The logic of perceptual integration may serve therefore as a model for the logic of discovery.»

[44] Vedi Polanyi, 1969, p.140.

> Possiamo dire che una scoperta scientifica riduce la nostra consapevolezza focale delle osservazioni in una consapevolezza sussidiaria di esse, spostando la nostra attenzione da esse alla loro coerenza teorica.
>
> Questo atto di integrazione, che possiamo identificare sia nella percezione visiva degli oggetti che nella scoperta di teorie scientifiche è il potere tacito che stavamo cercando. Lo chiamerò *conoscenza tacita*.[45]

Vi è quindi un processo di integrazione che unisce ciò che è sussidiario con ciò che è focale, causando quella modificazione dell'apparenza funzionale che le parti assumono nel momento in cui viene riconosciuta l'apparenza integrata propria del "tutto", e che è stata ben descritta dalla psicologia della *Gestalt*. Ma l'analogia tra conoscenza scientifica e percezione può essere spinta oltre, riconoscendo come in entrambe vi siano elementi sussidiari non specificabili: vi è acquisizione di conoscenza attraverso passaggi che non possiamo esprimere chiaramente, di cui non sappiamo parlare e che, quindi, è una conoscenza "tacita", ossia "intuitiva".

> Questo meccanismo può quindi descrivere l'intuizione scientifica, per la quale non è fino ad oggi nota nessun altra spiegazione. Tale intuizione non è la conoscenza suprema immediata, chiamata intuizione da Leibniz o Spinoza o Husserl, ma è un'abilità ordinaria di congetturare in modo scientifico, con la possibilità di congetturare correttamente.[46]

La conoscenza esplicita, ossia basata sull'inferenza logica esplicita, è inefficace se non è fondata sulla conoscenza tacita:

---

[45] Polanyi, 1969, p. 140: «We may say that a scientific discovery reduces our focal awareness of observations into a subsidiary awareness of them, by shifting our attention from them to their theoretical coherence.
This act of integration, which we can identify both in the visual perception of objects and in the discovery of scientific theories is the tacit power we have been looking for. I shall call it *tacit knowing*.»

[46] Polanyi, 1969, p. 144: «This mechanism may then account for scientific intuition, for which no other explanation is known so far. Such intuition is not the supreme immediate knowledge, called intuition by Leibniz or Spinoza or Husserl, but a work-a-day skill for scientific guessing with a chance of guessing right.»

«una conoscenza *totalmente* esplicita è impensabile»[47]. L'ideale delle scienze esatte è, invece, basato su una teoria che si limita a connettere i fatti *focalmente* osservabili, un'idea di conoscenza impersonale, pubblica, nella quale «la parte della conoscenza tacita è ridotta all'atto di applicare la teoria all'esperienza, e questo atto passa inosservato»[48].

Dal momento che quest'immagine delle scienze è stata sottoposta a revisione e che i propositi del positivismo logico di fondare la conoscenza su relazioni esplicite tra linguaggio osservativo e linguaggio teorico sono stati ampiamente ridimensionati, Polanyi suggerisce un mutamento di campo, riconoscendo il ruolo esercitato dai processi mentali "taciti" nell'ambito della formalizzazione.

> La formalizzazione della conoscenza tacita espande immensamente i poteri della mente, creando un meccanismo di pensiero preciso, ma apre inoltre nuove strade all'intuizione; ogni tentativo di ottenere un controllo completo del pensiero per mezzo di regole esplicite è auto contraddittorio, sistematicamente fuorviante e culturalmente distruttivo. La ricerca della formalizzazione trova la sua giusta collocazione all'interno di una struttura tacita.
>
> In quest'ottica non vi è giustificazione per approcci separati alla spiegazione scientifica, alla scoperta scientifica, all'apprendimento ed al significato. Questi si basano in ultima analisi sullo stesso processo tacito di comprensione. Il vero *significato* della terza legge di Keplero fu *scoperto* da Newton quando lo *spiegò* come il risultato della gravitazione generale; ed imparare per mezzo dell'intuizione ha gli stessi tre aspetti su una scala minore.[49]

---

[47] Polanyi, 1969, p. 144: «A *wholly* explicit knowledge is unthinkable.»

[48] Polanyi, 1969, p. 151: «The part of tacit knowing is reduced to the act of applying the theory to experience, and this act goes unnoticed.»

[49] Polanyi, 1969, p. 156: «Formalization of tacit knowing immensely expands the powers of the mind, by creating a machinery of precise thought, but it also opens up new paths to intuition; any attempt to gain complete control of thought by explicit rules is self-contradictory, systematically misleading and culturally destructive. The pursuit of formalization will find its true place in a tacit framework.
In this light, there is no justification for separate approaches to scientific explanation, scientific discovery, learning and meaning. They ultimately rest on the same process of understanding. The true *meaning* of Kepler's Third

I primitivi fenomenologici (p-prims)

Un altro contributo importante in direzione della costruzione di una teoria dell'intuizione proviene dall'opera di Andrea diSessa il quale, attraverso le sue ricerche a cavallo tra *computer science* e didattica, nell'ambito delle scienze, ha elaborato il concetto di "primitivo fenomenologico", ossia un particolare elemento della conoscenza intuitiva.

Il termine p-prims (*phenomenological primitives*) è stato coniato da diSessa al fine di descrivere quella gran quantità di elementi caratteristici della conoscenza intuitiva i quali diventano particolarmente evidenti nel momento in cui sperimentiamo qualcosa che li sovverte, provocando in noi una reazione di sorpresa. Il termine indica quindi una categoria di "pezzi" semplici e "piccoli" della conoscenza intuitiva. DiSessa indica, ad esempio, quello che definisce il *p-prim di Ohm*, ossia l'idea intuitiva che riteniamo "logicamente" necessario che per compiere qualcosa sia necessario uno sforzo, al quale si oppone una certa resistenza, proprio come nel caso della legge di Ohm per l'elettricità. Il risultato finale risulterà, inoltre, direttamente proporzionale allo sforzo impiegato.

Il significato del termine "primitivi fenomenologici" sta ad indicare che essi sono anzitutto intuizioni elementari non diversamente spiegabili, di cui non sappiamo giustificare a parole il motivo per cui le riteniamo vere; invece l'aggettivo "fenomenologici" sta a significare che:

> I p-prims sono evidenti nella nostra esperienza del mondo. Molti aspetti della nostra esperienza consistono precisamente nel riconoscimento del senso che ha il mondo in termini di p-prims. Percepiamo i fenomeni attraverso i p-prims, e quei fenomeni sono per noi sensibili proprio per questo motivo.[50]

Law was *discovered* by Newton, when he *explained* it as an outcome of general gravitation; and learning by insight has the same three aspects on a minor scale.»

[50] diSessa, 2000, p. 91: «P-prims are evident in our experience of the world. Many aspects of our experience are precisely the recognition of the p-prim

I p-prims sono ovvi ed auto-esplicativi benché, come ogni altra conoscenza, non siano sempre corretti. Essi hanno vari usi, dalla regolazione delle nostre azioni, al fine di avere particolari effetti, alla focalizzazione dell'attenzione nel caso della ricerca di problemi o errori e, in particolare entrano in gioco nel giudizio di ragionevolezza o irragionevolezza riguardo a qualcosa. La conoscenza che si ottiene per mezzo dei p-prims è, in un certo senso, opposta a quella di tipo logico.

> Per riassumere, i p-prims sono *ricchi* e *diversi*; costituiscono un sistema di conoscenza fondamentalmente *frammentato*. In contrasto, la logica è *scarsa* e *omogenea* nella struttura delle situazioni con cui ha a che fare. È anche sistematizzabile dal punto di vista matematico – coerente in un senso che i p-prims non possono mai avere. I p-prims sono generativi e flessibili; la logica è *chiusa* e "rigida". Da ultimo, mentre la logica ed il linguaggio vanno mano nella mano, i p-prims non si connettono molto bene con il linguaggio. [...] La logica è *articolata*; i p-prims non lo sono.[51]

DiSessa, infine, mette in evidenza come la conoscenza intuitiva sia sempre stata vista in modo critico e negativo da psicologi ed educatori ma, possiamo aggiungere, da tutta la comunità scientifica e, in particolare, da quella matematica:

> La conoscenza intuitiva venne notata solo quando le persone esprimevano idee spagliate. Le idee venivano dette "pregiudizi", e per

---

sense that the world makes. We perceive phenomena through p-prims, and those phenomena are sensible to us because of that.»

[51] diSessa, 2000, p. 97: «To sum up, p-prims are *rich* and *diverse*; they constitute a fundamentally *fragmented* knowledge system. In contrast, logic is *sparse* and *homogeneous* in the structure of situations with which it deals. It is even mathematically systematizable—coherent in a sense p-prims can never be. P-prims are *generative* and *flexible*; logic is *closed* and "stiff". Finally, although logic and language can go hand in hand, p-prims don't connect very well with language. [...] Logic is *articulate*, p-prims are not.»

lungo tempo le persone si comportarono come se esse non potessero essere in alcun modo produttive.[52]

Ciononostante – continua diSessa – «le idee intuitive sono frequentemente efficaci, se non "corrette." Infatti, in circostanze più usuali, esse funzionano perfettamente bene. E se ciò non accade, probabilmente avremmo dovuto imparare diverse p-prims.»[53]

Il senso del numero

Oltre ai lavori di Roger W. Sperry, un contributo importante e molto recente in direzione di una chiarificazione del concetto di intuizione proveniente dalle neuroscienze, è dato dal lavoro del matematico e neuroscienziato francese Stanislas Dehaene.

Dehaene, non solo è autore di un importante testo il cui titolo è proprio *The Number Sense*, la cui prima edizione risale al 1997, riveduta e aggiornata nel 2011, ma è anche il curatore del volume *Space, Time and Number in the Brain* (2011), nel quale sono raccolti i lavori del *24th Attention and Performance meeting*, tenutosi nel 2011 vicino Parigi, riguardante "Space, Time and Number: Cerebral foundations of mathematical Intuitions": un meeting concepito con l'intento di «chiarificare i fondamentali punti di convergenza e divergenza tra le rappresentazioni di numero, spazio e tempo»[54], e dare l'avvio ad un programma di ricerca che può senz'altro essere definito *kantiano*.

Basandosi su varie ricerche sperimentali riguardanti sia l'uomo sia varie specie animali, e seguendo una suggestione

---

[52] diSessa, 2000, p. 97: «Intuitive knowledge was noticed only when people expressed *wrong* ideas. The ideas were called "misconceptions," and for a long time people acted as if they could not be productive at all.»

[53] diSessa, 2000, p. 97: «Intuitive ideas are frequently effective, if not "correct". In fact, in most usual circumstances, they work perfectly well. If they didn't, we'd probably had learned different p-prims.»

[54] Dehaene & Brannon, 2011, p. x : «To clarify the fundamental points of convergence and divergence between the representations of number, space, and time.»

dovuta a Tobias Dantzig – il quale, nel 1967 pubblicò *Number: the Language of Science* –, Dehaene propose, nel 1997, l'ipotesi dell'esistenza di un "senso del numero" capace di rendere possibile, nell'uomo come nell'animale, un'intuizione diretta di grandezze numeriche approssimate.

L'idea di avanzata da Dehahene si basa su due assunzioni generali: da una parte l'evidenza sperimentale, ampiamente confermante negli ultimi decenni, secondo la quale l'uomo condivide con gli altri animali una capacità di percepire in maniera rapida e intuitiva quantità numeriche approssimate; dall'altra, l'ipotesi secondo cui la matematica può essere considerata come un parassita che invade i sistemi cerebrali inizialmente destinati ad un uso completamente diverso[55]. Esperimenti mediante risonanza magnetica funzionale (fRMI) hanno, infatti, evidenziato l'esistenza di un'area, *la parte orizzontale del solco intraparietale* (hIPS), la quale si attiva ogni volta che si viene posti di fronte ad un numero, indipendentemente dalla modalità in cui questo viene presentato, (ossia indipendentemente dal fatto che si tratti di un'insieme di punti, di oggetti, la cifra araba "3", oppure la relativa parola scritta o pronunciata per esteso). Ciò che è sorprendente è che questa area si attiva in connessione con il concetto che viene comunicato. Ed è stato mostrato che la sua attivazione varia a seconda delle "dimensioni" o della maggiore o minore "vicinanza" del numero poiché quest'area risponde al concetto di quantità codificandolo analogicamente.

Dehaene osserva come ci troviamo di fronte ad una vera e propria facoltà che permette, anche senza una conoscenza diretta del concetto di numero, di riconoscere cambiamenti numerici in piccole collezioni di oggetti. Un dato sperimentale estremamente interessante è il fatto che il nostro cervello, nonostante le utili elaborazioni concettuali dell'aritmetica rigorosa, posto di fronte ai numerali arabi li tratta alla stregua di quantità analogiche esattamente come fa qualunque altro animale, come, ad esempio, uno scimpanzé, posto di fronte ad una collezione di oggetti. Questo fenomeno, è stato rilevato attraverso esperimenti

[55] Vedi Dehaene, 2011, p. xx:

che misurano la velocità delle operazioni mentali, quali ad esempio il riconoscimento del numero più grande tra due, i quali vengono sottoposti al soggetto sperimentale. I risultati riportano una velocità molto maggiore nel riconoscere numeri di grandezza molto diversa fra loro, come 2 e 9, rispetto a numeri vicini, quali, ad esempio, 5 e 6. Ciò suggerisce che nascosta da qualche parte nel nostro cervello vi sia una rappresentazione analogica delle proprietà quantitative dei numerali arabi la quale preserva la prossimità delle relazioni tra di loro. Dato che ciò avviene anche nel caso di numeri a due cifre, Dehaene suggerisce che il nostro cervello apprenda anche questi ultimi numeri come un tutto, che trasformi la rappresentazione simbolica in cifre arabe in una grandezza, in una *quantità interna*, effettuando la comparazione tra queste quantità, dimenticando la rappresentazione simbolica. In un articolo dal titolo *Origins of Mathematical Intuition* (2009), Dehaene presenta tutta una serie di ricerche che mostrano come l'intuizione matematica sia un concetto che può essere studiato in laboratorio, quantomeno nel caso dell'aritmetica. Qui, egli mostra come l'"intuizione aritmetica" possa essere considerata nei termini di una complessa rete di conoscenze che vanno dalla valutazione rapida ed approssimata delle quantità, ai citati esperimenti riguardanti il confronto tra numeri, o al riconoscimento immediato della verità o falsità di operazioni aritmetiche elementari.

Inoltre, se questa specifica regione si attiva specificamente nel momento in cui operiamo con l'aritmetica, un'altra scoperta è che «il concetto di numero è strettamente legato a quelli di spazio e tempo in quest'area del cervello. I neuroni che si occupano di queste dimensioni sono mescolati all'interno delle stese aree della corteccia»[56], cosa che spiega le numerose interferenze rilevate in ambito sperimentale tra i numeri e l'uso di termini spaziali per indicarne le relazioni.

> Quando pensiamo ai numeri, o facciamo aritmetica, non ci basiamo solamente su un concetto di numero astratto, purificato,

[56] Dehaene, 2011, p. 244: «The concept of number is closely linked to those of space and time in this brain area. The neurons that deal with these dimensions are intermixed within the same patches of cortex.»

etereo. Il nostro cervello immediatamente collega il numero astratto a nozioni concrete di dimensione, luogo e tempo. Non facciamo aritmetica "in astratto." Piuttosto, usiamo i circuiti cerebrali per compiere compiti matematici che servono anche per guidare le nostre mani ed i nostri occhi nello spazio – circuiti che sono presenti nel cervello della scimmia e certamente non si sono evoluti per la matematica ma sono stati acquisiti ed utilizzati in ambiti diversi. […] Nel caso dell'aritmetica, cominciamo con un senso del numero approssimato che condividiamo con gli altri animali e che coinvolge i lobi parietali. Come la nostra aritmetica si espande verso funzioni umane nuove ed uniche, come l'addizione a due cifre, questi nuovi concetti possono essere rappresentati nel cervello, almeno in parte, solo perché le funzioni esistenti nella corteccia circostante vengono *riciclate* per questo nuovo uso. Così, l'aritmetica invade le aree vicine che codificano lo spazio ed i movimenti oculari.[57]

[57] Dehaene, 2011, p. 246: «When we think about numbers, or do arithmetic, we do not rely solely on a purified, ethereal, abstract concept of number. Our brain immediately links the abstract number to concrete notions of size, location and time. We do not do arithmetic "in the abstract." Rather, we use brain circuits to accomplish mathematical tasks that also serve to guide our hands and eyes in space – circuits that are present in the monkey brain, and certainly did not evolve for mathematics, but have been preempted and put to use in a different domain. […] In the case of arithmetic, we start out with a sense of approximate number that we share with other animals, and which involves the parietal lobes. As our arithmetic expands to entirely novel and uniquely human functions, such as two-digit addition, these novel concepts can only be represented in the brain, at least in part, because existing functions in the nearby cortex are *recycled* for this new use. Thus, arithmetic invades the nearby areas coding for space and eye movements.

L’esempio storico di Felix Klein

Permetta ancora un’osservazione riguardo a geometri ed analisti. È vero che nessuno più di me ne è persuaso, che i geometri non tengono in generale abbastanza d’occhio i progressi dell’analisi; ma è del pari vero che gli analisti in generale disprezzano la geometria e non vi badano punto. Solo Lei e tutta la Sua scuola sanno valersi dell’analisi quanto della geometria e fonderle insieme in una scienza: la Matematica.[58]
Corrado Segre

È difficile sottovalutare l’importanza storica di Felix Klein. vissuto a cavallo fra Ottocento e Novecento, egli fu un matematico di primissimo piano, non solo per il valore dei suoi contributi nell’ambito della ricerca, ma anche perché seppe raccogliere intorno a sé una delle scuole matematiche più importanti del ventesimo secolo, facendo della piccola città di Göttingen il più importante centro di ricerca matematica d’Europa, almeno fino all’avvento al potere del nazismo. Egli fu un abile organizzatore che volle, e seppe, richiamare attorno a sé, con giochi di politica accademica, un complesso ed equilibrato mix di personalità matematiche, al fine di coprire un ventaglio il più ampio e integrato possibile di approcci, scuole e tendenze innovative.

Inoltre, Klein fu uno dei pochi che ebbe il coraggio di manifestare apertamente idee scomode e controcorrente rispetto alla maggioranza dei suoi colleghi.

> Tra i professori universitari della nostra materia [...] l’intuizione è frequentemente non solo sottovalutata ma, per quanto possibile, ignorata. Questa è senza dubbio una conseguenza della tendenza aritmetizzante della moderna matematica. Ma il risultato va molto oltre l’obiettivo prefissato. È il momento giusto di affermare

[58] Segre, Lettera a Klein, 17/X/1890.

apertamente, e una volta per tutte, che ciò implica non solo una falsa pedagogia, ma anche un'immagine distorta della nostra scienza.[59]

Klein espresse sempre un'opposizione aperta, ma mai dogmatica, nei confronti di quel processo di *aritmetizzazione* che, anche nelle sue manifestazioni più timide, intendeva bandire dall'ambito della matematica proprio ciò che egli riteneva essenziale e irrinunciabile, ossia *l'intuizione*. L'opera di Klein rappresenta perciò un esempio storico particolarmente significativo, poiché fortemente caratterizzata da un metodo di lavoro che in prima approssimazione potremmo definire di tipo *intuitivo* e *geometrico* anche negli ambiti della matematica più astratta, in netta controtendenza rispetto ai paradigmi ufficiali.

Quello che dalla sua opera traspare è quindi un'immagine della matematica, e una corrispondente teoria della conoscenza, che, pur avendo nel Novecento subito un lungo periodo di oblio, possono essere riscoperte e *riconsiderate* alla luce del mutato atteggiamento che caratterizza la ricerca matematica e filosofica degli ultimi venti anni. Analizzando la sua vastissima produzione, costituita in gran parte da trascrizioni derivanti dai corsi universitari, tra cui traduzioni inglesi da lui stesso rivedute e corrette, e da un altrettanto imponente *Nachlass* composto da manoscritti (prime stesure dei volumi in seguito pubblicati, appunti delle lezioni, protocolli di seminari ecc.) è possibile tentare una ricostruzione, almeno parziale, del quadro epistemologico che emerge dal gran numero di digressioni filosofiche di cui essa è costellata. È da notare che, a discapito del valore storico e filosofico, che qui cercherò di mostrare, vi è una sorprendente scarsità di ricerche riguardanti l'epistemologia di Felix Klein. Si può dire che egli, fino ad oggi, sia stato sostanzialmente dimenticato, ricordato solamente, e spesso

[59] Klein 1896, 248: «Among the university professors of our subject […] intuition is frequently not only undervalued, but as much as possible ignored. This is doubtless a consequence of the intrinsic importance of the arithmetizing tendency in modern mathematics. But the result reaches far beyond the mark. It is high time to assert openly once for all that this implies, not only a false pedagogy, but also a distorted view of the science.»

confusamente, per quel *Programma di Erlangen* che diede avvio alle ricerche sulla teoria dei gruppi.

In quel che segue viene proposta una sommaria ricostruzione degli aspetti epistemologici che caratterizzano l'opera di Klein, cercando di mostrare – sulla falsa riga di ciò che è stato fatto nei decenni scorsi nel caso di David Hilbert – come un eminente esponente della comunità matematica, nei primi decenni del Novecento, potesse difendere un'idea della matematica molto distante da quella successivamente, ancora oggi, tramandata.

Verranno posti in evidenza, in particolare, tre casi paradigmatici interni agli ambiti di ricerca cui Klein rivolse particolare attenzione ed interesse, nei quali è possibile riscontrare, in modo tangibile, l'importanza rivestita dall'intuizione e dal pensiero visivo:

- Il primo è dato dalla linea di pensiero che Klein seguì a partire da una serie di studi riguardanti le geometrie non euclidee e che condusse all'elaborazione del cosiddetto *Programma di Erlangen*, ossia alla prima enunciazione delle linee programmatiche riguardanti la teoria dei gruppi (in seguito sviluppata principalmente dall'amico Sophus Lie).
- Il secondo caso descrive la creazione, sostanzialmente dimenticata dalla ricerca storica e filosofica, di quella che Klein battezzò come "matematica dell'approssimazione" [*Approximationsmathematik*] la quale, opposta alla "matematica della precisione" [*Präzisionsmathematik*], era nata come risposta al problema dei "mostri matematici" – ossia funzioni *patologiche* appositamente studiate per mettere in crisi l'intuizione geometrica – in particolare, per quel che concerne gli aspetti controintuitivi riscontrati nella relazione tra *continuità* e *derivabilità*.
- Il terzo esempio riguarda l'elaborazione che Klein fece, nell'ambito dell'analisi complessa, del concetto di "superficie di Riemann", che pone in rilievo quel che potremmo definire il "pensiero fisico" di Klein, ossia l'uso che egli fece di esempi intuitivi tratti dalla fisica al fine di risolvere problemi di matematica pura, rendendo così visibili, e creativamente manipolabili, anche problemi appartenenti alle geometrie più astratte e lontane dall'esperienza tridimensionale.

Il primo caso permette di apprezzare il lavoro condotto da Klein in relazione all'unificazione dell'allora caotico territorio delle geometrie (euclidee e non euclidee); il secondo il tentativo di superare l'artificiosa separazione tra geometria e algebra, fornendo una legittimazione epistemica all'intuizione "geometrica". Il terzo e ultimo caso mostra invece come, all'interno della sua epistemologia, abbia potuto considerare, senza fatica, in maniera fondamentalmente non problematica, e tutt'altro che irragionevole, l'efficacia della matematica nella fisica.

Intuizione, aritmetizzazione e idealizzazione

Come ci ricorda J. Alberto Coffa, nel suo *La tradizione semantica da Kant a Carnap*, nel corso dell'Ottocento quel particolare tipo di *necessità* derivante dall'intuizione pura, che, nell'architettura kantiana, caratterizza i giudizi sintetici a priori, cominciò ad essere messa in discussione.

> Dall'inizio dell'Ottocento, l'intuizione pura di Kant passò un brutto periodo. La rigorizzazione del calcolo bandiva l'intuizione dai concetti di funzione, continuità, limite, infinitesimo, e da tutto ciò che aveva suscitato le giustificate lamentele di Berkeley. L'aritmetizzazione dell'analisi aveva relegato l'intuizione pura del tempo nell'aritmetica, dove Frege le avrebbe presto inferto un colpo mortale [...]. La matematica, tuttavia, non era soltanto la teoria di grandezze astratte, numeri, funzioni, e infinitesimi; era anche la scienza dello spazio, la geometria, e qui i kantiani potevano star sicuri che l'intuizione non sarebbe mai stata detronizzata. O così sembrò per un certo tempo.[60]

I motivi di questa supposta "crisi" riguardante l'epistemologia di Kant traevano origine da alcune scoperte riguardanti sia l'aritmetica che la geometria e, quindi, la fisica. Ciò che lentamente venne alla luce durante il diciannovesimo secolo, di fatto, fu la stretta relazione che legava la filosofia di

[60] Coffa, 1998, p. 73.

Kant alla conoscenza propria del suo tempo, in particolare alla fisica newtoniana.

Senza voler assolutamente entrare nelle discussioni inerenti l'esegesi kantiana, quello che qui interessa porre in evidenza è come l'intuizione pura, intesa come intuizione a priori, spaziale e temporale, fondamento di quella necessità [*Anschauungsnotwendigkeit*] propria dei giudizi sintetici a priori, ossia i giudizi della matematica e in particolare della geometria, cominciò a un tratto ad essere guardata con sospetto e a non essere più considerata come una fonte di giudizi ben fondati. L'idea di un'intuizione temporale alla base dell'aritmetica e di un'intuizione spaziale alla base della conoscenza geometrica cominciò, infatti, a vacillare nel momento in cui, da una parte, si iniziò a ricercare una comprensione più rigorosa e formalmente fondata della matematica – mettendone in discussione la natura stessa, in particolare nel caso dell'aritmetica, fino a giungere alle ben note ricerche sui fondamenti della matematica e alla distinzione di posizioni formaliste, logiciste, intuizioniste – e, dall'altra, a partire dalla scoperta delle geometrie non euclidee, si iniziò quel processo di distinzione di una della geometria puramente astratta, ed assiomatica, dalla cosiddetta *geometria dello spazio fisico* che ebbe il suo coronamento finale nel Novecento, con l'opera di Albert Einstein.

Limitandomi semplicemente a ricordare che, per quanto riguarda la cosiddetta "rivoluzione" innescata dalla scoperta delle geometrie non euclidee fu l'idea di geometria euclidea come teoria fisica ad essere messa in discussione, e, quindi, l'idea di un'intuizione geometrica di tipo euclideo quale *forma privilegiata* di intuizione a subire un ridimensionamento – considerato tra l'altro che, a ben vedere, il primato dell'intuizione euclidea avrebbe già dovuto essere messo in discussione dalla nascita della geometria proiettiva – concentrerò piuttosto l'attenzione sulla supposta "crisi" dell'intuizione geometrica proveniente dall'ambito dell'analisi, ossia da quell'insieme di approcci rigorosi e fondazionali che, per intenderci, condusse al ben noto uso delle definizioni "ε, δ".

Del resto il clima di ostilità nei confronti dell'intuizione e degli strumenti visivi in generale non era certo una novità se già

Lagrange, anticipando di più di un secolo Edmund Landau – il quale scrisse un celebre testo di calcolo differenziale ed integrale senza inserirvi neppure un grafico[61] –, presentava con un certo orgoglio i suoi volumi di *meccanica analitica* con le seguenti parole:

> Non si troveranno figure in quest'opera. I metodi che espongo non richiedono né costruzioni né ragionamenti geometrici o meccanici, ma solamente le operazioni algebriche assoggettate ad un modo di procedere regolare ed uniforme.[62]

Questo processo, che, in seguito, prese il nome di "aritmetizzazione" e che incluse una varietà di programmi di ricerca che si proponevano di realizzare una fondazione non geometrica principalmente dell'analisi, ma anche di tutte le altre discipline matematiche – può essere in parte fatto risalire ad alcune riflessioni presenti nelle *Disquisitiones Arithmeticae* di Gauss ed ebbe il suo apice nella seconda metà dell'Ottocento, all'incirca intorno agli anni '70-'80, allorché il concetto di numero venne definitivamente separato da quello di "grandezza", in coincidenza con la massima influenza esercitata dalla scuola di Berlino e dalla figura di Karl Weierstrass.

Tenuto conto che il concetto di aritmetizzazione assunse significati differenti in autori diversi[63], si può dire in prima approssimazione che con tale termine si indica quel processo di rigorizzazione della matematica condotto sulla base della sola aritmetica, tendendo ad identificare con essa la matematica pura, al fine di sfuggire i possibili inganni derivanti, principalmente nell'ambito dell'analisi, dall'uso di metodi non rigorosi di tipo geometrico e, quindi, intuitivo.

Il termine "aritmetizzazione" fece la sua comparsa verso la fine del diciannovesimo secolo e, stando a José Ferreiros[64], fu

---

[61] Landau, 1934.

[62] Lagrange, 1811, pp. i, Vol. 1: «On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, raisonnemens géométriques ou mécaniques , mais seulement des opérations algébriques, assujéties à une marche régulière et uniforme.»

[63] Per approfondimenti si veda Petri & Schappacher, 2007.

[64] Vedi Ferreiros, 2007, p. 212.

introdotto per la prima volta proprio da Klein nel suo articolo del 1895 *Über Arithmetisierung der Arithmetik*[65], mentre il verbo "aritmetizzare" fu utilizzato da Kroneker in un articolo del 1887, *Über den Zahlbegriff*[66].

L'articolo di Klein, tratto da un discorso tenuto all'Accademia Reale delle Scienze di Göttingen in occasione dell'ottantesimo compleanno di Karl Weierstrass, è centrato sul tema dell'influenza esercitata dall'aritmetizzazione sulla relazione tra aritmetica e geometria e affronta il problema del rischio concreto, che Klein percepisce, di una rottura dell'unità della matematica non solo interna ma anche nella relazione con le scienze applicate che di essa fanno uso.

Klein, che, come vedremo in quel che segue, ha sempre percepito in modo particolarmente marcato la propria distanza da Weierstrass, con la cui scuola non si può dire corressero buoni rapporti[67], approfitta dell'occasione per esprimere la propria insoddisfazione per quell'*Arithmetisierung* di cui Weierstrass era uno dei principali esponenti. Osservando quindi che:

> Laddove prima un diagramma serviva da dimostrazione, adesso troviamo continue discussioni riguardo a quantità che diventano più grandi di, o che possono essere pensate più piccole di, qualunque piccola quantità data.[68]

Klein osserva che «questo è il metodo di Weierstrass in matematica, il "rigore di Weierstrass," come si dice.»[69] Ma l'aritmetizzazione della matematica è per Klein anche l'insieme di una serie di sviluppi che, partendo da Gauss, giungono non solo a Weierstrass, ma passano anche per Kroneker, il quale, rifiutando l'uso dei numeri irrazionali, mostra chiaramente come

[65] Klein, 1895.
[66] Kronecker, 1887.
[67] Vedi Rowe, 1986, pp. 432-434.
[68] Klein, 1896, p. 242: «Where formerly a diagram served as proof, we now find continual discussions of quantities which become smaller than, or which can be taken smaller than, any given small quantity.»
[69] Klein, 1896, p. 242: «This is the Weierstrassian method in mathematics, the "Weierstrass'sche Strenge," as it is called.»

in realtà non esista uno standard assoluto di rigore ed esattezza, e per Peano, con il suo contributo al raffinamento del linguaggio matematico.

Nonostante egli riconosca l'importanza di questi sviluppi, il suo atteggiamento è ambivalente, positivo e negativo insieme:

> Siccome io ritengo che il punto essenziale non sia il porre l'argomento in forma puramente aritmetica, ma la più rigida logica ottenuta per mezzo di questa forma, mi sembra desiderabile – e questo è il lato positivo della mia tesi – sottoporre le rimanenti divisioni della matematica ad un'indagine fresca basata sula fondazione aritmetica dell'analisi. D'altro canto devo far notare con convinzione – e questa è la parte negativa del mio compito – che non è possibile trattare la matematica esaustivamente per mezzo del metodo della sola deduzione logica, ma che, anche al momento attuale, l'intuizione ha la sua specifica sfera d'azione.[70]

Considerato, quindi, che l'aritmetizzazione ha bandito l'intuizione spaziale, per prima cosa Klein propone una riconciliazione tra i metodi aritmetici e la nostra concezione dello spazio così da ottenere piuttosto un raffinamento dell'intuizione spaziale. La concezione dello spazio tridimensionale descrivibile mediante i numeri reali è per Klein solo un'idealizzazione realizzata postulando un sistema assiomatico, ma la realtà è che «in definitiva percepiamo che l'intuizione spaziale è una concezione inesatta»[71]. La proposta di Klein è quindi quella di riconoscere all'intuizione spaziale dei limiti di precisione, una sorta di "potere risolutivo" il quale però, mediante un adeguato allenamento, può essere migliorato e può includere tutta la matematica necessaria nelle applicazioni

---

[70] Klein, 1896, p. 242: «For since I consider that the essential point is not the mere putting of the argument into the arithmetical form, but the more rigid logic obtained by means of this form, it seems to me desirable – and this is the positive side of my thesis – to subject the remaining divisions of mathematics to a fresh investigation based on the arithmetical foundation of analysis. On the other hand I have to point out most emphatically – that it is not possible to treat mathematics by the method of logical deduction alone, but that, even at the present time, intuition has its special province.»

[71] Klein, 1896, p. 244: «We ultimately perceive that space intuition is an inexact conception».

pratiche. Qui Klein, indirettamente, sta presentando quella proposta che poi prenderà corpo nella successiva definizione di un vero e proprio programma di ricerca geometrico riguardante la cosiddetta "matematica dell'approssimazione", che descriverò meglio più avanti. E un programma di ricerca analogo, che porti ad una riconciliazione anche tra la matematica pura e la fisica matematica, rimanda direttamente alle ricerche di Klein sulle superfici di Riemann.

Klein osserva come, attraverso la generalizzazione di risultati sperimentali, si giunga di solito all'adozione di teoremi riguardo ad oggetti idealizzati (facendo uso dello stesso processo di idealizzazione che viene applicato all'intuizione spaziale) che, considerati astrattamente, come teoremi di una matematica esatta, risultano in generale validi. Egli ritiene perciò che, se da una parte la fisica sperimentale può portare a scoperte puramente matematiche, le indagini della fisica matematica, condotte secondo criteri di chiarezza e rigore, apportino un rinnovamento che va oltre l'intuizione fisica, ossia conferiscono una sorta di "integrità intellettuale" alle ricerche sperimentali.

Il processo di idealizzazione è un elemento importante nella concezione della matematica di Klein poiché è alla base della creazione della matematica applicata: questo è basato sull'interpolazione dei dati, poiché nello stabilire leggi a partire da dati sperimentali è necessario considerare le leggi più semplici che connettono le quantità essenziali, trascurando gli elementi di disturbo. E questo processo di idealizzazione è realizzato dall'intuizione, mentre la riflessione logica entra in gioco, nel suo ambito di diritto, «solo quando l'intuizione ha terminato il suo compito di idealizzazione.»[72]

Questa breve esposizione del discorso tenuto nel 1895 contiene in sé sostanzialmente tutti gli elementi caratteristici dell'epistemologia di Klein e, in particolare, la specificazione del ruolo che egli attribuisce all'intuizione. Questa è divisa in due distinte componenti, una educata attraverso il metodo del rigore e l'altra di tipo ingenuo, vicina al pensiero visivo ed alla

[72] Klein, 1895, p. 238: «Die Logische Überlegung tritt allemal erst in ihr Recht, wenn die Anschauung die Aufgabe der Idealisierung vollzogen hat.»

percezione, la quale mostra e mantiene il suo valore indipendentemente dal processo di aritmetizzazione. Klein vuole pertanto assicurare un ruolo all'intuizione in questo secondo significato all'interno delle scienze matematiche:

> Non sto adesso pensando alla forma educata di intuizione raffinata appena discussa, cioè all'intuizione che è stata sviluppata sotto l'influenza della deduzione logica e che preferirei indicare come una forma di memoria, quanto piuttosto all'intuizione *naïve*, in gran parte un dono naturale e che è inconsapevolmente perfezionato dallo studio minuzioso dell'una o dell'altra branca della scienza. La parola intuizione non è forse opportunamente scelta; io vorrei qui includervi la sensibilità nei confronti di un motore con la quale l'ingegnere valuta la distribuzione della forza in qualche costruzione da lui realizzata, e, allo stesso modo, vorrei includervi il sentimento indefinito che possiede colui che è esperto nel calcolo, riguardante la convergenza di un processo infinito che gli sta di fronte. Io dico *che l'intuizione matematica, intesa in questo modo, nel suo campo in tutto precede per rapidità il pensiero logico e inoltre, in ogni momento, copre un ambito più ampio*.[73]

Il punto di vista di Klein, quindi, pur riconoscendo il valore degli sforzi fatti per rendere rigoroso e basato su solide fondamenta il pensiero matematico, ritiene un errore il rifiuto di integrare in esso il pensiero intuitivo in quanto, esattamente come Michael Polanyi, ritiene che non possa esservi alcun pensiero senza una base intuitiva. In particolare, il pensiero

---

[73] Klein, 1895, p. 237: «Dabei denke ich nicht so sehr an die ausgebildete Form der Anschauung, von der soeben die Rede war, also an die Anschauung, die sich unter Einwirkung der logischen Deduktion entwickelt hat und die ich als eine Form des Gedächtnisses bezeichnen möchte, als vielmehr an die naive Anschauung, welche zum guten Teile ein angeborenes Talent ist und sich übrigens aus der eingehenden Beschäftigung mit diesem oder jenem Teile der Wissenschaft unbewußt herausbildet. Das Wort „Anschauung" ist vielleicht nicht zweckmäßig gewählt. Ich möchte hier die motorische Empfindung mit einschließen, mit welcher der Ingenieur die Kräfteverteilung in irgendwelcher von ihm durchgeführten Konstruktion beurteilt, und selbst das unbestimmte Gefühl betr. die Konvergenz ihm vorliegender unendlicher Prozesse, welches der geübte Zahlenrechner besitzt. Ich sage, *daß die so verstandene mathematische Anschauung auf ihrem Gebiete überall dem logischen Denken voraneilt und also in jedem Momente einen weiteren, Bereich besitzt als dieses.*» Corsivo nell'originale.

matematico procede secondo diversi tipi di intuizione. Vi è, ossia, un'intuizione proiettiva, una euclidea ed anche una non euclidea.

Ogni geometria e, più in generale, ogni struttura matematica assiomatizzabile, deve essere *resa viva* dall'intuizione per diventare effettivamente parte del pensiero matematico.

> Gli sviluppi matematici, che discendono dall'intuizione, non devono essere considerati come patrimonio della scienza prima che siano condotti in una rigorosa forma logica. Al contrario, la spiegazione logica astratta non ci può bastare fino a che le sue conseguenze non siano sviluppate in modo vivo per ciascun genere di intuizione, così che noi riconosciamo le molteplici connessioni, nelle quali lo schema logico si spinge nella direzione di ciascun ambito che scegliamo verso altre parti della nostra conoscenza. – Io paragono la conoscenza matematica ad un albero che spinge le sue radici, al di sotto, sempre più in profondità nella terra, mentre, sopra, schiude liberamente i suoi rami ombrosi. Dobbiamo noi considerare le radici o le fronde come le parti più fondamentali? I botanici ci insegnano che la domanda è mal posta, che piuttosto la vita dell'organismo si basa *sull'interazione delle sue diverse parti*.[74]

Qui, seguendo alcune considerazioni di Eduard Glas[75], possiamo osservare come l'immagine della matematica considerata nei termini di un albero ponga in evidenza due ulteriori aspetti. Anzitutto, essa è strettamente connessa alla rappresentazione della matematica e, in particolare della

[74] Klein, 1895, p. 240: «Mathematische Entwicklungen, welche der Anschauung entstammen, dürfen nicht eher als fester Besitz der Wissenschaft gelten, als sie nicht in strenge logische Form gebracht sind. Umgekehrt kann uns die abstrakte Darlegung logischer Beziehungen nicht genügen, solange nicht deren Tragweite für jede Art der Anschauung lebendig ausgestaltet ist, und wir die mannigfachen Verbindungen erkennen, in welche das logische Schema, je nach dem Gebiete, welches wir wählen, zu anderen Teilen unserer Erkenntnis tritt. – Ich vergleiche die mathematische Wissenschaft mit einem Baume, der seine Wurzeln nach unten immer tiefer in das Erdreich treibt, während er nach oben seine schattengebenden Äste frei entfaltet. Sollen wir die Wurzel oder die Zweige als den wesentlicheren Teil ansehen? Die Botaniker belehren uns, daß die Frage falsch gestellt ist, daß vielmehr das Leben des Organismus *auf der Wechselwirkung seiner verschiedenen Teile* beruht.»

