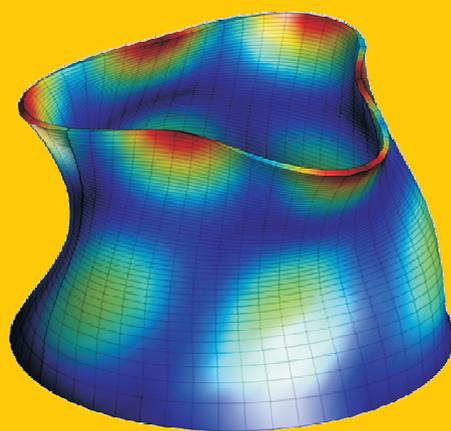
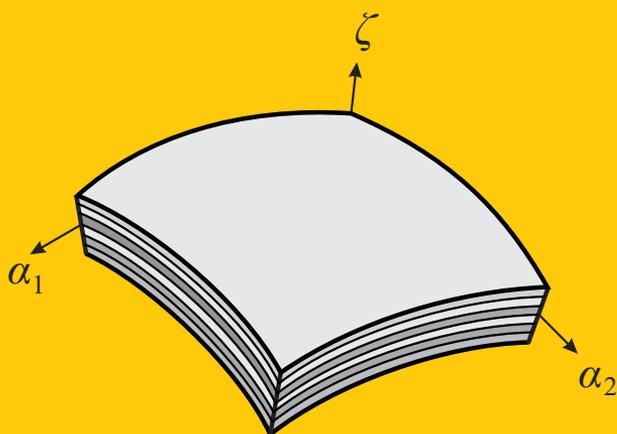
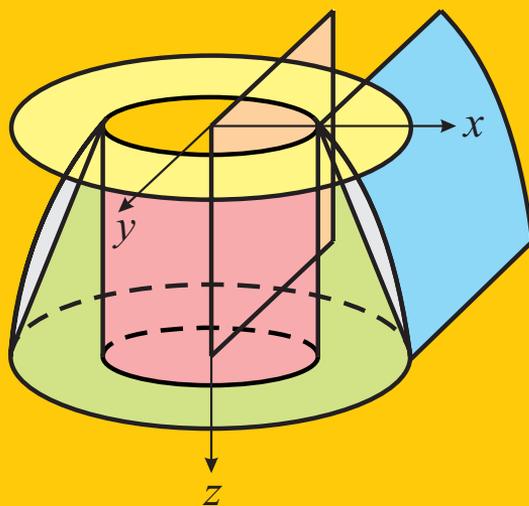
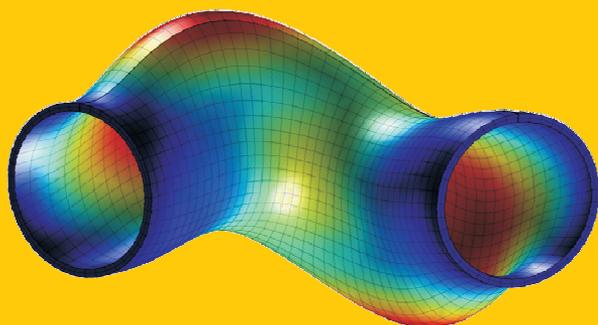


# Modellazione e Soluzione di Strutture a Guscio in Materiale Anisotropo

Dottorato di Ricerca in  
"Meccanica delle Strutture"  
XIX° Ciclo - ICAR/08



**Francesco Tornabene**

Relatore: Prof. Erasmo Viola



Facoltà di Ingegneria  
Università di Bologna



---

DOTTORATO DI RICERCA IN  
“MECCANICA DELLE STRUTTURE”

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Bologna  
Settore Scientifico Disciplinare: ICAR/08

XIX° Ciclo

FRANCESCO TORNABENE

**MODELLAZIONE E SOLUZIONE  
DI STRUTTURE A GUSCIO IN  
MATERIALE ANISOTROPO**



Dissertazione presentata per il conseguimento del titolo di  
Dottore di Ricerca in “Meccanica delle Strutture”

