

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA**

Dottorato di Ricerca in
Automatica e Ricerca Operativa

XIX Ciclo

Settore Scientifico Disciplinare: ING-INF/04 Automatica

**Utilizzo di un Aeromodello
Radiocomandato per Prove di
Navigazione Autonoma**

Ph.D. Thesis

Claudio Pondi

Coordinatore:
Prof. Claudio Melchiorri

Tutor:
Prof. Gianni Bertoni

Alla mia famiglia

Indice

1	Progetto UAV	1
1.1	Linee generali e fasi di sviluppo	1
1.2	Architettura del sistema avionico	3
1.3	Piattaforma per i test in volo	6
2	Sistema di navigazione satellitare GPS	9
2.1	Descrizione generale	9
2.2	Segnale e Ricevitore	10
2.3	Modello delle misure	14
2.3.1	Pseudodistanza	14
2.3.2	Fase della portante	17
2.3.3	Frequenza Doppler	18
2.4	Algoritmi per la stima di posizione e velocità	19
2.4.1	Stima di posizione	20
2.4.2	Stima di velocità	25
2.4.3	Effetto della distribuzione geometrica dei satelliti sulle stime	26
3	Tecniche di correzione differenziali	29
3.1	Introduzione	29
3.2	Correzioni LAAS	30
3.3	Correzioni WAAS	33
3.4	Prove comparative	36
3.5	Conclusioni	43
4	Tecniche di posizionamento preciso	45
4.1	Introduzione	45
4.2	Modelli alle ‘singole’ e alle ‘doppie differenze’	45
4.3	Stazione di riferimento non georeferenziata	48
4.3.1	Valutazione dell’accuratezza	52
4.3.2	Risultati di simulazione	59
4.3.3	Risultati sperimentali	68
5	Prove di volo	71

6	Risoluzione dell'ambiguità intera	77
6.1	Definizione del problema	77
6.2	Metodo LAMBDA	78
6.3	Metodo basato sulle ' <i>singole differenze</i> '	81
6.3.1	Modellazione dell'evoluzione del residuo tramite un sistema lineare	85

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione schematica delle funzioni NGC	2
1.2	Architettura del sistema avionico	5
1.3	(a) Aeromodello utilizzato nei test in volo (b) Versione prototipale del sistema avionico	6
2.1	Schema funzionale dei loop di aggancio del codice e della portante	12
2.2	Ellisse generatrice della superficie di riferimento per il sistema di coordinate Geodetico	24
2.3	Visualizzazione degli angoli di latitudine e longitudine	25
2.4	Valori stimati delle componenti del vettore velocità in condizioni statiche	26
3.1	Errori orizzontali di posizione relativi alla prova statica	37
3.2	Errori verticali di posizione relativi alla prova statica	38
3.3	Vista in pianta del circuito percorso	39
3.4	Errori orizzontali di posizione relativi al circuito	39
3.5	Errori verticali di posizione relativi al circuito	40
3.6	Distanza del ricevitore dalla stazione di terra	41
3.7	Errori orizzontali di posizione relativi alla prova in distanza	41
3.8	Errori verticali di posizione relativi alla prova in distanza	42
3.9	Sensibilità dell'insieme di satelliti sulla stima di posizione	43
4.1	Configurazione delle posizioni dei ricevitori e del satellite	50
4.2	Tetraedro formato da \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jF} e \vec{l}_{jF}	55
4.3	(a) Configurazione di \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jF} e \vec{l}_{jF} che corrisponde alla relazione (4.3.11) del limite superiore, (b) Configurazione di \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jF} e \vec{l}_{jF} corrispondente alla relazione (4.3.12) del limite inferiore	56
4.4	Configurazioni del vettore di errore e del vettore di posizione del satellite corrispondenti a (a) δ_{max}^+ and (b) δ_{max}^-	60
4.5	(a) Configurazione del vettore di posizione relativa tra i ricevitori ed il vettore di errore, e , nel caso del limite superiore. Le situazioni per θ minore o maggiore di $\pi/2$ sono riportate, rispettivamente, sulla sinistra e sulla destra (b) Configurazione del vettore di posizione relativa tra i ricevitori ed il vettore di errore, e , nel caso del limite inferiore. Le situazioni per θ minore o maggiore di $\pi/2$ sono riportate, rispettivamente, sulla sinistra e sulla destra	61

4.6	Relazione geometrica tra r_{jF} e ζ	63
4.7	Entità in millimetri degli errori (a) K_A^+ e (b) K^+ in funzione dell'azimuth del satellite, con una distanza di 10 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice. . . .	64
4.8	Entità in millimetri degli errori (a) K_A^- e (b) K^- in funzione dell'azimuth del satellite, con una distanza di 10 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice. . . .	64
4.9	Entità in millimetri degli errori (a) K_A^- e (b) K^- in funzione dell'azimuth del satellite, con una distanza di 10 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice. . . .	67
4.10	(a) Andamento del termine K_A e del corrispondente limite superiore K_A^+ espressi in millimetri (b) Ampiezza degli errori, espressi in metri, sulle stime di posizione dei ricevitori ottenute con il codice	68
5.1	(a) Numero di satelliti agganciati dal ricevitore Canadian Marconi durante la prova (b) Quota stimata dal ricevitore	72
5.2	Elevazione di uno dei satelliti agganciati durante la prova	73
5.3	(a) Numero di satelliti agganciati dal ricevitore μ -blox durante la prova (b) Quota stimata dal ricevitore	74
5.4	Numero di satelliti per i quali risulta agganciata la fase della portante da parte del ricevitore μ -blox durante la prova	75
6.1	Riduzione nel tempo del numero di combinazioni ammissibili	84
6.2	Errore di stima della seconda componente del vettore di stato	91
6.3	Dettaglio dell'errore di stima della seconda componente del vettore di stato	91

Elenco delle tabelle

2.1	Parametri statistici delle stime di velocità	26
3.1	Parametri statistici delle stime di posizione nella prova statica	38
3.2	Parametri statistici delle stime di posizione nel circuito	40
3.3	Parametri statistici delle stime di posizione nella prova di lunga distanza .	42
4.1	Andamento del termine di errore K_A^+ , alla distanza di 30 km e con un errore sulla posizione stimata del ricevitore di 20 m	65
4.2	Andamento del termine di errore K^+ , alla distanza di 30 km e con un errore sulla posizione stimata del ricevitore di 20 m	65
4.3	Andamento del termine di errore K_A^+ , alla distanza di 10 km e con un errore sulla posizione stimata del ricevitore di 50 m	66
4.4	Andamento del termine di errore K^+ , alla distanza di 10 km e con un errore sulla posizione stimata del ricevitore di 50 m	66

Introduzione

Negli ultimi anni l'interesse da parte di istituzioni ed industrie aerospaziali, sia nazionali che internazionali per i velivoli senza pilota, comunemente identificati con il termine UAV (*Unmanned Aerial Vehicle*), è cresciuto notevolmente. Anche in ambito scientifico questo interesse è testimoniato dalla ormai costante presenza, nelle conferenze del settore aerospaziale, di almeno una sessione dedicata agli UAV. Lo sviluppo tecnologico, soprattutto nell'ambito dei sistemi avionici (si pensi ad esempio ai sistemi di navigazione satellitare), ha consentito, infatti, di prevedere la realizzazione e l'impiego di tali velivoli in applicazioni di rilevanza civile e commerciale. Tra i possibili scenari che vengono prospettati [32] è opportuno menzionare:

- Sorveglianza di confini ed aree sensibili
- Individuazione degli incendi in aree boschive
- Supporto in operazioni di Search and Rescue
- Individuazione di materiali inquinanti in mare
- Monitoraggio del traffico
- Rilevamento fotogrammetrico

In particolare l'utilizzo degli UAV consentirebbe di ridurre i costi operativi associati alle missioni di lunga durata e di evitare i rischi per l'incolumità dell'equipaggio in missioni di elevata criticità.

È necessario evidenziare che le prime attività finalizzate allo sviluppo di velivoli senza pilota sono state intraprese prima della seconda guerra mondiale e sono proseguite durante e dopo la fine del conflitto, in particolare da parte delle forze armate statunitensi e britanniche. Tuttavia gli investimenti per tali attività non erano inseriti in una linea programmatica definita e venivano intensificati esclusivamente in concomitanza di conflitti bellici (Corea, Vietnam). Solamente in tempi più recenti, all'inizio degli anni '80, da parte di alcuni paesi è stata attribuita agli UAV una notevole importanza strategica, dapprima da Israele, successivamente dagli Stati Uniti e, ancora più recentemente, dall'Australia e da numerosi stati Europei tra cui l'Italia. In particolare, il Dipartimento della difesa statunitense ha stanziato, nel corso degli anni, fondi per lo studio e la realizzazione di UAV per scopi di sorveglianza e ricognizione in aree di guerra. Di conseguenza le industrie aerospaziali americane, a partire dagli anni '90, hanno usufruito di commesse militari di

importo costantemente crescente e sono riuscite così a portare alla fase di produzione alcuni velivoli. Tra questi, il *Global Hawk*, costruito dalla *Northrop Grumman*, rappresenta il velivolo tecnologicamente più avanzato.

La volontà di estendere anche al settore civile l'impiego di UAV comporta, come necessaria conseguenza, la definizione di criteri per la classificazione dei velivoli e soprattutto la loro regolamentazione. È opportuno notare, a questo proposito, che una definizione comunemente accettata a livello internazionale degli UAV è ancora mancante. Ciascuno degli enti o delle autorità civili e militari che, nei singoli paesi, sono responsabili della certificazione e della sicurezza riguardante il traffico aereo fornisce una propria definizione in merito. Il Dipartimento della difesa americano, ad esempio, definisce [41] come UAV *un velivolo a motore che non trasporta un operatore umano, che utilizza forze aerodinamiche per generare portanza, che può volare autonomamente od essere pilotato in modo remoto, destinato ad un'unica missione o riutilizzabile, e che può imbarcare un carico pagante letale o non-letale*. L'autorità federale per l'aviazione (FAA, Federal Aviation Administration), invece, classifica in questa categoria *gli aeromobili capaci di volare, per scopi civili, al di fuori della visuale diretta, sotto controllo remoto od autonomo, che non sono utilizzati per diporto e non trasportano passeggeri o equipaggio*. In ambito europeo le autorità per l'aviazione (riunite nella JAA) ed Eurocontrol, in un documento [22] che definisce le linee guida per una futura regolamentazione, indicano gli UAV come *velivoli progettati per operare senza un pilota umano a bordo*.

Per quanto riguarda la regolamentazione, al contrario, si riscontra una generale concordanza nell'individuare gli aspetti che si dovranno tenere in considerazione per la futura integrazione degli UAV nello spazio aereo attualmente destinato al traffico civile. In particolare, nell'ambito della navigazione, i velivoli senza pilota dovranno garantire le medesime prestazioni richieste a quelli con pilota a bordo, stabilite dall'ICAO (International Civil Aviation Organization) tramite le RNP (Required Navigation Performance). Le RNP derivano dal concetto di navigazione basata sulle prestazioni (Performance-Based Navigation) che è stato introdotto dall'ICAO negli anni '80 per affrontare in maniera efficace il problema della crescita del traffico aereo civile. Esse definiscono il livello di accuratezza e affidabilità della stima dei parametri di navigazione, cioè la posizione e la velocità del velivolo, necessarie in una determinata fase di volo (in rotta, in area terminale, in avvicinamento, ecc.). La navigazione aerea, infatti, è avvenuta tradizionalmente sfruttando i segnali provenienti da infrastrutture (radiofari) di terra che fornivano ai velivoli esclusivamente la direzione da seguire. Il volo risultava quindi vincolato dalla posizione delle infrastrutture, che determinavano le aerovie percorribili. Inoltre per le rotte transoceaniche e più in generale per le rotte in cui non era possibile installare, per la conformazione geografica del territorio, delle infrastrutture a terra, era necessario procedere con la navigazione stimata, impiegando le informazioni fornite dalla strumentazione di bordo (bussola magnetica, tubo di Pitot, sistemi inerziali), con una conseguente perdita di accuratezza nel tempo, a causa della deriva tipicamente associata a tali strumenti. Questi fattori, comportando una maggiore separazione tra i velivoli, costituivano un limite alla capacità complessiva del traffico aereo. L'introduzione di nuove radioassistenze per l'ausilio alla navigazione (VOR/DME, LORAN e infine i sistemi di navigazione satellitare), che permettono ai velivoli di determinare la loro posizione relativa rispetto a punti noti, ha permesso una maggiore flessibilità nell'individuazione delle rotte e una riduzione delle

distanze minime di separazione degli aerei. L'eterogeneità di tali sistemi ha portato alla definizione di requisiti (RNP) non più legati ad un particolare tipo di infrastruttura ma, come detto in precedenza, ad un livello di prestazione associato ad una fase di volo.

Risulta comunque evidente che, nelle fasi di sviluppo progettuale, un velivolo senza pilota debba volare in uno spazio aereo inibito al traffico di altri mezzi e tuttavia adeguato alle proprie caratteristiche dinamiche. Le dimensioni ed il peso del *Global Hawk*, ad esempio, sono paragonabili a quelle di un caccia e di conseguenza le sue prestazioni in termini di velocità e quota di volo richiedono un notevole spazio di manovra, disponibile generalmente solo in ambito militare. Tali necessità, unitamente agli elevati costi di progettazione e produzione (circa 70 milioni di dollari per esemplare) fanno di tale velivolo un modello da cui non è possibile derivare il progetto di un UAV destinato a scopi di ricerca per applicazioni civili. Ne consegue che l'approccio da adottare, sia per contenere i costi sia per operare in volo con vincoli meno stringenti, debba essere diverso.

In questa ottica, presso i laboratori della Seconda Facoltà di Ingegneria situati nell'hangar dell'Università di Bologna all'interno dell'aeroporto di Forlì, è stata avviata un'attività di ricerca finalizzata alla definizione dell'architettura ed alla realizzazione di un sistema avionico per UAV, cioè un sistema che realizzi le funzioni di NGC in modo autonomo, costituito da componenti commerciali a basso costo. Al fine di testare il sistema fin dalle prime fasi del progetto, è stata realizzata una piattaforma costituita da un aeromodello radiocomandato di produzione artigianale, di dimensione e peso contenuti. In questo modo, tutte le operazioni in volo rientrano nella normativa [16] già esistente che regola l'utilizzo di tali mezzi stilata su disposizione di ENAC (Ente Nazionale dell'Aviazione Civile) da parte dell'Aero Club d'Italia.

L'obiettivo di questa tesi di dottorato è quello di presentare le attività intraprese per caratterizzare le prestazioni di navigazione del sistema avionico ed è organizzata nel modo seguente:

Nel **Capitolo 1** vengono descritte le linee generali del progetto e le sue fasi di sviluppo, inoltre viene esposta l'architettura del sistema avionico ed in particolare la versione prototipale che è stata realizzata ed è attualmente impiegata con funzione di raccolta dati.

Nel **Capitolo 2** viene preso in considerazione il sistema di navigazione satellitare GPS. In particolare l'attenzione è focalizzata sugli aspetti necessari ad introdurre gli argomenti trattati nei capitoli successivi.

Nel **Capitolo 3** sono presentate e confrontate sperimentalmente due tecniche differenziali (LAAS, WAAS) per la compensazione degli errori associati alle misure di codice del GPS, al fine di ottenere una stima più precisa della posizione.

Nel **Capitolo 4** vengono introdotte le tecniche di posizionamento preciso che sfruttano le misure di fase della portante GPS, con l'obiettivo di caratterizzare, in post-processo, la precisione ottenuta in volo mediante le tecniche di codice precedentemente esposte. In particolare si considera il problema dell'applicazione di tecniche differenziali di fase nel caso in cui la posizione del ricevitore di riferimento non sia georeferenzata. Questa analisi risulta essenziale in quanto non è possibile installare in

modo permanente un ricevitore nel campo di volo. Viene proposta una trattazione generalizzata rispetto a quella reperibile in letteratura, che permette di considerare i casi in cui la differenza di altezza dei due ricevitori non è trascurabile.

Nel **Capitolo 5** vengono presentati i risultati ottenuti durante i test in volo. In particolare sono evidenziate le problematiche (ridotto numero di satelliti visibili, possibile perdita di aggancio dei segnali, ecc.) connesse all'elevata dinamica a cui è sottoposto il ricevitore che degradano l'accuratezza della stima di posizione. Inoltre sono esposte le soluzioni tecnologiche adottate per mitigarle.

Nel **Capitolo 6** Viene presentato il problema della risoluzione delle ambiguità intere associate alle misure di fase, evidenziando l'influenza del numero di satelliti visibili sulla rapidità di risoluzione. A questo proposito viene proposto un nuovo metodo basato sull'osservazione di un residuo generato con le misure di cinque satelliti.

Capitolo 1

Progetto UAV

1.1 Linee generali e fasi di sviluppo

Il progetto UAV intrapreso presso i laboratori di Forlì della Seconda Facoltà di Ingegneria si pone l'obiettivo di realizzare il sistema avionico di un velivolo con capacità di volo autonomo, utilizzando componenti commerciali a basso costo [12], [6]. Le funzioni che il sistema deve svolgere vengono indicate, secondo una classificazione ampiamente diffusa, come Navigazione, Guida e Controllo (NGC).

Alla Navigazione compete, in particolare, la determinazione della posizione e della velocità del velivolo ed anche la loro pianificazione, che consiste, ad esempio, nella scelta della quota di volo, dei waypoint da attraversare o della velocità di crociera. Mentre la definizione dei valori di riferimento di posizione e velocità non comporta particolari difficoltà, la stima dei loro valori effettivi costituisce l'aspetto principale e maggiormente critico della Navigazione. A tal proposito va rilevato che, nei requisiti stabiliti dalle RNP, le caratteristiche prese in considerazione per valutare le prestazioni di questa funzione riguardano appunto la stima di posizione e sono: l'accuratezza, la continuità e l'integrità. La definizione di accuratezza è intuitiva, essa rappresenta lo scostamento tra la posizione effettiva e quella stimata e ad essa sono associati un valore, che costituisce il massimo scostamento ammissibile per una determinata fase di volo, ed un livello di confidenza statistico. Normalmente si distinguono i valori di accuratezza in due gruppi, quelli relativi alle variabili che definiscono la posizione sul piano orizzontale e quelli nella dimensione verticale (spesso più critica). La continuità è la capacità di fornire le stime di posizione senza interruzione per tutta la durata della fase di volo ed è espressa da una probabilità di avaria. Infine l'integrità rappresenta la capacità di rilevare, entro un tempo massimo dal loro insorgere, la presenza di malfunzionamenti del sistema avionico che possono portare alla degradazione della stima. I parametri che caratterizzano l'integrità sono il tempo di rilevamento ed un livello di confidenza.

La funzione di Guida riceve dalla Navigazione i valori di posizione e velocità stimati e quelli di riferimento e deve determinare quali siano le traiettorie che permettono di annullare la loro differenza. Poiché sono direttamente connesse alle accelerazioni a cui è sottoposto il velivolo, le traiettorie devono risultare compatibili con le sue prestazioni dinamiche. È opportuno sottolineare inoltre che, per un aereo, la distribuzione delle forze, in particolare quelle aerodinamiche, e le accelerazioni risultanti dipendono dall'assetto di

volo. Di conseguenza è possibile associare alla traiettoria pianificata un assetto corrispondente. La funzione di Controllo si occupa, quindi, di stabilizzare l'assetto del velivolo a quello fornito dalla Guida, che funge da riferimento. A questo proposito occorre rilevare che la stima dell'assetto viene svolta dalla Navigazione utilizzando le misure inerziali, che sono impiegate anche nella stima della posizione e della velocità. Le tre funzioni costituiscono complessivamente un sistema di controllo in retroazione sia per il moto che per l'assetto del velivolo come si può vedere nello schema di Fig.1.1.

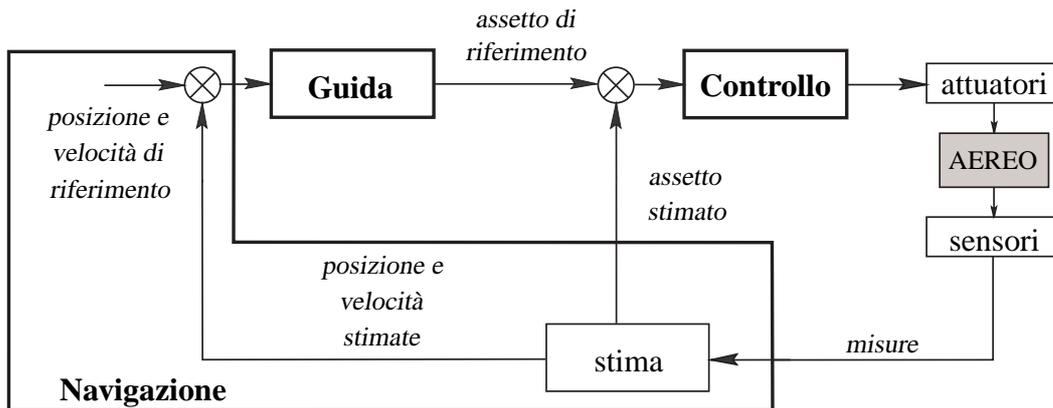


Fig. 1.1. Rappresentazione schematica delle funzioni di Navigazione, Guida e Controllo

Come detto nell'introduzione, si è deciso di impiegare, come piattaforma di sviluppo per le fasi di volo, un aeromodello radiocomandato. L'ampia diffusione che, anche nel nostro paese, ha raggiunto l'aeromodellismo amatoriale consente, infatti, di avere a disposizione prodotti a prezzi contenuti e tuttavia con un elevato grado di affidabilità, in particolare per quanto riguarda i componenti tecnologicamente più avanzati come il motore, il radiocomando e i servoattuatori delle superfici mobili, per i quali si può parlare di produzione su scala industriale. Anche per quanto riguarda la struttura del velivolo, realizzata in modo artigianale, è possibile impiegare modelli noti e ampiamente sperimentati, apportando eventualmente alcune modifiche. La progettazione strutturale ed aerodinamica non rientra, infatti, fra gli obiettivi del progetto.

La scelta di utilizzare un aeromodello radiocomandato si ripercuote sull'attività di sviluppo del sistema avionico, in quanto consente di attuare un approccio a due fasi. Nella prima il velivolo viene pilotato da terra ed il sistema avionico assolve alla funzione di raccolta in volo di dati destinati ad elaborazioni in post-processo. Nella seconda fase, invece, il sistema deve essere in grado di implementare in tempo reale le funzioni NGC, necessarie al volo autonomo del velivolo. È importante notare, tuttavia, che viene mantenuta la possibilità di pilotare da terra l'aeromodello, escludendo in qualsiasi momento i comandi forniti agli attuatori dal sistema. Ciò è necessario in quanto il decollo e l'atterraggio automatico del velivolo non sono previsti, almeno inizialmente.

L'analisi dei dati raccolti durante la prima fase consente, in primo luogo, di effettuare una valutazione delle prestazioni di ciascuno dei sottosistemi di misura nelle reali condizioni operative, permettendo quindi di apportare modifiche nel caso in cui i risultati non siano

giudicati soddisfacenti. Un secondo obiettivo associato alla prima fase, che è necessario per la progettazione del controllo di assetto, riguarda la determinazione dei parametri del modello matematico del velivolo tramite un processo di identificazione basato sulle misure fornite dai sensori e sui comandi forniti da terra agli attuatori delle superfici mobili e del motore [17]. Sebbene, infatti, sia possibile modellare il velivolo come un corpo rigido a sei gradi di libertà, la determinazione delle forze e dei momenti che agiscono su di esso risulta difficoltosa. In particolare risultano incogniti i momenti d'inerzia ed i coefficienti aerodinamici, la cui individuazione richiederebbe l'impiego di strumentazioni, come ad esempio una galleria del vento, caratterizzate da elevati costi operativi, che le rendono quindi incompatibili con le scelte progettuali citate precedentemente.

Le attività relative alla seconda fase di sviluppo del sistema avionico riguardano la progettazione ed implementazione delle funzioni NGC. Bisogna evidenziare, a questo proposito, che ciascuna delle tre funzioni costituisce un ambito di ricerca di notevole interesse, per questo motivo l'applicazione UAV che viene proposta può costituire un banco di prova per lo studio, ad esempio, di nuovi algoritmi di Navigazione oppure di nuove leggi di Guida e di Controllo.

1.2 Architettura del sistema avionico

I compiti che il sistema avionico deve svolgere nelle due fasi di sviluppo richiedono capacità computazionali diverse. In particolare le esigenze di calcolo relative alla seconda fase sono notevolmente superiori, in quanto l'implementazione delle funzioni NGC comporta l'esecuzione in tempo reale di algoritmi di complessità elevata. Per questo motivo è stata scelta una architettura avionica flessibile che consente di espandere le potenzialità del sistema a seconda delle necessità riscontrate nell'evoluzione del progetto. L'architettura è basata su un'unità centrale che gestisce le informazioni provenienti da sottosistemi di misura tra loro indipendenti.

Il progetto è attualmente nella prima fase di sviluppo, in particolare è stata realizzata una versione prototipale del sistema avionico nella quale sono presenti quasi tutti i sensori previsti e che consente l'acquisizione dei comandi forniti da terra ai servoattuatori tramite la radio ricevente di bordo.

L'unità centrale è costituita da un computer industriale (PC104) per il quale è stato sviluppato un sistema operativo embedded, basato su kernel *Linux*, che implementa i servizi strettamente necessari. In questo modo viene garantita una elevata efficienza nella esecuzione dei processi e nello stesso tempo viene occupata solo una piccola parte del disco fisso della PC104, a vantaggio dello spazio dedicato al salvataggio dei dati acquisiti. Le funzionalità principali che il sistema operativo supporta riguardano:

- L'accesso da un computer esterno tramite i servizi di rete telnet ed ftp;
- La comunicazione con i sottosistemi di misura tramite porte standard RS232 e USB.

Per la lettura ed il salvataggio dei dati è stata inoltre sviluppata una applicazione in linguaggio C che genera una serie di processi, ciascuno dei quali è deputato alla gestione di una singola porta di comunicazione, collegata ad uno specifico sottosistema. Ogni processo crea anche un file dedicato al salvataggio dei messaggi ed un file di testo in cui vengono

riportati eventuali errori di lettura dalla porta. A questo proposito occorre sottolineare che la possibilità di accedere al sistema operativo tramite i servizi di rete costituisce un importante ausilio durante l'esecuzione delle prove, quando il sistema avionico è installato a bordo dell'aeromodello. Infatti il servizio telnet consente di gestire in modo remoto l'avvio e la chiusura dell'applicazione e soprattutto permette di verificare, leggendo i file di errore, se l'acquisizione su ciascuna porta si svolge correttamente, evitando in caso contrario di iniziare il volo. Il servizio ftp consente invece di prelevare i dati salvati sul disco fisso della PC104.

Per quanto riguarda, invece, i sottosistemi che sono collegati all'unità centrale, essi sono costituiti da:

- Un ricevitore GPS;
- Un sistema per l'acquisizione dei radiocomandi ricevuti da terra.
- Un sistema di acquisizione dei dati aria;
- Una unità per le misure inerziali e del campo magnetico terrestre associata ad un sistema di acquisizione del numero di giri del motore dell'aeromodello;

In ciascun sottosistema l'effettuazione delle misure o l'acquisizione dei radiocomandi è gestita da un microcontrollore, ad esclusione del ricevitore GPS che compie le misure autonomamente. In particolare gli istanti in cui il ricevitore esegue il campionamento corrispondono o sono riferibili con notevole precisione ai secondi interi del sistema di riferimento temporale UTC (Universal Time Coordinated), come risulterà chiaro dalla trattazione del capitolo successivo. Il ricevitore inoltre fornisce un segnale hardware, costituito da un impulso rettangolare alla frequenza di 1 Hz denominato PPS (Pulse Per Second), che è allineato al secondo UTC con la precisione di poche decine di nanosecondi e può quindi essere impiegato per definire una base dei tempi comune per il campionamento di tutti i sottosistemi. A questo proposito un microcontrollore è adibito alla generazione di un'onda quadra a 10 KHz sincrona al fronte di salita del PPS ed agganciata ad esso in fase. Più specificamente il microcontrollore conta gli impulsi da esso stesso generati tra due fronti di salita del segnale di riferimento e compensa le eventuali differenze rispetto al numero nominale, che è pari a diecimila.

Il clock a 10 KHz viene inviato ai microcontrollori di ciascun sottosistema, che possono quindi associare alle misure campionate o ai radiocomandi acquisiti un'etichetta temporale corrispondente al numero progressivo di impulsi ricevuti fino all'istante di campionamento. Occorre rilevare che l'acquisizione dei radiocomandi risulta asincrona rispetto al fronte di salita del PPS, dal momento che la radio ricevente è un dispositivo esterno e temporalmente indipendente rispetto al sistema avionico. Al contrario, il campionamento delle misure del sistema dati aria e di quello inerziale viene effettuato dai rispettivi microcontrollori in modo da essere sincrono rispetto a quello del GPS, seppure con frequenza diversa. Successivamente, nelle elaborazioni in post-processo, le etichette consentono di mettere in relazione temporale le misure dei diversi sensori.

Oltre a gestire le operazioni di campionamento, il microcontrollore di ogni sottosistema funge anche da interfaccia con la PC104 tramite la porta di comunicazione ad esso dedicata. Lo schema architetturale del sistema avionico è rappresentato in figura 1.2, nella

quale sono presenti anche i dispositivi esterni ai quali è connesso il sistema: PC, motore dell'aeromodello e ricevente dei comandi.

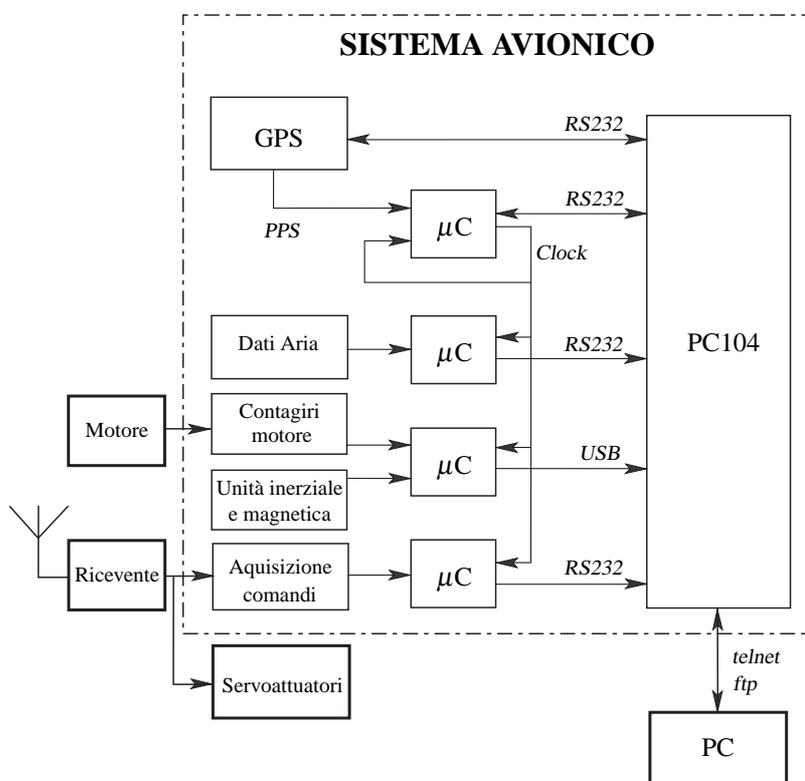


Fig. 1.2. Architettura del sistema avionico

È importante evidenziare che, sebbene la generazione del clock ed il campionamento siano gestiti esclusivamente in modo hardware tramite i microcontrollori, la procedura di inizializzazione di tali funzioni viene controllata dall'applicazione software in esecuzione sulla PC104. In particolare, all'avvio, l'applicazione rimane in attesa che il ricevitore GPS invii un messaggio di navigazione, contenente la posizione e la velocità stimate e soprattutto il tempo corrispondente. A questo proposito occorre dire che il ricevitore riesce a determinare con precisione il tempo, e a generare di conseguenza il PPS, solo contestualmente alla stima di posizione. L'informazione temporale del messaggio di navigazione viene quindi inviata, tramite seriale, dalla PC104 al microcontrollore di sincronizzazione ed aggiornata ogni volta che è disponibile un nuovo messaggio. Parallelamente ogni sottosistema esegue una sequenza di avvio autonoma, gestita dal corrispondente microcontrollore, al termine della quale invia al microcontrollore di sincronizzazione un segnale a basso livello, che non è rappresentato in figura 1.2. Quando riceve il segnale di abilitazione di tutti i sottosistemi, il microcontrollore di sincronizzazione rinvia l'informazione temporale aggiornata del messaggio di navigazione del GPS alla PC104, ed inizia a generare il clock a 10 KHz al successivo fronte di salita del PPS. Le etichette temporali associate alle misure dei sottosistemi rappresentano dunque un offset rispetto al tempo ricevuto e salvato dall'unità centrale.

La descrizione dell'architettura del sistema avionico ha messo in luce il duplice ruolo

svolto dal ricevitore GPS sia come sensore di posizione e velocità che come riferimento temporale di precisione. Per questo motivo è stato il primo sottosistema ad essere implementato e di conseguenza quello su cui si è concentrata inizialmente l'attività di ricerca che viene proposta nella tesi.

1.3 Piattaforma per i test in volo

Nella versione prototipale del sistema avionico che è stata realizzata i dispositivi sono integrati assieme ad un pacco batterie e ad una scheda di alimentazione e sono alloggiati all'interno di un rack, costituito da un telaio in lega leggera. Il telaio, che garantisce rigidità meccanica, è inoltre rivestito da pannelli metallici che fungono da schermo elettromagnetico. Questa soluzione è stata adottata dal momento che, durante i test di sviluppo, si sono riscontrate delle interferenze sulla radioricevente dei comandi generate dall'avionica, che avrebbero pregiudicato la sicurezza dei voli.

Il rack costituisce il carico pagante del velivolo, perciò le sue dimensioni e la sua massa hanno influenzato la scelta dell'aeromodello da utilizzare come piattaforma per i test in volo. In particolare è stato impiegato un aereo ad ala bassa opportunamente modificato nella parte superiore della fusoliera in modo da ricavare un'apertura richiudibile attraverso la quale introdurre con facilità il rack. Le ali sono smontabili per facilitare il trasporto e l'apertura alare complessiva risulta di 2.80 cm. Le superfici mobili sono costituite dai timoni di profondità e di direzione posizionati in coda e dagli alettoni sulle ali, sono inoltre presenti i flap che vengono azionati esclusivamente in fase di atterraggio per ridurre la velocità di avvicinamento. La massa a vuoto dell'aeromodello è di circa 14.5 Kg, ai quali si devono aggiungere i 3.5 Kg del sistema avionico.

Il velivolo ed il rack sono mostrati rispettivamente in figura 1.3(a) ed in figura 1.3(b), in cui si notano l'interruttore di accensione e la presa di rete nella parte superiore, il connettore per l'acquisizione del numero di giri del motore posto lateralmente e, nella parte posteriore, il connettore a 16 poli per l'acquisizione dei comandi della ricevente e quello coassiale dell'antenna del GPS.



(a)



(b)

Fig. 1.3. (a) Aeromodello utilizzato nei test in volo (b) Versione prototipale del sistema avionico

L'apparato propulsivo è costituito da un'elica traente azionata da un motore monocilindri-

co a due tempi installato nella parte anteriore della fusoliera. L'accensione della candela, che genera la combustione, è comandata da una centralina collegata ad un sensore magnetico calettato sul basamento del motore. La rotazione dell'albero, anche sul quale è presente un magnete, fa sì che in corrispondenza della posizione del sensore venga inviato un impulso alla centralina che attiva di conseguenza la candela. La centralina fornisce inoltre, tramite un connettore, il segnale che viene acquisito dal sistema avionico, il quale è costituito da un'onda quadra in cui la differenza temporale tra due fronti di salita corrisponde al periodo di rotazione dell'albero motore. Un aspetto particolarmente critico evidenziato durante i test ed associato all'utilizzo del motore a scoppio è costituito dalle vibrazioni, che degradano notevolmente le misure degli accelerometri. Occorre notare, tuttavia, che il disturbo introdotto dalle vibrazioni ha una frequenza pari a quella di rotazione del motore, che è tipicamente superiore alle frequenze caratterizzanti la dinamica del velivolo, e può quindi essere filtrato. A questo proposito, oltre ad intervenire meccanicamente con sistemi smorzatori per ridurre l'ampiezza delle vibrazioni, è stato necessario aumentare la frequenza di campionamento delle misure inerziali, rispetto a quella inizialmente prevista, per evitare problemi di aliasing ai regimi di rotazione più elevati.

Per quanto riguarda il sistema per l'invio dei comandi ai servoattuatori, la trasmissione dall'apparato di terra a quello di bordo avviene su una frequenza riservata all'aeromodellismo nella banda a 40 Mhz. Per garantire maggiore robustezza il sistema che è stato scelto impiega una modulazione di tipo digitale. La radio ricevente invia a ciascuno dei servoattuatori, su un canale indipendente, il riferimento di posizione angolare costituito da un segnale PWM (Pulse Width Modulation) a 50 Hz in cui la durata del duty-cycle è proporzionale al valore di tensione corrispondente all'angolo desiderato.