[75] Vedi Glas, 2002.

geometria, per mezzo di "alberi tassonomici". Questa è l'immagine della matematica che emerge dall'*Erlanger Programm*, un'immagine visiva che mostra le più astratte ramificazioni ed interconnessioni tra le varie geometrie per mezzo dell'applicazione del concetto di gruppo. Quindi, la metafora dell'albero esprime quella che Glas chiama «l'"idea genetica" di "crescita organica"»[76], che si oppone dall'immagine della matematica tipica del formalismo assiomatico, intesa come insieme di catene deduttive ed algoritmi alla cui base vi è la solida verità assoluta degli assiomi. La matematica è qui vista come un corpo organico, un albero appunto, che con radici profonde nel mondo reale, trae da esso la linfa vitale per produrre i diversi rami della matematica.

Da Dusseldorf a Göttingen

Klein è stato spesso dipinto come un matematico fortemente legato al diciannovesimo secolo, uno strenuo oppositore delle nascenti tendenze legate all'aritmetizzazione, al rigore e all'assiomatizzazione della matematica, un uomo con lo sguardo rivolto al passato, ad un'idea della matematica obsoleta, che di lì a poco sarebbe definitivamente scomparsa.

In realtà, questa è solo una prima e superficiale approssimazione della realtà, dato che sarebbe un gravissimo errore ritenere che Klein sia stato un oppositore del metodo assiomatico o che non apprezzasse il valore di un approccio rigoroso alla matematica. A dimostrarlo credo che basti la sua politica accademica, la quale cercò di creare a Göttingen un centro in cui tutte le anime della matematica fossero adeguatamente rappresentate e potessero approfittare di uno scambio reciproco.

Per quanto riguarda la sua formazione, possiamo senz'altro affermare che Klein era quello che si definisce un "geometra", l'erede della tradizione geometrica ottocentesca di Monge, Plücker e Clebsh, dotato di uno stile eclettico, il cui approccio era di tipo *storico* e *genetico*. Infatti, Klein pose sempre

[76] Glas, 2002, p. 102: «The "genetic" idea of "organic growth".»

particolare interesse su problematiche di tipo educativo e storico, considerando la conoscenza dell'evoluzione temporale dei concetti matematici imprescindibile per la loro comprensione. Come osserva Eduard Glas[77], sembra che la sua idea riguardo all'acquisizione dei concetti matematici da parte delle persone implicasse una sorta di Legge di Haeckel – secondo cui l'ontogenesi è una breve ricapitolazione della filogenesi –, ritenendo necessaria una ricapitolazione dell'evoluzione di questi concetti, secondo quello che egli stesso definisce "metodo storico", al fine di una loro assimilazione.

> Colui che vuole inoltrarsi nella matematica, deve ripetere dentro di sé l'intero sviluppo passo per passo; è certo impossibile, comprendere anche solo un concetto matematico senza aver assimilato tutti i concetti preesistenti e le loro connessioni.[78]

Gli interessi di Klein avevano un respiro piuttosto ampio, andando ben oltre la pura matematica. Egli non solo cercava di abbattere ogni netta separazione tra la geometria e l'algebra, l'analisi o la teoria dei numeri, ma sconfinava nella fisica e nella pedagogia passando, qualche volta, anche per l'allora nascente psicologia sperimentale. Non è un caso che egli si fosse impegnato nel progetto della creazione di un'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*.

Senza dubbio, ad una prima occhiata, il suo approccio alla matematica può apparire superficiale e caotico, privo della profondità che caratterizza, ad esempio, le opere di Hilbert, e, come osserva David Rowe, appare basato su un approccio empirico tutto sommato abbastanza elementare:

> Il messaggio, comunque, è spesso lo stesso: la matematica è guidata in prima istanza da idee ispirate; lo sviluppo formale di una teoria quindi condurrà ad un raffinamento di queste intuizioni di base, ma

[77] Vedi Glas, 2002, p. 96.
[78] Klein, 1979, p. 1: «Denn wer in sie eindringen will, muß in sich durch eigene Arbeit die ganze Entwicklung Schritt für Schritt wiederholen; es ist doch unmöglich, auch nur einen mathematischen Begriff zu erfassen, ohne all die davorliegenden Begriffe und ihre Verbindungen in sich aufgenommen zu haben, die zu seiner Erschaffung führten.»

non si dovrebbe per nessuna ragione abbandonare queste ultime ne sottostimare il ruolo indispensabile che esse giocano.[79]

"Intuizione" è la parola chiave di tutta la matematica di Klein, laddove, però, la si intenda come traduzione del termine *Anschauung*, letteralmente *modo di vedere*, ossia «un appello a strutture e relazioni che possono essere visualizzate o immaginate»[80]. L'idea è che alla base del pensiero matematico vi sia un modo di ragionare visivo, immediato e basato sull'immaginazione, che costituisce una condizione per la possibilità del ragionamento stesso, il quale non sarebbe altrimenti realizzabile senza quelle rappresentazioni e quei modelli che danno significato all'apparato assiomatico-formale.

Questo tipo di approccio, oltre che l'espressione di una predilezione, da sempre mostrata, nei confronti delle scienze naturali, è in parte il risultato dell'eredità culturale del primo maestro di Klein, Julius Plücker, uno dei creatori della geometria proiettiva, e di colui che, alla sua morte, ne prese il posto, ossia Alfred Clebsh. Come scrisse lo stesso Clebsh nel necrologio a Plücker: «È il piacere della forma in un senso più elevato che distingue il geometra»[81].

Quando conobbe Klein, Plücker era professore di matematica e fisica all'università di Bonn e la sua ricerca, a metà tra matematica e fisica, si occupava da una parte di geometria proiettiva e dall'altra della fisica dei raggi catodici. Egli apparteneva a quella categoria di geometri che, prendendo le distanze dalla scuola puramente sintetica di Steiner, cercavano di introdurre l'algebra all'interno della geometria proiettiva, utilizzando le cosiddette coordinate omogenee. Da parte sua invece, Clebsh, appartenente ad una generazione successiva a

---

[79] Rowe, 1994, p. 190; «The message, however, is often the same: mathematics is guided in the first instance by inspired ideas; the formal development of a theory will then lead to a refinement of these basic insights, but one should not for that reason abandon the latter nor overlook the indispensible role they play.»
[80] Rowe, 1994, p. 191: «An appeal to structures and relationship that can be visualized or imagined».
[81] «Es ist die Freude an der Gestalt in einem höheren sinne, die den Geometer ausmacht», citato in Rowe, 1994, p. 191.

quella di Plücker, aveva interessi più vasti, dato che, oltre che di geometria proiettiva, si interessa di geometria delle superfici e teoria degli invarianti. Sarà proprio Clebsh che suggerirà quel metodo capace di unificare le due anime, algebrica e geometrica, della matematica, andando alla ricerca di quell'unificazione che tenterà di realizzare non solo attraverso l'*Erlanger Programm*, ma attraverso tutta la sua opera. E, seguendo queste suggestioni, Klein saprà andare oltre i suoi maestri, applicando il suo approccio "intuitivo" a tutte branche della matematica che si troverà ad affrontare, siano esse l'algebra, l'analisi complessa o la teoria delle funzioni.

Un'interessante fonte di informazioni sulla persona di Klein è innanzitutto un breve testo, scritto nella primavera del 1923, all'età di settantaquattro anni, dal titolo "Schizzi biografici di proprio pugno" (1923b), il quale, oltre a fornire un'interessante retrospettiva sulla vita accademica e sulla ricerca di Klein, fornisce informazioni riguardo alla sua personalità.

Felix Klein nacque a Dusseldorf il 25 aprile del 1849 da un padre di «rigido spirito protestante della vecchia Prussia» e da una madre «di carattere più allegro e di principi meno rigidi»[82], i cui molteplici interessi erano «la fonte principale della vita spirituale in famiglia»[83]. Klein, com'è facile aspettarsi, sviluppò una personalità che univa le severe qualità del padre alle caratteristiche di vivacità e curiosità tipiche della madre, benché forse con una prevalenza per le qualità di quest'ultima se, da una parte, dalla madre ereditò una forte inclinazione verso la pedagogia e, come egli stesso ci informa, anche «una tendenza all'esaurimento nervoso»[84].

Ad ogni modo, più che la narrazione degli eventi, di questo breve testo sono i commenti che interessano. Infatti, già nelle prime pagine, ricordando la sua infanzia, egli racconta come la sua opposizione ad un certo modo di concepire la conoscenza si fosse manifestata già negli anni del ginnasio, dovendosi scontrare con un modello educativo che mal sopportava e che non

[82] Klein, 2000a, p. 157.
[83] Klein, 2000a, p. 157.
[84] Klein, 2000a, p. 158.

condivideva: se da una parte egli riferisce che il tipo di insegnamento che gli fu impartito, essenzialmente formale e mnemonico, prevalentemente logico-grammaticale, era stato in linea con il suo carattere, ossia con la sua assimilazione dei valori paterni, permettendogli di apprendere una «disciplina al lavoro», dall'altra Klein si affretta a rimarcare come, per contro, una cultura ridotta al solo linguaggio facesse appello ad un metodo «che escludeva la fantasia e qualunque senso artistico e trascurava molti aspetti veramente educativi»[85].

Già questa breve citazione, con il suo richiamo alla fantasia, fa risaltare uno dei *leitmotiv* presenti nelle riflessioni filosofiche di Klein, ossia la necessità di combattere la carenza di *vitalità*, l'incapacità di trasmettere, nell'insegnamento come nella ricerca, ciò che permette veramente di *comprendere* e di *creare*.

> Il contenuto vitale degli autori studiati (la poesia, la storia della cultura, le tradizioni popolari) non veniva però affatto sfiorato. Analogamente, la storia ci veniva insegnata attraverso una mostruosa quantità di fatti ma senza vivacità o punti di vista generali.[86]

Il quadro che descrive gli anni del ginnasio, dominato da un'educazione di stampo filologico, mostra come non solo l'insegnamento della matematica avesse un taglio strettamente formale, ma come fosse completamente assente l'insegnamento delle scienze, verso le quali, al contrario, Klein nutriva un profondo interesse. Per sua fortuna, egli poté comunque soddisfare i suoi primi interessi di Chimica, Botanica e Zoologia, avvalendosi dell'assidua frequentazione della farmacia posseduta dal padre di un compagno di classe, mentre poté avvicinarsi all'astronomia grazie all'aiuto del direttore del piccolo osservatorio di Dusseldorf, il quale gli permise di partecipare, in qualche modo, alle sue ricerche.

Con questa preparazione Klein, all'età di sedici anni, nel 1865, si iscrisse all'università di Bonn per studiare Matematica e Scienze naturali, dove, dimostrando capacità fuori dalla norma,

[85] Klein 1923b, 158.
[86] Klein 1923b, 158.

riuscì in una brillante carriera che lo portò, a soli 23 anni, a diventare *Professor Ordinarius* all'università di Erlangen.

Infatti, già dal 1866, era diventato assistente di Plücker, collaborando alle lezioni di Fisica sperimentale ed aiutandolo nelle sue ricerche che, in quel periodo, erano prevalentemente matematiche, nel campo della cosiddetta "geometria delle rette". Quindi, a causa della morte improvvisa di Plücker, avvenuta nel 1868, a Klein fu affidato l'incarico di curarne l'edizione delle opere di geometria, cosa che, da una parte lo mise in contatto con Clebsh, allora a Göttingen, e, dall'altra determinò l'argomento della sua dissertazione di dottorato, discussa nel 1868, sviluppando ulteriormente le ricerche di Plücker.

Gli anni dal 1865 al 1872 sono gli anni che diedero l'impronta principale alla formazione e alla personalità di Klein, determinata dall'influenza dei due maestri, Plücker e Clebsh, la cui attività matematica oscillava costantemente tra la geometria e la fisica.

Trasferitosi a Göttingen, al fine di collaborare con Clebsh, Klein, benché vi avesse trovato un ambiente amichevole e stimolante, desiderando ampliare i suoi orizzonti culturali, nel 1869 si recò a Berlino per un breve soggiorno, con l'intento di migliorare le sue conoscenze in quello che era allora il dipartimento di Matematica dominato dalle figure di Weierstrass e Kummer, i quali, assieme a Kroneker, organizzavano un ben noto "seminario matematico".

Questo soggiorno a Berlino, seppur breve, costituì un momento cruciale nella vita di Klein, durante il quale egli prese coscienza della distanza culturale e, potremmo dire, dell'incomunicabilità, che separava il modo di fare matematica che egli aveva appreso da Plücker e Clebsh, da quello tipico della cosiddetta "scuola di Berlino", dominata dalla figura carismatica di Weierstrass. Quest'ultimo era fortemente ostile allo spirito *naïve*, multidisciplinare e creativo, caratteristico invece di Klein, e la sua scuola era dominata da una matematica fondata su metodi puramente formali e rigorosi.

Durante il soggiorno, Klein – con rammarico, dirà in tarda età – per spirito di opposizione non seguì nessuno dei corsi tenuti da Weierstrass, ma partecipò comunque attivamente al seminario, dove, fu proprio al termine di un suo intervento che avvenne un fatto che rimarrà impresso nella sua mente per tutta la vita.

Il soggiorno a Berlino, fu, infatti, importante soprattutto per ciò che nella vita di Klein, sia privata che accademica, fu un elemento centrale, che egli coltivò sempre in maniera prioritaria, ossia l'instaurazione di contatti personali ed amicizie, grazie alle quali, attraverso lo scambio reciproco di conoscenze ed opinioni, egli trovava stimolo per la sua creatività matematica. Nel caso di Berlino, in particolare, Klein ebbe l'occasione di stringere amicizia con due persone che esercitarono un'influenza duratura sul suo lavoro, ossia Otto Stolz e il norvegese Sophus Lie. In particolare, Stolz, durante i giorni trascorsi a Berlino, introdusse per la prima volta Klein allo studio delle geometrie non euclidee, dando l'avvio ad una serie di ricerche che, successivamente, con l'aiuto di Lie, porteranno all'elaborazione dell'*Erlanger Programm*, ossia alla teoria dei gruppi. Infatti, fu proprio seguendo una linea di pensiero suggerita dagli insegnamenti impartiti da Stolz che, al termine di un intervento congiunto di Klein e Lie al seminario matematico di Weierstrass, i due, avanzarono un'idea *vaga e intuitiva*, allora ben lungi dall'essere elaborata, riguardante un'analogia, che Klein aveva scorto, tra la cosiddetta definizione di misura [*Maßbestimmung*] stabilita da Arthur Cayley all'interno della geometria proiettiva e le geometrie non euclidee. In altre parole, Klein aveva scorto la possibilità di usare un risultato ottenuto da Cayley in un caso specifico, estendendolo, al fine di ottenere, all'interno del quadro della geometria proiettiva, qualunque geometria metrica (non solamente quelle euclidea e non euclidea).

Purtroppo però la vivacità di due giovani matematici, poco più che ventenni, dovette irritare non poco il meticoloso Karl Weierstrass, e i due dovettero subirne la reazione negativa allorché egli, non comprendendo l'idea, che non era né rigorosa né formalizzata chiaramente, ma solo espressione di uno spirito creativo, lanciò una pesante critica all'iniziativa, non cogliendo affatto l'analogia tra quelli che riteneva due ambiti completamente diversi del pensiero.

Weierstrass, evidentemente, non solo non apprezzò la vaghezza dell'idea espressa ma, senz'altro, ancor meno apprezzò l'enfasi posta su un approccio proiettivo alla geometria e, in definitiva, questa esperienza traumatizzante, fece comprendere a Klein, ancora più chiaramente di quanto già non percepisse, la distanza incolmabile tra il modo di fare matematica di Weierstrass ed il suo. È Klein stesso che ci informa riguardo a come l'atmosfera di Berlino fosse lontana da quella amichevole, accogliente ed informale che aveva trovato a Göttingen:

> Stando ai miei ricordi – ero giunto a Berlino nel 1869 e rimasi là nel periodo a cavallo tra 1869/70 – la posizione di Weierstrass era di assoluta autorità, il suo uditorio accettava i suoi insegnamenti come una norma incontestabile, spesso senza averli chiaramente compresi nel loro senso più profondo. Non era permesso che sorgesse alcun dubbio, un controllo era perciò difficilmente possibile, dato che Weierstrass citava molto poco. Nelle sue lezioni egli si era prefissato l'obiettivo di presentare un sistema coerente di pensieri ben ordinati. Così cominciava con una metodica costruzione dal basso verso l'alto e, seguendo il suo modello di perfezione, aggiustava la progressione in modo tale che nella continuazione avrebbe dovuto fare riferimento solo a se stesso.
>
> Io stesso all'epoca, così come Lie, – ed ora me ne rammarico – non ho seguito alcuno dei corsi di Weierstrass, per spirito di opposizione, ma nel seminario portavo avanti solo le mie idee personali.[87]

---

[87] Klein, 1979, p. 284: «Nach meinen Erinnerungen - ich kam 1869 nach Berlin und war 1869/70 dort - war Weierstraß' Stellung die einer absoluten Autorität, deren Lehren die Zuhörer hinnahmen als unanfechtbare Norm, oft ohne sie im tieferen Sinn recht aufgefaßt zu haben. Ein Zweifel durfte nicht aufkommen, eine Kontrolle war schon deshalb schwer möglich, da Weierstraß außerordentlich wenig zitierte. Er hatte es sich in seinen Vorlesungen als Ziel gesetzt, ein System wohlgeordneter Gedanken im Zusammenhang vorzutragen. So begann er mit einem methodischen Aufbau von unten herauf und, seinem Ideal der Lückenlosigkeit nachstrebend, richtete er den Gang so ein, daß er in der Folge nur auf sich selbst zurückzugreifen brauchte.
Ich selbst habe damals - jetzt bedaure ich es - ebenso wie Lie, aus Widerspruchsgeist kein Kolleg bei Weierstraß gehört, sondern im Seminar immer nur eigene Gedanken verfochten.»

Lasciata comunque per il momento da parte l'idea di un'ipotetica relazione tra geometrie non euclidee e definizione di misura di Cayley, Klein, nell'estate del 1870, si recò dapprima a Parigi, entrando in stretti rapporti con Darboux e Camille Jordan, e, successivamente, di nuovo a Göttingen dove, ottenuta l'abilitazione nel 1871, cominciò a seguire lezioni di fisica, pensando di poter realizzare la sua aspirazione di sempre, ossia quella di diventare fisico.

Contrariamente alle aspettative, però, il caso volle che egli dovesse definitivamente dedicarsi alla matematica poiché, su raccomandazione di Clebsh, allora rettore, ottenne per l'anno successivo la chiamata come professore ordinario ad Erlangen.

Ed è proprio in occasione del suo trasferimento ad Erlangen che prenderà definitivamente corpo quel progetto di unificazione della geometria – che, all'epoca, era divisa in una molteplicità di geometrie differenti ed apparentemente disorganiche – sviluppato in due principali saggi tra il 1871 ed il 1872 e culminato nella prima esposizione della teoria dei gruppi.

Ad Erlangen, infatti, ogni docente che entrava a far parte per la prima volta dell'Università era tenuto a presentare una relazione scritta riguardante i suoi programmi scientifici e, contemporaneamente, a tenere un discorso inaugurale pubblico, a cui avrebbe assistito tutto il corpo docente (e quindi non solo i matematici) in cui esponeva gli obiettivi della sua attività didattica.

Klein perciò, nell'ottobre del 1872, compose – sotto l'influenza delle numerose conversazioni con l'amico Sophus Lie, il quale lo aveva raggiunto a settembre e lo aveva accompagnato ad Erlangen ad ottobre, rimanendo con lui tutto il mese – quell'*Eintrittsprogramm* che sarebbe poi diventato celebre con il nome di *Erlanger Programm*.

Il testo, dal titolo *Considerazioni comparative sui recenti sviluppi in Geometria*, intendeva essere la presentazione di un programma di ricerca che era il risultato del lavoro compiuto da Klein riguardo alle geometrie non euclidee portando avanti, nonostante le numerose reazioni ostili, oltre quella già citata di Weierstrass, proprio quell'idea intuitiva e vaga che aveva espresso a Berlino al seminario matematico.

L'*Erlanger Programm* va distinto dal discorso inaugurale, l'*Antrittsrede*, tenuto di fronte ai colleghi dell'università di Erlangen il 7 dicembre 1872: gli argomenti trattati sono completamente diversi. Prima che uno studio condotto da David Rowe rivelasse l'errore,[88] molti storici della matematica, non conoscendo il testo dell'*Antrittsrede*, conservato manoscritto tra i materiali inediti del *Nachlass* di Klein, presso la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek di Göttingen, diffusero, inconsapevolmente, la falsa credenza che l'*Erlanger Programm* fosse stato letto in occasione di tale conferenza.

L'oggetto della conferenza, l'*Antrittsrede*, invece non fu di tipo matematico, ma di carattere più generale, didattico, dato che il discorso era diretto ad un pubblico composto da tutti i colleghi dell'Università di Erlangen (e quindi non solo dai matematici). Questo verteva sul tema dell'educazione matematica, rivelando un fondamentale interesse che assumerà una centralità sempre maggiore negli anni successivi della carriera di Klein e, in particolare, nel periodo che va dal 1886 al 1913, ossia l'interesse per la pedagogia e la didattica della matematica.

L'anno 1872 è dunque ricco di avvenimenti e, con la morte improvvisa di Clebsh – avvenuta il 7 novembre a causa di una difterite, all'età di trentanove anni –, alla giovane età di ventitré anni, Felix Klein si trovò ad essere l'unico erede diretto di quella tradizione geometrica tedesca che annoverava i nomi di Möbius, Steiner, Plücker e von Staudt.

Klein cominciò la sua carriera affiancando ad un'intensa attività di ricerca – dando contributi per lo più nell'ambito di quella che egli stesso definiva "geometria intuitiva" [*Anschauliche Geometrie*] – un'altrettanto importante attività organizzativa, assumendo la responsabilità della direzione dell'attività del dipartimento di Erlangen, nel tentativo di rivitalizzare un dipartimento di matematica che da tempo versava in stato di abbandono e arretratezza. Nel fare ciò, Klien intendeva mettere in pratica quei principi didattici, ed attuare

[88] Vedi Rowe, 1985.

quelle iniziative concrete quali, ad esempio, la creazione di biblioteche a scaffali aperti, l'acquisto di collezioni di modelli concreti di superfici, ecc., che egli aveva preventivamente esposto nell'*Antrittsrede*.

Ciononostante, data la mancanza di tradizione scientifica del dipartimento, il lavoro ad Erlangen si rivelò molto impegnativo ed il numero di studenti, per contro, molto modesto. Così, nel 1875, Klein fu ben lieto di accettare la chiamata alla *Technische Hochschule* di Monaco, dove immaginava di poter trovare l'ideale di un "Politecnico" ricalcato su quelli di Parigi e Zurigo e di poter finalmente realizzare uno dei più importanti principi didattici che aveva espresso nell'*Antrittsrede*, ossia quello di fornire agli studenti una formazione interdisciplinare, capace di unire la preparazione tecnica a quella teorico-scientifica. In ciò trovò un valido alleato in Alexander von Brill, anch'egli allievo di Clebsh, con il quale, tra l'altro, Klein fondò un laboratorio per la costruzione di modelli concreti che poi furono commercializzati dal fratello di Alexander, Ludwig Brill e diventeranno famosi ed esportati nel mondo, soprattutto dopo la partecipazione di Klein all'International Mathematical Congress, tenuto a Chicago nel 1893, in occasione della World's Columbian Exposition.

Anche a Monaco quindi Klein si trovò impegnato in un'attività scientifica ed organizzativa particolarmente intensa – tenendo adesso, finalmente, corsi e seminari frequentati da centinaia di studenti. Dopo gli anni propedeutici trascorsi ad Erlangen, gli anni a Monaco furono particolarmente importanti per lo sviluppo della sua personalità matematica.

Nel 1880, si trasferisce quindi a Lipsia dove, occupando una cattedra di geometria, cerca per la terza volta di trasformare il dipartimento ed attuare le sue idee riguardanti la didattica. Egli riesce, infatti, a convincere il governo della Sassonia a creare una collezione di modelli, una sala di lettura matematica e, addirittura, ad organizzare delle *esercitazioni di disegno* di cui si occupò un suo ex assistente di Monaco, W. Dyck. Le sue lezioni di geometria cominciarono inoltre ad attirare un numero sempre crescente di matematici non solo dalla Germania ma anche dall'estero, triplicando il numero degli studenti di dottorato.

Egli avrebbe voluto fare di Lipsia un centro matematico alternativo a quello di Berlino, ma le sue idee pedagogiche e matematiche, e i suoi tentativi di rinnovamento, non trovarono terreno fertile all'interno del dipartimento, dove, invece, si creò un ambiente ostile, segnato da rapporti difficili con alcuni dei colleghi. È quindi dopo soli due anni che, a partire dal 1882, Klein comincia a soffrire di questa situazione, cominciando ad accusare quello che egli definisce un crollo nervoso ossia, presumibilmente, i sintomi di uno stato depressivo. Egli comincia perciò a prendere ripetuti congedi e ad abbandonare quasi totalmente l'attività di ricerca, attribuendo la sua malattia all'eccesso di lavoro: da allora Klein cambiò stile di vita, ridusse i ritmi e si dedicò alla rielaborazione e risistemazione di lavori già fatti in passato, ponendo fine a quello che è stato il suo periodo più propriamente produttivo nel campo della ricerca.

> Iniziai così uno stile di lavoro scientifico, cui mi sarei attenuto in seguito: mi limitavo alle idee e alle direttive generali, lasciando l'esecuzione e il completamento dei progetti ai collaboratori più giovani.[89]

A conferma di un probabile stato di depressione vi è il fatto che Klein affermò che i sintomi della malattia «cominciarono stranamente a scomparire»[90] nel momento in cui, nel 1884, egli ricevette una chiamata da Baltimora, negli Stati Uniti, per succedere alla cattedra che era stata di Sylvester. Anche se alla fine non accettò, evidentemente possiamo pensare che un invito proveniente da un'importante università americana cominciò a ridare fiducia, fornendo stimoli e nuove prospettive a Klein, il quale cominciò, lentamente, a riprendere la sua attività, dedicandosi anzitutto alla formazione dei dottorandi.

La sua salute tornò definitivamente però solo quando poté veramente lasciare l'ambiente ostile, ed a lui per niente congeniale, di Lipsia, ricevendo e, questa volta, accettando, nel 1886, la chiamata a Göttingen, la «piccola città giardino»[91] nella

[89] Klein, 2000a, p. 165.
[90] Klein, 2000a, p. 165.
[91] Klein, 2000a, p. 166.

quale, all'epoca della sua collaborazione con Clebsh, aveva trovato un ambiente particolarmente ricco di stimoli, e di cui conservava un felice ricordo: «mi era rimasta sempre viva la nostalgia per il luogo dove in passato mi era stato possibile frequentare amichevolmente persone con analoghi interessi al di fuori della mia formazione scientifica»[92].

La chiamata fece subito riacquistare le energie e la fiducia a Klein, il quale, fin da subito, cominciò a riproporre i suoi programmi e principi didattici, ponendo addirittura, come condizione per l'accettazione, la realizzazione di una sala di lettura, dato che una collezione di modelli era già stata in parte realizzata sotto la direzione di Hermann Amandus Schwarz il quale, allievo di Weierstrass ed esponente della scuola di Berlino, all'epoca, dirigeva il dipartimento. Questo ennesimo, ed ultimo, trasferimento, segnò l'inizio di un secondo periodo produttivo nella carriera di Klein, ben diverso dal primo per intensità e tipologia di ricerche, ma non meno importante e ricco di risultati e soddisfazioni.

Giunto a Göttingen, Klein, svincolato dalle incombenze legate all'attività organizzativa, in un primo momento si dedicò solamente ai suoi interessi, tenendo corsi e seminari e portando a termine i lavori iniziati in precedenza. Nel 1892 però, la chiamata di Schwarz a Berlino, ad occupare la cattedra che era stata di Weierstrass, lasciò finalmente il campo libero da qualunque interferenza, ed egli riprese una frenetica attività organizzativa: finalmente poteva ragionevolmente sperare di portare a termine la realizzazione di ciò che aveva tentato in ogni città in cui era stato, ossia costruire un centro matematico che potesse apertamente opporsi alla scuola di Berlino, ponendo in essere le sue idee riguardanti ricerca ed educazione.

Seguendo quanto suggerisce Rowe (1986), Klein aveva mosso il primo passo in questa direzione anzitutto assicurando l'assegnazione della cattedra di geometria da lui stesso lasciata vacante a Lipsia all'amico Sophus Lie – il quale, all'epoca, benché fosse senza dubbio il più grande geometra del tempo, era ancora praticamente sconosciuto – così che quest'ultimo potesse

92 Klein, 2000a, p. 166.

crearvi una scuola che, assieme a quella che lo stesso Klein aveva in mente di realizzare a Göttingen, potesse far fronte comune contro la scuola diretta da Weierstrass. Il piano a lungo termine di Klein era infatti quello di far rivivere a Göttingen la tradizione matematica di Gauss e Riemann, opponendo all'odiato "puritanesimo" della tradizione berlinese una scuola che ponesse l'accento sull'interazione tra matematica e scienze applicate.

Con l'insostituibile aiuto dell'amico Friederich Althoff, *Ministerialdirektor* presso il Ministero dell'Educazione prussiano, il quale favorì, con la sua autorevole influenza, la realizzazione dei progetti di Klein, quest'ultimo poté finalmente realizzare quella riforma dell'insegnamento matematico e scientifico che non era riuscito ad attuare fino ad allora e, nell'arco di breve tempo, trasformare il dipartimento di matematica di Göttingen in un centro capace di attirare un gran numero di studenti e ricercatori provenienti da tutto il mondo.

Dall'altra parte, invece, con la morte di Kroneker ed il trasferimento di Schwarz a Berlino, a partire dal 1892 era di fatto iniziato l'inesorabile declino della scuola di Berlino.

La didattica e l'epistemologia della matematica

Quali erano, dunque, più precisamente, le idee espresse da Klein, nell'*Antrittsrede*, riguardo alla didattica della matematica? Comprendere le idee pedagogiche di Klein è sicuramente la strada maestra per capire la sua epistemologia, in particolare per quanto riguarda il tentativo presente di ricostruire che cosa egli intendesse con il termine "intuizione". Infatti, come scrivono, a mio avviso in modo illuminante, Philip Davis e Rueben Hersh, sapere ed insegnare sono strettamente correlati tra loro, implicando entrambi il problema dell'intuizione:

> Il problema è descrivere il fenomeno della conoscenza intuitiva in matematica, renderlo intellegibile. Questo è il problema di base dell'epistemologia della matematica. Ossia, che cosa conosciamo e come lo conosciamo?
>
> Proponiamo di rispondere a questa domanda per mezzo di un'altra: che cosa insegniamo, e come lo insegniamo. O, meglio, che cosa cerchiamo di insegnare e come riteniamo necessario insegnarlo?

> Cerchiamo di insegnare i concetti matematici non formalmente (memorizzando definizioni) ma intuitivamente – per esempio osservando, risolvendo problemi, sviluppando un'abilità a pensare che sia l'espressione di un'interiorizzazione effettiva di qualcosa. Che cosa? Un'idea matematica intuitiva.[93]

Questa posizione di Davis e Hersh, i quali vedono nell'intuizione l'effetto delle ripetute esperienze relative all'attività ed alla manipolazione di oggetti fisici – che, al livello più avanzato, diventano segni su carta o immagini mentali – trova un analogo nell'esperienza riportata da Klein in uno dei tre volumi che egli pubblicò elaborando un ciclo di lezioni dedicate alla preparazione degli insegnanti, dal titolo *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*:

> [...] Ho fatto troppo spesso l'esperienza che, gli studenti si abituano troppo agli *Schemi*, con i quali in modo molto conveniente si impara ad accorciare lunghe espressioni, cosicché però ad essi molte volte il significato non gli diventava affatto familiare, e l'abilità con lo schema piuttosto gli impediva di addentrarsi in tutti i dettagli della materia fino alla sua completa padronanza.[94]

Tornando però al discorso inaugurale, all'*Antrittsrede*, in esso Klein espone, per la prima volta, la sua immagine della matematica e del relativo insegnamento. L'*Antrittsrede*

---

[93] Davis & Hersh, 1981, p. 397: «The problem is to account for the phenomenon of intuitive knowledge in mathematics, to make it intelligible. This is the basic problem of mathematical epistemology. That is, what do we know, and how do we know it?
We propose to answer this question by another one: what do we teach, and how do we teach it? Or better, what do we try to teach, and how do we find it necessary to teach it?
We try to teach mathematical concepts, not formally (memorizing definitions) but intuitively – by seeing examples, doing problems, developing an ability to think which is the expression of having successfully internalized something. What? An intuitive mathematical idea.»

[94] Klein, 1925, p. 154: «[...] Ich habe zu oft die Erfahrung gemacht, daß sich die Hörer wohl an die *Schemata* gewöhnen, mit denen man da in sehr zweckmäßiger Weise lange Ausdrücke abkürzen lernt, daß ihnen aber vielfach ihre *Bedeutung* keineswegs geläufig wird und die Gewöhnung an das Schema sie vielmehr hindert, in alle Einzelheiten der Sache bis zu ihrer vollen Beherrschung einzudringen.»

costituisce senz'altro, per usare le parole di David Rowe, «un tentativo piuttosto incoerente di caratterizzare la natura del pensiero matematico e le sue relazioni con le altre discipline, in particolare la fisica» ma, se consideriamo il contesto in cui veniva pronunciato e l'enfasi condizionata da un certo "idealismo" giovanile, non credo sia corretto affermare che in esso venga fatto «solo uno scarso accenno a qualche proposta concreta riguardo a nuove attrezzature e condizioni per l'insegnamento» [95]. Considerando che Klein scriveva nel 1872 – e, all'età di ventitré anni, per sua stessa ammissione, era mal visto dai colleghi più anziani perché troppo giovane –, credo che le proposte concrete presenti nell'*Antrittsrede*, così come il tentativo di caratterizzare il pensiero matematico in diretta opposizione all'*establishment* dell'allora dominante scuola di Berlino, possano essere sottovalutate solo mantenendo un atteggiamento un po' ipercritico.

In questa prima esternazione pubblica egli esprime idee generali riguardo a come egli intendesse la matematica, da una parte assegnandole il ruolo di *strumento di allenamento formale per la mente*, e, dall'altra, opponendosi apertamente al formalismo che dominava all'epoca l'educazione in Germania. Le affermazioni di Klein manifestano già un atteggiamento fortemente critico nei confronti di una matematica ridotta all'apprendimento di "giochi di prestigio" o all'elaborazione di formule prive di significato.

> Queste osservazioni riflettono la preferenza, che Klein mostrerà lungo tutto l'arco della sua vita, per l'intuito matematico piuttosto che per il virtuosismo computazionale, per l'intuizione piuttosto che per il rigore e non ultima, la sua propensione per la geometria in quanto opposta alle modalità analitiche di pensiero.[96]

Ciò che sta a cuore a Klein è che la matematica sia un settore vitale e che tragga stimoli dalla continua interazione con le altre

[95] Rowe, 1985, p. 123.

[96] Rowe 1985, 127: «These remarks reflect Klein's lifelong preference for mathematical insight rather than computational virtuosity, intuition rather than rigor, and not least, his propensity for geometric as opposed to analytic modes of thought.»

discipline scientifiche, considerate *più intuitive*. L'ideale di matematica espresso nell'*Antrittsrede* è, infatti, innanzitutto multidisciplinare, criticando apertamente quell'incomunicabilità che caratterizza una *troppo facilmente accettata* divisione tra le *due culture*, derivante anche dalla «mancanza di una diffusa conoscenza della matematica»[97]. Questa carenza culturale, osserva Klein, è un sintomo di quella «fatidica divisione che si è imposta in maniera troppo marcata nella nostra educazione e che da troppe parti è stata anche approvata di principio: mi riferisco alla divisione tra educazione umanistica e scientifica»[98]. Il suo auspicio è quello di un'unificazione interdisciplinare, nella speranza che, in un futuro non troppo lontano, questi contrasti saranno appianati e che venga raggiunta una forma di educazione nella quale gli elementi divisi verranno unificati. Inoltre, più nello specifico, Klein propone concrete iniziative volte a potenziare quelle capacità che stanno alla base della conoscenza intuitiva quali *la costruzione di modelli e l'organizzazione di lezioni di disegno*. Ciò, ribadendo quell'esigenza di *sviluppare la fantasia* che egli vede a fondamento della vitalità di ogni scienza.

> Negli studi specialistici, non bisogna dimenticare l'unità di tutte le scienze e l'ideale di un'educazione globale. Educazione umanistica e matematico-scientifica sono legate tra loro e non devono porsi in contrapposizione. D'altro canto, oltre che alla matematica pura, bisogna dedicarsi a quella applicata per garantire i rapporti con le discipline affini come la Fisica e la tecnica. Inoltre nella Matematica, assieme alle capacità logiche, bisogna sviluppare – come fattore ugualmente importante – l'intuizione e soprattutto la fantasia e la creatività che con essa cresce. Infine, l'Università deve curare l'insegnamento nelle scuole propedeutiche e quindi dare una particolare importanza alla formazione degli aspiranti insegnanti: l'ordinamento delle Scuole superiori tecniche si può considerare per certi versi un modello. Da queste considerazioni derivano le seguenti esigenze pratiche: lezioni a livello elementare ripetute regolarmente e,

---

[97] Klein, 1872, p. 130: «Geringe Verbreitung mathematischer Kenntnisse.»

[98] Klein, 1872, p. 130: «Der verhängnissvollen Zweitheilung, die nur zu sehr in unserer Bildung Platz gegriffen hat und von manchen Seiten sogar principiel gebilligt wird: ich meine der Zweiteilung in humanistische und naturwissenschaftliche Bildung.»

> accanto ad esse, lezioni speciali per piccoli gruppi di studenti interessati alla ricerca, entrambe integrate con esercitazioni e seminari; corsi di geometria descrittiva con enfasi sull'abilità nel disegno; creazione di una sala di lettura con annessa biblioteca aperta che consenta agli studenti lo studio della letteratura appropriata, mentre ricche collezioni di modelli dovrebbero favorire lo sviluppo dell'intuizione matematica.[99]

È da ricordare che Klein fu il primo presidente e fondatore dell'*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), istituita a Roma nel 1908 in occasione del quarto *International Congress of Mathematicians*, e la sua prospettiva didattica influenzò significativamente gli atti di tale istituzione. L'enfasi posta nella didattica, sulla manipolazione di materiali, come, ad esempio, l'uso di modelli concreti o strumenti dinamici, e l'invito ad instaurare collegamenti con le scienze naturali e le applicazioni tecnologiche sono tutte espressioni dell'approccio "sperimentale" tipico di Klein.

L'uso di modelli aveva una lunga tradizione in Europa, soprattutto nell'ambito di quel periodo aureo della geometria di cui Klein si sentiva erede, e, certamente, tale tradizione trovò in lui un sostenitore particolarmente efficace che ne promosse la diffusione a livello mondiale. Come accennato, Klein iniziò a dedicarsi alla produzione di modelli quando, trovandosi a Monaco, alla *Technische Hochschule*, assieme ad Alexander von Brill, contribuì a fondare un laboratorio per la loro costruzione, richiedendo, tra l'altro, che gli studenti costruissero modelli in connessione con le proprie dissertazioni, nel caso in cui queste riguardassero superfici algebriche.[100] Ancora oggi è possibile visionare, nell'atrio al primo piano del *Mathematisches Institut* di Göttingen, *la collezione di modelli di geometria proiettiva e di strumenti geodetici* che Klein fece realizzare.