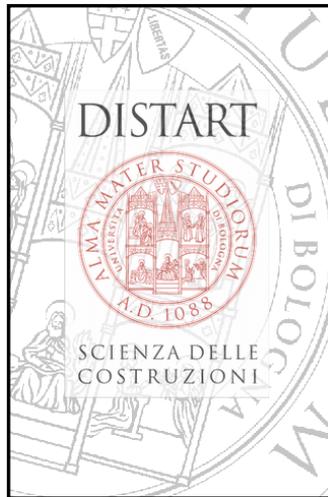
Coordinatore del Dottorato:

Prof. ERASMO VIOLA    Università di Bologna

Relatore:

Prof. ERASMO VIOLA    Università di Bologna

---



Tesi dottorale svolta presso il DISTART  
Scienza delle Costruzioni  
Università di Bologna

Bologna, 31 Marzo 2007

© F. Tornabene, 2007

---

---

*Ai miei genitori e alla mia famiglia*

*Al Professor Erasmo Viola*

*“La Pratica e la Teoria  
sono complementari,  
ma la Pratica senza Teoria  
non potrebbe  
andar che a tentoni”.*

*Francesco Tornabene*

---



# Indice

PREFAZIONE .....	XI
------------------	----

## 1 FONDAMENTI MATEMATICI DEL METODO GENERALIZZATO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE

ABSTRACT .....	1
----------------	---

### 1.1 QUADRATURA DIFFERENZIALE: LO SPAZIO VETTORIALE POLINOMIALE E

L'APPROSSIMAZIONE FUNZIONALE .....	3
1.1.1 INTRODUZIONE .....	3
1.1.2 GENESI DEL METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE .....	4
1.1.2.1 Premessa .....	4
1.1.2.2 La tecnica di Quadratura Differenziale di Bellman .....	5
1.1.3 LA LEGGE DI QUADRATURA DIFFERENZIALE .....	7
1.1.3.1 Quadratura integrale .....	8
1.1.3.2 Quadratura differenziale .....	9
1.1.4 LO SPAZIO VETTORIALE POLINOMIALE .....	10
1.1.4.1 Definizione di uno spazio vettoriale lineare .....	10
1.1.4.2 Proprietà di uno spazio vettoriale lineare .....	13
1.1.5 APPROSSIMAZIONE FUNZIONALE .....	15
1.1.5.1 Approssimazione polinomiale .....	15
1.1.5.2 Espansione in serie di Fourier .....	21
1.1.5.2.1 <i>Espansione di una funzione generica</i> .....	21
1.1.5.2.2 <i>Espansione di una funzione pari</i> .....	24
1.1.5.2.3 <i>Espansione di una funzione dispari</i> .....	25
1.2 FORMULAZIONE MATEMATICA .....	27
1.2.1 QUADRATURA DIFFERENZIALE POLINOMIALE .....	27
1.2.1.1 Calcolo dei coefficienti per le derivate del primo ordine .....	28
1.2.1.1.1 <i>Approcci di Bellman</i> .....	29
1.2.1.1.1.1 <i>Primo approccio di Bellman</i> .....	29

1.2.1.1.1.2 Secondo approccio di Bellman.....	30
1.2.1.1.2 Approccio di Quan e Chang.....	31
1.2.1.1.3 Approccio generalizzato di Shu.....	32
1.2.1.2 Calcolo dei coefficienti per le derivate dei ordine superiore al primo .....	38
1.2.1.2.1 Coefficienti di ponderazione per le derivate del secondo ordine.....	38
1.2.1.2.1.1 Approccio di Quan e Chang.....	38
1.2.1.2.1.2 Approccio generalizzato di Shu.....	39
1.2.1.2.2 Coefficienti per le derivate di ordine superiore: formule ricorsive di Shu .....	41
1.2.2 QUADRATURA DIFFERENZIALE BASATA SULL'ESPANSIONE DI FOURIER .....	44
1.2.3 APPROCCIO MEDIANTE MOLTIPLICAZIONE MATRICIALE .....	51
1.2.4 ESTENSIONE AL CASO MULTIDIMENSIONALE .....	53
1.2.5 TIPOLOGIE DI DISCRETIZZAZIONE .....	59
1.2.5.1 Tecnica dei $\delta$ -Sampling Points.....	63
1.2.5.2 Discretizzazione di un dominio lineare.....	66