L'autonomia di volo dell'aeromodello è superiore ai quindici minuti ed è determinata dalla capacità del serbatoio della miscela che è circa 1 litro. Poichè la capacità delle batterie della ricevente e della centralina del motore consente un'utilizzo superiore ad un'ora, è possibile effettuare una serie di prove consecutive provvedendo a rifornire il serbatoio tra un volo ed il successivo.

Capitolo 2

Sistema di navigazione satellitare GPS

2.1 Descrizione generale

Il GPS (Global Positioning System) è un sistema di navigazione satellitare a copertura globale (GNSS Global Navigation Satellite System), consente cioè di determinare la posizione di un ricevitore in qualunque punto della Terra utilizzando il segnale proveniente da un numero minimo di satelliti. Il sistema, ritenuto di notevole importanza strategica, è stato commissionato negli anni '70 dal Dipartimento della Difesa Americano per scopi prevalentemente militari. Tuttavia nel corso dello sviluppo, durato circa venti anni prima dell'avvio della piena operatività, è stato deciso di estendere l'utilizzo del GPS anche in ambito civile e ad utenti non esclusivamente statunitensi. Le applicazioni che hanno beneficiato dell'impiego del sistema sono numerose e riguardano principalmente la navigazione ma anche la geodesia. È opportuno precisare però che la gestione del sistema è stata mantenuta, tramite l'Aeronautica Militare, dal Dipartimento della Difesa che può sospendere in qualunque momento e senza preavviso il servizio per gli utenti civili in caso di conflitto bellico. La rilevanza strategica assunta dalla navigazione satellitare ha comunque indotto altri paesi a sviluppare un sistema autonomo. In particolare, negli anni '80, l'Unione Sovietica ha sviluppato il sistema GLONASS che tuttavia è stato disattivato dopo una breve fase operativa, a causa anche degli eventi politici che hanno portato alla divisione dell'URSS. A metà degli anni '90, la Russia, che ha mantenuto le infrastrutture del sistema, ha deciso di rendere nuovamente operativo il GLONASS sostituendo i satelliti della costellazione non più funzionanti. Nello stesso periodo l'Unione Europea, tramite l'Agenzia Spaziale (ESA), ha avviato la realizzazione del sistema GALILEO, del quale sono stati recentemente posti in orbita i primi due satelliti per eseguire test di sviluppo. Sia per il GLONASS che per il GALILEO si prevede che la messa in servizio non avvenga prima del 2010, di conseguenza il GPS è attualmente l'unico sistema GNSS attivo. Il principio su cui si basa la navigazione satellitare consiste nella determinazione del tempo necessario ad un segnale elettromagnetico, generato da un satellite, per raggiungere un ricevitore. Il tempo di propagazione, infatti, è proporzionale alla distanza tra la posizione del satellite all'istante di invio del segnale e la posizione del ricevitore all'istante di ricezione. Determinando le distanze di un numero sufficiente di satelliti, se sono note le loro posizioni, è possibile stimare la posizione del ricevitore. Da quanto detto emerge la necessità di definire, oltre ad un sistema di riferimento per la posizione, anche un si-

stema di riferimento per la misura dei tempi. Per quanto riguarda la posizione, il sistema di riferimento adottato per il GPS è l'ECEF (Earth Centered Earth Fixed), la cui origine coincide con il centro della Terra ed i cui assi sono ad essa solidali. In particolare l'asse X è diretto dall'origine all'intersezione tra l'equatore ed il meridiano di Greenwich, l'asse Z coincide con l'asse di rotazione terrestre e l'asse Y è diretto verso Est, a completare una terna ortogonale destrorsa. Per ciò che concerne il tempo, invece, è stato scelto come origine un istante convenzionale espresso nel sistema di riferimento UTC, corrispondente in particolare alla mezzanotte tra il 5 ed il 6 gennaio del 1980. Occorre rilevare che il numero di secondi del sistema UTC viene periodicamente incrementato di un'unità per mantenere l'allineamento con le stagioni, per questo motivo è attualmente in anticipo di 14 secondi rispetto al tempo GPS.

Gli elementi costituenti l'architettura del GPS sono tre ed assolvono specifiche funzioni: Il *segmento spaziale* è costituito da una costellazione di ventiquattro satelliti, che sono suddivisi in sei piani separati uniformemente ed inclinati di cinquantacinque gradi rispetto all'equatore, l'altezza rispetto alla superficie terrestre è di circa 20000 Km. La distribuzione dei satelliti in ciascun piano è stata realizzata in modo tale da garantire la visibilità di almeno quattro di essi in ogni punto della Terra. Ciascun satellite provvede a diffondere due segnali nelle bande L1 ed L2. Le operazioni di generazione ed invio dei segnali sono scandite da un orologio atomico che è installato a bordo ed è sincronizzato al tempo GPS.

Il *segmento di controllo* è composto da cinque stazioni di monitoraggio posizionate in differenti punti della Terra e da una stazione principale. Il segmento di controllo si occupa di valutare lo stato di funzionamento dei satelliti e di determinarne la posizione, oltre che di correggerne l'assetto quando risulta necessario. In particolare le stazioni di monitoraggio misurano la distanza dai satelliti che hanno in vista e le inviano a quella principale che provvede a stimare i parametri orbitali di ciascuno di essi. Tali parametri, comunemente denominati effemeridi, costituiscono il messaggio di navigazione che viene successivamente inviato alle stazioni di monitoraggio e da queste ai satelliti tramite un data-link nella banda S, che è impiegato anche per il controllo di assetto. Va rilevato che i parametri orbitali rimangono validi per un lungo periodo di tempo, maggiore alle sei ore, per questo motivo vengono inviati ai satelliti piuttosto raramente.

Il *segmento utente* è rappresentato dai ricevitori, che acquisiscono uno solo od entrambi i segnali L1 ed L2. I ricevitori riescono a determinare sia le posizioni dei satelliti, tramite le effemeridi, sia il tempo di propagazione dei segnali sfruttando la particolare struttura di questi ultimi, che sarà descritta in maggiore dettaglio nella sezione successiva.

2.2 Segnale e Ricevitore

Il GPS adotta come tecnica di diffusione dei segnali la CDMA (Code Division Multiple Access), che consente la condivisione della stessa frequenza e dello stesso intervallo temporale da parte di molteplici dispositivi di trasmissione. La separazione è ottenuta codificando il segnale modulante di ciascun dispositivo con una specifica sequenza binaria prima della traslazione alla frequenza portante. Se si prendono in considerazione, per esempio, i segnali $s_i(t)$ e $s_j(t)$ generati da due generiche sequenze $S_i(n)$ e $S_j(n)$ che

assumono valori ± 1 :

$$s_i(t) = \sum_{n=0}^{N_c-1} S_i(n) \cdot p(t - n \cdot T_c) \quad s_j(t) = \sum_{n=0}^{N_c-1} S_j(n) \cdot p(t - n \cdot T_c)$$

in cui N_c è il numero di cifre che costituiscono le sequenze e $p(t)$ è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria e durata T_c , e definendo inoltre la funzione di correlazione come:

$$C_{i,j}(\Delta t) = \frac{1}{N_c \cdot T_c} \int_{t_0}^{t_0 + N_c \cdot T_c} s_i(t) \cdot s_j(t + \Delta t) dt \quad (2.2.1)$$

le condizioni necessarie affinché un insieme \mathbb{S} di sequenze possa essere impiegato per una trasmissione di tipo CDMA sono:

$$\text{per } i \neq j \quad C_{i,j}(\Delta t) \approx 0 \quad \forall i, j \in \mathbb{S}, \forall \Delta t \in [0, N_c \cdot T_c] \quad (2.2.2)$$

$$\text{per } i = j \quad C_{i,i}(\Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta t = 0 \\ 1 - \frac{|\Delta t|}{T_c} & \text{se } |\Delta t| \leq T_c \\ \approx 0 & \text{se } |\Delta t| > T_c \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{S}, \forall \Delta t \in [-T_c, T_c] \quad (2.2.3)$$

e corrispondono alla proprietà di ortogonalità tra elementi dello stesso insieme. In particolare la prima viene indicata come condizione di cross-correlazione, in quanto riguarda due sequenze diverse. La seconda invece viene indicata come condizione di auto-correlazione, ed è opportuno rilevare che essa risulta molto simile a quella di un segnale generato da una sequenza binaria casuale di infiniti elementi, nella quale tuttavia gli estremi di integrazione sono estesi a $-\infty$ e $+\infty$, e che vale inoltre esattamente zero nel caso in cui $|\Delta t| > T_c$. Per questo motivo le sequenze che presentano una funzione di auto-correlazione del tipo (2.2.3) vengono dette pseudocasuali (PRN Pseudorandom Noise).

Il GPS impiega due insiemi di codici ortogonali, il primo è costituito da sequenze di 1023 cifre. La frequenza del segnale da esse generato, che viene denominato C/A (Coarse Acquisition), è di 1.023 MHz, perciò il periodo di ripetizione è di 1 ms ($T_c=1/1023$ ms). Il secondo insieme è composto da sequenze con un notevole numero di cifre, tale da determinare un periodo di ripetizione di una settimana, ed il segnale generato, che viene denominato P (Precise), ha la frequenza di 10.23 MHz. Ad ogni satellite corrispondono un codice C/A ed un codice P univoci che vengono sommati in modulo due al messaggio di navigazione. I segnali risultanti sono impiegati per modulare in modalità QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) le portanti L1 a 1575.42 MHz ed L2 a 1227.60 MHz, più precisamente il segnale col codice C/A modula in fase la portante L1 mentre il segnale col codice P modula in quadratura la portante L1 ed in fase la L2.

Il messaggio di navigazione di ciascun satellite che ha una bit-rate di 50 Hz contiene, come detto in precedenza, le sue effemeridi ed anche un sottoinsieme dei parametri orbitali degli altri satelliti chiamato almanacco. La struttura del messaggio di navigazione è periodica, ogni trenta secondi viene ripetuto un preambolo seguito dall'informazione temporale corrispondente al secondo in cui inizia il periodo, espresso nel sistema di riferimento temporale del GPS come numero della settimana e secondo all'interno della settimana. Sia i codici che le portanti sono sempre in fase con l'inizio del preambolo in

quanto le frequenze scelte garantiscono rapporti interi di proporzionalità. Ad esempio in ogni bit del messaggio di navigazione sono compresi 20 periodi del codice C/A, a ciascuno dei quali corrispondono 1540 periodi della portante L1.

Il segnale che viene acquisito da un ricevitore GPS è quindi costituito dalla combinazione dei segnali diffusi dai satelliti che sono in vista della sua antenna. Dopo essere stato convertito ad una frequenza intermedia ed essere stato campionato, il segnale viene processato in parallelo su più canali. Ciascun canale si occupa di agganciare i codici (C/A e P) e le portanti di uno specifico satellite, sfruttando le proprietà di cross-correlazione e di auto-correlazione espresse dalla (2.2.2) e dalla (2.2.3). A questo proposito ogni canale implementa due loop di aggancio annidati per ciascuna coppia codice/portante, come è rappresentato in figura 2.1.

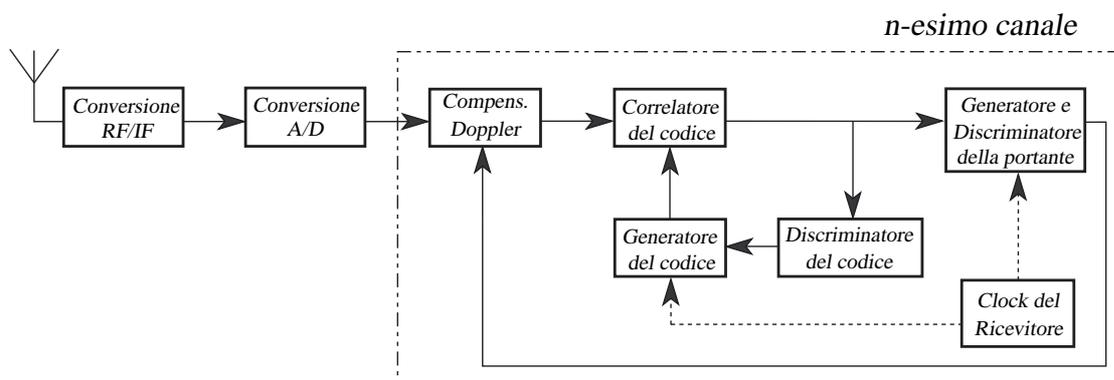


Fig. 2.1. Schema funzionale dei loop di aggancio del codice e della portante

Il loop più interno riguarda l'aggancio del codice, che viene ottenuto correlando il segnale ricevuto con una replica, generata internamente dal ricevitore, del particolare codice da identificare. Il risultato dell'operazione di correlazione è valutato dal discriminatore che determina lo scostamento temporale Δt tra i due segnali. La replica del codice viene di conseguenza anticipata o ritardata fino ad ottenere il picco di correlazione. A questo proposito è opportuno notare che più piccola è la durata delle cifre del codice, migliore è la risoluzione temporale ottenuta dal discriminatore. Per questo motivo il codice P, che ha una frequenza dieci volte superiore al C/A, è caratterizzato da una maggiore precisione di aggancio, da ciò derivano i nomi associati ai due codici. A valle del correlatore viene effettuato l'aggancio della portante, confrontando anche in questo caso il segnale ricevuto, nel quale però non è più presente il codice, con uno di riferimento generato dal ricevitore. Occorre notare che il segnale ricevuto presenta una frequenza diversa rispetto a quella nominale a causa dell'effetto Doppler generato dal moto relativo tra ricevitore e satellite. Pertanto il discriminatore della portante individua la differenza di frequenza con il segnale di riferimento e provvede a compensarla. Il discriminatore implementa inoltre un PLL (Phase-Locked Loop) per mantenere l'aggancio di fase della portante, che risulta necessario per demodulare il messaggio di navigazione.

L'aspetto che contraddistingue il sistema GPS nei confronti di un generico sistema di telecomunicazione CDMA riguarda la possibilità di porre in relazione gli scostamenti di tempo, di frequenza e di fase individuati e corretti dal ricevitore con le distanze e le ve-

locità relative rispetto ai satelliti in vista. In particolare lo scostamento temporale tra il codice ricevuto e la replica generata equivale, a meno del numero intero di ripetizioni del codice (di cui si tiene conto mediante software), al tempo di propagazione del segnale dal satellite corrispondente al ricevitore; moltiplicando quindi lo scostamento temporale per la velocità della luce si ottiene la distanza. La frequenza Doppler risulta invece proporzionale alla proiezione del vettore di velocità relativa tra ricevitore e satellite lungo la loro linea di vista. Per quanto riguarda la differenza di fase tra la portante ricevuta ed il riferimento generato dal ricevitore, anch'essa può essere trasformata in una distanza moltiplicandola per la lunghezza d'onda corrispondente. Tuttavia tale distanza, a differenza di quella basata sul codice, ha un valore iniziale ambiguo che consiste in un numero intero di cicli della portante, il PLL infatti riesce a tenere traccia solo delle variazioni di fase dal momento in cui viene effettuato l'aggancio. È necessario evidenziare che il tempo di riferimento con cui il ricevitore genera i segnali di codice e portante non corrisponde al tempo GPS, essendo basato tipicamente sull'oscillazione di un quarzo che ha un'origine arbitraria, legata all'istante di accensione del ricevitore, e soprattutto ha una stabilità molto inferiore rispetto a quella associata agli orologi atomici a bordo dei satelliti. Per questo motivo gli scostamenti temporali e di fase ottenuti dal ricevitore presentano un bias variabile nel tempo, ma tuttavia comune a tutti i canali. Di conseguenza le grandezze ottenute moltiplicando gli scostamenti temporali per la velocità della luce vengono dette pseudodistanze, in quanto non hanno un significato esclusivamente geometrico.

La complessità architetturale di un ricevitore GPS e di conseguenza il suo costo dipendono dal numero di canali e soprattutto dal frequenze impiegate. In questo senso una classificazione basata sull'impiego a cui sono destinati, consente di suddividere i ricevitori in due classi: quella dei ricevitori utilizzati per applicazioni tecnico-scientifiche, in cui sono richieste le massime prestazioni, e quella dei ricevitori per applicazioni commerciali di ampia diffusione, nelle quali il costo deve essere contenuto. I dispositivi appartenenti alla prima classe sono in grado di fornire tutti i tipi di misure, cioè la pseudodistanza del codice C/A, le pseudodistanze del codice P relative sia alla L1 che alla L2, ed infine la fase e la frequenza Doppler di entrambe le portanti. Al contrario i ricevitori della seconda classe operano esclusivamente sulla portante L1 e sul codice C/A, mentre il codice P non viene impiegato sebbene, come detto in precedenza, garantisca una maggiore precisione. Ciò è dovuto in primo luogo al fatto che la notevole lunghezza del suo periodo di ripetizione non consente una rapida individuazione del picco di correlazione e diventa quindi necessario utilizzare il codice C/A per decodificare il messaggio di navigazione ed ottenere il tempo della settimana con cui inizializzare la generazione della replica del codice P da parte del ricevitore. Inoltre il codice P viene generalmente criptato per motivi militari con un ulteriore codice a disposizione solamente di utenti autorizzati. Questa modalità di funzionamento viene adottata per evitare di inseguire segnali conformi a quelli trasmessi dai satelliti ma generati intenzionalmente per produrre un errore sulla stima della distanza. Per gli utenti generici sono state sviluppate delle tecniche che consentono di determinare le pseudodistanze anche in caso di criptazione del codice P, tuttavia tali tecniche, per la descrizione delle quali si rimanda alla letteratura specifica [5], comportano l'elaborazione congiunta dei segnali su entrambe le frequenze.

Per quanto riguarda il numero di canali implementati, i ricevitori della prima classe ne hanno tipicamente 16, che risultano più che sufficienti in quanto il numero massimo di

satelliti GPS in vista è sempre inferiore a 12. I ricevitori della seconda classe invece hanno generalmente un numero di canali inferiore (10-12), tuttavia alcuni modelli, specialmente quelli sviluppati più recentemente, possono arrivare fino a 16. I canali liberi possono essere impiegati per acquisire, come sarà spiegato nel capitolo 3, dei segnali di correzione forniti da sistemi satellitari ausiliari (WAAS).

La scelta del ricevitore da impiegare nel sistema avionico è stata orientata, coerentemente con le linee generali di sviluppo del progetto, al contenimento dei costi e si è optato quindi per dispositivi che appartengono alla seconda classe di ricevitori presentata. L'attività di ricerca ha riguardato di conseguenza l'applicazione e lo sviluppo di tecniche che presuppongono l'utilizzo di una sola frequenza. Per questo motivo nel seguito, se non diversamente specificato, quando si parlerà di pseudodistanza si intenderà quella relativa al codice C/A, mentre quando si parlerà di misure di fase e frequenza Doppler si intenderanno quelle relative alla portante L1.

2.3 Modello delle misure

I segnali trasmessi dai satelliti nel percorso verso ciascun ricevitore subiscono gli effetti di diverse fonti di errore. I differenti contributi di errore possono essere resi espliciti nel modello delle misure eseguite dal ricevitore.

2.3.1 Pseudodistanza

Il modello che esprime la pseudodistanza relativa al j -esimo satellite può essere scritto come:

$$\tilde{\rho}_{jr} = \underbrace{\sqrt{(X_j - x_r)^2 + (Y_j - y_r)^2 + (Z_j - z_r)^2}}_{r_{jr}} + c \cdot b_r + c \cdot b_j + I_j + T_j + M_{jr} + v_{jr} \quad (2.3.1)$$

in cui:

- $\tilde{\rho}_{jr}$ è la misura di pseudodistanza fornita dal ricevitore;
- X_j, Y_j e Z_j sono le componenti, nel sistema di riferimento ECEF, del vettore posizione del satellite j -esimo;
- x_r, y_r e z_r sono le componenti del vettore posizione del ricevitore, espresse nel sistema di riferimento ECEF;
- r_{jr} è la distanza geometrica tra satellite e ricevitore;
- c è la velocità di propagazione della luce nel vuoto;
- b_r è il bias del ricevitore, cioè la differenza dell'origine temporale di quest'ultimo rispetto al sistema di riferimento temporale del GPS;

- b_j è la differenza del tempo misurato dall'orologio atomico a bordo del satellite j -esimo rispetto al tempo di riferimento del GPS;
- I_j è l'errore causato dal passaggio del segnale attraverso la ionosfera;
- T_j è l'errore causato dal passaggio del segnale attraverso la troposfera;
- M_{jr} è l'errore, chiamato multipath, dovuto alla sovrapposizione, sul segnale proveniente dal satellite lungo la linea di vista, di segnali riflessi da superfici poste in prossimità del ricevitore;
- v_{jr} è l'errore di misura del ricevitore;

L'errore temporale b_j è dovuto alla deriva dell'orologio atomico del satellite che, sebbene sia molto più lenta rispetto a quella associata al quarzo dei ricevitori, tuttavia ha portato nel corso degli anni ad un disallineamento non trascurabile rispetto al tempo di sistema, che per alcuni satelliti ha raggiunto il valore di qualche decimillesimo di secondo equivalente in distanza ad alcune decine di chilometri. L'errore infatti non viene direttamente compensato ma è stimato dal segmento di controllo che effettua una predizione sulla sua evoluzione. In particolare viene utilizzata una legge polinomiale del secondo ordine funzione del tempo, i cui coefficienti vengono trasmessi insieme alle effemeridi nel messaggio di navigazione, come descritto nel documento [1]. Ciascun utente calcola una stima dell'errore nell'istante di trasmissione del segnale da parte del satellite e la sottrae alla misura di pseudodistanza. Nel seguito quindi con il termine $\tilde{\rho}_{jr}$ si intenderà la misura di pseudodistanza compensata con la stima dell'errore di clock del satellite mentre con il termine $c \cdot b_j$ si intenderà esclusivamente l'errore residuo, che risulta di qualche metro.

L'errore ionosferico I_j è causato dalla variazione del modulo e della direzione della velocità di propagazione del segnale, per effetto del passaggio attraverso la ionosfera, che è la parte più esterna dell'atmosfera, in cui l'aria risulta ionizzata dalle radiazioni solari. L'effetto della variazione di direzione risulta tuttavia molto piccolo e può essere trascurato. Il modulo della velocità di propagazione di un segnale elettromagnetico dipende dal mezzo fisico che viene attraversato ed è generalmente espressa tramite l'indice di rifrazione n , che è dato dal rapporto tra la velocità di propagazione nel vuoto, indicata in precedenza con c , e quella nel particolare mezzo considerato. In particolare la ionosfera si comporta come un mezzo dispersivo, cioè il suo indice di rifrazione è funzione della frequenza del segnale che la attraversa. Una conseguenza che deriva da questa proprietà dei mezzi dispersivi è che, per un segnale modulato, la velocità di propagazione della fase della portante risulta diversa da quella del segnale modulante. A questo proposito, indicando con n_m l'indice di rifrazione relativo al segnale modulante e con n_p quello associato alla portante di frequenza generica f , si può dimostrare [31] che vale la relazione:

$$n_m = n_p + f \cdot \frac{dn_p}{df} \quad (2.3.2)$$

Per quanto riguarda le frequenze della banda L a cui appartengono le portanti del segnale GPS, un'espressione che approssima molto accuratamente l'indice di rifrazione della

ionosfera è data da [43]:

$$n_p \approx 1 - \frac{N \cdot e^2}{8\pi^2 \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot f^2} = 1 - \frac{40.31}{f^2} \cdot N \quad (2.3.3)$$

in cui:

- N è il numero di elettroni nella ionosfera per unità di volume ed è espresso in m^{-3} ;
- e rappresenta la carica dell'elettrone corrispondente a $-1.602 \cdot 10^{-19}$ C;
- m_e è la massa dell'elettrone a riposo che vale $9.107 \cdot 10^{-31}$ Kg;
- ϵ_0 è la permittività nel vuoto pari a $8.854 \cdot 10^{-12}$ F \cdot m⁻¹.

Sostituendo dunque la relazione appena introdotta nella (2.3.2), l'indice di rifrazione del segnale modulante risulta:

$$n_m = \left(1 - \frac{40.31}{f^2} \cdot N\right) + f \cdot \left(\frac{2 \cdot 40.31 \cdot f}{f^4} \cdot N\right) = 1 + \frac{40.31}{f^2} \cdot N \quad (2.3.4)$$

L'errore che viene commesso nella stima della pseudodistanza è ottenuto integrando, lungo il percorso \mathcal{L} seguito dal segnale nella ionosfera, la differenza tra l'indice di rifrazione dato dalla (2.3.4) e quello corrispondente alla propagazione nel vuoto, che è pari ad 1:

$$I_j = \int_{\mathcal{L}} (n_m - 1) dl = \frac{40.31}{f^2} \cdot \int_{\mathcal{L}} N dl = \frac{40.31}{f^2} \cdot TEC \quad (2.3.5)$$

dove la quantità denominata TEC (Total Electron Content) corrisponde al numero di elettroni presenti in un cilindro di sezione unitaria e che si estende per l'intero percorso \mathcal{L} . Il numero di elettroni varia, sia nel tempo che nello spazio, in funzione dell'intensità delle radiazioni solari, mentre la lunghezza del percorso compiuto dal segnale dipende dall'angolo di elevazione del satellite rispetto al piano dell'orizzonte locale del ricevitore. Il percorso più breve, in cui l'errore risulta minore, corrisponde al caso in cui il satellite si trova sulla verticale del ricevitore ed ha quindi elevazione massima.

E' opportuno rilevare che, avendo a disposizione le misure di pseudodistanza su entrambe le frequenze, è possibile effettuare una combinazione lineare per ottenere una espressione di pseudodistanza priva dell'errore ionosferico. Gli utenti che impiegano solo la frequenza L1, invece, possono utilizzare un modello [43], i cui parametri sono generati dal segmento di controllo ed inseriti nel messaggio di navigazione. Il modello tuttavia compensa solo parzialmente l'errore che rimane comunque dell'ordine di qualche metro.

Anche la troposfera, che è lo strato dell'atmosfera a contatto della superficie terrestre, altera il modulo della velocità di propagazione del segnale ed in modo marginale la sua direzione. Tuttavia essa, al contrario della ionosfera, si comporta come un mezzo non dispersivo, quindi il suo effetto è indipendente dalla frequenza del segnale e si ripercuote nello stesso modo sulle misure di pseudodistanza e di fase. In particolare, essendo il suo indice di rifrazione maggiore di uno, la troposfera introduce un ritardo di propagazione.

L'indice di rifrazione e di conseguenza l'errore T_j dipendono dai valori di pressione, temperatura ed umidità dell'aria. Generalmente si considera l'errore troposferico come composto da due contributi, quello dovuto al vapore acqueo (wet component) che, a causa delle variazioni locali, è difficilmente modellabile, e quello determinato dagli altri parametri atmosferici (dry component) che, al contrario, può essere modellato con buona precisione, utilizzando dei valori medi stagionali, e corrisponde a circa il 90% dell'errore complessivo. Anche in questo caso minore è l'elevazione del satellite, rispetto al piano dell'orizzonte locale del ricevitore, maggiore è la lunghezza del percorso compiuto dal segnale nella troposfera e quindi l'errore associato, che è dell'ordine di alcuni metri.

Per quanto riguarda il multipath la ricezione di segnali riflessi relativi al medesimo satellite induce il correlatore ad inseguire molteplici sequenze relative allo stesso codice che differiscono temporalmente a causa del diverso percorso seguito. Come conseguenza il risultato dell'operazione di correlazione presenta un picco che non corrisponde al tempo di propagazione del segnale lungo la linea di vista tra ricevitore e satellite. Inoltre l'andamento della funzione di auto-correlazione non risulta più simmetrico rispetto al picco stesso, come nel caso della (2.2.3). L'entità dell'errore M_{jr} sulla pseudodistanza può variare fino a raggiungere qualche metro e dipende dal posizionamento dell'antenna rispetto ad oggetti circostanti. Inoltre la caratterizzazione statistica dell'errore risulta diversa a seconda che il ricevitore sia fermo od in movimento. Nel primo caso infatti il multipath presenta generalmente un'elevata correlazione temporale, mentre nel secondo, a causa del moto relativo tra l'antenna del ricevitore e le superfici riflettenti, il tempo di correlazione risulta molto piccolo e quindi l'errore può essere assimilato ad un rumore bianco.

Il termine v_{jr} corrisponde all'errore compiuto dal loop di aggancio del codice nel misurare il tempo di propagazione ed include gli errori di quantizzazione ed il rumore termico dei componenti. Esso dipende quindi dalla qualità tecnologica degli elementi che costituiscono il ricevitore. L'errore di misura viene tipicamente modellato come un rumore bianco, la cui deviazione standard risulta tipicamente inferiore al metro.

2.3.2 Fase della portante

Per la misura di fase della portante il modello è simile a quello espresso dalla (2.3.1) e risulta:

$$(\tilde{\phi}_{jr} + N_{jr}) \cdot \lambda = r_{jr} + c \cdot b_r + c \cdot b_j - I_j + T_j + m_{jr} + \mu_{jr} \quad (2.3.6)$$

dove:

- $\tilde{\phi}_{jr}$ è la misura di fase fornita dal ricevitore;
- N_{jr} è l'ambiguità iniziale intera;
- λ è la lunghezza d'onda della portante;
- m_{jr} è l'errore dovuto al multipath;
- μ_{jr} è l'errore di misura del ricevitore;

e gli altri termini hanno lo stesso significato introdotto in precedenza. In particolare il contributo dell'errore ionosferico risulta uguale in modulo ma opposto in segno rispetto a quello relativo alla pseudodistanza, ed è ottenuto sostituendo nell'espressione (2.3.5), al posto di n_m , l'indice di rifrazione della portante dato dalla (2.3.3). La fase della portante subisce quindi un anticipo, evidenziato anche dal fatto che l'indice di rifrazione m_p è sempre inferiore ad uno, perciò la velocità di propagazione della fase nella ionosfera risulta superiore a quella nel vuoto. Questo aspetto non risulta tuttavia in contrasto con la teoria della relatività in quanto il contenuto informativo del segnale, che è dato dalla modulazione, si propaga ad una velocità inferiore a c [43].

Per ciò che riguarda il multipath si possono applicare al loop di aggancio della fase considerazioni simili a quelle svolte per il correlatore del codice. Nel caso della portante tuttavia l'errore commesso corrisponde ad una frazione della lunghezza d'onda e quindi è al massimo dell'ordine di pochi centimetri. Anche il rumore di misura è notevolmente inferiore rispetto a quello del codice e risulta tipicamente di qualche millimetro. Questo aspetto risulta fondamentale nell'applicazione di tecniche di posizionamento preciso, come sarà mostrato nei capitoli 4 e 6.

2.3.3 Frequenza Doppler

L'espressione che mette in relazione la velocità relativa tra ricevitore e satellite e la frequenza Doppler può essere ottenuta notando che quest'ultima corrisponde all'opposto della derivata rispetto al tempo della fase della portante. L'avvicinamento tra ricevitore e satellite infatti corrisponde ad una diminuzione della loro distanza e di conseguenza della fase, mentre la frequenza Doppler risulta positiva, al contrario l'aumento di fase è associato ad una frequenza Doppler negativa. Trascurando inizialmente gli errori si può scrivere la relazione esatta della fase, indicata in questo caso con ϕ_{jr} , come:

$$(\phi_{jr} + N_{jr}) \cdot \lambda = r_{jr} + c \cdot b_r$$

derivando rispetto al tempo risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi_{jr} + N_{jr})}{dt} \cdot \lambda &= \frac{dr_{jr}}{dt} + c \cdot \frac{db_r}{dt} \\ \left(\frac{d\phi_{jr}}{dt} + \frac{dN_{jr}}{dt} \right) \cdot \lambda &= \frac{\partial r_{jr}}{\partial (X_j - x_r)} \cdot \frac{\partial (X_j - x_r)}{\partial t} + \frac{\partial r_{jr}}{\partial (Y_j - y_r)} \cdot \frac{\partial (Y_j - y_r)}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial r_{jr}}{\partial (Z_j - z_r)} \cdot \frac{\partial (Z_j - z_r)}{\partial t} + c \cdot \frac{db_r}{dt}. \end{aligned}$$

Poichè l'ambiguità intera è costante, la sua derivata è nulla. Inoltre, indicando con U_j, V_j e W_j le componenti del vettore velocità del satellite, \vec{v}_j , nel sistema di riferimento ECEF e con u_r, v_r e w_r quelle del vettore velocità del ricevitore \vec{v}_r , si ottiene:

$$\frac{d\phi_{jr}}{dt} \cdot \lambda = \frac{(X_j - x_r)}{r_{jr}} \cdot (U_j - u_r) + \frac{(Y_j - y_r)}{r_{jr}} \cdot (V_j - v_r) + \frac{(Z_j - z_r)}{r_{jr}} \cdot (W_j - w_r) + c \cdot \frac{db_r}{dt}$$

definendo poi con $\vec{1}_{jr}$ il versore che identifica la linea di vista, che è diretto convenzionalmente dal satellite j -esimo verso il ricevitore:

$$\vec{1}_{jr} = \begin{bmatrix} \frac{(x_r - X_j)}{r_{jr}} \\ \frac{(y_r - Y_j)}{r_{jr}} \\ \frac{(z_r - Z_j)}{r_{jr}} \end{bmatrix}$$

risulta infine:

$$-D_{jr} \cdot \lambda = \underbrace{\vec{1}_{jr}^T \cdot (\vec{v}_r - \vec{v}_j)}_{v_{rj}} + c \cdot d_r \quad (2.3.7)$$

in cui con D_{jr} è indicata la frequenza Doppler, con d_r (drift) la derivata del bias del ricevitore e con v_{rj} la proiezione del vettore di velocità relativa tra ricevitore e satellite lungo la linea di vista.

Per quanto riguarda gli errori che alterano la propagazione del segnale è opportuno evidenziare che il bias del clock del satellite, l'errore ionosferico ed il ritardo troposferico variano molto lentamente, quindi il loro effetto sulla misura di frequenza è molto piccolo ed espresso in termini di velocità risulta al massimo dell'ordine di pochi centimetri al secondo. Il multipath invece ha una variabilità più marcata, che dipende dalla distanza delle superfici riflettenti e dalla condizione di moto del ricevitore, tuttavia anche il suo contributo di errore è contenuto entro qualche centimetro al secondo. Per questo motivo solitamente si considera un unico termine per esprimere l'errore della frequenza Doppler, che include pure il rumore di misura del ricevitore. Indicando quindi con \tilde{D}_{jr} la misura effettuata dal ricevitore e con ε_{jr} l'errore complessivo, il modello della misura di frequenza Doppler diventa:

$$-\tilde{D}_{jr} \cdot \lambda = \vec{1}_{jr}^T \cdot (\vec{v}_r - \vec{v}_j) + c \cdot d_r + \varepsilon_{jr} \quad (2.3.8)$$

2.4 Algoritmi per la stima di posizione e velocità

In questa sezione viene presentato il classico algoritmo che consente di stimare la posizione del ricevitore utilizzando un sistema di equazioni del tipo (2.3.1). Poichè oltre alle tre coordinate di posizione risulta incognito anche il bias del ricevitore, sono necessarie quattro equazioni per risolvere il problema. La stima di posizione del ricevitore consente di determinare le linee di vista con i satelliti ed ottenere di conseguenza le componenti del vettore velocità ed il drift del ricevitore impostando un sistema di equazioni del tipo (2.3.8). Chiaramente le componenti della posizione e della velocità del satellite, presenti nei modelli della pseudodistanza e della frequenza Doppler, devono essere note. Per questo motivo nel messaggio di navigazione inviato da ciascun satellite sono presenti, come detto in precedenza, le effemeridi, cioè i parametri orbitali della traiettoria percorsa. Ogni ricevitore provvede quindi a stimare la posizione e la velocità del satellite, relative all'istante di invio del segnale, utilizzando gli algoritmi presenti rispettivamente in [1] e [35]. Sebbene l'orbita di un satellite, specialmente ad un'altezza elevata come è quella dei satelliti GPS, sia predicibile in modo notevolmente accurato utilizzando le equazioni

gravitazionali di Keplero, tuttavia la stima di posizione ottenuta con le effemeridi è affetta da un errore, che tipicamente risulta inferiore a dieci metri, mentre la stima di velocità ha la precisione di alcuni centimetri al secondo. Tali errori si ripercuotono sulla stima della posizione e della velocità del ricevitore.

2.4.1 Stima di posizione

Le relazioni che esprimono le pseudodistanze sono lineari rispetto al bias del ricevitore mentre sono non lineari rispetto alle sue coordinate di posizione. In letteratura sono descritti metodi per ottenere una soluzione in forma chiusa del problema, tuttavia viene comunemente adottato un algoritmo iterativo basato sulla linearizzazione delle pseudodistanze, che è caratterizzato da una rapida convergenza.