Per Klein i modelli concreti e gli strumenti dinamici erano rappresentazioni di concetti e processi matematici la cui utilità principale risiedeva nel favorire la *comprensione* e la *creazione* matematica: erano, quindi, strumenti di educazione del pensiero,

---

[99] Klein, 2000a, p. 163.

[100] Molto spesso, gli stessi manoscritti di Klien contengono, tra le pagine, modellini di carta costruiti dallo stesso Klein.

strumenti di una formazione diretta ad acquisire quell'intuizione geometrica che, per Klein, era essenziale.

La geometria non era per Klein, riduttivamente, solo la scienza degli oggetti spaziali, ma *un modo di pensare* che è possibile applicare a tutti i campi della Matematica e che permette di liberare quel carattere *creativo* che è alla base della vita stessa della matematica. In questo quadro, l'organizzazione di corsi di disegno geometrico e l'esercizio nella costruzione di modelli concreti costituiscono la realizzazione di quel *training* educativo necessario – assieme ad un corrispettivo *training* nell'ambito della logica e nel rigore assiomatico-formale – al fine di sviluppare un pensiero intuitivo efficace, e il più possibile esente da errori. Perciò, scriveva Klein,

> [...] Noi vogliamo esercitazioni di disegno geometrico e di modellazione. Se si è detto saltuariamente che l'intuizione geometrica non ha bisogno di tali ausili, questo vale certo anzitutto per un'intuizione allenata, la quale proprio attraverso il disegno e attraverso la creazione di modelli si è formata. Un'attività, anche temporanea, in questa direzione, per gli studenti della nostra materia, mi sembra altrettanto importante quanto nelle singole materie delle scienze naturali lo sono le attività pratiche. [101]

Infatti, osserva, colui che, almeno per una volta, è stato consapevole della «comprensione interconnessa»[102] [*in sich zusammenhängenden Einsicht*] che deriva da una riflessione matematica non può non rendersi conto che la matematica è (e deve essere) una materia creativa:

> Vi ricordo a questo riguardo il piacere che ciascuno prova quando una bizzarra verità geometrica diventa evidente attraverso il disegno di qualche linea ausiliaria; o la sorpresa che sperimenta un

[101] Klein, 1872, p. 134: «[...] wünschen wir Übungen im geometrischen Zeichnen und Modellieren. Wenn man gelegentlich gesagt hat, die räumliche Anschauung bedürfte solcher Hülfsmittel nicht, so gilt das doch erst von einer geübten Anschauung, die eben durch Zeichnen, durch Modellieren sich ausgebildet hat. Mir scheint eine wenn auch vorübergehende Beschäftigung des Studierenden in dieser Richtung in unserem Fache eben so nothwendig, als es in den einzelnen naturwissenschaftliche n Fächern die Practica sind.»

[102] Klein, 1872, p. 131.

principiante quando un compito apparentemente difficile diviene semplice ed elementare mediante l'aiuto di un'equazione ausiliaria.[103]

Questo piacere, che Klein definisce un «*piacere ricettivo* della comprensione logica»[104] [*receptiven Genuss der logischen Einsicht*], si accompagna, nel lavoro scientifico autonomo, all'infinitamente più elevato [*ungleich höhere*] piacere della produzione [*Genuss der Production*]. E anche la produzione è quindi pervasa da un *sentimento estetico* nei confronti delle idee matematiche, mostrando concretamente che il momento dimostrativo è solo un aspetto della matematica.

> Non crediate che la produzione matematica sia un fatto puramente deduttivo. Al contrario, per prima cosa, induttivamente, di frequente poggiandosi solo su analogie, si prevede la correttezza di una relazione, la si comprende, la si segue nelle sue conseguenze; – e solo a poco a poco si raccolgono insieme i momenti di una vera dimostrazione.[105]

Insomma, la matematica non deve basarsi esclusivamente sul formalismo poiché ciò che conta è il raggiungimento di «una comprensione interiore del processo descritto attraverso il progressivo sviluppo per formule»[106]. Il formalismo, qui inteso come l'esercizio di giochi di abilità, virtuosismi meccanici privi di qualsiasi contenuto, è, per Klein, puro tempo perso, nel quale «si spende la propria operosità nel risolvere equazioni

---

[103] Klein, 1872, p. 131: «Ich erinnere Sie in dieser Beziehung ad das Vergnügen, das jeder empfindet, wenn eine merkwürdige geometrische Wahrheit plötzlich durch das Ziehen einiger Hüelfslinien in der Figur evident wird; oder an die Überraschung, die der Anfänger erfahrt, wenn er eine scheinbar schwierige Aufgabe mit Hülfe einer Gleichung einfach und leicht auflösen lernt.»

[104] Klein, 1872, p. 131.

[105] Klein, 1872, p. 131: «Glauben Sie nicht etwa, dass mathematische Production eine einfach deductive Thätigkeit sei. Im Gegentheil, das Erste ist immer, dass man inductiv, häufig nur auf Analogieen gestützt, die Richtigkeit einer Beziehung *ahnt,* sie auffasst, in ihren Consequenzen verfolgt; - und wundert allmählich sucht man die Momente zu einem wirklichen Beweise zusammen.

[106] Klein, 1872, pp. 132-133: «Ein inneres Verständniss des durch die fortschreitende Formelentwicklung bezeichneten Processes.»

artificiosamente costruite le quali sono così diligentemente allestite che solo attraverso un particolare artificio, che bisogna conoscere, si può fare qualcosa con esse»[107].

Se però la matematica non è riducibile ad un puro gioco di formule, essa, osserva Klein, dal punto di vista pedagogico, ha un valore educativo di tipo formale [*formalen Bildungswerthes*], in quanto ha un ruolo teorico essenziale nelle applicazioni. Se, infatti, da una parte, discipline che utilizzano la matematica, come la fisica matematica o la geometria, sono maggiormente orientate verso l'intuizione [*anschauungsmäßigen Disciplinen*] e, in tal modo, permettono alla matematica di trarre da esse impulso e nuovi spunti di ricerca, dall'altra parte, le altre discipline trovano nella matematica uno strumento essenziale di *educazione dello spirito* [*Schulung des Geistes*], ossia un allenamento della mente che si ottiene attraverso la pura attività matematica. La matematica è in questo senso uno strumento di educazione formale [*Mathematik als formales Bildungsmittel*] la cui utilità si dimostra all'interno di qualunque percorso educativo, costituendone un rafforzamento, che permette l'acquisizione di quelle capacità proprie del modo di vedere esatto che caratterizza le scienze naturali.

Quest'ultimo aspetto, esposto da Klein nell'*Antrittsrede*, riguardante la didattica della matematica, mostra ulteriormente la volontà di cercare un bilanciamento ed un'integrazione delle potenzialità offerte sia dal pensiero sintetico sia da quello puramente analitico, ponendo in evidenza come egli non fosse dogmatico nella scelta di un approccio rispetto all'altro.

In questo senso, l'idea della matematica esposta da Klein rimanda molto a quell'ideale formativo che spesso si attribuisce ad alcune lingue, in particolar modo al latino e al tedesco. Laura Catastini, nel suo *Il pensiero allo specchio*, in cui affronta il tema dell'integrazione tra le due modalità di pensiero proprie del cervello umano, analitico-sequenziale e globale-parallela, osserva

[107] Klein, 1872, p. 134: «Da verwendet man seinen Fleiss darauf, künstlich aufgebaute Gleichungen zu lösen, die mit Fleiss so eingerichtet sind, dass nur mit einem besonderen Kunstgriffe, den man kennen muss, etwas mit ihnen anzufangen ist.»

come nell'esercizio di traduzione di queste lingue vi sia la necessità di imparare ad integrare tra loro le due modalità.

Stando alla Catastini, l'esercizio di traduzione di queste lingue mostra come il pensiero sintetico-globale, permettendo la condensazione in forma di immagini, e, quindi, di elementi integrati e compatti, di una quantità altrimenti ingestibile di informazioni, costituisce un supporto essenziale per il pensiero analitico-linguistico, il quale altrimenti sarebbe inefficace e soffocato dai dettagli, impossibilitato nel realizzare la ricostruzione globale della traduzione anche di una singola frase.

Quello che viene posto in evidenza, e che – pur senza le conoscenze neurofisiologiche contemporanee – poneva in evidenza anche Klein, è come sia essenziale, per il ragionamento, l'integrazione ed il confronto tra le due modalità cognitive. Lo studio di lingue dalla sintassi complessa e articolata, come sono quelle latina e tedesca, mostra come il pensiero non sia un processo sequenziale, lineare. La "riflessione", come dice, etimologicamente, il termine stesso, è un gioco di specchi: «un complesso gioco di rimandi tra i contenuti delle diverse modalità cognitive, su cui il pensiero può mettersi a rimbalzare come un raggio di luce riflesso tra due specchi. E se pensiamo ai due specchi come a superfici deformanti, ma portanti deformazioni diverse, la metafora si completa e si chiude»[108].

Il sentimento dell'analogia

Come più volte rimarcato, per Klein il segreto che sta alla base del pensiero produttivo sta in una vera e propria sensibilità estetica, una capacità di *sentire* i nuovi teoremi, *sentire* i possibili risultati a cui possono condurre e le relative interconnessioni con risultati provenienti dai più disparati ambiti della conoscenza matematica. Questa caratteristica del pensiero intuitivo è l'elemento centrale che sta alla base del primo esempio tratto dalla vasta produzione di Klein, ossia quella linea di pensiero che dagli studi sulle geometrie non euclidee portò Klein alla creazione della teoria dei gruppi. L'esempio che di seguito

[108] Catastini, 1990, p. 129.

cercherò di analizzare mostra come il pensiero intuitivo e la visualizzazione siano parte del pensiero matematico anzitutto come elementi del processo di scoperta, intesa nel senso di Marcus Giaquinto come "scoperta individuale". Qui è possibile vedere come l'intuizione entri in gioco nel contesto creativo evidenziando, in particolare, quei caratteri di globalità di tipo gestaltico e analogico che compongono una modalità di pensiero integrata, capace di strutturare in maniera coerente insiemi di indizi più o meno subliminali, più o meno marginali.

Eduard Glas (2002) osserva come Felix Klein si sia sempre opposto alle tendenze formalistiche unilaterali che si diffusero nel periodo a cavallo tra Ottocento e Novecento, facendosi alfiere di una "pratica modellizzante" o "basata su modelli"[109], che egli riteneva propria della tradizione geometrica di Riemann e Gauss, di cui si sentiva erede.

Questi aspetti della pratica matematica di Klein sono particolarmente evidenti attraverso una serie di articoli pubblicati negli anni 1870-1874, i quali raccolgono le ricerche cha hanno portato alla formulazione della teoria dei gruppi.

Particolarmente significativi sono infatti tre contributi accomunati dal medesimo titolo "Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", di cui il primo, del 1871, è un testo presentato alla Società Reale delle Scienze di Göttingen, e pubblicato sul notiziario della stessa società, mentre gli altri sono due ampi saggi, pubblicati successivamente sui *Mathematische Annalen*[110], in cui Klein sviluppa le idee presentate nel primo. In essi Klein sviluppa quell'idea intuitiva, avanzata, all'età di vent'anni, come congettura al termine di un suo intervento al seminario matematico di Berlino e, in quell'occasione, pesantemente criticata da Karl Weierstrass.

Nelle *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Klein ricorda così quella traumatica esperienza:

> Nel febbraio del 1870 tenni una lezione al seminario di Weierstrass riguardo alla metrica di Cayley, chiudendo con la domanda se qui non vi fosse un accordo con Lobachevsky. Ricevetti tuttavia come

[109] Glas, 2002, p. 95.
[110] Vedi Klein, 1871a e 1873a.

risposta che queste erano due sfere di pensiero completamente separate; per l fondazione della geometria bisogna considerare prima di tutto la proprietà della retta di essere il più breve collegamento tra due punti.

Mi lasciai impressionare da questo atteggiamento negativo e misi da parte l'idea appena afferrata. Rispetto alla critica del logico, che va oltre i miei interessi sono sempre stato timido. Solo molto più tardi imparai a comprendere che si trattava di una differenza di predisposizioni, e che la psicologia della ricerca matematica racchiude grandi problemi. Weierstrass era evidentemente più un'indole in sintonia con la ricerca scrupolosa e graduale che si fa strada verso la vetta; era meno nella sua natura la capacità di discernere chiaramente i profili delle cime di montagne non ancora raggiunte dalla distanza, quantomeno in questo caso egli non fece uso di una tale visione dalla distanza.[111]

Per meglio capire il significato di questo avvenimento che segnerà profondamente Klein, tanto da ricordarlo di frequente nelle sue opere, è necessario sapere che Klein, benché ventenne, aveva già una solida preparazione nel campo della geometria proiettiva, che aveva acquisito studiando con Plücker e Clebsh.

Come già accennato, la prima volta che Klein si era trovato a leggere gli scritti di Cayley – con grande entusiasmo, riferirà in seguito – fu nell'autunno 1869, nel periodo in cui si trovava a Göttingen. Qui, dopo la morte di Plücker, avvenuta nel 1868,

---

[111] Klein, 1979, p. 152: «Im Februar 1870 hielt ich einen Vortrag im Weierstraßschen Seminar über Cayleys Maßbestimmung, den ich mit der Frage schloß, ob hier nicht eine übereinstimmung mit Lobatscheffsky vorläge. Ich erhielt jedoch als Antwort, das seien doch wohl ganz getrennte Gedankenkreise ; für die Grundlagen der Geometrie komme wohl vor allen Dingen, die Eigenschaft der Geraden in Betracht, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu sein.
Durch diese ablehnende Haltung ließ ich mir imponieren und schob die schon gefaßte Idee beiseite. Der Kritik der Logiker gegenüber, die meinem Interesse ferner lag, war ich immer schüchtern. Erst sehr viel später lernte ich verstehen, daß es sich um eine Verschiedenheit der Anlagen handle und daß die Psychologie der mathematischen Forschung ihre großen Probleme berge. Weierstraß war offenbar mehr eine Natur der sorgfältigen schrittweisen Forschung, die den Weg zum Gipfel bahnt; es lag ihm weniger, noch nicht erreichte Spitzen des Gebirges aus der Entfernung in ihren Umrissen deutlich zu erkennen, zum mindesten machte er an dieser Stelle von einem solchen Fernblick keinen Gebrauch.»

Klein stava collaborando con Clebsh e lavorando alla pubblicazione postuma del secondo volume delle opere di Plücker. Quindi, recatosi a Berlino, per caso aveva appreso della geometria di Lobachevsky-Bolyai dall'amico Otto Stolz, durante l'inverno 1869/70 e, sulla base delle poche informazioni che aveva avuto, egli comprese subito intuitivamente che doveva esservi una qualche connessione tra questa e ciò che aveva appreso leggendo Cayley.

Tornato a Göttingen nell'estate del 1871, ed ottenuta l'abilitazione all'insegnamento, Klein riuscì a migliorare le sue conoscenze riguardanti le geometrie di Lobachevsky, Bolyai e von Staudt «dei quali» ammetterà «io personalmente non ho mai letto una parola»[112]. Qui, di nuovo con l'aiuto dell'amico Stolz, «attraverso dibattiti senza fine con lui, il quale era un logico *par excellence*, l'idea che le geometrie non euclidee fossero una parte della geometria proiettiva nel senso di Cayley divenne per me una piena certezza; e, dopo un'ostinata resistenza, costrinsi anche il mio amico ad accettarla.»[113]

Un modello per le geometrie non euclidee

Al momento in cui Klein presentò la prima comunicazione dal titolo "Über die sogennante Nicht-Euclidische Geometrie", nell'agosto del 1871, l'elaborazione dell'idea intuita durante il seminario matematico di Berlino era tutt'altro che completa, e anche le seguenti due comunicazioni non furono esenti da critiche a causa della presenza di alcuni errori e di un generale clima di ostilità che, come spesso accade, ostacola le nuove idee.

La consapevolezza relativa alla bontà dell'idea era comunque presente nella mente di Klein e Lie fin dall'inizio del 1870 e, stando a Rowe[114], i due già erano consapevoli della presenza di

---

[112] Klein, 1979, p. 153: «Von denen ich selbst nie ein Wort gelesen habe».
[113] Klein, 1979, p. 153: «In endlosen Debatten mit ihm, der ein Logiker par excellence war, wurde mir der Gedanke, daß die nichteuklidischen Geometrien Teile der projektiven seien, im Cayleyschen Sinne zu volliger Gewißheit, die ich auch meinem Freunde nach hartnackigem Widerstand aufzwang.»
[114] Vedi Rowe, 1989b, pp. 211-212.

alcune connessioni tra geometria e teoria dei gruppi – dove la "teoria dei gruppi", dai primi lavori di Évariste Galois fino al *Traité des substitutions et des équations algébriques* di Camille Jordan, del 1870, ovviamente non riguardava ancora la geometria, ma l'algebra. In particolare una prima difficoltà che Klein e Lie dovevano superare era data proprio dal problema di connettere il concetto di gruppo, fino ad allora appartenente alla teoria delle sostituzioni algebriche (la cui struttura è discreta), con quello di trasformazione (continua) appartenente alla geometria, mentre una seconda, che Klein superò soltanto nell'ultima comunicazione (1873a), era costituita dalla necessità di realizzare una generalizzazione convincente della metrica di Cayley all'interno della geometria proiettiva (inizialmente lo stesso Cayley aveva ritenuto non convincente il risultato presentato da Klein). Solo un anno e mezzo più tardi, nel 1871, le analogie, da principio solo vagamente percepite, cominciarono ad acquisire una forma più chiara e definita, e la loro elaborazione giocherà, da qui in avanti, un ruolo centrale nei i programmi di ricerca di Klein e Lie.

Come detto, Klein assume come punto di partenza la definizione di misura di Cayley, la quale era limitata al caso euclideo e ne ricerca una generalizzazione che possa essere valida per tutte le geometrie.

> Ora, si può, seguendo il procedimento di Cayley, costruire una definizione di metrica [*Maßbestimmung*] proiettiva generale, la quale si riferisce ad una qualsiasi ammissibile superficie di secondo grado come cosiddetta superficie fondamentale. Questa metrica proiettiva fornisce, a seconda del tipo di superficie di secondo grado utilizzata, un'immagine [*ein Bild*] per le differenti teorie delle parallele [...]. Però essa non è solo un'immagine per quelle stesse teorie, ma fa luce addirittura sulla loro intima essenza.[115]

[115] Klein, 1871, p. 244: «Nun kann man, nach dem Vorgange von Cayley, eine allgemeine projektivische Maßbestimmung konstruieren, welche sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als sogenannte Fundamentalfläche bezieht. Diese projektivische Maßbestimmung ergibt, je nach der Art der dabei benutzten Fläche zweiten Grades, ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorien

Fin dall'inizio il contributo di Klein viene presentato come il tentativo di fornire una materializzazione o concretizzazione [*Versinnlichung*] delle tre geometrie non euclidee per mezzo di quella che oggi è nota come metrica di Cayley-Klein.

> La necessità di fornire un'immagine sensibile [*zu versinnlichen*] delle speculazioni molto astratte che condussero alla costruzione delle tre differenti geometrie ha portato alla ricerca di esempi di metrica che possano essere compresi [*aufgefaßt*] come immagini [*Bilder*] e che, allo stesso tempo, possano mettere in evidenza l'interna coerenza di ciascuna di esse.[116]

Klein sottolinea il fatto che già esistono modelli euclidei che spiegano le proprietà delle geometrie ellittiche o iperboliche per mezzo di oggetti che possono essere misurati in senso euclideo, come ad esempio il modello di Beltrami (la cosiddetta *pseudosfera*). Ma questi modelli sono soltanto planimetrici, parziali, incapaci di dominare completamente, sia nello spazio sia su una superficie, le caratteristiche delle suddette geometrie. Klein vuole dare, invece, una completa realizzazione sensoriale tramite una qualche forma di visualizzazione ("*versinnlichen*" significa all'incirca "rendere percepibile attraverso i sensi"), al fine di comprendere in maniera completa le tre geometrie.

Arthur Cayley, nella sua opera dal titolo *A Sixth Memoir on Quantics* (1859) – dove il termine "quantica" sta ad indicare una forma algebrica, un polinomio omogeneo, ossia in cui tutti i termini hanno lo stesso grado, in più variabili – sviluppò uno studio della relazione tra geometria proiettiva e geometria metrica, limitandosi però alla geometria piana. Egli mostrò come fosse possibile trovare una definizione metrica, su una superficie, riferita ad una data sezione conica qualunque – intesa come

---

[…]. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sondern sie deckt geradezu deren inneres Wesen auf.»

[116] Klein, 1871, pp. 246-247: «Das Bedürfnis, die sehr abstrakten Spekulationen, welche zur Aufstellung der dreierlei Geometrien geführt haben, zu versinnlichen , hat dahingeführt, Beispiele von Maßbestimmungen aufzusuchen, die als Bilder der genannten Geometrien aufgefaßt werden könnten, und damit zugleich die innere Folgerichtigkeit jeder einzelnen in Evidenz setzten.»

elemento “assoluto” – per mezzo di una rappresentazione proiettiva. L’idea di base è espressa dallo stesso Cayley:

> Le proprietà metriche di una figura non sono le proprietà di una figura considerata *in sé*, staccata da qualunque altra cosa, ma le sue proprietà considerate in connessione con un’altra figura, *vale a dire* la conica chiamata l’assoluto.[117]

Il risultato a cui era giunto Cayley era però piuttosto specifico, ossia egli era riuscito a creare una definizione di distanza anzitutto in due dimensioni, per il piano proiettivo *complesso*, ed aveva considerato solo i casi in cui la conica di riferimento fosse una conica immaginaria, ottenendo una metrica tipica della geometria sferica, oppure, nel caso in cui la conica degenerasse in una coppia di punti ciclici all’infinito, le proprietà metriche della geometria euclidea.

Per avere un’idea *intuitiva* della linea di pensiero che dalla geometria proiettiva porta alla geometria metrica bisogna partire dal cosiddetto concetto di “rapporto armonico” o “birapporto”. Infatti, la geometria proiettiva è una geometria che non preserva né le distanze né i rapporti tra le distanze. Tuttavia essa conserva il cosiddetto *rapporto armonico*, il quale è un rapporto di rapporti di distanze, e che, in quanto tale, è un invariante proiettivo, ossia il suo valore rimane costante pur sottoponendolo a trasformazioni proiettive qualunque. Tale concetto, nel caso di quattro punti *collineari*, ossia che si trovano sulla stessa retta, può essere definito come:

$$(A, B: C, D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

Dove AC, BD, BC, AD sono le lunghezze dei segmenti orientati, e, quindi, dotate di segno, cosicché il birapporto risulti

[117] Cayley, 1889-1897, p. 592 Vol. II, citato in Torretti, 1978: «The metrical properties of a figure are not the properties of a figure considered *per se*, apart from everything else, but its properties when considered in connection with another figure, *viz*. the conic termed the Absolute.»

indipendente dall'orientamento della retta su cui giacciono: esso, infatti, dipende solo dall'ordine relativo dei quattro punti.

Con tale strumento a disposizione, scelta una conica γ nel piano proiettivo complesso, e due punti qualunque P e Q, possiamo affermare che la retta PQ passante per tali punti incontrerà la conica in altri due punti, diciamo R ed S. Utilizzando il birapporto tra questi quattro punti $(P, Q{:}\, R, S)$, è possibile quindi definire una funzione f_γ a valori complessi dipendente dalla conica stabilita γ, che, dati due punti qualsiasi li trasformi nel loro birapporto:

$$f{:}\,(P, Q) \longmapsto (P, Q{:}\, R, S)$$

e, partire da questa è possibile definire la funzione distanza, ad esempio, come:

$$d_\gamma(P, Q) = c \cdot \log f_\gamma(P, Q)$$

(dove c è una costante arbitraria diversa da zero)[118].

Roberto Torretti,[119] osserva come questa definizione di distanza non sia però ancora adeguata, dato che essa è a valori complessi, ed è qualcosa di diverso da ciò che generalmente si intende per distanza (a valori reali) nella geometria metrica. Sfruttando il cosiddetto principio di *dualità*, tipico della geometria proiettiva, secondo cui punti e rette possono essere tra loro sostituiti, e sfruttando un risultato dovuto a Laguerre, Cayley ottenne, quindi, una definizione di distanza tra coppie di punti che è proprio quella tipica della metrica euclidea.

Come accennato, però, Cayley non solo si limitò al caso bidimensionale, ma tralasciò di considerare il caso in cui la conica di riferimento, l'"Assoluto", per usare la sua terminologia, fosse una conica reale. Klein, invece, con un'opportuna restrizione della definizione di distanza ad un sottoinsieme del piano complesso – in accordo con la scelta della

---

[118] L'introduzione del logaritmo è dovuta a Klein, mentre Cayley utilizzò l'arcocoseno. Vedi Torretti, 1978, pp. 388, nota 22.
[119] Vedi Torretti, 1978, p. 127.

conica di riferimento – considerò i differenti casi, attribuendo loro, seguendo Steiner, i nomi con cui ancora oggi vengono chiamate le tre differenti geometrie a curvatura costante: nel caso di una conica reale, definendo la geometria *iperbolica*; nel caso di conica una puramente immaginaria, la geometria *ellittica*; e, nel caso in cui la conica fosse degenerata nel luogo dei punti consistenti nella retta ideale presa due volte, la geometria *parabolica*, ossia il caso in cui la definizione di distanza definisce l'ordinaria metrica euclidea.

Roberto Torretti nota come, nonostante vi siano cinque diversi tipi di coniche degeneri nel piano proiettivo complesso, Klein ne consideri soltanto una, quella che dà origine alla metrica euclidea, ma non esamina gli altri casi degeneri se non nelle sue lezioni sulla geometria non euclidea del 1926, pubblicate postume. Ciò, osserva Torretti, è legato al fatto che Klein riteneva che queste dessero origine a geometrie *non applicabili al mondo reale*, poiché la misura degli angoli, in esse, non risultava periodica. Questo, se necessario, può essere visto come l'espressione del fatto che l'interesse di Klein fosse principalmente per quelle parti della matematica che, secondo lui, potevano avere una qualche efficacia nelle applicazioni. Inoltre, Klein definì la metrica proiettiva anche per il caso tridimensionale, e ciò poiché riteneva che soltanto in questo caso la trattazione analitica potesse ottenere una corretta fondazione intuitiva.

In definitiva, questa serie di saggi riguardanti le geometrie non euclidee, è stato visto come la realizzazione di un "modello" euclideo per le geometrie non euclidee, ma, ovviamente, appartenendo ad un periodo storico in cui l'assiomatica non era ancora sviluppata, il termine modello va inteso nel senso più ampio del termine, ossia come una collezione strutturata di oggetti che soddisfano una teoria matematica, o una serie di proposizioni, e che in tal modo forniscono un significato per i relativi termini.

Torretti contesta, sebbene debolmente, l'affermazione che il cosiddetto modello di Klein sia da considerare come un vero e proprio modello euclideo. Infatti, egli mostra come, nel caso della geometria parabolica-euclidea il modello sia dato su un piano affine incluso nel piano proiettivo complesso. Ciononostante, osserva ancora Torretti, il modello iperbolico di Bolyai e Lobachevsky, nel caso della geometria piana, può essere effettivamente visto come un modello euclideo (all'interno di un'ellisse) se si evita di considerare che il suo dominio di definizione è un sottoinsieme del piano proiettivo complesso. In questo modo è possibile rappresentare la geometria iperbolica, come spesso avviene, mediante il cosiddetto modello di Beltrami-Klein, definendo un punto della geometria di Bolyai-Lobachevsky come il corrispondente di un punto all'interno di un cerchio e una linea retta come una corda privata degli estremi.

In tal senso, la trattazione della geometria non euclidea fatta da Klein mostra effettivamente la ricerca della creazione di un modello, di un qualche oggetto capace di dare un fondamento visivo alla geometria non euclidea e, contemporaneamente, il tentativo di definire un ordine sistematico nella caotica serie delle geometrie, all'epoca, esistenti.

Quest'ultimo aspetto, ossia la ricerca di un'unificazione sistematica di tutte le geometrie, comincia a delinearsi con maggiore chiarezza a partire dal contributo del 1873[120]. Infatti, qui, da una parte, Klein cerca di mostrare come le geometrie non euclidee oggetto del precedente saggio del 1871 fossero equivalenti alle geometrie a curvatura costante di Riemann e, dall'altra, egli inizia a concepire quel concetto di gruppo, capace di dare struttura a una molteplicità [*Mannigfaltigkeit*], che è alla base della teoria dei gruppi esposta nell'*Erlanger Programm*.

La trasposizione della teoria degli invarianti

L'evoluzione in direzione dell'*Erlanger Programm* è manifestata, tra l'altro, anche dall'uso dei termini. Al posto del termine "gruppo", nella prima breve presentazione, Klein utilizza l'espressione «un ciclo di altrettante trasformazioni lineari»[121],

[120] Vedi Klein, 1873a.

[121] Klein, 1871, p. 249: «[...] ein Zyklus von ebenso vielen linearen Transformationen»

mentre è solo a partire dalla *zweiter Aufsatz* che egli ha maturato la convinzione di poter usare il termine "*Transformationsgruppe*", spiegando che:

> Il nome, come la definizione, sono derivati dall'analoga costruzione di concetti della teoria delle sostituzioni, la quale si differenzia solo per il fatto che in essa le molteplicità prese in considerazione consistono di un numero discreto di elementi. Io e Lie, in un precedente saggio, (Math. Ann., Bd. 4 (vedi saggio XXVI di questa edizione)) abbiamo indicato ciò che qui è denominato come gruppo di trasformazioni, come un "sistema chiuso di trasformazioni".[122]

Klein fa uso della teoria delle trasformazioni lineari, o teoria degli invarianti – una teoria, fino ad allora, propria dell'ambito algebrico – applicandola alla geometria, con lo scopo di ottenere la sistematizzazione propria della teoria dei gruppi. Anche qui, possiamo vedere in opera quel *sentimento dell'analogia* che consente a Klein di scorgere analogie di tipo gestaltico, di struttura, tra ambiti apparentemente distinti della matematica (con rammarico da parte di Karl Weierstrass), e che costituisce un elemento essenziale non solo per la creazione dell'*Erlanger Programm* ma, più ingenerale, del suo metodo di lavoro, della sua pratica matematica. Il *riconoscimento di pattern* è una caratteristica centrale del metodo di Klein. Esso permette di discernere connessioni importanti tra ambiti anche molto lontani della nostra conoscenza e, quindi, creando relazioni e corrispondenze, permette di creare dei modelli. In quest'ottica, i modelli sono qualcosa di simile alle carte geografiche e mirano a rappresentare solo alcune caratteristiche strutturali selezionate all'interno dell'ambito di conoscenza considerato. Non sono duplicazioni, immagini rassomiglianti, dato che non esiste alcuna

[122] Klein, 1873, pp. 316, n.4: «Name wie Definition sind herübergekommen von der analogen Begriffsbildung der Substitutionstheorie, die sich nur dadurch von der hier vorgetragenen unterscheidet, daß die in ihr betrachteten Mannigfaltigkeiten aus einer endlichen Zahl diskreter Elemente bestehen. In einem früheren Aufsatze (Math. Ann., Bd. 4 (s. Abh. XXVI dieser Ausgabe)) haben Lie und ich das, was hier Transformationsgruppe heißt, als ein „geschlossenes System von Transformationen“ bezeichnet.»

rappresentazione “corretta” in assoluto, ma ogni rappresentazione è dipendente dalla sua funzione.

Come scrive Eduard Glas, nel caso del concetto di gruppo introdotto da Klein in geometria è all’opera per la prima volta un procedimento che caratterizzerà, da ora in avanti, in modo pervasivo, tutta la pratica matematica di Klein.

Da questo punto di vista, Glas (2002) fornisce una prospettiva interpretativa molto interessante, la quale permette di dare un’immagine globale coerente dell’opera di Klein. Glas vede l’attività matematica di Klein come caratterizzata da una “pratica basata su modelli” o “modellizzante”, ossia su un metodo che permette di astrarre, generalizzare e, soprattutto, *integrare* le relazioni spaziali aprendo la strada ad una nuova concezione dello spazio che non è assoluto, ma è determinato dai gruppi di operazioni caratteristici della geometria considerata.

Il metodo di Klein è descritto da Glas come «consistente essenzialmente di modellazioni “immaginative” e ragionamento basato su modelli»[123]. In particolare, lo stesso approccio che permise a Klein di trattare le geometrie non euclidee all’interno della prospettiva comune data dalla geometria proiettiva, caratterizza da allora in poi non solo il *Programma di Erlangen* ma anche tutta la sua attività di ricerca successiva. Come già osservato, l’approccio tipico della teoria dei gruppi «genera un albero tassonomico che visualizza le interdipendenze tra tutte le geometrie in un modo particolarmente chiarificatore»[124]: nel procedere dalla geometria metrica a quella proiettiva, fino ad arrivare alla topologia, vengono rivelati livelli sempre più profondi di relazioni invarianti:

> La setacciatura, passo dopo passo, a cui vengono sottoposte geometria affine e proiettiva a partire dalla geometria metrica possono essere comparate alla procedura del chimico, che, applicando

[123] Glas, 2002, p. 100: «Consisting essentially of ‘immaginative’ modeling and model-based reasoning.»

[124] Glas, 2002, p. 98: «Generates a taxonomical tree, which visualizes the interdependencies of all geometries in a highly elucidating fashion.»

> reagenti sempre più forti, isola ingredienti di valore sempre maggiore dal suo composto.[125]

L'importanza di questa pratica "modellizzante", basata sul riconoscimento di pattern e sul "sentimento dell'analogia", è esplicitamente riconosciuta da Klein nelle sue note autobiografiche dove afferma che il *Programma di Erlangen* è sempre stato il principio guida di tutta la sua ricerca successiva.

> Questo *Programma di Erlangen* è stato sempre il principale punto di riferimento [*Richtline*] delle mie ricerche e il suo principio unificante è stato esteso a numerosi altri campi come la teoria delle funzioni, la Meccanica e la Fisica.[126]

Questa affermazione, a prima vista incomprensibile, è stata chiarita da Thomas Hawkins[127]. Il *Programma di Erlangen* non fu mai sviluppato da Klein e mai diventò un vero e proprio programma di ricerca, neppure per qualcuno dei suoi studenti. Inoltre, negli anni che vanno dal 1872 al 1890 ebbe scarsa circolazione e rimase un testo poco conosciuto, tant'è che la prima traduzione risale proprio del 1890. Ciononostante, osserva Hawkins, presumibilmente, il motivo per cui Klein non ha mai sviluppato il suo *Programm* è da ricercare, da una parte, nella necessità di sviluppare una teoria per i gruppi continui di trasformazione – cosa che fu pubblicata solo in seguito da Lie – e, dall'altra, dal fatto che Klein, a causa della morte improvvisa di Clebsh, dovette dedicarsi alla continuazione del suo lavoro ed all'edizione delle opere. Perciò, l'affermazione secondo cui il *Programma di Erlangen* rimase una linea guida [*Richtline*], ovvero una massima per la sua attività di ricerca va interpretata nel senso che il concetto di gruppo è sempre stato la principale fonte di ispirazione nello sforzo di Klein di portare ordine, unità e nuove prospettive all'interno delle diverse aree della

[125] Klein, 2004b, p. 132: «The step-by-step sifting of affine and projective geometry from metric geometry can be compared to the procedure of the chemist, who, by applying ever stronger reagents, isolates increasingly valuable ingredients from his compound.»
[126] Klein, 2000a, p. 162.
[127] Vedi Hawkins, 1984, p. 444.

matematica (esigenza ereditata, presumibilmente, dal suo maestro Clebsh).

> L'idea dell'*Erlanger Programm* fu alla fine ricondotta all'interno dell'idea più generale del concetto di gruppo in quanto principio unificatore per la matematica in generale. Ma una tale visione non era esplicita nel *Programm* né fu esclusivamente di Klein.[128]

Quindi, anche se il successivo lavoro di Klein non fu un'elaborazione di argomenti esplicitamente legati al *Programma di Erlangen*, è vederlo come la prima concreta realizzazione dell'interesse di Klein a ricercare connessioni interdisciplinari, applicazioni, analogie, *Gestalten* comuni, che potessero permettere di unificare il campo di conoscenza di volta in volta considerato.

Nel protocollo dell'ultimo dei suoi seminari, il *Winterseminar 1909-10* riguardante *Mathematik und Psychologie*, di cui si dirà qualcosa in seguito, Klein esplicita chiaramente come nel suo lavoro egli si sia sempre lasciato guidare da un *sentimento dell'analogia*, e dal conseguente interesse per l'interconnessione tra le diverse aree del sapere.

> Per quanto riguarda il mio lavoro, ho sempre agito in modo che vedevo i risultati di due settori come dati e mi chiedevo che cosa ciascuno significasse per l'altro. Si confronti come tipico l'uso della teoria algebrica degli invarianti nella mia introduzione delle σ −funzioni, Math. Ann. Bd. 27, 32, 36. Io, per quanto riguarda la formulazione delle suddette proposizioni, mi sono lasciato condurre mole volte da un indefinito ma poi corretto sentimento dell'analogia. Questo mi ha fatto particolarmente piacere: io non sapevo esattamente quale invariante di una forma binaria Sylvester avesse chiamato cataletticante, ma io mi immaginai che il primo anello nello sviluppo in serie di una certa sigma iperellittica dovesse essere proprio questo cataletticante. Hilbert mi ha solo aiutato a mettere le cose in

[128] Hawkins, 1984, p. 445: «The vision of the *Erlanger Programm* was thus eventually subsumed under Klein's broader vision of the group concept as a unifying principle for mathematics in general. But such a vision was neither explicit in the *Programm* nor exclusively Klein's.»

ordine, ma il teorema, come io avevo supposto, era veramente corretto.[129]

Come osserva Efraim Fishbein, l'analogia ha un ruolo importante nella costruzione di modelli, dato che, a differenza della somiglianza [*similarity*], «*l'analogia giustifica inferenze plausibili*»[130], ossia, sulla base di somiglianze parziali ci si sente autorizzati a ritenere simili anche altri aspetti delle entità in oggetto. L'analogia implica una somiglianza a livello strutturale, dato che è un processo di trasferimento di conoscenza che avviene per mezzo di una corrispondenza biunivoca, benché incompleta, tra due ambiti distinti della conoscenza stessa. Nel momento in cui un'analogia viene trasformata in un modello, viene trasformata in uno strumento di interpretazione o di *problem solving*. L'individuazione di somiglianze non solo è una fonte di ipotesi di ricerca ma, soprattutto,

> […] Il modello fornisce un oggetto mentale compatto, strutturato, relativamente familiare, internamente consistente, un possibile componente di un processo attivo di ragionamento "prova e vedi". […] *Un'analogia intuitiva aiuta ad ottenere una rappresentazione iconica unitaria con un significato comportamentale concreto*. In questo modo diviene possibile una comprensione intuitiva. Il processo di ragionamento guadagna un "oggetto", un sistema

[129] Klein, 1909-10, p. 10: «Was meine eigenen Arbeiten angeht, so bin ich oft in der Weise vorgegangen, dass ich die Resultate zweier Teilgebiete als gegeben ansah und fragte, was das eine für das andere bedeute. Man vergleiche als typisch die Benutzung der algebraischen Invariantentheorie bei meiner Einführung der hyperelliptischen und Abelschen σ –Funktionen, Math. Ann. Bd. 27, 32, 36. Ich habe mich bei der Aufstellung der betr. Sätze vielfach von einem unbestimmten aber hinterher richtigen Gefühl der Analogie leiten lassen. Besonderes Vergnügen hat mir dies gemacht: ich wusste nicht recht, welche Invariante einer binären Form Sylvester Katalektikante genannt hatte; aber ich stellte mir vor, dass das erste Glied in der Reihenentwickelung gewisser hyperelliptischer Sigma eben diese Katalektikante sein müsse. Hilbert hat mir erst geholfen, die Sache in Ordnung zu bringen, aber das Theorem, wie ich es vermutete, war wirklich richtig.»