## 2 MECCANICA DEI GUSCI MODERATAMENTE SPESSI IN MATERIALE ANISOTROPO

ABSTRACT .....	75
INTRODUZIONE .....	77
2.1 ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE .....	80
2.1.1 CURVE NELLO SPAZIO.....	80
2.1.1.1 Rappresentazione parametrica di una curva.....	80
2.1.1.2 Versore tangente.....	81
2.1.1.3 Piano osculatore e normale principale .....	83
2.1.1.4 Curvatura.....	84
2.1.2 SUPERFICI NELLO SPAZIO.....	85
2.1.2.1 Curve parametriche: prima forma fondamentale .....	85
2.1.2.2 Normale alla superficie .....	87
2.1.2.3 Seconda forma fondamentale .....	88
2.1.2.4 Curvature principali e direzioni principali .....	90

2.1.2.5	Derivate dei versori lungo le linee parametriche.....	93
2.1.2.6	Teorema fondamentale della teoria delle superfici.....	96
2.1.2.7	Curvatura Gaussiana.....	97
2.1.2.8	Classificazione delle superfici.....	99
2.1.2.8.1	<i>Classificazione basata sulla forma</i> .....	99
2.1.2.8.2	<i>Classificazione basata sulla curvatura</i> .....	100
2.1.2.8.3	<i>Classificazione basata sulla sviluppabilità</i> .....	101
2.1.2.9	Definizione di una superficie di rivoluzione.....	101
2.1.2.10	Definizione di una superficie cilindrica di traslazione.....	107
<b>2.2</b>	<b>TEORIA DI REISSNER-MINDLIN</b> .....	<b>109</b>
2.2.1	IPOTESI FONDAMENTALI.....	109
2.2.2	COORDINATE DI UN GUSCIO GENERICO.....	111
2.2.3	EQUAZIONI DI CONGRUENZA.....	114
2.2.3.1	Modello cinematico.....	114
2.2.3.2	Caratteristiche della deformazione.....	116
2.2.4	EQUAZIONI DI LEGAME.....	124
2.2.4.1	Leggi generalizzate di Hooke.....	124
2.2.4.1.1	<i>Materiali anisotropi</i> .....	127
2.2.4.1.2	<i>Simmetria Materiale</i> .....	128
2.2.4.1.3	<i>Materiali monoclini</i> .....	128
2.2.4.1.4	<i>Materiali ortotropi</i> .....	129
2.2.4.1.5	<i>Materiali trasversalmente isotropi</i> .....	131
2.2.4.1.6	<i>Materiali isotropi</i> .....	132
2.2.4.2	Materiali compositi.....	133
2.2.4.2.1	<i>Compositi fibrosi: la lamina unidirezionale</i> .....	134
2.2.4.2.2	<i>Compositi granulari: "functionally graded materials"</i> .....	138
2.2.4.2.3	<i>Trasformazione delle componenti di tensione e di deformazione</i> .....	141
2.2.4.2.4	<i>Trasformazione dei coefficienti elastici</i> .....	144
2.2.4.2.5	<i>Compositi laminati</i> .....	148
2.2.4.2.6	<i>Equazioni costitutive per la teoria del primo ordine (FSDT)</i> .....	150
2.2.4.3	Caratteristiche della sollecitazione.....	153
2.2.4.4	Laminati e schemi di laminazione.....	159
2.2.4.4.1	<i>Compositi costituiti da una singola lamina</i> .....	163
2.2.4.4.2	<i>Laminati simmetrici</i> .....	167

