

# Università degli Studi di Bologna

---

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Dottorato in  
ING-IND/13: MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE  
Ciclo XIX

## **Meccanismi piani con gioco: luoghi ad errore di posizione massimo costante**

**Tesi di Dottorato di:**  
Ing. Marco Cocconcelli

**Coordinatore:**  
Chiar.mo Prof. Vincenzo Parenti Castelli

**Tutore:**  
Chiar.mo Prof. Vincenzo Parenti Castelli

---

Anno Accademico 2005-2006



# INDICE

1. INTRODUZIONE.....	3
2. STATO DELL'ARTE.....	5
2.1 Modellazione delle coppie cinematiche.....	6
2.2 Analisi di posizionamento.....	8
2.3 Discussione.....	11
3. LUOGHI AD ERRORE DI POSIZIONE COSTANTE.....	12
3.1 Analisi del gioco per un meccanismo piano.....	13
3.2 Definizione dell'errore di posizione ed orientamento.....	18
3.3 Analisi di sensibilità dell'errore di posizione.....	20
3.4 Tracciamento di luoghi ad errore di posizione costante.....	25
3.5 Esempi di possibili applicazioni.....	30
3.5.1 Disposizione ottimale di un'assegnata traiettoria.....	30
3.5.2 Disposizione ottimale di una traiettoria vincolata in un punto.....	31
3.6 Discussione.....	32
4. STUDIO SULLA TOPOLOGIA DEI MECCANISMI.....	34
4.1 Gruppi di Assur.....	34
4.2 Applicazione dei gruppi di Assur.....	36
4.3 Disposizione delle coppie attuate.....	40
4.4 Algoritmo di verifica.....	43
4.5 Esempi di applicazione.....	45
4.5.1 Esempio di meccanismo idoneo alla determinazione di luoghi ad errore costante mediante la procedura proposta.....	46
4.5.2 Esempio di meccanismo non idoneo alla determinazione di luoghi ad errore costante mediante la procedura proposta.....	47
4.6 Discussione.....	48
5. CONCLUSIONI.....	51
6. BIBLIOGRAFIA.....	53
A. APPENDICI.....	57
A.1 Ulteriori risultati dell'analisi di sensibilità.....	58
A.2 Esempi di meccanismi idonei alla determinazione di luoghi ad errore costante.....	66

A.2.1 Meccanismi a due gradi di libertà e cinque membri.....	66
A.2.2 Meccanismi a due gradi di libertà e sette membri.....	67
A.2.3 Meccanismi a tre gradi di libertà e sei membri.....	67
A.2.4 Meccanismi a tre gradi di libertà e otto membri.....	68
A.2.5 Meccanismi a quattro gradi di libertà e sette membri.....	71
A.2.6 Meccanismi a cinque gradi di libertà e otto membri.....	71

# 1. INTRODUZIONE

Questa tesi di dottorato raccoglie i risultati degli studi condotti nel periodo di dottorato, riguardo l'analisi dell'influenza del gioco nelle coppie cinematiche sull'errore di posizionamento di un membro di riferimento di un meccanismo dato. In particolare la tesi indaga la possibilità, per un dato meccanismo, di tracciare luoghi di punti nei quali l'errore di posizionamento sia costante. L'attività di ricerca svolta verrà presentata attraverso la suddivisione della tesi stessa in tre capitoli fondamentali che possano rendere un quadro chiaro, se non esaustivo, delle problematiche affrontate.

Il gioco nelle coppie cinematiche è dovuto a due fattori principali: errori di lavorazione ed esigenze costruttive. Gli errori di lavorazione sono errori sistematici dovuti ai limiti intrinseci della macchina utensile utilizzata, mentre i giochi generati per esigenze costruttive sono legati alla necessità di ottenere la mobilità desiderata nella coppia cinematica. Mobilità che altrimenti non riuscirebbe ad avere a causa, ad esempio, dell'attrito tra le superfici della coppia a contatto tra loro.

La presenza del gioco nelle coppie cinematiche aggiunge ulteriori gradi di libertà al meccanismo, il quale viene ad avere una mobilità non nulla anche quando le variabili comandate dagli attuatori siano tutte assegnate. Di conseguenza non è possibile assegnare tramite le sole coppie attuate la posizione e l'orientamento di un membro del meccanismo, ma vi sarà comunque un errore di posizionamento dovuto alla presenza del gioco nelle coppie cinematiche.

Il gioco si prefigura spesso come una necessità nei meccanismi, con aspetti positivi ed aspetti negativi. Se la desiderata mobilità della coppia costituisce l'aspetto positivo, l'errore di posizione e orientamento che il gioco genera costituisce uno tra i tanti aspetti negativi, che deve essere minimizzato e/o controllato.

Modelli matematici che descrivano l'errore dovuto ai giochi sono stati sviluppati da oltre cinquant'anni, e ancora oggi molti ricercatori propongono nuove procedure per cercare di migliorare la modellazione e rispondere ad esigenze progettuali. In letteratura sono stati proposti modelli dinamici, che considerano effetti quali gli urti, e statici che considerano le superfici coniugate sempre a contatto. La trattazione svolta in questa tesi considera l'effetto

del gioco da un punto di vista geometrico e statico non considerando gli effetti dinamici. Lo sviluppo delle metodologie proposte in letteratura è complesso ed interessante, infatti si ritrovano tra gli “strumenti” utilizzati le principali tecniche usate nella Cinematica classica, quali metodi grafici, metodi basati su matrici piuttosto che su metodi iterativi, procedure basate sull'uso del Principio dei Lavori Virtuali. Nel secondo capitolo si è cercato di dare al lettore una visione di insieme che, seppure non esaustiva di tutte le tecniche utilizzate, permetta di focalizzare le principali problematiche e di indirizzare un'eventuale ulteriore ricerca in questo settore.

Nel terzo capitolo si è approfondita la relazione che intercorre tra l'errore commesso dal membro di riferimento del meccanismo in esame in una determinata configurazione e la configurazione stessa, con la finalità di determinare luoghi di punti ad errore di posizione costante. Questa relazione ha permesso l'introduzione di vincoli nel meccanismo che garantissero, se soddisfatti, un determinato valore dell'errore di posizione commesso. I vincoli introdotti sono di natura geometrica e il meccanismo può riuscire a soddisfarli in diverse configurazioni. Queste configurazioni costituiscono luoghi ad errore di posizione costante per il meccanismo assegnato. Il terzo capitolo quindi introduce e presenta una procedura per il tracciamento di luoghi che è il punto saliente, di questa tesi di dottorato.

Il quarto capitolo analizza più in dettaglio le caratteristiche che un generico meccanismo deve possedere affinché mediante la procedura descritta nel capitolo tre si giunga alla possibilità di tracciare luoghi ad errore costante. In particolare verranno introdotti i gruppi di Assur quale potente strumento per la scrittura sistematica dei vincoli aggiuntivi che permettono la tracciabilità dei luoghi ad errore costante.

Le appendici mostrano infine diversi risultati che, per motivi di spazio e per non appesantire la trattazione, non hanno trovato posto nei capitoli precedenti. I risultati riportati completano lo studio e mostrano l'elevata varietà dei meccanismi a cui è possibile applicare la metodologia descritta.

## 2. STATO DELL'ARTE

In questo capitolo verrà presentato lo stato dell'arte inerente l'analisi dell'errore di posizione ed orientamento di un membro di un meccanismo dovuto alla presenza di gioco nelle coppie cinematiche. La trattazione segue il lavoro di review proposto in [24], a cui si rimanda per completezza.

In letteratura la modellazione dei giunti affetti da gioco si può dividere in due approcci principali: deterministico e stocastico. Nell'approccio deterministico vengono presi in considerazione tutti i tipi di contatto che possono svilupparsi tra gli elementi delle coppie cinematiche, mentre in quello stocastico si utilizzano i metodi propri dell'analisi probabilistica per valutare la densità di probabilità che il membro di riferimento del meccanismo in studio commetta un determinato errore sotto assegnate condizioni. Sia i metodi deterministici che quelli stocastici possono poi suddividersi ulteriormente tra modelli quasi-statici e modelli dinamici. I primi ipotizzano che il sistema sia in una configurazione di equilibrio, anche soggetto a carichi esterni, mentre i metodi dinamici prendono in considerazione anche gli urti e i distacchi che si generano tra gli elementi che costituiscono le coppie cinematiche.

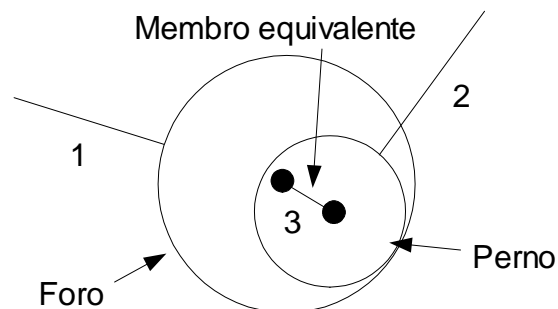
Poiché il lavoro di questa tesi ha riguardato prettamente metodi deterministici e quasi-statici, nel seguito si riporteranno i risultati presenti in letteratura inerenti a questi tipi di modelli.

Per completezza in bibliografia sono riportati anche alcuni importanti lavori riguardanti l'analisi del gioco attraverso metodi stocastici. Il lettore interessato può fare riferimento ai lavori di Chackraborty [2], Garret e Hall [6], Dhande e Chackraborty [4,6], Rhyu e Kwak [27], Lee e Gilmore [14], Lee e alt [15].

Lo studio dell'errore di posizione e di orientamento dovuto ai giochi si può dividere in due parti principali: la modellazione della coppia cinematica con gioco e la tecnica utilizzata per la determinazione dell'errore commesso. I prossimi paragrafi si focalizzeranno su ognuno di questi aspetti.

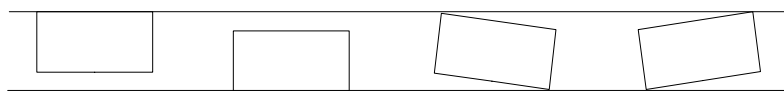
## 2.1 Modellazione delle coppie cinematiche

Tra i primi modelli di coppie affette da gioco, la coppia rotoidale piana è stata senza dubbio la prima ad essere realizzata, ed è ancora oggi quella più utilizzata per la sua semplicità. Nell'ipotesi di contatto continuo tra le parti cinematiche della coppia, il modello si realizza mediante un “membro equivalente” che colleghi attraverso coppie rotoidali ideali i centri del perno e del foro che costituiscono le parti della coppia stessa. La lunghezza di questo membro fittizio corrisponde al gioco presente nella coppia. In Fig. 1 è riportata l'immagine ingrandita degli elementi “foro” e “perno” che costituiscono la coppia rotoidale ed il membro equivalente modellante il gioco. Si noti come questo modello di gioco valido per la coppia rotoidale piana sia determinato dal vincolo di avere foro e perno sempre in contatto tra loro. Tra gli autori che utilizzano questo modello citiamo tra gli altri Yin e Wu [38], Mayourian e Rastegar [19], Biswas e Kinzel [1], Voglewede e Ebert-Uphoff [34]. La posizione del contatto tra foro e perno dipende dalla direzione dei carichi applicati che determinano la reazione vincolare della coppia.



*Fig. 1: Modello di coppia rotoidale con gioco*

Anche il modello della coppia prismatica piana è abbastanza diffuso, si veda ad esempio [22]. In questo caso il vincolo di contatto tra gli elementi della coppia genera un modello a due gradi di libertà, in cui il corsoio può trovarsi in una delle quattro configurazioni mostrate in Fig. 2, dipendentemente dalle reazioni vincolari che nascono nella coppia stessa.

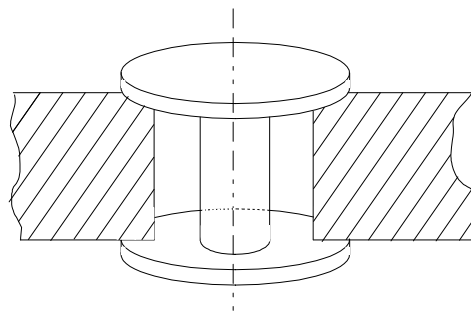


*Fig. 2: Modello di coppia prismatica con gioco*



I modelli tridimensionali delle coppie cinematiche affette da gioco sono più difficili da realizzare a causa della complessità crescente e soprattutto dal comportamento della coppia stessa, che dipende in maniera preponderante dalla forma geometrica con la quale è stata realizzata. Questo aspetto non è secondario: ad esempio, la modellazione del gioco mediante il membro equivalente può essere considerata rappresentativa di tutte le coppie rotoidali piane, mentre non è possibile identificare un modello di gioco tridimensionale che abbia la stessa generalità per le coppie rotoidali spaziali.

Tra i modelli tridimensionali di coppia rotoidale, il più diffuso è sicuramente la coppia rotoidale con spallamenti, avente la geometria mostrata in Fig. 3, il quale è molto utilizzato nella progettazione per la realizzazione pratica della coppia rotoidale e necessita della presenza del gioco per poter funzionare (onde evitare che l'attrito tra le superfici a contatto impedisca la mobilità richiesta).



*Fig. 3: coppia rotoidale con spallamenti*

La coppia rotoidale con spallamenti viene descritta in Phillips [26] e Horie e alt. [9], ma una modellazione completa delle possibili configurazioni di contatto tra perno e sede è stata fatta da Wang e Roth [36], i quali infatti identificato quattro possibili modi di contatto tra le parti costituenti la coppia. In base alle reazioni vincolari che di volta in volta la coppia dovrà esercitare, soltanto uno tra i quattro modi di contatto sarà realizzabile. A seconda di quale tipo di contatto si verifichi, viene analiticamente calcolato l'errore di posizione ed orientamento.

I modelli di coppia prismatica tridimensionale sono pochi. Un motivo è da ricercare nell'impossibilità di definirne una soluzione costruttiva più diffusa rispetto ad altre. Dhande e Chackraborty [5] introducono un modello probabilistico di coppia prismatica, mentre un modello di tipo deterministico viene proposto da Parenti-Castelli e Venanzi [20], utilizzando i passi logici che avevano condotto Wang e Roth al modello di contatto per la coppia rotoidale con spallamenti. La coppia prismatica spaziale proposta da Parenti-Castelli e Venanzi ha

sezione quadrata, come quella proposta da Dhande e Chackraborty, e sono possibili cinque modi di contatto tra le parti che costituiscono la coppia cinematica. Anche per la coppia prismatica, il tipo di contatto che si sviluppa dipende dalla reazione vincolare che la coppia deve esercitare.

Sia il modello della coppia rotoidale con spallamenti proposto da Wang e Roth, sia il modello di coppia prismatica proposto da Parenti-Castelli e Venanzi ipotizzano il verificarsi di due condizioni: che il gioco sia molto piccolo rispetto a qualsiasi altra dimensione geometrica della coppia, e che non vi sia attrito tra gli elementi costituenti la coppia.

Infine la modellazione della coppia sferica, per la sua evidente analogia con la coppia rotoidale nel piano, è stata ampiamente studiata e utilizzata, ad esempio da Mayourian e Rastegar [18], Voglewede e Ebert-Uphoff [34], Horie e alt. [9], Dhande e Chackraborty [5], Hahn [8]. Il modello proposto e utilizzato da tutti gli autori prevede un “membro equivalente” spaziale che collega i centri delle due parti costituenti la coppia sferica.

Tutti i modelli di coppie cinematiche presentate mettono in relazione l'errore di posizione ed orientamento tra gli elementi della coppia stessa con la reazione vincolare che la coppia deve trasmettere.

## 2.2 Analisi di posizionamento

Realizzati gli opportuni modelli di gioco per le singole coppie cinematiche, è necessario andare a sommare i contributi di ognuna di queste al fine di determinare l'errore di posizione ed orientamento totale del membro di interesse sul meccanismo in studio.

Si vuole richiamare l'attenzione del lettore sulla tipologia d'errore che i metodi di letteratura si propongono di determinare. Spesso non si considerano sia l'errore di posizione che quello di orientamento, ma uno solo dei due, di solito quello di posizione. I motivi sono da ricercarsi in una maggiore complessità dell'analisi dell'errore di orientamento.

Biswas e Kinzel [1] propongono, per meccanismi piani, un metodo iterativo, che vada a ricercare le configurazioni di equilibrio per un meccanismo soggetto a carichi esterni.

Voglewede e Ebert-Uphoff [34] propongono invece un interessante metodo per l'analisi dell'errore di posizione ed orientamento per meccanismi piani. In una data configurazione il meccanismo possiede una certa mobilità dovuta esclusivamente ai giochi presenti nelle

coppie. Voglewede e Ebert-Uphoff propongono di studiare questo “spazio di auto-movimento” attraverso le tecniche di generazione degli spazi di lavoro. Sebbene gli autori sottolineino l'applicabilità del loro metodo a casi spaziali, non vengono date indicazioni nell'eventualità che le coppie cinematiche utilizzate siano diverse dalle coppie sferiche. Occorre inoltre considerare la complessità dei metodi di generazione degli spazi di lavoro per manipolatori spaziali aventi coppie cinematiche differenti da quelle rotoidali o sferiche.

Ting e alt. [30] studiano il massimo errore di posizione ed orientamento per un meccanismo piano costituito da sole coppie rotoidali. Gli autori dimostrano che è possibile sostituire ai singoli membri equivalenti al gioco, due soli membri equivalenti di lunghezza pari alla somma di tutti i giochi, rispettivamente a monte e a valle del membro di riferimento.

Differentemente dagli altri lavori presentati in precedenza, Ting e alt. non ricercano l'errore di posizionamento dovuto ad un determinato carico esterno, ma vanno a determinare il massimo errore che il meccanismo in studio, per le sue caratteristiche geometriche, è in grado di commettere. Molti autori seguono questo approccio per poter dare indicazioni a priori al progettista o all'utilizzatore su quelli che saranno gli errori commessi nelle situazioni più sfavorevoli, indipendentemente dai carichi agenti nel meccanismo.

Kolhatkar e Yajnik [13] presentano due metodi applicabili a meccanismi piani. Il primo metodo prevede la ricerca della massima area di auto-movimento generato dal gioco, attraverso l'uso di un metodo grafico. Nel secondo metodo dimostrano analiticamente come la frontiera di quest'area di movimento venga raggiunta dal meccanismo quando i membri equivalenti al gioco si trovano allineati tra loro. A questo risultato giungono anche Ting e alt. [30], ma questi amplieranno la trattazione considerando non solo il massimo errore di posizione ma anche l'errore di orientamento. Kolhatkar e Yajnik propongono inoltre un modello di gioco per la coppia prismatica piana.

Horie e alt. [9] conducono un'analisi di posizione spaziale utilizzando le matrici di Denavit-Hartenberg. I valori delle componenti delle matrici che si riferiscono ai giochi vengono ottenute in funzione delle condizioni di contatto tra gli elementi delle singole coppie cinematiche. Il metodo proposto è generale, ma necessita di un onere di calcolo non trascurabile che diviene troppo elevato se applicato a meccanismi con più di quattro coppie rotoidali.

Per ridurre la complessità matematica del problema, molti autori compiono un'approssimazione lineare dell'analisi di posizione. Il motivo principale che porta a questa

soluzione risiede nei piccoli valori posseduti dal gioco in relazione alle altre dimensioni geometriche del sistema, che portano ad ipotizzare che l'influenza del gioco sulla configurazione del meccanismo sia limitata.

Veitschegger e Wu [33] presentano anch'essi un metodo di analisi dell'errore di posizione e orientamento basato sull'uso delle matrici di Denavit-Hartenberg, ma estendono la linearizzazione comprendendo i contributi di secondo grado e confrontano i risultati ottenuti con la linearizzazione limitata al solo primo grado.

Lin e Chen [16] si focalizzano su meccanismi piani, applicando un'analisi che utilizza le matrici di Denavit-Hartenberg, comprendendo nella linearizzazione del problema i termini di secondo grado e proponendo un'analisi di sensibilità per determinare quale coppia sia responsabile in misura maggiore dell'errore complessivo.

Wang e Roth [35] propongono una linearizzazione del problema dell'errore di posizionamento, e forniscono una legge di propagazione che determini come i singoli spostamenti nelle coppie dovuti ai giochi influenzino la posizione e l'orientamento dell'end effector per un manipolatore seriale. I contributi rilevati su ogni coppia vengono sommati linearmente. Purtroppo la relazione di propagazione proposta dagli autori non è applicabile a meccanismi a catena chiusa, per i quali occorrerebbe utilizzare una relazione molto più complessa.

Tischler e Samuel [31], propongono una legge di propagazione degli errori utilizzando la "Screw Theory" (Hunt, [10]) e i principi di Kirchhoff, mentre Tsai e Lai [32] utilizzano la Screw Theory per compiere un'analisi qualitativa della trasmissione in una catena cinematica chiusa affetta da gioco nelle proprie coppie cinematiche.

Un approccio completamente diverso viene proposto da Innocenti [11, 12] che utilizza il principio dei lavori virtuali. Poiché il principio dei lavori virtuali mette in relazione statica e cinematica, può essere utilizzato per determinare le relazioni cinematiche una volta che siano note le relazioni sulla statica. Innocenti compie quindi due passaggi: un'analisi statica prima e l'applicazione del principio dei lavori virtuali poi, per determinare le relazioni cinematiche per ogni coppia. Si sottolinea inoltre come l'analisi statica che si viene a compiere possa essere condotta su un sistema virtuale, e quindi opportuno, di forze. L'approccio proposto risulta molto utile poiché sostituisce l'analisi cinematica del meccanismo con un'analisi statica che risulta essere più semplice da eseguire. In particolar modo la procedura si mostra idonea ad essere applicata nell'analisi di manipolatori paralleli spaziali in catena chiusa, sebbene non

abbia limitazioni ad essere usata per l'analisi di manipolatori seriali in catena aperta.

Parenti-Castelli e Venanzi [21, 22, 23] partendo dal metodo di Innocenti sviluppano una procedura avente ancora a fondamento il principio dei lavori virtuali. Gli autori eseguono una prima analisi statica per ottenere il coefficiente di proporzionalità tra un dato carico e la conseguente reazione vincolare della coppia stessa. Nell'ipotesi di piccola entità del gioco in confronto alle altre caratteristiche geometriche del meccanismo, e di assenza di attrito tra le parti, la relazione cercata si può supporre lineare. Successivamente il coefficiente di linearità trovato viene utilizzato per determinare l'errore totale noti che siano gli spostamenti dovuti ai giochi in ogni coppia. Sebbene sia computazionalmente più oneroso del metodo di Innocenti, la procedura di Parenti-Castelli e Venanzi non necessita di carichi esterni per poter essere applicata ed è indipendente dai metodi utilizzati per determinare i singoli spostamenti nelle coppie, dando la possibilità di scegliere la modellazione della coppia più opportuna tra quelle proposte in letteratura.

### 2.3 Discussione

Dallo stato dell'arte mostrato risulta evidente come vi sia una differenza tra i risultati ottenuti dall'analisi di posizionamento e la modellazione delle coppie cinematiche. L'analisi di posizionamento è stata affrontata utilizzando molti metodi classici dell'analisi cinematica, ed ognuno di questi ha portato ad una diversa procedura con i conseguenti vantaggi e svantaggi. La modellazione delle coppie cinematiche invece risulta ancora troppo vincolata alla specifica geometria costruttiva, e soprattutto non è facile realizzare una procedura che permetta, per data geometria della coppia, di determinare quanti e quali siano i diversi modi di contatto tra le parti costituenti la coppia stessa.

Infine si vuole sottolineare come i metodi mostrati in letteratura abbiano tra loro delle caratteristiche in comune, seppure non richiamate esplicitamente nel paragrafo precedente: le procedure si applicano al meccanismo in una determinata, seppure arbitraria, configurazione e di norma le coppie attuate non sono affette da gioco. Quest'ultima affermazione potrebbe anche non essere soddisfatta direttamente in virtù dei risultati raggiunti da Ting e alt. [28, 29].