[130] Fischbein, 1987, p. 127: «[…] *Analogy justifies plausible inferences*».

> rappresentazionale con le sue qualità di immediatezza, globalità, generatività, consistenza intrinseca ed estrapolatività.[131]

Tutte qualità proprie della conoscenza intuitiva la quale fornisce il supporto necessario strutturando e stimolando il processo di ragionamento.

Le funzioni patologiche

Una tappa fondamentale che contribuì a giustificare la crescente esigenza di rigore e, contemporaneamente, a sancire definitivamente l'inaffidabilità del ricorso all'intuizione in matematica, fu la scoperta – o sarebbe meglio dire l'invenzione – di alcune funzioni continue non differenziabili in alcun punto, le quali misero in discussione la credenza intuitiva, in precedenza ampiamente diffusa, che connetteva tra loro continuità e differenziabilità. Queste funzioni, assieme ad altri esempi di varia natura, nel complesso possono essere catalogate come esempi di quei "mostri matematici" che cominciarono a diffondersi in matematica durante il corso del diciannovesimo secolo. Stando a Feferman (2000), probabilmente la prima volta in cui comparve la parola "mostri" per indicare queste funzioni *patologiche* fu in *Scienza e Metodo* di Henri Poincaré:

> La logica qualche volta genera mostri. Per mezzo secolo spuntò fuori una schiera di funzioni bizzarre, che sembrano sforzarsi di essere il meno somiglianti possibile alle funzioni oneste che sono di qualche utilità. Non più continuità, o altrimenti continuità ma nessuna derivata, ecc. [...] In precedenza, quando una nuova funzione veniva inventata, ciò avveniva in vista di qualche fine pratico. Oggi esse vengono inventate con il proposito di mostrare il ragionamento dei nostri antenati in torto, e da esse non otterremo mai niente di più.[132].

---

131 Fischbein, 1987, p. 128: «Provides a compact, structured, relatively familiar, internally consistent mental object, a viable component of an active try-and-see reasoning process.»

132 Poincaré, 1952, p. 125, citato in Feferman, 2000, p. 319: «Logic sometimes breeds monsters. For a half a century there has been springing up a host of weird functions, which seem to strive to have as little resemblance as

Da un punto di vista storico, fu una credenza comune che tutte le funzioni continue fossero differenziabili, eccetto che per punti isolati, ossia nei punti dove il loro grafico non è "liscio", ma, ad esempio, presenta delle cuspidi[133]. Questa credenza, stando a quanto riportato da Thomas Hawkins[134], venne affermata e addirittura "dimostrata" nei principali libri di calcolo almeno fino al 1870. A tal fine si utilizzava il fatto, intuitivamente evidente, che una funzione che varia con continuità è localmente monotòna[135], collegando quindi la monotonia con la differenziabilità. Vi era, inoltre, la credenza in una stretta connessione tra il concetto di funzione ed il concetto geometrico di curva, il quale può essere definito come percorso tracciato da un punto in movimento. L'apparizione delle funzioni patologiche è invece strettamente connessa con il processo di aritmetizzazione dell'analisi e, in particolare, con l'introduzione da parte, principalmente, di Weierstrass delle cosiddette definizioni "ε, δ", ossia definizioni, ad esempio, di continuità, le quali sono date in termini di corrispondenza tra intervalli.

Oltre a queste particolari funzioni, di cui la cosiddetta *funzione di Weierstrass* è l'esempio principale, furono scoperti anche altri "mostri" capaci di mostrare l'inaffidabilità delle nostre credenze intuitive, e, tra questi, possiamo ricordare la mappa dei tre "paesi" che si incontrano in ogni punto dei loro confini, dovuto a Brouwer (1910), una curva composta da soli punti di "ramificazione", ossia punti dove la funzione interseca se stessa, dovuto a Sierpinski (1915), a cui si può, infine, aggiungere la cosiddetta sfera di Alexander (1924), una

possible to honest functions that are of some use. No more continuity, or else continuity but no derivatives, etc. [...] Formerly, when a new function was invented, it was in view of some practical end. Today they are invented on purpose to show our ancestors' reasoning at fault, and we shall never get anything more out of them.»

133 Una cuspide è una singolarità in cui, se immaginiamo la curva descritta da un punto in movimento, il suo cammino si inverte bruscamente e, in quel punto, i valori delle tangenti da destra e da sinistra non coincidono.

134 Vedi Hawkins, 1975, pp. 43-44.

135 Ossia la proprietà di una funzione di mantenersi non crescente o non decrescente.

superficie topologica omeomorfa alla sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$. Questi ultimi esempi, non riguardando direttamente difficoltà relative alle proprietà differenziali esulano dal presente lavoro, dato che Klein non se ne occupò, e per una loro trattazione rimando, per i primi due, a Hahn (1933) e, per il terzo a Feferman (2000).

Per quanto riguarda invece esempi specifici di curve continue ma non derivabili in alcun punto, oltre che attraverso la già citata funzione di Weierstrass, cercherò di presentare il problema attraverso la descrizione della curva di Bolzano, quella di Peano-Hilbert, la curva di von Koch e la cosiddetta funzione biancomangiare (*blancmange*).

Le difficoltà attribuite all'intuizione che emergono in questi ultimi esempi, con alcune differenze che ora esporrò, in generale, nascono da un'insufficiente attenzione rivolta alla relazione tra il concetto di funzione, astratto ed appartenente all'apparato logico-assiomatico, e quello di "curva" ad essa associata, ossia il grafico, la rappresentazione geometrica, sia immaginata mentalmente sia disegnata sulla carta.

> Le funzioni non differenziabili hanno giocato una parte importante nel raffinamento della nostra intuizione geometrica, e furono in parte, se non completamente, responsabili dello studio critico della nozione di "limite" condotta dai matematici del diciannovesimo secolo – uno studio che ebbe come risultato il porre l'analisi su un fondamento sicuro e solido. Fino alla metà del diciannovesimo secolo la nozione di "funzione" venne connessa con la nozione geometrica di "curva" definita come il percorso seguito da un punto in movimento. Questa nozione di curva implica che
>
> (i) la curva è continua, poiché il punto in movimento deve passare attraverso ogni punto compreso tra due punti qualsiasi P e Q lungo il percorso;
> (ii) la curva ha una tangente determinata ad ogni punto, poiché il punto in movimento ha, in ogni punto del suo percorso, una direzione di movimento determinata.
> (iii) l'arco di curva tra due punti qualunque ha una lunghezza finita poiché l'arco è descritto in un tempo finito; e
> (iv) la curva non compie un numero infinitamente grande di oscillazioni nell'intorno di alcun punto.
>
> Esempi di funzioni che potrebbero essere espresse da una semplice formula analitica, ma che non soddisfano una o più delle condizioni precedenti, erano note ai matematici all'inizio del

diciannovesimo secolo, così che una definizione di funzione libera dal ricorso all'intuizione geometrica era un *desiderata*.[136]

Questo breve passo di A. N. Singh, con cui si apre il suo *The Theory and Construction of Non-Differentiable Functions*, chiarisce in parte i termini della questione. Infatti quello che è in gioco è anzitutto che cosa si debba intendere per curva o grafico di una funzione, specialmente nel caso in cui le funzioni in oggetto siano definite attraverso processi infiniti. Infatti, la modalità di definizione di queste funzioni implica, in generale, quello che Feferman ha, con un'espressione felice, indicato come un "e così via…", ossia un ragionamento per mezzo di diagrammi infiniti.[137] Ciò non è un elemento trascurabile, dato che questi esempi sono molto lontani dalle funzioni che, per usare l'espressione di Poincaré, possono essere considerate *oneste*, e di conseguenza parlare di una loro rappresentazione significa preventivamente chiarire che cosa si intenda per

[136] Singh, 1935, pp. 1-2: «Nondifferentiable functions have played a great part in the refinement of our geometrical intuition, and were in part, if not wholly, responsible for the critical study of the notion of "limit" made by the nineteenth century mathematicians – a study which resulted in placing mathematical analysis on a sure and sound foundation. Up to the middle of the nineteenth century the notion of "function" was connected with the geometrical notion of "curve" defined as the path traced out by a moving point. This notion of curve implies that

(i) The curve is continuous, because the moving point must pass through every point between any two points P and Q on the path;
(ii) the curve has a determinate tangent at each point, because a moving point has at every point of its path a determinate direction of motion;
(iii) the arc of the curve between any two points has a finite length, because the arc is described in finite time; and
(iv) the curve does not make an indefinitely large number of oscillations in the neighbourhood of any point.

Examples of functions which could be expressed by a simple analytical formula, but which did not satisfy one or more of the above conditions, were known to mathematicians in the early nineteenth century, so that a definition of function, free from appeal to geometrical intuition, was a desideratum.»

[137] Vedi Feferman, 2012.

"grafico" o, con un'espressione più generale, diagramma matematico.

A tal proposito, seguendo un suggerimento contenuto nel citato saggio di Singh (1935) – evidenziato anche in un recente articolo da Klaus Volkert[138] – al fine di fornire un esempio di funzione continua ma non differenziabile, è possibile distinguere tre differenti linee di pensiero, ossia è possibile fornirne una descrizione *analitica*, *geometrica* o *aritmetica*. La via puramente analitica è quella seguita da Weierstrass e da tutti gli esempi di funzioni analoghe, mentre quella geometrica è invece propria di tutti gli altri esempi, eccetto il caso della funzione originariamente definita da Peano, dove possiamo parlare, invece, di una definizione aritmetica.

La prima presentazione pubblica di una funzione continua ma non differenziabile in alcun punto fu probabilmente la conferenza che Karl Weierstrass tenne il 18 luglio 1872 all'Accademia Reale delle Scienze di Berlino, mentre la prima pubblicazione scritta di quella stessa funzione, con poche piccole differenze, apparve ad opera di Paul du Bois-Reimond qualche anno dopo, nel 1875. Ad ogni modo, sembra sicuro che Weierstrass non sia stato il primo a concepire una funzione *patologica* di questo tipo, non solo perché è lui stesso ad affermare di aver saputo che Riemann, già nel 1861, aveva annunciato una funzione simile[139], ma soprattutto perché esempi precedenti sono stati accertati nelle opere postume di Bolzano e Cellérier.

Nel testo della sua conferenza, Weierstrass costruisce un esempio di funzione continua ma non differenziabile in alcun punto nella forma di *un limite di una somma infinita*:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b^n \, cos(a^n x)\pi$$

---

[138] Vedi Volkert, 1987, p. 222 n.18.

[139] Benché non ne sia pervenuta alcuna dimostrazione, aggiunge Weierstrass. Klein (1928, p. 39) sostiene invece che la scoperta della funzione sia stata fatta proprio da parte di Weierstrass e che questa risalga proprio al 1861. Vedi Weierstrass, 1895, pp. 71-72 e Schlimm, 2012, p. 7.

dove $x \in \mathbb{R}, a$ è dispari, $0 < b < 1, e\ ab > 1 + 3\pi/2$.

Il testo, estremamente conciso, di sole quattro pagine, ovviamente non presenta alcun grafico, ma si limita alla costruzione della funzione stessa.

Questo esempio diede poi l'avvio alla creazione di tutta una serie di funzioni, definite seguendo lo stesso schema, ossia per mezzo di serie; esse condividono tutte la stessa seguente forma generale:

$$f(x) = \sum c_n P(d_n x),$$

dove c_n è scelto in modo tale che $\sum c_n$ sia assolutamente convergente; d_n è una successione di numeri naturali rapidamente crescente (per lo più tale che $(c_n \cdot d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e P è una funzione continua periodica (per esempio *sen*, *cos*, Δ e così via).

Come accennato, prima che Weierstrass rendesse pubblico il suo risultato, fu Bernhard Bolzano, in un manoscritto dal titolo *Functionlehre* – pubblicato nel 1920 ma risalente al 1830 – a descrivere, a partire da una definizione di tipo geometrico, una funzione continua ma non differenziabile: a differenza di Weierstrass, quindi, al posto di un approccio basato sulle serie, troviamo l'utilizzo di una *costruzione geometrica*, ossia la definizione di una *curva* continua e non differenziabile che è il limite di una sequenza di pezzi di curve, associate a funzioni lineari continue. È infatti possibile definire una funzione anche per mezzo di una regola descritta in termini geometrici, definendo le curve in termini di figure geometriche e operazioni: «una funzione-limite f risulta come il limite di funzioni che, pezzo per pezzo, sono affini e uniformemente convergenti»[140].

Questo modo di definire una funzione è molto interessante poiché quello che si descrive è una serie di operazioni da compiere su dei segmenti di retta, disegnando o cancellando delle parti, ecc. e, paradossalmente, è stato utilizzato dallo stesso Hans Hahn per introdurre, nel suo celebre scritto "The Crises in

[140]Volkert, 1987, p. 222: «A limit-function f result as the limit of piecewise affine and uniformly convergent functions.»

Intuition", proprio la funzione di Weierstrass in una forma semplificata. La curva associata alla funzione di Weierstrass e la curva di Bolzano sono oggetti molto simili, e l'utilizzo di una costruzione geometrica, a mio avviso, vanifica lo sforzo fatto da Weierstrass per dimostrare le difficoltà cui sarebbe dovuta andare incontro l'intuizione. È interessante che Hahn non prenda in considerazione la possibilità che egli stesso stia costruendo, di fatto, quella descrizione intuitiva che la cui possibilità viene negata di principio.

In termini geometrici, il grafico di tale funzione può essere "intuitivamente" costruito nel seguente modo: si parte con una figura consistente di due segmenti disposti come in figura, uno ascendente ed uno discendente. Quindi, si rimpiazza ciascuno dei due segmenti con le spezzate indicate nelle figure, le quali indicano, ovviamente, solo i primi tre passaggi.

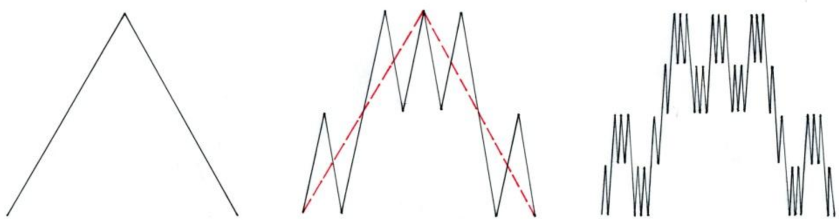

Figura 2. Sequenza che mostra i primi passaggi della costruzione della curva corrispondente alla funzione di Weierstrass, come descritto da Hans Hahn. Il grafico riproduce e raccoglie in sequenza i tre passaggi descritti in Hahn, 1933, pp. 82-83.

Questo tipo di definizione procedurale, per quanto possa apparire strana, dato che siamo abituati a vedere le funzioni definite per mezzo di formule che coinvolgono polinomi o funzioni di vario genere, è in realtà molto efficace, soprattutto se pensiamo di utilizzare un computer per costruirne il grafico.

Un primo tentativo di dare una rappresentazione grafica che potesse chiarire visivamente che tipo di oggetto fosse la funzione di Weierstrass, fu condotto dal matematico svedese Helge von Koch in un articolo presentato nel 1906, "Une méthode géométrique élémentaire pour l’étude de certaines questions de la théorie des courbes planes”:

> L’esempio di Weierstrass non soddisfa lo spirito dal punto di vista geometrico; poiché la funzione in esame è definita per mezzo di un’espressione analitica che nasconde la natura geometrica della curva corrispondente in modo tale che, da questo punto di vista, non è possibile vedere perché la curva non ha una tangente; si dovrebbe dire piuttosto che l’apparenza contraddice la realtà dei fatti, stabilita da Weierstrass in un modo puramente analitico.[141]

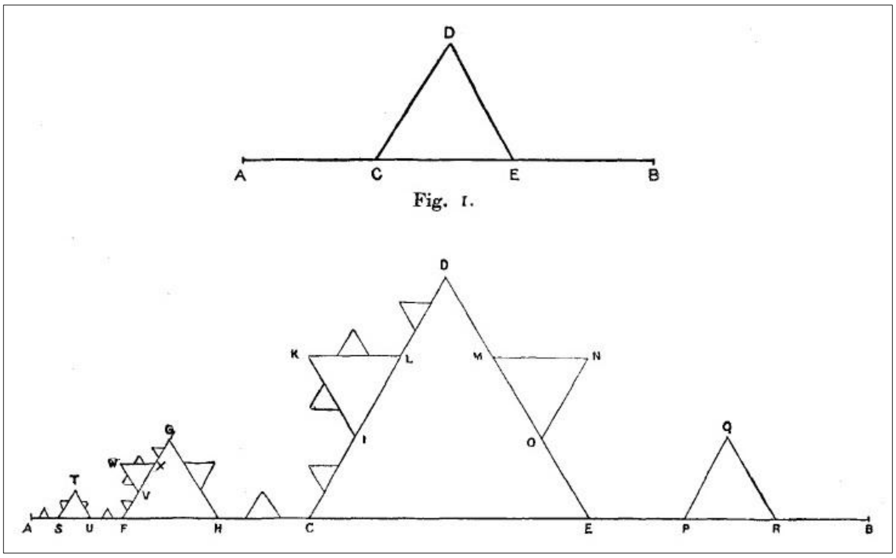

Figura 3. La costruzione della curva di von Koch mediante l’operazione Ω. Tratta da von Koch, 1906, p. 149.

Bråting e Pejlare (2008) osservano come, a loro avviso, nel modo di esprimersi di von Koch vi sia una premessa di fondo: «sembra che von Koch non distingua tra *vedere* e *comprendere*;

---

[141] von Koch 1906, 145-146: «Bien que l'exemple dû à Weierstrass ait pour toujours corrigé cette erreur, cet exemple ne satisfait pas l'esprit au point de vue géométrique; car la fonction dont il s'agit est définie par une expression analytique qui cache la nature géométrique de la courbe correspondante de sorte qu'on ne voit pas, en se plaçant à ce point de vue, pourquoi la courbe n'a pas de tangente; on dirait plutôt que l'apparence est ici en contradiction avec la réalité du fait, établi par Weierstrass d'une manière purement analytique.»

egli voleva essere capace di *vedere* i risultati matematici al fine di *comprenderli*»[142], e, quindi, seguendo questo desiderio fu spinto a ricercare una funzione opportuna che avesse un'apparenza geometricamente visualizzabile, seppur mantenendo la caratteristica di essere continua ma non differenziabile in alcun punto.

Questa è, al pari della funzione di Weierstrass, costruita come il limite di una serie infinita di funzioni, a partire da un segmento di lunghezza 1, AB e mediante la reiterazione di una funzione Ω così definita: il segmento AB viene diviso in tre parti AB, DC e CD e, la parte centrale CE viene sostituita dai lati del triangolo equilatero di lunghezza $\frac{1}{3}$, ottenendo la seconda curva poligonale $ACDEB$. Quindi, la terza curva della successione viene ottenuta applicando la medesima operazione Ω a ciascun segmento della seconda curva, e così via per le successive. In questo modo si ottiene una serie di curve poligonali $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$ via via composte da un numero crescente di segmenti, rispettivamente di $1, 4, 4^2, \cdots, 4^{n-1}, \cdots$ segmenti, che, all'infinito tende ad una curva (Figura 2) che, dopo essere stata modificata come in Figura 3, cos' che la curva corrisponda effettivamente ad una ad una funzione $[0,1] \to \mathbb{R}$, risulta continua ma non dierivabile in alcun punto.

> Helge von Koch affermò che a partire dalla rappresentazione visiva sarebbe possibile *vedere* che la funzione limite era continua ma non differenziabile in alcun luogo. Nell'introduzione al suo articolo egli fa riferimento all' 'intuizione naive' di Klein per mezzo della quale Koch affermava che è possibile comprendere l'impossibilità di disegnare una tangente ad ogni punto della curva. Apparentemente, von Koch voleva connettere il risultato di Weierstrass all'intuizione *naïve* al fine di ottenere una comprensione dell'esistenza di funzioni continue che non sono differenziabili in alcun punto. Inoltre, von Koch sottolineava il fatto che la possibilità di illustrare la 'natura geometica'

[142] Bråting & Pejlare, 2008, p. 349: «It appears that von Koch here did not distinguish between *seeing* and *understanding*: he wanted to be able to *see* the mathematical results to be able to *understand* them.»

è importante, in particolare per quanto riguarda l'insegnamento della matematica.[143]

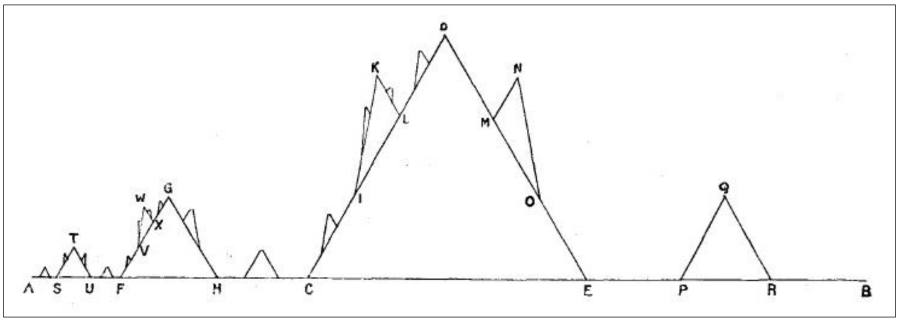

Figura 4. Modificazione della curva di von Koch. Tratto da von Koch, 1906, p. 167.

Per capire meglio il ragionamento che sta alla base della costruzione di questo tipo di funzioni possiamo esaminare un altro esempio proposto da David Tall e Silvia Di Giacomo[144], ossia quello della funzione costruita nel battezzata dagli autori "biancomangiare" – *blancmange*, in francese, per la sua somiglianza con un particolare budino inglese – ma nota anche come funzione di Takagi, dal nome del matematico giapponese Teiji Takagi che la scoprì nel 1904.

David Tall e Silvia Di Giacomo forniscono quindi quella che chiamano una "ricetta" per la costruzione della funzione, partendo, come nel caso di quella di Weierstrass, da una funzione base che è la funzione dente di sega $s(x)$ definita come segue:

[143] Bråting & Pejlare, 2008, pp. 349-350: «Helge von Koch claimed that from the visual representation it would be possible to *see* that the limit function was continuous but nowhere differentiable. In the introduction to his article he refers to Klein's "naïve intuition" with which von Koch claimed that it is possible to understand the impossibility to draw a tangent at every point of the curve. Apparently, von Koch wanted to connect Weierstrass' result to the naïve intuition to get an understanding of continuous functions that are nowhere differentiable. Furthermore, von Koch emphasized that the possibility to illustrate the "geometrical nature" is important, in particular in the teaching of mathematics.»
[144] Vedi Tall & Di Giacomo, 2000.

- calcolare la parte intera di x, ovvero il più grande numero intero n minore di x,
- calcolare la parte decimale di x, $d = x - n$,
- se $d \leq \frac{1}{2}$ allora $s(x) = d$ altrimenti (se $d \geq \frac{1}{2}$) allora $s(x) = 1 - d$

Quindi, determinati i passi che definiscono la funzione, costruiscono il secondo passo, definendo:

$s_2(x) = \frac{1}{2}s(2x)$,

ossia una funzione dente di sega grande la metà di quella definita dal precedente passo. Di nuovo, il terzo passo è costruire la funzione dente di sega grande un quarto della prima risultando, in generale, la funzione $n + 1esima$ definita come:

$s_{n+1}(x) = \frac{1}{2}s_n(2x) = \frac{1}{2^{n+1}}s_1(nx)$.

Quindi, ad ogni passo, possiamo costruire un'approssimazione sempre migliore della funzione *blancmange*, la funzione come somma infinita di una serie di funzioni, ossia:

$$b_n(x) = s_1(x) + s_2(x) + \cdots + s_n(x) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} s_n(x).$$

Quindi, per $n \to \infty$, la funzione *blancmange* è definita come la somma della serie di funzioni a dente di sega, la quale si può dimostrare essere continua.

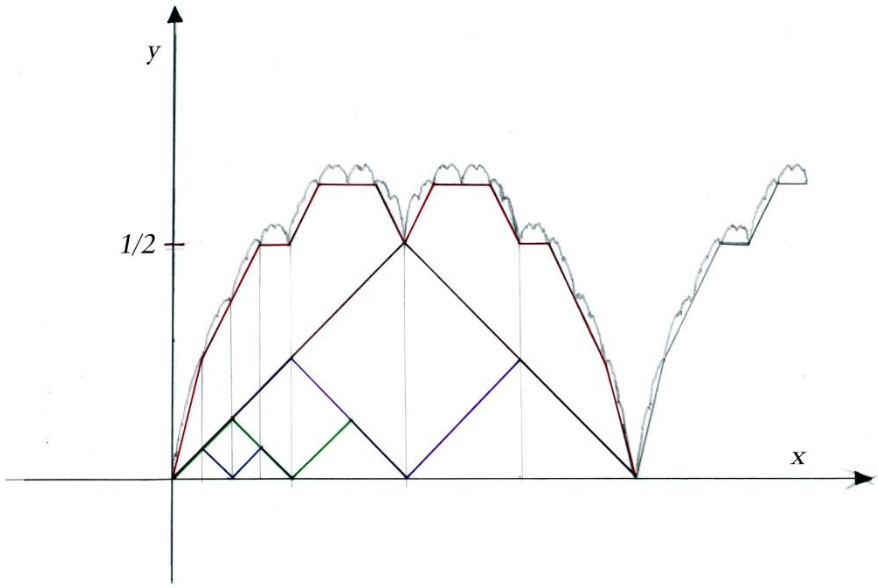

Figura 5. Quest'immagine cerca di mostrare come la funzione *blancmange*, il cui grafico è descritto in maniera approssimativa, possa essere ottenuta come somma di successive funzioni a "dente di sega" sempre più piccole.

Ora, ciò che è interessante in questi esempi, sostanzialmente analoghi a quello di Weierstrass, e, in particolare, in quello della funzione *blancmange*, ma il discorso vale anche per la curva di von Koch, è che, andando a ritroso, con l'aiuto di grafici generati dal computer, è possibile convincersi del fatto che la funzione non è derivabile, presentando il suo grafico una struttura molto corrugata, ossia non liscia in alcun punto.

Infatti, ingrandendo il grafico – e questo con un qualunque computer è possibile realizzarlo – non troviamo, prima o poi, una linea retta, cosa che accade normalmente con le funzioni lisce, le quali sono approssimabili localmente dalla loro tangente, ma mostra, ad ogni passo di ingrandimento, sempre la stessa struttura che si ripete, come se tante piccole funzioni *blancmange* emergessero in ogni punto all'infinito.

Ora, se pensiamo che l'intuizione, come si è osservato nella prima parte, non è una forma di immaginazione statica, ma uno strumento dinamico di rappresentazione, ecco che abbiamo ottenuto una rappresentazione del tipo "and so on…".

Certamente quello che rappresentiamo di tali funzioni particolari non è il loro risultato all'infinito, ma ne otteniamo comunque una rappresentazione, che, se abbiamo chiare le possibilità e teniamo conto dei limiti dell'intuizione, non è fuorviante o errata, ma, semplicemente, dinamica. Sembra paradossale che Hahn, dopo aver descritto la funzione di Weierstrass graficamente, affermi quanto segue:

> Il carattere di questa curva elude completamente l'intuizione; in verità dopo poche ripetizioni del processo di segmentazione la figura che si evolve è divenuta così intricata che l'intuizione la può appena seguire; ed essa ci abbandona completamente per quanto riguarda la curva che si ottiene nel passaggio al limite. Il fatto è che solo il pensiero, o l'analisi logica può seguire questo strano oggetto fino alla sua forma finale. Così, se ci fossimo basati sull'intuizione in questo caso, saremmo rimasti in errore, dato che l'intuizione sembra spingerci alla conclusione che non possono esserci curve prive di tangente in ogni punto.[145]

Senza dubbio non è possibile "seguire" la funzione oltre un certo numero di passi, ma la domanda da porsi è se sia vero che invece la "logica" possa veramente seguirla fino al passaggio al limite. Riferendosi proprio alla costruzione geometrica della funzione di Weierstrass offerta da Hans Hahn, Fischbein osserva:

> Siamo mentalmente capaci di seguire il processo di moltiplicazione di segmenti, possiamo essere pronti ad accettare l'idea che il processo possa andare avanti indefinitamente, ma non possiamo realizzare intuitivamente il limite del processo, cioè la curva stessa, poiché, materialmente, una tale curva non esiste. [...] Gli sviluppi della computer grafica stanno facendo il possibile per estendere l'utilità delle analogie pittoriche in modi profondamente nuovi [...] Per

[145] Hahn, 1933, p. 84: «The character of this curve entirely eludes intuition; indeed after a few repetitions of the segmenting process the evolving figure has grown so intricate that intuition can scarcely follow; and it forsakes us completely as regards the curve that is approached as a limit. The fact is that only thought, or logical analysis can pursue this strange object to its final form. Thus, had we relied on intuition in this instance, we should have remained in error, for intuition seems to force the conclusion that there cannot be curves lacking a tangent at any point.»

esempio, si possono rendere disponibili facilitazioni come lo "zoomare", cioè la capacità di alterare la scala di ogni particolare regione di un grafico in maniera flessibile e dinamica. Nel software ideato da David Tall (1985)[146], questa possibilità offre una rappresentazione pittorica sia per le funzioni differenziabili che per quelle non differenziabili la quale riconduce tali esempi all'interno della portata dell'intuizione.[147]

Per concludere, si può affermare che è qui in discussione è il fatto che posizioni filosofiche simili a quella sostenuta da Hahn, affermando l'inaffidabilità dell'intuizione cercano, di fatto, di negare il carattere integrato del pensiero. Ma data l'impossibilità di scindere le due funzioni – chiamiamole pure funzione logica e funzione intuitiva, o, per seguire Betty Edwards, funzione S e funzione D – chi si fa portavoce di un'immagine puramente formale della verità matematica sembra non rendersi conto di negare questa evidenza. Come cercherò di mostrare, l'affermazione della necessità di integrare le funzioni del pensiero è proprio quello che, invece, ha cercato di sostenere Felix Klein.

Approximations- und Präzisionsmathematik

Ad appena un anno dalla conferenza tenuta da Weierstrass, Klein cerca di dare un contributo al dibattito, da questa innescato, attraverso la pubblicazione dell'articolo *Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve* (1873). Con questo, attraverso l'analisi del

[146] Vedi Tall, 1985.

[147] Fischbein, 1987, pp. 137-138: «We are mentally able to follow the process of multiplication of segments, we may be ready to accept the idea that the process may go on indefinitely, but we cannot intuitively realize the limit of the process, i.e. the cure itself, because, materially, such a curve does not exist. […] Developments in computer graphics are making it possible to extend the scope of pictorial analogies in fundamentally new ways […]. For example, facilities can be made available such as "zooming" i.e. being able, flexibly and dynamically, to alter the scale of any particular region of a graph. In the software devised by David Tall (1985), this offers a pictorial representation for differentiable and non-differentiable functions which brings such examples within the range of intuition.»

ruolo giocato dall'intuizione geometrica nelle indagini analitiche, partendo da una riconsiderazione della relazione tra il concetto di funzione e quello di curva, Klein dà l'avvio ad una linea di ricerca che porterà avanti lungo tutto l'arco della sua vita, raggiungendo la sua più dettagliata e sistematica formulazione in quello che diventerà il terzo volume della *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt aus*, riguardante "Präzisions- und Approximationsmathematik" (1928), pubblicato per la prima volta nel 1902. Attraverso questo programma di ricerca, Klein cerca di fornire una descrizione di ciò che egli definisce un sistema "ridotto" di matematica, cioè un sistema capace di descrivere quella "matematica dell'approssimazione" che viene effettivamente usata nella pratica matematica (data la finitezza del grado di precisione ottenibile attraverso i procedimenti di misura) e, soprattutto, che è in accordo con l'intuizione.

Klein non nega il ruolo essenziale che un approccio logico e rigorosamente fondato gioca al fine di evitare di incorrere in errori dovuti a pregiudizi e false credenze. Inoltre, riguardo al significato da attribuire a funzioni come quella di Weierstrass, egli non nega che queste mostrino la limitatezza del grado di precisione della nostra intuizione. Klein fa leva piuttosto proprio sul fatto che vi sia una soglia di precisione a livello di intuizione, allo stesso modo in cui esiste una soglia della percezione, al fine di mostrare come i limiti dell'intuizione, se adeguatamente conosciuti, possono essere sufficientemente ampi da includere tutta la matematica "finita", che è possibile concretamente utilizzare nella matematica applicata.

Per Klein l'intuizione è uno strumento fuorviante, poiché è solo necessario sottoporla ad un apprendimento, ad un *training*, che permetta di raggiungere un livello di precisione adeguato alle esigenze della pratica matematica. E, per fare questo, il trattamento algebrico e logico della matematica, attuato mediante un rigoroso approccio assiomatico, è uno strumento utile al fine di testare e migliorare le capacità intuitive che sono essenziali per la creazione, la comprensione e l'applicazione della matematica pura.

> Primo, credo che quei difetti dell'intuizione spaziale in ragione dei quali si è obiettato da parte dei matematici siano puramente temporanei, e che questa intuizione possa essere formata a tal punto che con il suo aiuto possano essere compresi gli sviluppi astratti degli analisti, almeno nella loro *tendenza* generale.
>
> Secondo, sono dell'opinione che con questa intuizione più altamente sviluppata, le applicazioni della matematica ai fenomeni del mondo esterno rimarranno, in generale, immutate, a condizione che ci accordiamo nel considerarle interamente come una sorta di *interpolazione* che rappresenta le cose con un approssimazione, limitata, certamente, ma ancora sufficiente per tutti gli scopi pratici.[148]

Klein si dimostra consapevole di attraversare un campo minato dovendo, in questo suo tentativo, affrontare problemi filosofici e psicologici, oltre che matematici. Ciononostante, è convinto che queste difficoltà non siano importanti, a fronte della possibilità di ottenere dei risultati. Egli è spinto da un interesse che si manifesterà più volte nel corso della sua attività di matematico, ossia l'interesse verso le implicazioni interdisciplinari: pensa, infatti, che i contributi provenienti dalla nascente psicologia scientifica potrebbero chiarire alcune problematiche inerenti alla matematica, quali, ad esempio, quelle che sorgono dalla contrapposizione tra intuizione e rigore o tra approccio geometrico e algebrico. Da un punto di vista filosofico, egli non si ritiene isolato in questo tentativo interdisciplinare, ma ritiene di trovare importanti punti di contatto con le ricerche di Carl Stumpf, in particolare per quanto riguarda il suo testo *Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung*, e con la lunga serie di contributi pubblicati

---

[148] Klein, 1895, p. 179: «First, I believe that those defects of space-intuition by reason of which it is objected to by mathematicians are merely temporary, and that this intuition can be so trained that with its aid the abstract developments of the analysts can be understood, at least in their general *tendency*.
Second, I am of the opinion that, with this more highly-developed intuition, the applications of mathematics to the phenomena of the outside world will, on the whole, remain unchanged, provided we agree to regard them throughout as a sort of *interpolation* which represents things with an approximation, limited, to be sure, but still sufficient for all practical purposes.»

da Benno Kerry, riguardanti l'intuizione, affrontata da un punto di vista sia filosofico sia psicologico, sulla *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie*, rivista a cui, all'epoca annoverava la collaborazione di Wundt[149].

Nel suo articolo del 1873, Klein analizza la nostra facoltà intutivo-geometrica, cercando di costruire un nuovo concetto matematico di funzione che possa essere in accordo con la necessaria accuratezza della nostra intuizione spaziale. In questo modo egli presuppone che l'intuizione abbia una struttura simile alla percezione visiva e che perciò essa consista in una sorta di percezione interna o immaginazione.

Klein prende in considerazione il concetto generale di funzione che proviene dal campo della geometria analitica, e, parallelamente, la rappresentazione della corrispondente curva, appartenente all'ambito della rappresentazione grafica sul piano, giungendo alla conclusione che quest'ultimo non è per niente, come invece di solito si pensa, il corrispondente del primo, ma, ad una più attenta analisi, esso corrisponde a quello che Klein definisce con il termine di "funzione-striscia" [*der Funktionsstreifen*]. Quindi cerca di costruire questo nuovo equivalente analitico del concetto di curva in modo tale che sia veramente in accordo con la rappresentazione intuitiva.

Nell'ambito della matematica dell'approssimazione, la "funzione-striscia" è un insieme bidimensionale contenente tutti i punti di tutte le funzioni che, a partire da una funzione data, presa come riferimento, e da un arbitrario δ, sono definibili nel modo seguente:

$y = f(x) \pm \varepsilon$, con $\varepsilon < \delta$.

L'uso del termine "striscia" rimanda infatti a ciò che è realmente immaginabile o rappresentabile mediante l'intuizione geometrica. Punto centrale di questa considerazione è il fatto che l'elemento di base dell'intuizione spaziale non è il punto *senza dimensione*, ma il solido tridimensionale. Considerando una parte di curva, la nostra attenzione è infatti focalizzata su una

[149] Vedi Klein, 1896, p. 244.

sola dimensione, mentre le altre due vengono considerate molto piccole rispetto a questa, così da non essere importanti per le considerazioni geometriche, ma non a tal punto da annullarsi. Similmente, *mutatis mutandis*, avviene nel caso del piano. Ciò pone in evidenza come, di fatto, una curva abbia sempre una larghezza che non è possibile rendere piccola oltre qualunque limite arbitrario, poiché, come detto, esiste una soglia di precisione che caratterizza l'immaginazione intuitiva.

Perciò, i problemi relativi alla supposta inaffidabilità dell'intuizione sorgono quando si pensa la curva come il corrispondente geometrico del concetto analitico di funzione. Il fatto che, nell'intuizione, si pensi che una curva "liscia" debba avere sempre una tangente – mentre una funzione continua può non averne affatto – non dimostra che l'intuizione è una fonte di possibili errori, ma, piuttosto, semplicemente che i due concetti non sono l'uno il corrispondente dell'altro.

La definizione precedente però non è ancora sufficiente, ma è necessario un raffinamento ulteriore. Infatti, i contorni di una striscia sono, nella rappresentazione intuitiva, piuttosto vaghi. Essi, se indichiamo con ρ una quantità totalmente indefinita che sia molto piccola al confronto con δ, $(\delta \ll \rho)$, l'espressione analitica della funzione-striscia diventa:

$$y = f(x) \pm \varepsilon, \text{ con } \varepsilon < \delta - \rho.$$

La ragione di questa scelta è dovuta al desiderio di far correttamente corrispondere l'espressione analitica non solo del grafico disegnato sulla carta, o immaginato mentalmente, ma di un suo modello concreto, quale un flusso di corrente o il tracciato di un sentiero reale. Introducendo questa definizione, il fattore $\delta - \rho$ descrive il fatto che gli oggetti reali descritti non hanno contorni definibili nettamente, e $2(\delta - \rho)$ corrisponde quindi alla larghezza totale della curva con bordi indefiniti.

Come accennato, queste idee vengono ampiamente rielaborate da Klein e trovano espressione in un ciclo di lezioni che verrà raccolto e pubblicato nel 1902, andando successivamente a costituire il terzo volume dell'*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, dal titolo *Präzisions- und Approximationsmathematik*.

Qui Klein in parte ripresenta le argomentazioni del precedente articolo del 1873, approfondendole e ampliandole. In particolare, prende le mosse dal concetto di *variabile*, cercando di porlo in relazione a quel valore di soglia della precisione che caratterizza gli ambiti pratici dell'applicazione matematica. È anzitutto importante osservare la terminologia, dato che questa soglia riguarda la rappresentazione spaziale intuitiva. Infatti, la capacità di immaginare intuitivamente [*räumliche Vorstellen*] è per Klein ben distinta dal disegnare [*zeichnen*] e dal seguire con lo sguardo [*mit den Augen verfolgen*], che fa parte dell'osservazione [*Beobachtung*]. Tutte queste attività, intese come elementi del pensiero visivo considerato nel senso più generale, sono ordinate secondo un *continuum* che segue la loro maggiore o minore vicinanza alla matematica applicata o alla matematica pura.