2.2.4.4.3 Laminati antisimmetrici .....	170
2.2.4.4.4 Laminati bilanciati e quasi isotropi .....	173
2.2.5 EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO.....	174
2.2.5.1 Vettore delle azioni esterne generalizzate .....	175
2.2.5.2 Equazioni del moto mediante il principio di Hamilton .....	176
2.2.5.3 Equazioni del moto dedotte mediante il metodo diretto .....	190
2.2.6 EQUAZIONI FONDAMENTALI .....	201
2.2.7 SPECIALIZZAZIONE DEI RISULTATI PER GUSCI DI RIVOLUZIONE .....	211
2.2.7.1 Equazioni di congruenza .....	213
2.2.7.2 Equazioni di legame .....	214
2.2.7.3 Equazioni indefinite di equilibrio.....	215
2.2.7.4 Equazioni fondamentali.....	215
2.2.7.5 Alcuni casi particolari .....	221
2.2.7.5.1 Gusci rotanti a velocità costante attorno ad un asse .....	221
2.2.7.5.2 Gusci appoggiati su suolo elastico e soggetti a forze viscoso.....	224

### 3 PRINCIPALI STRUTTURE A GUSCIO

<b>ABSTRACT</b> .....	227
<b>INTRODUZIONE</b> .....	229
<b>3.1 GUSCI DI RIVOLUZIONE A DOPPIA CURVATURA</b> .....	232
3.1.1 GUSCIO A MERIDIANO IPERBOLICO .....	237
3.1.2 GUSCIO A MERIDIANO A CATENARIA .....	243
3.1.3 GUSCIO A MERIDIANO CICLOIDALE.....	245
3.1.4 GUSCIO A MERIDIANO PARABOLICO .....	247
3.1.5 GUSCIO A MERIDIANO ELLITTICO E CIRCOLARE .....	250
<b>3.2 GUSCI DI RIVOLUZIONE A SINGOLA CURVATURA</b> .....	259
3.2.1 GUSCIO CONICO.....	259
3.2.2 GUSCIO CILINDRICO CIRCOLARE.....	265
<b>3.3 GUSCI DI TRASLAZIONE A SINGOLA CURVATURA</b> .....	269
<b>3.4 GUSCI DEGENERI</b> .....	275
3.4.1 PIASTRA CIRCOLARE .....	275

3.4.2 PIASTRA RETTANGOLARE .....279

## **4 SOLUZIONE NUMERICA VIA GDQM**

**ABSTRACT** .....285

**INTRODUZIONE**.....287

**4.1 ANALISI DINAMICA: VIBRAZIONI LIBERE** .....288

4.1.1 EQUAZIONI DI CAMPO E CONDIZIONI AL CONTORNO .....288

4.1.1.1 Discretizzazione delle equazioni del moto .....301

4.1.2 SOLUZIONE DEL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI .....313

4.1.3 APPLICAZIONI NUMERICHE .....315

**BIBLIOGRAFIA** .....355



## ***Prefazione***

La presente tesi dottorale scaturisce dall'esperienza maturata nel corso dei tre anni del Dottorato di Ricerca in “*Meccanica delle Strutture*”. Il titolo, *Modellazione e Soluzione di Strutture a Guscio in Materiale Anisotropo*, illustra il tema trattato e la prospettiva seguita nella scrittura della tesi in parola. Il presente elaborato, nato dall'interesse di approfondire temi in parte affrontati nel corso di Scienza delle Costruzioni e nella redazione della tesi di Laurea, si pone come obiettivo quello di analizzare il comportamento dinamico dei gusci moderatamente spessi in materiale anisotropo attraverso l'applicazione della tecnica di Quadratura Differenziale (DQ).

La tesi si articola in quattro capitoli, nei quali viene fornita nel dettaglio la teoria relativa alla statica e alla dinamica degli elementi strutturali analizzati e vengono presentati i risultati dell'applicazione della tecnica numerica adottata ai diversi problemi affrontati.

All'interno del primo capitolo sono esposti i fondamenti matematici su cui si basa il *Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale* (GDQ Method). In particolare, si illustrano le modalità secondo cui vengono calcolati i coefficienti di ponderazione e le tipologie di discretizzazione più usate nelle applicazioni. Si descrive il metodo di quadratura differenziale basato sui polinomi di Lagrange (Polynomial Differential Quadrature) e quello basato sull'espansione in serie di Fourier (Harmonic Differential Quadrature).