### 3. LUOGHI AD ERRORE DI POSIZIONE COSTANTE

Nel precedente capitolo si sono mostrati una parte significativa dei modelli e delle procedure presenti in letteratura per determinare l'influenza dei giochi nelle coppie cinematiche sull'errore di posizione ed orientamento di un membro di riferimento per un dato meccanismo. Pur con modalità e onerosità di calcolo differenti, tutti i modelli presentati sono in grado di analizzare l'influenza del gioco in termini di errore puntuale commesso in una determinata configurazione, ossia una volta che il meccanismo venga considerato fisso e le variabili Lagrangiane associate alle coppie attuate siano assegnate. Se l'imposizione della configurazione, costante seppur arbitraria, può essere vista come un vincolo al più generale problema di analisi dell'influenza del gioco per un meccanismo "libero", è lecito porsi le seguenti domande: "un meccanismo può muoversi mantenendo costante l'errore commesso da un suo membro di riferimento? E se sì, è possibile prevedere questa traiettoria ad errore costante?". Questo capitolo si prefigge lo scopo di rispondere a queste domande e dimostrare come sia possibile, sotto opportune ipotesi, tracciare luoghi di punti, sia nello spazio dei Giunti del meccanismo, sia nel piano Cartesiano, ad errore di posizione ed orientamento costanti.

Si considereranno solamente meccanismi piani con coppie rotoidali, sebbene le coppie motrici possano essere anche prismatiche. Questa ipotesi potrà essere poi rimossa e i risultati estesi al caso tridimensionale, ma per semplicità e maggiore comprensione in questo capitolo si farà riferimento ai soli meccanismi bidimensionali. I passi che conducono alla formulazione di una procedura per la determinazione dei luoghi ad errore costante sono i seguenti, e verranno descritti nei successivi paragrafi:

**Analisi del gioco per un meccanismo piano.** Si studierà in che termini il gioco presente nelle coppie cinematiche influenza l'errore di posizione e orientamento di un membro di riferimento. Per semplicità si utilizzerà un metodo grafico preso dalla letteratura.

**Definizione dell'errore di posizione ed orientamento commesso.** Si cercherà di introdurre un indice che tenga conto dell'entità dell'errore commesso e che sia indicativo della cosiddetta "area di auto-movimento", ossia lo spazio in cui il membro di riferimento è in grado di muoversi in virtù del gioco presente.

**Analisi di sensibilità dell'errore di posizione a parametri geometrici.** Si mostreranno i risultati di un'analisi di sensibilità condotta su un meccanismo semplice, che possa correlare l'errore di posizione dovuto ai giochi al variare dei parametri geometrici del meccanismo stesso, quali ad esempio le lunghezze dei membri, l'aumento del gioco, eccetera...

**Tracciamento di luoghi ad errore costante.** Partendo dalle caratteristiche gioco-mechanismo evidenziate nei paragrafi precedenti, si potranno tracciare, sotto determinate condizioni, i luoghi ad errore di posizione costante cercati.

**Esempi di possibili applicazioni.** Si mostreranno due esempi di applicazione della procedura esposta a semplici meccanismi.

**Discussione.** Si discuteranno i risultati raggiunti in questo capitolo

### 3.1 Analisi del gioco per un meccanismo piano

Sia dato un meccanismo piano avente sole coppie rotoidali. Si ipotizzi che le uniche coppie affette da gioco siano quelle folli. Per comodità si farà riferimento ad un meccanismo specifico: un pentalatero a due gradi di libertà, mostrato in Fig. 4. Le coppie cinematiche, di tipo rotoidale, sono state indicate con le lettere da *A* ad *E*, mentre i membri del meccanismo sono stati numerati da 1 a 5 (il membro 5 funge da telaio). Le coppie attuate sono state indicate con due asterischi (coppie *A* ed *E* in figura). Si assuma come membro di interesse del quale si vuole trovare l'errore di posizione ed orientamento, il punto del membro 2

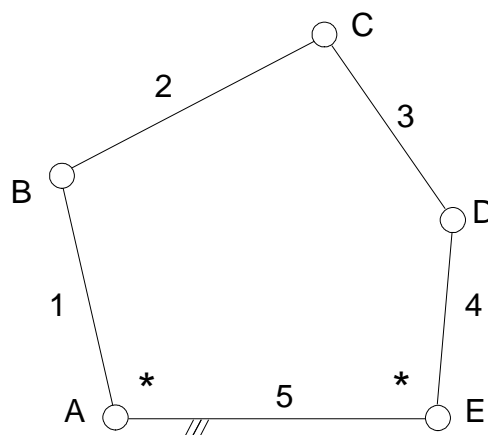


Fig. 4: Pentalatero

coincidente con la coppia rotoidale  $C$ .

Tra i metodi proposti in letteratura per l'analisi dell'errore in un meccanismo piano, verrà utilizzata la procedura suggerita da Ting e alt. [30].

Il gioco nelle coppie rotoidali viene modellato utilizzando il “membro equivalente al gioco” mostrato in Fig. 1 e già discusso nel capitolo precedente.

Nel loro lavoro, Ting e alt. dimostrano come sia possibile sommare il contributo di tutto il gioco presente rispettivamente a monte e a valle del membro di riferimento del meccanismo, fino ad ottenere due soli membri (o gruppi di membri) equivalenti al gioco a monte e a valle del membro di riferimento stesso. In Fig. 5 il caso a) mostra il risultato della modellazione del gioco mediante membro equivalente (indicati in figura come  $G1$ ,  $G2$  e  $G3$ ) per il pentalatero in esame. Il meccanismo ottenuto possiede  $L$  gradi di libertà pari a:

$$L=3(8-1)-2\cdot 8=21-16=5 \text{ gdl} \quad (3.1)$$

In Fig. 5 il caso b) mostra, secondo quanto esposto da Ting, il gioco concentrato in un membro a monte ( $G1$ ) e una somma di membri a valle ( $G2+G3$ ) del membro di riferimento.

Si può quindi ricorrere ad una rappresentazione grafica dell'area di auto-movimento del membro in esame, ossia dell'area all'interno della quale il membro è in grado di muoversi liberamente in virtù del gioco presente. Per fare questo occorre “rompere” il meccanismo in corrispondenza della coppia rotoidale più vicina al punto di interesse sul membro.

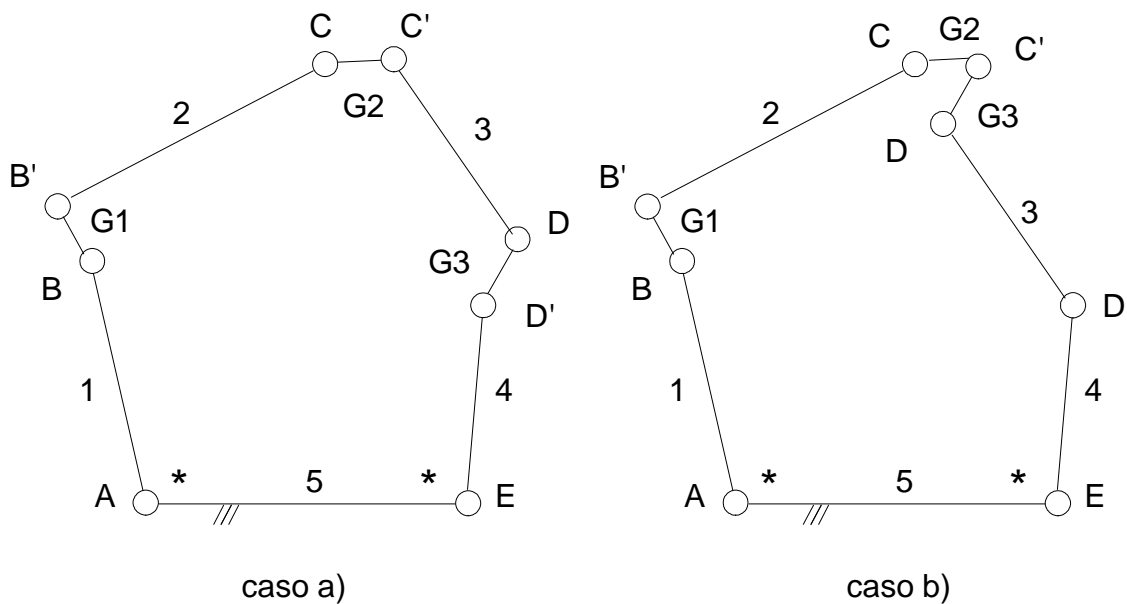


Fig. 5: Modellazione del gioco



Nell'esempio di Fig. 4 il punto di riferimento  $C$ , coincide con la coppia rotoidale che collega tra loro i membri 2 e 3, e di conseguenza la coppia rotoidale  $C$  è la coppia in cui aprire il meccanismo. Dall'apertura del meccanismo derivano due manipolatori seriali, nel caso in esame uno è costituito dai membri  $G1$  e 2, l'altro dai membri 3,  $G2$  e  $G3$ , poiché i membri collegati direttamente alle coppie rotoidali attuate sono da considerarsi bloccati e non rientrano quindi nella definizione dei due manipolatori. Ognuno dei manipolatori seriali trovati è in grado di muoversi all'interno di una specifica area di lavoro che si può facilmente determinare come la corona anulare avente raggio esterno pari alla somma delle lunghezze di tutti i membri (manipolatore completamente esteso), e raggio interno pari alla differenza tra la lunghezza del membro maggiore e la somma delle lunghezze dei rimanenti (manipolatore completamente contratto). Nel caso in cui la differenza tra il membro maggiore e la somma dei rimanenti dovesse dare un risultato negativo, il raggio minore della circonferenza anulare è da considerarsi pari a zero. In Fig. 6 è mostrata metà dell'area di lavoro per il meccanismo seriale formato dai membri 3,  $G2$  e  $G3$ .

In Fig. 6 le circonferenze che determinano la frontiera dell'area di lavoro hanno raggio pari a  $\overline{D'D} + \overline{DG_3} + \overline{G_3G_2}$  per la circonferenza maggiore, e  $\overline{D'D} - \overline{DG_3} - \overline{G_3G_2}$  per la circonferenza minore. Si noti che i centri di queste circonferenze coincidono con il centro della coppia rotoidale ( $D'$ ) che collega il membro 3 con 4, il quale (4) è bloccato nella propria configurazione dalla coppia attuata ( $E$ ).

Imponendo ora la congruenza tra i due manipolatori seriali nel punto in cui è avvenuta la rottura del meccanismo, l'area ottenuta dall'intersezione tra le due suddette corone anulari rappresenta l'**area di auto-movimento** per il meccanismo nella configurazione analizzata. In

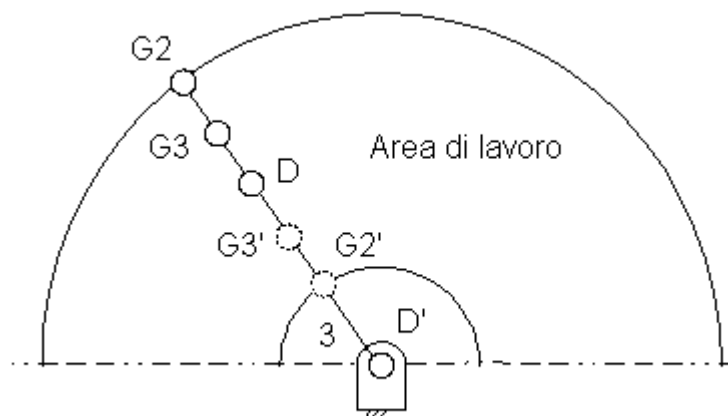


Fig. 6: Area di lavoro del manipolatore seriale ottenuto

Fig. 7 è messa in evidenza l'area di auto-movimento dovuta alla presenza del gioco ed ottenuta dall'intersezione tra le due corone anulari.

L'area di auto-movimento dipende dalla distanza tra i centri delle corone anulari, ossia dalla configurazione in cui si trova il meccanismo. Come già osservato da Ebert-Uphoff e Voglewede [34], se si considera il meccanismo in esame in diverse configurazioni è possibile che l'area di auto-movimento diventi molto elevata. In Fig. 8 sono rappresentate due corone anulari: quella di raggio esterno maggiore è stata mantenuta fissa, quella di raggio esterno minore è stata di volta in volta avvicinata o allontanata, per simulare le diverse posizioni reciproche che le due corone possono avere in relazione alla configurazione del meccanismo. In ogni esempio l'area di auto-movimento che ne deriva è stata colorata in nero. Le differenze in termini di area che si possono ottenere sono evidenti, e occorre ricordare come queste aree rappresentino una “libertà” di movimento che il membro in esame possiede a causa del gioco presente sebbene le coppie attute siano bloccate. Il caso h) della Fig. 8 vuole mostrare un caso particolare che può accadere quando le due corone anulari, anziché avere dimensioni diverse come rappresentate negli altri casi di figura, siano uguali. Se i centri delle due corone vengono a sovrapporsi, l'area di auto-movimento viene a coincidere con le corone stesse causando la completa rotazione libera dei membri 2 e 3 attorno alle coppie  $B$  e  $D$ . Questo caso è ben noto in letteratura e costituisce una “singolarità d'architettura” (Ma e Angeles [17]). Il caso a) di

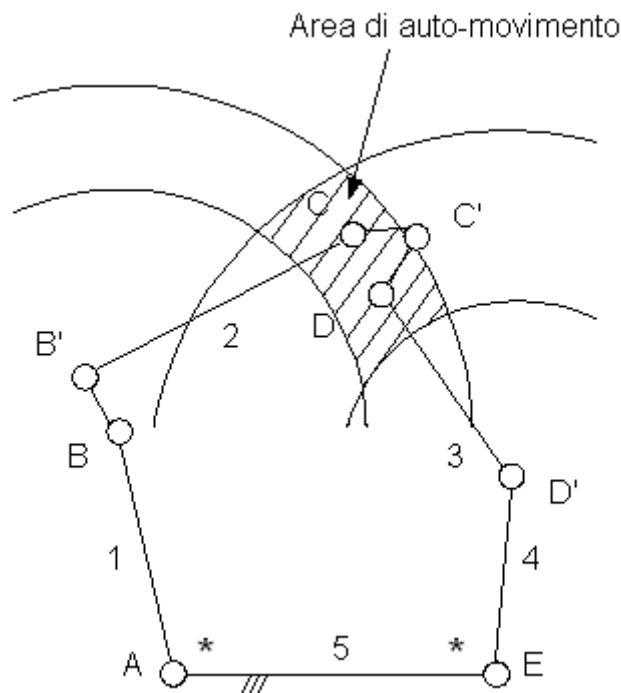
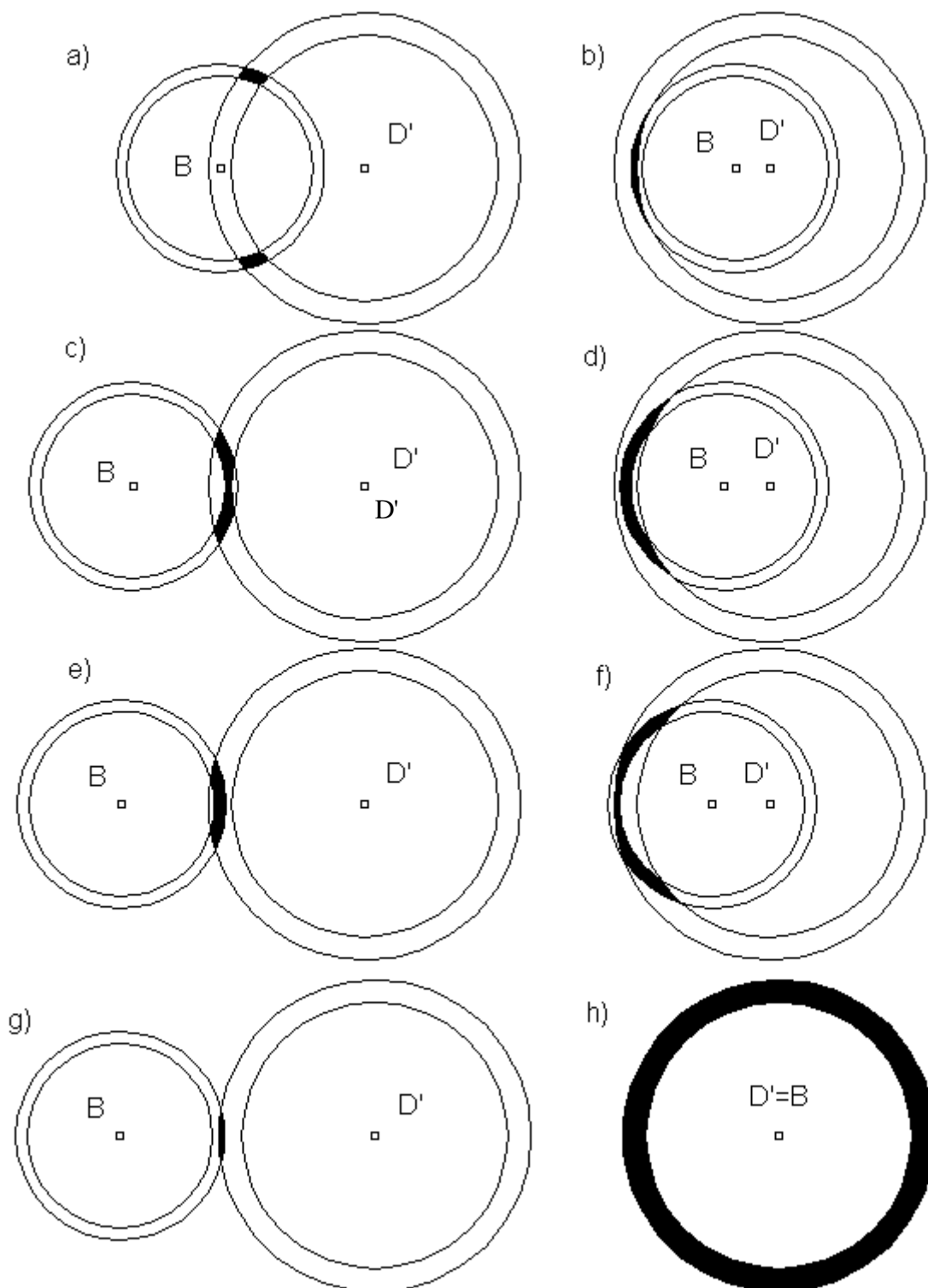


Fig. 7: Area di auto-movimento

Fig. 8 è molto interessante per due aspetti, il primo è che questa tipologia di intersezione si manifesta per una variabilità di distanza tra i centri delle corone molto ampia, il secondo è che presenta due aree di auto-movimento. Quest'ultima particolarità è dovuta al fatto che il



*Fig. 8: Aree di auto-movimento*

meccanismo, per fissata configurazione, può assemblarsi in due modi differenti, in particolare in due configurazioni una speculare all'altra rispetto la congiungente i centri delle corone. Il meccanismo può quindi trovarsi solo in una delle due aree evidenziate, non riuscendo a passare da una configurazione all'altra senza azionare le coppie attuate del meccanismo stesso.

Se le lunghezze dei membri del meccanismo e dei membri equivalenti al gioco sono noti, è possibile mettere in relazione i casi presentati in Fig. 8 con la distanza dei centri delle corone anulari e determinare per quali di questi valori si passi da una tipologia di intersezione all'altra. Per comodità si farà riferimento alle diverse tipologie di intersezione mostrate in Fig. 8 con le seguenti diciture:

- caso a): *intersezione*
- casi b), d), f): *tangenza interna*
- casi c), e), g): *tangenza esterna*
- caso h): *coincidenza*

### 3.2 Definizione dell'errore di posizione ed orientamento

Prima di poter ragionare sulla tracciabilità di luoghi ad errore costante, è necessario soffermarci a definire che cosa si debba intendere per errore commesso, e magari trovare un indice o un parametro opportuno che possa quantificare questo errore.

L'errore che si può commettere nel posizionamento di un elemento rigido potrà in generale essere rappresentato con un vettore a tre dimensioni, essendo pari a tre i gradi di libertà di un corpo rigido nel piano. Fissato un sistema di riferimento, ad esempio solidale al telaio del meccanismo, due componenti del vettore “errore” misureranno la distanza tra la posizione raggiunta dal meccanismo nell'assegnata configurazione e la posizione teorica lungo due assi ortogonali del sistema di riferimento, mentre la terza componente misurerà invece la differenza tra l'orientamento posseduto dal membro di riferimento a seguito del gioco presente e l'orientamento teorico, rispetto sempre al sistema di riferimento preso a telaio. Dati due vettori di errore calcolati per due diverse configurazioni del meccanismo in esame, come fare a decretare quale dei due vettori rappresenti una condizione “migliore” per il meccanismo? Dipende dal tipo di problema che si sta studiando, spesso però può essere preferibile dare

maggior peso all'errore di posizione piuttosto che quello dell'orientamento, o viceversa. Ecco allora che può essere utile introdurre una media pesata dei contributi che le singole componenti del vettore errore danno nel calcolo di un opportuno indice, o addirittura decidere di valutare i risultati facendo riferimento al solo errore di posizione e non di orientamento.

Molto spesso, soprattutto in fase di progetto, si preferisce ricercare non tanto l'errore commesso in una determinata configurazione, il quale in generale dipenderà dai carichi agenti sul meccanismo, ma l'errore massimo che il meccanismo può commettere nelle condizioni peggiori. In altre parole diventa importante calcolare l'area di auto-movimento per il meccanismo in una data configurazione. La frontiera di questa area permette di calcolare anche il massimo errore di posizionamento (Kolhatkar e Yajnik [13]), mentre da studi di Ting [30] risulta che i punti dello spazio di lavoro in cui si verifica il massimo errore di orientamento sono interni all'area di auto-movimento stessa.

La determinazione numerica dell'area di auto-movimento non permette di ottenere un indice soddisfacente dell'errore di posizione commesso. Si consideri infatti le aree mostrate in Fig. 9. Nel caso a) sono rappresentate due generiche aree di auto-movimento, ad esempio di pari area ( $A$ ). Sebbene abbiano la stessa area, l'errore che si può commettere ad esempio partendo dal centro di queste aree spostandosi verso la frontiera è molto diverso nei due casi.

Nel caso di area circolare la massima distanza tra centro e frontiera è pari al raggio della circonferenza stessa, mentre nel caso dell'area rettangolare è pari a metà della diagonale. E' quindi evidente come si debba introdurre un diverso indice che possa tenere conto della possibile anisotropia dell'area di auto-movimento, soprattutto quando la frontiera di quest'area è formata da tratti discontinui di circonferenza (è il caso delle aree di Fig. 8).

Si può introdurre la tecnica del *bounding box*, ossia tracciare un rettangolo, preso un sistema di riferimento rispetto al quale disegnarlo, che contenga l'area in esame e tale per cui la frontiera dell'area tocchi senza intersecare il bordo del rettangolo stesso. Un esempio di

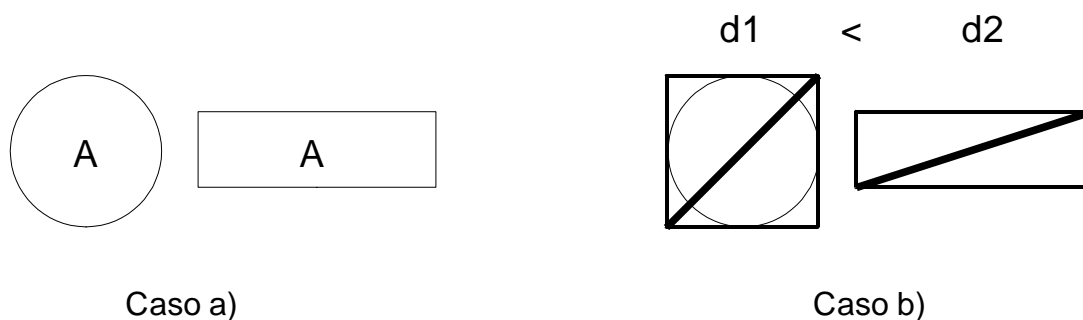


Fig. 9: Bounding box

bounding box è mostrato nel caso b) di Fig. 9. Come indice dell'errore commesso si può prendere ad esempio il valore della diagonale del bounding box. In questo esempio, pur avendo due aree uguali, le diagonali corrispondenti sono diverse e risulta essere maggiore quella relativa all'area rettangolare, come si desiderava.

Di seguito, quindi, nel fare riferimento all'errore di posizione commesso da un membro di riferimento di un meccanismo dato, si prenderà in considerazione l'errore massimo di posizione che il membro può commettere in una data configurazione e si intenderà calcolato come la diagonale del bounding box corrispondente alla propria area di auto-movimento.

### 3.3 Analisi di sensibilità dell'errore di posizione

Nei paragrafi precedenti si è mostrato come l'area di auto-movimento sia determinata dall'intersezione delle corone anulari che vengono ad avvicinarsi o ad allontanarsi reciprocamente in base alla configurazione assunta dal meccanismo. In questo paragrafo si considera il meccanismo di Fig. 4 ipotizzando che le dimensioni degli elementi 2, 3 e del gioco nelle coppie *B*, *C* e *D* siano quelle indicate nella tabella 1 seguente:

<b>Membro</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>G1</b>	<b>G2</b>	<b>G3</b>
<b>mm</b>	17	25	0.02	0.02	0.02

*Tabella 1: Dimensioni pentalatero*

Al variare della distanza tra i centri delle corone anulari, l'errore di posizione massimo commesso dal punto *C* preso a riferimento sul membro 2 varia secondo il grafico di Fig. 10

Dove in ordinata è stato posto l'indice dell'errore di posizione commesso ed in ascissa la distanza tra i centri delle coppie *B* e *D'*.