A questo proposito, raggruppando le quattro incognite nel vettore \vec{x}_r ed indicando con ρ_{jr} la pseudodistanza esatta relativa al satellite j -esimo, il corrispondente sviluppo in serie di Taylor calcolato nell'intorno del vettore di riferimento \vec{x}_{r0} e troncato al primo ordine risulta:

$$\rho_{jr}(\vec{x}_r) \approx \rho_{jr}(\vec{x}_{r0}) + \vec{\nabla}\rho_{jr}|_{\vec{x}_{r0}} \cdot (\vec{x}_r - \vec{x}_{r0}) \quad (2.4.1)$$

in cui:

$$\rho_{jr}(\vec{x}_r) = \sqrt{(X_j - x_r)^2 + (Y_j - y_r)^2 + (Z_j - z_r)^2} + c \cdot b_r$$

$$\rho_{jr}(\vec{x}_{r0}) = \underbrace{\sqrt{(X_j - x_{r0})^2 + (Y_j - y_{r0})^2 + (Z_j - z_{r0})^2}}_{r_{jr0}} + c \cdot b_{r0}$$

$$\vec{x}_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \\ c \cdot b_r \end{bmatrix} \quad \vec{x}_{r0} = \begin{bmatrix} x_{r0} \\ y_{r0} \\ z_{r0} \\ c \cdot b_{r0} \end{bmatrix}$$

ed il gradiente di ρ_{jr} rispetto ad \vec{x}_r , calcolato in \vec{x}_{r0} , vale:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\rho_{jr}|_{\vec{x}_{r0}} &= \left[\frac{\partial\rho_{jr}}{\partial x_r} \quad \frac{\partial\rho_{jr}}{\partial y_r} \quad \frac{\partial\rho_{jr}}{\partial z_r} \quad \frac{\partial\rho_{jr}}{\partial(c \cdot b_r)} \right] \Bigg|_{\vec{x}_{r0}} \\ &= \left[\frac{(x_r - X_j)}{r_{jr}} \quad \frac{(y_r - Y_j)}{r_{jr}} \quad \frac{(z_r - Z_j)}{r_{jr}} \quad 1 \right] \Bigg|_{\vec{x}_{r0}} \\ &= \left[\frac{(x_{r0} - X_j)}{r_{jr0}} \quad \frac{(y_{r0} - Y_j)}{r_{jr0}} \quad \frac{(z_{r0} - Z_j)}{r_{jr0}} \quad 1 \right] \end{aligned}$$

È opportuno notare che i primi tre elementi del gradiente della pseudodistanza corrispondono alle componenti della linea di vista \vec{l}_{jr} introdotta in precedenza. Per quanto riguarda

i valori di riferimento x_{r0}, y_{r0}, z_{r0} e $c \cdot b_{r0}$, in assenza di informazioni a priori sulla posizione e sul bias del ricevitore, possono essere posti arbitrariamente uguali a zero.

Disponendo delle misure di pseudodistanza di quattro satelliti ed utilizzando la relazione (2.4.1), è possibile introdurre il seguente sistema di equazioni lineari che consente di ottenere una stima $\hat{\vec{x}}_r$ del vettore delle incognite:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{1r} - \rho_{1r}(\vec{x}_{r0}) \\ \tilde{\rho}_{2r} - \rho_{2r}(\vec{x}_{r0}) \\ \tilde{\rho}_{3r} - \rho_{3r}(\vec{x}_{r0}) \\ \tilde{\rho}_{4r} - \rho_{4r}(\vec{x}_{r0}) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\vec{x}_{r0}) \cdot (\hat{\vec{x}}_r - \vec{x}_{r0}) \quad (2.4.2)$$

avendo posto:

$$\mathbf{H}(\vec{x}_{r0}) = \begin{bmatrix} \frac{(x_{r0}-X_{1r})}{r_{1r0}} & \frac{(y_{r0}-Y_{1r})}{r_{1r0}} & \frac{(z_{r0}-Z_{1r})}{r_{1r0}} & 1 \\ \frac{(x_{r0}-X_{2r})}{r_{2r0}} & \frac{(y_{r0}-Y_{2r})}{r_{2r0}} & \frac{(z_{r0}-Z_{2r})}{r_{2r0}} & 1 \\ \frac{(x_{r0}-X_{3r})}{r_{3r0}} & \frac{(y_{r0}-Y_{3r})}{r_{3r0}} & \frac{(z_{r0}-Z_{3r})}{r_{3r0}} & 1 \\ \frac{(x_{r0}-X_{4r})}{r_{4r0}} & \frac{(y_{r0}-Y_{4r})}{r_{4r0}} & \frac{(z_{r0}-Z_{4r})}{r_{4r0}} & 1 \end{bmatrix}$$

La soluzione ricavata invertendo la (2.4.2) può essere presa come riferimento per calcolare nuovamente i termini $\rho_{jr}(\vec{x}_{r0})$ e la matrice $\mathbf{H}(\vec{x}_{r0})$. Il processo viene ripetuto finchè la norma della differenza tra due stime consecutive non risulta inferiore ad un valore prefissato. Tipicamente, partendo da un vettore di riferimento costituito da elementi tutti nulli, sono sufficienti meno di dieci iterazioni per ottenere la convergenza della soluzione con una precisione inferiore al millimetro. La stima ottenuta risulta comunque affetta dagli errori che sono presenti nelle misure di pseudodistanza e nelle posizioni dei satelliti, i quali vengono proiettati sulle quattro componenti di $\hat{\vec{x}}_r$ dalle righe dell'inversa della matrice \mathbf{H} . Gli errori sulle posizioni dei satelliti si ripercuotono anche sul calcolo delle linee di vista, tuttavia si può verificare che il loro effetto, in questo caso, è trascurabile.

Per ogni istante in cui sono disponibili le misure deve essere applicato nuovamente l'algoritmo iterativo di stima della posizione e del bias del ricevitore. A questo proposito è opportuno evidenziare che la soluzione ottenuta in un determinato istante può essere utilizzata come riferimento per inizializzare il processo di stima dell'istante successivo, in questo modo il numero di iterazioni necessarie per giungere a convergenza si riduce. In particolare se la posizione del ricevitore tra due istanti di misura consecutivi non varia in modo significativo, può essere sufficiente una sola iterazione. Per determinare quale sia l'ordine di grandezza dello scostamento di posizione ammissibile per ottenere la convergenza della stima in un solo passo, occorre valutare il contributo dei termini di ordine superiore al primo nello sviluppo in serie di Taylor della pseudodistanza. Il termine del secondo ordine, indicato con T_2 , risulta:

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot (\vec{x}_r - \vec{x}_{r0})^T \cdot \vec{\nabla}^2 \rho_{jr} |_{\vec{x}_{r0}} \cdot (\vec{x}_r - \vec{x}_{r0})$$

e per il suo valore assoluto vale:

$$|T_2| = \frac{1}{2} \cdot \left| (\vec{x}_r - \vec{x}_{r0})^T \cdot \vec{\nabla}^2 \rho_{jr} |_{\vec{x}_{r0}} \cdot (\vec{x}_r - \vec{x}_{r0}) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left\| \vec{\nabla}^2 \rho_{jr} |_{\vec{x}_{r0}} \right\| \cdot \|\vec{x}_r - \vec{x}_{r0}\|^2$$

In particolare la matrice hessiana è data da:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \rho_{jr} |_{\vec{x}_{r0}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r^2} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r \partial y_r} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r \partial z_r} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r \partial (c \cdot b_r)} \\ \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r \partial y_r} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial y_r^2} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial z_r \partial y_r} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial (c \cdot b_r) \partial y_r} \\ \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r \partial z_r} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial y_r \partial z_r} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial z_r^2} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial (c \cdot b_r) \partial z_r} \\ \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial x_r \partial (c \cdot b_r)} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial y_r \partial (c \cdot b_r)} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial z_r \partial (c \cdot b_r)} & \frac{\partial^2 \rho_{jr}}{\partial (c \cdot b_r)^2} \end{bmatrix} \Big|_{\vec{x}_{r0}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(y_{r0} - Y_j)^2 + (z_{r0} - Z_j)^2}{r_{jr0}^3} & -\frac{(x_{r0} - X_j) \cdot (y_{r0} - Y_j)}{r_{jr0}^3} & -\frac{(x_{r0} - X_j) \cdot (z_{r0} - Z_j)}{r_{jr0}^3} & 0 \\ -\frac{(x_{r0} - X_j) \cdot (y_{r0} - Y_j)}{r_{jr0}^3} & \frac{(x_{r0} - X_j)^2 + (z_{r0} - Z_j)^2}{r_{jr0}^3} & -\frac{(y_{r0} - Y_j) \cdot (z_{r0} - Z_j)}{r_{jr0}^3} & 0 \\ -\frac{(x_{r0} - X_j) \cdot (z_{r0} - Z_j)}{r_{jr0}^3} & -\frac{(y_{r0} - Y_j) \cdot (z_{r0} - Z_j)}{r_{jr0}^3} & \frac{(x_{r0} - X_j)^2 + (y_{r0} - Y_j)^2}{r_{jr0}^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

perciò, impiegando la proprietà per cui la norma di una matrice può essere maggiorata dalla somma dei valori assoluti dei suoi elementi, si può scrivere:

$$|T_2| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 |a_{ij}| \right) \cdot \|\vec{x}_r - \vec{x}_{r0}\|^2 \leq \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{r_{jr0}} \cdot \|\vec{x}_r - \vec{x}_{r0}\|^2$$

dove si è maggiorato il valore assoluto di ogni elemento diverso da zero della matrice hessiana con il termine $1/r_{jr0}$. Alla distanza r_{jr0} di 20000 Km, che è tipica per un ricevitore posizionato in prossimità della superficie terrestre, una variazione di 100 metri sulla posizione del ricevitore determina quindi un valore di $|T_2|$ inferiore a:

$$|T_2| \leq \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^7} \cdot 10^4 = 2.25 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$$

Procedendo in modo analogo si può verificare che i termini di ordine superiore al secondo forniscono un contributo notevolmente inferiore e possono essere perciò trascurati. Se dunque il ricevitore si muove ad una velocità inferiore ai 100 m/s (cioè 360 Km/h) e le misure vengono campionate alla frequenza di 1 Hz, l'errore di linearizzazione, dopo una sola iterazione dell'algoritmo di stima, risulta sufficientemente piccolo.

Il metodo linearizzato espresso dal sistema (2.4.2) può essere facilmente esteso al caso in cui il numero n di satelliti visibili sia superiore a quattro:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{1r} - \rho_{1r}(\vec{x}_{r0}) \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{nr} - \rho_{nr}(\vec{x}_{r0}) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\vec{x}_{r0}) \cdot (\hat{\vec{x}}_r - \vec{x}_{r0})$$

in cui \mathbf{H} è una matrice $n \times 4$ le cui righe rappresentano, come in precedenza, i gradienti delle pseudodistanze dei satelliti calcolati per i valori del vettore di riferimento \vec{x}_{r0} . Supponendo che le uniche grandezze affette da rumore siano le pseudodistanze e considerando di

conseguenza esatti gli elementi della matrice H, la soluzione che si ottiene corrisponde alla stima ai minimi quadrati ordinari del vettore delle incognite \vec{x}_r :

$$\hat{\vec{x}}_r = \vec{x}_{r0} + \mathbf{H}^\dagger(\vec{x}_{r0}) \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{1r} - \rho_{1r}(\vec{x}_{r0}) \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{nr} - \rho_{nr}(\vec{x}_{r0}) \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

dove si è indicato con \mathbf{H}^\dagger la pseudoinverta di H che risulta:

$$\mathbf{H}^\dagger(\vec{x}_{r0}) = (\mathbf{H}^T(\vec{x}_{r0}) \cdot \mathbf{H}(\vec{x}_{r0}))^{-1} \cdot \mathbf{H}^T(\vec{x}_{r0}) \quad (2.4.4)$$

La matrice pseudoinversa di H, che ha dimensione $4 \times n$, gode della proprietà per cui la somma degli elementi di ciascuna delle prime tre righe vale zero mentre la somma degli elementi dell'ultima riga vale uno. Ciò significa che un errore della stessa entità su tutte le misure non produce nessun effetto sulla stima delle tre coordinate di posizione mentre si ripercuote totalmente al bias del clock del ricevitore. La proprietà vale anche per la matrice inversa di H calcolata nel caso in cui siano disponibili quattro misure.

È necessario ricordare che il metodo dei minimi quadrati presuppone che gli errori sulle misure abbiano valore medio nullo. Questa ipotesi non è verificata per le misure di pseudodistanza del GPS, infatti, come detto in precedenza, solo il rumore di misura del ricevitore può essere assimilato ad un rumore bianco. La stima del vettore \vec{x}_r presenta dunque un offset rispetto al valore effettivo.

La soluzione di posizione data dalla (2.4.3) è espressa nel sistema di riferimento ECEF, tuttavia ai fini della navigazione si preferisce adottare un sistema di coordinate riferito alla superficie terrestre. A questo proposito è opportuno adottare una superficie geometrica che approssima quella terrestre tenendo conto soprattutto della sua non sfericità. In particolare per il GPS si utilizza l'ellissoide di rivoluzione che è definito dallo standard WGS-84 (World Geodetic System 1984), il quale stabilisce per i semiasse dell'ellisse generatrice, mostrata in figura 2.2, i seguenti valori:

$$a = 6378137 [m]$$

$$b = 6356752.3142 [m]$$

Come è possibile notare, il semiasse minore di lunghezza b coincide con l'asse di rotazione terrestre, che nel sistema di riferimento cartesiano è individuato da Z. È opportuno precisare che anche il nuovo sistema di riferimento è centrato nell'origine della Terra e fisso rispetto ad essa, tuttavia nel seguito il termine ECEF sarà utilizzato per identificare solo il sistema di coordinate ortogonali mentre il sistema riferito all'ellissoide verrà chiamato Geodetico. Considerando, come mostrato in figura 2.2, il generico punto P, giacente nel piano dell'ellisse generatrice ed esterno ad essa, e tracciando, a partire da esso, la perpendicolare all'ellisse, si determina con essa l'intersezione rispetto alla quale viene misurata la quota h. Prolungando la normale all'ellisse all'interno di questa, fino all'asse minore, si viene a formare un'altra intersezione, distante dalla precedente di un segmento di lunghezza N. I punti d'intersezione, sia con l'ellisse che con l'asse minore, ed il valore

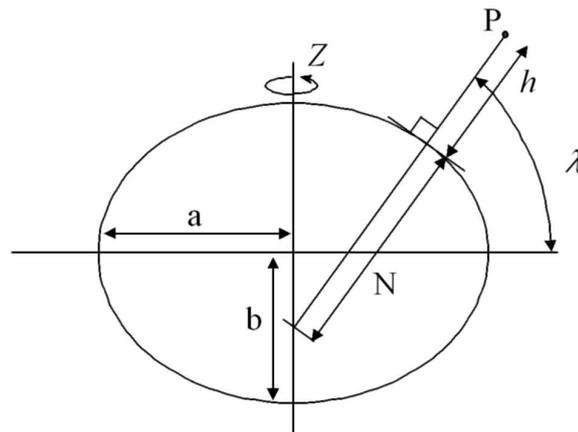


Fig. 2.2. Ellisse generatrice della superficie di riferimento per il sistema di coordinate Geodetico

di N dipendono esclusivamente da λ , che è l'angolo formato con l'asse maggiore dalla retta passante per P e normale all'ellisse. Risulta infatti:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \lambda}}$$

dove e è l'eccentricità dell'ellisse e vale:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

L'angolo λ prende il nome di latitudine e può assumere valori compresi nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Gli estremi dell'intervallo non sono inclusi, in quanto la retta normale all'ellisse in questi casi è parallela all'asse minore, e non si può, quindi, definire la loro intersezione. L'angolo è misurato rispetto all'asse maggiore, ed i valori positivi sono quelli corrispondenti al semipiano positivo di Z , come ad esempio per il punto P in figura. Oltre alla quota e alla latitudine è necessario un ulteriore parametro per identificare in modo univoco un punto nello spazio. Per questo motivo, in riferimento alla figura 2.3, si definisce con ϕ l'angolo formato con l'asse X del sistema ECEF dalla proiezione del punto P sul piano XY . L'angolo ϕ , che è denominato longitudine, può assumere i valori compresi nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ ed è misurato positivamente a partire dall'asse X in direzione di Y . Il punto generico P può dunque essere espresso in modo equivalente dalle terne di parametri (λ, ϕ, h) e (x, y, z) , tra le quali valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} x &= (N(\lambda) + h) \cos \lambda \cos \phi \\ y &= (N(\lambda) + h) \cos \lambda \sin \phi \\ z &= (N(\lambda) \cdot (1 - e^2) + h) \sin \lambda \end{aligned}$$

Impiegando le relazioni precedenti è possibile ottenere direttamente la longitudine:

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

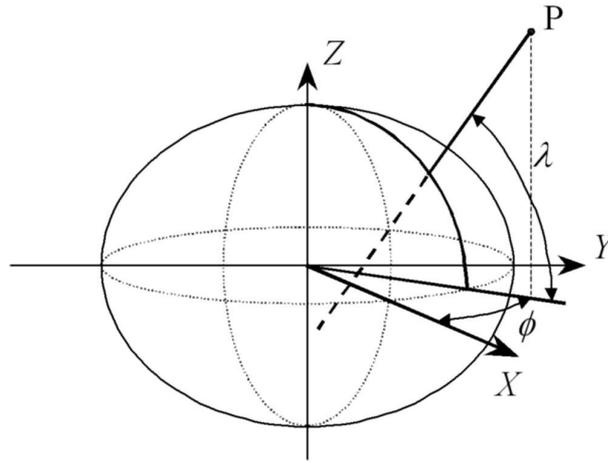


Fig. 2.3. Visualizzazione degli angoli di latitudine e longitudine

Per quanto riguarda il calcolo della latitudine e della quota, che non possono essere esplicitate, sono disponibili sia dei procedimenti iterativi sia dei metodi in forma chiusa approssimati, per la descrizione dei quali si rimanda a [14].

2.4.2 Stima di velocità

Per ottenere la stima delle componenti del vettore velocità e del drift del ricevitore si consideri nuovamente la relazione esatta della frequenza Doppler (2.3.7), posta in forma vettoriale:

$$-D_{jr} \cdot \lambda + \vec{1}_{jr}^T \cdot \vec{v}_j = \begin{bmatrix} \vec{1}_{jr}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_r \\ c \cdot d_r \end{bmatrix}$$

con un numero n , maggiore o uguale a quattro, di equazioni si può scrivere il sistema:

$$\begin{bmatrix} -D_{1r} \cdot \lambda + \vec{1}_{1r}^T \cdot \vec{v}_1 \\ \vdots \\ -D_{nr} \cdot \lambda + \vec{1}_{nr}^T \cdot \vec{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\vec{x}_r) \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_r \\ c \cdot d_r \end{bmatrix}$$

Utilizzando quindi la stima di posizione $\hat{\vec{x}}_r$ per calcolare la matrice \mathbf{H} , introdotta in precedenza, e disponendo delle misure di frequenza Doppler, la soluzione ai minimi quadrati del problema risulta:

$$\begin{bmatrix} \hat{\vec{v}}_r \\ c \cdot \hat{d}_r \end{bmatrix} = \mathbf{H}^\dagger(\hat{\vec{x}}_r) \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{D}_{1r} \cdot \lambda + \vec{1}_{1r}^T \cdot \vec{v}_1 \\ \vdots \\ -\tilde{D}_{nr} \cdot \lambda + \vec{1}_{nr}^T \cdot \vec{v}_n \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

In figura 2.4 sono presentate le stime delle tre componenti u_r , v_r , w_r del vettore velocità ottenute in condizioni statiche con una acquisizione di circa 25 minuti alla frequenza di 1 Hz. Come si può notare l'accuratezza di tutte le componenti è dell'ordine di poche decine

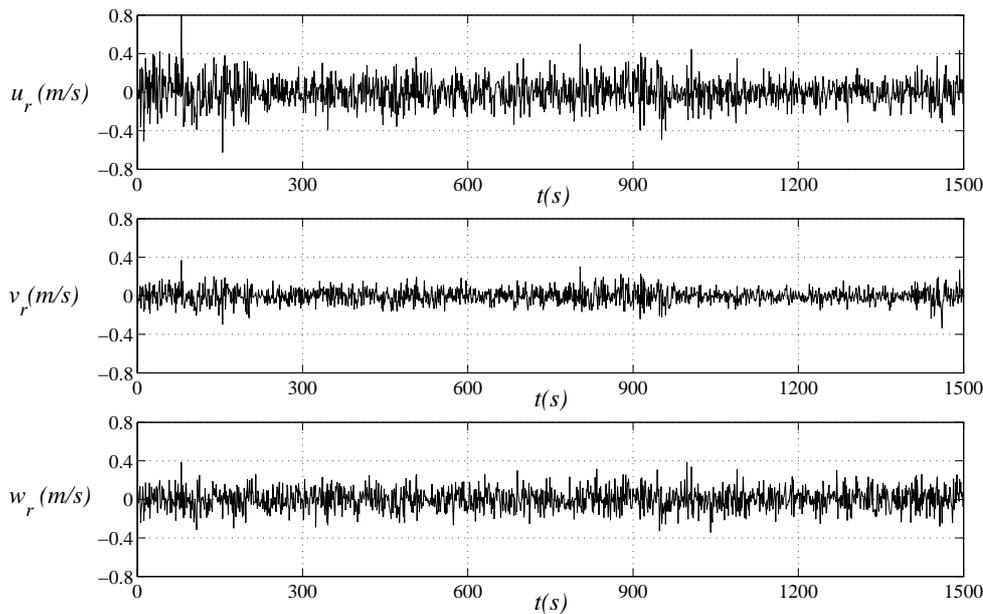


Fig. 2.4. Valori stimati delle componenti del vettore velocità in condizioni statiche

	μ (m/s)	σ (m/s)
u_r	-0.0023	0.1369
v_r	-0.0034	0.0749
w_r	0.0015	0.1062

Tab. 2.1. Parametri statistici delle stime di velocità

di centimetri al secondo, in particolare il valore medio μ e la deviazione standard σ degli errori sono sintetizzati nella tabella 2.1. È opportuno evidenziare che nel periodo di acquisizione il numero di satelliti visibili è variato, tuttavia non si evidenzia alcun effetto apprezzabile sulla stima di velocità.

2.4.3 Effetto della distribuzione geometrica dei satelliti sulle stime

L'accuratezza corrispondente alle differenti componenti dei vettori di posizione e velocità stimati dipendono sia dai rumori associati alle misure, sia dagli elementi della matrice pseudoinversa di H . In particolare, poichè nella matrice H sono presenti i versori delle linee di vista tra i satelliti ed il ricevitore, l'errore sulla stima di posizione e velocità dipende dalla distribuzione nel cielo dei satelliti visibili. Per valutare quale sia l'effetto della geometria della costellazione si supponga che gli errori sulle misure di pseudodistanza siano bianchi, incorrelati tra i diversi satelliti e con la stessa varianza σ_ρ^2 . L'analisi può essere applicata in modo del tutto simile alla velocità considerando, per le misure di frequenza Doppler, un diverso valore della varianza, σ_D^2 . Indicando quindi con $\delta\hat{\mathbf{x}}_r$ l'errore nella stima del vettore di posizione e bias del ricevitore, e con \vec{e}_ρ il vettore degli errori

sulle misure di pseudodistanza di dimensione generica $n \times 1$, si può scrivere la relazione:

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{H}^\dagger \vec{\mathbf{e}}_\rho$$

La matrice di covarianza dell'errore di stima, indicata con \mathbf{P} , risulta di conseguenza:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \left[\delta \hat{\mathbf{x}}_r \cdot \delta \hat{\mathbf{x}}_r^T \right] = \mathbf{E} \left[\mathbf{H}^\dagger \vec{\mathbf{e}}_\rho \vec{\mathbf{e}}_\rho^T \mathbf{H}^{\dagger T} \right] = \mathbf{H}^\dagger \cdot \mathbf{E} \left[\vec{\mathbf{e}}_\rho \vec{\mathbf{e}}_\rho^T \right] \mathbf{H}^{\dagger T} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}^{\dagger T} \sigma_\rho^2$$

dove $\mathbf{E}[\cdot]$ rappresenta l'operatore valore atteso e sono state inoltre sfruttate le ipotesi di incorrelazione e di uguale varianza degli errori di misura per il calcolo della corrispondente matrice di covarianza $\mathbf{E} \left[\vec{\mathbf{e}}_\rho \vec{\mathbf{e}}_\rho^T \right]$. Ricordando infine la definizione di matrice pseudoinversa (2.4.4), è facile verificare che:

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}^{\dagger T} \sigma_\rho^2 = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma_\rho^2 = \mathbf{G} \sigma_\rho^2$$

avendo posto:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$$

La varianza di ciascun componente del vettore $\delta \hat{\mathbf{x}}_r$ è ottenuta moltiplicando il corrispondente elemento della diagonale principale della matrice \mathbf{G} per σ_ρ^2 . Poichè per ipotesi la varianza delle pseudodistanze è la stessa per tutti i satelliti, si può definire un unico parametro per caratterizzare l'effetto della distribuzione dei satelliti sull'errore di stima complessivo. In particolare, utilizzando l'operatore traccia di matrice $tr(\cdot)$, viene indicato come GDOP (Geometric Dilution of Precision) il termine:

$$\text{GDOP} = \sqrt{tr \left((\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \right)} \quad (2.4.6)$$

Elevando il GDOP al quadrato e moltiplicandolo per σ_ρ^2 si ottiene la varianza totale dell'errore. È interessante notare che il vettore di errore $\delta \hat{\mathbf{x}}_r$ può essere proiettato in un sistema di riferimento parallelo alla superficie terrestre nel punto in cui si trova il ricevitore applicando una opportuna matrice di rotazione, che è funzione degli angoli di latitudine e longitudine. In questo modo è possibile valutare l'accuratezza delle componenti verticale ed orizzontale dell'errore, che risultano di maggiore interesse per la navigazione. A questo proposito si osserva tipicamente che la componente verticale dell'errore risulta notevolmente maggiore rispetto a quella orizzontale. Ciò si spiega con il fatto che il ricevitore ha in vista solo i satelliti che si trovano sopra al suo orizzonte e non sono quindi distribuiti in modo omogeneo nella direzione verticale.

Capitolo 3

Tecniche di correzione differenziali

3.1 Introduzione

Nel capitolo precedente si è evidenziato il fatto che la stima di posizione effettuata con le misure di pseudodistanza di un ricevitore GPS presenta un errore dell'ordine di poche decine di metri che si ripercuote, per effetto della distribuzione dei satelliti, prevalentemente sulla componente verticale. In alcune applicazioni un errore di tale entità può risultare eccessivo, si pensi ad esempio ad un aereo in fase di avvicinamento strumentale alla pista di atterraggio per il quale l'accuratezza nella stima della quota deve essere inferiore al metro. In questo contesto è opportuno evidenziare che l'errore residuo del bias del satellite ha lo stesso effetto su tutti i ricevitori. Inoltre l'errore sulla posizione del ricevitore stimata con le effemeridi, quello ionosferico e quello troposferico hanno una elevata correlazione spaziale, danno cioè un contributo uguale sulle misure di ricevitori posti nella medesima posizione, che si differenzia all'aumentare della distanza dei ricevitori. Queste quattro tipologie di errore vengono perciò comunemente indicate come errori di *modo comune*, mentre il multipath ed il rumore di misura sono definiti di *modo non comune* in quanto agiscono sui ricevitori in modo indipendente dalla loro distanza. Un altro aspetto importante è rappresentato dal fatto che gli errori di modo comune variano molto lentamente nel tempo e nell'arco di poche decine di secondi possono essere considerati costanti. Se si utilizzano uno o più ricevitori fissi, collocati in posizioni note con elevata precisione e tali da non essere soggetti in modo significativo a multipath, è possibile determinare per le loro misure il contributo degli errori di *modo comune*. Il risultato ottenuto può essere applicato per correggere le misure, corrispondenti agli stessi satelliti, effettuate da un altro ricevitore che si trova in prossimità di quelli fissi. Le tecniche che adottano questo principio di correzione, basato sull'utilizzo di almeno un ricevitore di riferimento, sono chiamate differenziali. I principali elementi che consentono di classificare queste tecniche sono costituiti da:

- la distanza massima dai ricevitori di riferimento ed il loro numero
- il metodo di determinazione dei termini di correzione
- la modalità di trasmissione delle correzioni

In particolare nelle sezioni successive vengono descritte e confrontate con prove sperimentali due tecniche di correzione che sono state standardizzate a livello internazionale [9], [10].

3.2 Correzioni LAAS

La tecnica LAAS (Local Area Augmentation System) è definita dall'RTCA (Radio Technical Committee for Aeronautics) nel documento DO-245 [9]. Essa prevede l'impiego di una unica stazione di terra per generare e diffondere le correzioni, che sono valide entro una distanza di pochi chilometri, tipicamente inferiore a 15, dalla stazione stessa. Sebbene sia sufficiente un unico ricevitore per determinare le correzioni, tuttavia la normativa prevede, al fine di garantire la ridondanza del sistema, che vengano impiegati nella stazione di terra tre ricevitori e che le correzioni trasmesse siano costituite dalla media di quelle ottenute da ciascuno di essi. Le posizioni dei ricevitori devono essere georeferenziate, cioè le loro coordinate devono essere note con una notevole precisione, tipicamente inferiore al centimetro, in questo modo è possibile stimare la distanza tra ricevitore e satellite. Indicando infatti con x_i, y_i, z_i le coordinate note del ricevitore i -esimo e con $\hat{X}_j, \hat{Y}_j, \hat{Z}_j$ le coordinate del satellite j -esimo ottenute con le effemeridi, la distanza stimata \hat{r}_{ji} risulta:

$$\hat{r}_{ji} = \sqrt{(\hat{X}_j - x_i)^2 + (\hat{Y}_j - y_i)^2 + (\hat{Z}_j - z_i)^2}$$

Per facilitare le successive considerazioni, è opportuno esprimere in modo esplicito le coordinate esatte del satellite X_j, Y_j, Z_j e gli errori dovuti alla imprecisione delle effemeridi, $\Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j$, ottenendo quindi:

$$\hat{r}_{ji} = \sqrt{r_{ji}^2 + \Delta_{ji}}$$

in cui si è evidenziata la distanza esatta r_{ji} tra ricevitore e satellite

$$r_{ji} = \sqrt{(X_j - x_i)^2 + (Y_j - y_i)^2 + (Z_j - z_i)^2}$$

ed il termine di errore

$$\begin{aligned} \Delta_{ji} = & 2 \cdot (X_j - x_i) \cdot \Delta X_j + 2 \cdot (Y_j - y_i) \cdot \Delta Y_j \\ & + 2 \cdot (Z_j - z_i) \cdot \Delta Z_j + (\Delta X_j)^2 + (\Delta Y_j)^2 + (\Delta Z_j)^2 \end{aligned}$$

Infine, notando che Δ_{ji} è molto più piccolo di r_{ji}^2 , la distanza stimata può essere approssimata da:

$$\hat{r}_{ji} = r_{ji} \cdot \sqrt{1 + \frac{\Delta_{ji}}{r_{ji}^2}} \approx r_{ji} \cdot \left(1 + \frac{\Delta_{ji}}{2 \cdot r_{ji}^2}\right) = r_{ji} + \frac{\Delta_{ji}}{2 \cdot r_{ji}} \quad (3.2.1)$$

La correzione $corr_{ji}$, relativa al j -esimo satellite e calcolata dall' i -esimo ricevitore della stazione di terra, è ottenuta eseguendo la differenza tra la distanza stimata e la pseudodistanza misurata il cui modello è dato dalla (2.3.1):

$$corr_{ji} = \hat{r}_{ji} - \tilde{\rho}_{ij} = r_{ji} + \frac{\Delta_{ji}}{2 \cdot r_{ji}} - (r_{ji} + c \cdot b_i + c \cdot b_j + I_j + T_j + M_{ji} + v_{ji}) \quad (3.2.2)$$

In merito alla relazione appena introdotta va ribadito che il termine b_j rappresenta il bias residuo del clock del satellite, a seguito dell'applicazione alla misura di pseudodistanza del termine correttivo stimato con i parametri del messaggio di navigazione. La correzione è costituita quindi dagli errori, il cui contributo è dell'ordine di poche decine di metri, e dal termine costituito dal bias del ricevitore moltiplicato per la velocità della luce, che invece può assumere valori molto elevati. Per evitare di trasmettere una correzione di entità eccessiva si somma alla (3.2.2) una stima del bias del ricevitore data da:

$$\hat{b}_i = -\frac{1}{c \cdot n} \sum_{j=1}^n corr_{ji}$$

In cui n è il numero dei satelliti che sono in vista di tutti i ricevitori della stazione di terra. Assumendo che gli errori di *modo comune* siano uguali per tutti e tre i ricevitori di riferimento, il termine di correzione complessivo, $\Delta\rho_j$, del satellite j -esimo risulta infine:

$$\Delta\rho_j = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (corr_{ji} + c \cdot \hat{b}_i) = \frac{\Delta_{jG}}{2 \cdot r_{jG}} - (c \cdot b_j + I_j + T_j + c \cdot \delta\bar{b}_G + \bar{M}_{jG} + \bar{v}_{jG})$$

dove si è posto

$$\delta\bar{b}_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\hat{b}_i - b_i), \quad \bar{M}_{jG} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 M_{ji}, \quad \bar{v}_{jG} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 v_{ji}$$

$$\frac{\Delta_{jG}}{2 \cdot r_{jG}} \approx \frac{\Delta_{ji}}{2 \cdot r_{ji}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Ciascun utente, che si trova in prossimità della stazione di terra, somma alle misure di pseudodistanza relative ai satelliti che ha in vista le corrispondenti correzioni e, successivamente, effettua la stima della posizione e del bias tramite la (2.4.3). A questo proposito è opportuno riscrivere, tenendo conto delle correzioni, l'elemento j -esimo del vettore che esprime la differenza tra la misura di pseudodistanza ed il suo valore di riferimento:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{jr} - \rho_{jr}(\vec{x}_{r0}) + \Delta\rho_j &= (r_{jr} + c \cdot b_r + c \cdot b'_j + I'_j + T'_j + M_{jr} + v_{jr}) - (\hat{r}_{jr0} + c \cdot b_{r0}) \\ &\quad + \left(\frac{\Delta_{jG}}{2 \cdot r_{jG}} - (c \cdot b'_j + I'_j + T'_j + c \cdot \delta\bar{b}_G + \bar{M}_{jG} + \bar{v}_{jG}) \right) \\ &= r_{jr} - r_{jr0} + c \cdot (b_r - b_{r0} - \delta\bar{b}_G) \\ &\quad + \left(-\frac{\Delta_{jr0}}{2 \cdot r_{jr0}} + \frac{\Delta_{jG}}{2 \cdot r_{jG}} + M_{jr} + v_{jr} - \bar{M}_{jG} - \bar{v}_{jG} \right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

dove per la distanza di riferimento \hat{r}_{jr0} , calcolata utilizzando le effemeridi, si è posto:

$$\hat{r}_{jr0} \approx r_{jr0} + \frac{\Delta_{jr0}}{2 \cdot r_{jr0}}$$

in analogia a quanto fatto precedentemente con la (3.2.1), ed inoltre si è supposto che:

$$\frac{\Delta_{jr0}}{2 \cdot r_{jr0}} = \frac{\Delta_{jG}}{2 \cdot r_{jG}}$$

È opportuno notare che il termine $\delta\bar{b}_G$ è presente nelle correzioni di tutti i satelliti, perciò non ha effetto sulla stima delle tre coordinate di posizione del ricevitore utente, ma si ripercuote esclusivamente sulla stima del bias, si ricordino al riguardo le considerazioni svolte a pagina 23. La relazione (3.2.3), inoltre, evidenzia il fatto che la correzione $\Delta\rho_j$ elimina per l'utente il contributo degli errori di *modo comune*, ma introduce i valori medi del multipath e del rumore di misura relativi ai ricevitori della stazione di terra, per questo motivo è fondamentale che il contributo di questi errori sia limitato il più possibile. In particolare il posizionamento dei ricevitori di riferimento lontano da superfici riflettenti e l'utilizzo di antenne che hanno guadagno nullo sotto l'orizzonte, consentono di mitigare notevolmente l'effetto del multipath. In relazione al termine \bar{v}_{jG} , invece, assumendo che i rumori di misura dei singoli ricevitori, tra di loro incorrelati, abbiano la stessa deviazione standard σ_v , risulta:

$$\sigma(\bar{v}_{jG}) = \frac{\sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_v^2 + \sigma_v^2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_v \approx 0.577 \cdot \sigma_v$$

La deviazione standard del rumore di misura medio introdotto dalla correzione differenziale è dunque poco più della metà di quella dei singoli ricevitori, che generalmente è inferiore al mezzo metro per dispositivi di elevata qualità.

Va rilevato inoltre che, a causa dei tempi di elaborazione e di trasmissione, le correzioni calcolate dai ricevitori di riferimento in un determinato istante, vengono ricevute dagli utenti con un ritardo e possono essere quindi applicate solo alla misura successiva. Per questo motivo la stazione di terra determina, per ogni istante di misura, anche la velocità di variazione della correzione $\Delta\dot{\rho}_j$, utilizzando i termini di correzione calcolati negli istanti precedenti. L'effettiva correzione applicata dall'utente nell'istante t , riferito al tempo GPS, risulta quindi:

$$\Delta\rho_j(t) = \Delta\rho_j(t_0) + \Delta\dot{\rho}_j(t_0) \cdot (t - t_0)$$

dove t_0 è l'istante in cui la correzione e la sua velocità di variazione sono calcolate dalla stazione di terra, ed è espresso anch'esso nel sistema di riferimento temporale del GPS. Poichè gli errori di *modo comune* variano lentamente nel tempo, la propagazione lineare della correzione, per tempi di latenza di pochi secondi, risulta sufficientemente accurata. Per quanto riguarda la modalità di invio delle correzioni, si adottano sistemi di trasmissione diversi in funzione dell'ambito applicativo. In particolare nel settore aeronautico lo standard RTCA definisce il formato del messaggio binario che contiene le informazioni di correzione, il quale viene utilizzato per modulare la fase di una portante nella banda VHF. Molti ricevitori GPS attualmente disponibili in commercio sono in grado di applicare le correzioni differenziali LAAS, tuttavia si richiede l'utilizzo di un sistema ausiliario per la loro ricezione. È necessario evidenziare che la tecnica LAAS è stata sviluppata per correggere in particolare le misure del codice C/A, ma lo stesso principio può essere applicato anche alle misure di pseudodistanza del codice P e alle misure di fase delle portanti. In quest'ultimo caso tuttavia bisogna tenere conto del problema della risoluzione delle ambiguità iniziali, che sarà trattato nel capitolo 6.