Partendo dalla *Geometria Differenziale*, fondamentale strumento per l'analisi delle strutture in esame, il secondo capitolo presenta la *Meccanica dei Gusci in Materiale Anisotropo*. Nella trattazione teorica si fa riferimento al campo di spostamento associato alla teoria di Reissner-Mindlin, nota nella letteratura scientifica anglosassone come “*First-order Shear Deformation Theory*” (FSDT). Una volta introdotte le equazioni di congruenza e le leggi di legame costitutivo, le equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni naturali al contorno sono dedotte mediante il principio di Hamilton e verificate attraverso il metodo diretto dell'equilibrio. Le equazioni del generico guscio a doppia curvatura, così ricavate e sintetizzate nello schema delle teorie fisiche, sono poi specializzate alle strutture di rivoluzione.

Per quanto riguarda le equazioni di legame elastico, a causa del crescente sviluppo dei materiali compositi, una particolare attenzione viene riservata ad una nuova classe di materiali. Come ben noto, i materiali compositi laminati risultano affetti da inevitabili

problemi di delaminazione dovuti alla presenza di interfacce in cui materiali diversi entrano a contatto. I “*functionally graded materials*” (FGM) invece sono caratterizzati da una variazione continua delle proprietà meccaniche, quali ad esempio il modulo elastico, la densità del materiale, il coefficiente di Poisson, lungo una particolare direzione. Tale caratteristica è ottenuta facendo variare in maniera graduale, lungo una direzione preferenziale, la frazione in volume dei materiali costituenti attraverso opportuni processi produttivi. I FGM risultano, pertanto, materiali non omogenei, tipicamente composti da un materiale metallico ed uno ceramico.

Il crescente interesse per questa nuova classe di materiali dalle elevate potenzialità applicative ha suggerito l’analisi statica e dinamica di strutture a guscio costituite da FGM. Nel quarto capitolo sono studiati gli effetti della variazione delle proprietà meccaniche sul campo di spostamenti e sulle frequenze di vibrazione. Inoltre, vengono considerate in dettaglio due differenti leggi di distribuzione dei materiali costituenti i FGM e i relativi effetti sul comportamento meccanico delle strutture.

Partendo dall’analisi dei gusci di rivoluzione a doppia curvatura, nel terzo capitolo vengono illustrate in dettaglio le equazioni per le restanti strutture a guscio oggetto del presente elaborato. In questo capitolo si mostra come, attraverso semplici relazioni geometriche, risulti possibile ricavare le equazioni governanti il problema elastico dei gusci conici e cilindrici, delle piastre circolari e rettangolari e dei cilindri di traslazione a profilo generico. Lo schema logico oggetto di questo capitolo ha permesso la redazione di un codice di calcolo, scritto in linguaggio MATLAB, in grado di studiare il comportamento sia statico che dinamico dei gusci laminati in materiale composito.

La tesi si completa con il quarto capitolo, in cui sono illustrati i risultati numerici ottenuti per le diverse tipologie strutturali considerate. Oltre alle differenti geometrie e a diversi schemi di laminazione oggetto delle analisi numeriche, vengono presentate anche le caratteristiche di convergenza e di stabilità della tecnica numerica utilizzata. Infine, la soluzione numerica GDQ viene confrontata non solo con i risultati presenti in letteratura, ma anche con quelli forniti e ricavati attraverso l’utilizzo di diversi programmi di calcolo strutturale.

# *Chapter 1*

## *Mathematical Fundamentals of the Generalized Differential Quadrature Method*

### **ABSTRACT**

The Differential Quadrature (DQ) method is a numerical technique for solving differential equations. The interest of researches in this procedure is increasing, due to its great simplicity and versatility. As shown in the literature [1-222], the DQ technique is a global method, which can obtain very accurate numerical results by using a considerably small number of grid points. Therefore, this simple direct procedure can be applied in a large number of cases to circumvent the difficulties of programming complex algorithms for the computer, as well as the excessive use of storage and computer time.