La parte centrale del grafico di Fig. 10 corrisponde ad un'intersezione tra le corone anulari del tipo rappresentato in Fig. 8 caso a). In questo esempio infatti le corone hanno uno spessore (ossia una differenza tra il raggio della circonferenza esterna e quello della circonferenza interna) molto ridotto, ed esaurendo quindi le rimanenti casistiche di intersezione (si veda la Fig. 8 casi b)-g) ) in un piccolo campo di valori della lunghezza *BD'*. Si noti infatti come al

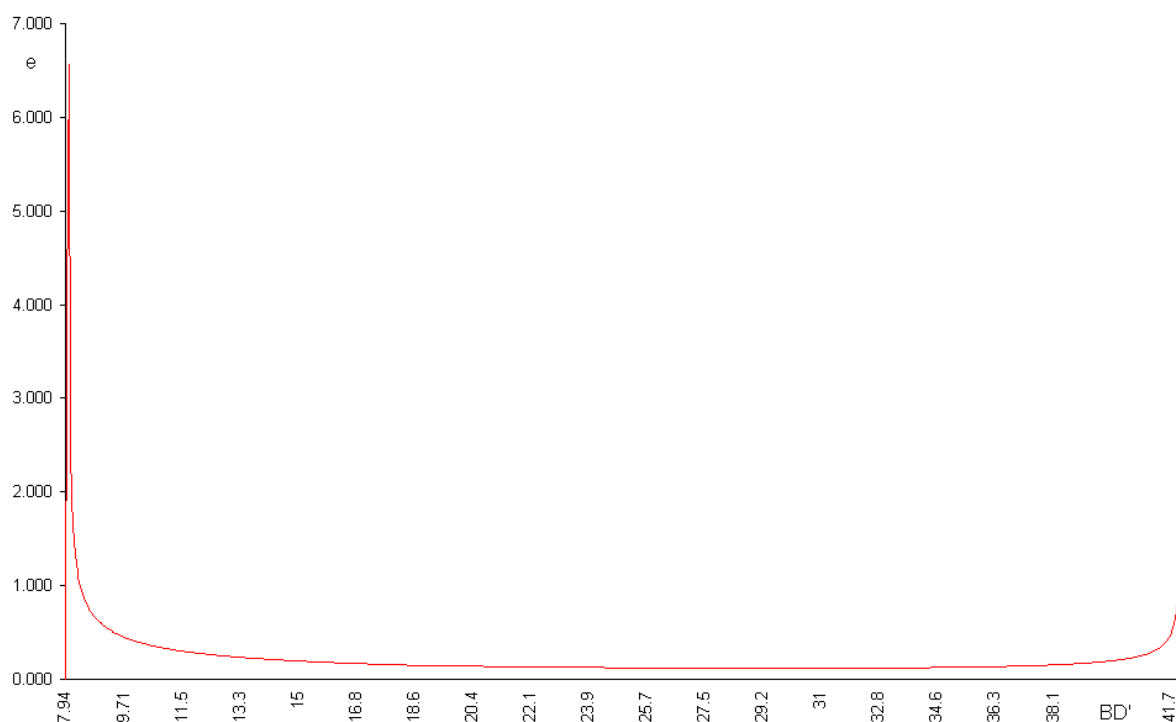


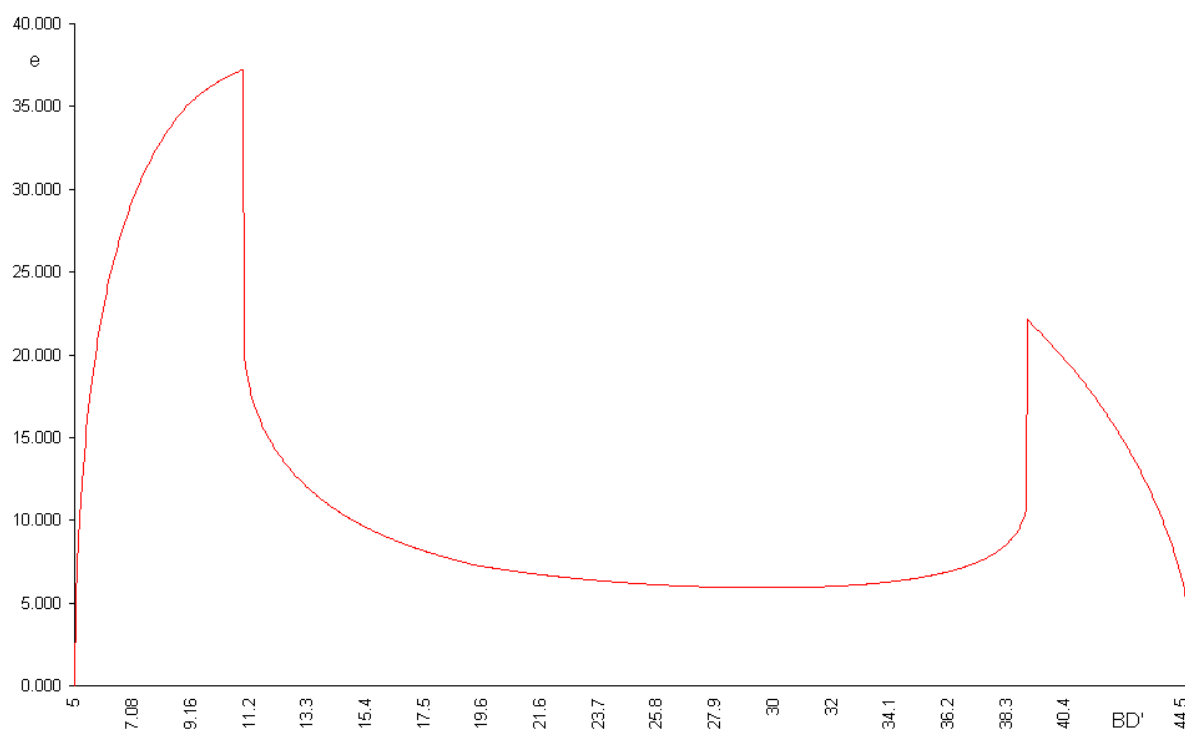
Fig. 10: Errore di posizione in funzione della distanza  $BD'$

tendere della distanza ai valori estremi del proprio range di variabilità, l'errore aumenti considerevolmente in corrispondenza di intersezioni del tipo c) e d) di Fig. 8, in conseguenza anche del fatto che per l'intersezione di tipo a) si è conteggiata come area di auto-movimento solo una delle due possibili configurazioni del meccanismo.

Aumentando notevolmente l'entità dei singoli giochi nelle coppie rotoidali è possibile osservare con più gradualità la variazione dell'indice d'errore al variare della tipologia di intersezione delle corone anulari. Le discontinuità della funzione errore si hanno in corrispondenza del passaggio tra un'intersezione delle corone anulari di tipo *tangenza* ad una di tipo *intersezione*, nel quale si passa da una a due aree di auto-movimento (si veda Fig. 8). In Fig. 11 è stato aumentata la lunghezza del membro equivalente al gioco **da 10  $\mu\text{m}$  a 1mm**.

L'errore si annulla agli estremi, in cui si ipotizza che tutti i membri che costituiscono il sottosistema affetto da gioco (membri 2, 3,  $G1$ ,  $G2$  e  $G3$ ) siano tutti allineati (o sovrapposti), ed ha un minimo per un determinato valore della distanza  $BD'$  che si verifica in corrispondenza dell'intersezione di tipo a).

Sperimentalmente, con un grande numero e ripetute prove, si è constatato che il valore minimo di errore si ottiene in corrispondenza della distanza  $BD'$  per il quale le circonferenze medie delle corone anulari (ossia le circonferenze avente un raggio pari alla media dei raggi



*Fig. 11: Errore di posizione in funzione della distanza  $BD'$  - ingrandimento*  
 della maggiore e della minore) si intersecano perpendicolarmente tra loro.

Può essere interessante fare un'analisi di sensibilità dell'errore al variare ad esempio, delle lunghezze dei membri 2 e 3 o dell'entità del gioco presente (per comodità si supporrà che i tre membri equivalenti al gioco  $G1$ ,  $G2$  e  $G3$  abbiano sempre valori uguali tra loro). Partendo sempre dal pentalatero di Fig. 4, aventi dimensioni indicate in tabella 2, si mostreranno gli andamenti dell'errore al variare di specifiche grandezze geometriche come elencato nella seguente tabella 3:

<b>Membro</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>G1</b>	<b>G2</b>	<b>G3</b>
<b>mm</b>	17	25	1	1	1

*Tabella 2: Dimensioni pentalatero nell'analisi di sensibilità*

<b>Variabile</b>	<b>Membro 2</b>	<b>Membro 3</b>	<b>Gioco</b>
<b>Grafici</b>	Figura 12	Figura 13	Figura 14

*Tabella 3: Analisi di sensibilità*



Nelle figure 12, 13 e 14 sono riportati in ordinata l'errore commesso e in ascissa i punti in cui è stata diviso il range di escursione della distanza tra i centri delle corone anulari ( $BD'$ ). Variando infatti le dimensioni dei membri in esame, varierebbero di conseguenza i range della distanza  $BD'$  e non sarebbe possibile confrontare i grafici tra loro. Si è quindi deciso di scalare le ascisse in funzione dei range stessi di variabilità di  $BD'$ , e andando a suddividere questo risultato in 1000 punti su ognuno dei quali è stato calcolato l'errore commesso.

La variazione di lunghezza del membro più corto (il membro 2) modifica in modo rilevante l'errore commesso. In particolare una sua diminuzione aumenta il range della distanza  $BD'$  in cui è possibile avere una *tangenza interna* ed *esterna* tra le corone anulari, infatti a parità di dimensioni della corona anulare maggiore, diminuire ulteriormente le dimensioni della minore fa sì che il rapporto tra il range in cui si verifica una tangenza tra le corone anulari e il raggio medio della corona relativa al membro 2 aumenti e di conseguenza il grafico si “allarghi” come mostrato in figura. La stessa spiegazione giustifica la variazione dell'errore nel caso si aumenti il raggio medio della corona anulare del membro 2. La variazione di altezza dell'errore è invece dovuta all'aumentare o diminuire la circonferenza media con conseguente aumento o diminuzione di area di movimento che viene “condivisa” con l'altra corona

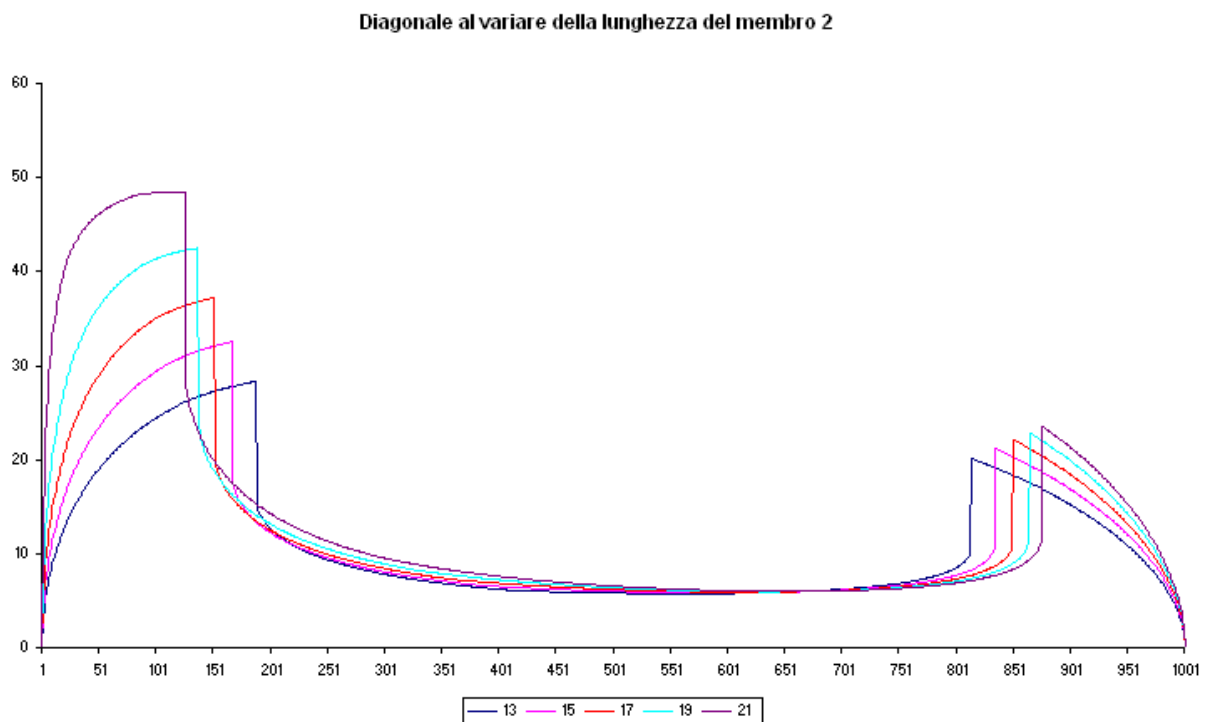
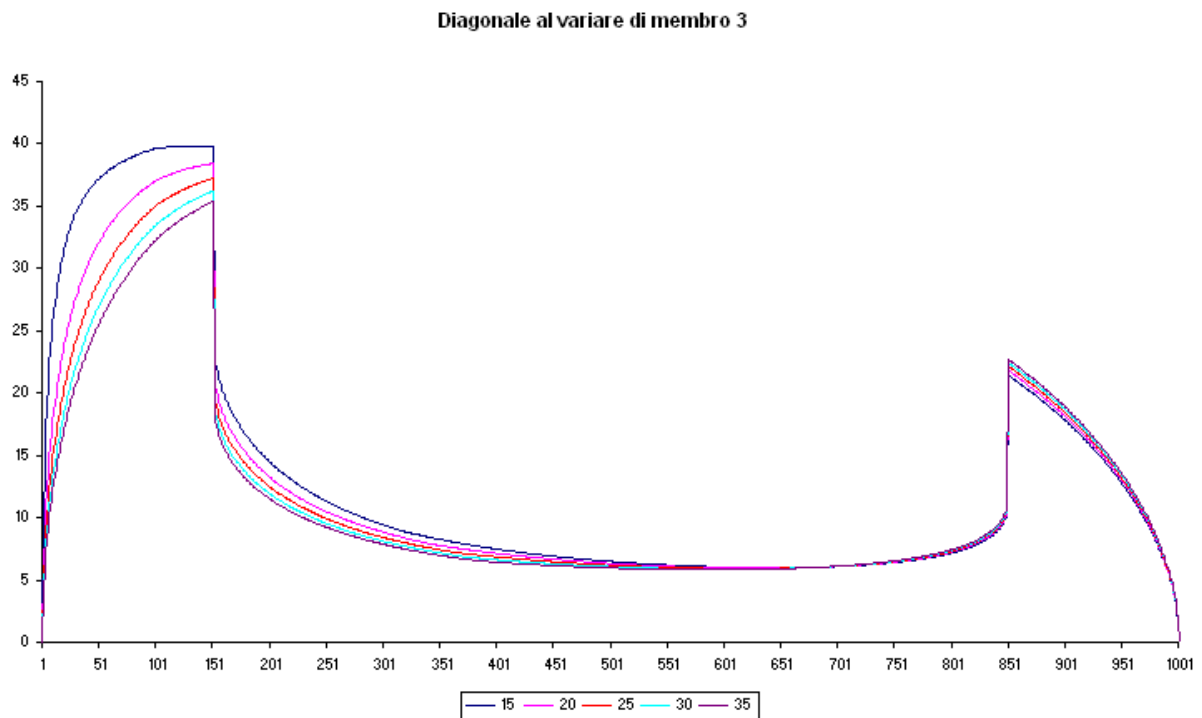


Fig. 12: Variazione della lunghezza del membro 2

anulare.

La variazione di lunghezza del membro maggiore influisce meno sull'errore commesso. In Fig. 13 infatti le curve tracciate a diversi valori di lunghezza del membro 3 risultano essere ancora molto vicine l'una all'altra. Nella determinazione dell'area di auto-movimento infatti, il vincolo dimensionale più restrittivo lo danno le dimensioni del membro più piccolo e di conseguenza, una variazione del membro maggiore influenzano poco l'errore di posizione.

Infine in Fig. 14 è mostrata come la variazione dell'entità del gioco modifichi l'andamento dell'errore di posizione. In particolare il gioco nel sistema modifica lo spessore delle corone anulari causando due fenomeni: da una lato la diminuzione (o aumento) dell'area disponibile alla condivisione con la seconda corona anulare, dall'altro un aumento (o diminuzione) della zona di variabilità per la lunghezza  $BD'$  in cui si verifica una intersezione tra le aree, a causa della diminuzione (o aumento) del rapporto tra il range in cui si verifica tangenza tra le corone e i raggi delle corone stesse.



*Fig. 13: Variazione della lunghezza del membro 3*

Diagonale al variare del gioco

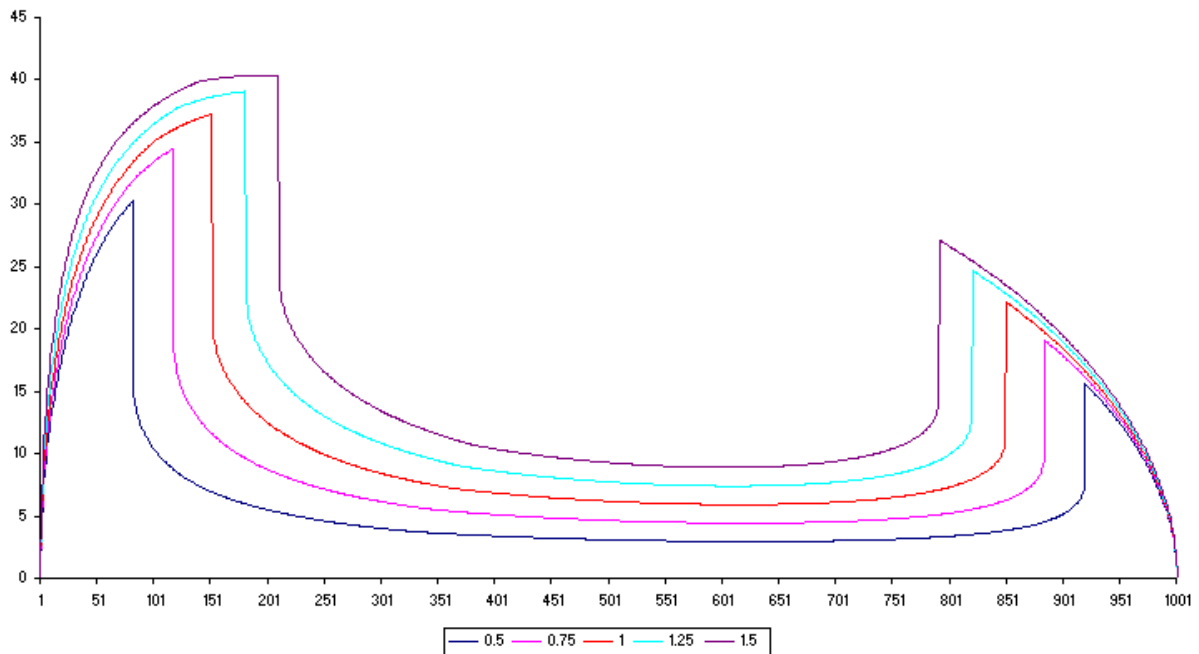


Fig. 14: Variazione dell'entità del gioco

### 3.4 Tracciamento di luoghi ad errore di posizione costante

Nel paragrafo 3.1 si è studiato l'errore di posizione per il meccanismo di Fig. 4 in una data configurazione, utilizzando un metodo grafico che ha portato a definire le corone anulari di Fig. 6. L'intersezione di queste due aree di movimento ha determinato l'area di auto-movimento all'interno della quale il punto del meccanismo preso a riferimento è in grado di muoversi a causa del gioco presente del sistema. Nel paragrafo 3.3 si è messo in relazione l'errore di posizione commesso dal sistema con la distanza tra i centri delle corone anulari. La variazione di questa distanza è la conseguenza delle diverse configurazioni che può assumere il meccanismo.

Si può allora pensare di suddividere il meccanismo in due parti come suggerito in Fig. 15: da un lato un sottosistema gioco costituito da quegli elementi del meccanismo che rientrano nel calcolo dell'errore di posizione per assegnata configurazione, dall'altro un sottosistema costituito da quegli elementi del meccanismo che non sono affetti da gioco e che per questo potremmo indicare come sottosistema ideale. Questi due sottosistemi vengono ad avere in comune un membro fittizio che collega tra loro le coppie rotoidali  $B$  e  $D$ .

Nell'esempio del pentalatero i sottosistemi sono costituiti dai seguenti elementi:

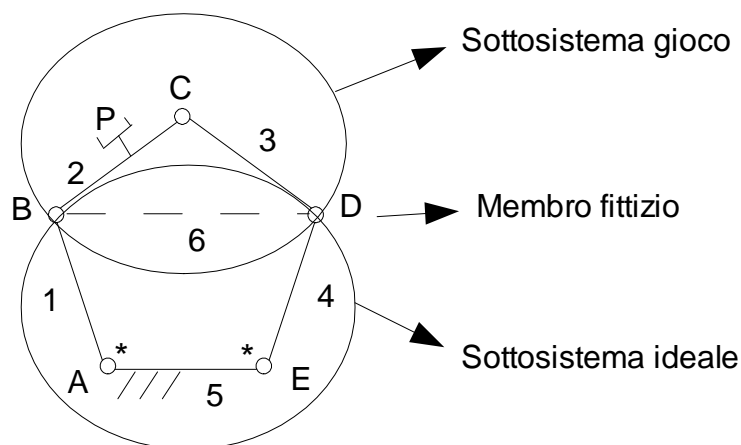


Fig. 15: Divisione del pentalatero in sottosistemi

- Sottosistema ideale: membri 1, 5, 4, 6 e coppie A, B, D e E.
- Sottosistema gioco. Membri 2, 3, 6 e coppie B, C e D.
- Membro fittizio: 6.

Si noti che le coppie rotoidali  $B$  e  $D$  compaiono sia tra i membri del sottosistema ideale che in quello relativo al gioco. Se l'effetto del gioco presente in queste coppie viene conteggiato nel calcolo dell'errore commesso all'interno del sottosistema gioco, si possono allora considerare come coppie ideali quando vengono introdotte nell'altro sottosistema.

Il membro fittizio 6 ha la caratteristica di determinare, attraverso la propria lunghezza, la distanza tra i centri delle corone anulari che determinano l'area di auto-movimento e quindi l'errore di posizionamento. Tutte le procedure proposte in letteratura, ipotizzando a priori una configurazione fissata per il meccanismo in esame, di fatto vanno ad operare su un sottosistema del meccanismo stesso che è quello indicato come sottosistema gioco. Ma se la configurazione geometrica di questo sottosistema è funzione della distanza tra determinati punti geometrici (ad esempio le coppie  $B$  e  $D$  nel pentalatero di Fig. 4), allora sarà possibile correlare tra loro attraverso un'opportuna funzione la distanza tra questi punti (che definiranno uno o più membri fittizi) e l'errore massimo di posizione commesso, indipendentemente dal metodo usato per indagare l'effetto del gioco.

Il membro fittizio 6 di Fig. 23 determina anche la chiusura del sottosistema ideale che risulta essere un quadrilatero costituito dai membri 1, 6, 4 e 5. Questo quadrilatero ha quindi un grado di libertà, quindi un qualsiasi punto di un membro descrive una traiettoria. In ogni punto di questa traiettoria il sottosistema trascina solidalmente al membro 6 il sottosistema gioco, che mantiene costante la sua configurazione, essendo mantenuta costante la lunghezza del membro fittizio. Poiché sussiste una relazione tra la lunghezza del membro fittizio e

l'errore di posizione commesso (si veda la Fig. 10), la traiettoria individuata dal sottosistema ideale costituisce anche una traiettoria ad errore costante per il meccanismo in esame.