Klein ritiene che, data l'esistenza di una soglia di rappresentabilità, sia necessario separare nettamente i piani dell'empiria [*Empirie*] e dell'idealizzazione [*Idealisierung*]. Nel secondo non vi è, infatti, alcuna soglia e la precisione è illimitata. A questi due piani corrisponde poi una divisione in due parti dell'intera matematica: una matematica della precisione [*Präzisionsmathematik*], ossia quella che si occupa del calcolo con i numeri reali, e una matematica dell'approssimazione [*Approximationsmathematik*], che riguarda, invece, il calcolo con valori finiti e, appunto, approssimati.

La matematica dell'approssimazione, non è una matematica "approssimativa" o "minore", bensì una matematica precisa che però si occupa delle relazioni approssimative: è quella parte della matematica che viene utilizzata effettivamente nelle applicazioni, laddove la matematica della precisione è in un certo qual modo l'impalcatura di quest'ultima, «attorno alla quale la matematica dell'approssimazione si arrampica»[150].

[150] Klein, 1928, p. 5: «An dem sich die Aproximationsmathematik emporrankt.»

Dunque, così come nella matematica dell'approssimazione si lavora con valori approssimati delle variabili, similmente, all'interno della divisione tra geometria astratta e geometria empirica, si opera con corpi estesi al posto di punti privi di estensione e con "strisce" anziché curve monodimensionali. Di conseguenza, in questo caso, la relazione tra la geometria pratica e geometria astratta è descritta dalla teoria degli errori (di osservazione) [*Theorie der Beobachtungsfehler*].

Intuizione *naïve* e intuizione raffinata

Nel XLVI saggio facente parte di quella serie di "conferenze americane" tenute nel 1893 presso la Northwestern University e confluite nella raccolta nota sotto il nome di *Evanston Colloquium*,[151] Klein affronta il tema dell'intuizione in matematica e distingue chiaramente una forma di intuizione, che egli definisce *naïve*, da quella che egli definisce intuizione *raffinata*. Egli fa riferimento a questa distinzione connettendo la prima ai periodi creativi della storia della matematica, mentre, la seconda, ai cosiddetti periodi critici.

Questo ricorda molto da vicino un'analoga classificazione esposta da Hilbert, qualche giorno prima della *lecture* tenuta da Klein, nel suo intervento all'International Mathematical Congress di Chicago. Qui Hilbert, cercando di dare una valutazione del significato storico del suo lavoro sulla teoria degli invarianti, fa riferimento all'esistenza di tre stadi chiaramente separati che, a suo avviso, sono di solito passaggi obbligati propri dell'evoluzione di tutte le teorie matematiche: uno stadio *naïve*, uno stadio *formale* e uno stadio critico. Come osserva Leo Corry,

[151] Klein, a capo della delegazione tedesca, si recò negli Stati Uniti, per dirigere i lavori del Congresso Internazionale di Matematica che si teneva quell'anno a Chicago, in occasione della World Columbian Exposition del 1893. Al termine di questo, egli tenne un ciclo di lezioni, dal 28 agosto al 9 settembre, presso la Northwestern University le quali furono in seguito pubblicate con il titolo di "Evanston Colloquium". Hilbert, che non partecipò a queste lezioni, prese però parte al Congresso di Chicago.

> Nel caso della teoria degli invarianti, Hilbert vide i lavori di Cayley e di Sylvester quali rappresentanti dello stadio *naïve*, mentre l'opera di Gordan e di Clebsh rappresentava per lui lo stadio formale. Quale solo vero esempio di stadio critico nella teoria degli invarianti Hilbert, forse prevedibilmente, annoverò il suo contributo. Al di là dell'aspetto puramente personale di questo giudizio, e sebbene Hilbert non abbia fatto diretta allusione al suo lavoro, vi è una stretta e diretta connessione tra questa idea di uno stadio "critico" nella vita di una teoria e l'approccio assiomatico al quale avrebbe presto cominciato a interessarsi. [...] per Hilbert, la necessità di introdurre questo metodo nasce precisamente come mezzo per analizzare teorie già stabilite, per criticare le loro assunzioni di base, e chiarire la loro struttura logica deduttiva.[152]

A dire il vero, incidentalmente, l'affermazione secondo cui Hilbert non farebbe diretta allusione al suo lavoro è, a mio avviso, un po' benevola, dato che l'allusione indiretta è forse ancora più incisiva, osservando come "il periodo critico trova la sua espressione nelle proposizioni sopra indicate 6—13"[153], ossia le proposizioni presenti nel testo da lui stesso appena presentato.

Ad ogni modo, lasciando da parte questa digressione, Klein ritiene che, al momento in cui parla, sul finire dell'Ottocento, la matematica stia vivendo un periodo critico, data la diffusa esigenza di una fondazione su basi puramente analitiche, chiaramente mostrata dall'aritmetizzazione di ogni branca della matematica.

Rimandando quindi al suo precedente lavoro descritto sopra, per chiarimenti riguardo alla sua posizione riguardo

[152] Corry, 2004, p. 20: «In the case of invariant theory, Hilbert saw the works of Cayley and Sylvester as representing the naïve stage, whereas, the work of Gordan and Clebsh represented for him the formal stage. As the only real instance of the critical stage in the theory of invariants, Hilbert counted, unsurprisingly perhaps, his own work. Beyond the purely personal aspect of this judgment, and although Hilbert did in no way hint at it, there is a strong and direct connection between this idea of a "critical" stage in the life of a theory and the axiomatic approach that he was soon to become interested in. [...] For Hilbert, the need to introduce this method arises precisely as a means to analyze already established theories, to criticize their basic assumptions, and to elucidate their logical deductive structure.»

[153] Hilbert, 1896, p. 124: «die kritische Periode in den oben genannte Sätzen 6—13 ihren Ausdruck findet.»

all'intuizione, ossia all'articolo del 1873, Klein osserva come l'intuizione raffinata, che è all'opera negli sforzi fondazionali, non può essere, tutto sommato, ritenuta una forma di intuizione vera e propria. Infatti, egli scrive, "*l'intuizione naïve non è esatta, mentre l'intuizione raffinata non è vera e propria intuizione, ma nasce dallo sviluppo logico a partire dagli assiomi considerati come perfettamente esatti.*"[154]

Ciò è dovuto al fatto che l'intuizione raffinata va oltre i limiti dell'intuizione *naïve* poiché, vi sono, di fatto, molti casi in cui le conclusioni derivate attraverso il ragionamento puramente logico a partire dagli assiomi non possono più essere verificate per mezzo dell'intuizione. Ma nonostante i suoi limiti, l'intuizione *naïve* ha un ruolo essenziale, specialmente per quanto riguarda la parte creativa e *vitale* della ricerca matematica:

> Non credo, per esempio, che sarebbe stato possibile derivare i risultati discussi nelle mie precedenti lezioni, le splendide ricerche di Lie, la continuità della forma di curve e delle superfici algebriche, o le forme più generali dei triangoli, senza il costante uso dell'intuizione geometrica.[155]

Il contributo dell'intuizione alla conoscenza è particolarmente evidente nei momenti di genesi creativa, quale condizione di possibilità della stessa matematica pura. Klein sottolinea infatti il «il *valore euristico* delle scienze applicate come aiuto alla scoperta di nuove verità in matematica»[156], affermando come un risultato puramente matematico possa non solo essere *compreso* e *illustrato* per mezzo di un modello fisico,

---

[154] Klein, 1894, p. 42: «*The naïve intuition is not exact*, *while the refined intuition is not properly intuition at all, but arises through the logical development from axioms considered as perfectly exact*.»

[155] Klein, 1894, p. 45: «I do not believe, for instance, that it would have been possible to derive the results discussed in my former lectures, the splendid researches of Lie, the continuity of shape of algebraic curves and surfaces, or the most general forms of triangles, without the constant use of geometrical intuition.»

[156] Klein, 1894, p. 46: "The *heuristic value* of the applied sciences as an aid to discovering new truths in mathematics.»

ma anche *derivato* da considerazioni di tipo fisico. Un modello fisico può condurre a scoperte matematiche perché dà la possibilità di scoprire e derivare teoremi partendo dalla considerazione di un problema concreto. La sistemazione assiomatica e rigorosa mantiene il suo valore, ma quale strumento di controllo, da eseguirsi a posteriori.

> Così, ho mostrato (nel mio piccolo libro sulle teorie di Riemann [Über Riemanns Theorie der algebrischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig, B.G. Teubner, 1882. Cfr. Bd. 3]) che gli integrali abeliani possono essere meglio compresi ed illustrati considerando correnti elettriche su superfici chiuse. In modo analogo, i teoremi concernenti equazioni differenziali possono essere meglio derivati dalla considerazione delle vibrazioni dei suoni; e così via.[157]

L'intuizione, in questo caso intesa come uso di modelli e metodi mutuati dalle scienze applicate, è quindi uno strumento indispensabile a disposizione della matematica pura. Ciò avviene perché vi è continuità tra matematica pura e applicata, ed il grado di "purezza" o meno di una disciplina matematica è definito dal numero delle "figure significative", ossia dall'ordine di grandezza massimo e minimo raggiungibili dalla soglia di precisione delle procedure sperimentali. Così, ad esempio, l'astronomia ha il livello più altro di matematizzazione, mentre la chimica si trova al livello più basso della scala. Il "disegno geometrico" si colloca invece a metà strada, nel mezzo di questa scala, tra le due discipline.

> Io credo che la relazione più o meno stretta di ogni scienza applicata nei confronti della matematica possa essere caratterizzata dal grado di esattezza ottenuto, od ottenibile, nei suoi risultati numerici.
>
> [...]

[157] Klein, 1894, p. 46: «Thus I have shown (in my little book on Riemann's theories [Über Riemanns Theorie der algebrischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig, B.G. Teubner, 1882. Cfr. Bd. 3]) that the Abelian integrals can best be understood and illustrated by considering electric currents on closed surfaces. In an analogous way, theorems concerning differential equations can be derived from the consideration of sound-vibrations; and so on.»

La trattazione matematica ordinaria di qualunque scienza applicata sostituisce forme esatte ai risultati approssimati provenienti dall'esperienza, e deduce da questi assiomi le conclusioni rigide della matematica. Nell'applicare questo metodo non deve essere dimenticato che gli sviluppi matematici che trascendono i limiti dell'esattezza della scienza non sono di alcun valore pratico.[158]

Qui appare in tutta la sua chiarezza la posizione epistemologica di Klein, secondo la quale la matematica deve essere solidamente fondata empiricamente, e secondo la quale anche la matematica pura non può fare a meno di quella applicata e, in particolare, della fisica. E quel sistema "ridotto" della matematica che ha un significato pratico-applicativo deve essere definito tenendo conto dei limiti imposti dall'interazione sperimentale. Perciò Klein suggerisce ed auspica la necessità di creare un "sistema ridotto" di matematica, un sistema che sviluppi al suo massimo grado una matematica dell'approssimazione.

Klein chiarisce molto bene le sue idee riguardo a questo aspetto nel terzo volume delle sue *Gesammelte Abhandlungen*, nell'introduzione ai suoi lavori sulla teoria delle funzioni di Riemann:

In questo caso è necessario anzitutto dire quanto segue: nella letteratura matematica moderna è assolutamente insolito che vengano permesse riflessioni generali di stampo fisico o geometrico, di forma ingenuo-intuitiva [*naïv-anschaulicher Form*], le quali successivamente trovano il loro supporto stabile in dimostrazioni matematiche esatte, come avviene nel mio scritto. Io cerco di arrivare ad una padronanza vera dei pensieri che stanno a fondamento della teoria di Riemann. Io desidererei che la stessa cosa potesse accadere più spesso. Ma nel modo usuale secondo cui vengono create le pubblicazioni

[158] Klein, 1894, p. 46-47: «I believe that the more or less close relation of any applied science to mathematics might be characterized by the degree of exactness attained, or attainable, in its numerical results.
[…]
The ordinary mathematical treatment of any applied science substitutes exact forms for the approximate results of experience, and deduces from these axioms the rigid mathematical conclusions. In applying this method it must not be forgotten that mathematical developments transcending the limit of exactness of the science are of no practical value.»

matematiche (le quali, tra l'altro, anche nell'antichità furono sottoposte alla pressione dell'opinione pubblica dominante) l'importante domanda riguardante *come si arrivi, in generale, a formulare certi problemi e determinate linee di pensiero* è stata spinta sullo sfondo. Neppure è necessario sottolineare come con ciò il modo di vedere il lavoro matematico sia stato reso più complicato. Considero un errore il fatto che la maggioranza dei matematici reprima totalmente i propri pensieri intuitivi e renda pubbliche solo le dimostrazioni necessarie e rigorose (e per lo più aritmetizzate). Sembra esservi qui una certa paura a collaborare, ad apparire non abbastanza "scientifici" di fronte ai colleghi della stessa disciplina. Oppure, in altri casi, vi è stato il desiderio di non rivelare ai concorrenti la fonte dei propri pensieri? Ad ogni modo, io vedo questo come un prodotto tipico, così che io sottolineerei proprio questo lato delle pubblicazioni matematiche. Io ho scritto il mio lavoro su Riemann letteralmente come fisico, noncurante riguardo a tutte le aggiunte cautelative che si è abituati a fare nella realizzazione di una trattazione matematica e con ciò ho anche trovato proprio approvazione tra parecchi fisici. – ovviamente, la realizzazione della necessaria dimostrazione era programmata in un secondo scritto (vedi l'introduzione a p. 503). Ma questa purtroppo come tale non è più stata realizzata, poiché lo la mia attività lavorativa è stata presto occupata da problematiche di più ampia portata riguardanti le funzioni automorfe.[159]

[159] Klein, 1923a, p. 478: «Da darf zunächst folgendes gesagt werden: Es ist in der modernen mathematischen Literatur durchaus ungewöhnlich, daß allgemein physikalische und geometrische Überlegungen in naiv-anschaulicher Form, die später in exakten mathematischen Beweisen ihre feste Stütze finden, als solche so vorangestellt werden, wie dies in meiner Schrift geschieht. Ich suche durch physikalische Erwägungen zu einer wirklichen Beherrschung der Grundgedanken der Riemannschen Theorie zu gelangen. Ich möchte den Wunsch äußern, daß ähnliches öfter geschehen möge. Denn bei der üblichen Art der mathematischen Publikation (die übrigens auch im Altertum unter dem Druck der öffentlichen Meinung vorherrschend war) tritt die wichtige Frage, *wie man überhaupt dazu kommt, gewi8se Probleme und Gedankenreihen aufzustellen,* ganz in den Hintergrund. Es ist gar nicht zu sagen, wie sehr die Auffassung mathematischer Arbeiten dadurch erschwert wird. Ich ha.lte es für ein Unrecht, wenn die meisten Mathematiker ihre intuitiven Überlegungen ganz unterdrücken und nur die allerdings notwendigen strengen (und meist arithmetisierten) Beweise veröffentlichen. Es scheint da eine gewisse Angst mitzuwirken, den Fachgenossen nicht „wissenschaftlich" genug zu erscheinen. Oder ist es in andern Fällen der Wunsch gewesen, den Konkurrenten nicht die Quelle der eigenen

"Mahtematics has a front and a back", recita il titolo di un articolo di Reuben Hersh (1991): ossia, come ogni altra istituzione sociale, la matematica ha una "vetrina" e un "retrobottega", un ambito in cui ciò che conta è la presentazione, un palcoscenico con le sue regole, necessarie per sostenere la finzione drammatica, e quello che avviene dietro le quinte, dove si provvede alla preparazione di ciò che viene servito al pubblico.

Per la matematica, scrive Hersh, la facciata [front] è la sua forma finita, ripulita, e presentata ai colleghi o agli studenti in aula, nei manuali, nelle riviste. Il retro [back] è costituito invece dalla matematica che si fa quotidianamente, con il lavoro dei matematici, in contesti informali, in discussioni tra colleghi, negli uffici, a porte chiuse.

> Paragonata alla matematica che avviene dietro le quinte [*backstage mathematics*], la matematica di facciata [*front*] è formale, precisa, ordinata e astratta. È chiaramente suddivisa in definizioni, teoremi, ed osservazioni. Ad ogni domanda vi è una risposta, o, per lo meno, una evidente etichetta "questione aperta". L'obiettivo è stabilito all'inizio di ogni capitolo, e raggiunto alla fine.
>
> Paragonata alla matematica di facciata, la matematica "sul retro" è frammentaria, informale, intuitiva, provvisoria. Cerchiamo questo o quello, diciamo "forse" o "sembra".[160]

Überlegungen zu verraten? Jedenfalls betrachte ich es als eine charakteristische Leistung, daß ich gerade diese Seite der mathematischen Publikation betonte. Ich habe meine Schrift über Riemann geradezu als Physiker geschrieben, unbekümmert um alle die vorsichtigen Zusätze, die. man bei ausgeführter mathematischer Behandlung zu machen gewohnt ist und habe damit gerade auch bei verschiedenen Physikern Beifall gefunden. – Es war natürlich eine Ausführung der erforderlichen Beweise in einer zweiten Schrift geplant (siehe die Vorrede S. 503). Aber diese ist als solche leider nicht mehr zustande gekommen, weil meine Arbeitskraft bald durch weitergehende Fragestellungen betreffend automorphe Funktionen in Anspruch genommen wurde.»

[160] Hersh, 1991, p. 128: «Compared to "backstage" mathematics, "front" mathematics is formal, precise, ordered and abstract. It is separated clearly into definition, theorems, and remarks. To every question there is an answer, or at least, a conspicuous label: "open question". The goal is stated at the beginning of each chapter, and attained at the end.

Questa divisione contribuisce ovviamente alla protezione del mito o, meglio, dei miti della matematica, quali la sua unità, universalità, oggettività e certezza, miti necessari per la conservazione della parte sociale ed istituzionale della materia.

> Lo stile standard dell'esposizione matematica purifica questa da ciò che è personale, controverso, e provvisorio, producendo un'opera che riconosce poche tracce di umanità sia nei creatori che nei consumatori. Questo stile è la versione matematica della "facciata".
>
> Senza di essa il mito perderebbe molto della sua aura. Se la matematica fosse presentata nello stesso stile con cui è creata, pochi crederebbero nella sua universalità, unità certezza o oggettività.[161]

Hersh non mette in discussione la verità o meno di questi miti, ma esprime solo il fatto che essi non hanno bisogno di essere veri, ma solo di essere utili al fine di dare supporto alle istituzioni matematiche. Perciò, se nel lavoro del matematico come in ogni altra professione, è necessario avere una facciata, un palcoscenico, da cui rivolgersi al pubblico, ed un'area dietro le quinte, dove si svolge il lavoro effettivo, è necessario però mantenere un atteggiamento meno ingenuo e più critico nei confronti dei miti che caratterizzano la professione.

Questo mette in risalto come la diffusione, oramai pervasiva, dei metodi assiomatico-formali ad ogni livello della matematica – dalla didattica alla ricerca più avanzata – avvenuta nel Novecento abbia di fatto sancito la definitiva scomparsa di quell'idea di matematica anti-elitaria e anti-formale che Klein aveva cercato strenuamente di difendere e che, dopo quasi un secolo, solo matematici come Reuben Hersh, e pochi altri, stanno cercando di riscoprire.

Compared to "front" mathematics, mathematics "in back" is fragmentary, informal, intuitive , tentative. We try this or that, we say "maybe" or "it looks like".»

[161] Hersh, 1991, p. 131: «The standard style of expounding mathematics purges it of the personal, the controversial, and the tentative, producing a work that acknowledges little trace of humanity, either in the creators or the consumers. This style is the mathematical version of "the front".
Without it, the myths would lose much of their aura. If mathematics were presented in the same style in which it is created, few would believe in its universality, unity, certainty, or objectivity.»

Il valore degli assiomi

Ricordando gli anni della sua giovinezza trascorsi a Göttingen durante *l'era di Klein e Hilbert*, Hermann Weyl descrive la produzione matematica di Klein come caratterizzata principalmente da una *consapevolezza intuitiva* delle connessioni che legano dall'interno i più vari settori della matematica stessa, una consapevolezza che, però, era completamente a-sistematica. «Egli» scrive Weyl «non amava la sistematizzazione del suo modo di comprendere le cose nella forma di un'assiomatica rigorosa; anche nel processo di analisi egli non voleva perdere per un momento la visione dell'intero»[162]. E, per quel che concerne l'opinione di Klein riguardo all'assiomatica, Weyl riferisce di una breve metafora che Klein stesso utilizzò in una conversazione avuta con lui anni prima: «Supponi che io abbia risolto un problema; ho superato un ostacolo o saltato un fossato. Allora arrivate voi assiomatici e chiedete: sei ancora capace di farlo dopo esserti legato una sedia alla gamba?»[163] Certamente l'assiomatica non era congeniale allo spirito di Klein ma, come detto, egli mantenne sempre un atteggiamento non dogmatico, riconoscendone il valore e l'importanza.

Parlando retrospettivamente della teoria dei gruppi, nelle sue *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (1979), Klein pone in evidenza lo stacco che è avvenuto tra la prima originale definizione del concetto di gruppo, elaborata assieme a Lie e basata su una presentazione non assiomatica e sulla nozione di trasformazione, e la formulazione assiomatica che è stata successivamente elaborata, nella quale qualunque appello all'intuizione svanisce, lasciando spazio solo ad uno scheletro logico, estratto allo stesso modo di come si fa con un fossile dalla roccia, ricostruito a partire dalla parti ritrovate – il termine che usa Klein, *herauspräpariert*, ha

[162] Weyl, 1985, p. 16: «He disliked the systematization of his way of understanding things in the form of a rigorous axiomatics; even in analysing he did not want for a moment to lose sight of the whole.»
[163] Weyl, 1985, p. 16: «Suppose I have solved a problem; I have taken a hurdle of jumped a ditch. Then you axiomaticians come around and ask: Can you still do it after tying a chair to your leg?»

anche questo significato –, e reso visibile. E non si può certo non notare la differenza esistente tra la ripetuta metaforica associazione dell'approccio intuitivo, descritto solitamente da Klein come l'aspetto vitale e creativo della matematica, e l'approccio assiomatico, nella migliore delle ipotesi visto come un'impalcatura, e qui, nella peggiore, come uno scheletro, un fossile, come un corpo morto e scarnificato.

Descrivendo quindi l'evoluzione del lavoro compiuto assieme a Lie riguardo alla teoria dei gruppi, ed in particolare ponendo la domanda di che cosa si dovesse intendere con il concetto di gruppo stesso, Klein, mette in rilievo la differenza che separa la loro opera dalle successive riformulazioni in termini più astratti e formali.

> Quando, all'epoca, Lie ed io cominciammo ad elaborare il significato della teoria dei gruppi per vari ambiti della matematica dicemmo: un "gruppo" è la quintessenza [*Inbegriff*] di operazioni univoche $A, B, C, \ldots$ a tal punto, che in qualche modo due delle operazioni A, B combinate a sua volta danno come risultato un'operazione C che condivide la stessa essenza:
>
> $A \cdot B = C$.
>
> Nelle sue ulteriori ricerche sui gruppi infiniti Lie si vide costretto espressamente ad un ampliamento, in modo che assieme ad A, dovesse essere presenta nel gruppo anche l'inversa A^{-1}.
>
> Da parte dei nuovi matematici viene presentata una definizione inespressiva [*abgeblaßtere*=pallida, smorta] che però è più precisa. Non si parla più di un sistema di operazioni, ma di un sistema di cose o elementi $A, B, C, \ldots$. Dopodiché si postula che
>
> 1. Il "prodotto" o l'associazione $A \cdot B = C$ stessa appartiene al sistema (chiusura del sistema),
> 2. Che vale la legge associativa, cioè $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$
> 3. Esiste una unità E tale che vale $AE = A$ e $EA = A$,
> 4. Esiste l'inversa, cioè che l'uguaglianza $Ax = E$ ha soluzione.
>
> Qui, di conseguenza, l'appello alla fantasia [*Phantasie*] si annulla completamente. In compenso, lo scheletro logico viene estratto e ricostruito [*herauspräpariert*] scrupolosamente, una tendenza sulla quale si ritornerà ancora molto spesso nel prosieguo delle lezioni. Questa formulazione astratta è per l'elaborazione della dimostrazione eccellente, ma non è assolutamente [*durchaus*] idonea alla scoperta di nuove idee e metodi, ma al contrario rappresenta la conclusione di un precedente sviluppo. Per questo motivo essa facilita esteriormente la lezione, nella misura in cui

con il suo aiuto è possibile dimostrare proposizioni note senza lacune, e con facilità; dall'altra parte, le cose per lo studente vengono in tal modo intrinsecamente rese molto più difficili, poiché egli viene posto di fronte a qualcosa di chiuso, e non sa assolutamente come si giunga a queste definizioni, e per il fatto che con ciò egli non può assolutamente rappresentarsi alcunché. Soprattutto il metodo ha l'inconveniente che esso non stimola il pensiero; si deve solo prestare attenzione a non infrangere i quattro comandamenti dati.[164]

---

[164] Klein, 1979, p. 335: «Als dann Lie und ich es unternahmen, die Bedeutung der Gruppentheorie für die verschiedensten Gebiete der Mathematik herauszuarbeiten, da sagten wir: „Gruppe" ist der Inbegriff von eindeutigen Operationen *A, B,* C, ... derart, daß irgend zwei der Operationen *A, B* kombiniert wieder eine Operation C des Inbegriffes ergeben:
$A{\cdot}B{=}C.$
Bei seinen weiteren Untersuchungen über unendliche Gruppen sah sich Lie genötigt, ausdrücklich zu verlangen, daß neben *A* auch die Inverse A^{-1} in der Gruppe vorhanden sein solle.
Bei den neueren Mathematikern tritt eine abgeblaßtere Definition auf, die aber präziser ist. Man spricht nicht mehr von einem System von Operationen, sondern von einem System von Dingen oder Elementen *A, E, C,* .... Dann wird postuliert, daß
1. das "Produkt" oder die Verknüpfung $A\cdot B = C$ selbst dem
System angehört (Abgeschlossenheit des Systems),
2. das assoziative Gesetz gilt, also
$(A\,B)\cdot C = A\cdot (B\,C)$
3. eine Einheit *E* existiert, so daß
$AE{=}A$
und
$EA{=}A$
ist,
4. die Inverse existiert, d. h. daß die Gleichung
lösbar ist.
$Ax{=}E$
Der Appell an die Phantasie tritt also hier völlig zurück. Dafür wird das logische Skelett sorgfältig herauspräpariert, eine Tendenz, auf die wir bei der Fortsetzung der Vorlesung noch oft zurückkommen werden. Diese abstrakte Formulierung ist für die Ausarbeitung der Beweise vortrefflich, sie eignet sich aber durchaus nicht zum Auffinden neuer Ideen und Methoden, sondern sie stellt vielmehr den Abschluß einer voraufgegangenen Entwicklung dar. Daher erleichtert sie den Unterricht äußerlich insofern, als man mit ihrer Hilfe bekannte Satze lückenlos und einfach beweisen kann; andrerseits wird die Sache für den Lernenden dadurch innerlich sehr erschwert, daß er vor etwas

Stando a Klein, l'aspetto più pericoloso del metodo assiomatico è proprio la sua capacità di soffocare ciò che è principalmente vitale e umano, ossia la creatività. Ciò non significa, come già detto, che egli sia banalmente contrario al metodo assiomatico o all'aritmetizzazione, ritiene però che la formalizzazione assiomatica sia solo uno strumento e che, pertanto, porre un'enfasi esclusiva su di essa significhi ignorare e non vedere il pensiero matematico nell'interezza delle sue potenzialità.

Anche nel caso degli assiomi geometrici Klein tiene una posizione improntata ad un certo empirismo, il quale troverà ulteriore giustificazione con l'applicazione della geometria riemanniana all'interno della relatività generale. Nel secondo volume, riguardante la geometria dell'*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* egli scrive:

> È vero in generale che *i concetti fondamentali e gli assiomi non sono, immediatamente, dei fatti della percezione, ma sono idealizzazioni convenientemente selezionate a partire da questi fatti*. La nozione precisa di un punto, per esempio, non esiste nella nostra percezione sensoriale immediata, ma è solo un limite fittizio che, per mezzo delle nostre immagini mentali relative ad un piccolo pezzo di spazio che diventa sempre più piccolo, possiamo avvicinare senza mai raggiungerlo.
>
> In contrasto con questo, si trova ora frequentemente, da parte delle persone che sono interessate solo all'aspetto logico delle cose, e non a quello della percezione o della teoria generale della conoscenza, l'opinione che *gli assiomi sono solo proposizioni arbitrarie che stabiliamo a piacere, e che, allo stesso modo, i concetti fondamentali sono solo simboli arbitrari per cose con le quali desideriamo operare*. La verità riguardo ad una tale concezione è, naturalmente, che all'interno della pura logica non vi è fondamento per queste affermazioni e concetti, e che essi debbono perciò essere forniti o suggeriti da altre fonti – per la precisione, attraverso l'influenza dell'intuizione. Molti autori, comunque, si esprimono molto più unilateralmente, così che in anni recenti, nella moderna

---

Abgeschlossenes gestellt wird und nicht weiß, wieso man überhaupt zu diesen Definitionen kommt, und daß er sich dabei absolut nichts vorstellen kann. Überhaupt hat die Methode den Nachteil, daß sie nicht zum Denken anregt; man hat nur aufzupassen, daß man nicht gegen die aufgestellten vier Gebote verstößt.»

> teoria degli assiomi, siamo stati spesso condotti in direzione di quella filosofia che è stata a lungo chiamata *nominalismo*. Qui l'interesse nelle cose stesse e nelle loro proprietà va completamente perso; [...] si possono stabilire assiomi arbitrariamente, e senza limite, prevedendo solo che le leggi della logica siano soddisfatte e, soprattutto, che non appaia alcuna contraddizione nella struttura completa delle proposizioni. Per quanto mi riguarda, non posso condividere questo punto di vista. Io lo considero piuttosto come la morte di tutta la scienza. *Gli assiomi della geometria sono – secondo il mio modo di pensare – affermazioni ragionevoli, che in generale, sono indotte dall'intuizione spaziale e sono determinate per quanto riguarda il loro preciso contenuto, da ragioni di convenienza*.[165]

Seguendo alcune considerazioni avanzate da Dirk Schlimm,[166] possiamo osservare come, nelle sue lezioni sulle geometrie non

---

[165] Klein, 1925, p. 202: «So wird es auch allgemein gelten, daß *Grundbegriffe und Axiome nichtunmittelbar Tatsachen der Anschauung, sondern* zweckmäßig *gewählte ldealisierungen dieser Tatsachen sind.* Schon der scharfe Begriff des Punktes existiert nicht in der unmittelbaren sinnlichen Anschauung, sondern er ist nur eine fingierte Grenze, der wir uns mit unseren Vorstellungen eines kleinen Raumstückes nähern können, ohne sie doch je zu erreichen.
Demgegenüber findet man bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder die allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, *die Axiome seien nur willkürliche Sätze, die wir ganz freiwillig aufstellen, und die Grundbegriffe schließlich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren wollen.* Das Wahre an einer solchen Ansicht ist natürlich, daß sich *innerhalb der reinen Logik* kein Grund für diese Sätze und Begriffe findet, und daß sie daher von anderer Seite – eben durch Einwirkung der Anschauung – geliefert oder angeregt werden müssen. Aber die Autoren drücken sich oft sehr viel einseitiger aus, und so sind wir in den letzten Jahren im Anschluß an die moderne Axiomatik vielfach geradezu wieder in diejenige Richtung der Philosophie hineingeraten, die man von alters her *Nominalismus* nennt. Hier geht das Interesse an den Dingen selbst und ihren Eigenschaften ganz verloren; [...] man kann dabei ganz unbeschränkt beliebige Axiome aufstellen, wenn man nur den Gesetzen der Logik genügt und vor allem darauf achtet, daß sich in dem entstehenden Gebäude von Theoremen keine Widersprüche finden. Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod aller Wissenschaft: *die Axiome der Geometrie sind – wie ich meine – nicht willkürliche, sondern vernünftige Sätze, die im allgemeinen durch die Raumanschauung veranlaßt und in ihrem Einzelinhalte* durch *Zweckmäßigkeitsgründe reguliert werden.*»
[166] Vedi Schlimm, 2012.

euclidee tenute nel semestre invernale 1889-90, Klein ponga in discussione l'immagine di una geometria intesa come sistema assiomatico. Infatti, se l'assiomatizzazione della geometria è l'espressione dell'essenza dell'intuizione [*das Wesen der Anschauung*] Klein non ritiene che gli assiomi, una volta catturate le caratteristiche dell'intuizione, non sia richiedano alcun ulteriore ricorso all'intuizione stessa, lasciando i processi deduttivi, le dimostrazioni, alla logica pura. Quest'immagine, afferma Klein, non rende giustizia dell'idea di geometria, ma è adatta tutt'al più alla geometria analitica, basata essenzialmente su formule: «che però questa sia una vera geometria vorrei metterlo in dubbio, si tratta di una preparazione alla geometria.»[167] Questo modo di intendere l'uso degli assiomi per Klein non trova posto in una "vera geometria" dato che, afferma:

> Ritengo quindi inoltre sbagliato che, una volta che abbiamo stabilito gli assiomi, allora, nelle nostre ricerche, possiamo porre in secondo piano l'intuizione; <u>al contrario, nel vero pensiero geometrico l'intuizione spaziale ci accompagna ad ogni passo.</u>[168]

Quindi, in linea con il carattere pervasivo dell'intuizione, Klein esplicita la sua personale concezione dell'assiomatica, nella quale gli assiomi sono la massima idealizzazione che è possibile ottenere:

> Io attribuisco agli assiomi il significato secondo il quale essi rappresentano pretese in virtù delle quali ci eleviamo al di sopra

[167] Klein, 1892, p. 355: «Doch ob dies eine wirkliche Geometrie ist, möchte ich bezweifeln, es ist erst eine Vorbereitung zur Geometrie.»
[168] Klein, 1892, p. 355: «Wir können doch nicht von irgend welchen Querlinien daselbst sprechen, ohne die Figur vor Augen zu haben. Ich halte es demnach auch nicht für richtig, daß, wenn wir einmal die Axiome aufgestellt haben, wir dann die Anschauung bei unseren Untersuchungen hintenansetzen; <u>beim wirklichen geometrischen Denken vielmehr begleitet uns die Raumanschauung bei jedem Schritte.</u>»

dell'inesattezza dell'intuizione o al di sopra del limite di precisione dell'intuizione verso l'esattezza illimitata.[169]

E, di conseguenza, esplicita anche il suo modo di intendere le dimostrazioni geometriche:

> Io penso perciò una dimostrazione geometrica in modo tale che la figura ci debba portare davanti agli occhi le singole successioni delle sue stesse parti, le relazioni di posizione di punti e linee, essendo però noi a conoscenza del fatto che ciò che vediamo davanti a noi come inesatto, deve essere pensato come concettualmente preciso.[170]

In una seconda rielaborazione dello stesso ciclo di lezioni sulle geometrie non euclidee dal titolo *Zur Nicht-Euklidischen Geometri*e (1890), Klein specifica meglio la sua posizione ed in particolare la relazione tra l'intuizione intesa in senso astratto, esatta e regolata dalle leggi logiche la quale «ci è diventata familiare attraverso l'abitudine» [*sie uns durch Gewöhnung geläufig geworden ist*], e l'intuizione concreta, inesatta, che «deriva dall'osservazione empirica» [*die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt*].[171] Infatti, per Klein le due forme di "intuizione" non sono separabili, dato che «assiomi ed intuizioni devono andare mano nella mano non solo nel momento della definizione degli assiomi, ma anche nello sviluppo delle dimostrazioni»[172]. Klein, come detto, non riesce a concepire la matematica se non come un'attività integrata, in cui

---

[169] Klein, 1892, p. 356: «<u>Ich schreibe den Axiomen die Bedeutung zu, daß sie Forderungen vorstellen, vermöge deren wir uns über die Ungenauigkeit der Anschauung oder über die Begrenztheit der Genauigkeit der Anschauung zu unbegrenzter Genauigkeit erheben</u>.»

[170] Klein, 1892, p. 356: «Ich denke mir also einen geometrischen Beweis so, daß die Figur uns die einzelne Aufeinanderfolge der Teile derselben, die Lagenbeziehungen von Punkten und Linien vor Augen führen soll, indem wir uns aber gewußt sind, daß das, was wir ungenau vor uns sehen, nun begrifflich genau gedacht werden soll.»

[171] Vedi Klein, 1890, p. 571.

[172] Schlimm, 2012, p. 13: «Axioms and intuitions must go hand in hand not only when setting up the axioms of geometry, but also in the development of proofs.»

l'assiomatica logico-formale non può essere separata dal ragionamento intuitivo, dal pensiero visuale:

> Per me è in ogni caso impossibile seguire una considerazione geometrica in modo puramente logico, senza tenere in modo continuo davanti agli occhi la figura, alla quale fare riferimento. […] L'assioma è per me solo la richiesta in virtù della quale io *inserisco asserzioni esatte all'interno* dell'intuizione inesatta. Io immagino però una considerazione di tipo geometrico concepita in modo tale che noi manteniamo la figura, della quale si sta trattando, in quanto tale continuamente davanti agli occhi, e quindi, in ogni momento, nel quale si affronta la sottile argomentazione dimostrativa, ci ricolleghiamo all'indietro agli assiomi in quanto solido substrato logico.[173]

Klein ritiene che l'esigenza di porre degli assiomi assolutamente esatti alla base di teorie che, all'origine, sono state create partendo dall'esperienza, sia un'esigenza della nostra natura,[174] la quale, in maniera istintiva, ci impone di trasformare in maniera esatta, e conveniente, il materiale inesatto fornito dall'esperienza o dall'intuizione.

> Per quanto riguarda però l'*origine degli assiomi*, non so al riguardo dire altro se non che noi, qui come in altri ambiti, compiamo il processo di astrazione che conduce ad essi in modo involontario. Ciò che è dato in maniera solo approssimativa nell'intuizione o negli esperimenti, lo formuliamo in modo esatto poiché altrimenti non sapremmo che farcene.[175]

---

[173] Klein, 1890, p. 571: «Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich. […] Das Axiom ist mir nun *die Forderung,* vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlege.* Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, dass wir die Figur, um welche es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten, und uns dann in jedem Augenblicke, in welchem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome als festes logisches Substrat zurückbeziehen.»

[174] Vedi Klein, 1892, p. 357.

[175] Klein, 1890, p. 572: «Was aber die *Entstehung der Axiome* angeht, so weiss ich darüber nichts weiter zu sagen, als dass wir die zu ihnen führende Abstraction hier wie in anderen Gebieten unwillkürlich vollziehen. Das, was

Schlimm osserva come, in questo passaggio Klein ignori la necessità di attenzione minuziosa per i dettagli necessaria alla creazione di un sistema assiomatico, prendendo in considerazione solo la scelta dei termini e delle relazioni primitive ed affermando che essa sia ottenibile solo «attraverso qualche meccanismo psicologico nascosto»[176]. Da questo punto di vista, continua Schlimm, Klein sembrerebbe non tener conto dello sviluppo storico che ha portato alle geometrie non euclidee, le quali furono sviluppate anzitutto da un punto di vista assiomatico.

In realtà, credo che queste obiezioni siano mal poste. Klein non ignora lo sviluppo storico, semplicemente, in questo caso, non sta parlando dal punto di vista storico – punto di vista che a lui è pure caro, dato che gran parte delle sue opere sono scritte secondo quello che egli definisce il "metodo storico", secondo quel principio per cui «chiunque voglia inoltrarsi [nella matematica] deve, passo dopo passo, ripetere il suo intero sviluppo dentro di sé»[177] – e, soprattutto, non sta parlando da un punto di vista impersonale. Egli sta parlando della relazione tra intuizione ed assiomi dal punto di vista della pratica matematica individuale, dal punto di vista dell'esperienza psicologica soggettiva. Da questo punto di vista «egli apparentemente credeva che ogni essere umano adulto normale avesse l'abilità di formare immagini geometriche secondo un *pattern* prefissato»[178], il quale è però influenzato empiricamente. Egli ritiene, infatti, che la distinzione tra geometria proiettiva e geometria metrica sia il corrispettivo di concrete realizzazioni della nostra intuizione spaziale, nella quale si combinano le esperienze meccaniche, ossia il movimento dei corpi rigidi, con le

in der Anschauung oder im Experimente nur approximativ gegeben ist, das formuliren wir in exacter Weise, weil wir anderenfalls damit nichts anzufangen wissen.»