3.3 Correzioni WAAS

La tecnica WAAS (Wide Area Augmentation System) prevede che i segnali provenienti dai satelliti GPS siano monitorati da molteplici stazioni di terra posizionate in un'area vasta centinaia di chilometri. I dati raccolti dalle stazioni sono inviati ad un centro di controllo principale che stima i contributi degli errori di *modo comune* sul codice C/A per ciascun segnale ed invia le correzioni a satelliti geostazionari che provvedono successivamente a diffonderle. Concordemente con le specifiche definite nel documento RTCA DO-229C [10], gli utenti che si trovano all'interno dell'area di copertura ricevono da ogni satellite geostazionario un segnale, sulla frequenza L1 del GPS, costituito dalla somma modulo 2 di un codice PRN e di un messaggio di correzione composto da 250 bit ed inviato alla frequenza di 1 Hz. Il codice PRN di ognuno dei satelliti geostazionari è unico ed appartiene alla stessa famiglia di codici ortogonali del GPS, per questo motivo i segnali che forniscono le correzioni possono essere acquisiti dai canali liberi del ricevitore ed utilizzati anche per determinare delle misure di pseudodistanza aggiuntive.

La tecnica WAAS è stata concepita per essere applicata su scala continentale. Negli Stati Uniti è operativo già da alcuni anni un sistema di correzione di questo tipo, che è stato recentemente certificato dalla FAA (Federal Aviation Administration) per gli avvicinamenti in Categoria I degli aeromobili. In Europa l'Agenzia Spaziale Europea (ESA) ha avviato lo sviluppo del sistema EGNOS (European Geostationary Navigation Overlay System) in conformità allo standard RTCA. Attualmente il progetto EGNOS è in uno stato di sviluppo avanzato, ma non è completamente operativo, per esempio non tutte le stazioni di monitoraggio previste sono funzionanti ed il segnale inviato dai satelliti geostazionari è in fase di test e non garantisce, quindi, la continuità del servizio. Anche in Giappone si sta sviluppando un sistema di correzioni su scala continentale chiamato MSAS.

Al contrario della tecnica LAAS in cui l'utente riceve un unico termine di correzione da applicare alla misura di pseudodistanza di ciascun satellite GPS, per il WAAS i differenti contributi di errore sono stimati e trasmessi in modo separato. Il messaggio di 250 bit assume quindi un formato diverso in funzione dell'errore a cui la correzione trasmessa si riferisce. Per la descrizione del formato dei differenti tipi di messaggi si rimanda al documento RTCA [10].

L'errore residuo del bias del satellite j -esimo viene corretto con due termini. Il primo consente di stimare le variazioni di lungo periodo del bias ed è ottenuto con la seguente legge polinomiale:

$$\delta b_j(t_T) = \delta a_{f0} + \delta a_{f1} \cdot (t_T - t_0) \quad (3.3.1)$$

in cui i parametri δa_{f0} , δa_{f1} e t_0 sono presenti nel messaggio inviato dal satellite WAAS e rappresentano rispettivamente l'offset e la deriva dell'errore ed il tempo di riferimento per la correzione. Il termine δb_j è calcolato nell'istante t_T , corrispondente alla trasmissione del segnale da parte del satellite GPS. La correzione da sommare alla misura di pseudodistanza è ottenuta moltiplicando la (3.3.1) per la velocità della luce c .

Il secondo termine di correzione, che è espresso in metri ed è applicato direttamente alla misura di pseudodistanza, consente di stimare le variazioni di corto periodo nel bias del satellite. La correzione è calcolata, per ogni istante di misura t_m , con il polinomio:

$$\rho_{c_j}(t_m) = PRC_j + RRC_j \cdot (t_m - t_{of}) \quad (3.3.2)$$

In cui t_{of} è il tempo di riferimento per la correzione e corrisponde all'istante di invio del messaggio da parte del satellite WAAS. L'unico parametro che viene fornito nel messaggio è l'offset PRC_j , mentre la velocità di variazione della correzione RRC_j è calcolata dall'utente impiegando i valori di PRC_j e t_{of} relativi al messaggio precedente:

$$RRC_j = \frac{PRC_j - PRC_{j,previous}}{t_{of} - t_{of,previous}}$$

Per quanto riguarda l'errore ionosferico, il centro di controllo, utilizzando le misure fornite dalle stazioni di monitoraggio, stima il ritardo verticale associato a punti predefiniti della ionosfera, che corrispondono ad una griglia estesa a tutta la sfera terrestre. I punti della griglia sono divisi in 9 bande verticali, ciascuna corrispondente a 40 gradi di latitudine e contenente circa 200 punti, ed in 2 bande orizzontali in prossimità delle zone polari. Ogni sistema WAAS trasmette i ritardi verticali dei punti relativi esclusivamente alle bande della propria area di copertura. L'utente deve determinare il punto in cui la linea di vista con ciascun satellite interseca la ionosfera, assunta come una sfera di raggio prefissato, e scegliere i punti più vicini della griglia che formano un rettangolo o un triangolo contenente il punto di intersezione. Una opportuna combinazione lineare dei ritardi associati ai punti scelti consente di ottenere il ritardo verticale, τ_j , del punto di intersezione, cioè il ritardo ottenuto supponendo che l'intersezione del segnale con la ionosfera sia perpendicolare. Per tenere conto dell'effettiva direzione di intersezione, il ritardo verticale viene moltiplicato per un coefficiente, F , che è funzione dell'elevazione del satellite, El_j , rispetto al piano dell'orizzonte locale del ricevitore:

$$F(El_j) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R_e \cdot \cos El_j}{R_e + h_I}\right)^2}}$$

in cui il raggio terrestre R_e e l'altezza della ionosfera h_I hanno i valori convenzionali:

$$R_e = 6378.1363 [\text{Km}] \quad h_I = 350 [\text{Km}]$$

La correzione da sommare alla misura di pseudodistanza del j -esimo satellite è l'opposto del ritardo calcolato e risulta dunque:

$$IC_j = -F(El_j) \cdot \tau_j \quad (3.3.3)$$

Il ritardo troposferico viene stimato con notevole accuratezza utilizzando un modello, per questo motivo il sistema non invia nessuna correzione. L'utente calcola il termine da sommare alla pseudodistanza del j -esimo satellite tramite la relazione:

$$TC_j = -(d_{dry} + d_{wet}) \cdot m(El_j) \quad (3.3.4)$$

dove d_{dry} e d_{wet} sono le due componenti (dry component, wet component) del ritardo troposferico, descritte nella sezione 2.3.1, i cui valori sono tabulati in funzione dell'altezza e della latitudine del ricevitore e del giorno dell'anno in cui è effettuata la misura [10], mentre m è funzione dell'elevazione del satellite:

$$m(El_j) = \frac{1.001}{\sqrt{0.002001 + \sin^2 El_j}}$$

Gli errori sulle tre componenti di posizione di ciascun satellite vengono compensati utilizzando i parametri di correzione trasmessi dal sistema, che sono rispettivamente δx_j , δy_j , δz_j per la posizione e $\delta \dot{x}_j$, $\delta \dot{y}_j$, $\delta \dot{z}_j$ per la velocità. In particolare l'utente applica alla posizione del satellite stimata con le effemeridi la correzione ottenuta con l'espressione vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x_{Cj}(t_T) \\ y_{Cj}(t_T) \\ z_{Cj}(t_T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_j(t_T) \\ \delta y_j(t_T) \\ \delta z_j(t_T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \dot{x}_j(t_T) \\ \delta \dot{y}_j(t_T) \\ \delta \dot{z}_j(t_T) \end{bmatrix} \cdot (t_T - t_0) \quad (3.3.5)$$

in cui t_T e t_0 sono rispettivamente il tempo di trasmissione del segnale GPS ed il tempo di riferimento della correzione WAAS, che sono stati introdotti descrivendo le correzioni di lungo periodo (3.3.1).

Dal momento che il calcolo dei termini di correzione degli errori ionosferico e troposferico richiede la conoscenza dell'elevazione del satellite rispetto al piano dell'orizzonte locale del ricevitore, l'applicazione delle correzioni WAAS e la stima della soluzione sono eseguite due volte, come descritto dal seguente algoritmo:

1. Si correggono le misure di pseudodistanza con i termini di corto (3.3.2) e di lungo periodo (3.3.1)
2. Si calcolano le posizioni dei satelliti negli istanti di trasmissione dei segnali utilizzando i tempi di propagazione corretti al passo precedente
3. Si correggono le posizioni dei satelliti tramite la (3.3.5), che viene calcolata negli istanti di trasmissione dei segnali utilizzando i tempi di propagazione corretti al passo 1
4. Si stimano la posizione ed il bias del ricevitore
5. Si calcolano le elevazioni dei satelliti e si determinano le correzioni ionosferiche (3.3.3) e troposferiche (3.3.4)
6. Si correggono le misure di pseudodistanza con i termini ionosferico e troposferico
7. Si calcolano le posizioni dei satelliti negli istanti di trasmissione dei segnali utilizzando i tempi di propagazione corretti al passo precedente
8. Si correggono le posizioni dei satelliti tramite la (3.3.5), che viene calcolata negli istanti di trasmissione dei segnali utilizzando i tempi di propagazione corretti al passo 6
9. Si stimano la posizione ed il bias finali del ricevitore

La tecnica WAAS non richiede all'utente l'adozione di dispositivi ausiliari per la ricezione delle correzioni, in quanto il segnale proveniente dai satelliti geostazionari viene acquisito dal ricevitore GPS senza dover apportare modifiche ai loop di aggancio del codice e della fase. L'unica differenza riguarda la decodifica del messaggio di correzione, che tuttavia comporta solo cambiamenti al software del ricevitore.

3.4 Prove comparative

Al fine di valutare l'accuratezza della stima di posizione ottenuta applicando le correzioni LAAS e WAAS alle misure di pseudodistanza, sono state acquisite alcune serie di dati nel corso di prove sperimentali. L'obiettivo principale è stato quello di verificare le prestazioni del sistema EGNOS che è in fase di sviluppo da parte dell'ESA. L'elaborazione delle informazioni raccolte sono state eseguite in post-processo per poter applicare i due tipi di correzione sullo stesso insieme di misure e consentire, di conseguenza, l'analisi comparativa dei risultati. In particolare per la generazioni delle correzioni LAAS è stata utilizzata la stazione di terra implementata presso i laboratori della Seconda Facoltà di Ingegneria a Forlì[7]. È opportuno notare che l'elaborazione in post-processo delle informazioni non richiede l'invio in tempo reale dei messaggi di correzione, per questo motivo durante le prove non è stato attivato il collegamento radio della stazione di terra. Inoltre le correzioni LAAS sono state applicate alle misure di pseudodistanza del GPS senza ritardo e non è stato perciò necessario calcolare il termine $\Delta\dot{\rho}_j$, corrispondente alla velocità di variazione della correzione. Le correzioni WAAS inviate dai satelliti EGNOS sono state invece decodificate e rese disponibili dal ricevitore GPS presente nel sistema avionico dell'UAV e sono state salvate dalla PC104.

Per poter effettuare un confronto significativo dei risultati è stato necessario avere a disposizione un riferimento rispetto al quale calcolare gli errori di posizione. Per questo motivo le prove sono state eseguite in collaborazione con i ricercatori del gruppo di geodesia del dipartimento DISTART (Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti, delle Acque, del Rilevamento del Territorio) della Facoltà di Ingegneria, che dispone di una rete di stazioni di riferimento su scala regionale (nell'area compresa tra le città di Bologna, Ferrara, Arezzo e Urbino), la quale consente di applicare tecniche differenziali per la compensazione degli errori di *modo comune* delle misure di fase della portante GPS. In particolare le tecniche impiegate dal DISTART sono denominate NRTK (Network Real Time Kinematic) e sono descritte, ad esempio, in [26], [28], [27]. Poiché gli errori di *modo non comune* associati alle misure di fase risultano dell'ordine di pochi centimetri, la stima di posizione che si ottiene, una volta risolte le ambiguità iniziali, ha una accuratezza tipicamente inferiore ai dieci centimetri, e può quindi essere utilizzata come riferimento per determinare gli errori sulle posizioni stimate con il codice, che sono invece dell'ordine di qualche metro.

Nel corso delle prove è stato quindi utilizzato un ricevitore del DISTART del quale sono state determinate le stime di posizione precise ed alle cui misure di pseudodistanza sono state applicate in post-processo le correzioni LAAS e WAAS.

Per caratterizzare il comportamento delle due tecniche di correzione in funzione del regime di moto del ricevitore utente e della sua distanza dalla stazione di terra sono state eseguite tre tipologie di prove. Nella prima il ricevitore viene mantenuto fermo per alcuni minuti nei pressi della stazione di terra. Nella seconda prova il ricevitore viene installato a bordo di un furgone che percorre più volte un circuito posizionato a circa 3.5 Km della stazione di terra. In questo modo è possibile valutare per un periodo sufficientemente lungo l'effetto delle correzioni in condizioni dinamiche, mantenendo pressochè inalterata la distanza dalla stazione di terra. Nella terza prova infine il ricevitore, partendo in prossimità della stazione di terra, percorre un tragitto fino a raggiungere una distanza dalla

stazione stessa superiore ai 15 Km, che rappresenta convenzionalmente il limite per l'applicazione delle correzioni LAAS. In tutte le prove il campionamento è stato effettuato alla frequenza di 1 Hz e, per ogni istante di misura, sono state calcolate con la (2.4.3) tre stime di posizione corrispondenti rispettivamente alle pseudodistanze non corrette, all'applicazione delle correzioni LAAS ed all'applicazione delle correzioni WAAS. Le posizioni stimate e quelle del riferimento sono state successivamente espresse in un sistema di coordinate locali con l'origine corrispondente alla posizione di uno dei ricevitori della stazione di terra, con due assi diretti verso Nord ed Est ed il terzo orientato secondo la verticale locale. Indicando quindi con x_{rif} , y_{rif} , z_{rif} le componenti del riferimento in coordinate locali e con x_s , y_s , z_s le componenti corrispondenti ad una qualsiasi delle tre stime di posizione anch'esse espresse in coordinate locali, sono stati determinati l'errore orizzontale δ_h e quello verticale assoluto δ_v , definiti come:

$$\delta_h = \sqrt{(x_s - x_{rif})^2 + (y_s - y_{rif})^2}$$

$$\delta_v = |z_s - z_{rif}|$$

In particolare gli errori orizzontali e verticali relativi alla prova statica sono presentati rispettivamente nelle figure 3.1 e 3.2. Il ricevitore è stato posizionato a 2 Km dalla stazione di terra per un periodo di circa 15 minuti. Come previsto, gli errori di maggiore entità corrispondono alla stima ottenuta senza applicare correzioni alle misure di pseudodistanza del GPS, visualizzati nel primo grafico di entrambe le figure. Inoltre si evidenzia come le due tipologie di correzione contribuiscano a ridurre notevolmente gli errori, specialmente quelli verticali.

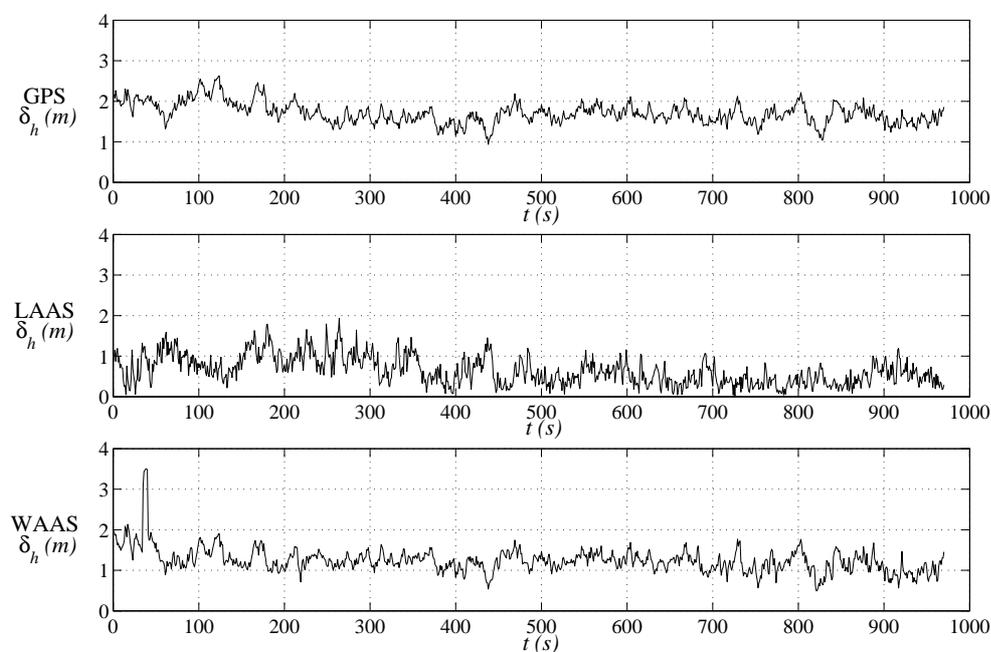


Fig. 3.1. Errori orizzontali di posizione relativi alla prova statica

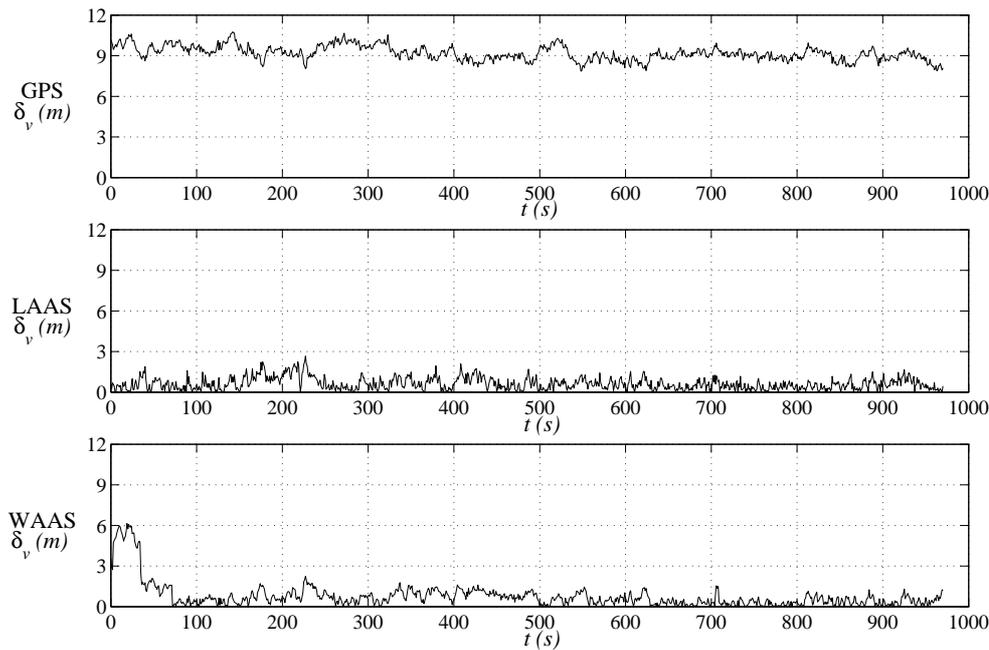


Fig. 3.2. Errori verticali di posizione relativi alla prova statica

È opportuno dire che nei primi secondi della prova la correzione ionosferica del WAAS non è stata disponibile, in quanto il ricevitore, dopo l'accensione, non aveva ancora acquisito il messaggio corrispondente, che ha una bassa frequenza di aggiornamento (circa 10 minuti). Questo aspetto è evidenziato nelle figure dove i valori iniziali degli errori corrispondenti alla soluzione WAAS sono considerevolmente maggiori rispetto a quelli ottenuti nel resto della prova. La tabella 3.1 sintetizza i parametri statistici della prova in termini di valore medio e varianza, indicati rispettivamente con $\bar{\delta}_h$ e σ_{δ_h} per l'errore orizzontale, e con $\bar{\delta}_v$ e σ_{δ_v} per l'errore verticale.

	$\bar{\delta}_h$ (m)	σ_{δ_h} (m)	$\bar{\delta}_v$ (m)	σ_{δ_v} (m)
GPS	1.709	0.259	9.176	0.536
LAAS	0.642	0.353	0.620	0.454
WAAS [1,971]s	1.243	0.305	0.778	0.962
WAAS [100,971]s	1.203	0.234	0.528	0.418

Tab. 3.1. Parametri statistici delle stime di posizione nella prova statica

I risultati presentati nelle figure 3.4 e 3.5 si riferiscono alla seconda prova, nella quale il ricevitore percorre ripetutamente un circuito. La proiezione del tracciato sul piano orizzontale locale Nord-Est precedentemente introdotto è mostrata in figura 3.3, nella quale si evidenzia il fatto che la lunghezza del circuito è pari a 900 m e la sua distanza dalla

stazione di terra si mantiene tra 3 e 3.5 Km. In questo modo le prestazioni delle correzioni LAAS rimangono inalterate. Il tracciato è stato percorso dieci volte al fine di avere un insieme di campioni statisticamente significativo.

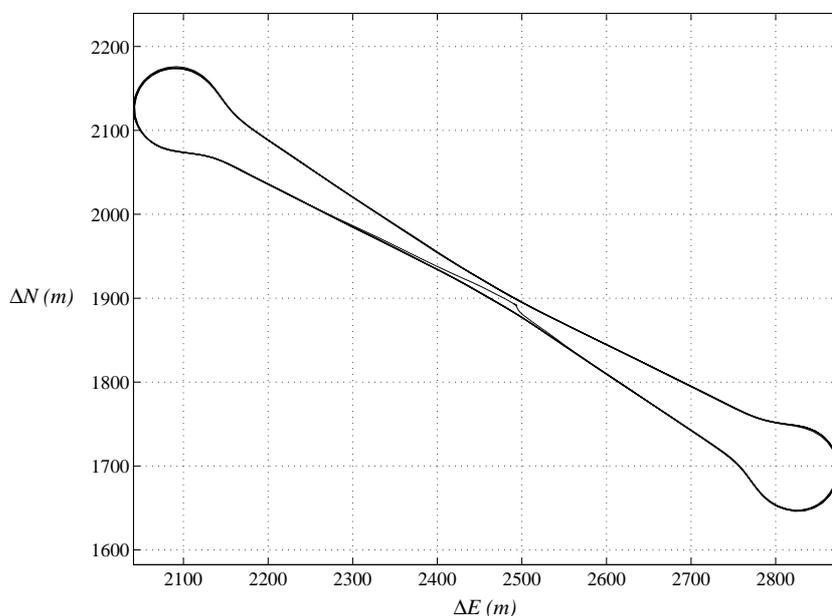


Fig. 3.3. Vista in pianta del circuito percorso

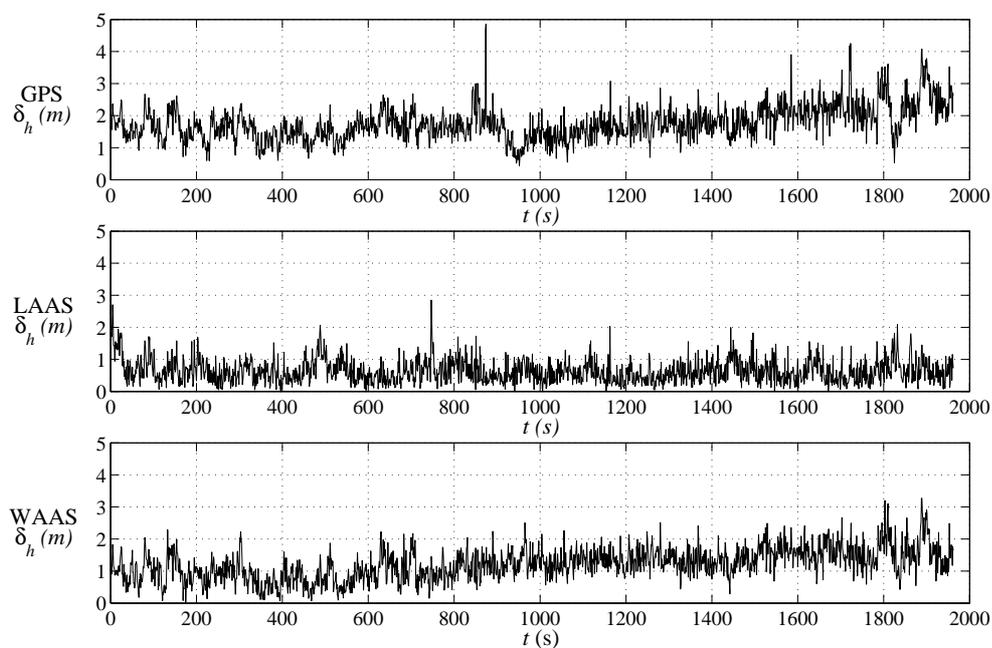


Fig. 3.4. Errori orizzontali di posizione relativi al circuito

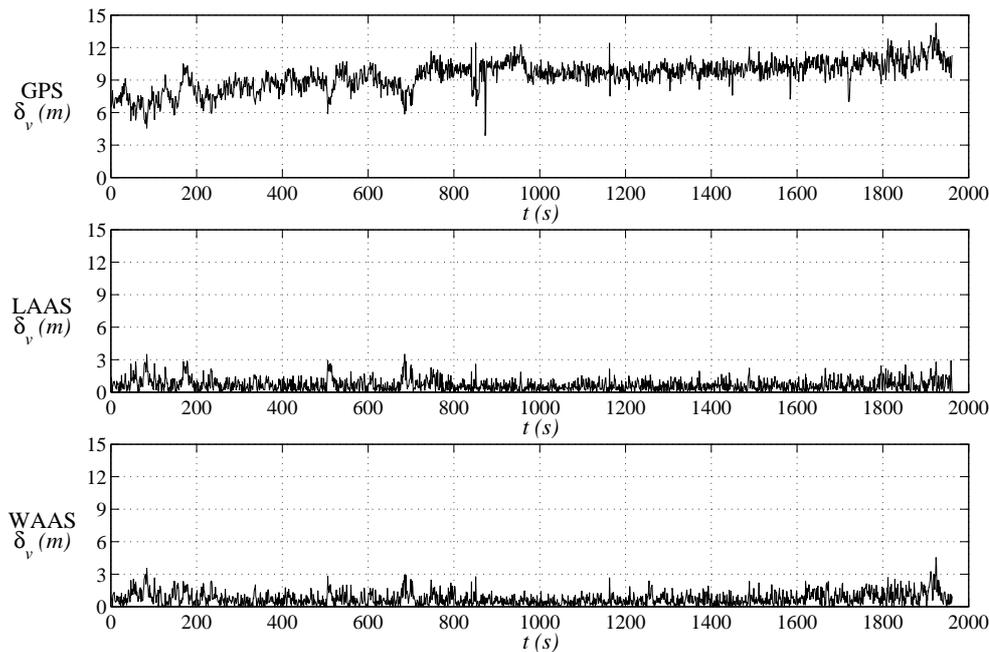


Fig. 3.5. Errori verticali di posizione relativi al circuito

Anche in questo caso è possibile notare un notevole miglioramento fornito da entrambe i tipi di correzione differenziale, specialmente nel canale verticale. Tuttavia le correzioni LAAS mostrano prestazioni migliori rispetto a quelle WAAS. Infatti la figura 3.4 evidenzia un errore crescente sia per la stima di posizione senza correzioni sia per la stima ottenuta applicando le correzioni WAAS. Al contrario questo effetto risulta trascurabile nel caso delle correzioni LAAS. Ciò è dovuto alla maggiore prontezza nella risposta agli errori sulle misure di pseudodistanza, soprattutto a quello ionosferico, da parte della tecnica LAAS. I parametri statistici della prova sono riportati nella tabella 3.2.

	$\bar{\delta}_h$ (m)	σ_{δ_h} (m)	$\bar{\delta}_v$ (m)	σ_{δ_v} (m)
GPS	1.756	0.534	9.416	1.331
LAAS	0.636	0.369	0.673	0.541
WAAS	1.209	0.490	0.749	0.592

Tab. 3.2. Parametri statistici delle stime di posizione nel circuito

I risultati della terza prova sono visualizzati nelle figure 3.7 e 3.8. Poichè l'obiettivo della prova è quello di valutare l'accuratezza delle correzioni LAAS all'aumentare della distanza del ricevitore dalla stazione di terra, in figura 3.6 è stata riportata la distanza dall'origine del sistema di riferimento locale in funzione del tempo. È necessario notare che lungo il percorso, a causa della presenza di ostacoli, si sono verificate numerose perdite di aggancio della fase. Questo ha determinato la non disponibilità della traiettoria di riferimento in alcuni periodi della prova per i quali di conseguenza non è stato possibile

determinare l'errore, come è evidenziato nei grafici. Tuttavia alla massima distanza raggiunta dal ricevitore, che è circa 17 Km, il confronto dei risultati è stato possibile.

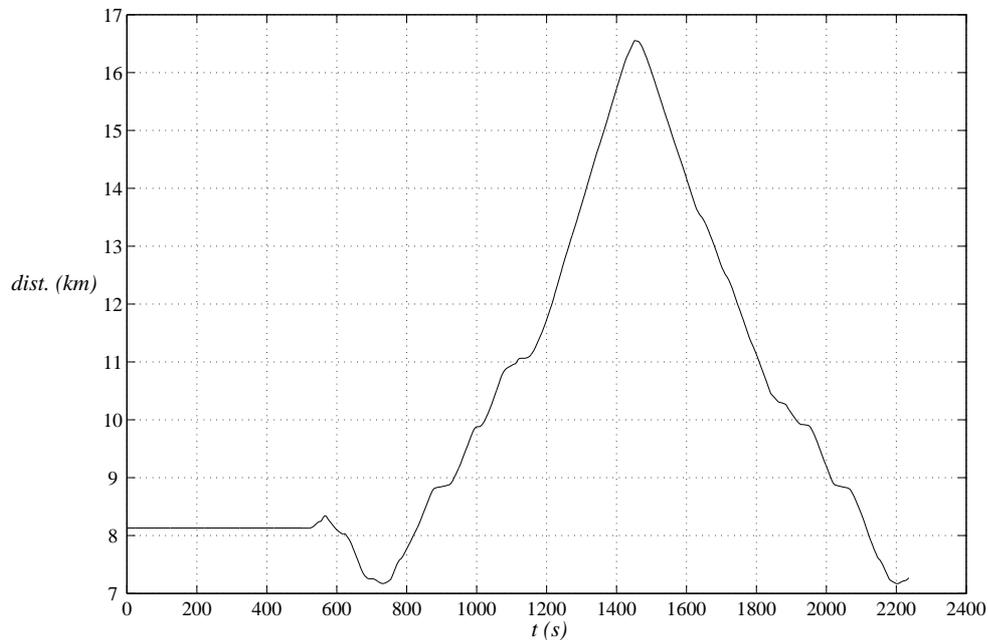


Fig. 3.6. Distanza del ricevitore dalla stazione di terra

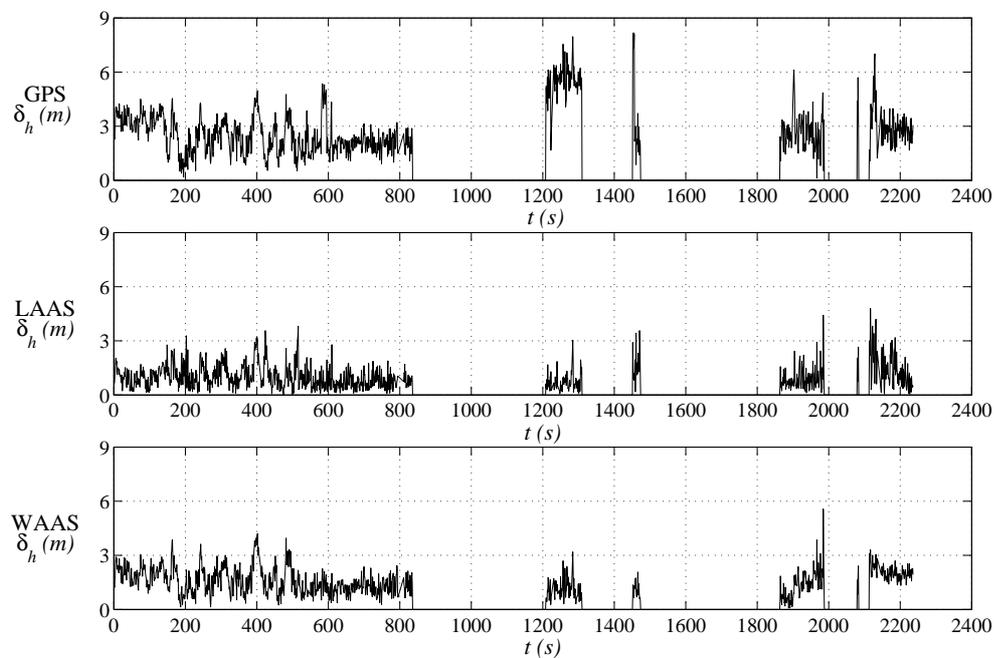


Fig. 3.7. Errori orizzontali di posizione relativi alla prova in distanza

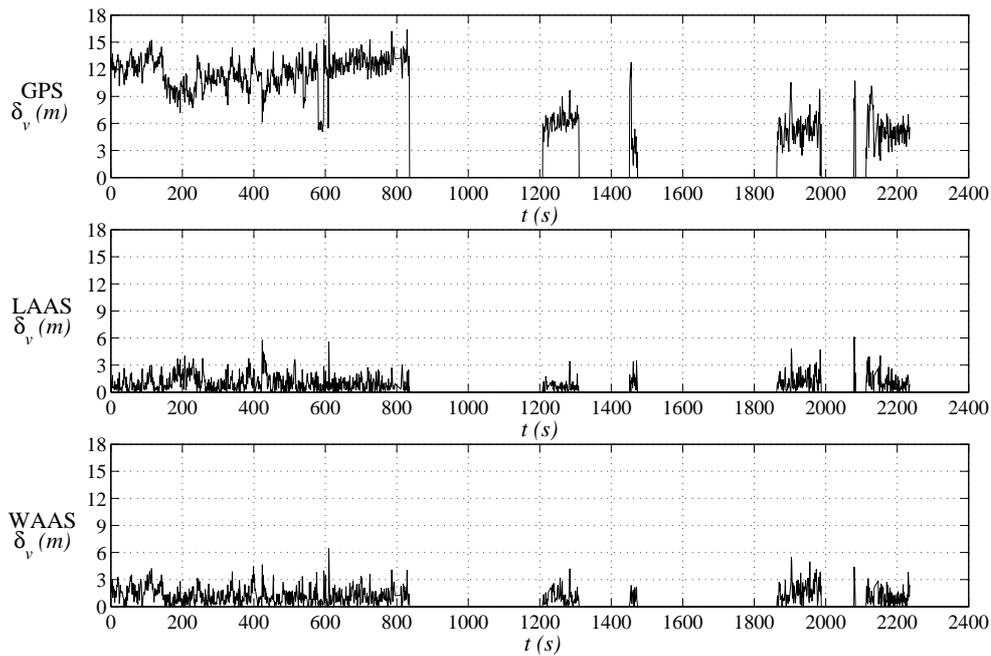


Fig. 3.8. Errori verticali di posizione relativi alla prova in distanza

Dall'analisi dei risultati presenti nelle figure 3.7 e 3.8 si conferma il fatto che le correzioni LAAS risultano migliori di quelle WAAS quasi ovunque. L'unica eccezione si verifica alla massima distanza raggiunta dal ricevitore dove la correlazione spaziale degli errori di *modo comune* si riduce e la loro compensazione per differenza risulta meno efficace. Al contrario le correzioni GPS presentano un andamento omogeneo nel corso della prova. I parametri statistici relativi ai due periodi più lunghi nei quali si è avuta continuità del riferimento di posizione sono raccolti nella tabella 3.3.