L'imposizione di un valore predefinito per la lunghezza del membro 6 equivale ad aggiungere un vincolo al sistema che può essere modellato matematicamente attraverso una generica relazione tipo:

$$f(q_1, \dots, q_n) = d \quad (3.1)$$

dove con  $d$  si è indicato il valore della lunghezza del membro fittizio, e con  $q_1, \dots, q_n$  le variabili Lagrangiane del sistema. Di conseguenza, se il meccanismo di partenza possiede  $n$  gradi di libertà, l'ulteriore vincolo dato dalla (3.1) implica una mobilità del sottosistema ideale pari a  $(n-1)$ . L'equazione (3.1) permette di determinare la relazione che deve sussistere tra i valori assunti dalle coppie attuate affinché l'errore di posizione commesso dal membro di riferimento del meccanismo sia costante.

Per definire la configurazione del sottosistema gioco può essere necessario anche un numero di membri fittizi maggiore di uno. Si consideri infatti la Fig. 16 in cui sono rappresentati 3 esalateri ognuno dei quali attuato in modo diverso. Il sottosistema gioco è costituito da quelle parti del meccanismo affette da gioco, una volta che le coppie attuate siano state bloccate. I membri fittizi, si è già detto nel presente paragrafo, hanno il duplice compito di “descrivere” la configurazione del sottosistema gioco e di costituire con i membri privi di gioco il sottosistema ideale. Nei tre diversi casi proposti in Fig. 16, per poter descrivere i sottosistemi gioco è necessario introdurre uno o più membri fittizi. Nel caso a), simile all'esempio del pentalatero è sufficiente un solo membro fittizio  $d_1$ , mentre nel caso b) e nel caso c) il numero aumenta dovendo introdurre rispettivamente due e tre membri fittizi. Nei tre diversi casi l'equazione (3.1) diverrà:

$$\text{Caso a):} \quad f(q_1, q_2, q_3) = d_1$$

$$\text{Caso b):} \quad \begin{cases} f_1(q_1, q_2) = d_1 \\ f_2(q_3) = d_2 \end{cases}$$

$$\text{Caso c):} \quad \begin{cases} f_1(q_1) = d_1 \\ f_2(q_2) = d_2 \\ f_3(q_3) = d_3 \end{cases}$$

dove le variabili Lagrangiane  $q_1, q_2, q_3$  sono state indicate con un asterisco accanto alle

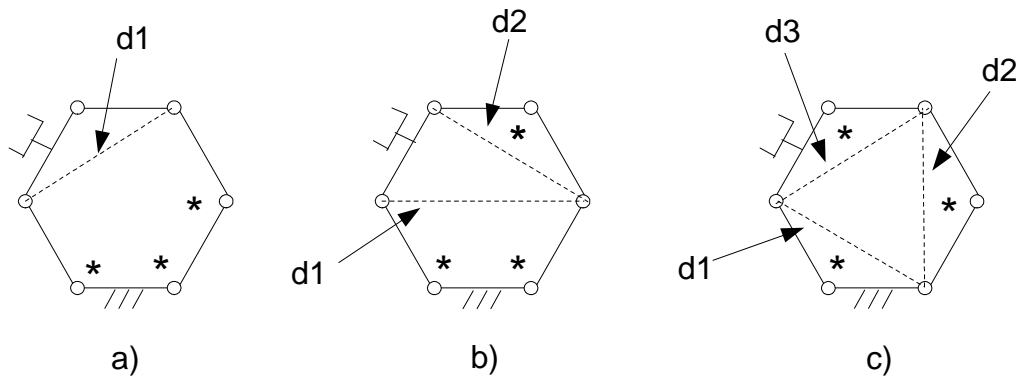


Fig. 16: Distribuzione delle coppie attuate

coppie attuate corrispondenti e la numerazione procede in senso antiorario dall'estremo sinistro del membro a telaio con riferimento alla Fig. 16.

Di conseguenza la mobilità dei sottosistemi ideali nei tre casi diviene:

Caso a):  $n-1=n-2=2$

Caso b):  $n-2=3-2=1$

Caso c):  $n-3=3-3=0$

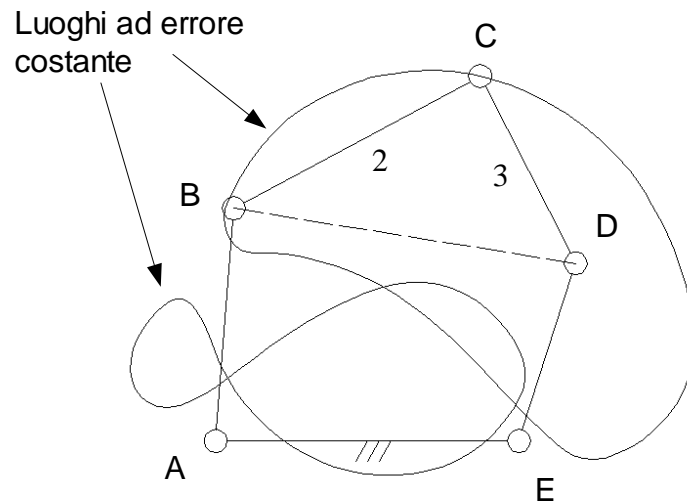
Nel caso a) il sottosistema ideale è in grado di descrivere un'area ad errore di posizione costante, nel caso b) descrive una curva ad errore costante e nel caso c) è in grado di determinare un solo punto con tale errore che coincide con la propria configurazione.

L'equazione (3.1) può allora essere generalizzata come segue:

$$f_i(q_1, \dots, q_n) = d_i \quad (3.2)$$

Nella quale si è messo in evidenza la possibilità di poter scrivere  $i$  equazioni di vincolo, dove in generale  $i=1, \dots, p$ . La mobilità del sottosistema iniziale diverrà pari a  $(n-p)$ .

Un esempio di traiettoria ad errore costante per il pentalatero in esame è riportato in Fig. 17. La traiettoria che il punto  $C$  pensato appartenente al membro 2 descrive deriva dal vincolo dell'equazione (3.1). Durante questo percorso il sottosistema gioco costituito dai membri 2 e 3 e dalle coppie  $B$ ,  $C$  e  $D$  rimane invariato nella propria configurazione. La seconda curva tracciata in basso deriva dalla seconda possibile modalità di assemblaggio del meccanismo, in cui il triangolo  $BDE$  è disposto in maniera speculare rispetto alla retta passante per i punti  $B$  ed  $E$ , mentre il triangolo  $BCD$  è disposto di conseguenza, avendo sempre come base il membro  $BD$ .



*Fig. 17: Luoghi ad errore costante*

I luoghi ad errore costante possono essere tracciati sia nello Spazio dei Giunti del meccanismo (ossia in uno spazio  $n$ -dimensionale, ciascuna delle quali è una delle  $n$  variabili Lagrangiane del sistema), sia nello Spazio Cartesiano del meccanismo (ossia in uno spazio tridimensionale, che coincide quindi con lo spazio reale). Se tracciati nello Spazio dei Giunti, i luoghi ad errore costante hanno la caratteristica di non potersi mai intersecare tra loro, infatti per dato vettore delle variabili di giunto, il meccanismo si dispone in una configurazione univoca alla quale corrisponderà uno e un solo valore della lunghezza del membro fittizio e quindi uno e un solo valore dell'errore di posizione. Nello Spazio Cartesiano invece i luoghi ad errore costante si intersecano tra loro. Si consideri infatti la Fig. 18, in cui si sono rappresentate le quattro diverse configurazioni con cui il pentalatero di figura riesce a raggiungere con un suo punto preso a riferimento (punto  $C$ ) una determinata posizione  $P$ .

Per ognuna delle diverse configurazioni del meccanismo la lunghezza del membro  $BD$  (tratteggiato in figura) varia, così come varia la configurazione dei sottosistemi gioco associati (triangoli  $BCD$ ) e di conseguenza l'errore di posizione sarà diverso in ognuno dei quattro casi presentati. Se per ogni valore della lunghezza  $BD$  venisse tracciato il corrispondente luogo ad errore costante, per il punto  $P$  passerebbero quattro diverse traiettorie ad errore costante ma diverso tra loro.

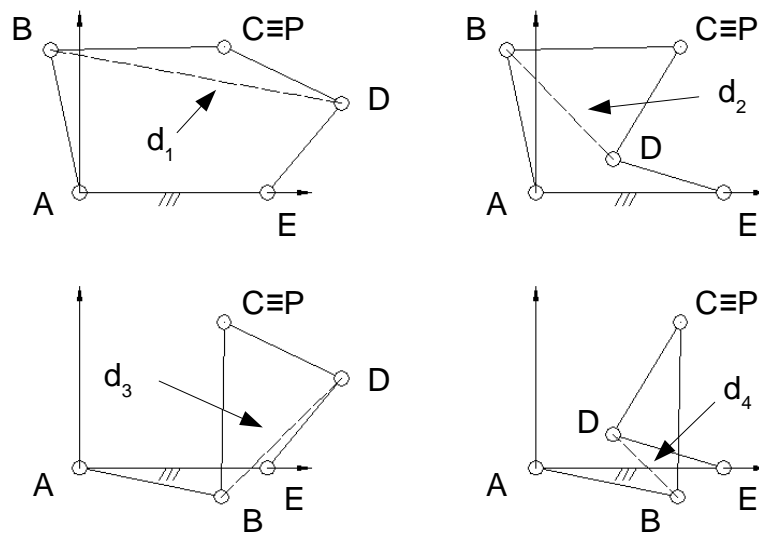


Fig. 18: Intersezione di luoghi ad errore costante nello Spazio Cartesiano

### 3.5 Esempi di possibili applicazioni

#### 3.5.1 Disposizione ottimale di un'assegnata traiettoria

Si ipotizzi di avere un meccanismo pentalatero (si veda la Fig. 4) e una traiettoria che un punto assegnato ( $C$ ) di un membro del meccanismo deve compiere. Si vuole trovare come disporre la traiettoria nello Spazio di Cartesiano del meccanismo affinché possa essere eseguita commettendo un errore minimo di posizione.

Dal grafico di Fig. 10 si determina il valore della lunghezza del membro  $BD$  corrispondente al valore minimo dell'errore di posizione, e si traccia il corrispondente luogo, che ipotizziamo essere quello rappresentato in Fig. 19. Nella stessa figura è anche rappresentata la traiettoria che si desidera che il membro di riferimento del meccanismo descriva. La conoscenza di luoghi ad errore costante permette di disporre nel migliore dei modi la traiettoria nello spazio di lavoro, in modo che possa essere descritta ad errore minimo. La traiettoria assegnata non passerà esattamente per i punti del luogo trovato, ma è lecito pensare che allontanandosi di poco da questi, anche il conseguente errore di posizione varierà poco rispetto al caso di valore minimo.



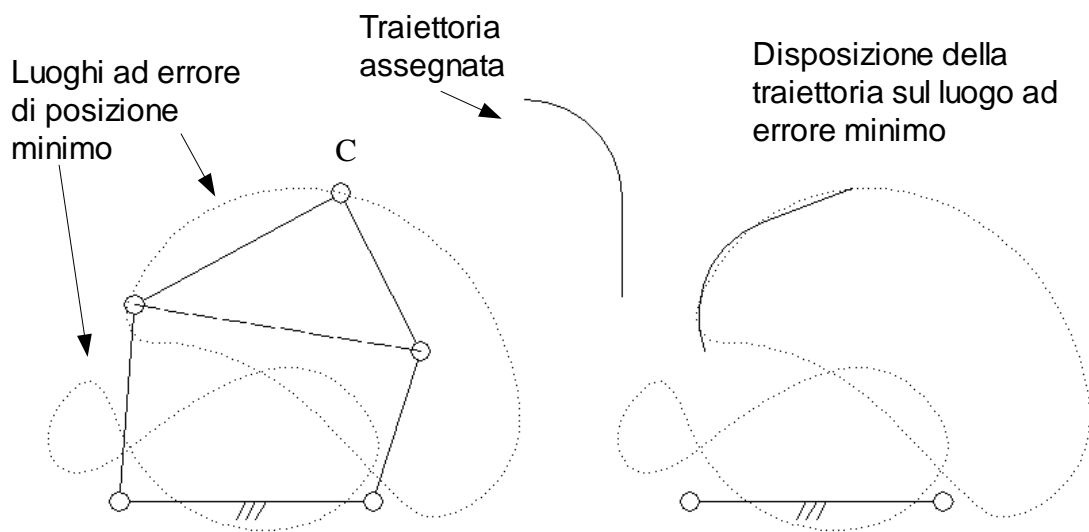


Fig. 19: Disposizione di una traiettoria su di un luogo ad errore minimo

### 3.5.2 Disposizione ottimale di una traiettoria vincolata in un punto

Sia dato un meccanismo, una traiettoria che debba essere eseguita da un punto assegnato (C) del membro del meccanismo stesso e vincolata ad avere un punto  $P_t$  coincidente con un punto  $P$  assegnato nello Spazio Cartesiano. In Fig. 20 sono rappresentati il meccanismo in esame e la traiettoria. Si vuole determinare l'orientamento della traiettoria in modo da minimizzare l'errore di posizione dovuto ai giochi nelle coppie rotoidali.

Il pentalatero in studio è in grado di raggiungere il punto  $P$  richiesto in quattro diverse configurazioni, come già mostrato in Fig. 18. Per ognuno dei diversi valori di lunghezza del membro  $BD$  è possibile calcolare il relativo errore commesso dal sottosistema gioco. Si

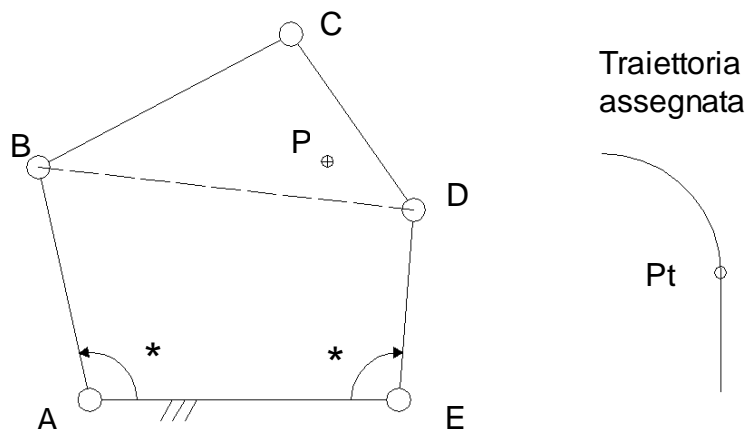


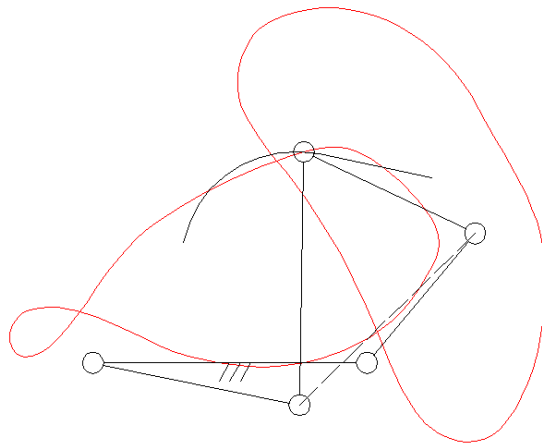
Fig. 20: Disposizione di una traiettoria vincolata in un punto

ipotizzi di aver ottenuto i seguenti risultati:

$$e_3 < e_2 < e_4 < e_1$$

ne consegue che la configurazione del meccanismo a cui compete errore minimo è quella in cui la lunghezza  $BD$  raggiunge il valore  $d_3$ .

Tracciato il luogo ad errore costante corrispondente al valore di  $BD$  desiderato (pari a  $d_3$ ), è possibile sovrapporre il punto  $Pt$  della traiettoria al corrispondente punto  $P$  nel piano, e orientare la traiettoria stessa affinché segua in maniera ottimale il luogo ad errore costante.



*Fig. 21: Disposizione ottimale della traiettoria*

### 3.6 Discussione

In questo capitolo si è introdotta una procedura che consenta di tracciare, nello Spazio Cartesiano o dei Giunti di un meccanismo, dei luoghi ad errore di posizione costante. L'idea di base parte dalla considerazione che tutte le procedure proposte in letteratura, vadano a fissare la configurazione del meccanismo prima di farne l'analisi dell'errore. La scelta di questi autori è chiara: partendo da un sistema ad  $N$  gradi di libertà, la presenza del gioco aumenta il numero di variabili del sistema. Assegnando la configurazione del meccanismo, è possibile concentrare la propria attenzione solo sull'effetto del gioco e provare di conseguenza a modellarne l'influenza sulla posizione e orientamento del membro di riferimento. La procedura proposta in questo capitolo opera un'operazione quasi inversa rispetto alle procedure proposte in letteratura: viene lasciato ai metodi di letteratura il compito di

quantificare l'errore di posizione commesso, e si studiano le caratteristiche geometriche che le variabili Lagrangiane del sistema devono soddisfare affinché l'influenza del gioco sulla posizione del membro di riferimento sia costante. Un aspetto importante da valutare nella scelta di quale metodo di letteratura utilizzare per l'analisi dell'errore, è la possibilità di riuscire a correlare tra loro l'errore fornito dal metodo utilizzato, ed un numero sufficiente di caratteristiche geometriche del meccanismo che garantiscano, se mantenute costanti, la costanza dell'errore.

## 4. STUDIO SULLA TOPOLOGIA DEI MECCANISMI

In questo capitolo viene studiata la topologia dei meccanismi e quali caratteristiche debba possedere un meccanismo affinché sia possibile applicare la metodologia illustrata nel precedente capitolo. In particolare, per assegnato meccanismo e assegnato membro di riferimento su di esso, si introducono i gruppi di Assur quali strumenti per determinare i membri fittizi che individuano la configurazione del sistema gioco. Si individuano un gruppo di Assur primario che contiene il membro di riferimento del meccanismo, ed uno o più gruppi di Assur secondari, cioè sotto-catene del meccanismo che collegano il gruppo di Assur primario e i membri attuati del meccanismo. I gruppi di Assur individuati permettono di introdurre delle equazioni di vincolo aggiuntive per il meccanismo, che, se soddisfatte, consentono di tracciare luoghi ad errore di posizione costante.

### 4.1 Gruppi di Assur

Si richiamano in questo paragrafo le principali definizioni e caratteristiche dei gruppi di Assur. Per maggiori informazioni si può fare riferimento al testo di Meccanica Applicata alle Macchine dei professori R. Ghigliazza e C.U. Galletti [7]. Per semplicità si farà riferimento a meccanismi piani. Si consideri una struttura, ossia un sistema a zero gradi di libertà. Se a questa struttura viene rimosso un membro, la catena cinematica che ne deriva prende il nome di **gruppo di Assur**. Gli estremi della catena cinematica in cui è avvenuta l'apertura della struttura vengono chiamati **estremi liberi**. Tra i gruppi di Assur più importanti vi è la **diade**. La diade si ottiene da una struttura a tre elementi binari, con sole coppie rotoidali. In Fig. 22, è rappresentata la diade e ne vengono indicati gli estremi liberi.

I gruppi di Assur godono di particolari proprietà. Se ad un meccanismo ad  $N$  gradi di libertà (g.d.l.) viene aggiunto un gruppo di Assur, il numero dei gradi di libertà del meccanismo ottenuto è ancora  $N$ . Si può dimostrare infatti che il generico gruppo di Assur possiede  $2c_1$  gradi di libertà, dove  $c_1$  è il numero di coppie cinematiche che lasciano un grado di libertà.

Partendo da una struttura (0 g.d.l.), se si elimina un membro, la catena cinematica rimanente guadagna i g.d.l. che le coppie cinematiche (tra membro eliminato e catena cinematica) toglievano pari a  $2c_1$ . Se si aggiunge ora un gruppo di Assur ad un meccanismo che possiede  $N$  g.d.l., al numero di g.d.l. totali dati dalla somma  $N + 2c_1$  vanno sottratti i nuovi vincoli che si introducono tra gruppo di Assur e il meccanismo stesso. Questi vincoli sono in numero pari  $2c_1$ . Di conseguenza i gradi di libertà totali ( $L$ ) del nuovo meccanismo sono:

$$L = N + 2c_1 - 2c_1 = N$$

, come volevasi dimostrare.

Un'importante conseguenza di questa proprietà è che per dato meccanismo, i gruppi di Assur non determinano i gradi di libertà del meccanismo e possono virtualmente essere tolti fino ad ottenere un meccanismo base a cui competono tutti i gradi di libertà posseduti dal meccanismo stesso. Un eventuale studio cinematico potrà essere portato avanti solo su questo sistema base ridotto, riducendo la complessità del problema. Esempi semplici e ricorrenti di applicazioni per questa proprietà sono il quadrilatero articolato e il manovellismo di spinta. Entrambi sono riconducibili ad un meccanismo base ad un grado di libertà (un manovella vincolata a ruotare attorno ad un punto fisso, o un corsoio vincolato a muoversi lungo una traiettoria rettilinea) più una diade.

Una seconda caratteristica dei gruppi di Assur è che la loro analisi cinematica può essere svolta in funzione dei valori di posizione, velocità e accelerazione che posseggono le estremità libere del gruppo stesso. In letteratura sono già disponibili analisi di posizione e velocità per un gran numero di gruppi di Assur. Ne consegue che la configurazione di un gruppo di Assur è completamente determinata se ne vengono fissati gli estremi liberi. Questa proprietà deriva direttamente dalla definizione di gruppo di Assur, infatti assegnando la posizione degli estremi liberi si ripristina implicitamente il membro soppresso e si ottiene nuovamente una struttura, che non possedendo gradi di libertà ha la propria configurazione completamente determinata.

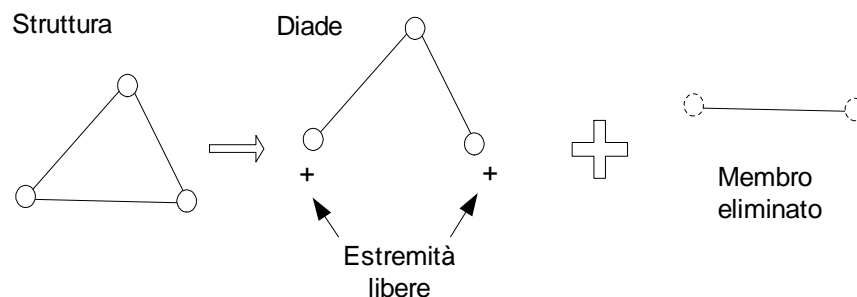


Fig. 22: Gruppi di Assur - Diade

## 4.2 Applicazione dei gruppi di Assur

In questo paragrafo verranno utilizzati i gruppi di Assur per determinare la configurazione del sottosistema contenente gioco. Nel terzo capitolo si è mostrato come sia di primaria importanza per l'applicabilità del metodo proposto, l'identificazione di parametri geometrici che permettano di descrivere in maniera univoca la configurazione del sottosistema gioco. Questi parametri geometrici, come già sottolineato, rappresentano l'interfaccia comune tra il sottosistema gioco e il sotto sistema ideale. Fissata la lunghezza di questi membri è richiesto che il sottosistema gioco risulti essere una struttura. Ma l'osservazione fatta coincide con la definizione di gruppo di Assur data in precedenza.

I gruppi di Assur diventano quindi la chiave per determinare i parametri geometrici cercati. In particolare se il sottosistema gioco costituisce un gruppo di Assur (o un assieme di essi) allora è possibile determinarne la configurazione attraverso un certo numero di membri fittizi che congiungono tra loro gli estremi liberi del gruppo stesso.

Iniziando dal membro di riferimento scelto sul meccanismo in esame, occorre individuare un gruppo di Assur che lo contenga. A questo primo gruppo daremo il nome di **gruppo di Assur primario**. In Fig. 23 è mostrato un pentalatero le cui coppie alla base, indicate dalle lettere *A* ed *E* sono attuate, mentre il membro di riferimento è stato rappresentato con l'aggiunta di una mano stilizzata. Si può dunque individuare il gruppo di Assur primario contenente il membro di riferimento: la diade formata dai membri 2 e 3 e dalle coppie cinematiche *B*, *C* e *D*. Gli estremi liberi di questa diade risultano essere le coppie *B* e *D*. Di conseguenza, il membro fittizio che collega queste due coppie individua in modo univoco la configurazione del sistema gioco. Il membro trovato coincide infatti con quello trovato

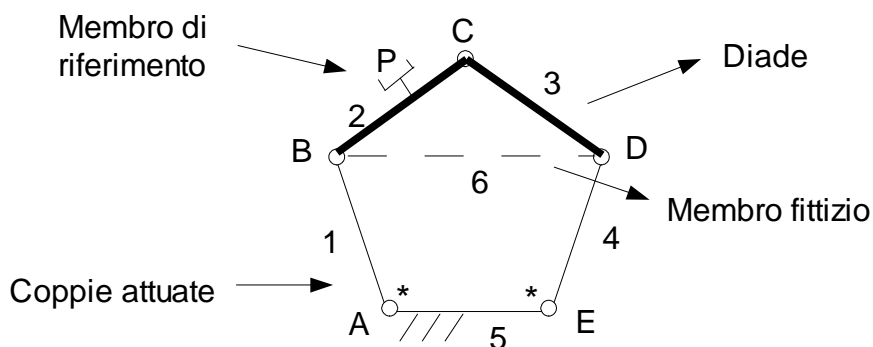


Fig. 23: Identificazione del gruppo primario

nell'esempio di meccanismo pentalatero che è stato studiato nel capitolo precedente.