[176] Schlimm, 2012, p. 16: «Through some hidden psychological mechanism».

[177] Klein, 1979, p. 1: «Wer in sie eindringen will, muß in sich durch eigene Arbeit die ganze Entwicklung Schritt für Schritt wiederholen.»

[178] Torretti, 1978, p. 147: «He apparently believed that every normal human adult has the ability to form geometrical images according to a fixed pattern.»

esperienze dello spazio visivo, ossia il diverso modo in cui gli oggetti si proiettano attraverso la visione.[179]

Il problema delle false dimostrazioni

Al fine di chiarire ulteriormente la posizione di Klein riguardante la mutua interrelazione tra aspetti logico-formali e aspetti visivo-intuitivi, è particolarmente significativo un ulteriore passaggio tratto sempre dalle lezioni sulle *Nicht-Euklidische Geometrie* del 1889-90, in cui Klein si interroga riguardo alla possibilità di ottenere dimostrazioni per mezzo della sola intuizione. Qui, Klein descrive la possibilità di ottenere dimostrazioni sulla base di figure, aggiungendo la clausola, tutt'altro che irrilevante, secondo la quale queste debbano essere costruite seguendo le leggi stabilite sulla base degli assiomi.

> Possiamo desumere dalla sola intuizione delle dimostrazioni? […] Secondo la nostra concezione della natura dell'intuizione si può da ciò, attraverso l'osservazione intuitiva di figure, ben ottenere una certa guida generale riguardo a quali leggi matematiche potrebbero valere e riguardo a come le loro dimostrazioni in generale devono essere costruite. Ma una dimostrazione vera si potrà anzitutto ottenere se le figure prescritte vengono rimpiazzate mediante figure prodotte seguendo le leggi sulla base degli assiomi e si riconduce a queste il corso generale del pensiero solo puntualmente, nei dettagli. Il lavoro con oggetti intuitivi fornisce al matematico stimolo e visione d'insieme sul problema da trattare, ma non anticipa il trattamento matematico stesso.[180]

---

[179] Vedi Klein, 1897, p. 394.

[180] Klein, 1892, pp. 359-360: «Können wir aus der Anschauung selbst Beweise entnehmen? […] Bei unserer Auffassung vom Wesen der Anschauung wird man daher durch anschauungsmässige Betrachtung von Figuren wohl eine gewiße allgemeine Anleitung darüber gewinnen, welche mathematischen Gesetze stattfinden mögen und wie deren Beweis im Allgemeinen zu gliedern sein mag. Einen wirklichen Beweis aber wird man erst bekommen, wenn man die vorgeschriebenen Figuren durch gesetzmäßig auf Grund der Axiome erzeugte Figuren ersetzt und an diesen den allgemeinen Gedankengang erst im Einzelnen ausführt. Die Beschäftigung mit anschauungsmässigen Dingen gibt dem Mathematiker Anregung und Übersicht über die zu behandelnden

Che cosa abbia in mente Klein in questa descrizione è presumibilmente chiarificabile attraverso l'analisi di un esempio generalmente ritenuto un "paradosso" dell'intuizione. L'esempio riguarda la falsa dimostrazione di un teorema che affermerebbe che tutti i triangoli sono isosceli. Tale supposto teorema, benché ovviamente falso, ha attirato in passato l'attenzione dei matematici perché era ritenuto, assieme ai cosiddetti "mostri matematici", una prova dell'inaffidabilità dell'intuizione. In realtà, vedremo che, anzi, ad uno sguardo più attento, il concetto di intuizione ne esce rafforzato, dato che il problema sta altrove. Infatti, il teorema ha alla sua origine alcune considerazioni geometriche errate perché condotte sulla base di figure molto approssimative le quali, se venissero disegnate con un minimo di precisione, mostrerebbero invece chiaramente – e intuitivamente – l'errore, che ne è, all'origine. Questo è infatti di tipo "logico", ossia sono proprio alcune supposte "leggi descritte sulla base degli assiomi" ad essere inconsapevolmente ignorate, e, pertanto, la rappresentazione matematica erroneamente e approssimativamente condotta, induce a sua volta l'errore che porta al falso risultato.

L'esempio è inoltre interessante perché è stato analizzato non solo da Klein, nel secondo dei tre volumi di *Elementarmathematik von höheren Standpunkt aus,* ma anche da David Hilbert, in un corso tenuto nel semestre invernale 1922/23 e pubblicato con il titolo "Wissen und Mathematisches Denken".

Da parte sua, Klein utilizza tale esempio per mostrare come l'utilizzo di un sistema assiomatico permetta di evitare l'uso di *ragionamenti per casi*, ossia la distinzione di diverse possibilità alternative che ramificano la dimostrazione, ricorrendo necessariamente all'uso di figure per determinare i casi effettivamente da considerare. Quello che quindi cerca di mostrare Klein, ribadendo la sua visione di una matematica dove logica e intuizione si integrano a vicenda, è che l'uso degli

---

Probleme, aber sie nimmt die mathematische Behandlung selbst nicht vorweg.»

assiomi, semplificando i procedimenti dimostrativi, permette di evitare di incorrere in simili *sofismi geometrici*.

L'analisi dell'esempio viene presentata da Klein all'interno di una riflessione riguardante le parti oscure o lacunose presenti negli *Elementi* di Euclide, così come questi ci sono pervenuti, e, tra le carenze, Klein prende in considerazione l'assenza di un calcolo algebrico sviluppato:

> I Greci avevano un calcolo solo in forma geometrica, in cui le operazioni venivano condotte solo costruttivamente con segmenti o altre grandezze geometriche, invece che con numeri, un processo molto più ingombrante di quanto sia la nostra aritmetica. Insieme a questo vi è anche il fatto che i Greci non avevano *numeri negativi e immaginari*, che sono ciò che veramente facilita la nostra aritmetica ed analisi. Conseguentemente, ad essi mancava la generalità del metodo che permette l'inclusione in una formula di tutti i casi possibili. Per loro giocava un grosso ruolo una tediosa distinzione di casi.[181]

In particolare, all'origine della difficoltà stava l'assenza, nell'opera di Euclide, di assiomi di ordinamento capaci di definire in maniera generale la relazione di essere "fra" [*Axiomen des Zwischen*] e questo, rendendo necessari i complessi e noiosi ragionamenti per casi – in assenza di una completa analisi rigorosa da effettuarsi su un piano logico astratto – rendeva molto facile cadere in qualche inganno a causa di un'errata determinazione empirica delle possibilità da prendere in esame.

> [Euclide] porta avanti, in un certo senso, una geometria analitica nella quale le coordinate ed altre grandezze appaiono solo per mezzo del loro valore assoluto. Il risultato di questo è che egli non può ottenere teoremi che abbiano una validità generale, ma deve sempre trascinarsi

---

[181] Klein, 2004b, p. 191: «The Greeks had only a *calculus in geometric form*, in which operations were performed constructively with segments of other geometric magnitudes, instead of with numbers, a process much more cumbersome than is our arithmetic. Coupled with this also is the fact that the Greeks did not have *negative and imaginary numbers*, which are really what give facility to our arithmetic and analysis. Consequently they lacked the generality of method which permits the inclusion in a formula of all possible cases. A tedious distinguishing of cases played a great role with them.»

> con fatica lungo casi differenti, secondo come le parti sono disposte in un modo o nell'altro in un esempio concreto.[182]

Gli assiomi d'ordine, introdotti per la prima volta nel 1882 da Moritz Pasch, permettono di definire la relazione dell'"essere fra", ossia una relazione d'ordine, senza la necessità di un ricorso continuo a figure. Per mezzo di essi è, in altre parole, possibile stabilire sia le relazioni di posizione tra i punti su una retta, sia proprietà quali, ad esempio, il fatto che una retta che intersechi un lato di un triangolo debba necessariamente intersecarne anche un altro. Questi sono dunque un requisito essenziale al fine di raggiungere l'ideale di un controllo puramente logico della geometria.

> [Questi assiomi] sono importanti esattamente quanto tutti gli altri assiomi, se si vuole sviluppare la geometria come una scienza veramente logica la quale, *dopo* che gli assiomi sono stati selezionati non richieda di fare ricorso all'intuizione ed a figure per la deduzione delle sue conclusioni. Tale ricorso è comunque stimolante e rimarrà sempre un ausilio necessario nella ricerca. Euclide, il quale non aveva questi assiomi, doveva sempre considerare casi differenti con l'aiuto di figure. Dato che egli poneva così poca importanza sulla correttezza del disegno geometrico, c'è il pericolo reale che un allievo di Euclide possa, a causa di una figura erroneamente disegnata, giungere ad una *falsa* conclusione. È in questo modo che nascono i numerosi cosiddetti *sofismi geometrici*. Queste sono dimostrazioni formalmente corrette di falsi teoremi che si basano su figure che sono erroneamente disegnate, cioè che contraddicono gli assiomi di ordine relativi all'"essere fra". Come esempio, fornirò un tale sofisma, che certamente alcuni di voi conosceranno, la "*dimostrazione*" *che ogni triangolo è isoscele*.[183]

---

[182] Klein, 2004b, p. 200: «[Euclid] carries on, in a sense, an analytic geometry in which the coordinates and other magnitudes appear only with their absolute values. The result of this is that he cannot appear only with their absolute values. The result of this is that he cannot obtain theorems that have general validity, but must always drag along different cases according as, in a concrete instance, the parts lie thus or so.»

[183] Klein, 2004b, pp. 201-202: «They are just as important as any of the other axioms, if we wish to develop geometry as a really logical science, which, *after* the axioms are selected, no longer needs to have recourse to intuition and to figures for the deduction of its conclusions. Such recourse is, however,

Ma vediamo la falsa dimostrazione: preso un triangolo qualunque *ABC*, si tracci la bisettrice dell'angolo *A* e la perpendicolare al lato *BC* nel punto medio *D*. Nel caso in cui queste due linee sono parallele la bisettrice e la perpendicolare coincideranno con l'altezza del triangolo e quindi si tratterà, ovviamente, di un triangolo isoscele. Se bisettrice e perpendicolare non sono parallele, significherà che si incontrano in un punto, e quindi, prosegue la falsa dimostrazione – con un ragionamento puramente aprioristico, ma anche ingenuamente superficiale –, si determineranno altri due casi distinti, ossia il caso in cui il loro punto di incontro *O* cade all'interno del triangolo, oppure il caso in cui *O* cade all'esterno.

In entrambi i casi si traccino quindi le perpendicolari *OE* ed *OF* rispettivamente ai lati *AC* e *AB* e si disegnino i segmenti che uniscono *O* con *B* e *C*.

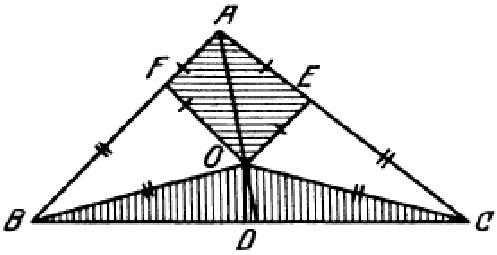

Figura 6. Caso 1. Disegno tratto da Klein, 1925, p. 219.

Nel primo caso, (Figura 6), si può notare anzitutto che *AOE* ed *AOF* sono congruenti, poiché hanno in comune il lato *AO* ed entrambi hanno l'angolo in *A* uguale ed un angolo retto. Da ciò discente che *AF=AE*. Quindi, dato che hanno *OD* in comune, *BD=DC* per definizione, e l'angolo in *D* retto, i triangoli *OCD* e

---

stimulating, and will of course always remain a necessary aid in research. Euclid, who did not have these axioms, always had to consider different cases with the aid of figures. Since he placed so little importance upon correct geometric drawing, there is real danger that a pupil of Euclid may, because of a falsely drawn figure, come to a *false* conclusion. It is in this way that the numerous so-called *geometric-sophisms* arise. These are formally correct proofs of false theorems, which rest on figures which are wrongly drawn, i.e., which contradict the axioms of betweenness. As an example, I shall give one such sophism, which is certainly known to some of you, the *"proof" that every triangle is isosceles*.»

OBD sono a loro volta congruenti. Perciò anche *OB*=*OC*. Infine, dato che abbiamo determinato essere *OE*=*OF*, anche i triangoli *OEC* e *OED* sono congruenti poiché sono rettangoli ed hanno due lati uguali. In conclusione, anche *FB*=*EC* e perciò, dato che avevamo già ottenuto il risultato che *AF*=*AE*, risulta *AB*=*AC*, ossia il triangolo è isoscele.

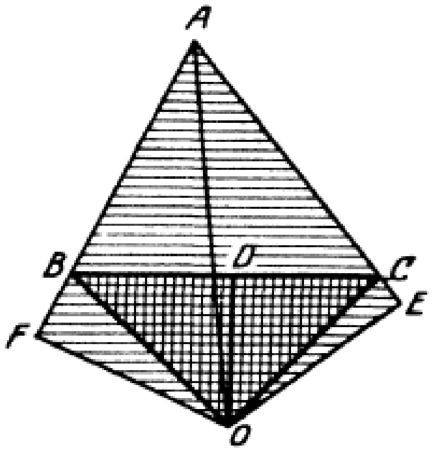

Figura 7. Caso 2. Disegno tratto da Klein, 1925, p. 219.

Per quanto riguarda il secondo caso, (Figura 7), nel quale si suppone che il punto *O* di incontro tra la bisettrice e la perpendicolare in *D* a *BC* si trovi al di fuori del triangolo, allo stesso modo si può mostrare la congruenza, a due a due, dei triangoli *AOE* ed *AOF*, *OCD* e *OBD* e, infine, *OEC* e *OED*, giungendo ancora una volta al risultato che *FB*=*EC* e *AF*=*AE*, e quindi che, questa volta per sottrazione, ancora una volta *AB*=*AC*. Perciò si dimostra, sulla base delle figure presentate, che, in ogni caso, il triangolo considerato risulta isoscele.

In realtà, osserva Klein, il problema è che, tranne che nel caso in cui bisettrice in *A* e perpendicolare in *D* a *BC* siano coincidenti, ossia il caso in cui il triangolo è veramente isoscele, il punto O non può mai cadere all'interno del triangolo e i punti *E* ed *F* risultano sempre uno interno e l'altro esterno ai lati su cui giacciono. E quindi, conclude Klein, «la sola cosa che è sbagliata in questa dimostrazione è la figura» poiché nel caso in cui si verificano sofismi di questo tipo «l'argomento è sempre basato su figure inaccurate, le quali invertono l'ordine di punti e linee»[184].

Tutto il problema sta nel fatto che, disegnando la bisettrice dell'angolo in *A* e la perpendicolare al lato *BC* nel suo punto medio *D*, considerando una figura sufficientemente ambigua – e disegnando una bisettrice sbagliata, che quindi non è veramente una bisettrice – veniamo indotti a considerare che la bisettrice in *A* e la perpendicolare al lato *BC* si possano incontrare in un punto *O* interno del triangolo, oppure che i punti *E* ed *F* in cui cadono le perpendicolari dal punto d'incontro *O* al prolungamento dei lati *AB* e *AC* possano cadere entrambe al di fuori del triangolo. La conclusione di Klein è lapidaria:

> La sola cosa in questa dimostrazione che è falsa è la figura. Anzitutto, *O non può mai cadere all'interno del triangolo* e, quindi, non può aver luogo la situazione disegnata nel secondo caso, ma *uno dei due piedi delle perpendicolari E ed F deve cadere all'interno del lato su cui giace, e l'altro all'esterno come disegnato in [Figura 8].*[185]

Quindi, si limita a mostrare visivamente la soluzione corretta, senza alcun commento. Senza spiegare perché, ma dandone per scontato la dimostrazione "visiva" attraverso la Figura 8.

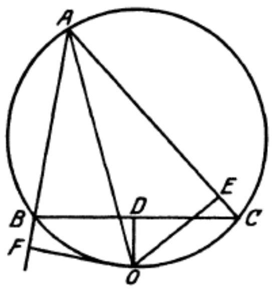

Figura 8. Disegno tratto da Klein, 1925, p. 220.

[184] Klein, 2004b, p. 202: «The argument is always based upon inaccurate figures, with perverted order of points and lines.»

[185] Klein, 1925, p. 220: «Was an diesem Beweise falsch ist, ist tatsächlich nur die Figur. Einmal kann nämlich *0 niemals innerhalb des Dreiecks* liegen, und dann kann nie die im zweiten Falle gezeichnete Lage statthaben, sondern es muß stets *einer der beiden Lotfußpunkte E, F innerhalb, der andere außerhalb der ihn tragenden Dreieckseite liegen, wie das in [Abb. 136] gezeichnet ist*».

Quindi, solo partendo da assunzioni scorrette e, *contemporaneamente*, realizzando, sulla base di queste, da una rappresentazione grafica molto approssimativa – la quale non rispetta le stesse assunzioni che, esplicitamente, le si impongono – si possono riscontrare relazioni riguardanti la posizione dei punti altrimenti impossibili, e creare una dimostrazione paradossale.

L'esempio è discusso anche dal saggio dal titolo *Senza Parole*, di Valeria Giardino e Mario Piazza (2008) e, separatamente, da Valeria Giardino in un articolo "Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving" (2010). Affrontando il tema delle false conclusioni indotte dalla visualizzazione, gli autori, e in modo particolare Valeria Giardino nel suo articolo del 2010, intendono mostrare come Klein e, a loro avviso, anche Hilbert, considerassero intuizione e visualizzazione come essenzialmente inaffidabili. In particolare, Valeria Giardino propone un'interpretazione dell'uso che Klein a suo avviso farebbe di questa falsa dimostrazione affermando che «Klein presentò il caso di un grafico che è apparentemente impeccabile, ma che, di fatto, ci spinge a trarre false conclusioni. Il suo scopo è di mostrare che le figure non sono affidabili»[186], e, continuando, ribadisce:

> La preoccupazione di Klein è chiara: se esistono tali figure inaccurate allora non dovremmo dare credito ad esse ed a ciò che esse mostrano. L'intuizione e la visualizzazione non risulterebbero affidabili nel processo della scoperta.[187]

In realtà, a mio avviso le intenzioni di Klein sono molto diverse. Anzitutto, in primo luogo, affermare che Klein presenti un diagramma «apparentemente impeccabile» non mi sembra corrispondere al vero. Quindi, in secondo luogo, se guardiamo

[186] Giardino, 2010, p. 33: «Klein presented the case of a diagram which is apparently impeccable, but which in fact induces us to draw a false conclusion. His aim was to show that figures are not reliable.»
[187] Giardino, 2010, p. 34: «Klein's worry is clear: if there exist such inaccurate figures, then we should not give credit to them and to what they show. Intuition and visualization would not be reliable in the process of discovery.»

bene al contesto in cui l'esempio compare, leggiamo che Klein sta cercando di mostrare come gli *Elementi* di Euclide siano carenti su alcuni punti e, nel caso specifico, sono carenti per quanto riguarda la completezza assiomatica, mancando gli assiomi che stabiliscono la relazione "essere fra". Perciò, osserva Klein, Euclide è costretto ad *alternare* il ragionamento logico all'uso delle figure, al fine di determinare le relazioni di posizione. Klein, però, in generale, non ritiene sbagliato o necessariamente foriero di errori questo metodo, non sta affermando un'ineluttabile problematicità delle figure ma, al contrario, egli cerca piuttosto di mettere in evidenza l'utilità di una corretta sistematizzazione assiomatica *nel caso in cui* non vi sia la volontà di realizzare grafici corretti, ossia realizzando effettivamente ciò che si afferma di voler disegnare.

È proprio la carenza di precisione grafica, tipica di un certo modo di fare matematica, ossia caratterizzato da un eccessivo grado di approssimazione verso la realizzazione delle figure, che permette la creazione di una figura grossolanamente sbagliata, che un occhio – o, forse, sarebbe meglio dire un cervello – *allenato* anche nelle sue capacità globali, visive, grafiche e percettive, e non solo in quelle sequenziali, logico-matematiche, avrebbe permesso di smascherare all'istante.

Il problema, per Klein, oltre alla logica, è l'inaccuratezza della figura, il fatto che è stata disegnata male *quella figura in quel caso specifico*: l'errore sta nel non aver usato bene le potenzialità dell'intuizione per assenza di allentamento, di *training*, dato che quest'ultimo, per Klein, è un elemento fondamentale per garantire un buon uso dell'intuizione.

In definitiva, all'origine vi è l'errore concettuale il quale, però, non dovrebbe presentarsi se la figura fosse disegnata con criterio. Del resto ciò non dovrebbe stupire, se solo pensiamo alle esigenze di precisione, alle tolleranze, con cui è necessario eseguire i disegni tecnici nell'ambito dell'ingegneria. Il problema è quasi banale: non solo ciò che viene disegnato non esiste sul piano logico, ma nemmeno può essere correttamente rappresentato sulla carta. Le figure disegnate non rispettano neppure le false supposizioni, perché queste sono impossibili da realizzare anche sul piano grafico oltre che su quello logico, se non altro per il fatto che sarebbero dei "modelli" di una logica contraddittoria. È pur vero che per Klein l'intuizione ha una soglia che limita il suo "potere risolvente", ma il problema in questione rientra ampiamente al di sotto della soglia di precisione della nostra capacità rappresentazionale.

Più specificamente, lo scritto di Klein rileva come Euclide, non avendo assiomi per le relazioni di posizione, pur essendo costretto a ricorrere alle figure, e quindi ad adottare un approccio empirico per determinare i casi da prendere in esame, *ciononostante* poneva scarso riguardo all'arte del disegno, esponendosi al pericolo di incorrere in errori come quello esposto.

> Poiché [Euclide] attribuiva così poca importanza all'esecuzione di corretti disegni geometrici, vi è l'effettivo pericolo che un allievo di Euclide possa, a causa di una figura scorrettamente disegnata, giungere a *false* conclusioni.[188]

Klein non sembra voler screditare la visualizzazione o l'intuizione – e su questo punto credo oramai sia più che chiara la sua posizione – ma vuole porre in rilievo come, all'interno di quella dialettica, auspicabilmente costruttiva, tra piano logico-formale e piano visivo-intuitivo, sia necessario imparare a fare un uso corretto ed integrato dei diversi strumenti a disposizione, senza trarre ingenue e superficiali conclusioni.

È corretto invece, ma, mi pare, in contraddizione con quanto detto nelle righe precedenti dall'autrice, affermare che «questo genere di errore nell'uso delle figure è *pre-visuale* dato che dipende da ipotesi errate concepite *prima* che le figure vengano disegnate»[189]. Ciò è ribadito anche in un saggio scritto a quattro mani con Mario Piazza, dove, pur osservando come non sia la figura «la portatrice della conclusione errata» poiché «essa si limita ad archiviare visivamente la decisione presa da un

---

[188] Klein, 2004b, p. 201: «Since [Euclid] placed so little importance upon correct geometric drawing, there is real danger that a pupil of Euclid may, because of a falsely drawn figure, come to a *false* conclusion.»

[189] Giardino 2010, 37: «This kind of error in using figures is *pre-visual*, since it depends on wrong hypothesis that are made *before* the figures are drawn.»

ragionamento scorretto», i due autori non riconoscono l'errore grafico-geometrico come rilevante, anzi, affermano la correttezza delle figure:

> In senso stretto le figure presentate da Klein *non* sono scorrette, dato che la loro scorrettezza discende da una serie di ipotesi scorrette (proposizionali) da cui sono state attivate. Possiedono lo stesso status di un impeccabile identikit ottenuto dalla descrizione, presa per buona, di un testimone inaffidabile.[190]

Senza dubbio, all'origine della scorrettezza delle figure vi sono delle "ipotesi proposizionali". È la nostra interpretazione concettuale che prevale su quella percettiva e che prende il sopravvento nell'esecuzione grafica ad essere all'origine di entrambi questi tipi di errori. Nel caso del falso teorema relativo ai triangoli vi è senz'altro quindi all'origine una presupposizione concettualmente sbagliata dovuta, come rileva Klein, ad una carente assimilazione dell'apparato logico-assiomatico. Ma è profondamente sbagliato affermare che le figure non siano scorrette. Le figure sono più che scorrette perché non rappresentano ciò che affermano di rappresentare. Anzi, esse dovrebbero essere un importante ausilio al processo dimostrativo perché rivelano in maniera palese, diretta, visiva o intuitiva che dir si voglia, la scorrettezza della premessa che genera la sequenza di errori che porta al falso teorema.

Quello che Klein giustamente rileva è che, se vogliamo utilizzare figure nei processi dimostrativi, dobbiamo saperlo fare. Non era assolutamente nelle intenzioni di Klein svalutare il ruolo delle figure all'interno del ragionamento matematico ma, semmai, quello di mostrare l'utilità di una corretta assiomatizzazione e, parallelamente, di una corretta realizzazione grafica: ossia mostrare quanto sia importante eseguire in maniera corretta quella *traduzione* in cui «si sostituiscono le figure prescritte con figure generate conformemente alla legge sulla base degli assiomi»[191].

---

[190] Giardino & Piazza, 2008, p. 89.

[191] Klein, 1892, pp. 359-360: «[…] Man die vorgeschriebenen Figuren durch gesetzmäßig auf Grund der Axiome erzeugte Figuren ersetzt.»

Da parte sua, anche David Hilbert affronta, seppur brevemente, la discussione di questo esempio, anni dopo, all'interno di un ciclo di lezioni dal titolo *Wissen und Mathematisches Denken*, tenute nel semestre invernale 1922-23. Egli cita l'esempio parlando del ruolo che giocano gli errori nelle dimostrazioni matematiche e, dopo aver discusso il problema degli errori di calcolo, affronta quello degli errori nell'esecuzione dei disegni. Il supposto "formalista" Hilbert, pertanto, sembra ammettere la possibilità dell'uso di strumenti di tipo grafico e visivo all'interno delle dimostrazioni matematiche affermando che «non solo i puri errori di calcolo, ma anche gli errori di disegno giocano spesso un ruolo nelle dimostrazioni matematiche»[192]. Egli osserva quindi come l'errore abbia luogo per il fatto che si è indotti, dal disegno scorrettamente eseguito, ad introdurre una presupposizione altrettanto scorretta. Però, afferma:

> Quanto al contenuto, questi errori non hanno alcun interesse per noi; solo la psicologia e la pedagogia potrebbero forse al riguardo far seguire osservazioni per quel che concerne le carenze della memoria umana o dell'apparato del pensiero.[193]

Perciò Hilbert sembrerebbe avvallare l'idea che la comprensione di questo tipo di errore non sia da attribuire all'uso del grafico in sé, ma vada ricercata nei motivi per cui qualcuno può essere indotto a non riconoscere l'inadeguatezza di un grafico, a non tenere a mente, nell'esecuzione del disegno, quali caratteristiche deve rispettare perché sia una rappresentazione corretta del ragionamento che si sta seguendo. Perciò, il problema non sta a livello di apparato visivo o di intuizione ma al livello della memoria [*Gedächtnis*] o dell'attività di pensiero [*Denken*], un problema di assimilazione dell'apparato concettuale.

---

[192] Hilbert, 1988, p. 36: «Nicht bloß Rechenfehler, sondern auch Zeichenfehler spielen bei den mathematischen Beweisen oft eine Rolle.»

[193] Hilbert, 1988, p. 37: «Sachlich haben diese Fehler für uns kein Interesse; nur Psychologie, der Pädagogie könnte vielleicht daran Betrachtungen über die Mangelhaftigkeit des menschliches Gedächtnisses oder Denkapparats anschließen.»

Questa discussione riguardo alla supposta fallacia della visualizzazione in matematica, e riguardo ai suoi motivi, può essere esemplarmente conclusa con le parole di Philip J. Davis:

> Ho letto per la prima volta a proposito dell'occhio come ingannatore nella scuola superiore. Il mio libro di geometria presentava una "dimostrazione" secondo la quale ogni triangolo è isoscele argomentando a partire da una figura che era stata disegnata male. La morale era chiara:
>
> (1). Non puoi fidarti di ciò che vedi (cosa? Mai?)
> e
> (2). La sola cosa a cui puoi credere è una dimostrazione rigorosa condotta secondo linee rigidamente formali.
> Naturalmente il libro non si preoccupò mai di rilevare che:
> (a) Se ti sei preoccupato di disegnare la figura accuratamente, non saresti stato trascinato all'interno del paradosso,
> e che,
> (b) In ogni caso, nessuno dei materiali presenti nel libro era rigorosamente dimostrato secondo linee formali poiché
> (c) Una formalizzazione lungo, diciamo, le linee dettate da Hilbert è lunga, noiosa, anti intuitiva, non convincente ed un orrore estetico assoluto. Coloro che hanno cercato di insegnare la geometria elementare ad un alto livello di rigore sono sprofondati in un abisso educativo.[194]

---

[194] Davis, 1993, pp. 334-335: «I first read about the eye as a deceiver in high school. My geometry text book presented a "proof that every triangle is isosceles by arguing from a figure that had been falsely drawn. The moral was clear:

(1) You cannot trust what you see (what, never?)
and
(2) The only thing that you can believe is a rigorous proof carried out along rigidly formal lines.
Of course, the book never bothered to point out
(a) That if you had taken care to draw the figure accurately, you would not have been conned into the paradox,
and that
(b) In any case, none of the material in the book was rigorously proved along formal lines, because
(c) A formalization along say, the lines of Hilbert, is long, boring, anti-intuitive unconvincing and an absolute aesthetic horror.

Casi di errore di questo tipo sono una conferma delle possibilità offerte da una corretta ed accurata esecuzione dei grafici e delle figure. Questo è ciò che la *computer grafica* ha reso possibile, ed è per questo che è stata tra le motivazioni all'origine del rinnovato interesse nei confronti del pensiero visivo all'interno delle dimostrazioni.

Le superfici di Riemann e l'intuizione fisica

Uno degli esempi in cui è maggiormente visibile la congiunta eredità spirituale di Plücker e Clebsh riguarda senza dubbio la teoria delle funzioni algebriche. Infatti, sebbene Klein percepisse chiaramente la maggior vicinanza intellettuale che lo legava a Plücker – il quale ricercava connessioni tra risultati analitici e rappresentazioni geometriche, preferendo la concretezza di queste ultime – per contro, si trovò ad ereditare da Clebsh, il quale aveva un approccio maggiormente algebrico, buona parte del suo lavoro e dei suoi programmi di ricerca.

In seguito alla morte di Clebsh Klein fu quasi obbligato allo studio delle opere di Riemann:

> […] l'interesse di Clebsh per la teoria delle funzioni di Riemann alla fine condusse Klein a studiare la stessa opera di Riemann ed a scoprire il "punto di vista geometrico-fisico" implicito in essa ma che Clebsh non prendeva in considerazione. [Klein 1923, 477 f.]. Sotto l'influenza di Riemann, Klein sviluppò la sua concezione di una "teoria delle funzioni geometriche".[195]

Klein affrontò il tema delle superfici di Riemann in diverse occasioni, anzitutto, in una serie di pubblicazioni apparse sui *Mathematische Annalen* tra il 1874 e il 1877, tra cui, due comunicazioni accomunate dal medesimo titolo, "Über eine

---

> People who have tried to teach elementary geometry at a high level of rigor have dug themselves into an instructional pit.»

[195] Hawkins, 1984, p. 444: «[…] Clebsch's interest in Riemann's theory of functions ultimately led Klein to study Riemann's work itself and to discover the "geometric-physical viewpoint" underlying it but discounted by Clebsch [Klein 1923, 477 f.]. Under Riemann's influence Klein developed his conception of "geometrical function theory".»

neuen Art der Riemannschen Flächen (*erste und zweite Mitteilung*). Quindi, l'argomento venne ripreso, introducendo quel "punto di vista geometrico-fisico", in un più ampio saggio pubblicato nel 1882, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* ed, infine, nel ciclo di lezioni tenute a cavallo tra 1891 e 1892, confluite in una pubblicazione litografata dal titolo, appunto, *Riemannsche Flächen*.

> Le superfici di Riemann costituiscono lo strumento per comprendere l'andamento delle funzioni multivoche $x + iy$. Poiché su di esse esistono gli stessi potenziali, come su una semplice superficie piana, la cui regolarità secondo leggi può essere indagata con gli stessi strumenti.[196]

Per comprendere quel punto di vista geometrico-fisico che Klein ereditò da Riemann e che trova la sua massima espressione nelle ultime due delle opere citate, cercherò anzitutto di fornire un'idea intuitiva di "superficie di Riemann".

Il concetto di superficie di Riemann fu introdotto per la prima volta, appunto, da Riemann nella sua tesi di laurea del 1851, allo scopo di ottenere un'interpretazione geometrica per la teoria delle funzioni di variabile complessa. Stando alle parole di Klein, pare che Riemann ritenesse che «attraverso la transizione ai valori complessi» si manifestasse «un'armonia continua altrimenti nascosta»[197].

Ciononostante, le funzioni complesse di variabile complessa presentano notevoli difficoltà ed un grado di astrazione molto elevato dato che sono, in generale, impossibili da visualizzare. Nella migliore delle ipotesi, servirebbe un grafico a quattro dimensioni (due per l'argomento e due per la funzione). Infatti, una funzione complessa f di variabile complessa z è descrivibile come:

---

[196] Klein, 1894a, pp. 486-487: «Die Riemannsche Fläche bietet das Mittel, um die mehrwertigen Funktionen von $x + iy$ in ihrem Verlaufe zu verstehen. Denn auf ihr existieren ebensolche Potentiale, wie auf der schlichten Ebene, deren Gesetzmäßigkeiten mit denselben Mitteln erforscht werden können.»
[197] Klein, 1894a, p. 485: «*es tritt beim Übergange zu komplexen Werten eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor.*»

$$f: z = x + iy \in \mathbb{C} \longrightarrow f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}$$

e questa può essere vista come una funzione vettoriale con due componenti reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$, e dipendente da due variabili reali (x, y).

Normalmente, per ottenere delle rappresentazioni grafiche capaci comunque di fornire informazioni riguardo alle proprietà analitiche della funzione si ricorre a grafici tridimensionali, indipendenti l'uno dall'altro, che rappresentano separatamente le funzioni parte reale, parte immaginaria, modulo e argomento.

I problemi diventano più seri però nel caso in cui si abbia a che fare con una particolare classe di funzioni, le *funzioni polidrome* (dette anche *funzioni multivoche o multifunzioni*), che sono presenti esclusivamente nel campo complesso, e non in quello reale, in quanto ad uno o più valori del dominio fanno corrispondere più valori nel codominio.

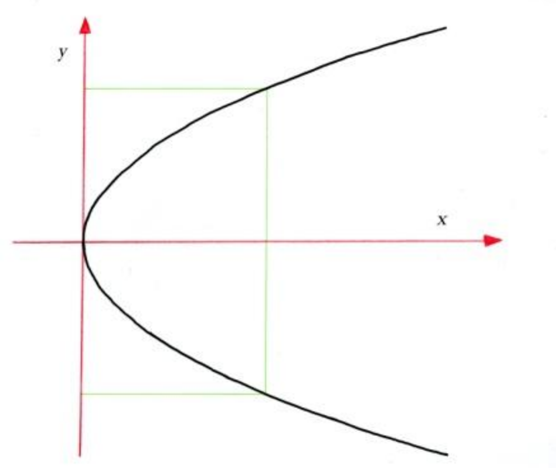

Figura 9. Grafico della multifunzione $y = \sqrt{x}$.

Questo tipo di problema è riscontrabile già nel campo reale, dove, spesso questo tipo di funzioni emergono come le inverse di funzioni non iniettive come, ad esempio, la relazione inversa dell'elevamento al quadrato che altro non è che la *multifunzione* "radice quadrata". Infatti, al fine di rendere invertibile in $\mathbb{R}$ la funzione $x = y^2$ è necessario restringere il campo di definizione:

la funzione inversa, $y = \sqrt{x}$, è soddisfatta solo per y positivi, mentre $x = y^2$ è soddisfatta sia per valori positivi che per valori negativi della y.

Si può ovviamente adottare lo stesso sistema anche nel caso complesso, ossia nel caso in cui le variabili sono complesse. Assumendo quindi $w = f(z) = z^2$, con $z, w \in \mathbb{C}$, si può pensare di restringere il dominio di definizione della variabile indipendente z ad un qualsiasi semipiano (del piano complesso) passante per l'origine, in modo tale che la variabile dipendente w assuma valori univoci. Ricordando che un numero complesso z è esprimibile in coordinate polari in termini del suo modulo $\rho = |z|$ e dell'argomento o anomalia $\theta = \arg z$, in modo tale che $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \sin\theta$, è possibile restringere il dominio, ad esempio, utilizzando le seguenti condizioni: $-\frac{\pi}{2} < arg\, z < \frac{\pi}{2}$ e $-\pi < \arg w < \pi$.

Il codominio viene così ottenuto introducendo nel piano complesso un "taglio", detto *branch cut*, che, nel caso ipotizzato, è dato dalla semiretta reale negativa, la quale viene esclusa, determinando così un bordo superiore corrispondente ai valori complessi di w per cui $\arg w \to +\pi$, e un bordo inferiore corrispondente ai valori complessi di w per cui $\arg w \to -\pi$.

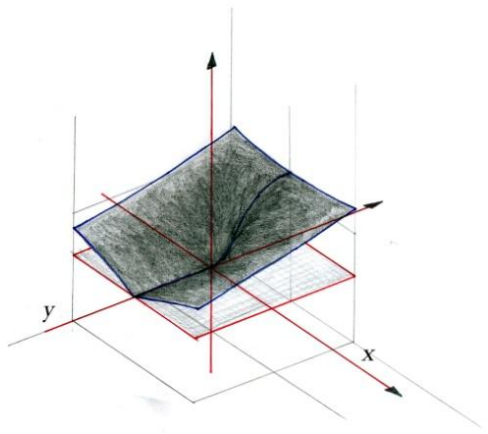

Figura 10. Grafico approssimativo della parte reale di $\sqrt{w}$. In particolare è evidente il *branch cut* nel semiasse reale negativo.

Possiamo quindi notare che, tenendo conto del fatto che $\arg z$ e $\arg w$ sono periodici, nel momento in cui la variabile z attraversa un *branch cut*, questa compie un intero giro attorno ad un cosiddetto *branch point* (ossia un punto di diramazione, e, nel caso in esame, la funzione ne ha due, l'origine e ∞), passando in tal modo da una "determinazione" ad un'altra della funzione polidroma: infatti, $\sqrt{z}$ è una funzione polidroma a due valori, ed ogni volta che la variabile indipendente effettua un giro attorno ad uno dei *branch point* la funzione cambia di segno, ed è per questo motivo che si rende necessario tagliare il piano complesso, impedendo così una rotazione completa e scegliendo una delle due determinazioni possibili della funzione (qui, quella per cui $\sqrt{1} = 1$).

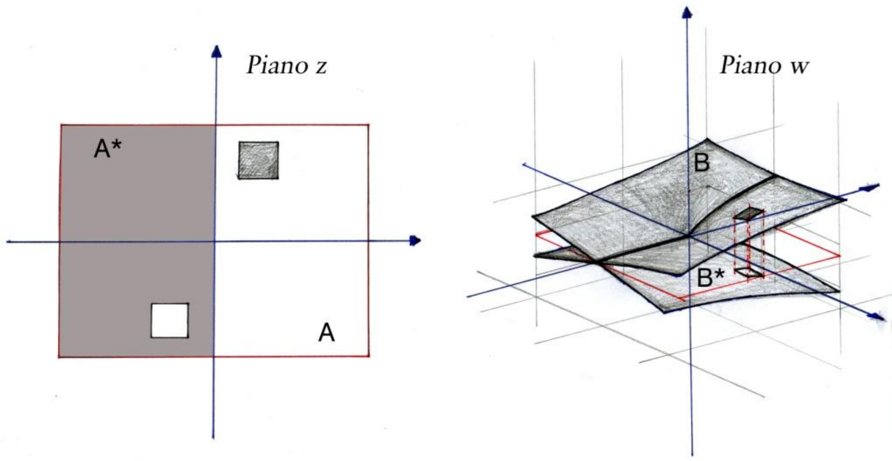

Figura 11. Grafico approssimativo che descrive la superficie di Riemann relativa alla funzione $\sqrt{z}$ (grafico a destra) in un intorno dell'origine. Il dominio A della funzione, corrispondente a $\mathbb{Re}z > 0$, si trasforma nella superficie superiore B, mentre il dominio A* $\mathbb{Re}z < 0$, si trasforma nella superficie inferiore B*. Grazie alla particolare saldatura tra i bordi dei due *branch cut*, la z può variare con continuità ogni volta che compie un giro completo intorno all'origine.