	$\bar{\delta}_h$ (m)	σ_{δ_h} (m)	$\bar{\delta}_v$ (m)	σ_{δ_v} (m)
GPS [1,800]s	2.435	0.939	11.617	1.787
GPS [1200,1300]s	5.564	0.910	6.263	0.961
LAAS [1,800]s	1.001	0.618	1.052	0.877
LAAS [1200,1300]s	0.699	0.488	0.672	0.552
WAAS [1,800]s	1.587	0.711	1.271	0.910
WAAS [1200,1300]s	1.136	0.559	1.091	0.822

Tab. 3.3. Parametri statistici delle stime di posizione nella prova di lunga distanza

È necessario rimarcare, infine, che l'applicazione delle correzioni riduce in modo consistente la sensibilità della stima di posizione al cambiamento dei satelliti con cui la stima stessa viene calcolata. Questo aspetto è evidenziato nella figura 3.9 che si riferisce all'errore verticale di un tratto relativo alla terza prova. In particolare si nota come in corrispondenza del secondo 580, l'errore della soluzione ottenuta senza correzioni presenta una variazione di circa sei metri. Ciò è causato dal fatto che uno dei satelliti che in precedenza erano utilizzati per stimare la posizione non risulta più in vista, presumibilmente a causa degli ostacoli incontrati. Infatti dopo circa quindici secondi le misure di pseudodistanza del satellite diventano nuovamente disponibili e l'entità dell'errore calcolato ritorna al valore assunto prima della perdita di visibilità. Va detto, inoltre, che l'effetto dell'errore nella misura di pseudodistanza di un satellite sull'accuratezza della stima di posizione non è predicibile, in quanto quest'ultima dipende dal contributo complessivo di tutti i satelliti. Nel caso presentato in figura 3.9, ad esempio, il contributo del satellite, di cui viene momentaneamente perso l'aggancio, è nettamente peggiorativo.

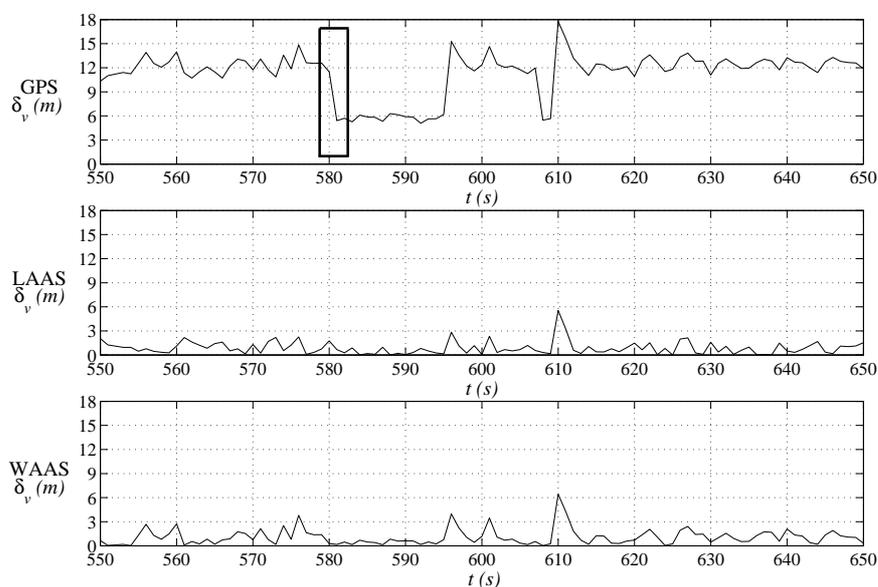


Fig. 3.9. Sensibilità dell'insieme di satelliti sulla stima di posizione

3.5 Conclusioni

I risultati delle prove comparative riportati nella sezione precedente hanno evidenziato il considerevole miglioramento nell'accuratezza della stima di posizione ottenuto applicando alle misure di pseudodistanza le due tipologie di correzione. In particolare le prestazioni delle due tecniche si sono dimostrate sostanzialmente paragonabili. È opportuno rilevare che nell'ambito della navigazione aerea la tecnica WAAS riveste una maggiore importanza in quanto la sua area di applicabilità ha una estensione continentale. La tecnica LAAS mantiene comunque un notevole interesse di ricerca, in particolare per quanto riguarda l'impiego delle misure di fase, per applicazioni in cui si richiede un'accuratezza elevata.

Capitolo 4

Tecniche di posizionamento preciso

4.1 Introduzione

Le tecniche differenziali relative alle misure di fase della portante GPS consentono di ottenere, come accennato nel capitolo precedente, delle stime di posizione con una precisione molto più elevata rispetto a quelle ottenute con le tecniche differenziali di codice, e che risulta tipicamente dell'ordine di pochi centimetri. Va ricordato che la stima di posizione diventa possibile solo dopo aver individuato le ambiguità intere associate alle misure di fase. Nella loro più semplice applicazione le tecniche differenziali di fase richiedono l'impiego di solo due ricevitori, di cui uno è utilizzato come riferimento e rimane perciò fermo in una posizione nota. La distanza tra i due ricevitori, così come per la tecnica LAAS, deve essere limitata entro pochi chilometri, indicativamente 10-15. Le tecniche NRTK utilizzate dal DISTART rappresentano una evoluzione di quelle base e consentono, grazie all'impiego di una rete di molteplici stazioni di riferimento, di estendere la distanza del ricevitore mobile dai nodi della rete fino ad alcune decine di chilometri.

Le tecniche di fase possono essere impiegate, nell'ambito del progetto UAV, per determinare con notevole accuratezza le traiettorie percorse in volo dall'aeromodello e per valutare di conseguenza, nelle reali condizioni operative, le prestazioni della funzione di Navigazione del sistema avionico. A questo proposito è stata intrapresa un'attività di ricerca con l'obiettivo di approfondire le tecniche che impiegano le misure di fase di due ricevitori, cercando di evidenziare le problematiche associate allo specifico ambito applicativo. In particolare in questo capitolo sono dapprima introdotti i modelli delle misure di fase alle '*singole*' e alle '*doppie differenze*', successivamente viene trattato il problema dell'applicazione della tecnica alle '*singole differenze*' nel caso in cui la posizione del ricevitore di riferimento sia nota con un margine di incertezza. Il problema della risoluzione delle ambiguità viene invece discusso nel capitolo 6.

4.2 Modelli alle '*singole*' e alle '*doppie differenze*'

Il modello alle '*singole differenze*' delle misure di fase è costituito dalla differenza delle misure relative allo stesso satellite compiute nello stesso istante da due ricevitori posti ad una distanza tale per cui gli errori di modo comune si possono assumere uguali per

entrambi. Come detto in precedenza uno dei due ricevitori è fisso e le sue coordinate sono note, mentre l'altro può essere in movimento. Considerando quindi il modello delle misure di fase (2.3.6), ed indicando in particolare con F le grandezze relative al ricevitore fisso e con M quelle relative al ricevitore mobile, per il j -esimo satellite il modello alle 'singole differenze' risulta:

$$(\tilde{\phi}_{jM} + N_{jM}) \cdot \lambda - (\tilde{\phi}_{jF} + N_{jF}) \cdot \lambda = r_{jM} + c \cdot b_M + c \cdot b'_j - I'_j + T'_j + m_{jM} + \mu_{jM} \\ - (r_{jF} + c \cdot b_F + c \cdot b'_j - I'_j + T'_j + m_{jF} + \mu_{jF})$$

e ponendo:

$$\Delta\tilde{\phi}_j = \tilde{\phi}_{jM} - \tilde{\phi}_{jF} \quad \Delta N_j = N_{jM} - N_{jF} \quad \Delta b = b_M - b_F \\ \Delta m_j = m_{jM} - m_{jF} \quad \Delta\mu_j = \mu_{jM} - \mu_{jF}$$

diventa

$$(\Delta\tilde{\phi}_j + \Delta N_j) \cdot \lambda = r_{jM} - r_{jF} + c \cdot \Delta b + \Delta m_j + \Delta\mu_j \quad (4.2.1)$$

L'ipotesi di sincronizzazione delle misure dei due ricevitori formulata in precedenza è fondamentale per poter considerare un unico valore per le coordinate dei satelliti presenti nei termini r_{jM} e r_{jF} . Data la notevole velocità a cui si muovono i satelliti (circa 3Km/s) un disallineamento di pochi millisecondi corrisponde infatti ad una differenza di posizione di alcuni metri. Nei casi in cui le misure non siano sincronizzate è possibile propagare linearmente la fase di uno dei ricevitori all'istante di misura dell'altro utilizzando la frequenza Doppler. In particolare indicando rispettivamente con t_M e t_F gli istanti, espressi nel sistema di riferimento temporale GPS, in cui il ricevitore mobile e quello fisso eseguono la misura, il valore $\hat{\phi}_{jM}$ della fase del ricevitore mobile propagata all'istante di misura di quello fisso risulta:

$$\hat{\phi}_{jM}(t_F) = \tilde{\phi}_{jM}(t_M) + \tilde{D}_{jM}(t_M) \cdot (t_F - t_M)$$

Supponendo nota, per il momento, la differenza delle ambiguità iniziali ΔN_j , le incognite del modello alle singole differenze sono costituite dalle coordinate del ricevitore mobile x_M, y_M, z_M e dalla differenza dei bias dei due ricevitori Δb . Per ottenere una stima del vettore delle incognite \vec{x}_M , si può quindi procedere linearizzando il modello alle singole differenze, analogamente a quanto fatto nella (2.4.1), nell'intorno di un vettore di riferimento \vec{x}_{M_0} , ottenendo:

$$(\Delta\tilde{\phi}_j + \Delta N_j) \cdot \lambda \approx r_{jM_0} - r_{jF} + c \cdot \Delta b_0 + \hat{h}_{jM} \cdot (\vec{x}_M - \vec{x}_{M_0}) + \Delta m_j + \Delta\mu_j \quad (4.2.2)$$

in cui:

$$\vec{x}_M = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \\ c \cdot \Delta b \end{bmatrix} \quad \vec{x}_{M_0} = \begin{bmatrix} x_{M_0} \\ y_{M_0} \\ z_{M_0} \\ c \cdot \Delta b_0 \end{bmatrix}$$

$$r_{jM_0} = \sqrt{(X_j - x_{M_0})^2 + (Y_j - y_{M_0})^2 + (Z_j - z_{M_0})^2}$$

$$\hat{h}_{jM} = \vec{\nabla} r_{jM} \Big|_{\vec{x}_{M_0}} = \begin{bmatrix} \frac{(x_{M_0} - X_j)}{r_{jM_0}} & \frac{(y_{M_0} - Y_j)}{r_{jM_0}} & \frac{(z_{M_0} - Z_j)}{r_{jM_0}} & 1 \end{bmatrix}$$

Disponendo delle misure di almeno quattro satelliti è possibile calcolare una stima delle incognite. Poichè le coordinate del ricevitore fisso x_F, y_F, z_F sono note, è possibile introdurre una formulazione equivalente del modello linearizzato che consente di stimare le componenti, $s_{x_M}, s_{y_M}, s_{z_M}$, della posizione relativa del ricevitore mobile rispetto a quello fisso:

$$(\Delta\tilde{\phi}_j + \Delta N_j) \cdot \lambda \approx r_{jM_0} - r_{jF} + c \cdot \Delta b_0 + \hat{h}_{jM} \cdot (\vec{s}_M - \vec{s}_{M_0}) + \Delta m_j + \Delta \mu_j \quad (4.2.3)$$

in cui:

$$\vec{s}_M = \begin{bmatrix} s_{x_M} \\ s_{y_M} \\ s_{z_M} \\ c \cdot \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M - x_F \\ y_M - y_F \\ z_M - z_F \\ c \cdot \Delta b \end{bmatrix} \quad \vec{s}_{M_0} = \begin{bmatrix} s_{x_{M_0}} \\ s_{y_{M_0}} \\ s_{z_{M_0}} \\ c \cdot \Delta b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{M_0} - x_F \\ y_{M_0} - y_F \\ z_{M_0} - z_F \\ c \cdot \Delta b_0 \end{bmatrix}$$

$$r_{jM_0} = \sqrt{\left(X_j - (x_F - s_{x_{M_0}})\right)^2 + \left(Y_j - (y_F - s_{y_{M_0}})\right)^2 + \left(Z_j - (z_F - s_{z_{M_0}})\right)^2}$$

$$\hat{h}_{jM} = \vec{\nabla} r_{jM} \Big|_{\vec{x}_{M_0}} = \begin{bmatrix} \frac{((x_F - s_{x_{M_0}}) - X_j)}{r_{jM_0}} & \frac{((y_F - s_{y_{M_0}}) - Y_j)}{r_{jM_0}} & \frac{((z_F - s_{z_{M_0}}) - Z_j)}{r_{jM_0}} & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la relazione (4.2.1), si può definire il modello alle ‘doppie differenze’ delle misure di fase come la differenza tra le relazioni alle ‘singole differenze’ di due satelliti compiute da due ricevitori. Per la coppia di satelliti j e k si può scrivere quindi:

$$\begin{aligned} (\Delta\tilde{\phi}_j + \Delta N_j) \cdot \lambda - (\Delta\tilde{\phi}_k + \Delta N_k) \cdot \lambda &= r_{jM} - r_{jF} + c \cdot \Delta b + \Delta m_j + \Delta \mu_j \\ &\quad - (r_{kM} - r_{kF} + c \cdot \Delta b + \Delta m_k + \Delta \mu_k) \\ (\nabla\Delta\tilde{\phi}_{jk} + \nabla\Delta N_{jk}) \cdot \lambda &= r_{jM} - r_{jF} - r_{kM} + r_{kF} + \nabla\Delta m_{jk} + \nabla\Delta \mu_{jk} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \nabla\Delta\tilde{\phi}_{jk} &= \Delta\tilde{\phi}_j - \Delta\tilde{\phi}_k & \nabla\Delta N_{jk} &= \Delta N_j - \Delta N_k \\ \nabla\Delta m_{jk} &= \Delta m_j - \Delta m_k & \nabla\Delta \mu_{jk} &= \Delta \mu_j - \Delta \mu_k \end{aligned}$$

Come si può notare, nel modello alle ‘doppie differenze’ il contributo corrispondente alla differenza dei bias dei ricevitori Δb viene eliminato, perciò le incognite sono solamente le tre coordinate di posizione del ricevitore mobile, che sono quelle di maggiore interesse. È importante evidenziare che, per ottenere una stima del vettore delle incognite, sono

comunque necessarie le misure di quattro satelliti, una di esse in particolare viene scelta come riferimento da sottrarre alle rimanenti.

L'introduzione del modello alle '*doppie differenze*' non diminuisce l'entità degli errori sulle misure e quindi non comporta miglioramenti nella stima di posizione rispetto alle '*singole differenze*', ma proprio per il fatto che riduce le incognite del problema alle sole componenti della posizione e semplifica quindi la notazione, è stato tradizionalmente il più impiegato nella letteratura riguardante le misure di fase, in particolare per la risoluzione delle ambiguità.

4.3 Utilizzo di una stazione di riferimento non georeferenziata

Nella esecuzione delle prove di volo dell'aeromodello non è possibile utilizzare come riferimento uno dei ricevitori della stazione di terra presente presso i laboratori della Facoltà di Forlì, dal momento che il campo di prova dista più di venti chilometri e quindi gli errori di *modo comune* non risulterebbero completamente compensati. Per questo motivo viene portato sul campo di prova un ricevitore ausiliario che viene mantenuto fermo durante l'acquisizione delle misure. La sua posizione tuttavia non è nota con precisione ma viene stimata utilizzando le misure di codice GPS. L'applicazione della posizione stimata del ricevitore di riferimento nel modello alle '*singole differenze*' linearizzato, che è rappresentato dall'equazione (4.2.2), introduce un errore nella distanza r_{jF} che porta di conseguenza ad un errore nella stima di posizione assoluta del ricevitore mobile. D'altra parte è possibile ottenere una stima accurata della posizione relativa tra i due ricevitori con la (4.2.3), dal momento che, in questo caso l'errore viene introdotto sia nel termine r_{jF} che nel termine r_{jM_0} e quindi in buona parte si compensa, nello stesso modo in cui l'errore sulla posizione dei satelliti calcolate con le effemeridi viene compensato dalle correzioni differenziali LAAS nella (3.2.3). Tuttavia una componente residua di errore è sempre presente e la sua entità, trascurabile per le misure di codice, potrebbe risultare eccessiva per le misure di fase. In particolare essa dipende da diversi fattori come: la distanza tra i ricevitori, la posizione relativa tra i ricevitori ed il satellite, il modulo e la direzione dello scostamento sulla posizione del ricevitore fisso. Va rilevato che utilizzando il modello alle '*doppie differenze*' i contributi di errore presenti in ogni relazione sono due, uno per ciascun satellite.

Una relazione matematica dell'errore introdotto nel modello alle '*singole differenze*' da uno scostamento non noto sulla posizione del ricevitore fisso è ricavata in [36], in cui le coordinate dei ricevitori e del satellite sono espresse nel sistema di riferimento locale, che è stato descritto nella sezione 3.4, la cui origine coincide con la posizione vera del ricevitore fisso ed i suoi assi sono diretti verso Nord, verso Est ed in direzione ortogonale all'ellissoide con verso orientato all'esterno. Inoltre vengono poste le seguenti condizioni:

- la distanza tra i due ricevitori deve essere piccola (meno di 100 km) rispetto alla distanza ricevitore-satellite

- la differenza di quota dei due ricevitori deve essere piccola rispetto alla loro distanza, in modo tale da considerare il vettore di posizione relativa come giacente nel piano Nord-Est

Di conseguenza si può dimostrare che un'approssimazione dell'errore, indicato con K , è data dall'espressione:

$$K = - \left[\sin(\alpha - \alpha_0) \sin(\alpha - \alpha_1) + \cos^2 \zeta \cos(\alpha - \alpha_0) \cos(\alpha - \alpha_1) \right] \frac{r_{MF} \cdot \delta_h}{r_{jM}} + \sin \zeta \cos \zeta \cos(\alpha - \alpha_0) \frac{r_{MF} \cdot \delta_v}{r_{jM}} \quad (4.3.1)$$

dove:

- δ_h , δ_v rappresentano i moduli delle componenti orizzontale e verticale dell'errore di posizione del ricevitore di riferimento
- α , ζ sono gli angoli di azimuth e co-elevazione del satellite nel sistema di riferimento locale
- α_0 , è l'azimuth del vettore di posizione relativa tra i due ricevitori nel sistema di riferimento locale
- α_1 , è l'azimuth della componente orizzontale dell'errore di posizione del ricevitore di riferimento nel sistema di coordinate locali
- r_{jM} è la distanza tra ricevitore mobile e satellite j -esimo, che è stata introdotta in precedenza

e dove la distanza tra i due ricevitori è indicata con r_{MF} :

$$r_{MF} = \sqrt{(x_M - x_F)^2 + (y_M - y_F)^2 + (z_M - z_F)^2}$$

Le variabili appena introdotte sono mostrate in figura 4.1, dove le posizioni dei ricevitori e del satellite sono considerate espresse nel sistema di riferimento locale.

Riguardo alle due condizioni poste per derivare K possono essere fatte alcune considerazioni. La prima condizione, che richiede che la distanza tra i due ricevitori sia piccola rispetto alle distanze ricevitore-satellite, è anche necessaria per poter ritenere compensati gli errori di *modo comune*, perciò è sempre verificata nelle tipiche applicazioni del modello alle *'singole differenze'*. La seconda condizione, invece, che assume il vettore di posizione relativa tra i due ricevitori giacente nel piano Nord-Est, non consente di considerare tutti i possibili casi di posizionamento relativo tra i ricevitori che si verificano, ad esempio, quando l'aeromodello si trova in volo. Per questo motivo si propone una rappresentazione alternativa del modello alle *'singole differenze'* che non fissa nessuna condizione sulla giacitura del vettore di posizione relativa [34]. La presenza degli errori di misura non è essenziale ai fini delle successive considerazioni, perciò, trascurando i

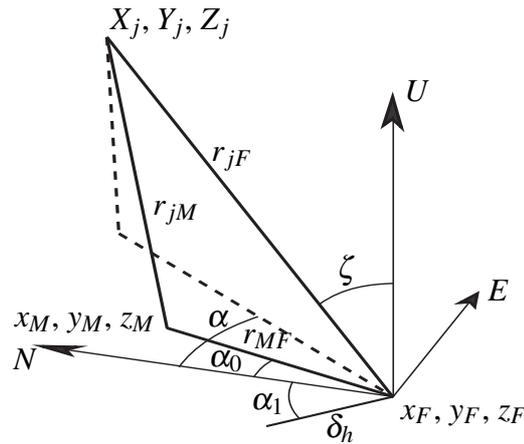


Fig. 4.1. Configurazione delle posizioni dei ricevitori e del satellite

termini Δm_j , $\Delta \mu_j$ ed indicando con $\Delta \phi_j$ la differenza delle fasi esatte dei due ricevitori, l'equazione (4.2.1) può essere riscritta in forma vettoriale:

$$(\Delta \phi_j + \Delta N_j) \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \frac{x_M - X_j}{r_{jM}} & \frac{y_M - Y_j}{r_{jM}} & \frac{z_M - Z_j}{r_{jM}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M - X_j \\ y_M - Y_j \\ z_M - Z_j \\ c \cdot b_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{x_F - X_j}{r_{jF}} & \frac{y_F - Y_j}{r_{jF}} & \frac{z_F - Z_j}{r_{jF}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_F - X_j \\ y_F - Y_j \\ z_F - Z_j \\ c \cdot b_F \end{bmatrix}$$

Occorre evidenziare che i vettori riga introdotti nella relazione rappresentano i gradienti di r_{jM} e r_{jF} entrambi calcolati nelle coordinate di posizione vere di ciascun ricevitore, perciò saranno indicati con h_{jM} e h_{jF} , in analogia a quanto è stato fatto in precedenza nelle equazioni (4.2.2) e (4.2.3). Sommando e sottraendo dal secondo membro della relazione precedente il termine $h_{jM} \cdot [x_F - X_j, y_F - Y_j, z_F - Z_j, c \cdot b_F]^T$, dopo alcuni passaggi si può ottenere:

$$(\Delta \phi_j + \Delta N_j) \cdot \lambda = h_{jM} \begin{bmatrix} x_M - x_F \\ y_M - y_F \\ z_M - z_F \\ c \cdot (b_M - b_F) \end{bmatrix} + \underbrace{(h_{jM} - h_{jF}) \begin{bmatrix} x_F - X_j \\ y_F - Y_j \\ z_F - Z_j \\ c \cdot b_F \end{bmatrix}}_{C_j} \quad (4.3.2)$$

dove le incognite che devono essere stimate (cioè le coordinate del vettore di posizione relativa e la differenza dei bias) sono evidenziate nel primo vettore colonna.

Se è disponibile una stima accurata di h_{jM} e del termine indicato con C_j , la rappresentazione espressa dall'equazione (4.3.2) può essere utilizzata per calcolare una soluzione.

Nella sezione successiva si dimostrerà che, impiegando per i termini h_{jM} , h_{jF} e per la posizione del ricevitore di riferimento, i valori stimati con le misure di codice, l'errore introdotto nel modello alle 'singole differenze' è sensibilmente inferiore alla metà della lunghezza d'onda della portante, condizione necessaria per poter risolvere le ambiguità iniziali. La relazione che esprime l'errore può essere derivata facilmente.

Prima di tutto è opportuno notare che la differenza tra h_{jM} e h_{jF} , presente nell'equazione (4.3.2), produce un vettore riga con il quarto elemento uguale a zero. Di conseguenza, il contributo del bias del clock del ricevitore di riferimento nel corrispondente prodotto scalare è nullo, perciò anche il quarto elemento dell'ultimo vettore colonna nell'equazione (4.3.2) può essere posto a zero senza perdita di generalità. Inoltre poichè le coordinate di posizione del satellite, in h_{jM} e C_j , sono sottratte alle corrispondenti coordinate del ricevitore, saranno considerate esatte e i errori loro errori, causati dalla imprecisione delle effemeridi, saranno sottratti algebricamente alle componenti della posizione dei ricevitori stimate col codice. Questa manipolazione non altera le distanze e le linee di vista tra il satellite ed i ricevitori che sono state ottenute col codice. Si possono quindi definire:

- $\tilde{x}_M, \tilde{y}_M, \tilde{z}_M$ rappresentano le componenti della posizione del ricevitore mobile stimate col codice, che includono anche le componenti di errore della posizione del satellite
- $\tilde{x}_F, \tilde{y}_F, \tilde{z}_F$ rappresentano le componenti della posizione del ricevitore mobile stimate col codice, che includono anche le componenti di errore della posizione del satellite
- \tilde{r}_{jM} rappresenta la distanza tra la posizione del satellite e la posizione del ricevitore mobile stimata col codice
- \tilde{r}_{jF} rappresenta la distanza tra la posizione del satellite e la posizione del ricevitore di riferimento stimata col codice
- \tilde{h}_{jM} rappresenta il gradiente r_{jM} calcolato in $\tilde{x}_M, \tilde{y}_M, \tilde{z}_M$
- \tilde{h}_{jF} rappresenta il gradiente r_{jF} calcolato in $\tilde{x}_F, \tilde{y}_F, \tilde{z}_F$

Ancora una volta è possibile sommare sottrarre dal secondo membro dell'equazione (4.3.2) i termini

$$\tilde{h}_{jM} \begin{bmatrix} x_M - x_F \\ y_M - y_F \\ z_M - z_F \\ c \cdot (b_M - b_F) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} \quad (\tilde{h}_{jM} - \tilde{h}_{jF}) \begin{bmatrix} \tilde{x}_F - X_j \\ \tilde{y}_F - Y_j \\ \tilde{z}_F - Z_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

ottenendo dopo alcuni passaggi:

$$(\Delta\phi_j + \Delta N_j) \cdot \lambda = \tilde{h}_{jM} \begin{bmatrix} x_M - x_F \\ y_M - y_F \\ z_M - z_F \\ c \cdot (b_M - b_F) \end{bmatrix} + (\tilde{h}_{jM} - \tilde{h}_{jF}) \begin{bmatrix} \tilde{x}_F - X_j \\ \tilde{y}_F - Y_j \\ \tilde{z}_F - Z_j \\ 0 \end{bmatrix} + K_A \quad (4.3.3)$$

dove K_A indica l'errore della rappresentazione alternativa, che risulta:

$$K_A = (h_{jM} - \tilde{h}_{jM}) \begin{bmatrix} x_M - x_F \\ y_M - y_F \\ z_M - z_F \\ 0 \end{bmatrix} + (h_{jM} - h_{jF}) \begin{bmatrix} x_F - X_j \\ y_F - Y_j \\ z_F - Z_j \\ 0 \end{bmatrix} - (\tilde{h}_{jM} - \tilde{h}_{jF}) \begin{bmatrix} \tilde{x}_F - X_j \\ \tilde{y}_F - Y_j \\ \tilde{z}_F - Z_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infine, dal momento che tutti i vettori hanno il quarto elemento uguale a zero, si può giungere ad una forma più compatta e fisicamente significativa di K_A , considerando solo i primi tre elementi di ciascun vettore. Per esempio il vettore riga $[x_F - X_j, y_F - Y_j, z_F - Z_j]$, che rappresenta il vettore vero di posizione relativa tra satellite e ricevitore di riferimento, può essere indicata con d_{jF} . Inoltre il vettore riga che rappresente le componenti delle linea di vista vera tra satellite e ricevitore di riferimento, costituita dai primi tre elementi di h_{jF} può essere indicata con $\vec{1}_{jF}$. Chiaramente $\vec{1}_{jF}$ ha norma unitaria ed è allineata con d_{jF} .

Definendo in modo simile i vettori d_{jM} , $\vec{1}_{jM}$, \tilde{d}_{jF} , $\tilde{\vec{1}}_{jF}$, \tilde{d}_{jM} e $\tilde{\vec{1}}_{jM}$, l'espressione dell'errore diventa:

$$K_A = (\vec{1}_{jM} - \tilde{\vec{1}}_{jM}) \cdot (d_{jM}^T - d_{jF}^T) + (\vec{1}_{jM} - \vec{1}_{jF}) \cdot d_{jF}^T - (\tilde{\vec{1}}_{jM} - \tilde{\vec{1}}_{jF}) \cdot \tilde{d}_{jF}^T \quad (4.3.4)$$

4.3.1 Valutazione dell'accuratezza

La formulazione dell'errore K_A , espressa dalla equazione (4.3.4), è completamente generale, dal momento che è stata derivata senza limitazioni sulla posizione relativa dei ricevitori. Tuttavia essa non evidenzia in modo esplicito l'influenza di alcuni parametri di particolare interesse, come ad esempio la distanza tra i ricevitori e l'errore sulle loro posizioni stimate con il codice, sull'entità dell'errore introdotto nel modello alle 'singole differenze'. Di conseguenza non è facile valutare il valore massimo assunto dall'errore. L'approccio seguito per analizzare l'accuratezza della relazione (4.3.2) è basato sulla ricerca di un limite superiore e di un limite inferiore per K_A che dipendano direttamente dai parametri citati in precedenza.

Prima di tutto, applicando la proprietà distributiva all'equazione (4.3.4) e calcolando ciascun prodotto scalare utilizzando il coseno dell'angolo formato da due vettori e le loro norme, si ottiene:

$$\begin{aligned} K_A &= \vec{1}_{jM} \cdot d_{jM}^T - \vec{1}_{jM} \cdot \tilde{d}_{jF}^T - \vec{1}_{jM} \cdot d_{jM}^T + \vec{1}_{jM} \cdot d_{jF}^T \\ &\quad + \vec{1}_{jM} \cdot \tilde{d}_{jF}^T - \vec{1}_{jF} \cdot d_{jF}^T - \vec{1}_{jM} \cdot \tilde{d}_{jF}^T + \vec{1}_{jF} \cdot \tilde{d}_{jF}^T \\ &= \underbrace{|\vec{1}_{jM}|}_{1} \cdot \underbrace{|d_{jM}^T|}_{r_{jM}} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} - \underbrace{|\vec{1}_{jM}|}_{1} \cdot \underbrace{|d_{jM}^T|}_{r_{jM}} \cdot \cos \gamma + \underbrace{|\vec{1}_{jM}|}_{1} \cdot \underbrace{|d_{jF}^T|}_{r_{jF}} \cdot \cos \beta \\ &\quad - \underbrace{|\vec{1}_{jF}|}_{1} \cdot \underbrace{|d_{jF}^T|}_{r_{jF}} \cdot \cos 0 - \underbrace{|\vec{1}_{jM}|}_{1} \cdot \underbrace{|\tilde{d}_{jF}^T|}_{\tilde{r}_{jF}} \cdot \cos \phi + \underbrace{|\vec{1}_{jF}|}_{1} \cdot \underbrace{|\tilde{d}_{jF}^T|}_{\tilde{r}_{jF}} \cdot \cos 0 \\ &= (1 - \cos \gamma) \cdot r_{jM} + (\cos \beta - 1) \cdot r_{jF} + (1 - \cos \phi) \cdot \tilde{r}_{jF} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

dove r_{jM} , \tilde{r}_{jM} , r_{jF} e \tilde{r}_{jF} sono stati definiti in precedenza ed inoltre:

- γ è l'angolo tra $\tilde{\mathbf{l}}_{jM}$ (o \tilde{d}_{jM}^T) e \mathbf{l}_{jM} (o d_{jM}^T), che è funzione del modulo e della direzione dell'errore presente sulla stima di posizione del ricevitore mobile ottenuta con il codice
- β è l'angolo tra $\tilde{\mathbf{l}}_{jM}$ (o \tilde{d}_{jM}^T) e d_{jF}^T (o \mathbf{l}_{jF})
- ϕ è l'angolo tra $\tilde{\mathbf{l}}_{jM}$ (o \tilde{d}_{jM}^T) e \tilde{d}_{jF}^T (o $\tilde{\mathbf{l}}_{jF}$)

Nel seguito saranno considerati anche altri due angoli:

- ε , che è l'angolo tra \mathbf{l}_{jM} (o d_{jM}^T) e \mathbf{l}_{jF} (o d_{jF}^T) ed è funzione del vettore di posizione relativa tra i due ricevitori
- δ , è l'angolo tra $\tilde{\mathbf{l}}_{jF}$ (o \tilde{d}_{jF}^T) e \mathbf{l}_{jF} (o d_{jF}^T) ed è funzione del modulo e della direzione dell'errore presente sulla stima di posizione del ricevitore di riferimento ottenuta con il codice

Come si verificherà in seguito, tutti gli angoli appena definiti sono piccoli, perciò i loro coseni sono positivi e possono essere sostituiti con l'approssimazione al secondo ordine dell'espansione in serie nell'intorno dello zero. Inoltre γ e δ sono in generale alcuni ordini di grandezza inferiori rispetto a β , ϕ e ε , di conseguenza i termini γ^2 , δ^2 e $\gamma \cdot \delta$ sono trascurabili. Quindi l'equazione (4.3.5) diventa:

$$K_A \approx \left(1 - (1 - \gamma^2/2)\right) \cdot r_{jM} + \left((1 - \beta^2/2) - 1\right) \cdot r_{jF} + \left(1 - (1 - \phi^2/2)\right) \cdot \tilde{r}_{jF}$$

$$K_A \approx -\frac{\beta^2}{2} \cdot r_{jF} + \frac{\phi^2}{2} \cdot \tilde{r}_{jF} \quad (4.3.6)$$

L'equazione (4.3.6) mostra che l'errore K_A è determinato dalla somma algebrica di due termini di segno opposto. In merito a questo, può verificarsi una delle seguenti configurazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta > \phi, & r_{jF} > \tilde{r}_{jF} \rightarrow K_A < 0 \\ \beta > \phi, & r_{jF} < \tilde{r}_{jF} \rightarrow K_A \leq 0 \\ \beta < \phi, & r_{jF} > \tilde{r}_{jF} \rightarrow K_A \leq 0 \\ \beta < \phi, & r_{jF} < \tilde{r}_{jF} \rightarrow K_A > 0 \end{array} \right.$$

dove nel primo caso, il segno di K_A risulta sempre negativo, mentre nel quarto, risulta sempre positivo. Inoltre si può verificare facilmente che fissando il valore assoluto delle differenze tra β e ϕ , e tra r_{jF} e \tilde{r}_{jF} , il primo caso corrisponde al più piccolo valore negativo assunto da K_A ed il quarto corrisponde al massimo valore positivo. Perciò la ricerca di un limite per l'errore può essere divisa nella ricerca di un minorante, K_A^- , della relazione (4.3.6) nelle condizioni relative al primo caso (limite inferiore), e nella ricerca di un maggiorante, K_A^+ , della stessa relazione nelle condizioni relative al quarto caso (limite superiore). Per prima cosa sarà considerato il limite superiore.

Indicando con Δr_{jF} la norma del vettore ottenuto dalla differenza di \tilde{d}_{jF}^T e d_{jF}^T , che rappresenta l'errore presente sulla posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice, vale la disuguaglianza triangolare:

$$\tilde{r}_{jF} \leq r_{jF} + \Delta r_{jF} \quad (4.3.7)$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} K_A &\leq -\frac{\beta^2}{2} \cdot r_{jF} + \frac{\phi^2}{2} \cdot (r_{jF} + \Delta r_{jF}) \\ &= \frac{\phi^2 - \beta^2}{2} \cdot r_{jF} + \frac{\phi^2}{2} \cdot \Delta r_{jF} \end{aligned}$$

inoltre, dal momento che nel caso del limite superiore ϕ è più grande di β , può essere riscritto come la somma di β e di un termine positivo generico $\bar{\delta}$, ottenendo:

$$K_A \leq \frac{(\beta + \bar{\delta})^2 - \beta^2}{2} \cdot r_{jF} + \frac{(\beta + \bar{\delta})^2}{2} \cdot \Delta r_{jF}$$

e, assumendo che $\bar{\delta}$ sia qualche ordine di grandezza inferiore a β , come si mostrerà in seguito, il termine $\bar{\delta}^2$ può essere trascurato, portando a:

$$K_A \leq \beta \cdot \bar{\delta} \cdot r_{jF} + \frac{(\beta^2 + 2 \cdot \beta \cdot \bar{\delta})}{2} \cdot \Delta r_{jF} \quad (4.3.8)$$

In modo simile per il limite inferiore vale:

$$\begin{aligned} K_A &\geq -\frac{\beta^2}{2} \cdot (\tilde{r}_{jF} + \Delta r_{jF}) + \frac{\phi^2}{2} \cdot \tilde{r}_{jF} \\ &= -\frac{\beta^2 - \phi^2}{2} \cdot \tilde{r}_{jF} - \frac{\beta^2}{2} \cdot \Delta r_{jF} \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la disuguaglianza triangolare:

$$r_{jF} \leq \tilde{r}_{jF} + \Delta r_{jF}$$

Scrivendo in questo caso ϕ come la differenza tra β e $\bar{\delta}$, e trascurando il termine $\bar{\delta}^2$, risulta:

$$K_A \geq -\beta \cdot \bar{\delta} \cdot \tilde{r}_{jF} - \frac{\beta^2}{2} \cdot \Delta r_{jF}$$

e finalmente, applicando ancora la disuguaglianza triangolare espressa dall'equazione (4.3.7), si ottiene:

$$\begin{aligned} K_A &\geq -\beta \cdot \bar{\delta} \cdot (r_{jF} + \Delta r_{jF}) - \frac{\beta^2}{2} \cdot \Delta r_{jF} \\ &= -\left(\beta \cdot \bar{\delta} \cdot r_{jF} + \frac{(\beta^2 + 2 \cdot \beta \cdot \bar{\delta})}{2} \cdot \Delta r_{jF} \right) \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Occorre evidenziare che le disuguaglianze (4.3.8) e (4.3.9) rappresentano limiti della stessa entità ma segno opposto, e possono essere ulteriormente limitati superiormente ed inferiormente introducendo i valori massimi di β e $\bar{\delta}$. I valori massimi possono essere espressi rendendo espliciti i vincoli geometrici di β e ϕ con gli angoli ε , γ e δ , che dipendono dal vettore di posizione relativa e dagli errori di stima dei due ricevitori. A questo proposito, è opportuno notare che i versori \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jF} , e \vec{l}_{jF} , determinano, a coppie di due, tre triangoli isosceli, che corrispondono alle facce di un tetraedro, perciò è possibile mettere in relazione gli angoli ϕ , β e δ , formati dai vettori, con i corrispondenti lati della quarta faccia, indicati rispettivamente con f , b e d , come mostra la figura 4.2. Infatti risulta:

$$f = 2 \cdot \sin(\phi/2) \quad b = 2 \cdot \sin(\beta/2) \quad d = 2 \cdot \sin(\delta/2)$$

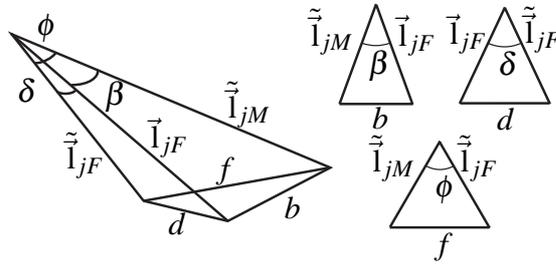


Fig. 4.2. Tetraedro formato da \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jF} e \vec{l}_{jF}

Applicando la disuguaglianza triangolare alla quarta faccia del tetraedro e sostituendo i seni con gli angoli corrispondenti, che in precedenza sono stati assunti piccoli, si può ottenere:

$$\begin{aligned} b - d &\leq f \leq b + d \\ &\downarrow = \\ \mathcal{Z} \cdot \sin \frac{\beta}{2} - \mathcal{Z} \cdot \sin \frac{\delta}{2} &\leq \mathcal{Z} \cdot \sin \frac{\phi}{2} \leq \mathcal{Z} \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \mathcal{Z} \cdot \sin \frac{\delta}{2} \\ &\downarrow \approx \\ \frac{\beta}{\mathcal{Z}} - \frac{\delta}{\mathcal{Z}} &\leq \frac{\phi}{\mathcal{Z}} \leq \frac{\beta}{\mathcal{Z}} + \frac{\delta}{\mathcal{Z}} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Dall'equazione (4.3.10) segue che il massimo valore di $\bar{\delta}$ da inserire nelle relazioni (4.3.8) e (4.3.9) è δ . Allo stesso modo, considerando i vettori \vec{l}_{jM} , \vec{l}_{jM} , e \vec{l}_{jF} , vale:

$$\beta \leq \varepsilon + \gamma$$

perciò il massimo valore di β è

$$\beta = \varepsilon + \gamma$$

Occorre evidenziare che i vincoli posti sugli angoli, con ϕ espresso dalla somma di β e δ e con β espresso dalla somma di ε e γ , corrispondono alla configurazione in cui i quattro vettori coinvolti appartengono allo stesso piano e seguono la sequenza $\vec{\tilde{l}}_{jM}, \vec{l}_{jM}, \vec{l}_{jF}, \vec{\tilde{l}}_{jF}$, come esposto nella figura 4.3(a).