L'individuazione del gruppo di Assur primario all'interno di un meccanismo non è sempre facile ed immediato. Si consideri l'esempio di Fig. 24, in cui vengono rappresentati due esalateri le cui coppie attuate sono state indicate con un asterisco. Nel caso a) è immediato ricondursi all'esempio del pentalatero, infatti tutte le coppie attuate risultano essere adiacenti una all'altra e i due membri rimanenti, tra i quali il membro di riferimento, formano una diade. Il membro fittizio che collega le due estremità libere è il parametro cercato. Nel caso b) invece, le coppie attuate non sono conseguenti una all'altra ma tra le coppie  $A, B$  e la coppia  $C$  vi è una coppia rotoideale affetta da gioco. In questo caso non è più possibile determinare direttamente il gruppo di Assur primario. Infatti non è possibile individuare almeno due membri che siano connessi con coppie folli. In questo caso è però possibile introdurre nel sistema un nuovo vincolo, ipotizzare cioè che sia assegnato il valore della coppia  $C$ . In questo modo, se il valore della coppia  $C$  non varia, si può immaginare che gli estremi dei membri indicati con  $1$  e  $2$  siano vincolati a mantenere una posizione relativa costante in virtù di un nuovo membro fittizio, indicato in figura con linea tratteggiata. E' ora possibile identificare il gruppo primario come la diade costituita dal membro di riferimento e questo membro fittizio generato da  $C$ . Come nel caso a), la distanza tra gli estremi liberi della diade identificano in modo univoco il parametro geometrico cercato. Se sarà possibile tracciare per il meccanismo in studio un luogo ad errore costante, occorrerà specificare che tale luogo avrà validità solo se il giunto  $C$  manterrà il valore con il quale il luogo stesso è stato calcolato.

Si riprenda l'affermazione iniziale con cui si è indicata come caratteristica principale del membro fittizio da determinare, la possibilità di suddividere attraverso il membro stesso il meccanismo in due sottosistemi di cui uno affetto da gioco ed uno ideale. La determinazione

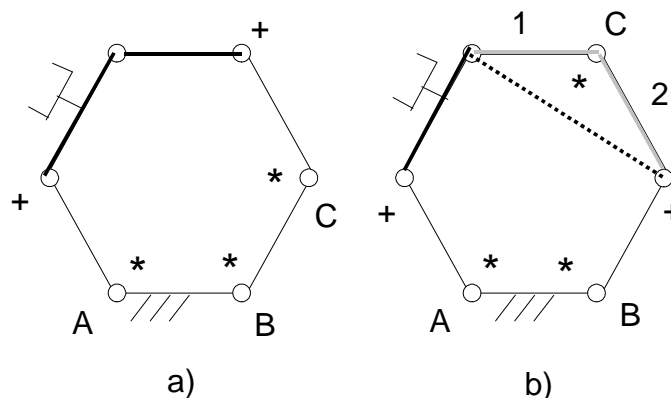


Fig. 24: Esempi di identificazione del gruppo primario

del gruppo di Assur primario non assicura di per sé il verificarsi della suddetta caratteristica. Si faccia riferimento alla Fig. 25, in cui vengono mostrati due esempi di meccanismi a sette membri di cui cinque binari e due ternari. In riferimento al caso a), gli elementi 1 e 2 costituiscono il gruppo primario diade per il membro di riferimento. Se si congiungessero tra loro gli estremi liberi di questa diade, avremmo da un lato il gruppo primario contenente coppie affette da gioco, dall'altro lato un meccanismo che presenta ancora gioco, nelle coppie folli che congiungono i membri 3 e 4, 7 e 6. Di conseguenza il solo controllo attraverso le coppie attuate di questo sottosistema non garantisce una lunghezza univoca del membro fittizio a causa dell'errore introdotto dalle coppie con gioco presenti. Un'analisi più approfondita mostra che tra il gruppo di Assur primario e la catena cinematica priva di gioco, costituita dai membri 4, 5 e 6, è possibile identificare un secondo gruppo di Assur di tipo diade. Questa diade è formata dai membri 3 e 7 ed è rappresentata in figura con linea tratteggiata. Per le proprietà dei gruppi di Assur, viste nel paragrafo precedente, aggiungendo a gruppi di Assur altri gruppi, il numero dei gradi di libertà del sistema non varia, ossia se è possibile trovare un parametro geometrico che definisca il secondo gruppo di Assur, automaticamente tale parametro definirà anche il gruppo primario. Si sottolinea come questa proprietà sia valevole solo se la configurazione del gruppo primario è completamente determinata dal secondo gruppo di Assur. Facendo riferimento a questo secondo gruppo, a cui daremo il nome di **gruppo di Assur secondario**, se ne considerino gli estremi liberi. Questi estremi determinano il membro fittizio che fissa la configurazione di entrambi i gruppi di Assur determinati, costituiti dai membri 1, 2, 3 e 7, e nei quali sono contenute tutte le coppie affette da gioco. D'altra parte lo stesso membro fittizio va a determinare assieme ai membri 4,

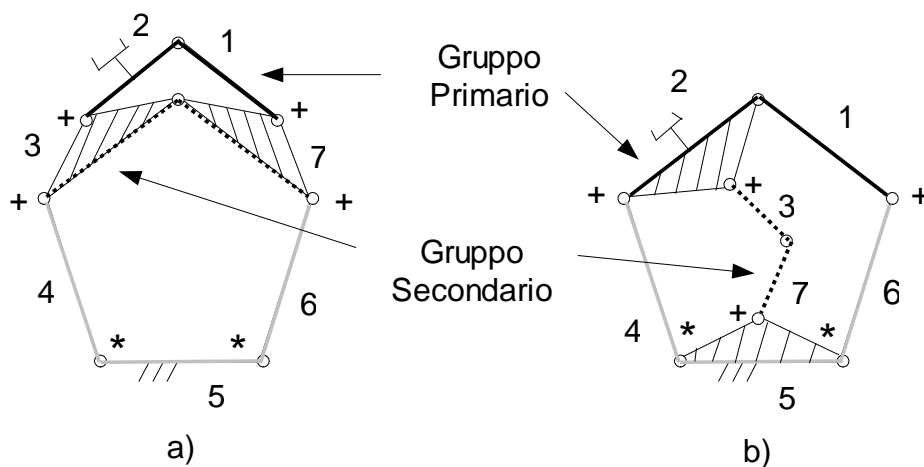


Fig. 25: Identificazione dei gruppi di Assur secondari



5 e 6, una catena chiusa priva di gioco che potrà essere usata per determinare i luoghi ad errore costante.

La ricerca all'interno del meccanismo di eventuali gruppi di Assur secondari deve essere fatta solo se non vi è una catena cinematica, costituita da sole coppie attuate, che colleghi direttamente gli estremi liberi del gruppo primario. Questo è un vincolo determinate perché evita di introdurre nel sistema delle relazioni che il sistema stesso dovrebbe soddisfare, ma che non contribuirebbero in alcun modo a identificare la configurazione del gruppo primario. Per chiarire questo aspetto si faccia riferimento alla Fig. 25, caso b). Il gruppo primario è sempre costituito da un elemento diade (membri 1 e 2), mentre i membri 4, 5 e 6 costituiscono una catena cinematica priva di gioco che determina in modo univoco la configurazione della diade. Se si decidesse di aggiungere al gruppo primario la diade secondaria costituita dai membri 3 e 7, i parametri geometrici che definiscono tale gruppo di Assur multiplo (ossia l'insieme dei gruppi primario e secondario) passerebbero da uno a tre. Per determinare la configurazione del gruppo di Assur multiplo occorrerebbero infatti un membro che colleghi gli estremi liberi del gruppo primario (tra 2 e 1), uno che colleghi gli estremi liberi del gruppo secondario (tra 3 e 7) ed infine uno che dia la posizione relativa tra i due gruppi, ad esempio un membro tra gli estremi di 2 e 7. I nuovi vincoli introdotti dovranno essere soddisfatti dal sistema con la conseguenza che sarà impossibile trovare un luogo di punti che riproponga la stessa configurazione del sottosistema gioco scelto. L'errore fondamentale che si commette è quello di perdere di vista l'obiettivo della procedura, che consiste nella determinazione di un luogo di punti ad errore di posizione costante per un membro assegnato del meccanismo. Nell'esempio di Fig. 25 b), il gruppo secondario non determina univocamente il gruppo primario, cioè non partecipa a fissare la sua configurazione, che risulta invece essere funzione diretta della catena cinematica attuata formata dai membri 4, 5 e 6.

Il problema dei gruppi di Assur multipli permette di rivedere e migliorare un aspetto della procedura rispetto a quanto mostrato nel capitolo precedente. Dall'esempio di Fig. 25 b) risulta chiaro che il parametro geometrico da ricercare non deve dividere tutto il sistema in due parti, di cui una affetta da gioco e l'altra no, ma deve operare questa divisione solo tra il più piccolo assieme di gruppi di Assur che comprendano il membro di riferimento, e la catena cinematica priva di gioco che lo identifica.

L'identificazione dei gruppi di Assur non può prescindere dalla specifica scelta del membro di riferimento sul meccanismo. Si consideri ancora la Fig. 25 caso b) nell'ipotesi in cui il

membro di riferimento scelto fosse 3, per determinare in maniera univoca la configurazione della diade formata dai membri 3 e 7, si dovrebbero utilizzare obbligatoriamente tutti e tre i membri fittizi che si sono ipotizzati prima (membri tra 3 e 7, tra 2 e 1, e 2 e 3) rendendo di fatto inapplicabile la procedura per il tracciamento di luoghi ad errore costante.

### 4.3 Disposizione delle coppie attuate

La seconda parte della procedura presentata nel terzo capitolo prevede l'esistenza di una catena cinematica costituita da sole coppie attuate che colleghi tra loro gli estremi del membro fittizio determinato nella prima parte della procedura stessa. Se non dovesse esistere una catena cinematica con queste caratteristiche, la procedura non potrebbe essere applicata. La disposizione delle coppie attuate all'interno del meccanismo riveste quindi un ruolo importante che va investigato.

In Fig. 26 sono riportati tre meccanismi esalateri a tre gradi di libertà, le cui coppie attuate sono state indicate con un asterisco.

Nel caso a) le coppie sono tutte e tre adiacenti l'una all'altra a formare una catena continua i cui estremi incontrano gli estremi liberi del gruppo di Assur primario. Gli estremi liberi dei gruppi primari sono stati indicati in figura con una croce. In questo esempio specifico si ha un solo membro fittizio, e una sola catena dipendente da tutte e tre le coppie attuate. Di conseguenza, il luogo ad errore costante sarà quello descritto dalla catena cinematica chiusa costituita dai membri vincolati dalle coppie attuate e dal membro fittizio trovato. Essi formano un meccanismo a cinque membri binari, in cui il membro fittizio può muoversi all'interno di una determinata area (due gradi di libertà).

Nel caso b) le coppie attuate sono disposte in maniera tale da formare due catene

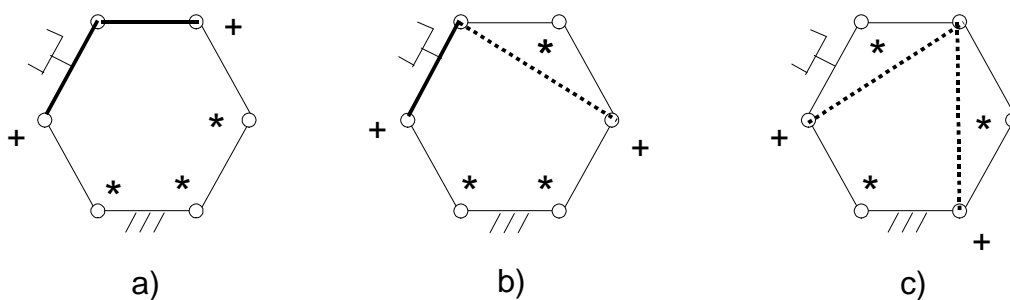


Fig. 26: Distribuzione delle coppie attuate

cinematiche principali: una costituita da tre membri e due coppie, l'altra da due membri e una coppia. Quest'ultima catena, una volta bloccata, fissa uno dei membri della diade del gruppo primario, come già suggerito nel paragrafo precedente. Il membro della diade formato da questa catena cinematica è stato rappresentato in figura con una linea tratteggiata. Gli estremi liberi della diade individuano il membro fittizio che determina la configurazione della diade stessa. In questo caso il meccanismo che permette di descrivere il luogo di punti ad errore costante è un sistema costituito da quattro membri binari (la catena cinematica attuata di tre membri ed il membro fittizio). Il membro fittizio può quindi compiere una traiettoria rettilinea che costituirà il luogo cercato ad errore costante.

Nel caso c) le catene cinematiche costituite da membri vincolati tra loro mediante coppie attuate sono tre, tutte formate da due membri ed una coppia rotoidale. Ben due di queste catene hanno il compito, una volta bloccate, di determinare i membri che costituiscono la diade, ossia il gruppo primario. In linea tratteggiata sono stati evidenziati i membri della diade individuati dalle suddette catene. Ne consegue che il meccanismo adibito al tracciamento dei luoghi ad errore costante è in questo caso costituito dalla sola catena cinematica attuata rimanente e da membro fittizio individuato dalla diade. Ma un meccanismo a tre membri binari non possiede alcuna mobilità, ossia non è possibile in questo caso tracciare i luoghi richiesti.

I tre casi presentati mostrano quindi quale vantaggio si abbia andando a realizzare un meccanismo che abbia le coppie attuate disposte una di seguito all'altra, in modo da realizzare un'unica catena cinematica di coppie attuate col maggior numero possibile di queste.

Da un punto di vista matematico l'introduzione dei membri fittizi che determinano la configurazione del gruppo di Assur primario (o eventualmente dei gruppi di Assur multipli) può essere modellata attraverso un'equazione di vincolo che stabilisca una determinata distanza tra gli estremi liberi del gruppo di Assur. Si consideri un sistema a  $N$  gradi di libertà, i cui parametri lagrangiani siano indicati con  $q_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). I membri fittizi introdotti dai gruppi Assur possono essere espressi attraverso una generica funzione  $f_k$  esprimibile come:

$$f_k(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (4.1)$$

dove  $k=1, \dots, d$ , e in generale  $d, n \leq N$

A queste equazioni è necessario aggiungere anche i vincoli che tengono conto della

possibilità che uno o più membri dei gruppi di Assur possano essere fittizi ossia determinati da alcune variabili Lagrangiane del sistema. Un esempio è dato dal caso b) di Fig. 24.

Il sistema dovrà quindi soddisfare anche le seguenti equazioni di vincolo esprimibili attraverso generiche funzioni  $g_j$ :

$$g_j(q_1, \dots, q_p) = 0 \quad (4.2)$$

dove  $j=1, \dots, s$ , e in generale  $j, p \leq N$

Le equazioni di tipo (4.1) e quelle di tipo (4.2) costituiscono un numero di vincoli aggiuntivo per il meccanismo pari a  $(d+s)$ . Se i gradi di libertà posseduti dal sistema sono in numero maggiore allora sarà possibile descrivere un luogo ad errore di posizione costante avente una dimensione  $L$  data dalla relazione seguente:

$$L = N - (d + s) \quad (4.3)$$

Si noti che la dimensione trovata fa riferimento ad luoghi di punti definiti nello Spazio dei Giunti del meccanismo.

Si riprendano come esempi i tre casi presentati in Fig. 26.

Caso a):

gradi di libertà	$N = 3(m-1) - 2c_1 = 3$
equazioni tipo (1)	$f_1(q_1, q_2, q_3) = 0 \rightarrow d = 1$
equazioni tipo (2)	<i>nessuna</i>
Dimensione del luogo	$L = 3 - 1 = 2$

Caso b):

gradi di libertà	$N = 3(m-1) - 2c_1 = 3$
equazioni tipo (1)	$f_1(q_1, q_2) = 0 \rightarrow d = 1$
equazioni tipo (2)	$g_1(q_3) = 0 \rightarrow s = 1$

Dimensione del luogo	$L=3-(1+1)=1$
----------------------	---------------

Caso c):

gradi di libertà	$N=3(m-1)-2c_1=3$
------------------	-------------------

equazioni tipo (1)	$f_1(q_1)=0 \rightarrow d=1$
--------------------	------------------------------

equazioni tipo (2)	$\begin{cases} g_1(q_2)=0 \\ g_2(q_3)=0 \end{cases} \rightarrow s=2$
--------------------	--

Dimensione del luogo	$L=3-(1+2)=0$
----------------------	---------------

dove le coppie attuate sono state numerate in senso orario a partire dall'estremo sinistro del membro a telaio. I tre meccanismi presentati, pur essendo tutti degli esalateri a tre gradi di libertà, in virtù della disposizione delle coppie attuate riescono a descrivere nello Spazio dei Giunti rispettivamente un'area, una curva ed un punto ad errore costante.

#### 4.4 Algoritmo di verifica

La procedura proposta per la determinazione di luoghi ad errore di posizione costante si può applicare in generale a qualunque meccanismo piano. Il calcolo della dimensione del luogo ad errore costante potrà produrre però un valore nullo, cioè una volta bloccata la configurazione del sottosistema gioco non sarà possibile muovere il sottosistema gioco nel piano senza comprometterne la configurazione stessa. D'altra parte in molti casi la procedura permette invece di trovare luoghi che traccino traiettorie, intere aree o anche spazi  $n$ -dimensionali ad errore costante. Infatti, pur avendo limitato lo studio a meccanismi piani, il luogo ad errore costante nello Spazio dei Giunti può avere una dimensione  $n$  in presenza di manipolatori piani rindondanti (ad esempio, un meccanismo costituito da otto membri binari ha cinque gradi di libertà. Se si suppone che le coppie attuate siano disposte una di seguito all'altra, lo spazio dimensionale del luogo ad errore costante risultante è pari a quattro).

La grande varietà di meccanismi piani che possono essere progettati suggerisce l'utilità di

strutturare la ricerca delle caratteristiche che un sistema deve possedere per poterne tracciare i luoghi ad errore di posizione costante attraverso la procedura proposta. Di seguito viene proposto un algoritmo che possa essere applicato ad un meccanismo piano qualsiasi, per valutarne la compatibilità con la procedura descritta.

In Fig. 27 è mostrato l'algoritmo per la determinazione dei luoghi ad errore costante e di seguito ne verranno descritti i singoli passi:

- 1) *Punto di partenza*: assegnato un meccanismo piano
- 2) *Uscita*: gradi di libertà del meccanismo ( $N$ )
- 3) *Test*: i gradi di libertà sono maggiori di uno?
  1. No: Passo 15
  2. Sì: Passo 4
- 4) *Assegnazione*: scegliere un membro di riferimento sul meccanismo
- 5) *Assegnazione*: identificare il Gruppo di Assur Primario sul meccanismo
- 6) *Test*: Il gruppo di Assur Primario è determinato in maniera diretta dalle coppie attuate?
  1. Sì: Passo 8
  2. No: Passo 7
- 7) *Assegnazione*: identificare i Gruppi di Assur multipli
- 8) *Assegnazione*: determinare il numero di equazioni di vincolo di tipo (4.1)
- 9) *Uscita*: numero di equazioni del tipo (4.1) ( $d$ )
- 10) *Assegnazione*: determinare il numero di equazioni di vincolo di tipo (4.2)
- 11) *Uscita*: numero di equazioni del tipo (4.2) ( $s$ )
- 12) *Assegnazione*: calcolo della dimensione ( $L$ ) del luogo ad errore costante tramite l'uso dell'equazione (4.3)
- 13) *Test*: La dimensione del luogo è maggiore di uno?
  1. No: Passo 15
  2. Sì: Passo 14
- 14) *Assegnazione*: Tracciamento del luogo ad errore di posizione costante.
- 15) *Termine*

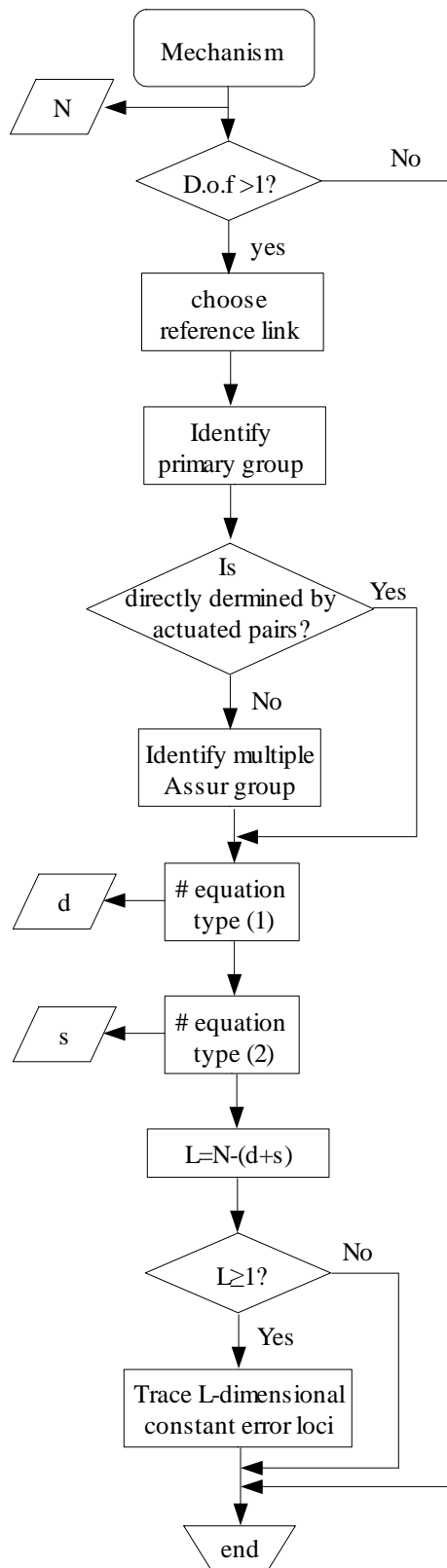


Fig. 27: Algoritmo per la determinazione dei luoghi ad errore costante

#### 4.5 Esempi di applicazione

Si mostreranno di seguito due esempi di applicazione dell'algoritmo proposto nel paragrafo precedente e il cui diagramma di flusso è mostrato in Fig. 27.

#### 4.5.1 Esempio di meccanismo idoneo alla determinazione di luoghi ad errore costante mediante la procedura proposta

Si consideri il meccanismo di Fig. 28, costituito da otto membri (numerati da 1 a 8) e nove coppie rotoidali (indicate con le lettere da A a I), le cui tre coppie attuate sono state indicate con un asterisco in figura. Il membro di riferimento è il 4. Tutte le coppie ad esclusione di quelle attuate sono affette da gioco. Applichiamo quindi l'algoritmo proposto:

- 1) *Punto di partenza:* **Meccanismo di Fig. 28**
- 2) *Uscita:* **N=3**
- 3) *Test:* **Sì**
- 4) *Assegnazione:* **Membro 4**
- 5) *Assegnazione:* **Diade BDE**
- 6) *Test:* **Sì**
- 7) *Assegnazione:*  $f(q_A, q_F) = \overline{BE}$
- 8) *Uscita:* **d=1**
- 9) *Assegnazione:*  $g(q_C) = \overline{BD}$
- 10) *Uscita:* **s=1**

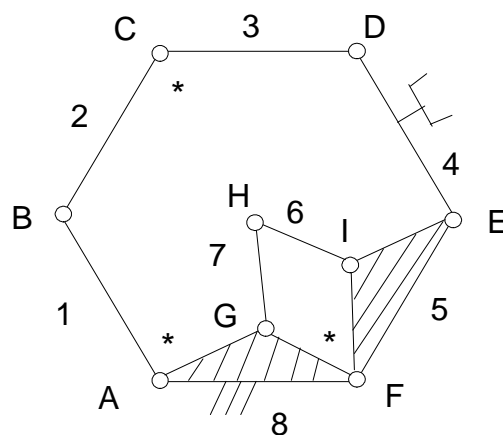


Fig. 28: Esempio di meccanismo idoneo all'applicabilità della procedura

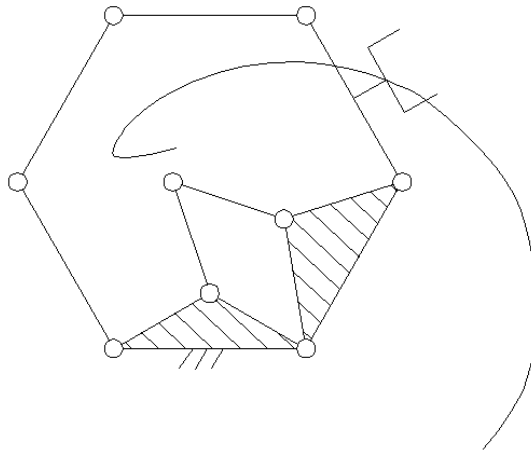


11) *Assegnazione:*  $L=N-(d+s)=3-2=1$  g.d.l.