Se però vogliamo ottenere una rappresentazione della funzione complessa polidroma in senso generalizzato, ossia della funzione completa di entrambe le determinazioni abbiamo bisogno di introdurre quella che si chiama la *superficie di*

Riemann della radice quadrata, la quale è costituita da due piani complessi sovrapposti e collegati tra loro mediante i bordi dei due *branch cut* in modo tale che il bordo superiore del *branch cut* corrispondente al piano immagine del semipiano definito da $\mathbb{Re}z > 0$ sia unito al bordo inferiore di quello del piano immagine del semipiano definito da $\mathbb{Re}z < 0$, e viceversa.

Quello descritto è il caso più semplice possibile, dove la superficie di Riemann è costituita da due piani sovrapposti uniti attraverso il *branch cut*, ma, ovviamente le superfici di Riemann assumono forme più complesse in base alla multifunzione che devono rappresentare. Ad esempio, anche solo nel caso del logaritmo, la multifunzione è composta da infiniti piani sovrapposti. In generale, quindi, possiamo immaginare queste superfici come una serie di "fogli" sovrapposti l'uno all'altro ed uniti secondo particolari "tagli" [*branch cut*] determinati dalla funzione di volta in volta presa in considerazione.

Come osservano Karen Parshall e David Rowe,[198] Klein comincia ad occuparsi della teoria della superfici di Riemann già negli anni di Erlangen e Monaco, tentando di rielaborare in direzione maggiormente intuitiva la formulazione della geometria algebrica data da Clebsh, concentrando però il suo interesse su questioni di tipo fondazionale, in "Über eine neue Art der Riemannschen Flächen" (erste und zweite Mitteilung) (1874) e (1876). Solo più tardi, quando si troverà a Lipsia prima e a Göttnigen poi, il suo interesse si sposterà nettamente verso le implicazioni più globali della teoria. In particolare, nel saggio "Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale", del 1882 e nelle lezioni tenute nel semestre invernale del 1891/92, Riemannsche Flächen (1986), Klein amplia il suo approccio alla teoria delle superfici di Riemann ponendo chiaramente in primo piano quell'approccio geometrico-fisico che egli riteneva di aver ereditato da Riemann. Come osserva M. I. Yaglom:

> Il pensiero fisico di Klein [...] si riflette in molti dei suoi contributi scientifici, per esempio, nelle notevoli *Lezioni sulle superfici di Riemann* (un corso di lezioni tenuto a Göttingen e circolato in forma

[198] Vedi Parshall & Rowe, 1994, p. 178.

mimeografata) nelle quali Klein si prese la libertà di considerare la distribuzione di cariche elettriche lungo un conduttore modellato come una superficie di Riemann astratta, dalla struttura topologica estremamente complessa, al fine di dimostrare teoremi puramente matematici.[199]

Da un punto di vista storico le basi della teoria delle funzioni di variabile complessa furono gettate da Cauchy, ma essa fu sviluppata principalmente da Weierstrass e Riemann i quali, pur lavorando al medesimo oggetto, fecero uso di metodi notevolmente diversi, i quali, più che opposti, si rivelarono alla fine complementari.

Weierstrass si basava, ovviamente, su metodi analitici, utilizzando serie infinite di potenze nella definizione delle funzioni di variabile complessa, cercando di evitare il più possibile qualunque ricorso alla geometria per tener fede alla sua esigenza di rigore. Al contrario, Klein riteneva che il modo di lavorare di Riemann fosse stato caratterizzato dall'uso di idee fisiche come stimolo per ricerche puramente matematiche. In particolare, egli riteneva che le indagini di Riemann riguardanti le funzioni di variabile complessa avessero preso avvio proprio *traducendo* il problema dalla forma analitica in una forma fisica, ossia partendo dalla teoria del potenziale e dal comportamento dei flussi di corrente sulle superfici. Come riportato nel volume *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*[200], pare che Klein avesse anche cercato di documentare questa sua convinzione, chiedendo a coloro che avevano studiato direttamente con Riemann, ma quello che venne fuori fu che, con tutta probabilità, da un punto di vista storico era quantomeno inaccurata. Ad ogni modo, Riemann non fu l'unico

[199] Yaglom, 1988, p. 26: «Klein's physical thinking [...] was reflected in many of his research papers, for example, in the remarkable *Lectures on the Riemann Surfaces* (a course of lectures delivered in Göttingen and circulated in mimeographed form) in which Klein took the liberty of considering the distribution of electric charges along a conductor shaped as an abstract Riemann surface of extremely complex topological structure in order to prove purely mathematical theorems.»
[200] Parshall & Rowe, 1994, p. 179.

ispiratore dell'approccio fisico alle superfici di Riemann, dato che, come Klein stesso rivela, per quel che riguarda lo studio dei flussi di corrente sulle superfici il suo punto di riferimento fu il *Treatise on Elecrticity and Magnetism* di Maxwell.

> Richiamandosi a modelli di flussi di correnti su superfici chiuse, Klein cercò non solo di bypassare le problematiche fondazioni della teoria di Riemann ma anche di offrire un'evidenza fisica immediata per la validità di teoremi di esistenza fondamentali per le funzioni algebriche ed i loro integrali. Se da una parte qui giocò certamente un ruolo il vecchio interesse di Klein aveva per la fisica, la motivazione decisiva che stava dietro questo nuovo approccio provenne da una profonda simpatia ed anche un'identificazione interiore con il processo di pensiero che Klein riteneva avesse guidato Riemann nel suo lavoro.[201]

Per avere un'idea di quale fosse questa "linea di pensiero" che Klein riteneva di aver ereditato da Riemann, seguendo l'esposizione offerta nelle *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*[202], è necessario partire dal concetto di funzione analitica (o olomorfa). Data, quindi, una funzione di variabile complessa $f(z) = w$, definita su un aperto $U \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, questa è detta *analitica o olomorfa* se è derivabile in senso complesso in ogni punto di U. E, una funzione, per essere olomorfa deve soddisfare le cosiddette equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

[201] Parshall & Rowe, 1994, p. 178: «Through an appeal to models of current flows on closed surfaces, Klein sought not only to bypass the troubled foundations of Riemann's theory, but also to offer immediate *physical* evidence for the validity of the basic existence theorems for algebraic functions and their integrals. While Klein's longstanding interest in physics certainly played a role here, the decisive motivation behind this new approach came from a deep sympathy for and even inner-identification with the thought processes that Klein believed had guided Riemann in his work.»
[202] Klein, 1979, pp. 246-295.

Klein riteneva che Riemann, avesse posto queste equazioni quale punto di partenza del suo ragionamento, imponendo una connessione tra la teoria delle funzioni e la fisica matematica. Infatti, il legame con la fisica è dato dal fatto che, se sono soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann, le funzioni u e v devono essere *funzioni armoniche*, cioè essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

e, in questo modo, essendo $\Delta u(x,y) = 0$ e $\Delta v(x,y) = 0$, è possibile pensare alle funzioni alle $u(x,y)$ e $v(x,y)$ come funzioni potenziale. Ad esempio, scrive Klein, u può essere definita come il potenziale velocità di un fluido incomprimibile in movimento lungo il piano xy, mentre v diventa la corrispettiva funzione che descrive il flusso. Oppure, pensando all'elettrostatica, u può essere considerata un potenziale elettrostatico, oppure, nella teoria del calore, potrebbe essere una temperatura.

Al di là dell'aspetto fisico-matematico, che qui non è possibile seguire, quello che è interessante porre in evidenza è il modo in cui Klein espone quel «*pensiero induttivo-fisico*» che egli aveva ritenuto essere la «vera fonte delle creazioni di Riemann»[203]. In particolare, Klein utilizza questo modo di vedere *fisico* [*die physikalische Auffassung*] al fine di costruire teoremi di esistenza per funzioni su superfici di Riemann chiuse e con un numero arbitrario di fogli. A puro titolo di esempio, per avere un'idea di cosa egli intendesse, si veda il seguente passaggio estrapolato dal testo:

> Sia data anzitutto quindi una superficie chiusa con n fogli sopra il piano z.

[203] Klein, 1979, p. 259: «*Das induktiv-physikalische Denken*», «das [...] eigentliche Quelle von Riemanns Entwicklungen.» (corsivo mio)

L'esperimento mentale fondamentale è: la superficie di Riemann viene pensata come uniformemente conduttrice dal punto di vista elettrico. Questo può essere realizzato facilmente, incollando sulla superficie della stagnola, e, per una compenetrazione isolata dei fogli, si provvede in modo che nei punti di diramazione si faccia intrecciare dei pettini così che la resistenza alla corrente nei denti sia la stessa che nella copertura di stagnola. In due punti A_1, A_2 vengono messi i poli di una batteria galvanica di idonea potenza. Si sviluppa una corrente, il cui potenziale u è dappertutto altrimenti univoco e continuo sulla superficie e soddisfa l'equazione $\Delta u = 0$, eccetto che diventa discontinuo in A_1 e A_2 come $\log r_1$ e $\log r_2$. Con ciò abbiamo ottenuto un'ulteriore teorema di esistenza il quale può essere formulato così: su ogni superficie di Riemann chiusa esiste una funzione potenziale continua u che in due luoghi prestabiliti diviene logaritmicamente infinito in un modo prescritto.[204]

Riguardo a questo metodo, Efraim Fischbein pone in evidenza un corrispondente passaggio tratto da *La Valeur de La Science* di Henri Poincaré, in cui il matematico francese, affrontando la solita distinzione dei matematici tra analisti e geometri, avanza alcune osservazioni al riguardo dei lavori di Klein sulle superfici di Riemann:

Guardate invece il signor Klein: egli studia una delle più astratte questioni della teoria delle funzioni; egli cerca di sapere se su una data superficie di Riemann esista sempre una funzione che ammetta

[204] Klein, 1979, p. 260: «Sei zunächst also eine n-blattrige, geschlossene Flache über der z-Ebene gegeben.
Das grundlegende Gedankenexperiment ist: Die Riemannsche Flache werde als gleichförmig elektrisch leitend gedacht. Das läßt sich sehr einfach realisieren, indem man die Fläche mit Stanniol beklebt und für eine isolierte Durchdringung der Blatter dadurch sorgt, daß man in den Verzweigungsschnitten Kamme ineinandergreifen läßt, so daß der Leitungswiderstand in den Zinken der gleiche ist wie in der homogenen Stanniolbelegung. In zwei Punkten A_1 e A_2 werden die Pole einer galvanischen Batterie von geeigneter Starke aufgesetzt. Es entwickelt sich ein Strom, dessen Potential u auf der Fläche überall sonst eindeutig und stetig ist und die Gleichung .$\Delta u = 0$ befriedigt, in *A 1, A2* aber unstetig wird wie $\log r_1$ bzw. $\log r_2$.
Damit haben wir einen weiteren Existenzsatz gewonnen, der sich etwa so formulieren ließe: Auf jeder geschlossenen Riemannschen Fläche existiert eine stetige Potentialfunktion *u,* die an zwei vorgegebenen Stellen in bestimmt vorgegebener Weise logarithmisch unendlich wird.»

singolarità date. Cosa fa il celebre geometra tedesco? Egli rimpiazza la sua superficie di Riemann con una superficie metallica la cui conducibilità elettrica varia secondo certe leggi. Egli mette due dei suoi punti in comunicazione con i due poli di una pila. Necessariamente, dice egli, la corrente passerà e il modo secondo cui questa corrente sarà distribuita sulla superficie definirà una funzione le cui singolarità saranno precisamente quelle che sono previste dall'enunciato.

> Senza dubbio, il signor Klein sa bene che ha fornito solo un'intuizione. Tuttavia non ha per niente esitato a pubblicarla. Ed egli crederà probabilmente di trovare se non una dimostrazione rigorosa, per lo meno una qualche certezza morale.[205]

Ed è proprio questa "certezza morale" che Fischbein vuole porre in evidenza, citando Poincaré e, indirettamente, Klein, al fine di mostrare il ruolo che l'immaginazione e le rappresentazioni visive hanno nell'attività cognitiva. Infatti egli osserva come in casi come questo la visualizzazione mentale non sia da considerarsi in maniera statica, ma dinamica e costruttiva.

> Nell'immaginazione di Klein non vi è semplicemente una rappresentazione passiva di una data realtà. [...] il matematico tedesco stava sperimentando con la rappresentazione che egli aveva immaginato. In entrambi i casi, la soluzione preliminare figurativa e globale *sebbene non ancora pienamente sviluppata*, era associata con un sentimento di *intrinseca certezza*. La rappresentazione visiva era

[205] Poincaré, 1917, p. 13 : «Voyez au contraire M. Klein: il étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions; il s'agit de savoir si sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données. Que fait le célèbre géomètre allemand? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met deux de ses points en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien, dit-il, que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé.
Sans doute, M. Klein sait bien qu'il n'a donné là qu'un aperçu : toujours est-il qu'il n'a pas hésité à le publier ; et il croyait probablement y trouver sinon une démonstration rigoureuse, du moins je ne sais quelle certitude morale.»

più di un'immagine; era la soluzione intuitiva ad un problema in cui la struttura sensoriale-mentale giocava un ruolo essenziale.[206]

Geometri e algebristi

Aprendo la serie di conferenze americane tenute presso la Northwestern University nelle due settimane successive all'International Mathematical Congress, tenutosi a Chicago nel 1893, Klien, dedicando la prima lezione alla descrizione dell'opera di Clebsh, propone una categorizzazione generale, in seguito divenuta celebre, che suddivide i matematici secondo tre grandi categorie: *logici*, *formali* e *intuitivi*.

L'introduzione di una tale riflessione in apertura del suo discorso, mostra come Klein avesse ben chiara l'importanza dei fattori extra-matematici, ossia psicologici e sociologici, nello sviluppo della sua scienza e, avanzando tale categorizzazione, mira a mettere in evidenza come le caratteristiche personali, le attitudini, tipiche dei diversi matematici, ne influenzino profondamente il lavoro e, spesso, le stesse capacità di comunicazione e comprensione reciproca.

In questa schematica suddivisione, i *logici* sono, appunto, coloro i quali sono dotati di capacità critiche ed abilità innate nell'elaborazione di definizioni logiche e nell'ottenimento di deduzioni improntate al massimo rigore (uno fra tutti: Weierstrass); i *formali*, riescono a dare il meglio nelle trattazioni richiedenti l'uso di algoritmi di calcolo (ad es. Gordan, Cayley e Sylvester); mentre gli *intuitivi* sono quelli che fanno uso dell'"intuizione geometrica" «non solo nella Geometria pura ma in tutti i campi della Matematica»[207] (ad es. Lord Kelvin e von Staudt).

---

[206] Fischbein, 1987, p. 105: «In Klein's imagery there is not simply a passive representation of a given reality. […], the German mathematician was experimenting with the representation he had imagined. In both cases the preliminary figural, global solution *although not yet fully developed*, was associated with a feeling of *intrinsic certainty*. The visual representation was more than an image; it was the intuitive solution to a problem in which the sensori-mental structure played an essential role.»
[207] Klein, 2000, p. 58.

Ovviamente, data la varietà esistente tra le persone, la maggioranza dei matematici per Klein va classificata a cavallo tra almeno due di queste tendenze principali, così che Clebsh stesso, va considerato un matematico formale e intuitivo e, lo stesso Klein, si definisce sia intuitivo che logico.

In un breve paragrafo, una sorta di appendice, intitolata "Riguardo allo sviluppo moderno e la struttura generale della matematica", in coda alla prima parte del primo volume di *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* dedicato ad "Aritmetica, algebra ed analisi", Klein, osservando lo sviluppo storico della matematica, distingue proprio tre processi di crescita differenti della conoscenza matematica, sviluppando in maniera approfondita quella tripartizione della comunità dei matematici accennata in occasione delle *conferenze americane*.

Egli descrive la possibilità di distinguere due processi principali distinti e interni alla storia della matematica: quelli che egli chiama "Piano A" e "Piano B".

> [...] Potremmo dire *che il Piano A si fonda su una concezione della scienza maggiormente particolaristica, che divide il campo totale in una serie di parti mutuamente separate e tenta di sviluppare ogni parte di per sé, con il minimo di risorse ed evitando qualsiasi prestito da campi vicini.* Il suo ideale *è di cristallizzare ciascuno dei campi parziali in un sistema logicamente chiuso.* Al contrario, *il sostenitore del Piano B pone l'accento principale sulla combinazione organica dei campi parziali, e sulla stimolazione che questi esercitano l'un l'altro. Egli preferisce, perciò, i metodi che gli aprono una comprensione di svariati campi sotto un punto di vista uniforme. Il suo* ideale è la *comprensione della somma totale della scienza matematica come una grande totalità interconnessa.*[208]

[208] Klein, 2004a, p. 78: «[...] we might say *that Plan A is based upon a more particularistic conception of science e which divides the total field into a series of mutually separated parts and attempts to develop each part for itself, with a minimum of resources and with all possible avoidance of borrowing from neighboring fields.* Its ideal *is to crystallize out each of the partial fields into a logically closed system.* On the contrary, *the supporter of Plan B lays the chief stress upon the organic combination of the partial fields, and upon the stimulation which these exert one upon another. He prefers, therefore, the methods which open for him an understanding of several fields under a*

Quindi, a questi due egli aggiunge un terzo “Piano C”, il quale ha a che fare con i processi algoritmici, dato che ogni calcolo formale è, alla fine, algoritmico, in quanto forza «quasi-indipendente», che costituisce il *lavoro preparatorio per lo sviluppo matematico*, e conclude ribadendo la complementarità dei due approcci principali.

> Riassumendo, potremmo dire che, *nella storia della matematica durante gli ultimi secoli, entrambi i nostri metodi principali di indagine sono stati importanti*; *che ognuno di essi, e qualche volta i due in successione, hanno condotto ad importanti avanzamenti della scienza*. È certo che la matematica sarà capace di avanzare uniformemente in tutte le direzioni, solo se *nessuno dei due metodi di indagine verrà trascurato*.[209]

Questa complementarità di approcci ha un ruolo centrale nell’epistemologia di Klein e, come suggerito anche dalla citazione di Corrado Segre, posta in apertura di capitolo, si ricollega direttamente all’importante e storica distinzione, all’interno dei matematici, tra *algebristi* e *geometri*. Come già mostrato sopra, anche Yaglom, (1988) suggerisce la possibilità di un’analisi di questa distinzione dal punto di vista contemporaneo delle neuroscienze, osservando come l’esistenza di due tipi di matematici – che, per inciso, fu sottolineata anche da Hermann Weyl in un importante articolo[210] – possa essere messa in relazione con le ricerche iniziate dallo psicobiologo Roger W. Sperry sulla *lateralizzazione* che caratterizza il cervello umano. Egli, forse per primo, rileva come le ricerche di Sperry abbiano messo in evidenza una generale asimmetria tra emisfero destro e sinistro, per cui, molto approssimativamente, dato che la specializzazione delle aree cerebrali non è così netta e definita, si

---

uniform point of view. His ideal is the *comprehension of the sum total of mathematical science as a great connected whole.*»

[209] Klein, 2004a, p. 85: «As a summary, we might say that, *in the history of mathematics during the last centuries, both our chief methods of investigation were of importance*; *that each of them, and sometimes the two in succession, have resulted in important advances of the science*. It is certain that mathematics will be able to advance informally in all directions, only if *neither of the two methods of investigation sis neglected*.»

[210] Vedi Weyl, 1932.

può dire che, in generale l'emisfero destro sia dedicato al pensiero *pittorico*, *sintetico*, *globale*, e quindi associato alla visione geometrica, ai diagrammi e alle immagini, mentre il sinistro è responsabile del pensiero *logico*, *sequenziale*, *analitico* ed è perciò dedicato al linguaggio, al calcolo ed, in particolare, agli aspetti algebrici della matematica. Quindi, osserva Yaglom, pensando di collegare l'emisfero destro con la fisica ed il sinistro con la logica, risulterebbe una distinzione che, grazie allo sviluppo delle neuroscienze, potrebbe portare ad una maggiore comprensione di quella contrapposizione tra due tipi di matematici, da una parte i geometri o fisici, che procedono principalmente per impressioni visuali piuttosto che per formule, e dall'altra gli algebrici, il cui pensiero ha a che fare principalmente con la logica, le formule e le procedure algoritmiche.

Nella contrapposizione tra un modo di fare matematica basato sull'intuizione geometrica ed uno strettamente vincolato dall'esigenza di garantire sempre e comunque un severo rigore logico-formale, sono in gioco, per Klein, due veri e propri metodi contrapposti, due punti di vista *fondazionali* completamente diversi che, a suo modo di vedere – pur accordando una indubbia preferenza "affettiva" verso quello geometrico-intuitivo – sono entrambi necessari ed essenziali per uno sviluppo coerente, produttivo e completo della matematica.

A questo proposito, nel secondo volume dell'*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, dedicato alla Geometria, è presente un inciso in cui Klein cerca di dare una spiegazione della differenza tra geometria analitica e sintetica. Qui egli spiega che se, in origine, sintesi ed analisi altro non fossero che differenti modi di presentazione – laddove la sintesi, segue un processo che va dal particolare al generale, mentre l'analisi, all'opposto, va dal generale al particolare – nella matematica superiore, questi termini hanno assunto significati completamente diversi.

> *La geometria sintetica è quella che studia le figure come tali, senza ricorso a formule, laddove la geometria analitica fa considerevole uso di tali formule per come possono essere scritte dopo l'adozione di un appropriato sistema di coordinate.* Se correttamente comprese, esiste

> solo una *differenza di grado* tra queste due tipologie di geometria, a seconda che una dia *più importanza alle figure o alle formule*. La geometria analitica che fa completamente a meno della rappresentazione geometrica può difficilmente essere chiamata geometria; la geometria sintetica non va molto lontano a meno che non faccia uso di un linguaggio di formule adatto a dare espressione precisa ai suoi risultati.[211]

Quindi, contrariamente a quanto ci si potrebbe ingenuamente aspettare, Klein, mostrando un atteggiamento tutt'altro che unilaterale, non esita ad essere critico nei confronti dei geometri sintetici, in particolare quelli della cosiddetta scuola di Steiner. Infatti, come osserva David Rowe, Klein ritiene che nel loro sforzo di preservare una geometria intuitiva essi tendano a dimenticare l'importanza e la ricchezza di risorse provenienti dall'interazione tra il formalismo algebrico e le strutture geometriche.[212]

Klein aveva posto in evidenza tale dicotomia già nell'*Erlanger Programm*, dove, nella prima delle note dal titolo "Sul contrasto fra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna" affermava che questa non dovrebbe più considerarsi essenziale «poiché i concetti e le argomentazioni si sono informati a poco a poco dall'una e dall'altra parte in modo affatto simile»[213]. In questo modo Klein non fa che portare avanti l'idea di una mutua integrazione tra *Präzisionsmathematik* ed *Approximationsmathematik* – dato che, se il metodo sintetico è prevalentemente fondato sull'intuizione spaziale, tale intuizione non è necessariamente estranea al metodo analitico –

[211] Klein, 2004b, p. 55: «*Synthetic geometry is that which studies figures as such, without recourse to formulas, whereas analytic geometry consistently makes use of such formulas as can be written down after the adoption of an appropriate system of coordinates*. Rightly understood, there exist only a *difference of gradation* between these two kinds of geometry, according as one gives *more prominence to the figures or to the formulas*, analytic geometry which dispenses entirely with geometric representation can hardly be called geometry; synthetic geometry does not get very far unless it makes use of a suitable language of formulas to give precise expression to its results.»
[212] Vedi Rowe, 1994, p. 191.
[213] Klein, 2004, p. 50.

dato che le formule della geometria analitica possono essere viste come l'espressione esatta delle relazioni geometriche.[214] In definitiva, osserva Klein, il problema è di tipo sociologico e culturale, ed è da ricercarsi nella formazione di integralismi e di chiusure determinati dalle persone appartenenti alle diverse scuole matematiche.

> In matematica, comunque, come in ogni altra materia, gli uomini sono inclini a formare partiti, così che sorsero *scuole di puri sintetici* e *scuole di puri analisti*, i quali posero la loro principale enfasi su un'assoluta "purezza dei metodi", e che furono più unilaterali di quanto la natura del soggetto richiedeva. Così i geometri analitici spesso si persero in ciechi calcoli, deprivati di qualunque rappresentazione geometrica. I sintetici, dall'altra parte, videro la salvezza in un'artificiale elusione di tutte le formule e quindi non ottennero, alla fine, niente di più che sviluppare le loro peculiari formule linguistiche, diverse dalle formule ordinarie. Tale esagerazione dei principi fondamentali in scuole scientifiche porta ad una *certa pietrificazione*; quando questo accade, lo stimolo verso rinnovati progressi della scienza proviene principalmente da "outsider".[215]

E la debolezza di questa distinzione del pensiero matematico in due modi contrapposti, da una parte i geometri e dall'altra gli algebristi, o i sintetici e gli analisti, osservata da un punto di vista

---

[214] Inoltre, nelle *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Klein osserva come proprio la Scuola di Steiner abbia perso lo spirito originario della geometria sintetica che era proprio dello stesso Steiner, affermando che «lo stesso *Steiner* in un certo senso non è per niente da considerare come un rappresentante di questa scuola».

[215] Klein, 2004b, pp. 55-56: «In mathematics, however, as everywhere else, men are inclined to form parties, so that there arose *schools of pure synthesists and schools of pure analysts*, who placed chief emphasis upon absolute "purity of method," and who where thus more one-sided than the nature of the subject demanded. Thus the analytic geometricians often lost themselves in blind calculations, devoid of any geometric representation. The synthesists, on the other hand, saw salvation in an artificial avoidance of all formulas, and thus they accomplished nothing more, finally, than to develop their own peculiar language formulas, different from ordinary formulas. Such exaggeration of the essential fundamental principles into scientific schools leads to a *certain petrifaction*; when this occurs, stimulation to renewed progress in the science comes principally from "outsiders."»

contemporaneo, appare ben evidente, mostrando, ancora una volta, la lungimiranza di Klein. Parlando, infatti, della distinzione tra pensiero algebrico e pensiero geometrico all'interno del più generale pensiero matematico, Marcus Giaquinto afferma che, a suo avviso, questo contrasto, lungi dall'essere una dicotomia, è qualcosa che, invece, è più simile a uno spettro, a un *continuum* uniformemente variabile, di cui la tradizionale categorizzazione binaria coglie soltanto i due estremi.[216]

Anche la distinzione tra un pensiero spaziale e uno non-spaziale è ritenuta insoddisfacente da Giaquinto, dato che egli ritiene insoddisfacente qualunque classificazione binaria, proponendo, invece, l'esigenza di costruire una più articolata tassonomia *basandosi sui risultati della ricerca cognitiva*. La base su cui si fonda questa osservazione è data dal fatto che non esistono criteri operativi capaci di determinare se un particolare pensiero matematico appartenga all'una o all'altra categoria. Il pensiero spaziale e quello simbolico non si escludono a vicenda poiché il primo è, in ultima analisi, parte del secondo. La manipolazione di simboli propria dell'algebra è intrinsecamente spaziale. Semmai può apparire un contrasto nella distinzione tra diagrammi e simboli che divide il pensiero geometrico da quello puramente algebrico, ma, anche qui, è difficile dire fino a che punto abbiamo a che fare con diagrammi o simboli dato che si presentano spesso situazioni intermedie o miste.

Giaquinto parla, quindi, di un *lattice* di possibilità tra pensiero simbolico-algebrico e diagrammatico-geometrico. Gli stessi diagrammi non possono essere classificati facilmente, dato che è estremamente variabile il grado di convenzionalità ed astrattezza o, al contrario, di rassomiglianza ad una qualche realtà, in essi contenuto. Giaquinto rileva giustamente la notevole varietà di tipologie di pensiero visivo-spaziale in matematica e la relativa mancanza di un'adeguata tassonomia capace di coglierne le differenze. Non è difficile, a questo punto, apprezzare, con un salto disciplinare, quanto ha posto in evidenza I. M. Yaglom, ossia la possibilità concreta di una

[216] Vedi Giaquinto, 2007, p. cap. 12.

relazione tra questa distinzione complessa e modulata con l'asimmetria cerebrale tra le funzioni dei due emisferi.[217]

Il supposto razzismo nazionalsocialista di Klein

Robert Hermann, curatore della, a mio avviso discutibile, edizione inglese dell'opera con cui Klein, negli ultimi anni della sua vita, cercò di raccontare la storia, vissuta in prima persona, degli avvenimenti matematici dell'Ottocento – dal titolo *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrundert* –, afferma che «Klein fu un uomo caratterizzato da opinioni forti e pregiudizi (alcuni di essi riprovevoli), molto influenzato dalle correnti intellettuali e mondane del suo tempo e del suo ambiente nazionale»[218], e conclude la sua riflessione con le seguenti parole:

> Alcune delle opinioni di Klein riguardanti la necessità dell'intuizione e le applicazioni nella matematica sono altrettanto valide oggi, sebbene Klein certamente danneggi la sua causa per noi con il suo spudorato nazionalismo e razzismo. Giudicando a partire dalle sue affermazioni su questo punto, egli odiava maggiormente, in ordine discendente a) i francesi, b) gli ebrei, e c) gli assiomatici. È una buona cosa che non ci siano stati Assiomatici francesi ed ebrei! Sarebbe stato quasi simpatico se non ci fosse stato Hitler ad assecondare questa malattia della mente intellettuale tedesca.[219]

Conoscendo l'impegno che Klein profuse nel trasformare Göttingen in un centro di importanza mondiale, capace di richiamare le migliori menti matematiche del tempo da tutto il

---

[217] Vedi Yaglom, 1988, pp. 25-27.

[218] Hermann 1979, 363: «Klein was a man of strong opinions and prejudices (some of them obnoxious), very much influenced by the intellectual and mundane currents of his time and national setting.»

[219] Hermann 1979, 365: «Some of Klein's views on the necessity of intuition and applications in mathematics are just as valid today, although Klein certainly spoils his case for us by his blatent nationalism and racism. Judging from his statements here, he hated most, in descending order a) Frenchmen, b) Jews, and c) Axiomatists. It is a good thing that there were no Franco-Judaic-Axiomatists! It would be almost funny if there had been no Hitler to pander to this disease of the German intellectual mind.

mondo, il suo atteggiamento internazionalista, i suoi rapporti privilegiati con gli Stati Uniti e, più in generale, il clima pacifista (e tendenzialmente di sinistra) che regnava nel suo dipartimento – nel quale, è bene ricordarlo, Klein e Hilbert si adoperarono con tutte le loro forze per permettere l'assunzione di una donna, la prima in un'università tedesca – un giudizio simile appare quantomeno sorprendente.

Di fatto, alla base di tale giudizio, sta l'utilizzo strumentale che la figura carismatica di Felix Klein subì da parte del nazismo. Infatti, come ricostruisce David Rowe, dopo circa dieci anni dalla sua morte, per Klein cominciarono i primi problemi politici (postumi), allorché venne accusato di essere di origini ebraiche. All'origine di tale accusa pare vi sia stato un folle quanto ridicolo *memorandum* che Hugo Dingler, nazionalista e antisemita, inviò allora al Ministero della Cultura bavarese nel Novembre 1933. Stando a Rowe, Dingler descriveva Klein come il responsabile di una generale contaminazione della matematica di tutta la Germania, il "capobanda" di un sistema di potere che voleva porre l'università di Göttingen alla guida di tutta la matematica mondiale e che, quindi, al fine di sottoporre alle sue leggi anche matematici stranieri, avrebbe favorito, a Göttingen, proprio questi ultimi e, in particolare, quelli ebrei, rispetto a quelli tedeschi. In tal modo, nell'ottica delirante di Dingler, egli sarebbe stato a capo di una vera e propria invasione straniera e, soprattutto, ebraica (dopo che ad essi era stata concessa l'uguaglianza sul piano legale nel 1869) nei campi della matematica e della fisica, creando a Göttingen una terribile atmosfera internazionale, pacifista e, come se non bastasse, anti-germanica.

In realtà, però, le terribili accuse di Dingler dovettero, infine, cadere e, nel 1936, il Göttinger Tageblatt dovette titolare "Felix Klein era un ariano. Cosa che nessuno, perlomeno a Göttingen, aveva dubitato". Infatti, pochi mesi dopo, Ludwig Bieberbach, uno degli ultimi studenti di dottorato di Klein, al fine di sfruttare la figura di Klein per fare carriera nella matematica con il supporto del partito nazista, pubblicò una ricerca in cui mostrava come in realtà Klein sarebbe stato invece un campione della razza germanica, anzi, un vero e proprio modello di *pensiero matematico tedesco*.

Bieberbach, nel fare questo, sfruttò un punto in cui la relazione di Dingler era apertamente carente, ossia riguardo al fatto che, nel delirio nazionalsocialista, vigeva lo stereotipo secondo cui gli ebrei sarebbero stati inclini, per natura, ad un pensiero algoritmico, analitico e astratto, mentre i tedeschi tendevano a pensare intuitivamente, sinteticamente e traendo ispirazione dai fenomeni naturali. In questa distinzione tra due modi di pensare, uno *interiore* e purista, l'altro *esteriore* e applicato, Klein, per Dingler, sarebbe stato responsabile della diffusione del primo modello, quello della matematica *ebraica*. Perciò, non fu difficile, per Bieberbach, convincere il partito nazista del contrario, servendosi, per ironia della sorte, di uno dei più celebri passaggi delle lezioni americane di Klein, note come *Evanston Colloquium*:

> Infine, bisogna tener conto che il grado di esattezza dell'intuizione dello spazio varia forse secondo gli individui, forse anche secondo le differenti razze. Sembrerebbe che l'intuizione ingenua dello spazio sia principalmente un attributo della razza tedesca, mentre il senso critico e puramente logico sia più sviluppato nelle razze latine ed ebraiche. Una estesa ricerca su tale argomento, vicina all'ordine di idee suggerite da Francis Galton nei suoi studi sull'ereditarietà, potrebbe risultare interessante.[220]

Bieberbach, quindi, non solo pensava di seguire l'esempio del suo maestro ma, richiamando l'attenzione sullo stile "sano" e tedesco di Klein, intendeva porre l'attenzione sul fatto che le differenze stilistiche avessero una base di tipo razziale. Estrapolando dal contesto alcune affermazioni, Bieberbach condusse una campagna apparentemente riuscita nel "riabilitare" l'eredità di Klein come un pensatore "proto-nazista", senza neppure interrogarsi, forse volutamente, su quale fosse stata veramente la posizione di Klein.

> Egli non si preoccupò mai di considerare come era stato possibile che una figura così influente come quella di Klein finisse per essere

[220] Klein 2000, 100-101.

> circondata da così tanti ebrei ed "ebrei bianchi", ossia non-ebrei che si riteneva fossero stati corrotti nello spirito, nell'inclinazione e nel carattere dalla cultura ebraica.[221]

In realtà, non solo Klein era lontano da qualsiasi forma di razzismo o antisemitismo, ma neppure era un acritico sostenitore di un particolare stile di pensiero in matematica. Egli, nella sua politica accademica, dimostrò sempre una volontà di equilibrare le differenti prospettive, geometrica e analitica, o, se vogliamo, interna ed estera, nella matematica, riconoscendo, anche nel suo metodo di lavoro, l'importanza fondamentale di una collaborazione costruttiva tra i due approcci. Egli fu un convinto sostenitore della necessità di collaborazione ed interdisciplinarità nelle scienze, sia tra gli approcci sia tra le persone. Le sue ricerche sono sempre state caratterizzate come lavoro di squadra ed egli fu l'antitesi del matematico solitario, il genio che lavora da solo nel suo studio. Perciò egli mirava a creare una comunità il più possibile variegata e collaborativa, un ambiente in cui fosse possibile la massima interazione umana, *facendo della matematica essenzialmente una cultura orale*: egli stesso amava dichiarare di aver appreso più dalla conoscenza diretta con le persone che dallo studio accademico. Se mai Klein ebbe una differenza di considerazione, dal punto di vista dei loro contributi in campo matematico, e solo da questo punto di vista, tra popoli e razze diverse, questa fu l'espressione del valore che egli attribuiva alla diversità: il diverso come portatore di contributi positivi alla cultura tedesca.

A contribuire all'immagine di Klein come il sostenitore di una supposta scienza "tedesca", contribuì, più tardi, nel 1939, anche lo "psicologo" nazista Erich Jaensch, il quale affermava che Klein era stato un precursore della sua teoria razziale pseudoscientifica. Affermava addirittura di essere stato spinto ad indagare le relazioni tra la razza e la matematica dallo stesso Klein, durante un seminario organizzato nel 1909-1910,

---

[221] Rowe 1986, 425: «He never troubled to consider how it was possible for such an influential figure as Klein to have become surrounded by so many Jews and "white Jews," non-Jews who were considered to have been corrupted in spirit, inclination, and character by Jewish culture.»

riguardante la psicologia della matematica, al quale Jaensch, stando al protocollo redatto dallo stesso Klein, pare non abbia neppure partecipato.