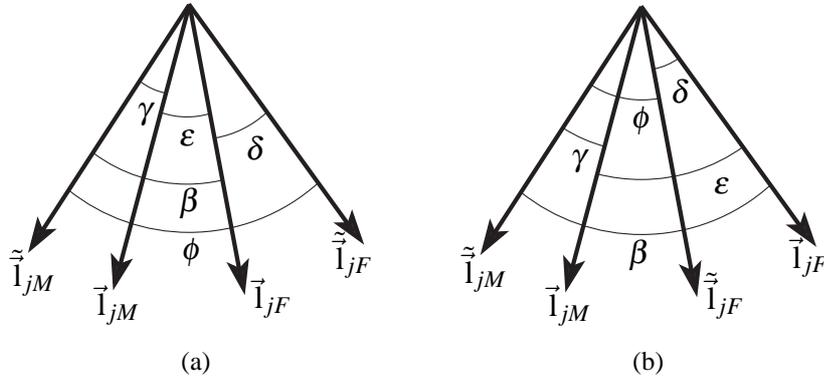


Fig. 4.3. (a) Configurazione di $\vec{\tilde{l}}_{jM}, \vec{l}_{jM}, \vec{l}_{jF}$ e $\vec{\tilde{l}}_{jF}$ che corrisponde alla relazione (4.3.11) del limite superiore, (b) Configurazione di $\vec{\tilde{l}}_{jM}, \vec{l}_{jM}, \vec{l}_{jF}$ e $\vec{\tilde{l}}_{jF}$ corrispondente alla relazione (4.3.12) del limite inferiore

Applicando il valore massimo di δ e β , l'equazione (4.3.8) può essere maggiorata ottenendo:

$$K_A \leq (\varepsilon + \gamma) \cdot \delta \cdot r_{jF} + \frac{(\varepsilon + \gamma)^2 + 2 \cdot (\varepsilon + \gamma) \cdot \delta}{2} \cdot \Delta r_{jF}$$

e finalmente, calcolando il quadrato e trascurando i termini γ^2 , δ^2 e $\gamma \cdot \delta$, il limite superiore diventa:

$$K_A^+ = \varepsilon \cdot \delta \cdot r_{jF} + \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \gamma \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \delta \right) \cdot \Delta r_{jF} \quad (4.3.11)$$

Il limite inferiore K_A^- , dal momento che è opposto al limite superiore, risulta:

$$K_A^- = -\varepsilon \cdot \delta \cdot r_{jF} - \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \gamma \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \delta \right) \cdot \Delta r_{jF} \quad (4.3.12)$$

In questo caso i vincoli posti sugli angoli, con ϕ espresso dalla differenza di β e δ e con β espresso ancora come la somma di ε e γ , corrispondono alla configurazione in cui i quattro vettori coinvolti appartengono allo stesso piano e seguono la sequenza $\vec{\tilde{l}}_{jM}, \vec{l}_{jM}, \vec{\tilde{l}}_{jF}, \vec{l}_{jF}$, come esposto in figura 4.3(b).

Le espressioni (4.3.11) e (4.3.12) possono essere valutate per ogni configurazione dei ricevitori e del satellite, infatti, fissando le loro posizioni, si possono determinare i valori di r_{jM} , r_{jF} e r_{MB} , che possono essere messi in relazione con l'angolo ε applicando il

teorema dei coseni al triangolo corrispondente:

$$\cos \varepsilon = \frac{r_{jM}^2 + r_{jF}^2 - r_{MB}^2}{2 \cdot r_{jM} \cdot r_{jF}}$$

$$\varepsilon \approx \sin \varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{r_{jM}^2 + r_{jF}^2 - r_{MB}^2}{2 \cdot r_{jM} \cdot r_{jF}} \right)^2} \quad (4.3.13)$$

Inoltre il teorema dei coseni può essere applicato al triangolo determinato dai vettori \tilde{d}_{jF}^T e d_{jF}^T , ottenendo una relazione analoga per δ :

$$\cos \delta = \frac{r_{jF}^2 + \tilde{r}_{jF}^2 - \Delta r_{jF}^2}{2 \cdot r_{jF} \cdot \tilde{r}_{jF}} \quad (4.3.14)$$

Dal momento che la direzione del vettore che rappresenta l'errore sulla posizione del ricevitore di riferimento stimata col codice è indipendente dalla posizione di entrambi i ricevitori e del satellite, è opportuno valutare quale sia la configurazione che massimizza l'angolo δ o, equivalentemente, minimizza $\cos \delta$.

Fissando l'ampiezza, Δr_{jF} , dell'errore e avendo precedentemente determinato r_{jF} , l'equazione (4.3.14) risulta funzione solo di \tilde{r}_{jF} , e, dopo un cambiamento di variabile, può essere riscritta come:

$$\cos \delta = \frac{s^2 + A}{2 \cdot s}$$

where

$$s = \frac{\tilde{r}_{jF}}{r_{jF}} \quad A = 1 - \frac{\Delta r_{jF}^2}{r_{jF}^2} < 1$$

La derivata di questa relazione rispetto ad s risulta:

$$\frac{d \cos \delta}{ds} = \frac{(2 \cdot s) \cdot (2 \cdot s) - 2 \cdot (s^2 + A)}{4 \cdot s^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{A}{2 \cdot s^2}$$

e si annulla in corrispondenza del valore minimo di $\cos \delta$. Questo avviene quando il termine A/s^2 è uguale ad uno, che corrisponde alla condizione:

$$\tilde{r}_{jF}^2 = r_{jF}^2 - \Delta r_{jF}^2$$

che esprime il teorema di Pitagora per un triangolo rettangolo avente r_{jF} come ipotenusa. La relazione appena ottenuta è coerente con la condizione posta per definire il limite inferiore K_A^- , che assume r_{jF} più grande di \tilde{r}_{jF} o, equivalentemente, s più piccolo di uno. Sostituendo questa espressione nella relazione (4.3.14), l'angolo corrispondente, indicato con δ_{max}^- , diventa:

$$\delta_{max}^- \approx \sin \delta_{max}^- = \sqrt{1 - \frac{(r_{jF}^2 - \Delta r_{jF}^2)^2}{r_{jF}^2 \cdot (r_{jF}^2 - \Delta r_{jF}^2)}} = \frac{\Delta r_{jF}}{r_{jF}}$$

Per il limite superiore K_A^+ , invece, si assume che r_{jF} sia inferiore a \tilde{r}_{jF} o, equivalentemente, che s sia uguale o superiore ad uno. Si può verificare che, per questi valori di s la derivata di $\cos \delta$ è positiva, perciò il valore che minimizza $\cos \delta$, e di conseguenza massimizza δ , è il più basso, che è esattamente uno. Questa configurazione corrisponde, chiaramente, ad un triangolo isoscele dal momento che \tilde{r}_{jF} risulta uguale a r_{jF} , quindi l'angolo ottenuto con l'equazione (4.3.14), indicato δ_{max}^+ , diventa:

$$\begin{aligned}\delta_{max}^+ \approx \sin \delta_{max}^+ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot r_{jF}^2 - \Delta r_{jF}^2}{2 \cdot r_{jF}^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Delta r_{jF}^2}{2 \cdot r_{jF}^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta r_{jF}}{r_{jF}} \right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\Delta r_{jF}}{r_{jF}} \right)^4}\end{aligned}$$

Allo stesso modo, indicando con Δr_{jM} la norma del vettore ottenuto dalla differenza di \tilde{d}_{jM}^T e d_{jM}^T , che rappresenta l'errore sulla posizione del ricevitore mobile stimata col codice, e applicando il teorema dei coseni al triangolo corrispondente, la relazione di gamma γ risulta:

$$\cos \gamma = \frac{r_{jM}^2 + \tilde{r}_{jM}^2 - \Delta r_{jM}^2}{2 \cdot r_{jM} \cdot \tilde{r}_{jM}} \quad (4.3.15)$$

Dal momento che non è stata posta nessuna relazione per γ , il suo valore massimo, indicato con γ_{max} , è lo stesso sia per il limite inferiore che per quello superiore. Fissando il valore di Δr_{jM} ed r_{jM} , γ_{max} corrisponde al valore che annulla la derivata dell'equazione (4.3.15) rispetto a \tilde{r}_{jM} , che è:

$$\tilde{r}_{jM}^2 = r_{jM}^2 - \Delta r_{jM}^2$$

e di conseguenza

$$\gamma_{max} \approx \sin \gamma_{max} = \sqrt{1 - \frac{(r_{jM}^2 - \Delta r_{jM}^2)^2}{r_{jM}^2 \cdot (r_{jM}^2 - \Delta r_{jM}^2)}} = \frac{\Delta r_{jM}}{r_{jM}}$$

A conclusione di questa sezione, si può finalmente verificare che, come si è supposto, l'angolo δ è piccolo, infatti si è dimostrato che il suo valore massimo δ_{max}^- è dato dal rapporto dell'errore di stima Δr_{jF} , che è dell'ordine dei metri, e la distanza tra ricevitore di riferimento e satellite r_{jF} , che è dell'ordine di migliaia i chilometri. Le stesse considerazioni si applicano all'angolo γ , il cui valore massimo γ_{max} è dato dal rapporto dell'errore di stima Δr_{jM} e della distanza tra ricevitore mobile e satellite r_{jM} . Va evidenziato che anche l'angolo ε è piccolo. Infatti, derivando la relazione (4.3.13) rispetto a r_{jM} ed uguagliando a zero, il valore massimo di ε risulta espresso dal rapporto della distanza tra i ricevitori Δr_{MB} , che è limitata a poch chilometri, e r_{jF} . Confrontando le relazioni

ottenute per i valori massimi degli angoli, segue che quello di ε è alcuni ordini di grandezza più grandi di quelli di δ e γ . Inoltre l'angolo ε risulta molto più grande di δ e γ per quasi tutte le configurazioni di posizione tra i ricevitori ed il satellite, a meno che essi non siano quasi allineati, perciò l'ipotesi di trascurare i termini δ^2 e γ^2 , posta per ottenere l'equazione (4.3.6), (4.3.11) e (4.3.12), è valida.

4.3.2 Risultati di simulazione

Al fine di valutare l'accuratezza della rappresentazione alternativa del modello alle 'singole differenze', espresso dall'equazione (4.3.3), si possono determinare i limiti superiore ed inferiore del termine di errore K_A per differenti configurazioni di posizione tra i ricevitori ed il satellite utilizzando le relazioni (4.3.11) e (4.3.12). Per i casi in cui il vettore di posizione relativa tra i ricevitori può essere considerato giacente nel piano orizzontale, i valori dei limiti possono essere comparati con quelli ottenuti per K dall'equazione (4.3.1). Come si è affermato in precedenza, K rappresenta l'errore introdotto nel modello delle misure linearizzato (4.2.3) se è presente uno scostamento non noto nella posizione del ricevitore di riferimento. Perciò nella prima parte di questa sezione sono presentati i risultati di K_A^+ e K_A^- insieme ai corrispondenti valori di K , considerando una differenza di altezza nulla tra i due ricevitori, mentre nella seconda parte verranno mostrati i valori di K_A^+ e K_A^- per differenze di altezza crescenti.

Per facilitare il confronto tra K_A e K , nel seguito le posizioni dei ricevitori e del satellite saranno riferiti al sistema di coordinate locali precedentemente introdotto. Inoltre, dal momento che l'errore K dipende dalla differenza tra l'azimuth del vettore di posizione relativa α_0 e l'azimuth del satellite α , come mostra la relazione (4.3.1), uno dei due angoli può essere posto a zero senza perdita di generalità. Perciò, annullando α_0 , il vettore di posizione del ricevitore mobile, che rappresenta anche il vettore di posizione relativa, può essere espresso come:

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{MB} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e K può essere riscritto, dopo alcuni calcoli, in forma vettoriale:

$$K = \frac{r_{MB}}{r_{jM}} \cdot k^T \cdot e \quad (4.3.16)$$

con

$$k = \begin{bmatrix} -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \zeta) \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \zeta \\ \sin \zeta \cdot \cos \zeta \cdot \cos \alpha \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} \delta_h \cdot \cos \alpha_1 \\ \delta_h \cdot \sin \alpha_1 \\ \delta_v \end{bmatrix}$$

e dove $\delta_h \cdot \cos \alpha_1$, $\delta_h \cdot \sin \alpha_1$ e δ_v rappresentano, nel nuovo sistema di riferimento, le coordinate del vettore di errore presente nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice, la cui norma è Δr_{jF} .

Per eseguire un confronto significativo, la direzione del vettore di errore e deve essere coerente con le ipotesi poste per derivare le equazioni (4.3.11) e (4.3.12). Dal momento che le coordinate incognite sono tre, sono necessarie almeno tre condizioni per risolvere il problema. La prima è ottenuta imponendo che il vettore giaccia nel piano determinato dalle posizioni dei ricevitori e del satellite. Il vettore di posizione del satellite, che, nel nuovo sistema di riferimento, equivale all'opposto del vettore di posizione relativa tra satellite e ricevitore di riferimento, risulta:

$$\begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{jF} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \zeta \\ r_{jF} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \zeta \\ r_{jF} \cdot \cos \zeta \end{bmatrix} = -d_{jF}^T$$

quindi la condizione di complanarità diventa:

$$\left(\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} \right) \cdot e = 0$$

e sviluppando il prodotto vettoriale

$$\begin{bmatrix} 0 & -r_{MB} \cdot r_{jF} \cos \zeta & r_{MB} \cdot r_{jF} \sin \alpha \sin \zeta \end{bmatrix} \cdot e = 0 \quad (4.3.17)$$

Il secondo vincolo può essere posto sull'angolo δ . Con riferimento alla figura 4.4, si possono derivare due espressioni, che corrispondono al limite superiore δ_{max}^+ ed al limite inferiore δ_{max}^- :

$$\begin{bmatrix} X_j & Y_j & Z_j \end{bmatrix} \cdot e = r_{jF} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos \left(\frac{\pi - \delta_{max}^+}{2} \right) \quad (4.3.18a)$$

$$\begin{bmatrix} X_j & Y_j & Z_j \end{bmatrix} \cdot e = r_{jF} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta_{max}^- \right) \quad (4.3.18b)$$

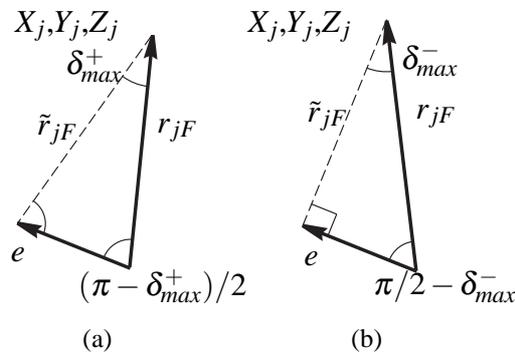


Fig. 4.4. Configurazioni del vettore di errore e del vettore di posizione del satellite corrispondenti a (a) δ_{max}^+ and (b) δ_{max}^-

Inoltre, come mostrano le figure 4.3(a) e 4.3(b) della sezione precedente, nel caso del limite inferiore, il vettore $\tilde{\vec{l}}_{jF}$, che rappresenta la linea di vista tra il satellite e la posizione del ricevitore di riferimento stimata col codice, deve giacere entro i vettori \vec{l}_{jF} e \vec{l}_{jM} , mentre nel caso del limite superiore, esso giace all'esterno ed è vicino a \vec{l}_{jF} . Perciò, facendo riferimento alla figura 4.5, è possibile determinare l'angolo formato tra il vettore di posizione relativa tra i due ricevitori ed il vettore di errore e in entrambe le configurazioni.

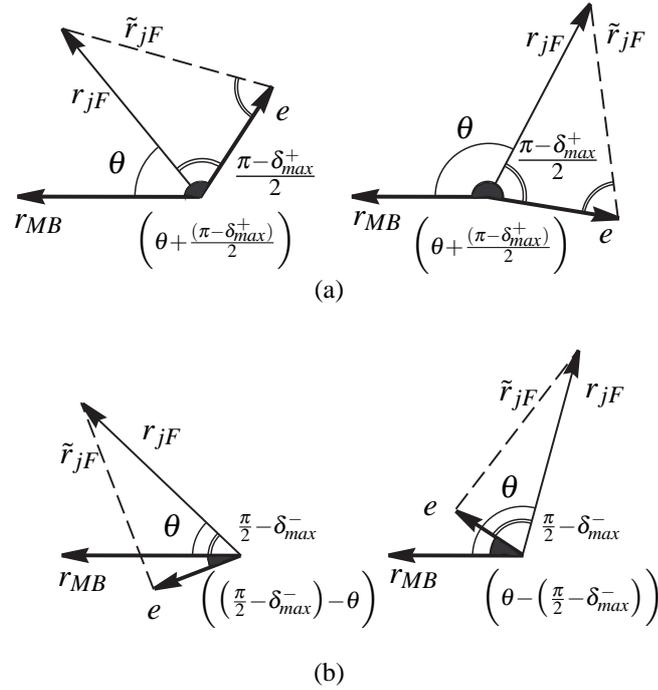


Fig. 4.5. (a) Configurazione del vettore di posizione relativa tra i ricevitori ed il vettore di errore, e , nel caso del limite superiore. Le situazioni per θ minore o maggiore di $\pi/2$ sono riportate, rispettivamente, sulla sinistra e sulla destra (b) Configurazione del vettore di posizione relativa tra i ricevitori ed il vettore di errore, e , nel caso del limite inferiore. Le situazioni per θ minore o maggiore di $\pi/2$ sono riportate, rispettivamente, sulla sinistra e sulla destra

Di conseguenza il terzo vincolo, per i limiti superiore ed inferiore rispettivamente, è:

$$\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix} \cdot e = r_{MB} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos \left(\frac{\pi - \delta_{max}^+}{2} + \theta \right) \quad (4.3.19a)$$

$$\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix} \cdot e = r_{MB} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta_{max}^- - \theta \right) \quad (4.3.19b)$$

dove θ può essere derivato dal prodotto scalare tra il vettore di posizione relativa tra i ricevitori ed il vettore di posizione del satellite:

$$\cos \theta = \frac{\begin{bmatrix} x_M & y_M & z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix}}{r_{MB} \cdot r_{jF}} = \cos \alpha \cdot \sin \zeta$$

Le relazioni (4.3.17), (4.3.18a) e (4.3.19a) possono essere riscritte in forma matriciale come:

$$A \cdot e = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{jF} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos\left(\frac{\pi - \delta_{max}^+}{2}\right) \\ r_{MB} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos\left(\frac{\pi - \delta_{max}^+}{2} + \theta\right) \end{bmatrix}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -r_{MB} \cdot r_{jF} \cos \zeta & r_{MB} \cdot r_{jF} \sin \alpha \sin \zeta \\ r_{jF} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \zeta & r_{jF} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \zeta & r_{jF} \cdot \cos \zeta \\ r_{MB} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e la sua inversa risulta

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(1 - \sin^2 \zeta \cdot \cos^2 \alpha)}{r_{MB}} \\ -\frac{\cos \zeta}{r_{jF} \cdot r_{MB}} & \frac{\sin \alpha \cdot \sin \zeta}{r_{jF}} & -\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \zeta}{r_{MB}} \\ \frac{\sin \alpha \cdot \sin \zeta}{r_{jF} \cdot r_{MB}} & \frac{\cos \zeta}{r_{jF}} & -\frac{\cos \alpha \cdot \cos \zeta \cdot \sin \zeta}{r_{MB}} \end{bmatrix}}{(1 - \sin^2 \zeta \cdot \cos^2 \alpha)}$$

Perciò, risolvendo il problema lineare e sostituendo il vettore e risultante nell'equazione (4.3.16), si può ottenere dopo alcuni calcoli un valore di K , indicato con K^+ , che può essere comparato con il limite superiore di K_A :

$$K^+ = \frac{\Delta r_{jF} \cdot r_{MB}}{r_{jM}} \cdot \cos\left(\frac{\delta_{max}^+}{2}\right) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \zeta \cdot \cos^2 \alpha} \quad (4.3.20)$$

Analogamente, le relazioni (4.3.17), (4.3.18b) e (4.3.19b) possono essere riscritte come:

$$A \cdot e = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{jF} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{max}^-\right) \\ r_{MB} \cdot \Delta r_{jF} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{max}^- - \theta\right) \end{bmatrix}$$

Il vettore e , ottenuto risolvendo il problema lineare e sostituito nell'equazione (4.3.16), porta ad un valore di K , indicato con K^- , che può essere comparato con il limite inferiore di K_A :

$$K^- = -\frac{\Delta r_{jF} \cdot r_{MB}}{r_{jM}} \cdot \cos \delta_{max}^- \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \zeta \cdot \cos^2 \alpha} \quad (4.3.21)$$

Prima di presentare i risultati di simulazione è opportuno notare che la distanza tra satellite e ricevitore di riferimento può essere espressa in funzione dell'angolo di co-elevazione del satellite ζ . Infatti indicando con R la distanza del ricevitore di riferimento dal centro della Terra e con ρ il raggio dell'orbita del satellite supposta circolare, è possibile applicare il teorema dei coseni al triangolo corrispondente, presentato in figura 4.6, ottenendo l'equazione di secondo grado:

$$\rho^2 = r_{jF}^2 + R^2 - 2 \cdot r_{jF} \cdot R \cdot \cos(\pi - \zeta)$$

$$r_{jF}^2 + 2 \cdot r_{jF} \cdot R \cdot \cos \zeta - (\rho^2 - R^2) = 0$$

che ha una sola radice positiva, dal momento che $\cos \zeta$ è sempre maggiore di zero e ρ è maggiore di R , di conseguenza:

$$r_{jF} = -R \cos \zeta + \sqrt{\rho^2 - R^2 \cdot \sin^2 \zeta} \quad (4.3.22)$$

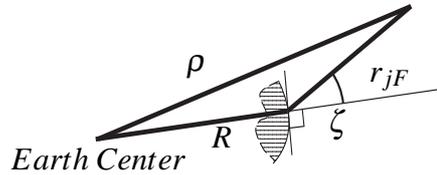


Fig. 4.6. Relazione geometrica tra r_{jF} e ζ

Nelle simulazioni il valore di R è stato assunto uguale al raggio Equatoriale terrestre (6378.137 Km), mentre il raggio orbitale del satellite ρ è stato preso pari a 26540.747 Km [43]. Le variabili indipendenti rimangono perciò l'azimuth e la co-elevazione del satellite, α e ζ , la distanza tra i ricevitori, r_{MB} , ed i moduli degli errori presenti nelle stime di posizione dei ricevitori ottenute con il codice, Δr_{jF} e Δr_{jM} . La distanza r_{jM} può essere calcolata una volta assegnati i parametri precedenti. Per semplificare ulteriormente la presentazione dei risultati, riducendo così a quattro il numero dei parametri liberi, sarà considerato un unico valore per gli errori sulle posizioni dei ricevitori, indicato con Δr_{jF} . Fissando il valore di tre parametri è possibile visualizzare K_A^+ , K^+ , K_A^- e K^- in funzione del quarto.

Nelle figure 4.7(a) e 4.7(b) sono riportati, in funzione dell'azimuth del satellite α tra 0° e 180° , le curve che rappresentano, in millimetri, gli errori K_A^+ e K^+ per alcuni valori della co-elevazione del satellite, che variano tra 0° e 80° . La distanza tra i ricevitori è stata fissata a 10 km ed è stato considerato un errore di 20 m per Δr_{jF} . Come si può vedere

l'andamento di K_A^+ e K^+ è simile e la differenza tra i loro valori è trascurabile in ogni condizione. In entrambi i casi il valore massimo, che è quasi un centimetro, si verifica quando ζ è uguale a 0° (cioè quando il satellite è perpendicolare al vettore di posizione relativa tra i ricevitori) ed è costante per tutti i valori di α , inoltre, per gli altri valori di co-elevazione dei satelliti, i risultati sono simmetrici rispetto ad α uguale a 90° . Il grafico per i valori di α tra 180° e 360° , è ottenuto per simmetria rispetto ad α pari a 180° .

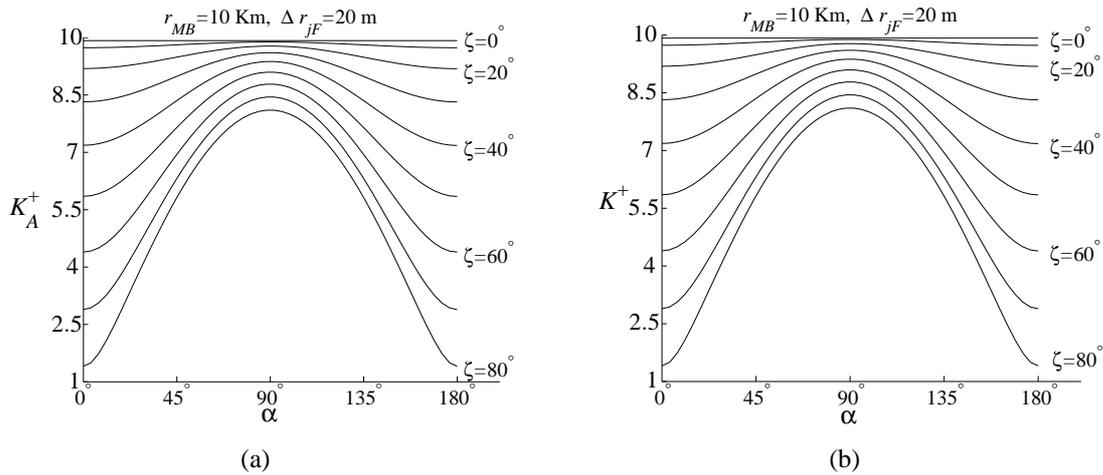


Fig. 4.7. Entità in millimetri degli errori (a) K_A^+ e (b) K^+ in funzione dell'azimuth del satellite, con una distanza di 10 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice.

Le curve di K_A^- e K^- , con le stesse condizioni fissate sulla distanza tra i ricevitori e su Δr_{jF} per K_A^+ e K^+ , sono mostrate nelle figure 4.8(a) e 4.8(b).

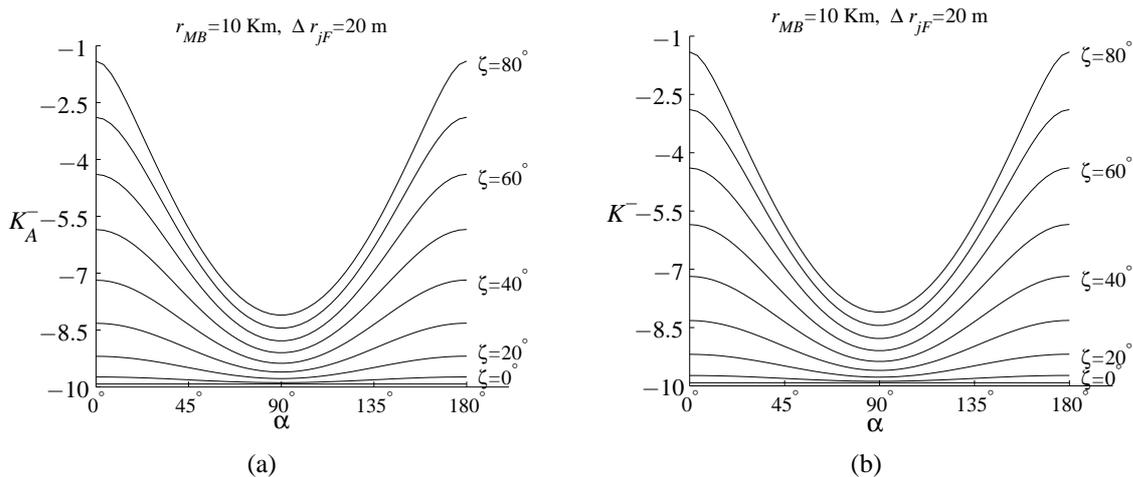


Fig. 4.8. Entità in millimetri degli errori (a) K_A^- e (b) K^- in funzione dell'azimuth del satellite, con una distanza di 10 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice.

Come si può vedere i risultati sono, con differenze trascurabili, gli opposti di quelli presentati in figura 4.7, quindi in seguito saranno considerati solo K_A^+ e K^+ . Per valutare l'effetto della distanza tra i ricevitori sui termini di errore, le simulazioni sono state ripetute con r_{MB} uguale a 30 km, perciò tre volte superiore a quella fissata in precedenza. I risultati per K_A^+ e K^+ , espressi in centimetri, sono presentati nelle tabelle 4.1 e 4.2. Le differenze tra i termini corrispondenti alle due formulazioni dell'errore sono anche in questo caso trascurabili ed i loro valori sono circa triplicati, perciò la dipendenza degli errori dalla distanza tra i ricevitori è quasi lineare.

K_A^+ (cm) $r_{MB}=30\text{Km}$ $\Delta r_{jF}=20\text{m}$					
$\zeta \setminus \alpha$	0°	45°	90°	130°	180°
0°	2.978	2.978	2.978	2.978	2.978
20°	2.7593	2.8489	2.9351	2.8469	2.7566
40°	2.1573	2.508	2.8141	2.5048	2.1534
60°	1.3194	2.0859	2.6367	2.0825	1.3164
80°	0.4227	1.7471	2.4327	1.7441	0.4217

Tab. 4.1

K^+ (cm) $r_{MB}=30\text{Km}$ $\Delta r_{jF}=20\text{m}$					
$\zeta \setminus \alpha$	0°	45°	90°	130°	180°
0°	2.976	2.976	2.976	2.976	2.976
20°	2.7574	2.847	2.933	2.845	2.755
40°	2.156	2.506	2.8121	2.5033	2.1523
60°	1.319	2.0848	2.635	2.0815	1.316
80°	0.4227	1.7463	2.4312	1.7434	0.4217

Tab. 4.2

In modo analogo, per valutare l'effetto dell'errore sulla posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice, le simulazioni sono state replicate con Δr_{jF} posto a 50 m e r_{MB} riportata a 10 km. I risultati di K_A^+ e K^+ , espressi in centimetri, sono presentati nelle tabelle 4.3 e 4.4. La differenza tra gli errori è trascurabile anche in queste condizioni, e la dipendenza dei termini di errore da Δr_{jF} è quasi lineare.

Va evidenziato il fatto che nelle simulazioni sono stati scelti dei valori, sia per la distanza tra i ricevitori che per l'errore sulla posizione stimata con il codice, molto conservativi. Infatti le distanze previste per l'applicazione del modello alle 'singole differenze' sono inferiori ai 10-15 chilometri ed anche l'errore sulla posizione stimata è dell'ordine di pochi metri, assumendo di impiegare le correzioni WAAS.

K_A^+ (cm) $r_{MB}=10\text{Km}$ $\Delta r_{jF}=50\text{m}$					
$\zeta \setminus \alpha$	0°	45°	90°	130°	180°
0°	2.4805	2.4805	2.4805	2.4805	2.4805
20°	2.2976	2.3724	2.4447	2.3718	2.2969
40°	1.796	2.0883	2.344	2.0874	1.795
60°	1.0985	1.7367	2.1963	1.7358	1.0976
80°	0.3519	1.4547	2.0264	1.4538	0.3516

Tab. 4.3

K^+ (cm) $r_{MB}=10\text{Km}$ $\Delta r_{jF}=50\text{m}$					
$\zeta \setminus \alpha$	0°	45°	90°	130°	180°
0°	2.4798	2.4798	2.4798	2.4798	2.4798
20°	2.2971	2.3718	2.4441	2.3713	2.2963
40°	1.7957	2.0878	2.3434	2.0869	1.7946
60°	1.0983	1.7364	2.1958	1.7355	1.0975
80°	0.3519	1.4544	2.026	1.4536	0.3516

Tab. 4.4

Per i casi in cui la differenza di altezza tra i ricevitori non è trascurabile rispetto alla loro distanza, la relazione (4.3.1), che esprime il termine K , non può essere utilizzata. Al contrario è possibile valutare l'andamento dei limiti superiore ed inferiore dell'errore K_A . Definendo in particolare con ζ_0 l'angolo di co-elevazione del vettore di posizione relativa, quest'ultimo risulta:

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{MB} \sin \zeta_0 \\ 0 \\ x_{MB} \cos \zeta_0 \end{bmatrix}$$

Nelle figure (4.9(a)) e (4.9(b)) sono presentati i risultati di simulazione di K_A^+ che corrispondono, rispettivamente, a ζ_0 uguale a 45° e 10°, con r_{MB} fissato a 10 Km e Δr_{jF} posto a 20 m. La prima importante considerazione che può essere svolta riguarda l'entità massima dell'errore commesso, che risulta, come si evidenzia nei grafici 4.7 e 4.8, all'incirca la stessa ottenuta nelle medesime condizioni di distanza tra i ricevitori e di errore sulla loro posizione stimata con il vettore di posizione relativa giacente nel piano orizzontale. L'effetto della co-elevazione ζ_0 è quello di cambiare le condizioni di co-elevazione ed azimuth del satellite in cui il valore massimo viene raggiunto. In particolare è opportuno notare che, al decrescere di ζ_0 , il valore di ζ per il quale K_A^+ è massimo tende ad aumentare, e la stessa cosa vale per l'azimuth α .

La dipendenza dei termini dalla distanza tra i ricevitori e dal termine di errore risulta an-

che in questo caso pressochè lineare perciò non vengono presentati ulteriori risultati.

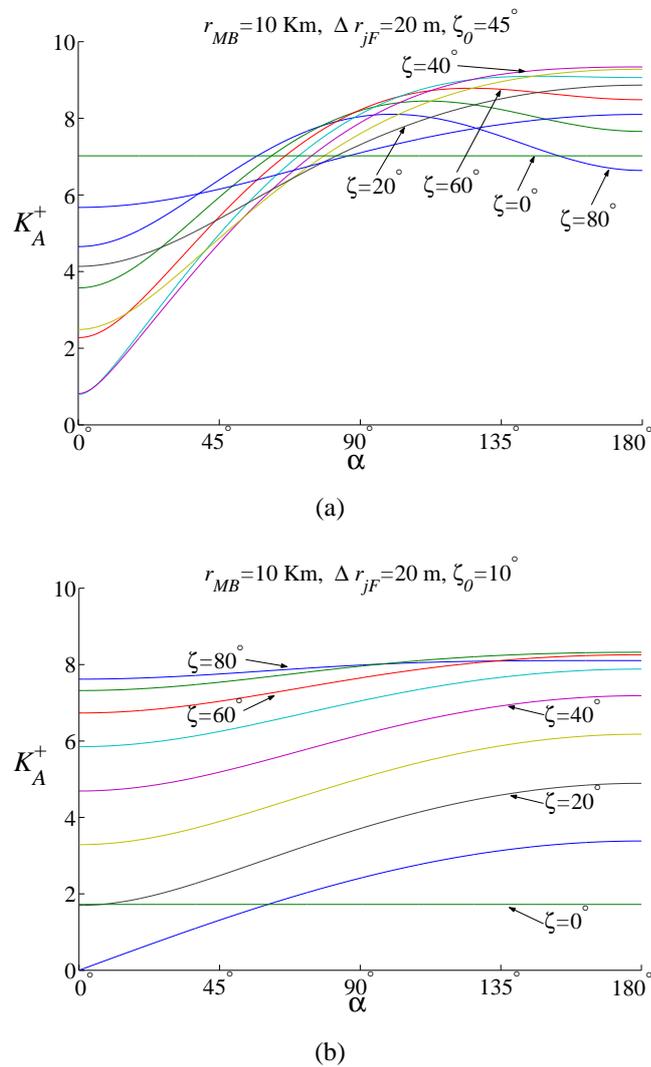


Fig. 4.9. Entità in millimetri degli errori (a) K_A^- e (b) K^- in funzione dell'azimuth del satellite, con una distanza di 10 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m nella posizione del ricevitore di riferimento stimata con il codice.