12) *Test:* **Sì**

13) *Assegnazione:* **Figura 29**

14) *Termine*



*Fig. 29: Luogo ad errore costante*

#### **4.5.2 Esempio di meccanismo non idoneo alla determinazione di luoghi ad errore costante mediante la procedura proposta**

Si consideri il meccanismo di Fig. 30 costituito da otto membri (numerati da 1 a 8) e nove coppie rotoidali (indicate con le lettere da A a I), le cui tre coppie attuate sono state indicate con un asterisco in figura. Il membro di riferimento è il 4. Tutte le coppie ad esclusione di quelle attuate sono affette da gioco. Applichiamo quindi l'algoritmo proposto:

1) *Punto di partenza:* **Meccanismo di Fig. 30**

2) *Uscita:* **N=3**

3) *Test:* **Sì**

4) *Assegnazione:* **Membro 4**

5) *Assegnazione:* **Diade BDE**

6) *Test:* **No**

7) *Assegnazione:* **Diade GIF**

8) *Assegnazione:*  $f(q_A)=\overline{BG}$

9) *Uscita*:  $d=1$

10) *Assegnazione*:  $g_1(q_C)=\overline{BD}$ ;  $g_2(q_H)=\overline{GI}$

11) *Uscita*:  $s=2$

12) *Assegnazione*:  $L=N-(d+s)=3-3=0$  g.d.l.

13) *Test*: **No**

14) *Termine*

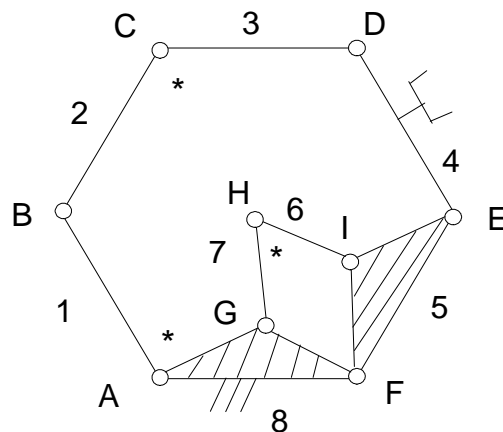


Fig. 30: Esempio di meccanismo non idoneo alla procedura

## 4.6 Discussione

In questo capitolo si sono approfondite e studiate le caratteristiche che un meccanismo deve soddisfare affinché sia possibile applicare ad esso la procedura descritta al capitolo 3, per il tracciamento di luoghi ad errore massimo di posizione costante.

Il risultato più importante consiste nell'aver identificato il sottosistema gioco introdotto nel capitolo tre con uno o più gruppi di Assur presenti nel meccanismo. Questo ha permesso di definire in maniera più rigorosa i membri fittizi che collegano sottosistema ideale e sottosistema gioco, e che sono fondamentali per poter tracciare i luoghi ad errore costante, rientrando nel calcolo dei vincoli (4.1) che il meccanismo deve soddisfare. I gruppi di Assur permettono anche prevedere alcuni sviluppi futuri per lo studio dell'errore di posizione dovuto

ai giochi. Infatti, una delle caratteristiche che i gruppi di Assur posseggono è quella di poter essere studiati individualmente, e di poter poi applicare i risultati trovati in tutti quei casi in cui i gruppi di Assur vengono ad essere usati. Si potrebbe allora studiare per ogni gruppo di Assur (ad esempio la diade, la triade, ecc...) la relazione che intercorre tra la distanza tra gli estremi liberi del gruppo e l'errore di posizione commesso, al fine di ottenere dei grafici come quelli rappresentati in Fig. 10. Se si potesse formalizzare a priori e in via simbolica, le relazioni tra massimo e minimo errore di posizione, e le grandezze geometriche dei membri che costituiscono il gruppo ed il gioco presente, allora sarebbe possibile tracciare immediatamente, in base alle caratteristiche geometriche di un meccanismo dato, i luoghi ad errore minimo da seguire o quelli ad errore massimo da evitare.

La stessa Fig. 10 e le successive fino alla 14, sono state tracciate utilizzando un foglio di calcolo che prende in ingresso le dimensioni dei membri e del gioco presente e in uscita traccia l'andamento dell'errore in funzione della distanza tra gli estremi liberi del gruppo di Assur, nel caso questi sia una diade.

Questo capitolo suggerisce anche al progettista quali siano, se ritenuti importanti, gli accorgimenti da seguire affinché sia possibile applicare la procedura mostrata al meccanismo in produzione. La disposizione delle coppie attuate dovrebbe essere fatta in modo da disporre tutte le coppie una adiacente all'altra, in modo da ridurre il numero di equazioni del tipo (4.1) e del tipo (4.2). Eventuali catene cinematiche aggiunte per aumentare la rigidità del meccanismo, come ad esempio potrebbero essere i membri 6 e 7 nelle figure 28 e 30, è bene che non siano attuate direttamente (come invece succede nella Fig. 30), poiché difficilmente l'organo di riferimento verrà posto su uno di questi membri, e di conseguenza si andrebbe ad introdurre nel sistema un'equazione di vincolo del tipo (4.2).

Un numero elevato di coppie attuate nel meccanismo aumenta la probabilità che la procedura possa essere applicata, poiché aumenta il valore  $N$  dei gradi di libertà del meccanismo che compare nell'equazione (4.3). Naturalmente non è possibile decidere di aumentare il numero di coppie attuate solo per poter gestire l'errore di posizione, i costi di produzione aumenterebbero eccessivamente e verrebbero ad essere economicamente convenienti altri metodi di controllo e gestione dell'errore (ad esempio sensori di posizione, molle di precarico, ecc...).

I suggerimenti che si possono trarre dal metodo proposto dovrebbero essere seguiti soprattutto nella progettazione di manipolatori piani a tre gradi di libertà. Infatti, si ipotizzi

che un'industria acquisti un manipolatore a tre gradi di libertà ma che a questo venga richiesto solamente di eseguire una determinata traiettoria con qualsivoglia orientamento dell'end-effector. Il rimanente grado di libertà potrebbe essere impiegato per minimizzare l'errore di posizione commesso dal manipolatore nel percorrere la traiettoria.

## 5. CONCLUSIONI

In questa tesi di dottorato si è cercato di portare un contributo nuovo all'analisi dell'influenza del gioco nell'errore di posizione di un membro di un meccanismo assegnato.

Si è partiti dallo stato dell'arte presente in letteratura delineando i diversi approcci che gli autori hanno seguito, cercando di metterne in luce pregi e difetti. Successivamente si è studiata dell'influenza dei giochi sull'errore di posizione, utilizzando uno dei metodi proposti in letteratura, andando a correlare tra loro l'errore rilevato e la configurazione del meccanismo stesso. Su questa relazione è stata anche eseguita un'analisi di sensibilità per poter identificare quali parametri geometrici del meccanismo influenzino maggiormente l'errore di posizione.

Questa parte preliminare dello studio, ha messo in luce un limite comune a tutti i modelli proposti in letteratura: la difficoltà di riuscire a prevedere le configurazioni del meccanismo in cui l'errore di posizione rimane costante. Questo problema, in base alle considerazioni fatte sul rapporto esistente tra configurazione del meccanismo ed errore di posizione generato, è stato risolto attraverso una procedura in due parti: nella prima vengono introdotti opportuni vincoli che definiscono in maniera univoca l'errore di posizione commesso, nella seconda parte vengono poste a sistema le equazioni di vincolo appena trovate e le equazioni di chiusura del meccanismo. I valori delle variabili Lagrangiane del meccanismo che soddisfano il sistema di equazioni rappresentano luoghi di punti ad errore di posizione costante.

Nel terzo capitolo la procedura per il tracciamento di luoghi ad errore costante viene presentata, discutendone le caratteristiche e mostrandone due possibili esempi di applicazione.

Nel quarto capitolo vengono approfondite e discusse le caratteristiche topologiche che un meccanismo deve soddisfare affinché sia possibile determinare un luogo ad errore di posizione costante attraverso la procedura descritta. In particolare, viene introdotto l'utilizzo dei gruppi di Assur che permettono di identificare in maniera rigorosa le equazioni di vincolo che il meccanismo deve soddisfare per poter determinare i luoghi ad errore costante. Un diagramma di flusso, è riportato come utile strumento per la verifica dell'applicabilità del metodo proposto ad un meccanismo qualsiasi.

Infine le appendici riportano alcuni risultati che, per motivi di spazio o per non appesantire la trattazione, non hanno potuto trovare posto all'interno dei singoli capitoli, ma che completano lo studio fatto e testimoniano l'elevata varietà di meccanismi a cui è possibile

applicare la procedura descritta.

Alla luce dei risultati raggiunti e dell'analisi fatta emergono certamente delle problematiche su cui la Ricerca potrebbe investire risorse in futuro. In particolare si ritiene di primaria importanza, riuscire a determinare i modi di contatto tra le parti che costituiscono una generica coppia cinematica (sia piana che spaziale) in presenza di gioco. Allo stato attuale solo semplici realizzazioni di coppie rotoidali a sezione circolare, coppie prismatiche a sezione quadrata, sono state studiate, a causa della crescente complessità nella modellazione del gioco, al crescere della complessità costruttiva della generica coppia cinematica.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Biswas, A. and G.L. Kinzel (1998). An iterative kinematic and force solution method for revolute joints with clearances. In: *Proceedings of the 1998 ASME Design Engineering Technical Conference*, Atlanta.
- [2] Chakraborty, J. (1975). Synthesis of mechanical error in linkages. *Mech. Mach. Theory* **10**, 155-165.
- [3] Cocconcelli, M. and V. Parenti-Castelli (2005). Workspace mapping versus accuracy for planar mechanisms with clearanced revolute joints. In: *Proceedings of the 14th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region*, Bucharest. Pp 86-91.
- [4] Dhande, S.G. and J. Chakraborty (1973). Analysis and synthesis of mechanical error in linkages – A stochastic approach. *J. Eng. Ind.* **95**(2), 672-677.
- [5] Dhande, S.G. and J. Chakraborty (1978). Mechanical error analysis of spatial linkages. *J. Mech. Des.* **100**, 732-738.
- [6] Garrett, R.E. and A.S. Jr Hall (1969). Effect of tolerance and clearance in linkage design. *J. Eng. Ind.* **91**(1), 198-203.
- [7] Ghigliazza, R. e C.U. Galletti. *Meccanica Applicata alle Macchine*, Ed. UTET, Torino.
- [8] Hahn, M. (1994). Mathematical modelling and computer simulation of rigid body systems including spatial joints with clearance. In: *Proceedings of the 1st joint Conference of International Simulation Societies*, Zurich, Switzerland.
- [9] Horie, M., H. Funabashi, K. Ogawa and H. Kobayashi (1985). A displacement analysis of spatial four-bar mechanisms with clearance and tolerances. *Bulletin of JSME* **28**(241), 1535-1542.
- [10] Hunt, K.H. (1990). Kinematic geometry of mechanisms. *Clarendon Press*, Oxford.
- [11] Innocenti, C (1999). A static-based method to evaluate the effect of joint clearances on the positioning errors of planar mechanisms. In: *Proceedings of the IFToMM'99 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Oulu, Finland.
- [12] Innocenti, C. (2002). Kinematic clearance sensitivity analysis of spatial structures with

- revolute joints. *J. Mech. Des.* **124**, 52-57.
- [13] Kolhatkar, S.A. and K.S. Yajnik (1970). The effects of play in the joints of a function-generating mechanism. *J. Mechanisms* **5**, 521-532.
- [14] Lee, S.J. and B.J. Gilmore (1991). The determination of the probabilistic properties of velocities and accelerations in kinematic chain with uncertainty. *J. Mech. Des.* **113**, 84-113.
- [15] Lee, S.J., B.J. Gilmore and M.M. Ogot (1993). Dimensional tolerance allocation of stochastic dynamic mechanical systems through performance and sensitivity analysis. *J. Mech. Des.* **115**, 392-402.
- [16] Lin, D.P. and J.F. Chen (1992). Accuracy analysis of planar linkages by the matrix method. *Mech. Mach. Theory* **27**(5), 507-516.
- [17] Ma, O. and J. Angeles (1992). Architecture singularities of parallel manipulators. *Int. J. Rob. & Aut.* **7**(1), 23-29.
- [18] Mayourian, M. and J. Rastegar (1990). Stochastic modeling of the mechanical behavior of mechanisms in the presence of joint clearances. In: *Proceedings of 1990 ASME Mechanisms Conference*, Las Vegas, USA.
- [19] Parenti-Castelli, V., S. Venanzi and J. Lenarcic (2001). Influence of geometry on the kinematic performances of a humanoid shoulder-girdle mechanism, In: *Proceedings of the 2001 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Como, Italy.
- [20] Parenti-Castelli, V. and S. Venanzi (2001). Kinetostatic behavior of the prismatic pair with clearance, In: *Proceedings of the 2001 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New York, USA.
- [21] Parenti-Castelli, V. and S. Venanzi (2002). A new deterministic method for clearance influence analysis in spatial mechanisms, In: *Proceedings of the 2002 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, New Orleans, USA.
- [22] Parenti-Castelli, V. and S. Venanzi (2002). A new technique for clearance influence analysis in planar mechanisms. In: *Proceedings of 2002 ASME International Design Engineering and Technical Conferences*, Montreal, Canada.
- [23] Parenti-Castelli, V. and S. Venanzi (2002). On the joint clearance effects in serial and parallel manipulators, In: *Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, Quebec,



Canada.

- [24] Parenti-Castelli, V. and S. Venanzi (2003). Recent techniques for clearance influence analysis in planar and spatial mechanisms. In: *Special Celebration Symposium in honor of Bernie's 70th birthday*, University of Stanford, Palo Alto, USA.
- [25] Parenti-Castelli, V. and S. Venanzi (2005). Clearance influence analysis on mechanisms. *Mech. Mach. Theory* **40**(12), 1316-1329.
- [26] Phillips, J. (1971). Geometry of backlash in spatial mechanisms. In: *Proceedings of the 3rd World Congress on the Theory of Mechanisms and Machines*, Kupari, Jugoslavia.
- [27] Rhyu, J.H. and B. M. Kwak (1988). Optimal stochastic design of four-bar mechanisms for tolerance and clearance. *J. Mech. Trans. Aut. Des.* **110**, 255-262.
- [28] Shyu, J.H. and K.L. Ting (1994). Invariant link rotatability of N-bar kinematic chains. *J. Mech. Des.* **116**, 343-347.
- [29] Ting, K.L. and Y.W. Liu (1991). Rotatability laws for N-bar kinematic chains and their proof. *J. Mech. Des.* **113**, 32-39.
- [30] Ting, K.L., J. Zhu and D. Watkins (2000). The effects of joint clearance on position and orientation deviation of linkages and manipulators. *Mech Mach. Theory* **35**, 391-401.
- [31] Tischler, C.R. and A.E. Samuel (1998). Predicting the slop of in-series/parallel manipulators caused by joint clearances. *Advances in Robot Kinematics and Control*, Kluwer Academic Publishers, 227-236.
- [32] Tsai, M.J. And T.H. Lai (2004). Kinematic sensitivity analysis of linkage with joint clearance based on transmission quality. *Mech Mach. Theory* **39**, 1189-1206.
- [33] Veitschegger, W.K. and C.H. Wu (1986). Robot accuracy analysis based on kinematics. *IEEE J. Rob. Aut.* **RA-2**(3), 171-179.
- [34] Voglewede, P. and I. Ebert-Uphoff (2004). Application of workspace generation techniques to determine the uncostrained motion of parallel manipulators. *J. Mech. Des.* **126**, 283-290.
- [35] Wang, H.H.S. and B. Roth (1988). Position errors of manipulators, In: *Proceedings of RoManSy 7*, Udine, Italy.
- [36] Wang, H.H.S. and B. Roth (1989). Position errors due to clearance in journal bearings, *J. Mech. Trans. Aut. Des.* **111**, 315-320.

- [37] Yin, Z.W. and J.K. Wu (1990). An optimal synthesis of linkages considering structural error and clearances. In: *Proceedings of 1990 ASME Mechanisms Conference*, Chicago, USA.

## A. APPENDICI

Di seguito verranno riportate due appendici:

- Ulteriori risultati dell'analisi di sensibilità.
- Esempi di meccanismi idonei alla determinazione di luoghi ad errore costante.

## A.1 Ulteriori risultati dell'analisi di sensibilità

Con riferimento all'analisi di sensibilità compiuta nel paragrafo 3.3 sul pentolatero di Fig. 4, di seguito vengono riportati gli andamenti di alcune grandezze relative all'errore di posizionamento in funzione della distanza tra le coppie rotoidali  $B$  e  $D$ . Utilizzando la procedura suggerita da Ting e alt. [30], vengono mostrati in Fig. 31 gli angoli che i membri 2, 3 e la congiungente  $B$  con  $D'$  formano tra loro e che sono stati indicati con le lettere greche  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varphi$ . Questi angoli possono variare tra un valore massimo ed uno minimo calcolabili in base alla geometria del sistema e del gioco presente. Nelle figure che seguiranno verrà calcolata la differenza tra il valore minimo e massimo che ciascuno di questi angoli è in grado di raggiungere in funzione della distanza tra le coppie  $B$  e  $D'$ , al variare di tre parametri, la lunghezza del membro 2, la lunghezza del membro 3 e l'entità del gioco presente. Infine verrà riportato l'andamento dell'area di auto-movimento definita nel paragrafo 3.3 al variare degli stessi tre parametri appena considerati. Per le dimensioni del sistema iniziale si faccia riferimento alla tabella 2, mentre per l'ordine delle immagini relative a quest'appendice si faccia riferimento alla tabella 4.

Variabili	Membro 2	Membro 3	Gioco
Angolo $\beta$	Figura 32	Figura 33	Figura 34
Angolo $\gamma$	Figura 35	Figura 36	Figura 37
Angolo $\varphi$	Figura 38	Figura 39	Figura 40
Area auto-mov.	Figura 41	Figura 42	Figura 43

Tabella 4. Analisi di sensibilità

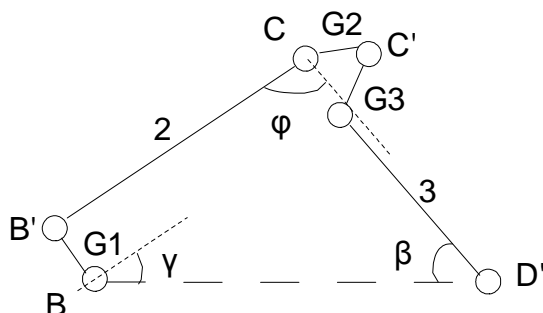
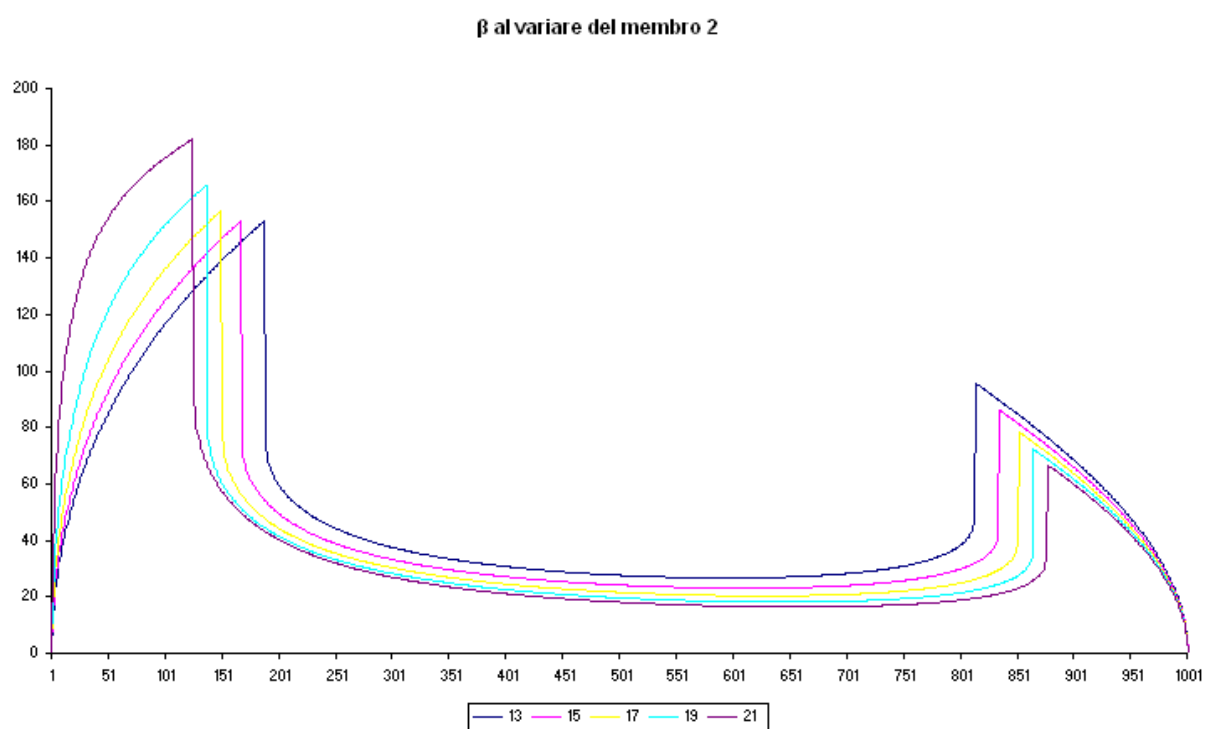
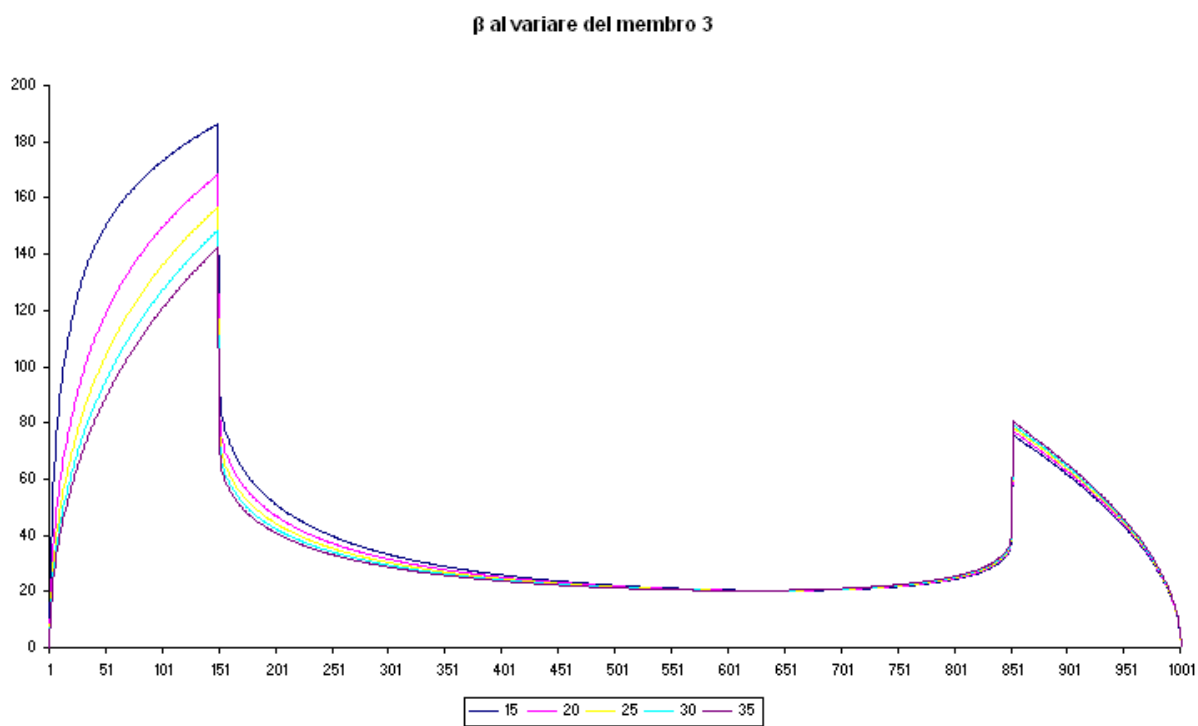