Purtroppo però, tale immagine di Klein, complice l'oblio in cui ingiustamente cadde la sua figura, sarà destinata ad attraversare il Novecento, e lo stesso Jacques Hadamard, con tutte le dovute giustificazioni, scrivendo nel pieno degli orrori nazisti della Seconda Guerra Mondiale, contribuirà alla sua diffusione, cadendo nella trappola del pregiudizio, senza conoscere ed indagare a fondo la figura storica di Klein. Infatti, parlando anch'egli della distinzione tra matematici "intuitivi" e "logici", osserverà come «con Klein è stata introdotta nella questione persino la politica» e, riferendosi al passaggio di Klein sopra citato, scriverà:

> Che questa dichiarazione non si trovi in accordo con i fatti apparirà chiaramente dagli esempi che esibiremo. Difficilmente si potrà dubitare che in questa affermazione Klein consideri implicitamente l'intuizione, con le sue misteriose caratteristiche, superiore ai sentieri prosaici della logica [...], evidentemente felice di poter ascrivere quella facoltà ai propri compatrioti. Abbiamo sentito di recente parlare di questo speciale tipo di etnografia con il nazismo: ora sappiamo che c'era qualcosa di simile già nel 1893.[222]

Ad ogni modo, come osserva giustamente Rowe, sicuramente Klein aveva superficialmente accettato un certo modo di parlare, tipico del suo tempo, in cui erano percepite, sicuramente più di oggi, le differenze tra le diverse popolazioni. Ma anche quando egli parla di razza ebraica, si riferisce, semmai, ad una tipologia etnica e considera la mescolanza tra popolazioni tedesche ed ebraiche il segno di una comunità sana, e non il segno di una malattia della società tedesca. Ciò è particolarmente chiaro quando, ad esempio, parlando di Jacobi, con una metafora biologica, egli descrive in termini positivi la "rigenerazione" della matematica tedesca attraverso "nuovo sangue":

> Com'è noto, l'anno 1912 portò con sé l'emancipazione degli ebrei in Prussia. Jacobi fu il primo matematico ebreo ad occupare un posto di

[222] Hadamard 1993, 99-100.

primo piano in Germania, e, nel fare ciò, egli si trovò di nuovo alla testa di un grande e, per la nostra scienza, significativo sviluppo. Questo provvedimento dischiuse alla nostra nazione un'ampia riserva di nuovi talenti matematici, le cui potenzialità, assieme a quelle degli immigrati francesi, portarono molto presto i loro frutti. Mi sembra che attraverso un tal genere di rinnovamento di sangue si sia ottenuto un forte stimolo per la scienza; assieme alla già citata legge della migrazione della produttività da nazione a nazione, vorrei designare la comparsa di questo fenomeno come effetto della "infiltrazione" nazionale.[223]

Mathematik und Psychologie

Il passo citato, riguardante la distinzione tra i differenti modi di pensare in matematica ed il loro ipotetico legame con differenze di tipo etnico, ci aiuta a dare una collocazione alle ricerche svolte da Klein, le quali si nutrivano di un ambiente multidisciplinare e ricco di stimoli extra-matematici. Infatti, tale correlazione tra etnia e predisposizioni matematiche personali – ipotesi che, per altro, tenendo conto di differenze linguistiche e culturali, tutt'oggi non dovrebbe essere poi così sorprendente – acquista il giusto significato non solo se inserito nella cultura del tempo, ma, soprattutto, all'interno degli interessi interdisciplinari di Klein, il quale più volte nei suoi scritti aveva auspicato un'analisi del ruolo dell'intuizione in matematica da un punto di vista psicologico. Infatti, al di là dei pregiudizi popolari dell'epoca, è l'interesse per la *mente matematica* ad essere al centro dell'attenzione, ossia il tentativo di trovare una

[223] Klein, 1979, pp. 114-115: «Jacobi ist der erste jüdische Mathematiker, der in Deutschland eine führende Stellung einnimmt. Auch hiermit steht er an der Spitze einer großen, für unsere Wissenschaft bedeutungsvollen Entwicklung. Es ist mit dieser Maßnahme ein neues großes Reservoir mathematischer Begabung für unser Land eröffnet, dessen Kräfte neben dem durch das französische Emigrantentum gewonnenen Zuschuß sich in unserer Wissenschaft sehr bald fruchtbar erweisen. Es scheint mir durch solch' eine Art Bluts-erneuerung eine starke Belebung der Wissenschaft gewonnen zu werden; neben dem schon berührten Gesetz der Wanderung der Produktivität von Land zu Land möchte ich das Hervorkommen dieser Erscheinung als Wirkung der nationalen „Infiltration" bezeichnen.»

spiegazione per quelle differenze di approccio esistenti tra i matematici stessi. Come Klein scrisse, parlando dell'*aritmetizzazione* della matematica:

> Forse, riceveremo un giorno dalla fisiologia e dalla psicologia sperimentale una più precisa informazione riguardo i legami più stretti dei processi che prendendo le mosse dall'intuizione vanno verso il pensiero logico. Che si tratti al riguardo di differenti, cioè non necessariamente connesse, attività mentali, è avvalorato dalle grosse differenze, fornite dall'osservazione di differenti individui. Sembra che l'intuizione matematica, come io qui la intendo, sia idonea più ai primi due generi dell'ingegno, il modo di vedere logico più all'ultima. La psicologia si trova solo all'inizio di simili ricerche, che io con molti colleghi accolgo con piacere. Perché speriamo che nella nostra scienza e nelle sue imprese molte differenze di opinione che adesso necessariamente rimangono irrisolte, scompariranno se noi saremo messi al corrente innanzitutto riguardo alle precondizioni psicologiche del pensiero matematico e alle loro individuali differenze.[224]

Il centro dell'attenzione è dunque la relazione tra psicologia e matematica, un argomento che sarebbe, molto probabilmente, guardato con sospetto da qualunque matematico contemporaneo, se non liquidato come argomento per matematici in pensione. Invece, Felix Klein, uno tra i più eminenti padri della matematica contemporanea, considerava

[224] Klein, 1895, pp. 238-239: «Vielleicht werden wir über die näheren Beziehungen der von der Anschauung ausgehenden Prozesse zum logischen Denkvermögen eines Tages von der Physiologie und der experimentellen Psychologie genaueren Aufschluß erhalten. Daß es sich dabei in der Tat um verschiedene, d. h. nicht notwendig verknüpfte Seelentätigkeiten handelt, wird durch die großen Differenzen bestätigt, welche die Beobachtung verschiedener Individuen ergibt. Die modernen Psychologen unterscheiden eine visuelle, eine motorische und eine auditive Veranlagung. Es scheint, daß die mathematische Anschauung, wie ich sie hier verstehe, den beiden ersten Arten der Begabung, die logische Auffassung mehr der letzteren eignet. Die Psychologie steht erst in den Anfängen derartiger Untersuchungen, die ich mit vielen Fachgenossen freudig begrüße. Denn wir hoffen, daß in unserer Wissenschaft und ihrem Betriebe viele Meinungsverschiedenheiten, die jetzt notwendig unausgetragen bleiben, verschwinden werden, wenn wir erst über die psychologischen Vorbedingungen des mathematischen Denkens und deren individuelle Verschiedenheit genauer unterrichtet sein werden.»

tale questione di particolare importanza, non solo rivelando il suo interesse attraverso numerosi indizi incidentali all'interno delle sue opere, ma anche organizzando un seminario, l'ultimo della sua carriera, nel semestre invernale 1909-1910, del quale egli stesso si occupò di redigere il protocollo, il *Seminarprotokoll*, che oggi ci informa nel dettaglio riguardo agli argomenti trattati.

Quello dei protocolli dei seminari è un argomento di per sé importante.[225] Infatti, la biblioteca del *Mathematisches Institut* di Göttingen possiede un armadio, normalmente chiuso a chiave, che contiene una sorprendente collezione di manoscritti e testi litografati che sono la testimonianza dell'età aurea che caratterizzò quella piccola città, a partire dall'età di Gauss e Riemann, fino al periodo dominato dalle figure di Klein e Hilbert. Tra questi testi preziosi, spiccano sicuramente i protocolli dei seminari organizzati da Klein, dato che costituiscono la collezione più ampia, composta da ben ventinove volumi, realizzati nell'arco di ben quarant'anni, dal 1872 al 1912.[226] Qui è conservato un materiale unico per quantità e qualità, non solo per l'importanza che Göttingen ha avuto nella storia della matematica, ma anche perché nessuna comunità matematica ha lasciato una comparabile quantità di documenti altrettanto dettagliati.

L'attività seminariale era uno dei capisaldi della concezione riguardante l'organizzazione dell'insegnamento che Klein propose fin dai tempi dell'*Antrittsrede*, d egli vedeva in essa la massima espressione dell'attività di ricerca. Per Klein, infatti, questa non poteva essere concepita come un'attività di pensiero da compiere nell'isolamento di uno studio, ma un'attività di squadra, da compiere attraverso lo scambio di idee, l'interazione e la cooperazione tra colleghi, dove le divergenze di opinione erano viste come ricchezza ed espressione di vitalità.

Tornando quindi al seminario del 1909-10 riguardante matematica e psicologia, si può senz'altro affermare che questo

---

[225] Vedi Chislenko, 2006.

[226] Di recente è stata realizzata la digitalizzazione dei protocolli dei seminari di Klein, e sono reperibili alla pagina web: http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/ .

costituisca un tentativo unico nel suo genere, dato che Klein raccolse alcune fra le migliori menti matematiche dell'epoca al fine di condurre una ricerca interdisciplinare che affrontasse la matematica dal punto di vista psicologico, pedagogico e, più in generale, filosofico. A sottolineare l'importanza che Klein stesso attribuiva a questo seminario vi è il fatto che egli tenne ben dieci presentazioni (di cui, nell'*Handschriftenabteilung* dell'archivio della Niedersächsische Staat- und Universitätsbibliothek di Göttingen, sono conservati i manoscritti con le note preparatorie).

Nelle intenzioni originarie, il seminario doveva coprire sei argomenti principali: 1) metodi di lavoro dei matematici produttivi; 2) formazione delle intuizioni di base nell'individuo in fase di crescita; 3) genesi e valore degli assiomi matematici per la teoria della conoscenza; 4) gli errori dei matematici; 5) implicazioni per l'istruzione matematica; 6) posizione della matematica nel sistema delle scienze.

Una parte importante del seminario è tenuta in prima persona dallo stesso Klein, il quale parla del suo modo di lavorare e di quella che definisce una sua "disposizione enciclopedica" che lo ha sempre portato a combinare aree separate della conoscenza. Il tema centrale e ricorrente del seminario è quello della creatività matematica, vista soprattutto in contrapposizione alla "povertà spirituale" della deduzione logica. Inoltre vi è un ampio interesse per la pedagogia, affrontando le teorie di Herbart e Pestalozzi e sottolineando la necessità di un'istruzione elementare che stimoli l'intuizione nei bambini. Ad ogni modo, il seminario non riesce a toccare tutti i gli argomenti in programma, dato che rimarranno fuori i punti 3 e 4, i quali, Klein si era ripromesso di affrontare nuovamente nel semestre estivo. Contrariamente ai propositi, però, una malattia impedì a Klein di partecipare al semestre successivo e, in seguito, non tenne nessun altro seminario. Ritirandosi ufficialmente dall'insegnamento nel 1912, Klein trasporrà parte delle idee esposte nel *Winterseminar 1909/10* in quell'opera ricostruzione storica degli eventi matematici da lui vissuti in prima persona che confluirà nelle *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*.

Conclusioni

Non mi sembra che le parole o il linguaggio, scritto o parlato, abbiano alcun ruolo nel meccanismo del mio pensiero. Le entità psichiche che sembrano servire da elementi del pensiero sono piuttosto alcuni segni e immagini più o meno chiare che possono essere riprodotti e combinati "volontariamente".[227]
Albert Einsterin

Nel corso dell'ultimo ventennio del Novecento, ha cominciato a manifestarsi in filosofia della matematica un rinnovato interesse per la pratica matematica e, in particolare, una riconsiderazione del ruolo che intuizione, pensiero visivo e pensiero diagrammatico rivestono nella matematica. Parallelamente, i progressi compiuti dalle neuroscienze e dalle scienze cognitive hanno apportato interessanti contributi non solo alla comprensione di quelli che potrebbero essere i correlati neurali dell'intuizione ma, soprattutto, alla chiarificazione di quella confusa nube di usi, funzioni e significati, spesso anche in contrasto fra loro, tradizionalmente attribuiti al termine "intuizione".

Attraverso un *excursus* generale dei lavori che documentano la rinascita dell'interesse per il concetto di intuizione in matematica e la ricerca di una sua chiarificazione rigorosa (e fondata su basi sperimentali), nella prima parte di questo lavoro si è cercato di isolare una caratterizzazione generale della conoscenza intuitiva e alcuni concetti chiave da utilizzare per la rilettura del lavoro di Klein proposta nella seconda parte. Particolarmente significativo si è rivelato l'apporto delle ricerche condotte da Efraim Fischbein, al quale si fa principalmente riferimento nel definire la conoscenza intuitiva.

[227] Einstein, 1993, 129.

Nel ricostruire il punto di vista epistemologico di Felix Klein, si è cercato di evidenziare come dalle sue opere emerga un'idea della ricerca matematica fondata sulla conoscenza intuitiva. L'analisi è stata condotta seguendo tre ambiti di ricerca che, nonostante soltanto il primo, *la teoria dei gruppi*, goda di una certa notorietà, hanno rivestito un'importanza centrale nell'attività di ricerca matematica condotta da Klein durante tutto l'arco della sua vita.

Anzitutto, è stata proposta una ricognizione generale dei lavori appartenenti alla prima fase della carriera accademica di Klein, i quali seguono una linea di pensiero che, partendo da studi sulle allora nascenti geometrie non euclidee giungono fino all'elaborazione del *Programma di Erlangen* e, quindi, alla teoria dei gruppi. Questi lavori mostrano come Klein avesse un'idea dell'intuizione molto vicina al concetto di *Gestalt*, quale forma di conoscenza globale non concettuale, visiva ed immediata, basata sull'analogia e sull'isomorfismo. Klein rivela, infatti, che il concetto di gruppo è stato un principio guida della sua pratica matematica durante tutto l'arco della sua vita, volendo con ciò significare che tale *principio* incarna la massima espressione della ricerca costante di *principi unificatori* generali a cui ha improntato la sua attività di matematico – come appunto era stato nel caso dell'*Erlanger Programm*, dove mediante il concetto di gruppo, egli aveva potuto dare un ordine a quello che, all'epoca, era il frammentato campo della geometria. Come ripeterà in un seminario dal titolo *Mathematik und Phsychologie*, che sarebbe tutt'oggi decisamente rivoluzionario se fosse tenuto in un dipartimento di matematica, la sua attività matematica era sempre stata guidata dal *sentimento dell'analogia* [*Gefühl der Analogie*].

È significativo il fatto che le prime pubblicazioni scientifiche di Klein abbiano proprio riguardato la costruzione di un *modello* euclideo per la geometria non euclidea di Bolyai-Lobachevsky, mostrando l'importanza rivestita dai *modelli* – anche in senso molto pratico, ricordando l'ampia collezione di modelli concreti che Klein fece realizzare per fini didattici, tuttora conservati a Göttingen – nell'idea che Klein aveva di "attività matematica".

Quello che si è voluto mettere in risalto, in questo contesto, è la consonanza tra questo aspetto del ragionamento matematico, appartenente alla cosiddetta sfera della creatività, al contesto della scoperta, e gli studi sul concetto di intuizione condotti da Efraim Fischbein nel suo *Intuition in Mathematics*, forse la trattazione più completa, rigorosa e illuminante scritta fino ad oggi sull'argomento. Sulla scorta di tutta una serie di ricerche sperimentali e riflessioni teoriche, Fischbein enuclea una serie di caratteristiche che sono tipiche della conoscenza intuitiva. Egli mostra come la necessità dell'intuizione per il pensiero matematico sia dettata dal fatto che quest'ultimo, come ogni altra forma di pensiero, è un tipo di *comportamento* costituito da una sequenza di decisioni. Queste decisioni sono prese sulla base di una memoria che, essendo *ricostruttiva* (e non basata sulla duplicazione), può generare rappresentazioni vaghe, incomplete, distorte o addirittura errate. Perciò, al fine di essere utili per un comportamento efficace, queste rappresentazioni devono essere rese intrinsecamente credibili, poiché per agire è necessario credere almeno temporaneamente nella certezza delle proprie rappresentazioni. In tal modo i modelli, in quanto rappresentazioni intuitive, forniscono ai concetti quella credibilità, consistenza e necessità che sono proprie degli oggetti materiali, al fine dell'azione.

Questo tipo di caratteristiche si ritrovano proprio nell'idea di conoscenza intuitiva espressa da Klein, la quale sembra richiamare non solo il concetto di *Gestalt* ma anche quel pensiero "tacito" e tanto simile alla percezione che è stato descritto da Michael Polanyi, e quella distinzione tra forme di pensiero logico-linguistico-sequenziale e analogico-visivo-parallelo, messa in risalto dalle ricerche di Roger W. Sperry riguardanti il cosiddetto "cervello diviso".

Proseguendo l'analisi delle opere di Klein, un secondo aspetto preso in considerazione riguarda l'uso dell'intuizione in matematica. Questo è fornito da una serie di opere culminate in uno dei tre volumi dell'*Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, quello riguardante la relazione tra *Präzisionsmathematik* e *Approximationsmathematik*, tema estremamente caro a Klein, tanto che pubblicazioni al riguardo coprono un periodo di almeno quarant'anni. Qui possiamo trovare la risposta di Klein ai problemi sopra elencati riguardanti la cosiddetta "crisi" dell'intuizione, e, in particolare, troviamo esposto il tentativo di fornire un sistema di "matematica dell'approssimazione", ossia una matematica *inesatta*, che non eccede i limiti e le possibilità rappresentazionali dell'intuizione stessa. Estremamente interessante si rivela, ad esempio, l'elaborazione di un concetto sostitutivo di quello di "funzione", ossia il concetto di "striscia" – come corrispondente matematico della curva disegnata – al fine di risolvere i problemi generati dalla creazione delle funzioni continue ma non derivabili in alcun punto. In tal modo, stabilendo l'esistenza di una soglia di precisione dell'intuizione, Klein propone un'idea della matematica in termini principalmente applicativi, considerando la matematica pura una disciplina simile alla logica. Come lo stesso Klein ripeterà in una delle celebri *Lectures on Mathematics* tenute alla Northwestern University (*The Evanston Colloquium*), vi è una netta distinzione tra l'intuizione matematica *raffinata*, caratterizzata da un infinito grado di esattezza e di rigore, ma che, tutto sommato, non è una forma di intuizione ma di ragionamento logico, e l'intuizione *ingenua*, necessariamente inesatta.

Infine, è stata esaminata proprio la strategia usata da Klein per chiarire questa concezione che vede la matematica come un *continuum*, come un segmento ai cui estremi si trovano matematica pura e matematica applicata, in cui però l'aspetto applicativo ha un'importanza essenziale ed ineliminabile. Infatti, nelle lezioni riguardanti le Superfici di Riemann, le *Riemann'sche Flachen*, Klein cerca di ottenere un modo per rappresentare visivamente ed in modo soddisfacente le funzioni algebriche avendo come obiettivo prioritario l'ottenimento della rappresentazione intuitiva al fine di comprendere i risultati in modo visivo (piuttosto che ottenere nuovi risultati matematici). Qui è quindi in gioco l'elaborazione di una nuova prospettiva, una rappresentazione propria dell'intuizione ingenua, così da poter ottenere una comprensione di risultati che, benché preesistenti, appartengono al dominio dell'intuizione raffinata. Il tutto all'interno di un metodo di lavoro in cui Klein fa continuo ricorso, in un contesto puramente matematico, all'uso di modelli mutuati dalla fisica.

In conclusione, attraverso questo lavoro si è cercato di mettere in luce il valore del punto di vista epistemologico di Felix Klein, in particolare per quanto riguarda il concetto di intuizione. Facendo uso di tutta una serie di contributi multidisciplinari, si è cercato di fornire prove a favore dell'importanza centrale che l'intuizione riveste nella matematica, anche in quelle forme di pensiero ritenute maggiormente astratte e formali. Inoltre, si è cercato di chiarire il concetto stesso di "intuizione", sia in contrapposizione alle forme di pensiero rigorosamente formali, sia in relazione ai concetti di "pensiero visivo" e "pensiero diagrammatico".

Bibliografia

Arnheim, R., 1969. *Visual Thinking.* Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press.

Bartolini Bussi, M. G., Taimina, D. & Isoda, M., 2009. Concrete models and dynamic instruments as early technology gools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM Mathematics Education.*

Birkhoff, G. & Bennett, M. K., 1988. Felix Klein and His "Erlanger Programm". In: W. Aspray & P. Kitcher, eds. *History and Philosophy of Modern Mathematics (Minnesota Studies in the Philosophy of science; v. 11).* Minneapolis: The University of Minnesota Press, pp. 145-176.

Bottazzini, U. & Dalmedico, A. D. eds., 2001. *Changing Images in Mathematics.* London: Routledge.

Bråting, K. & Pejlare, J., 2008. Visualizations in Mathematics. *Erkenntnis,* pp. 345–358.

Brecht, B., 1961. *Poesie e canzoni.* Torino: Giulio Einaudi.

Brown, J. R., 1997. Proofs and Pictures. *The British Journal for the Philosophy of Science,* pp. 161-180.

Bunge, M., 1962. *Intuition and Science.* Englewood Cliffs, N.J.: Pretience Hall.

Carson, E., 1997. Kant on Intuition in Geometry. *Canadian Journal of Philosophy,* pp. 489-512.

Catastini, L., 1990. *Il pensiero allo specchio.* Firenze: La Nuova Italia.

Cayley, A., 1859. A sixth memoir upon Quantics. *Phil. Trans. R. Soc. London,* pp. 61-90.

Cayley, A., 1889-1897. *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley.* Cambridge: University Press.

Cellucci, C., 2002. *Filosofia e matematica.* Roma-Bari: Laterza.

Chislenko, E., 2006. The Felix Klein Protocols Digitized. *Clay Mathematics Institute Annual Report,* pp. 16-21.

Coffa, A. J., 1998. *La tradizione semantica da Kant a Carnap.* Bologna: il Mulino.

Corry, L., 2004. *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918).* Dordrecht: Kluwer.

Corry, L., 2006. On the origins of Hilbert's sixth problem: physics ant the empiricist approach to axiomatization. *Proceedings of the International Congress of Matematicians, Spain 2006,* pp. 1-22.

Dantzig, T., 1967. *Number: the Language of Science.* New York: The Free Press.

Davis, P. J., 1993. Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics,* pp. 333-344.

Davis, P. J. & Hersh, R., 1981. *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhäuser.

Dehaene, S., 2009. Origins of Mathematical Intuitions. The case of Arithmetic. *The Year in Cognitive Neuroscience 2009,* pp. 232-259.

Dehaene, S., 2011. *The Number Sense.* New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. & Brannon, E. M. eds., 2011. *Space, Time and Number in the Brain.* London, Burlington, San Diego: Academic Press - Elsevier.

Detlefsen, M., 2008. Purity as an Ideal of Proof. In: P. Mancosu, ed. *The Philosophy of Mathematical Practice.* NewYork: Oxford University Press, pp. 179-197.

Dieudonné, J. A., 1973. Should We Teach "Modern" Mathematics?. *American Scientist,* pp. 16-19.

diSessa, A., 2000. *Changing Minds.* Cambridge, London: The MIT Press.

Dorato, M., 2000. *Il software dell'universo.* Milano: Paravia Bruno Mondadori.

Dorato, M., 2005. The Laws of Nature and the Effectiveness of Mathematics. In: G. Boniolo, P. Budinich & M. Trobok, eds. *The Role of Mathematics in Physical Sciences.* Dordrecht: Springer, pp. 131-144.

Edwards, B., 1987. *Disegnare ascoltando l'artista che è in noi.* Milano: Longanesi.

Edwards, B., 2002. *Il nuovo disegnare con la parte destra del cervello.* Milano: Longanesi.

Einstein, A., 1993. Appendice 1. Una testimonianza di Albert Einstein. In: J. Hadamard, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico.* Milano: Raffaello Cortina, pp. 129-130.

Erdmann, J. E., 1870. *Grundriss der Geschichte der Philosophie (Zweite sehr vermehrte Auflage).* Berlin: Wilhelm Hertz.

Ewald, W. B., 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Ewing, A. C., 1941. Intuition and Reason. *Proceedings of the British Academy,* Issue 27, pp. 67-107.

Fabri, E., 2010. *Matematica e fisica - un rapporto complesso.* [Online] Available at: http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/lezioni/matfis.pdf

Feferman, S., 2000. Mathematical Intuition Vs. Mathematical Monsters. *Synthese,* pp. 217-332.

Feferman, S., 2012. And so on...: reasoning with infinite diagrams. *Synthese,* pp. 371-386.

Ferreiros, J., 2007. The Rise of Pure Mathematics as Arithmetic with Gauss. In: C. Goldstein, N. Schappacher & J. Schwermer, eds. *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae.* Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, pp. 207-240.

Fischbein, E., 1987. *Intuition in Science and Mathematics.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Franco, L. & Sperry, R. W., 1977. Hemisphere Lateralization for Cognitive Processing of Geometry. *Neuropsychologia,* pp. 107-114.

Fridman, M., 1999. Geometry, Construction and Intuition in Kant and his Successors. In: G. Sher & R. Tieszen, eds. *Between Logic and Intuition.* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 186-218.

Friedman, M., 1992. *Kant and the Exact Sciences.* Cambridge-London: Harvard University Press.

Giaquinto, M., 1994. Epistemology of Visual Thinking in Elementary Real Analysis. *The British Journal for the Philosophy of Science,* pp. 789-813.

Giaquinto, M., 2002. *The Search for Certainity.* New York: Oxford University Press.

Giaquinto, M., 2005a. From Simmetry Perception to Basic Geometry. In: P. Mancosu, K. F. Jørgensen & S. A. Pedersen, eds. *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.* Dordrecht: Springer, pp. 31-55.

Giaquinto, M., 2005b. Mathematical Activity. In: P. Mancosu, K. F. Jørgensen & S. A. Pedersen, eds. *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.* Dordrecht: Springer, pp. 75-87.

Giaquinto, M., 2007. *Visual Thinking in Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Giaquinto, M., 2008. Visualizing in Mathematics. In: P. Mancosu, ed. *The Philosophy of Mathematical Practice.* New York: Oxford University Press, pp. 22-42.

Giardino, V., 2010. Intuition and Visualization in Mathematical Problem Solving. *Topoi,* pp. 29-39.

Giardino, V. & Piazza, M., 2008. *Senza parole.* Milano: Bompiani.

Giorello, G., 1993. Introduzione all'edizione italiana. In: J. Hadamard, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico.* Milano: Cortina, pp. VII-XVII.

Glas, E., 2002. Klein's Model of Mathematical Creativity. *Science & Education,* pp. 95-104.

Hadamard, J., 1993. *La psicologia dell'invenzione in campo matematico.* Milano: Cortina.

Hahn, H., 1980 (1933). The Crisis in Intuition. In: *Empiricism, Logic and Mathematics.* Dordrecht: Reidel, pp. 73-102.

Hallet, M., 2008. Reflections on the Purity of Method in Hilbert's Grundlagen der Geometrie. In: P. Mancosu, ed. *The Philosophy of Mathematical Practice.* New York: Oxford University Press, pp. 198-255.

Hawkins, T., 1975. *Lebesgue's Theorie of integration; its origins and development.* New York: Chelsea.

Hawkins, T., 1984. The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics. *Historia Mathematica,* pp. 442-470.

Hawkins, T., 2000. *Emergence of the Theory of Lie Groups.* New York: Springer.

Hendricks, V. F., Jørgensen, K. F., Lützen, J. & Pedersen, S. A. eds., 2006. *Interactions - Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930.* Dordrecht: Springer.

Hermann, R., 1979. Introduction to: Kleinian Mathematics from an Advanced Standpoint. In: *(Klein 1979b).* Brookline, Mass.: Math Sci Press, pp. 363-365.

Hersh, R., 1991. Mathematics has a Front and a Back. *Synthese,* pp. 127-133.

Hilbert, D., 1896. Über die Theorie der Algebraischen Invarianten. In: *Mathematical Papers read at the International Mathematical Congress.* New York: MacMillan, pp. 116-124.

Hilbert, D., 1922. Nuova fondazione della matematica. Prima comunicazione. In: *Hilbert 1978.* s.l.:s.n., pp. 189-213.

Hilbert, D., 1978. *Ricerche sui fondamenti della matematica.* Napoli: Bibliopolis.

Hilbert, D., 1988. *Wissen und mathematisches Denken. Vorlesung W.S. 1922/23.* Göttinger: Mathematisches Institut.

Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S., 1932. *Anschauliche Geometrie Einfachste Grundbegriffe der Topologie.* Berlin: Julius Springer Verlag.

Huber, R., 2006. Intuitive Cognition and the Formation of Theories. In: E. Carson & R. Huber, eds. *Intuition and the Axiomatic method.* Dordrecht: Springer, pp. 293-324.

Jaffe, A. & Quinn, F., 1993. "Theoretical Mathematics": Towards a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. *Buletin of The American Mathematical Society,* July, 29(1), pp. 1-13.

Kerry, B., 1885. Paul du Bois-Reimond Allgemeine Functionentheorie. Erster Theil Tübingen 1882. *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie,* Volume 9, pp. 245-255.

Kerry, B., 1885a. Über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung. *Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie,* Volume 9, pp. 433-493.

Klein, F., 1871. Über die sogenannte Nicht Euclidische Geometrie (Vorl. Mitteilung). *Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 17.* Ristampato in *Klein (1921),* pp. 244-253.

Klein, F., 1871a. Über die sogennante Nicht-Euclidische Geometrie (erster Aufsatz). *Math. Annalen Bd. 4.* Ristampato in *Klein (1921),* pp. 254-305.

Klein, F., 1872. Erlanger Antrittsrede. SUB Göttingen: *Cod. Ms. F. Klein 22L:1.* Trascrizione e traduzione inglese in *(Rowe, 1985).*

Klein, F., 1873. Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkurliche Kurve. *Math. Annalen, Ristampato in Klein (1922),* pp. 214-224.

Klein, F., 1873a. Über die sogennante Nicht-Euclidische Geometrie (zweiter Aufsatz). *Math. Annalen Bd. 6.* Ristampato in *Klein (1921),* pp. 311-343.

Klein, F., 1874. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen (erste Mitteilung). *Erlangen Sitzungsberichten vom 2. Februar 1874.* Ristampato in *Klein (1922),* pp. 89-98.

Klein, F., 1876. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen (zweite Mitteilung). *Mathematische Annalen, 10.* Ristampato i*n Klein (1922),* p. 136–155.

Klein, F., 1890. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. *Mathematische Annalen,* 37, pp. 544-572.

Klein, F., 1892. *Nicht-Euklidische Geometrie. Prima edizione.* Göttingen: Note litografate autografe redatte da Friederich Schilling, relative alle lezioni tenute durante il semestre invernale 1889-90.

Klein, F., 1892a. *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale.* Leipzig: Teubner.

Klein, F., 1893. *Nicht-Euklidische Geometrie. Seconda edizione.* Göttingen: Note litografate autografe redatte da Friederich Schilling, relative al semestre invernale 1889/90 e al semestre estivo 1890.

Klein, F., 1893a. *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals.* Cambridge: Macmillan and Bowes.

Klein, F., 1894. *The Evanston Colloquium. Lectures on mathematics delivered at Northwestern University*. New Tork and London: Macmillan.

Klein, F., 1894a. Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4 (1894/95).* Ristampato in *Klein (1923),* pp. 482-497.

Klein, F., 1895. Riemann and his Significance for the Development of Modern Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* pp. 165-180.

Klein, F., 1895. Über Arithmetisierung der Mathematik. *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen*, 2, Ristampato in: *(Klein 1922)*, pp. 232-240.

Klein, F., 1896. The Arithmetizing of Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* pp. 241-249.

Klein, F., 1897. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises. *Bulletin de la société physico-mathematique de Kasan 2, (1989) e Mathematische Annalen, 50, (1898).* Ristampato in *Klein (1921),* pp. 384-401.

Klein, F., 1909-10. *Seminarprotokoll Winterseminar 1909-10 (Mathem. u. Psychologie).* Göttingen: Mathematisches Institut.

Klein, F., 1910-11. *Psychologisches und Pädagogisches Seminar*, SUB Göttingen: *Cod. Ms. F. Klein 21A.*

Klein, F., 1910. Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. *Jahrbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Ristampato in *Klein (1921),* pp. 533-522.

Klein, F., 1921. *Gesammelte Mathematisches Abhandlungen vol.I.* Berlin: Julius Springer.

Klein, F., 1922. *Gesammelte Mathematisches Abhandlungen vol.II.* Berlin: Julius Springer.

Klein, F., 1923. *Gesammelte Mathematisches Abhandlungen vol.III.* Berlin: Julius Springer.

Klein, F., 1923a. Vorbemerkungen zu den Arbeiten über Riemannsche Funktiontheorie. In: *Klein (1923).* Berlin: Julius Springer, pp. 477-481.

Klein, F., 1923b. Göttinger Professoren. Lebensbilder von eigener Hand. 4. Felix Klein. *Mitteilungen des universitätsbundes Göttingen,* pp. 11-36.

Klein, F., 1925. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Geometrie.* Berlin: Julius Springer.

Klein, F., 1928. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Präzisions- und Approximationsmathematik.* Berlin: Julius Springer.

Klein, F., 1979 (1926). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Berlin-Heidelberg-New York: Julius Springer.

Klein, F., 1979a. *Development of mathematics in the 19th century.* Brookline, Massachussets: Math Sci Press.

Klein, F., 1986. *Riemannsche Flächen.* Leipzig: Teubner.

Klein, F., 2000. *Le "Conferenze americane" di Felix Klein.* Milano: Springer.

Klein, F., 2000a. La mia vita. In: P. Nastasi, ed. *Le "Conferenze Americane" di Felix Klein.* Milano: Springer-Verlag Italia, pp. 157-177.

Klein, F., 2004. *Il Programma di Erlangen.* Milano: Springer-Verlag Italia.

Klein, F., 2004a. *Elementary Mathematics from an Advaced Standpoint. Aritmetica, Algebra, Analysis.* Mineola, New York: Dover.

Klein, F., 2004b. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry.* Mineola: Dover.

Kline, M., 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* New York: Oxford University Press.

Kronecker, L., 1887. Über den Zahlbegriff. *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* pp. 337-355.

Kusch, M., 1995. *Psychologism.* Abingdon, New York: Routledge.

Lagrange, J. L., 1811. *Mecanique analytique.* Paris: Courcier.

Lakoff, G. & Núñez, R. E., 2000. *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books.

Landau, E., 1934. *Einführung in die Differential- und Integralrechnung.* Groningen-Batavia: Noordhoff.

Majer, U., 1993. Hilberts Methode der Idealen Elemente und Kants regulativer Gebrauch der Ideen. *Kant Studien,* pp. 51-77.

Majer, U., 1995. Geometry, Intuition and Experience: From Kant to Husserl. *Erkenntnis,* Issue 42, pp. 261-285.

Majer, U., 2001. The Axiomatic Method and the Foundations of Science: Historical Roots of Mathematical Physics in Göttingen (1900-1930). In:

M. Rédei & M. Stöltzner, eds. *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics.* Dordrecht-Boston-London: Kluwer, pp. 11-33.

Majer, U., 2006. Hilbert's Axiomatic Approach to the Foundations of Science - A Failed Research Program?. In: V. F. Hendricks, K. F. Jørgensen, J. Lützen & S. A. Pedersen, eds. *Interactions - Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930.* Dordrecht: Springer, pp. 155-184.

Majer, U., 2006a. The Relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, Particularly Geometry. In: E. Carson & R. Huber, eds. *Intuition and the Axiomatic Method.* Dordrecht: Springer, pp. 47-66.

Majer, U. & Sauer, T., 2006b. Intuition and the Axiomatic Method in Hilbert's Foundation of Physics - Hilbert's Idea of a Recursive Epistemology in his Third Hamburg Lecture. In: E. Carson & R. Huber, eds. *Intuition and the Axiomatic Method.* Dordrecht: Springer, pp. 213-33.

Mancosu, P., 1998. *From Brouwer to Hilbert.* New York: Oxford University Press.

Mancosu, P., 2001. Mathematical Explanation: Problems and Prospects. *Topoi,* pp. 97-117.

Mancosu, P., 2005. Visualization and Logic in Mathematics. In: P. Mancosu, K. F. Jørgensen & S. A. Pedersen, eds. *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.* Dordrecht: Springer, pp. 13-30.

Mancosu, P., ed., 2008. *The Philosophy of Mathematical Practice.* New York: Oxford University Press.

Mancosu, P., Jørgensen, K. F. & Pedersen, S. A. eds., 2005. *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics.* Dordrecht: Springer.

Nastasi, P., 2000. Da Klein a Klein. In: *Le conferenze americane di Felix Klein.* Milano: Springer, pp. 1-39.

Needham, T., 1997. *Visual Complex Analysis.* New York: Oxford University Press.

Parshall, K. H. & Rowe, D. E., 1994. *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876-1900: J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore.* Providence: American Mathematical Society, London Mathematical Society.

Pasch, M., 1976 (1882). *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Berlin: Springer.

Peano, G., 1890. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen,* p. 157–160.

Pejlare, J., 2007. *On Axioms and Images in the History of Mathematics.* Uppsala: Dissertation presented at Uppsala University.

Petri, B. & Schappacher, N., 2007. On Arithmetization. In: C. Goldsein, N. Schappcher & J. Schwermer, eds. *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Berlin-Heidelberg: Springer, pp. 343-374.

Poincaré, H., 1917. *La Valeur de La Science*. Paris: Flammarion.

Poincaré, H., 1952. *Science and Method*. New York: Dover Publications.

Polanyi, M., 1969. *Knowing and Being*. Chicago: University of Chicago Press.

Reid, C., 1996. *Hilbert*. New York: Springer-Verlag.

Rowe, D. E., 1983. A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm. *Historia Mathematica,* pp. 448-457.

Rowe, D. E., 1985. Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede". *Historia Mathematica,* pp. 123-141.

Rowe, D. E., 1986. "Jewish Mathematics" at Göttingen in the Era of Felix Klein. *Isis,* pp. 422-449.

Rowe, D. E., 1989. Klein, Hilbert and the Gottingen Mathematical Tradition. *Osiris, 2nd Series,* Volume 5, pp. 186-213.

Rowe, D. E., 1989b. The early geometrical works of Sophus Lie and Felix Klein. In: *The History of Modern Mathematics, vol. 1.* Boston: Academic Press, pp. 209-273.

Rowe, D. E., 1994. The Philosophical Views of Klein and Hilbert. In: S. Chikara, S. Mitsuo & J. W. Dauben, eds. *The Intersection of History and Mathematics*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

Rowe, D. E., 2001. Felix Klein as Wissenschaftspolitiker. In: U. Bottazzini & A. D. Dalmedico, eds. *Changing Images in Mathematics*. London: Routledge, pp. 69-91.

Ryckman, T., 2008. Invariance Principles as Regulative Ideals: From Wigner to Hilbert. *Royal Institute of Philosophy Supplement 63,* pp. 63-80.

Sachs, O., 1986. *L'uomo che scambiò sua moglie per un cappello*. Milano: Adelphi.

Sauer, T., 1999. The Relativity of Discovery: Hilbert's First Note on the Foundations of Physics. *Arch. Hist. Exact Sci.,* Issue 53, pp. 529-75.

Schlimm, D., 2012. Klein and Pasch on intuition and proofs. *Unpublished. Forthcoming,* pp. 1-48.

Schubring, G., 1989. Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: The Role and Impact of Felix Klein. In: D. E. Rowe & J. McCleary, eds. *The History of Modern Mathematics: proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics,* *Vassar College, Poughkeepsie, New York*. San Diego: Academic Press, pp. 171-220.

Segre, C., 17/X/1890. *Lettera a Klein*. SUB Göttingen: Cod. Ms. F. Klein 995/1-2.

Singh, A. N., 1935. The Theory and Construction of Nondifferentiable Functions. In: Hobson & E. W., eds. *Squaring the Circle and other Monographs*. s.l.:Lucknow, pp. I-III, 1-110.

Sneed, J. D., 1971. *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht: Reidel.

Snyder, V., 1923. Klein's collected papers, volume II (Review). *Bulletin of American Mathematical Society*, pp. 224-229.

Stafford, B. M., 1996. *Good Looking: Essays on the Virtue of Images*. Cambridge (Mass.), London: The MIT Press.

Tall, D., 1985. Using computer graphics programs as generic organizers for the concept image of differentiation. *Proceedings of the Ninth International Conference for Psychology of Mathematics Education*.

Tall, D. & Di Giacomo, S., 2000. Cosa vediamo nei disegni geometrici. *Progetto Alice*, I(2).

Thom, R., 1971. "Modern" Mathematics: An Educational and Philosophic Error?. *American Scientist*, pp. 695-699.

Thurston, W. P., 1994. On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of The American Mathematical Society*, April, 30(2), pp. 161-177.

Tobies, R., 1981. *Felix Klein*. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Tobies, R., 1988. Felix Klein und die Anwendung der Mathematik. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Friederich-Schiller-Universität Jena, Naturwissenschaftliche Reihe*, pp. 259-270.

Torretti, R., 1978. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Volkert, K., 1987. Die Geschichte der pathologischen Funktionen -- Ein Betrag zur Enststehnung der mathematischen Methodologie. In: C. Truesdell, ed. *Archive for History of Exact Sciences Volume 37*. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo: Springer, pp. 193-232.

von Koch, H., 1906. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica*, pp. 145-174.

Weierstrass, K., 1895. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten

Differentialquotienten besitzen. In: *Mathematische Werke von Karl Weierstrass.* Berlin: Mayer and Müller, pp. 72-74.

Wertheimer, M., 1965. *Il pensiero produttivo.* Firenze: Giunti.

Westcott, M. R., 1968. *Toward a Contemporary Psychology of Intuition.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Weyl, H., 1932. Topologie und abstracte Algebra als zwei Wege mathematichen Verständnisses. *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften,* Issue 38, pp. 177-188.

Weyl, H., 1955. *The Concept of a Riemann Surface.* Reading, Mass.: Addison Wesley.

Weyl, H., 1977. *Il continuo.* Napoli: Bibliopolis.

Weyl, H., 1985. Axiomatics Versus Constructive Procedures in Mathematics. *The Mathematical Intelligencer,* pp. 10-17.

Yaglom, I. M., 1988. *Felix Klein and Sophus Lie.* Boston: Birkhäuser.