I due valori di ζ_0 , impiegati nelle simulazioni, sono stati scelti evitando l'allineamento tra il vettore di posizione relativa dei ricevitori e le linee di vista ricevitori-satellite, che corrispondono all'annullamento dell'angolo ε . Infatti in questo caso l'ipotesi che δ e γ siano inferiori ad ε , che è stata usata per ottenere le relazioni (4.3.11) e (4.3.12), non è valida. Tuttavia il valore di K_A nelle condizioni di allineamento risulta piccolo e può essere determinato direttamente dalla (4.3.4) che diventa:

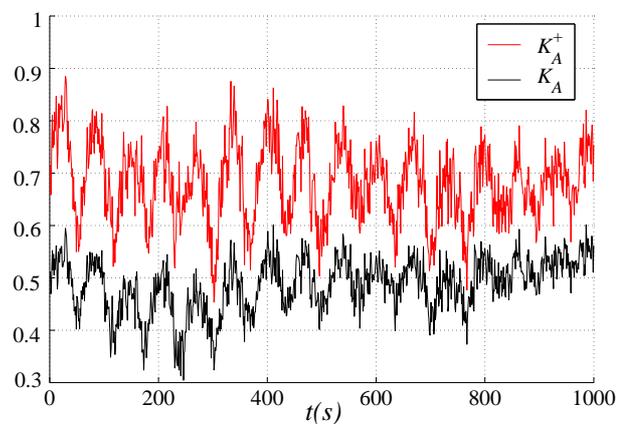
$$K_A = - \left(\tilde{\mathbf{I}}_{jM} - \tilde{\mathbf{I}}_{jF} \right) \cdot \tilde{\mathbf{d}}_{jF}^T$$

Per concludere l'analisi effettuata è possibile valutare qual'è l'entità dell'errore massimo che ci si deve attendere applicando la relazione (4.3.2) ai risultati ottenuti durante le prove

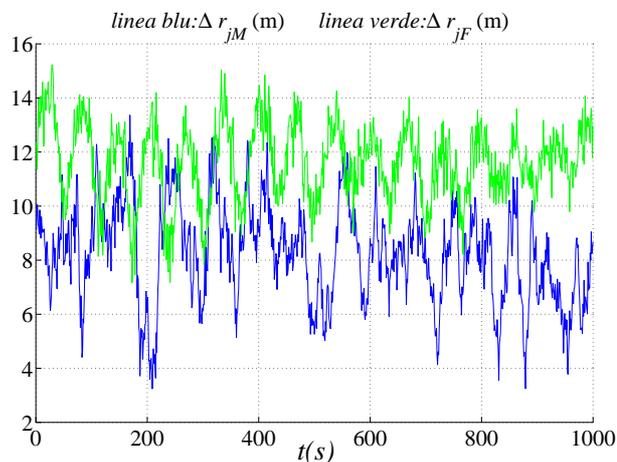
di volo. A questo proposito considerando una distanza conservativa di 2 km tra i ricevitori ed un errore di 20 m sulla posizione stimata con il codice, si possono utilizzare i valori dei grafici 4.9, divisi per cinque in quanto si riferiscono ad una distanza di 10Km, dai quali risulta un'errore massimo inferiore ai 2 mm, che è paragonabile al rumore di misura della fase della portante.

4.3.3 Risultati sperimentali

In questa sezione sono presentati i risultati ottenuti applicando la rappresentazione alternativa del modello alle 'singole differenze' a dati sperimentali. Le misure di codice di due ricevitori collocati in posizioni note sono state raccolte per analisi in post-processo.



(a)



(b)

Fig. 4.10. (a) Andamento del termine K_A e del corrispondente limite superiore K_A^+ espressi in millimetri (b) Ampiezza degli errori, espressi in metri, sulle stime di posizione dei ricevitori ottenute con il codice

L'obiettivo delle prove sperimentali è stato quello di valutare in condizioni reali la validità delle relazioni (4.3.11) e (4.3.12) per i limiti superiore ed inferiore, K_A^+ and K_A^- , rispetto

al valore vero del termine di errore K_A , espresso dalla (4.3.4). I risultati presentati in figura 4.10 si riferiscono ad una acquisizione di 15 minuti, durante la quale la distanza tra i ricevitori era circa 1.800 m, e la loro differenza di altezza era trascurabile. L'azimuth del vettore di posizione relativa α tra i ricevitori era circa 100° mentre quello del satellite considerato è variato nel corso della prova tra 270° e 280° . L'azimuth relativo, rispetto al quale sono stati tracciati i grafici della sezione precedente, è dunque variato tra 70° e 80° . La co-elevazione del satellite invece è rimasta all'incirca uguale a 40° . Il periodo di acquisizione è stato scelto intenzionalmente breve per avere una configurazione quasi costante tra ricevitori e satellite. In questo modo può essere valutato meglio l'effetto degli errori presenti nelle posizioni dei ricevitori stimate con il codice, che sono mostrati in figura 4.10(b) ed espressi in metri. Le posizioni sono ottenute senza applicare nessuna correzione e gli errori evidenziano anche il tipico effetto sinusoidale dovuto al multipath. Come si può vedere il limite superiore K_A^+ , visualizzato in rosso, è sempre maggiore di K_A , in particolare il grafico è espresso in millimetri perciò l'errore effettivo risulta mezzo millimetro, cioè dello stesso ordine di grandezza del rumore di misura per la fase della portante.

Capitolo 5

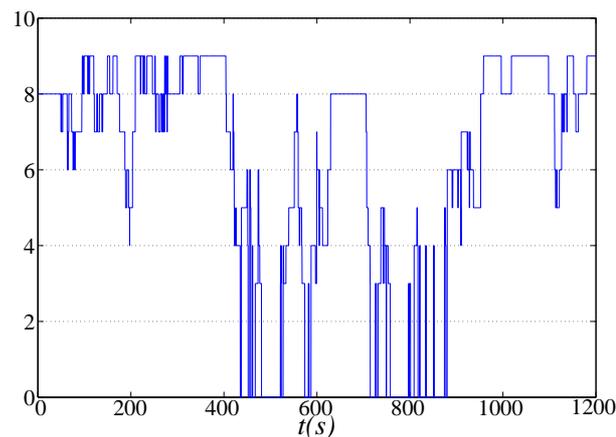
Prove di volo

Le condizioni ambientali in cui il sistema avionico si trova ad operare, una volta che viene installato sull'aeromodello, risultano notevolmente critiche. In particolare esso è sottoposto alle vibrazioni indotte dal motore a scoppio, il cui effetto risulta maggiore quando il velivolo si trova a terra, a causa della reazione vincolare che quest'ultima esercita sul carrello. La conseguente oscillazione dell'antenna del ricevitore GPS, che è solidale con la fusoliera, determina una degradazione nella ricezione del segnale che può portare alla perdita di aggancio del codice e, soprattutto, della fase della portante per alcuni satelliti. Il contributo delle vibrazioni risulta comunque molto inferiore quando il velivolo si trova in volo, come testimoniano le misure di accelerazione fornite dall'unità inerziale del sistema avionico. D'altra parte l'elevata dinamica associata ad alcune fasi di volo dell'aereo costituisce una ulteriore causa che può determinare la perdita di aggancio del segnale. A questo proposito bisogna rimarcare il fatto che, nella esecuzione delle virate, il velivolo subisce una rapida rotazione attorno al proprio asse longitudinale, la quale, nel caso specifico, è particolarmente accentuata poichè una notevole parte della massa complessiva dell'aereo, costituita dal motore e dal rack avionico, è distribuita proprio lungo l'asse longitudinale e di conseguenza il momento d'inerzia corrispondente è molto piccolo. Inoltre, per effetto della rotazione, l'antenna del ricevitore GPS risulta inclinata rispetto all'orizzonte terrestre e ciò determina un mascheramento della parte del cielo che si trova in direzione opposta a quella di virata, che non consente la ricezione dei segnali provenienti da satelliti con bassa elevazione. Infatti le antenne che vengono comunemente fornite con i ricevitori hanno un diagramma di radiazione con un guadagno nullo al di sotto del loro piano di riferimento per evitare la ricezione di segnali riflessi da terra. Tali antenne vengono chiamate *patch*.

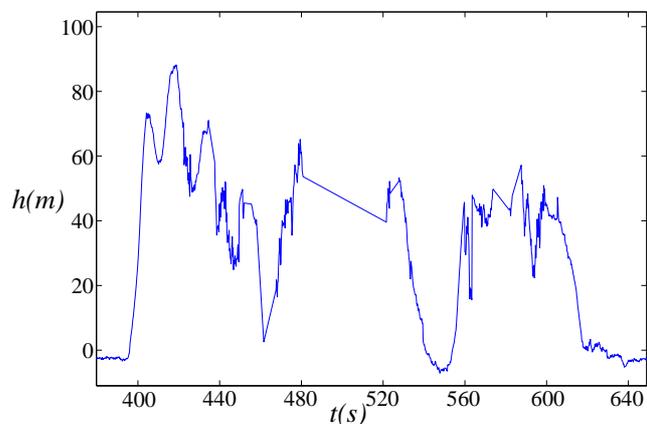
Le prime prove in volo del sistema avionico sono state dunque finalizzate alla valutazione del comportamento del ricevitore GPS in condizioni dinamiche particolarmente severe. Il ricevitore inizialmente impiegato era un Allstar della Canadian Marconi con abbinata un'antenna di tipo *patch*. I risultati ottenuti nel corso di alcune prove di acquisizione distinte hanno evidenziato in tutti le circostanze delle prestazioni insoddisfacenti.

In particolare nella figura 5.1(a) è riportato l'andamento del numero di satelliti agganciati dal ricevitore nel corso di una prova nella quale sono stati effettuati due voli consecutivi, che corrispondono indicativamente ai periodi che vanno dal secondo 400 al 600 e dal secondo 700 al 900. La stima della quota alla quale ha viaggiato il velivolo nel corso

del primo volo è presentata nella figura 5.1(b). Come si può notare, per alcuni periodi il numero di satelliti visibili è risultato pari a zero, non consentendo quindi di calcolare la soluzione di posizione. Infatti dal secondo 480 al secondo 520 il grafico della quota presenta una discontinuità. Va rilevato che la perdita di aggancio per un periodo così lungo, come è quello di 40 secondi, non è giustificabile con l'effettuazione di un'unica virata, che, tipicamente, dura meno di dieci secondi. Il problema è dovuto principalmente al fatto che, una volta perso l'aggancio di tutti i segnali, il ricevitore deve eseguire una procedura di inizializzazione che può richiedere, in alcuni casi, qualche decina di secondi.



(a)



(b)

Fig. 5.1. (a) Numero di satelliti agganciati dal ricevitore Canadian Marconi durante la prova (b) Quota stimata dal ricevitore

Il motivo principale della perdita di aggancio dei segnali durante la prova a cui si riferiscono i grafici precedenti è costituito essenzialmente dalle elevate velocità angolari verificatesi durante le virate, mentre l'effetto dovuto al mascheramento per via dell'inclinazione dell'aereo risulta un aspetto secondario. A questo proposito, facendo riferimento alla figura 5.2, che rappresenta l'elevazione di uno dei satelliti che sono stati visibili du-

rante la prova, si può notare che in molti istanti il segnale non è stato agganciato, sebbene il satellite abbia mantenuto una elevazione prossima a quella massima e non abbia risentito quindi del mascheramento dovuto all'angolo di virata.

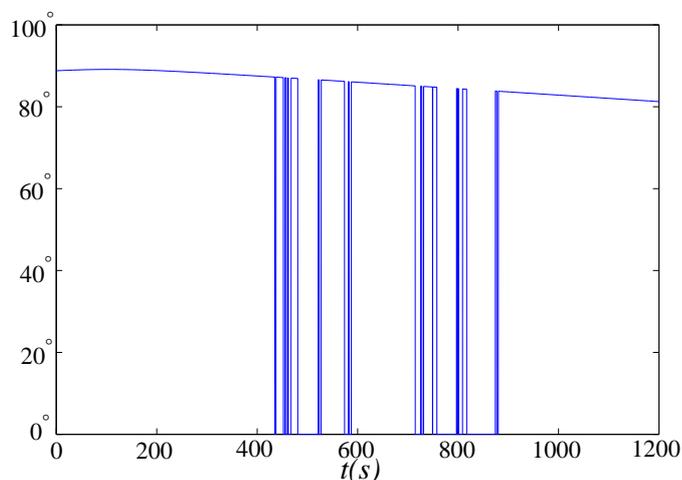


Fig. 5.2. Elevazione di uno dei satelliti agganciati durante la prova

A seguito dei risultati ottenuti con le prove sperimentali, si è determinata quindi l'esigenza di sostituire il ricevitore facente parte inizialmente del sistema avionico. In particolare è stato impiegato come nuovo ricevitore il TIM-Lx della μ -blox, che è stato anch'esso sottoposto a prove in volo. Inoltre è stata adottata una diversa tipologia di antenna il cui diagramma di radiazione presenta un guadagno piuttosto elevato anche al di sotto del piano di riferimento. Si tratta di un tipo di antenne che sono utilizzate nei dispositivi palmari per i quali l'orientazione è incerta e può variare di frequente. Tali antenne sono caratterizzate dal fatto che l'elemento metallico è avvolto a spirale attorno ad un dielettrico e sono perciò chiamate *elicoidali*. Per mitigare l'effetto del multipath al quale sono inevitabilmente soggette, le antenne *elicoidali* sono realizzate in modo tale da avere una buona proprietà di reiezione dei segnali che presentano una polarizzazione invertita rispetto a quella del segnale GPS. Infatti il segnale proveniente dai satelliti ha una polarizzazione circolare destrorsa, cioè il campo elettromagnetico, visto dal satellite, ruota attorno alla direzione di propagazione in senso orario. Per effetto della riflessione da parte di una superficie, la polarizzazione diventa sinistrorsa ed il suo contributo può essere notevolmente limitato con una opportuna realizzazione dell'antenna.

Nella figura 5.3(a) è presentato il numero di satelliti in vista durante una prova di volo nella quale è stato impiegato il ricevitore μ -blox. Come si può notare dal confronto con il grafico 5.3(b) che rappresenta la quota del ricevitore, il numero di satelliti si è mantenuto pari a 6 durante quasi tutto il periodo di volo. La riduzione del numero di satelliti che si verifica immediatamente prima e dopo il volo, alla quale corrisponde un notevole errore nella stima della quota, è causata dalle vibrazioni prodotte dal motore a scoppio. In particolare la stima di posizione che corrisponde all'istante in cui sono visibili tre satelliti è ottenuta dal ricevitore imponendo per la quota un valore di riferimento e riducendo di conseguenza il numero di incognite da stimare.

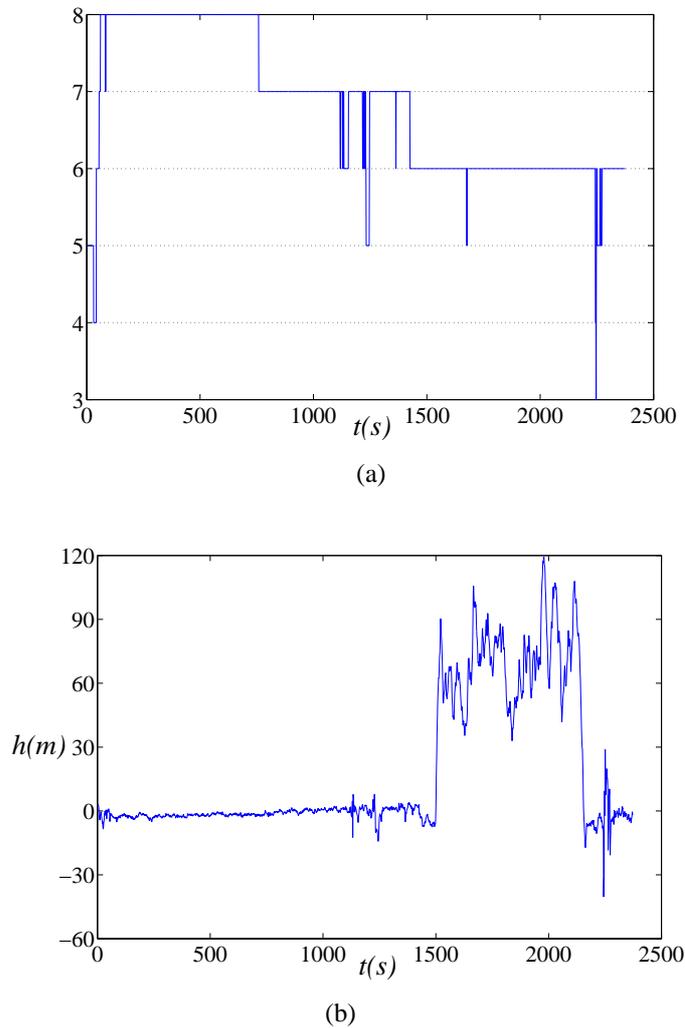


Fig. 5.3. (a) Numero di satelliti agganciati dal ricevitore μ -blox durante la prova (b) Quota stimata dal ricevitore

Nella figura 5.4 viene presentato, infine, il numero di satelliti per i quali, durante la stessa prova, il ricevitore è riuscito ad agganciare la fase della portante. Si evidenzia in particolare il fatto che le misure di fase risultano molto più sensibili alle vibrazioni ed alle condizioni dinamiche di volo rispetto a quelle di codice.

Tuttavia il numero di satelliti dei quali viene agganciata la fase si mantiene, per tutto il periodo in cui il ricevitore è in volo, superiore a quattro, perciò risulta teoricamente possibile determinare una stima di posizione accurata per le traiettorie percorse dall'aeromodello. A tal fine però, è necessario determinare le ambiguità iniziali intere associate alle misure di fase. L'ambiguità di ciascun satellite rimane costante nel tempo se viene mantenuto l'aggancio continuo della fase corrispondente e deve essere determinata nuovamente qualora l'aggancio venga perso. In generale le metodologie che consentono di risolvere le ambiguità utilizzano le misure di fase di almeno quattro satelliti raccolte per un certo numero di istanti. In particolare il numero di satelliti disponibili risulta un

parametro importante per ridurre gli istanti necessari alla individuazione dell'ambiguità. Questo aspetto sarà discusso in dettaglio nel capitolo successivo.

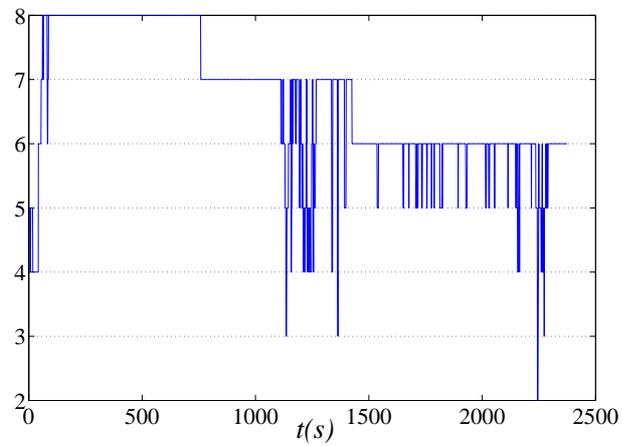


Fig. 5.4. Numero di satelliti per i quali risulta agganciata la fase della portante da parte del ricevitore μ -blox durante la prova

Capitolo 6

Risoluzione dell'ambiguità intera

6.1 Definizione del problema

La notevole accuratezza associata alle misure di fase della portante GPS, sia per quanto riguarda il modello alle *'singole differenze'* sia per quanto riguarda il modello alle *'doppie differenze'*, può essere sfruttata per ottenere una stima della posizione relativa tra i ricevitori solo dopo aver individuato le ambiguità iniziali intere corrispondenti alle misure stesse. Infatti, come detto nel capitolo 2, il circuito di aggancio della fase della portante, presente in ciascuno dei canali del ricevitore, non riesce a determinare la fase iniziale del segnale proveniente dal satellite ma esclusivamente la variazione della fase, a partire dall'istante di aggancio, rispetto al segnale di riferimento generato internamente dal ricevitore. Questo aspetto rappresenta la maggiore criticità delle misure di fase perchè, in caso l'aggancio del segnale di un satellite venga perso, l'ambiguità intera corrispondente, precedentemente individuata, perde significato e deve essere determinata nuovamente una volta che viene ripristinato l'aggancio. Per questo motivo, nelle applicazioni in tempo reale si richiede che il processo di risoluzione sia rapido ed efficiente, cioè che il numero di istanti di misura sia il più piccolo possibile e che le elaborazioni da svolgere sulle misure stesse non sia elevato. Nelle prove finalizzate alla determinazione delle traiettorie in volo del velivolo, la risoluzione in tempo reale delle ambiguità non è necessaria, perchè le elaborazioni sono svolte in post-processo. Tuttavia, dal momento che i risultati delle prove di volo hanno evidenziato la particolare sensibilità delle misure di fase alle condizioni operative, è opportuno adottare una tecnica che consenta di ridurre il numero degli istanti di misura richiesti per la risoluzione dell'ambiguità, al fine di limitare i periodi nei quali il riferimento di posizione non può essere calcolato.

Nel corso degli anni sono stati proposti vari metodi per la determinazione, o risoluzione, delle ambiguità come descritto in [25]. Nelle successive sezioni vengono proposti, in particolare, due diversi approcci per la risoluzione delle ambiguità: un metodo alle *'doppie differenze'*, denominato LAMBDA, che è considerato uno dei più efficienti, ed un metodo alle *'singole differenze'*. Quest'ultimo, in particolare, nella formulazione proposta in letteratura risulta poco efficiente nel caso in cui il numero di satelliti utilizzati non sia elevato. Per questo motivo se ne propone una versione modificata che presuppone l'impiego delle misure di soli cinque satelliti, pari a quelli che sono risultati disponibili in modo continuo durante le prove di volo.

6.2 Metodo LAMBDA

Il metodo LAMBDA (Least-Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment) è basato, come altre tecniche presenti in letteratura, sul principio dei minimi quadrati applicato ad un sistema linearizzato di equazioni alle ‘doppie differenze’. Il ragionamento sviluppato di seguito può comunque essere esteso anche al modello delle misure alle ‘singole differenze’. Ricordando il modello (4.2.4) e la relazione linearizzata delle ‘singole differenze’ (4.2.3) per il posizionamento relativo, che sono state introdotte nella sezione 4.2, è possibile ottenere:

$$(\nabla\Delta\tilde{\phi}_{jk} + \nabla\Delta N_{jk}) \cdot \lambda \approx r_{jM_0} - r_{jF} - r_{kM_0} + r_{kF} + (\hat{h}_{jM} - \hat{h}_{kM}) \cdot (\vec{s}_M - \vec{s}_{M_0}) + \nabla\Delta m_{jk} + \nabla\Delta\mu_{jk} \quad (6.2.1)$$

In cui \vec{s}_M rappresenta il vettore delle tre coordinate incognite della posizione relativa e \vec{s}_{M_0} rappresenta il vettore di riferimento per la linearizzazione. In particolare viene formulata l’ipotesi che i rumori sulle misure di fase non differenziate siano mutuamente incorrelati sia tra i satelliti sia tra i due ricevitori, che abbiano media nulla e la stessa varianza σ_ϕ^2 . Per questo motivo il termine $\nabla\Delta m_{jk}$, dovuto al multipath, viene considerato nullo. Scegliendo il satellite 1 come riferimento, il sistema di $n-1$ equazioni corrispondenti alle misure di n satelliti effettuate all’istante t è costituito da:

$$y(t) = G(t) \cdot \delta\vec{s}(t) + N + M(t) \quad (6.2.2)$$

in cui si è posto:

$$\delta\vec{s}(t) = \vec{s}_M(t) - \vec{s}_{M_0}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \nabla\Delta\tilde{\phi}_{21} - \frac{r_{2M_0}}{\lambda} + \frac{r_{2F}}{\lambda} + \frac{r_{1M_0}}{\lambda} - \frac{r_{1F}}{\lambda} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\tilde{\phi}_{n1} - \frac{r_{nM_0}}{\lambda} + \frac{r_{nF}}{\lambda} + \frac{r_{1M_0}}{\lambda} - \frac{r_{1F}}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{h}_{2M}(t)}{\lambda} & -\frac{\hat{h}_{1M}(t)}{\lambda} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\hat{h}_{nM}(t)}{\lambda} & -\frac{\hat{h}_{1M}(t)}{\lambda} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} \nabla\Delta N_{21} \\ \vdots \\ \nabla\Delta N_{n1} \end{bmatrix} \quad M(t) = \begin{bmatrix} \frac{\nabla\Delta\mu_{21}(t)}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{\nabla\Delta\mu_{n1}(t)}{\lambda} \end{bmatrix}$$

dove la matrice di covarianza del vettore M risulta:

$$\Sigma = R \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_\phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\phi^2 \end{bmatrix}}_{(2(n-1) \times 2(n-1))} \cdot R^T = 2\sigma_\phi^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{(n-1 \times n-1)}$$

$$R = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{(n-1 \times 2(n-1))}$$

Il sistema (6.2.2) presenta un numero di incognite superiore al numero di equazioni disponibili infatti oltre alle 3 coordinate di posizione sono presenti $n-1$ ambiguità alle ‘doppie differenze’. Tuttavia è possibile introdurre un secondo insieme di equazioni relativo alle misure degli stessi satelliti effettuate all’istante $t + 1$ ottenendo il sistema complessivo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(t) & \mathbf{O}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{O}_{(3 \times 3)} & \mathbf{G}(t+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \vec{\mathbf{s}}(t) \\ \delta \vec{\mathbf{s}}(t+1) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{(n-1 \times n-1)} \\ \mathbf{I}_{(n-1 \times n-1)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{N} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) \\ \mathbf{M}(t+1) \end{bmatrix}$$

in cui \mathbf{I} ed \mathbf{O} sono rispettivamente la matrice identità e la matrice nulla di dimensione indicata, e dove si sono considerate tre ulteriori incognite di posizione per tenere conto del fatto che uno dei due ricevitori è in movimento. In questo caso le incognite sono $2 \times 3 + (n - 1)$ e le equazioni disponibili $2 \times (n - 1)$, perciò se sono visibili 7 satelliti il numero di equazioni, pari a 12, eguaglia quello delle incognite. Considerando un insieme di misure relative a molteplici istanti, il numero di equazioni risulta superiore a quello delle incognite ed il sistema può essere riscritto, con opportune posizioni, nella forma generale:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \cdot \delta \vec{\mathbf{s}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{M} \quad (6.2.3)$$

La soluzione ai minimi quadrati del problema (6.2.3) è ottenuta individuando i vettori delle posizioni e delle ambiguità che minimizzano la funzione costo:

$$C(\delta \vec{\mathbf{s}}, \mathbf{N}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta \vec{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}\|_{\mathbf{W}}^2 \\ = (\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta \vec{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{N})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta \vec{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}) \quad (6.2.4)$$

nella quale la matrice dei pesi \mathbf{W} corrisponde alla inversa della matrice di covarianza delle misure alle ‘doppie differenze’ del sistema (6.2.3), costruita utilizzando la matrice Σ definita in precedenza:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Sigma \end{bmatrix}^{-1}$$

La minimizzazione della funzione costo $C(\delta \vec{\mathbf{s}}, \mathbf{N})$ rappresenta tuttavia un problema ai minimi quadrati non convenzionale in quanto gli elementi del vettore \mathbf{N} sono vincolati ad essere interi. In particolare il metodo LAMBDA determina la soluzione in tre passi.

Nel primo passo viene eliminato il vincolo di interezza sulle ambiguità ottenendo una stima ai minimi quadrati ordinari dei vettori incogniti $\delta\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\mathbf{N}}$, e la matrice di covarianza $\hat{\Sigma}$ associata:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\delta\hat{\mathbf{s}}} & \Sigma_{\delta\hat{\mathbf{s}},\hat{\mathbf{N}}} \\ \Sigma_{\delta\hat{\mathbf{s}},\hat{\mathbf{N}}} & \Sigma_{\hat{\mathbf{N}}} \end{bmatrix}$$

la quale è stata partizionata evidenziando le matrici di covarianza, $\Sigma_{\delta\hat{\mathbf{s}}}$ e $\Sigma_{\hat{\mathbf{N}}}$, corrispondenti ai due vettori, e la matrice di cross-correlazione $\Sigma_{\delta\hat{\mathbf{s}},\hat{\mathbf{N}}}$.

Il secondo passo consiste nella ricerca del vettore ad elementi interi $\bar{\mathbf{N}}$ che minimizza la funzione costo:

$$c(\mathbf{N}) = (\mathbf{N} - \hat{\mathbf{N}})^T \cdot \mathbf{W}_N \cdot (\mathbf{N} - \hat{\mathbf{N}}) \quad (6.2.5)$$

dove $\hat{\mathbf{N}}$ è la stima ottenuta al passo precedente e come matrice dei pesi \mathbf{W}_N viene impiegata l'inversa della $\Sigma_{\hat{\mathbf{N}}}$, anch'essa ottenuta al passo precedente. Il luogo dei punti che presentano lo stesso valore della funzione costo è costituito da un ellissoide centrato in $\hat{\mathbf{N}}$. Lo spazio entro il quale cercare i vettori ad elementi interi candidati per la soluzione può essere quindi delimitato fissando un valore c^* per la funzione. L'ellissoide corrispondente al valore scelto deve essere sufficientemente grande da contenere il vettore effettivo delle ambiguità e sufficientemente piccolo per essere esplorato velocemente.

L'efficienza del processo di ricerca del minimo della funzione costo è influenzata dalla forma dell'ellissoide e dalla sua rotazione rispetto alla base canonica dello spazio delle ambiguità. A proposito della forma occorre dire che l'ellissoide risulta notevolmente allungato. Ciò accade in particolare quando le misure disponibili sono limitate a pochi istanti, in questo caso infatti si può verificare che il numero di condizionamento della matrice \mathbf{W}_N , che è legato al rapporto tra le lunghezze dell'asse maggiore e minore dell'ellissoide, risulta molto elevato. Ne consegue che alcuni vettori candidati, le cui componenti differiscono notevolmente da quelle di $\hat{\mathbf{N}}$, possono assumere un valore della funzione costo inferiore rispetto a vettori che si trovano invece nelle vicinanze del centro dell'ellissoide. Per quanto riguarda la rotazione, essa è dovuta al fatto che gli elementi esterni alla diagonale principale della matrice \mathbf{W}_N non sono nulli. Ciò significa che le componenti dei vettori candidati risultano notevolmente correlate. È opportuno rilevare che, se la matrice dei pesi fosse diagonale, il vettore $\bar{\mathbf{N}}$ che minimizza la funzione costo potrebbe essere ottenuto arrotondando all'intero più vicino ciascuna componente di $\hat{\mathbf{N}}$.

Il metodo LAMBDA cerca di aumentare l'efficienza del processo di ricerca introducendo una matrice di trasformazione del vettore delle ambiguità che consente di rendere la \mathbf{W}_N il più possibile diagonale e con un rapporto tra l'autovalore massimo e quello minimo prossimo ad uno. Il caso limite è rappresentato dalla matrice identità alla quale corrisponde uno spazio di ricerca di forma sferica. Le componenti del vettore delle ambiguità, espressi nel nuovo spazio, devono essere intere, perciò la matrice di trasformazione deve avere elementi interi. Inoltre anche la sua inversa deve avere elementi interi perchè la soluzione ottenuta nel nuovo spazio deve corrispondere ad un vettore di interi nello spazio originale. A causa di questi vincoli, non è possibile in generale raggiungere la perfetta diagonalizzazione della matrice di covarianza, pur ottenendo una notevole riduzione della correlazione tra le ambiguità. I dettagli riguardanti la costruzione della matrice di trasformazione sono descritti in [37].

Una volta individuato il vettore che minimizza la funzione costo, esso viene inserito nel sistema (6.2.3) e si procede alla stima ai minimi quadrati del vettore delle incognite di posizione $\delta\hat{\mathbf{s}}$, che costituisce il terzo ed ultimo passo del metodo LAMBDA.

Un aspetto che è necessario considerare, relativamente al secondo punto dell'algoritmo, riguarda la validazione della soluzione ottenuta. Se infatti il sistema (6.2.3) è costruito con misure relative ad un intervallo temporale di pochi secondi, può capitare che alcuni vettori presenti nella regione ammissibile abbiano valori della funzione costo delle ambiguità (6.2.5) molto simili al minimo. Per questo motivo nel processo di ricerca viene individuato anche il vettore, $\bar{\mathbf{N}}_2$, corrispondente al valore della funzione costo immediatamente superiore al minimo ed utilizzando la (6.2.4) viene calcolato il rapporto tra le funzioni costo del sistema complessivo associate ai due vettori:

$$r_C = \frac{\left(\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{N}}_2\right)^T \cdot \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{N}}_2\right)}{\left(\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{N}}\right)^T \cdot \mathbf{W} \cdot \left(\mathbf{y} - \mathbf{G} \cdot \delta\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{N}}\right)}$$

Il vettore $\bar{\mathbf{N}}$ viene considerato quello delle ambiguità effettive se il rapporto è sufficientemente superiore ad 1. Va rilevato il fatto che non esiste un criterio per assegnare una soglia minima per r_C , nella pratica si assume generalmente il valore 3 [29], [42]. Fino a quando il rapporto non supera il valore fissato è necessario considerare le misure di un ulteriore istante. L'utilizzo delle misure di entrambe le frequenze e la disponibilità di un numero elevato di satelliti consente di ridurre in modo significativo le epoche necessarie a verificare il test. Ad esempio i risultati presentati in [13], che si riferiscono a condizioni di prova in cui sono visibili sette satelliti, mostrano che è possibile individuare le ambiguità con due sole misure relative a secondi consecutivi. Queste considerazioni tuttavia non sono applicabili nel caso delle prove con l'aeromodello. Bisogna ricordare infatti che il ricevitore presente nel sistema avionico utilizza una sola frequenza ed inoltre durante le fasi di volo il numero di satelliti disponibili risulta raramente superiore a cinque, come hanno evidenziato i risultati delle prove. Potrebbero essere dunque necessarie le misure di alcune decine di secondi per ottenere e validare la soluzione. Non si deve neanche trascurare il fatto che la presenza di un errore non modellato sulle misure, come ad esempio il multipath, rende inefficace il metodo LAMBDA [23]. Per questi motivi si è cercato un approccio diverso al problema della risoluzione dell'ambiguità.

6.3 Metodo basato sulle 'singole differenze'

Il metodo presentato in questa sezione è sviluppato sul modello delle misure di fase alle 'singole differenze' e può essere applicato alle relazioni linearizzate (4.2.2) e (4.2.3), nelle quali il vettore di riferimento è costituito dalla soluzione di posizione e bias ottenuta con il codice, e soprattutto alla rappresentazione alternativa (4.3.2). In questo contesto comunque la trattazione viene svolta sul modello linearizzato, (4.2.3), corrispondente al posizionamento relativo. In particolare, trascurando anche in questo caso il contributo del

multipath, le relazioni corrispondenti ad n satelliti formano il sistema:

$$\begin{bmatrix} (\Delta\tilde{\phi}_1 + \Delta N_1) \cdot \lambda - r_{1M_0} + r_{1F} \\ \vdots \\ (\Delta\tilde{\phi}_n + \Delta N_n) \cdot \lambda - r_{nM_0} + r_{nF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{h}_{1M} \\ \vdots \\ \hat{h}_{nM} \end{bmatrix} \cdot (\vec{s}_M - \vec{s}_{M_0}) + \begin{bmatrix} \Delta\mu_1 \\ \vdots \\ \Delta\mu_n \end{bmatrix}$$

Dal momento che è possibile sommare o sottrarre a ciascuna equazione del sistema un termine costante senza alterare la stima del vettore posizione ma solo quella del bias (si ricordi a questo proposito il commento a pagina 23 relativo alla pseudoinversa), si conviene di sottrarre a tutte le equazioni il termine $\Delta N_1 \cdot \lambda$.