Fig. 31: Definizione degli angoli  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\varphi$

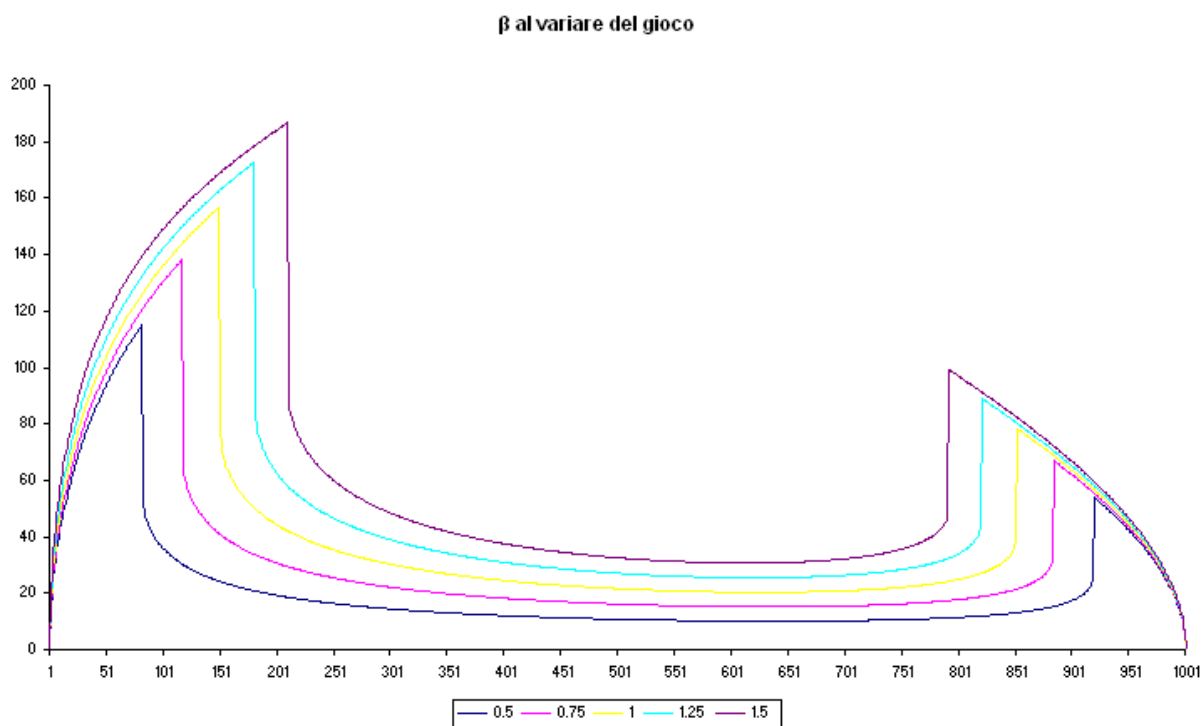
Come spiegato nel paragrafo 3.3, nelle ordinate non sono stati riportati i valori della lunghezza  $\overline{BD'}$  poiché al variare delle lunghezze dei membri 2, 3 e del gioco non sarebbe stato possibile confrontare tra loro i risultati ottenuti variando il range della lunghezza  $\overline{BD'}$ . Si sono allora scalati i grafici in funzione dell'ampiezza di questo range, suddividendo il grafico in 1000 punti per ognuno dei quali è stato effettuato il calcolo della grandezza desiderata. Le unità di misura utilizzate sono i gradi ( $^{\circ}$ ) per gli angoli e i  $\text{mm}^2$  per le aree.



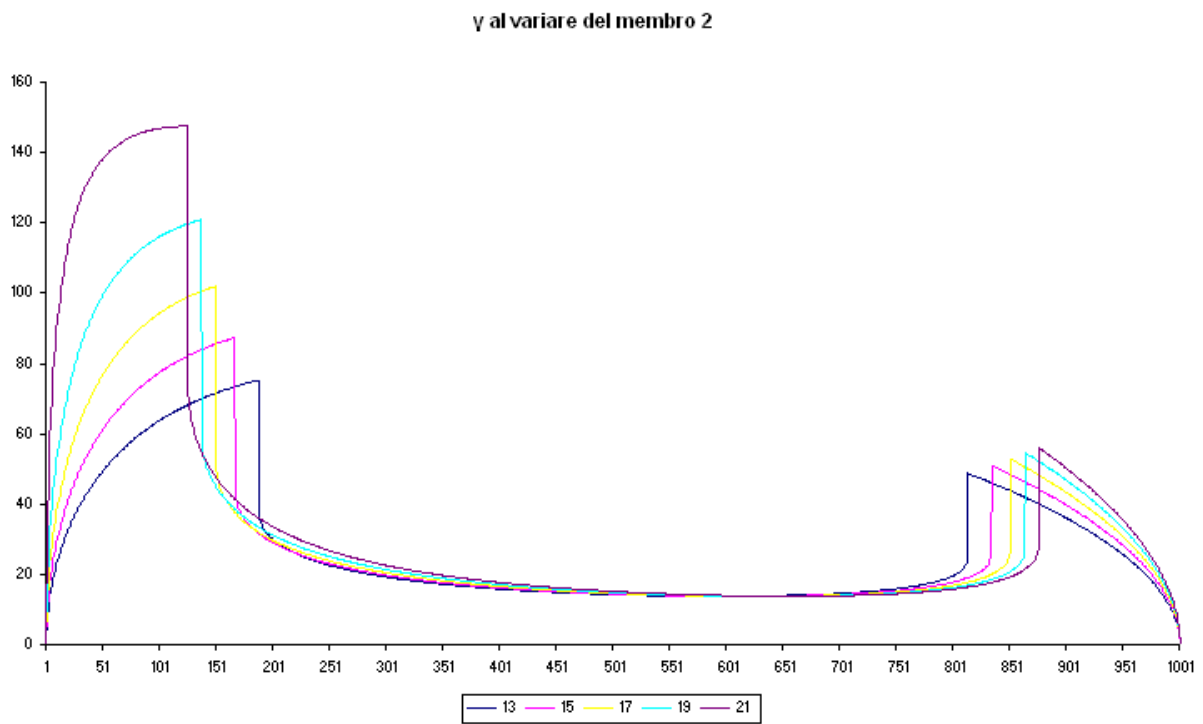
*Fig. 32: Variazione dell'angolo  $\beta$  al variare della lunghezza del membro 2*



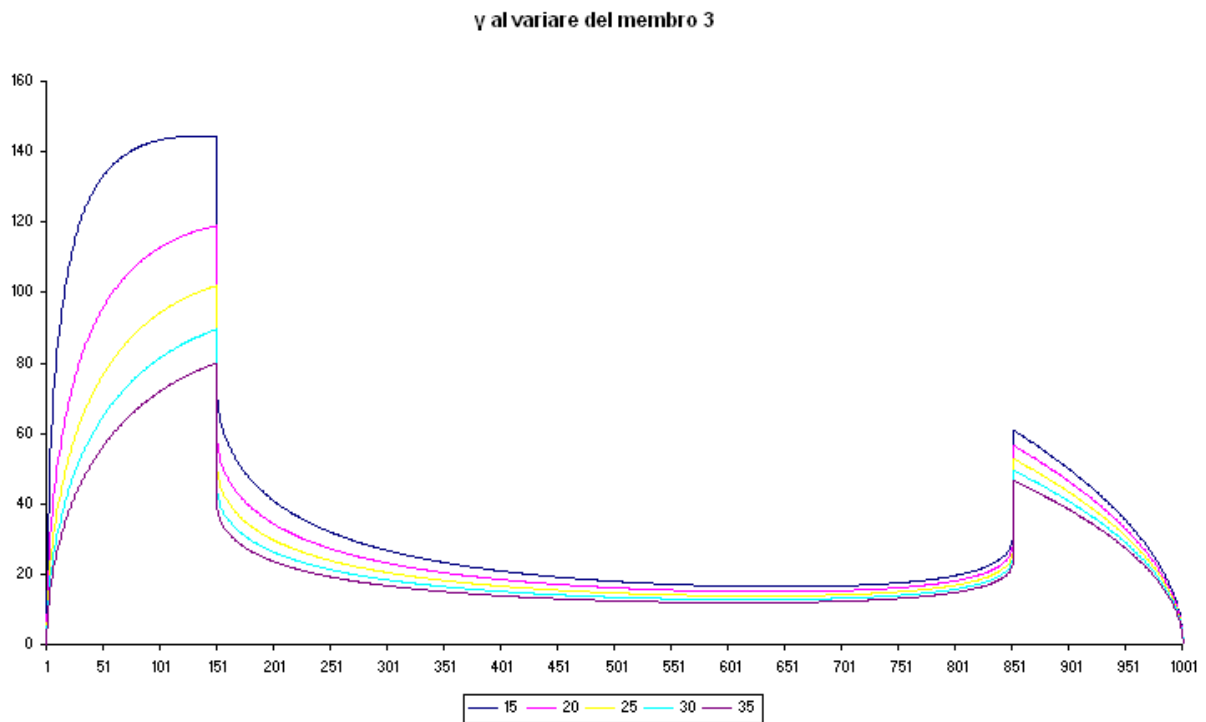
*Fig. 33: Variazione dell'angolo  $\beta$  al variare della lunghezza del membro 3*



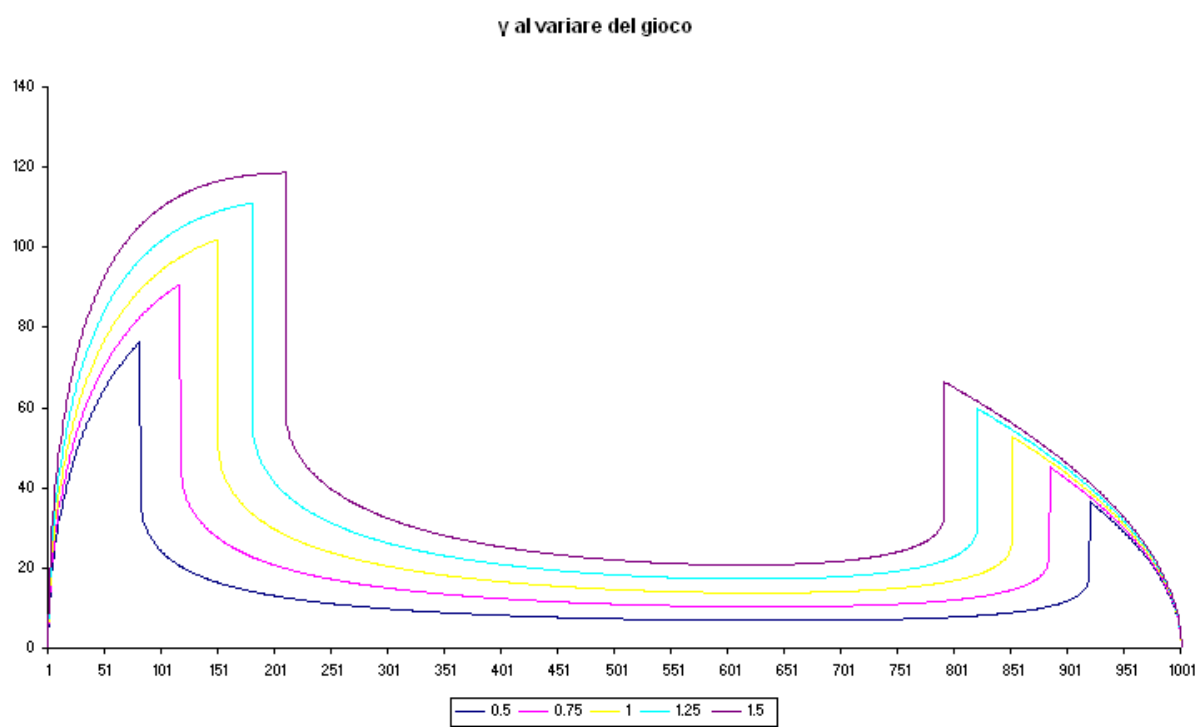
*Fig. 34: Variazione dell'angolo  $\beta$  al variare della lunghezza del gioco*



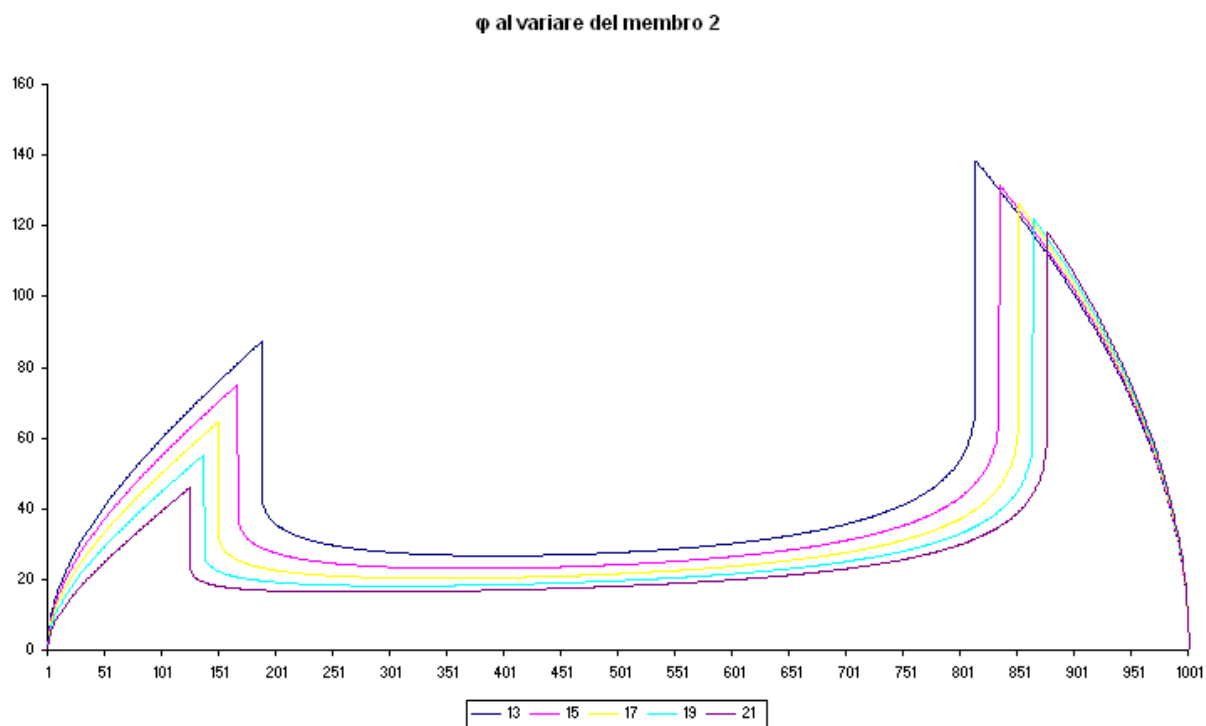
*Fig. 35: Variazione dell'angolo  $\gamma$  al variare della lunghezza del membro 2*



*Fig. 36: Variazione dell'angolo  $\gamma$  al variare della lunghezza del membro 3*

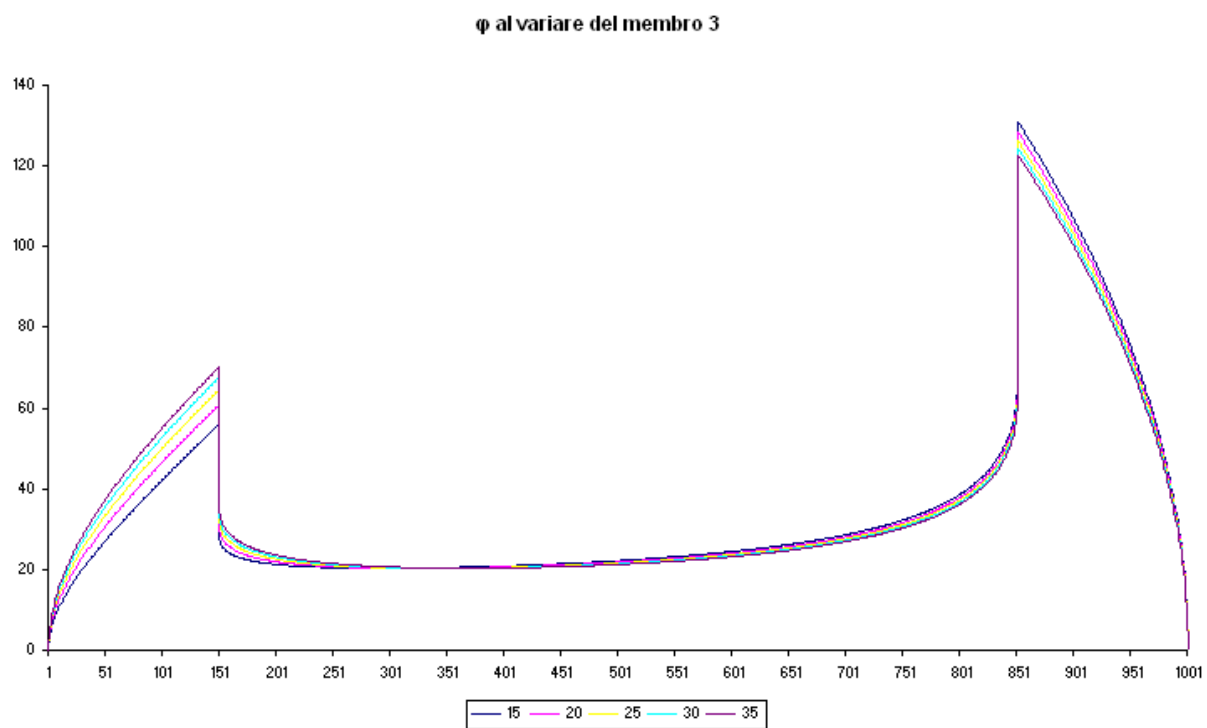


*Fig. 37: Variazione dell'angolo  $\gamma$  al variare della lunghezza del gioco*

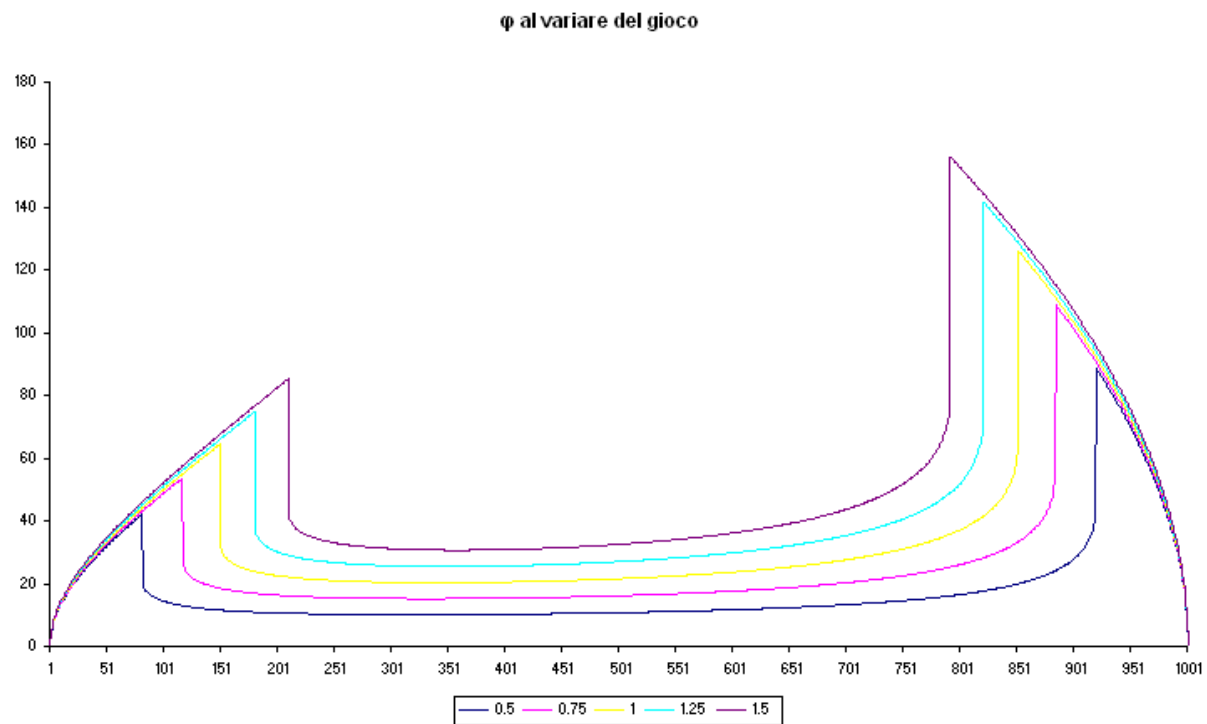


*Fig. 38: Variazione dell'angolo  $\phi$  al variare della lunghezza del membro 2*

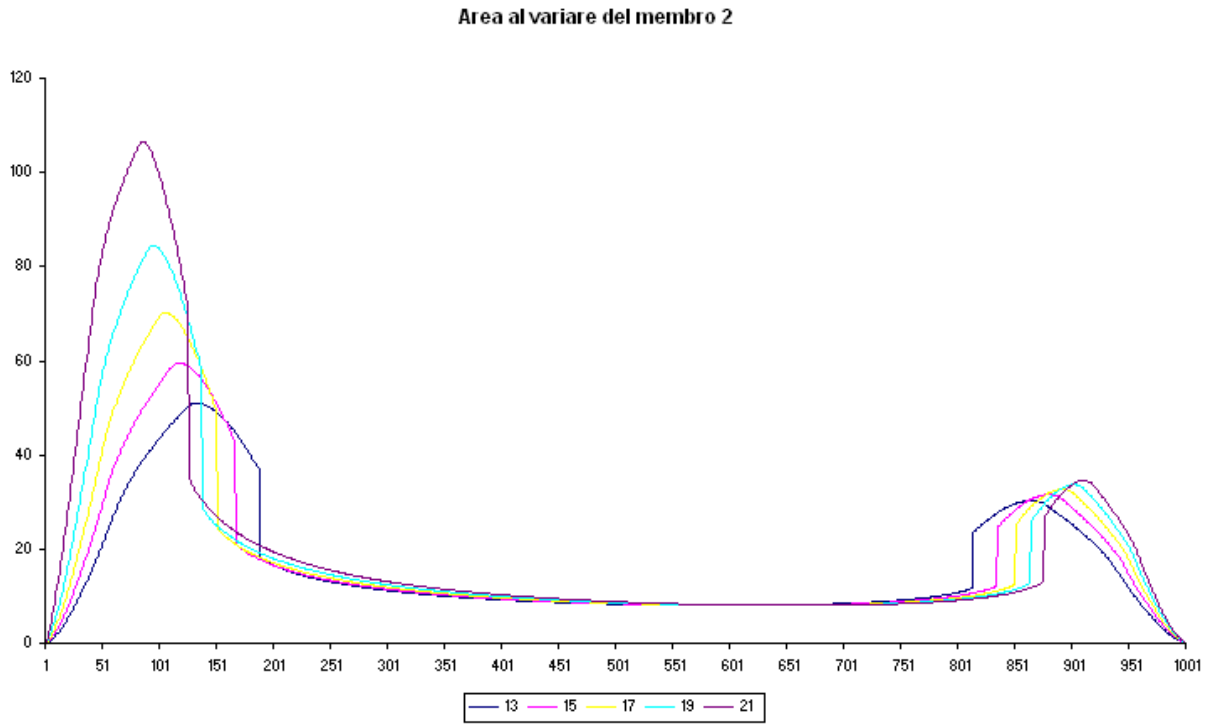




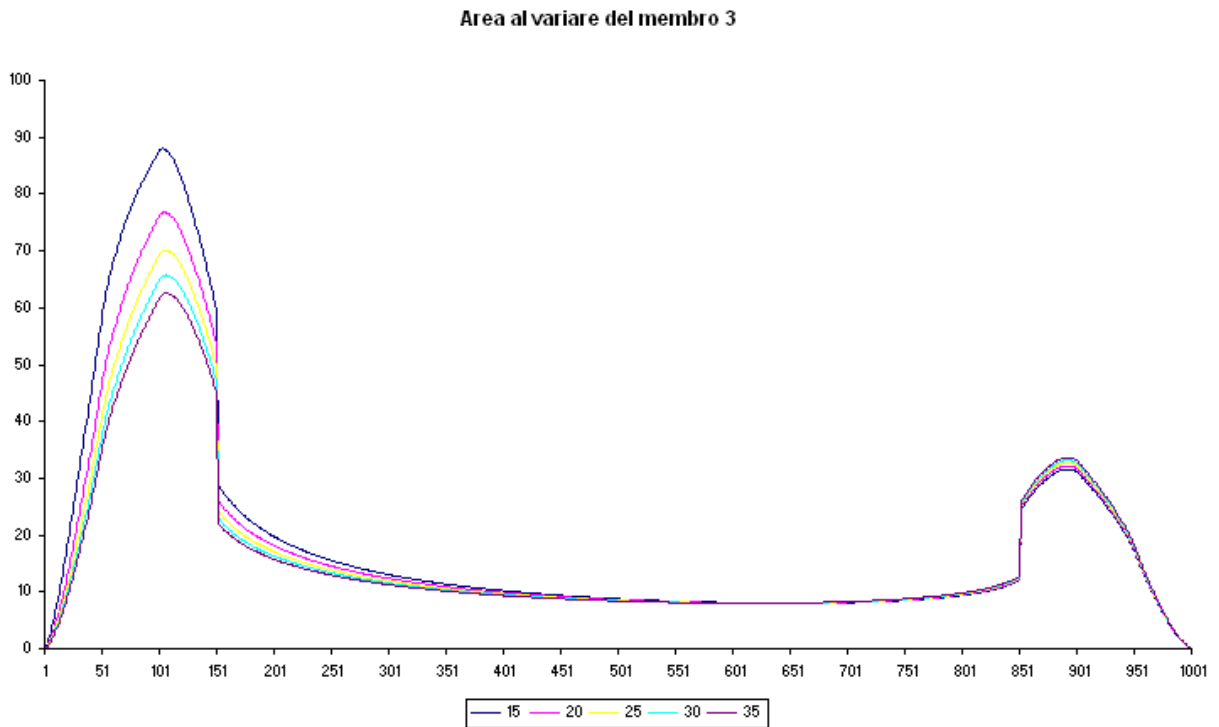
*Fig. 39: Variazione dell'angolo  $\varphi$  al variare della lunghezza del membro 3*



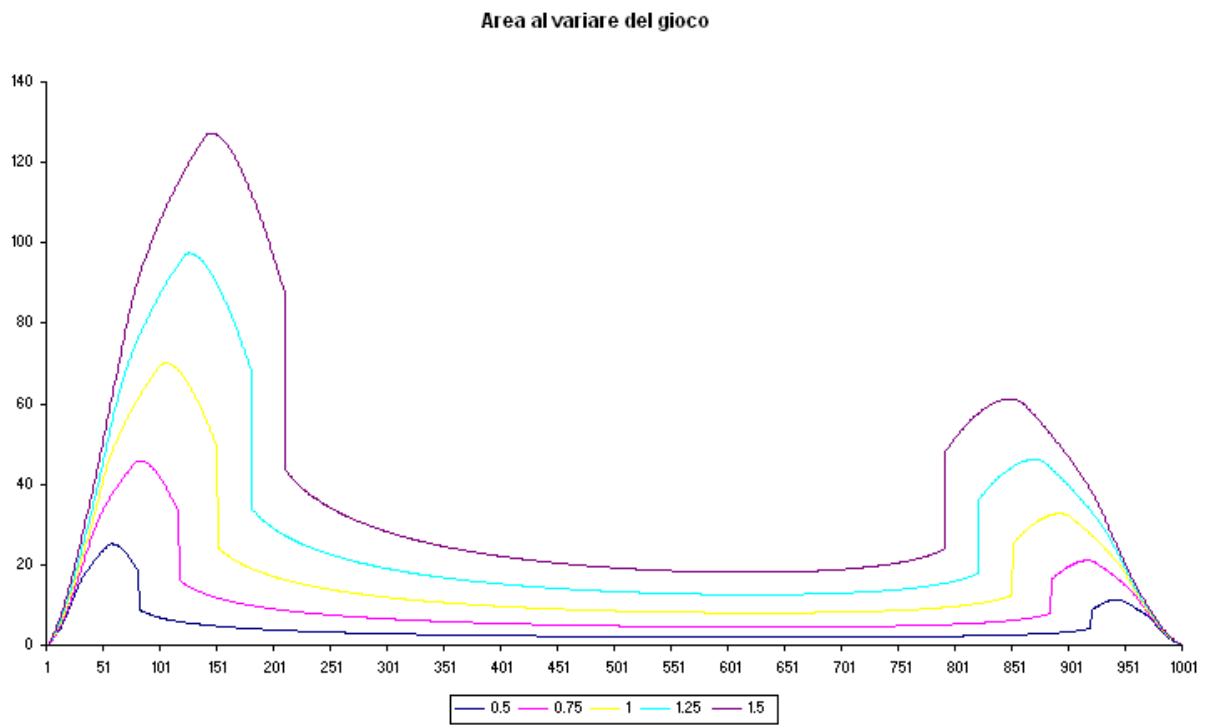
*Fig. 40: Variazione dell'angolo  $\varphi$  al variare della lunghezza del gioco*



*Fig. 41: Variazione dell'area di auto-movimento al variare della lunghezza del membro 2*



*Fig. 42: Variazione dell'area di auto-movimento al variare della lunghezza del membro 3*



*Fig. 43: Variazione dell'area di auto-movimento al variare della lunghezza del gioco*

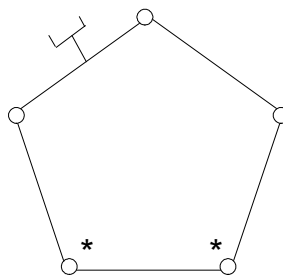
## A.2 Esempi di meccanismi idonei alla determinazione di luoghi ad errore costante

Di seguito verranno mostrati alcuni esempi di meccanismi piani a cui è possibile applicare la procedura descritta in questa tesi al fine di tracciare luoghi ad errore costante descritti da un membro di riferimento appartenente al meccanismo stesso. Le coppie attuate verranno indicate con un asterisco, mentre il membro di riferimento attraverso l'immagine stilizzata di una mano.

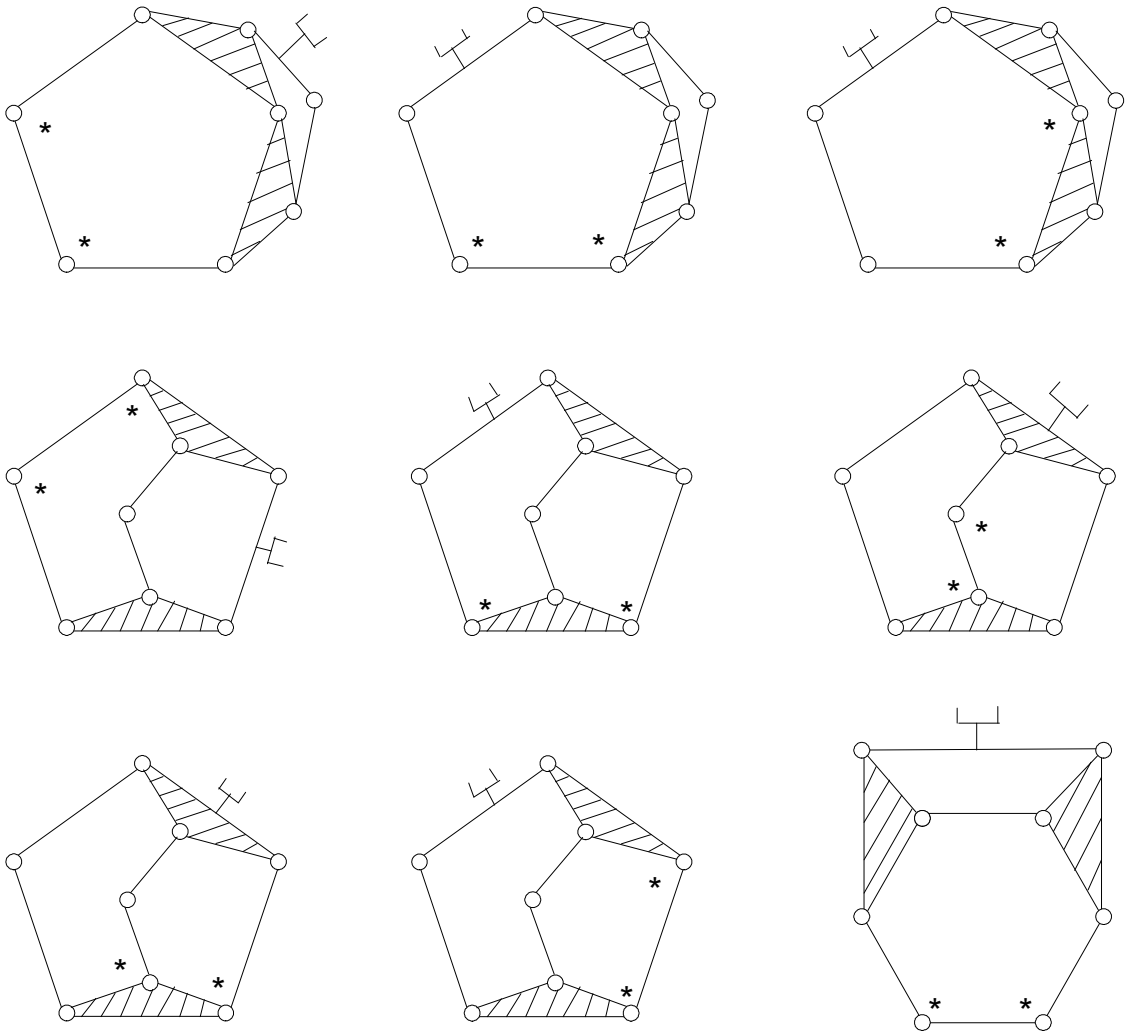
I meccanismi verranno presentati in ordine crescente di gradi di libertà e del numero dei membri presenti. In particolare di seguito saranno mostrati:

- Meccanismi a due gradi di libertà e cinque membri
- Meccanismi a due gradi di libertà e sette membri
- Meccanismi a tre gradi di libertà e sei membri
- Meccanismi a tre gradi di libertà e otto membri
- Meccanismi a quattro gradi di libertà e sette membri
- Meccanismi a cinque gradi di libertà e otto membri

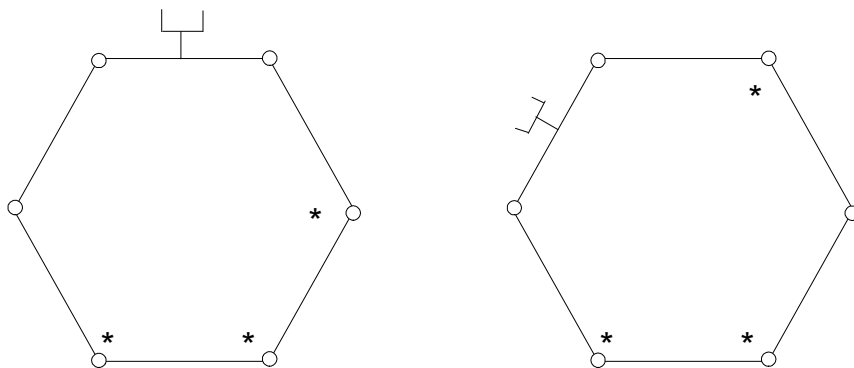
### A.2.1 Meccanismi a due gradi di libertà e cinque membri



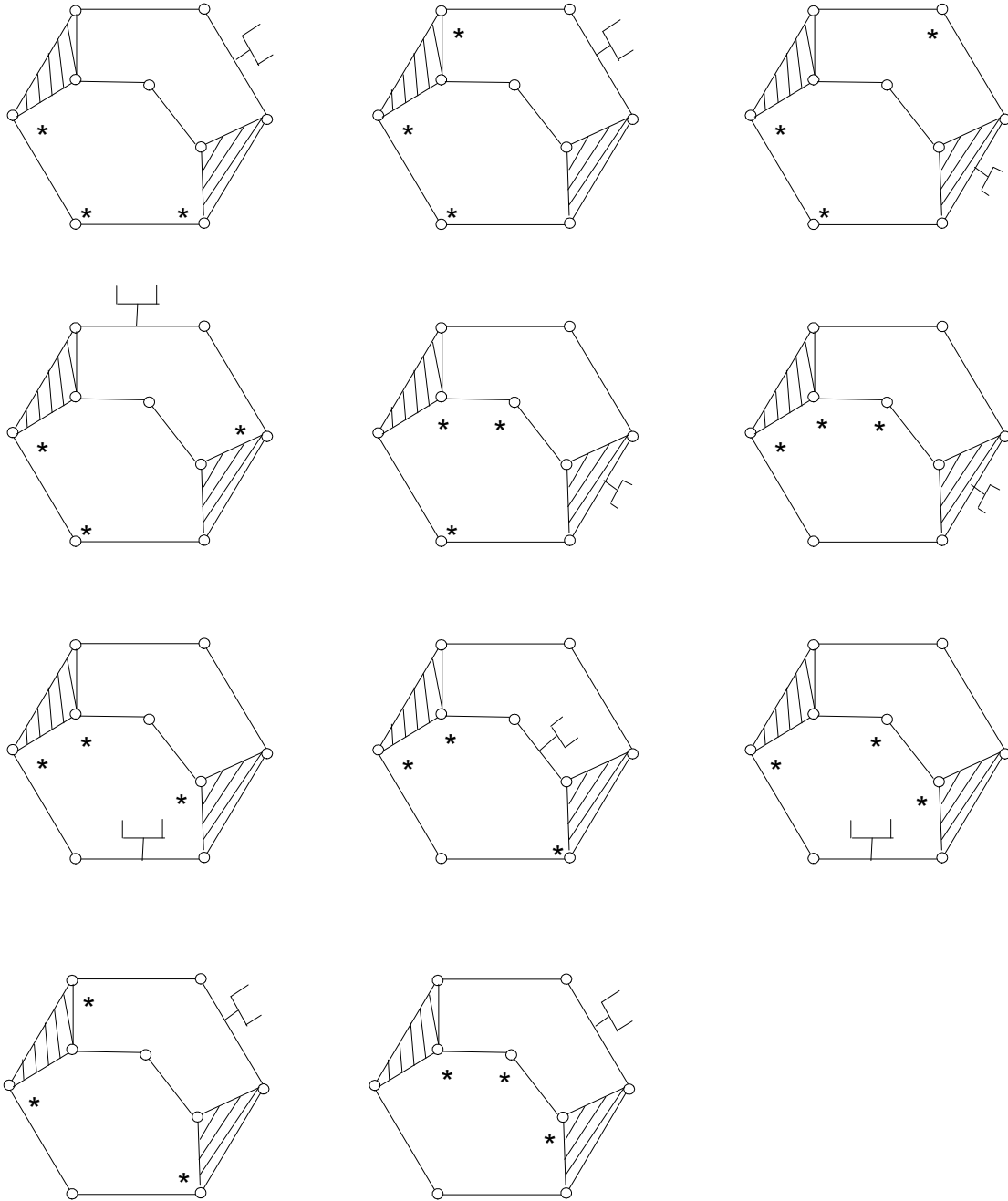
**A.2.2 Meccanismi a due gradi di libertà e sette membri**

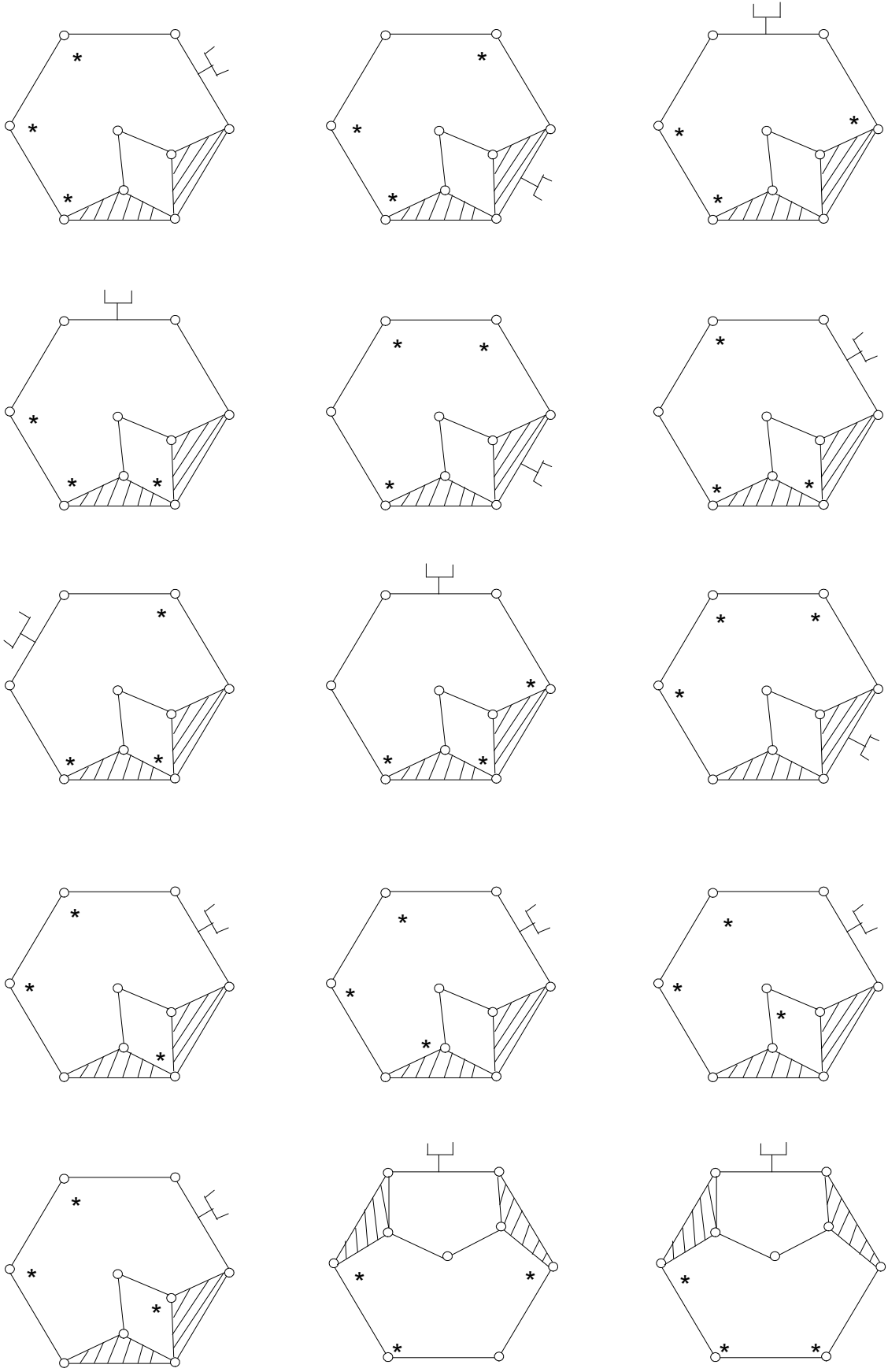


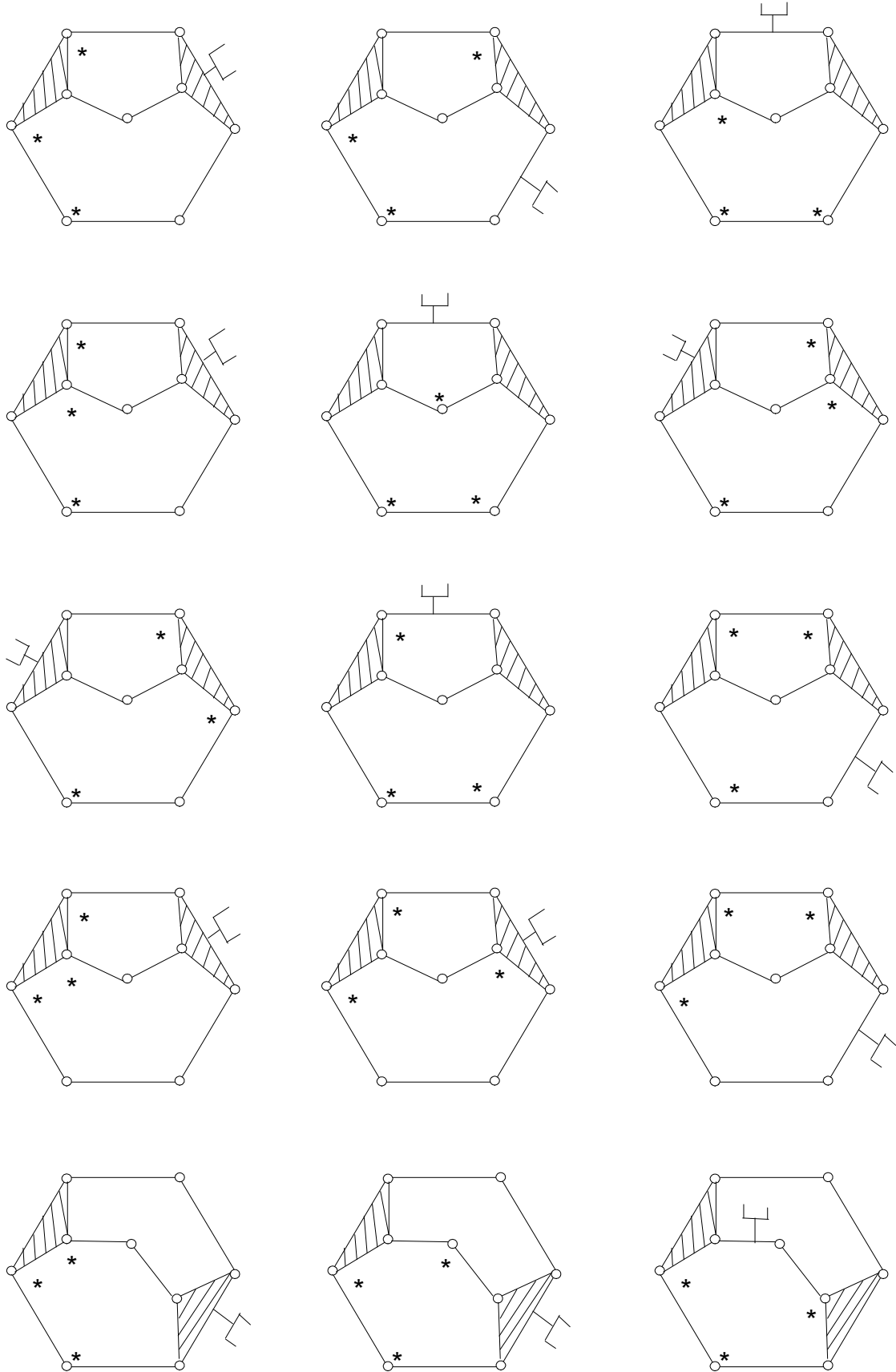
**A.2.3 Meccanismi a tre gradi di libertà e sei membri**



### A.2.4 Meccanismi a tre gradi di libertà e otto membri

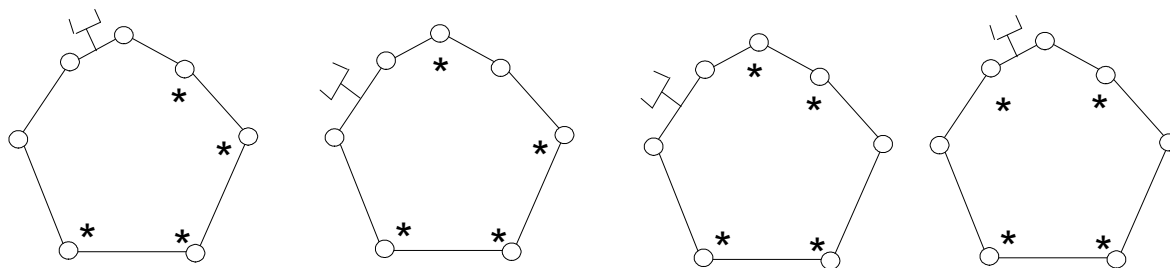








### A.2.5 Meccanismi a quattro gradi di libertà e sette membri



### A.2.6 Meccanismi a cinque gradi di libertà e otto membri