Il metodo, che segue l'impostazione presente in [20], presuppone che siano visibili almeno cinque satelliti in modo tale che sia possibile suddividere il sistema in due parti:

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\phi}_p + \mathbf{N}_p) \cdot \lambda \\ (\tilde{\phi}_s + \mathbf{N}_s) \cdot \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_p \\ \mathbf{H}_s \end{bmatrix} \cdot \delta\vec{s} + \begin{bmatrix} \mathbf{m}_p \\ \mathbf{m}_s \end{bmatrix} \quad (6.3.1)$$

in cui le grandezze indicate con p si riferiscono all'insieme dei primi quattro satelliti e quelle indicate con s al secondo insieme composto dai satelliti rimanenti, ed in particolare per i termini a primo membro si è posto:

$$\tilde{\phi}_p = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\phi}_1 - \frac{r_{1M_0}}{\lambda} + \frac{r_{1F}}{\lambda} \\ \vdots \\ \Delta\tilde{\phi}_4 - \frac{r_{4M_0}}{\lambda} + \frac{r_{4F}}{\lambda} \end{bmatrix} \quad \tilde{\phi}_s = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\phi}_5 - \frac{r_{5M_0}}{\lambda} + \frac{r_{5F}}{\lambda} \\ \vdots \\ \Delta\tilde{\phi}_n - \frac{r_{nM_0}}{\lambda} + \frac{r_{nF}}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta N_2 - \Delta N_1 \\ \Delta N_3 - \Delta N_1 \\ \Delta N_4 - \Delta N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nabla\Delta N_{21} \\ \nabla\Delta N_{31} \\ \nabla\Delta N_{41} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} \Delta N_5 - \Delta N_1 \\ \vdots \\ \Delta N_n - \Delta N_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\Delta N_{51} \\ \vdots \\ \nabla\Delta N_{n1} \end{bmatrix}$$

In cui sono state evidenziate le ambiguità alle 'doppie differenze' precedentemente introdotte. L'individuazione delle soluzioni è ottenuta imponendo varie combinazioni di interi al vettore delle ambiguità, \mathbf{N}_s , del primo insieme di satelliti ed utilizzando il secondo insieme di satelliti per verificare quale combinazione risulti quella effettiva.

A questo proposito si definisce un vettore di primo tentativo, indicato con $\hat{\mathbf{N}}_p$, impiegando le misure alle 'doppie differenze' della pseudodistanza e della fase e l'operatore arrotondamento $\lfloor \cdot \rfloor$:

$$\hat{\mathbf{N}}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{N}_{21} \\ \hat{N}_{31} \\ \hat{N}_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left\lfloor \frac{\nabla\Delta\tilde{\rho}_{21}}{\lambda} - \nabla\Delta\tilde{\phi}_{21} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{\nabla\Delta\tilde{\rho}_{31}}{\lambda} - \nabla\Delta\tilde{\phi}_{31} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{\nabla\Delta\tilde{\rho}_{41}}{\lambda} - \nabla\Delta\tilde{\phi}_{41} \right\rfloor \end{bmatrix}$$

Supponendo che gli errori sulle misure di pseudodistanza non differenziate siano incorrelati tra i satelliti e tra i ricevitori e che abbiano distribuzione normale, con deviazione standard σ_p (molto maggiore di quella associata alle misure di fase), ciascuna delle ambiguità del vettore di primo tentativo, prima di effettuare l'arrotondamento, ha una deviazione standard pari a $2\sigma_p$, che può essere utilizzata per definire la regione ammissibile all'interno della quale individuare le combinazioni di elementi interi da verificare. Dalla condizione di normalità della distribuzione degli errori risulta infatti che le componenti del vettore delle ambiguità esatte si trovano con una probabilità superiore al 99% all'interno di un intervallo centrato nelle corrispondenti ambiguità del vettore di primo tentativo e di semiampiezza pari a tre volte la deviazione standard. Indicando quindi con z il numero intero ottenuto arrotondando per eccesso la quantità adimensionale, $3 \cdot (2\sigma_p) / \lambda$, che corrisponde all'incertezza espressa in termini di lunghezze d'onda della portante, la regione ammissibile \mathcal{N} risulta:

$$\mathcal{N} : \left\{ \hat{\mathbf{N}}_p + \begin{bmatrix} 0 & i & j & k \end{bmatrix}^T \mid i, j, k \in [-z, \dots, z], z \in \mathbb{Z} \right\}$$

ed è dunque composta da $(2 \cdot z + 1)^3$ combinazioni.

A questo punto per ogni istante in cui sono disponibili le misure viene applicato a ciascuno elemento, $\hat{\mathbf{N}}_p + d\mathbf{N}_p$, della regione ammissibile il seguente algoritmo di ricerca:

1. Si determina una stima $\delta\vec{s}_p$ del vettore delle incognite di posizione relativa e di differenza dei bias dei ricevitori con le misure del primo insieme di satelliti:

$$\delta\vec{s}_p = \mathbf{H}_p^{-1} \left[(\tilde{\varphi}_p + \hat{\mathbf{N}}_p + d\mathbf{N}_p) \cdot \lambda \right]$$

2. Si calcolano le quantità:

$$\hat{\varphi}_s = \frac{1}{\lambda} \mathbf{H}_s \cdot \delta\vec{s}_p$$

3. Si stima un vettore di ambiguità per il secondo insieme di misure utilizzando l'operatore arrotondamento $\lfloor \cdot \rfloor$:

$$\hat{\mathbf{N}}_s = \lfloor \hat{\varphi}_s - \tilde{\varphi}_s \rfloor$$

4. Si calcola il valore massimo, R , dei residui corrispondenti alla misure di fase del secondo insieme di satelliti:

$$R(\hat{\mathbf{N}}_p, d\mathbf{N}_p) = \|(\hat{\varphi}_s - \tilde{\varphi}_s) - \hat{\mathbf{N}}_s\|_\infty$$

5. Si valuta se R sia inferiore ad una soglia prefissata TH ed in caso contrario la combinazione di interi viene eliminata dalla regione ammissibile prima di ripetere l'algoritmo per le misure dell'istante successivo.

L'algoritmo si interrompe quando la regione ammissibile risulta costituita da un solo elemento, $\tilde{\mathbf{N}}_p$, che corrisponde al vettore delle ambiguità esatte. Ad ogni istante infatti cambia la configurazione geometrica tra i satelliti ed i ricevitori e, di conseguenza, cambiano le matrici \mathbf{H}_p , \mathbf{H}_s ed i vettori $\tilde{\varphi}_p$, $\tilde{\varphi}_s$. L'unico residuo che si mantiene limitato è appunto

quello corrispondente ad $\bar{\mathbf{N}}_p$, la cui entità è determinata dal rumore presente sulle misure, ed in particolare, per un generico istante, risulta:

$$R(\bar{\mathbf{N}}_p, 0) = \|\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \mathbf{m}_p - \mathbf{m}_s\|_\infty$$

La relazione precedente può essere utilizzata per fissare il valore della soglia TH che discrimina l'ammissibilità delle combinazioni. A questo proposito, assumendo che anche gli errori sulle misure di fase abbiano distribuzione normale, si può scrivere:

$$R(\bar{\mathbf{N}}_p, 0) \leq \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} & -\mathbf{I}_s \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \right\|_\infty \cdot \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{m}_p \\ \mathbf{m}_s \end{bmatrix} \right\|_\infty \approx \left(\sup_{1 \leq i \leq n-4} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot (6\sigma_\phi) = TH$$

nella quale con \mathbf{I}_s si è indicata la matrice identità di dimensione pari al numero di satelliti del secondo insieme e si è applicata la definizione di norma infinito [30] alla matrice \mathcal{A} di elementi a_{ij} . Si ricorda inoltre che n rappresenta il numero totale di satelliti in vista e proprio questo parametro risulta decisivo ai fini della rapidità e dell'efficienza del metodo appena presentato, come si può notare nella figura 6.1.

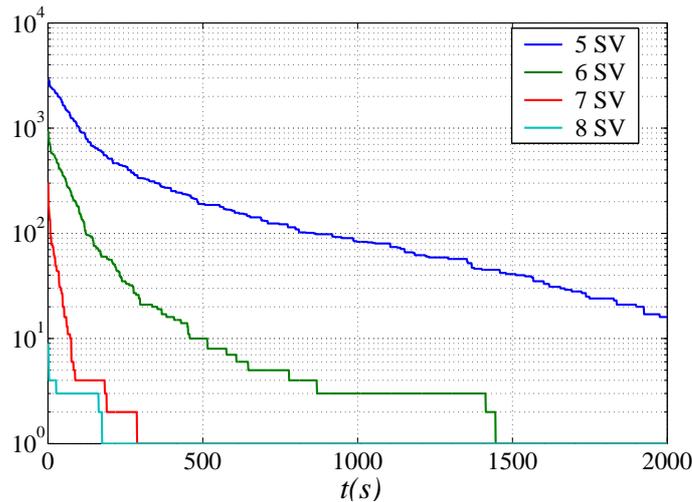


Fig. 6.1. Riduzione nel tempo del numero di combinazioni ammissibili

Il grafico, con ordinata logaritmica, si riferisce ad una prova sperimentale statica nella quale sono risultati visibili con continuità otto satelliti per entrambi i ricevitori, l'algoritmo è stato applicato quattro volte utilizzando gli stessi satelliti per il primo insieme e variando il numero di satelliti componenti il secondo insieme. In particolare ciascuna curva rappresenta, in funzione degli istanti di misura, il numero di combinazioni facenti ancora parte della regione ammissibile. La deviazione standard σ_p per le misure di pseudodistanza è stata scelta pari a 30 cm, da cui discende un valore di z per la regione ammissibile iniziale pari a 10 ed un numero di combinazioni superiore a 9000. Si può notare che, in corrispondenza del numero massimo di satelliti visibili, le combinazioni ammissibili dopo un solo istante di misura è pari a 9 e che l'ambiguità viene risolta dopo circa duecento secondi, quando rimane una sola combinazione. Il metodo non risulta

perciò sufficientemente rapido anche con un numero di satelliti elevato. Questo aspetto risulta ulteriormente aggravato nel caso in cui il numero di satelliti in vista sia solo cinque, che rappresenta in particolare la situazione verificatasi in condizioni di volo per l'aeromobile. Le combinazioni valide dopo circa duemila secondi sono infatti ancora superiori a dieci. Tuttavia, sulla base dell'algoritmo introdotto, è stato sviluppato un nuovo metodo per la risoluzione delle ambiguità che presuppone l'utilizzo della misure di cinque satelliti e che viene presentato nella sezione successiva.

6.3.1 Modellazione dell'evoluzione del residuo tramite un sistema lineare

Si assuma che il numero di satelliti visibili sia 5, e si suddivida nuovamente il sistema di equazioni corrispondenti in due parti, come nella (6.3.1). In questo caso il secondo insieme è costituito da un solo satellite. Si consideri anche la soluzione di primo tentativo per i quattro satelliti ottenuta con le misure di codice. Quest'ultima può essere espressa come somma tra il vettore delle ambiguità vere $\bar{\mathbf{N}}_p$ ed un vettore di scostamento $\delta\mathbf{N}_p$ costituito anch'esso da elementi interi di cui il primo nullo. Il residuo corrispondente, considerato con il segno, risulta quindi:

$$\begin{aligned} R(\bar{\mathbf{N}}_p, \delta\mathbf{N}_p) &= (\hat{\varphi}_s - \tilde{\varphi}_s) - \hat{\mathbf{N}}_s \\ &= \left(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\tilde{\varphi}_p + \bar{\mathbf{N}}_p + \delta\mathbf{N}_p \right) - \tilde{\varphi}_s \right) \\ &\quad - \left[\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\tilde{\varphi}_p + \bar{\mathbf{N}}_p + \delta\mathbf{N}_p \right) - \tilde{\varphi}_s \right] \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Esprimendo poi i vettori $\tilde{\varphi}_p$ e $\tilde{\varphi}_s$, in cui sono presenti le misure di fase alle 'singole differenze', come somma dei termini esatti, indicati con φ_p e φ_s , ed i rispettivi termini di errore m_p e m_s , il residuo può essere riscritto:

$$\begin{aligned} R(\bar{\mathbf{N}}_p, \delta\mathbf{N}_p) &= \left(\left(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\varphi_p + \bar{\mathbf{N}}_p \right) - \varphi_s \right) + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \delta\mathbf{N}_p + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot m_p - m_s \right) \\ &\quad - \left[\left(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\varphi_p + \bar{\mathbf{N}}_p \right) - \varphi_s \right) + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \delta\mathbf{N}_p + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot m_p - m_s \right] \end{aligned}$$

nella quale è stato evidenziato il termine $\left(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\varphi_p + \bar{\mathbf{N}}_p \right) - \varphi_s \right)$ che corrisponde all'ambiguità esatta dell'unico satellite del secondo insieme. Esso risulta quindi un numero intero, perciò applicando la proprietà dell'operatore arrotondamento:

$$\lfloor a + b \rfloor = a + \lfloor b \rfloor \quad a \in \mathbb{Z}$$

si ha infine:

$$\begin{aligned} R(\bar{\mathbf{N}}_p, \delta\mathbf{N}_p) &= \left(\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\varphi_p + \bar{\mathbf{N}}_p - \varphi_s \right) \right) - \left[\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \left(\varphi_p + \bar{\mathbf{N}}_p - \varphi_s \right) \right] \\ &\quad + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \delta\mathbf{N}_p + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot m_p - m_s \\ &\quad - \left[\mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \delta\mathbf{N}_p + \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot m_p - m_s \right] \end{aligned}$$

Come si può notare è stata ottenuta una relazione dell'errore che evidenzia come il residuo sia funzione esclusivamente del vettore di scostamento tra l'ambiguità di tentativo e quella vera. A questo proposito, ricordando che il primo elemento dei vettori delle ambiguità è nullo si può porre:

$$\mathbf{N}^p = \delta \mathbf{N}_p |_{2:4} = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \\ N^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} |_{2:4} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$$

raggruppando poi i termini di errore nel vettore:

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{H}_p^{-1} \cdot \mathbf{m}_p - \mathbf{m}_s$$

il residuo assume la forma compatta

$$R(N^p) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{N}^p + \mathbf{e} - [\mathbf{p} \cdot \mathbf{N}^p + \mathbf{e}] \quad (6.3.3)$$

Si consideri ora l'equazione cartesiana di un piano nello spazio:

$$\Pi : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d$$

La distanza di un punto P_0 di coordinate x_0, y_0, z_0 dal piano Π è data dalla relazione:

$$d(P_0, \Pi) : \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Quest'ultima può essere utilizzata per definire, in ogni istante di misura k , l'espressione:

$$\delta(k) = \frac{p_1(k) \cdot N^1 + p_2(k) \cdot N^2 + p_3(k) \cdot N^3 - N^d}{\sqrt{p_1^2(k) + p_2^2(k) + p_3^2(k)}} \quad (6.3.4)$$

che rappresenta la distanza del vettore di scostamento N^p dal piano perpendicolare a p e con coefficiente d dato da:

$$d = -N^d = - [p_1(k) \cdot N^1 + p_2(k) \cdot N^2 + p_3(k) \cdot N^3]$$

Si può notare che il numeratore della (6.3.4) rappresenta il residuo (6.3.3), nel quale tuttavia è stato trascurato il vettore degli errori \mathbf{e} . Essa può dunque costituire un modello dell'evoluzione nel tempo del residuo. In particolare, se si conviene di considerare costante nel tempo e pari al suo valore iniziale il termine intero N^d , il modello risulta lineare con variabili di stato $\delta, N^1, N^2, N^3, N^d$, e con funzione di uscita data dalla (6.3.3). Il termine N^d può essere reso costante compensando le eventuali discontinuità provocate dall'operatore arrotondamento quando il suo argomento eccede la mezza unità. Questo aspetto non rappresenta un particolare problema perchè la misura affetta da discontinuità, che corrisponde al residuo del vettore delle ambiguità di primo tentativo calcolato con la (6.3.2), è disponibile. La differenza delle relazioni (6.3.4), scritte per due istanti consecutivi risulta:

$$\begin{aligned} d(k+1) = & d(k) + \left(\frac{p_1(k+1)}{\|p(k+1)\|} - \frac{p_1(k)}{\|p(k)\|} \right) \cdot N^1 + \left(\frac{p_2(k+1)}{\|p(k+1)\|} - \frac{p_2(k)}{\|p(k)\|} \right) \cdot N^2 \\ & + \left(\frac{p_3(k+1)}{\|p(k+1)\|} - \frac{p_3(k)}{\|p(k)\|} \right) \cdot N^3 + \left(\frac{p(k+1) - p(k)}{\|p(k+1)\| \cdot \|p(k)\|} \right) \cdot N^d \end{aligned}$$

Il modello del problema diventa perciò:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + e(k) \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

avendo posto:

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}(k) & a_{13}(k) & a_{14}(k) & a_{15}(k) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = \frac{p_1(k+1)}{\|p(k+1)\|} - \frac{p_1(k)}{\|p(k)\|} \quad a_{13} = \frac{p_2(k+1)}{\|p(k+1)\|} - \frac{p_2(k)}{\|p(k)\|}$$

$$a_{14} = \frac{p_3(k+1)}{\|p(k+1)\|} - \frac{p_3(k)}{\|p(k)\|} \quad a_{15} = \frac{p(k+1) - p(k)}{\|p(k+1)\| \cdot \|p(k)\|}$$

$$C(k) = [0 \quad p_1(k) \quad p_2(k) \quad p_3(k) \quad -1]$$

Lo stato del sistema (6.3.5) può essere stimato tramite un filtro di Kalman a tempo discreto. In particolare nel modello non è presente il rumore di processo, mentre per il rumore di misura vale:

$$E [e(k) \cdot e^T(j)] = R_k \delta_{jk} = 2 \cdot \left\| [\mathbf{H}_s(k) \cdot \mathbf{H}_p^{-1}(k) \quad -1] \right\|^2 \cdot \sigma_\phi^2$$

dove δ_{jk} rappresenta l'operatore di Kronecker. Chiaramente non si possono porre vincoli di interezza per le variabili di stato N^1 , N^2 , N^3 , N^d , perciò le stime fornite dal filtro risulteranno a valori reali. A questo proposito si suppone che N^1 , N^2 , N^3 , siano variabili aleatorie mutuamente incorrelate a valor medio nullo, con varianza pari a $4\sigma_\rho^2$, hanno infatti la stessa incertezza degli elementi del vettore di primo tentativo $\hat{\mathbf{N}}_p$. Le variabili δ ed N^p hanno valore medio nullo e risultano correlate alle altre tre, essendo loro funzioni. Il vettore iniziale dello stato è dunque costituito da elementi nulli, mentre la matrice di covarianza dell'errore dello stato all'istante iniziale è data da:

$$P(0) = \begin{bmatrix} 4 \cdot (\|p\|^2 + 1) \cdot \sigma_\phi^2 & 2 \cdot p_1 \cdot \sigma_\phi & 2 \cdot p_2 \cdot \sigma_\phi & 2 \cdot p_3 \cdot \sigma_\phi & -4 \cdot \|p\|^2 \cdot \sigma_\phi^2 \\ 2 \cdot p_1 \cdot \sigma_\phi & 4\sigma_\rho^2 & 0 & 0 & 4 \cdot p_1^2 \cdot \sigma_\rho^2 \\ 2 \cdot p_2 \cdot \sigma_\phi & 0 & 4\sigma_\rho^2 & 0 & 4 \cdot p_2^2 \cdot \sigma_\rho^2 \\ 2 \cdot p_3 \cdot \sigma_\phi & 0 & 0 & 4\sigma_\rho^2 & 4 \cdot p_3^2 \cdot \sigma_\rho^2 \\ -4 \cdot \|p\|^2 \cdot \sigma_\phi^2 & 4 \cdot p_1^2 \cdot \sigma_\rho^2 & 4 \cdot p_2^2 \cdot \sigma_\rho^2 & 4 \cdot p_3^2 \cdot \sigma_\rho^2 & 4 \cdot \|p\|^2 \cdot \sigma_\rho^2 \end{bmatrix}$$

in cui gli elementi del vettore p si riferiscono appunto all'istante iniziale. Il sistema (6.3.5) presenta alcune proprietà. In particolare la matrice di transizione dello stato, indicata con $\Phi(k, k_0)$ risulta:

$$\Phi(k, k_0) = \begin{cases} \prod_{j=k_0}^{k-1} A_j & \text{per } k \geq k_0+1, \\ I & \text{per } k=k_0. \end{cases}$$

$$\Phi(k, k_0) = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{j=k_0}^{k-1} a_{12}(j) & \sum_{j=k_0}^{k-1} a_{13}(j) & \sum_{j=k_0}^{k-1} a_{14}(j) & \sum_{j=k_0}^{k-1} a_{15}(j) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

di conseguenza il Gramiano di osservabilità diventa:

$$W(k, k_0) = \sum_{j=k_0}^k \Phi^T(j, k_0) C^T(j) C(j) \Phi(j, k_0)$$

e può essere espresso in forma ricorsiva:

$$W(k, k_0) = W(k-1, k_0) + \Phi^T(k, k_0) C^T(k) C(k) \Phi(k, k_0)$$

$$= W(k-1, k_0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1^2(k) & p_1(k) \cdot p_2(k) & p_1(k) \cdot p_3(k) & -p_1(k) \\ 0 & p_1(k) \cdot p_2(k) & p_2^2(k) & p_2(k) \cdot p_3(k) & -p_2(k) \\ 0 & p_1(k) \cdot p_3(k) & p_2(k) \cdot p_3(k) & p_3^2(k) & -p_3(k) \\ 0 & -p_1(k) & -p_2(k) & -p_3(k) & 1 \end{bmatrix}$$

Come si può notare uno degli autovalori della matrice Gramiano risulta nullo, dal momento che la prima riga, e la prima colonna per simmetria, sono costituite da zeri che non vengono mai modificati. Per questo motivo il sistema non è completamente osservabile. Si può verificare tuttavia che il sistema è uniformemente rivelabile. Un sistema lineare tempo-variante, infatti, è rivelabile in modo uniforme se esistono degli interi $s \geq t \geq 0$ e delle costanti d, b con $0 \leq d < 1, 0 < b < \infty$ tali che ogni volta che risulta:

$$\|\Phi(k+t, k) \xi\| \geq d \|\xi\| \quad (6.3.6)$$

per qualche stato iniziale ξ ed istante iniziale k , allora

$$\xi^T W(k+s, k) \xi \geq b \xi^T \xi \quad (6.3.7)$$

Per il sistema in esame la relazione (6.3.6) può essere scritta:

$$\left\| \begin{array}{c} \xi_1 + \Phi_{12} \cdot \xi_2 + \Phi_{13} \cdot \xi_3 + \Phi_{14} \cdot \xi_4 + \Phi_{15} \cdot \xi_5 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{array} \right\| \geq d \cdot \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{array} \right\|$$

da cui risulta per ogni stato iniziale un valore minimo di d pari a:

$$d_{min} = \frac{\|\xi\|_{2:5}}{\|\xi\|}$$

è necessario dimostrare quindi che esiste per ogni condizione iniziale un valore di b che soddisfa la (6.3.7). A questo proposito è sufficiente considerare la formula ricorsiva del Gramiano di osservabilità, ottenendo:

$$\begin{aligned} \xi^T W(k, k_0) \xi &= \xi^T W(k-1, k_0) \xi + \xi^T \Phi^T(k, k_0) C^T(k) C(k) \Phi(k, k_0) \xi \geq b \xi^T \xi \\ \xi^T W(k-1, k_0) \xi + [p_1(k) \cdot \xi_2 + p_2(k) \cdot \xi_3 + p_3(k) \cdot \xi_4 - \xi_5]^2 &\geq b \xi^T \xi \\ \xi^T W(k-1, k_0) \xi + (\xi_1 \|p(k)\|)^2 &\geq b \xi^T \xi \end{aligned}$$

Va notato che all'ultimo passo si è sfruttata la relazione (6.3.4) che lega la prima variabile di stato alle altre quattro. A questo punto è sufficiente notare che la quantità a primo membro è non decrescente, in quanto somma di termini non negativi perciò, dal momento che la componente ξ_1 non converge a zero a meno che non siano zero tutte le altre componenti, esiste un istante s tale per cui la relazione (6.3.7) risulta soddisfatta e lo rimane per tutti gli istanti successivi. Come dimostrato in [3], la condizione di rivelabilità assicura la limitatezza della matrice di covarianza dell'errore di stima $P(k)$ del filtro di Kalman.

I risultati ottenuti nella stima dello stato del modello (6.3.5) non sono tuttavia soddisfacenti, la convergenza verso i valori esatti risulta lenta e soprattutto la riduzione dell'errore di stima, seppure stabile, non presenta un andamento monotono in tutte le componenti.

Per questo motivo si opera una trasformazione dello spazio delle ambiguità N^1, N^2, N^3 , definendo i vettori:

$$\vec{u}(k) = \frac{\mathbf{p}(k+1) - \mathbf{p}(k)}{\|\mathbf{p}(k+1) - \mathbf{p}(k)\|}$$

$$\vec{v}(k) = \frac{\mathbf{p}(k) \wedge \mathbf{p}(k+1)}{\|\mathbf{p}(k) \wedge \mathbf{p}(k+1)\|}$$

$$\vec{w}(k) = \frac{\mathbf{u}(k) \wedge \mathbf{v}(k)}{\|\mathbf{u}(k) \wedge \mathbf{v}(k)\|}$$

il vettore \vec{u} giace nel piano contenente i vettori $\mathbf{p}(k+1)$ e $\mathbf{p}(k)$, il vettore \vec{v} è ortogonale a \vec{u} ed al piano contenente $\mathbf{p}(k+1)$ e $\mathbf{p}(k)$, infine \vec{w} completa una terna ortogonale destrorsa.

Definendo quindi la matrice di trasformazione T :

$$T(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{u} & & & \\ 0 & \vec{v} & & & \\ 0 & \vec{w} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che risulta ortogonale ($T^T = T^{-1}$), si può ottenere un sistema equivalente al (6.3.5):

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(k)\tilde{x}(k)$$

$$\tilde{y}(k) = \tilde{C}(k)\tilde{x}(k) + e(k)$$

in cui:

$$\tilde{x}(k) = T(k)x(k)$$

$$\tilde{A}(k) = T(k+1)A(k)T(k)^T$$

$$\tilde{C}(k) = C(k)T(k)^T$$

In questa nuova rappresentazione risulta che l'errore sulla seconda componente del vettore di stato, che rappresenta la proiezione lungo la direzione \vec{u} del vettore di scostamento N^p , si riduce in poche decine di secondi, ciò equivale a stimare la posizione del piano perpendicolare a \vec{u} e passante per N^p . Questo aspetto può essere utilizzato per limitare la regione ammissibile entro la quale cercare le combinazioni di interi. È possibile infatti determinare una coppia di piani anch'essi perpendicolari a \vec{u} e distanti da quello stimato in precedenza di una quantità corrispondente alla incertezza sulla stima della seconda componente del vettore di stato. A questo proposito, utilizzando gli elementi Σ_{ij} della matrice di covarianza dell'errore di stima del filtro, corrispondenti alla seconda componente del vettore di stato, si può definire la quantità:

$$D(k) = \sqrt{\Sigma_{22} + \left\| \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}} \right\| + \left\| \frac{\Sigma_{13}}{\Sigma_{33}} \right\| + \left\| \frac{\Sigma_{14}}{\Sigma_{44}} \right\| + \left\| \frac{\Sigma_{15}}{\Sigma_{55}} \right\|}$$

Nella figura 6.2 è presentato con la linea blu l'errore tra la proiezione esatta e quella stimata del vettore N^p lungo la direzione \vec{u} , mentre con la linea rossa è rappresentata l'andamento di $D(k)$. Come si può notare la riduzione dell'incertezza rispetto all'istante iniziale è molto rapida e porta alla diminuzione della regione ammissibile in poche decine di secondi. In particolare nella figura 6.3 è presentato il dettaglio dei primi 60 secondi del grafico precedente. Come si può notare già dopo venti secondi l'errore di stima è inferiore alla mezza unità.

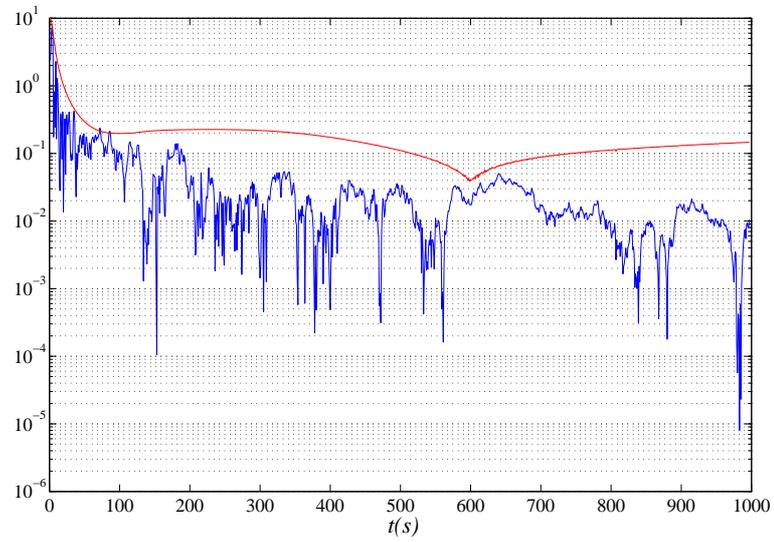


Fig. 6.2. Errore di stima della seconda componente del vettore di stato

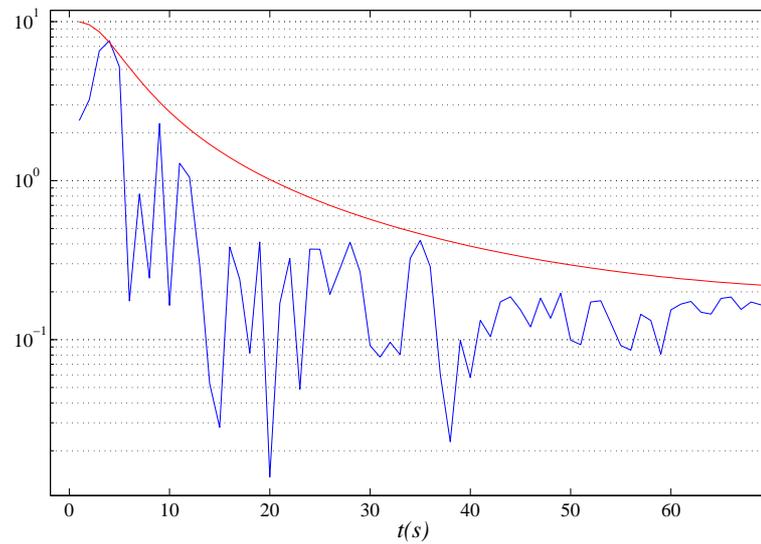


Fig. 6.3. Dettaglio dell'errore di stima della seconda componente del vettore di stato

Bibliografia

- [1] Interface Control Document-Global Positioning System, ICD-GPS-200 Rev. C. Technical report, Rockwell International, 2003.
- [2] Opinion of the european economic and social committee on air safety. In *Official Journal of the European Union*. 2006.
- [3] B. Anderson and J. Moore. Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems. *Journal of Control and Optimization*, 19(1):20–32, 1981.
- [4] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear Systems*. McGraw-Hill, 1999.
- [5] J. Ashjaee and R. Lorenz. Precision GPS Surveying after Y-Code. Technical report, Ashtech, Sunnyvale, CA, 1992.
- [6] G. Bertoni, W. Geri, M. E. Penati, C. Pondi, and M. Zanzi. Architettura e primi risultati sperimentali del sistema avionico di un UAV. In *XVIII congresso AIDAA Associazione Italiana di Aeronautica e Astronautica*, Settembre 2005. Volterra.
- [7] N. Chiarini, M. Zanzi, G. Bertoni, and M. E. Penati. A DGNSS Instrument Approach System for General Aviation. *Space Technology*, 20(4):157–167.
- [8] Civil Aviation Safety Authority of Australia. *Design Standards: Unmanned Aerial Vehicles - Aeroplanes*, 2000.
- [9] S. Committee-159. Minimum Operational Performance Standard for the Local Area Augmentation System Airborne Equipment (LAAS), DO-245. Technical report, RTCA, September 1998.
- [10] S. Committee-159. Minimum Operational Performance Standard for Global Positioning System/Wide Area Augmentation System Airborne Equipment (WAAS), DO-229c. Technical report, RTCA, November 2001.
- [11] M. Crisci. *Baro-Inertial GPS augmentation scheme with the use of Kalman and robust filtering techniques*. PhD thesis, Università di Bologna, 2003.
- [12] M. Crisci, W. Geri, and G. Bertoni. DEIS UAV: GNC design and avionics implementation issues. In *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on automatic control in aerospace*, June 2004. Saint-Petersburg,Russia.

- [13] P. de Jonge, C. Tiberius, and P. Teunissen. Computational aspects of the lambda method for gps ambiguity resolution. In *Proceedings of ION GPS*, September 1996. Kansas City.
- [14] J. Farrell and M. Barth. *The Global Positioning System and Inertial Navigation*. McGraw-Hill, 1999.
- [15] Federal Aviation Administration (FAA). *Unmanned aircraft systems operations in the U.S. national airspace system*, september 2005.
- [16] F.I.A.M Federazione Italiana Aeromodellismo. *La sicurezza nell'impiego degli aeromodelli radiocomandati*, gennaio 2004.
- [17] W. Geri. *Architettura avionica per applicazioni UAV: nuovi aspetti riguardanti la guida ed il controllo*. PhD thesis, Università di Bologna, 2005.
- [18] W. Geri and G. Bertoni. Aircraft guidance law analysis. In *Proceedings of the 16th IFAC Symposium on automatic control in aerospace*, June 2004. St. Petersburg, Russia.
- [19] W. Geri, C. Pondi, and M. Zanzi. Ground test performance analysis of egnos base satellite navigation solution compared to stand-alone and gbas. In *Proceedings of the ENC-GNSS*, July 2005. Munich.
- [20] R. Hatch. Instantaneous ambiguity resolution. In *Proceedings of Kinematic Systems in Geodesy, Survey and Remote Sensing, KIS*, 1990. Banff, Canada.
- [21] P. Hwang. Kinematic gps for differential positioning: Resolving integer ambiguities on the fly. *Journal of The Institute of Navigation*, 38(1):1–15, 1991.
- [22] JAA, Eurocontrol. *A concept for european regulations for civil unmanned aerial vehicles*, May 2004.
- [23] P. Joosten and M. Irsigler. GNSS ambiguity resolution in the presence of multipath. Technical report, Mathematical Geodesy and Positioning, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [24] D. Kim and R. B. Langley. An optimized least-squares technique for improving ambiguity resolution performance and computational efficiency. In *Proceedings of ION GPS*, September 1999. Nashville.
- [25] D. Kim and R. B. Langley. Gps ambiguity resolution and validation: Methodologies, trends and issues. In *International Symposium on GPS/GNSS*, November 2000. Seoul.
- [26] H. Landau, U. Vollath, and X. Chen. Virtual reference station systems. *Journal of Global Positioning System*, 1(2):137–143, 2002.

- [27] H. Landau, U. Vollath, X. Chen, K. Doucet, and C. Pagels. Network rtk versus single base rtk-understanding the error characteristics. In *Proceedings of ION GPS*, pages 2774–2781, September 2002. Portland, OR.
- [28] H. Landau, U. Vollath, B. Wagner, A. Buecherl, and C. Pagels. Multi-base rtk using virtual reference stations. In *Proceedings of ION GPS*, September 2000. Salt Lake City, Utah.
- [29] A. Leick. *GPS Satellite Surveying*. John Wiley & Sons, Inc., second edition, 1995.
- [30] G. Marro. *Teoria dei Sistemi e del Controllo*. Zanichelli, ristampa edition, 2002.
- [31] P. Misra and P. Enge. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. Navtech GPS, second edition, 2006.
- [32] Mitre Corporation. *Issues Concerning Integration of Unmanned Aerial Vehicles in Civil Airspace*, November 2004.
- [33] Office of secretary of defense. *Airspace Integration Plan for Unmanned Aviation*, November 2004.
- [34] C. Pondi. Accuracy evaluation of a code-based single difference technique. In *Proceedings of the 3rd ESA Workshop on Satellite Navigation User Equipment Technologies*, Navitec, December 2006. Noordwijk, NL.
- [35] B. W. Remondi. Computing satellite velocity using the broadcast ephemeris. *GPS Solutions*, 8(2), 2004.
- [36] R. Santerre. Impact of GPS satellite sky distribution. *Manuscripta Geodaetica*, 16(1):28–53, 1991.
- [37] P. Teunissen. Least-squares estimation of the integer gps ambiguities. In *IAG General Meeting*, August 1993. Beijing.
- [38] P. Teunissen. A new method for fast carrier phase ambiguity estimation. In *Proceedings of IEEE Plans*, April 1994. Las Vegas.
- [39] P. J. G. Teunissen. Success probability of integer gps ambiguity rounding and bootstrapping. *Journal of Geodesy*, (72):606–612, 1998b.
- [40] M. Tibaldi. *Progetto di sistemi di controllo*. Pitagora, seconda edition, 1995.
- [41] U.S. Department of Defense. *Dictionary of Military and Associated Terms*, 2006.
- [42] S. Veraghen. On the reliability of integer ambiguity resolution. *Journal of The Institute of Navigation*, 52(2):99–110, 2005.
- [43] B. W. Parkinson, J. J. S. Jr., P. Axelrad, and P. Enge, editors. *Global Positioning System: Theory and Applications*, volume 163 of *Progress in Astronautics and Aeronautics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.