The Differential Quadrature technique was first presented and developed by Bellman and his associates in the early 1970s [5,6]. The DQ method, akin to the conventional integral quadrature method, approximates the derivative of a function at any location by a linear summation of all the functional values along a mesh line. The key procedure in the DQ application lies in the determination of the weighting coefficients.

Initially, Bellman and his associates [5,6] proposed two approaches to compute the weighting coefficients for the first order derivative of a function. The first method is based on an algebraic equation system, which turns out to be ill-conditioned. The second uses a simple algebraic formulation, but the coordinates of the grid points are fixed by the roots of

the shifted Legendre polynomials. In earlier applications of the DQ technique, Bellman's first method was usually applied because it allows the use of an arbitrary grid point distribution. However, since the algebraic equation system of this method is ill-conditioned, it can not be used with a large number of grid points (less than 13 points are usually used). This drawback limits the application of the DQ method.

The Generalized Differential Quadrature (GDQ) approach was developed by Shu [141,145,159] to improve the Differential Quadrature technique [5,6,135,136] for the computation of weighting coefficients entering into the linear algebraic system of equations. In the GDQ methodology, the weighting coefficients are not related to any special problem and only depend on the grid points and the derivative order. Furthermore, an arbitrary grid distribution can be chosen without any limitation.

The DQ technique was extended to a general case by Shu [141,145,159], using the analysis of a high order polynomial approximation and the analysis of a linear vector space. The GDQ method has overcome the difficulty of the DQ technique in solving a set of algebraic equations to obtain the weighting coefficients for the discretized derivatives.

Shu [141,159] presented a simple algebraic formulation to compute the weighting coefficients of the first order derivative without any restriction on the choice of the grid points, and a recurrence relationship to compute the weighting coefficients of the second and higher order derivatives when a function is approximated using the Lagrange polynomials (Polynomial Differential Quadrature (PDQ) method). Using the same analyses, Shu [149] also derived some simple algebraic formulations to compute the GDQ weighting coefficients when a function is approximated by a truncated Fourier series (Harmonic Differential Quadrature (HDQ) method).

In the last thirty years, many researches [1-222] have successfully applied the GDQ method with explicit computation of the weighting coefficients in many engineering fields, such as the free vibrations analysis of beams, plates and shells, as well as the wave guide and the incompressible viscous flow analysis. These applications include the use of the GDQ method in a single domain and multi-domains, and in the cartesian coordinate system and the curvilinear coordinate system.

In this chapter, the fundamentals of the DQ and GDQ technique, that is, the linear vector space analysis and the function approximation, are reported. Some properties of a linear vector space are reviewed, and the polynomial approximation and Fourier series expansion are introduced. The explicit computation of the weighting coefficients is described in detail and different types of grid point distribution are illustrated.

# *Capitolo 1*

## *Fondamenti matematici del Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale*

### **1.1 QUADRATURA DIFFERENZIALE: LO SPAZIO VETTORIALE POLINOMIALE E L'APPROSSIMAZIONE FUNZIONALE**

#### **1.1.1 INTRODUZIONE**

Il Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale, o *GDQ Method*, è una tecnica numerica introdotta nel 1971. Essa consente di risolvere, in maniera approssimata, le equazioni differenziali alle derivate totali e alle derivate parziali. Il metodo ha una rilevante valenza dal punto di vista ingegneristico, poiché molti problemi strutturali, termici, elettrici e fluidodinamici sono descritti da equazioni differenziali e da opportune condizioni al contorno.

Dato che la soluzione in forma chiusa delle equazioni differenziali associate ai problemi in argomento non risulta sempre possibile, per giungere a soluzioni di interesse pratico i ricercatori hanno sviluppato diversi metodi approssimati.

La difficoltà di determinare soluzioni analitiche, oppure esatte, dei problemi ingegneristici è spesso dovuta alle complesse condizioni al contorno associate al sistema

differenziale con cui viene modellato il fenomeno in esame. In molti casi la soluzione approssimata, definita *soluzione numerica* del problema, è rappresentata attraverso i valori che la soluzione assume in determinati punti del dominio (detti punti della griglia, della discretizzazione, della collocazione, oppure della mesh).

Il GDQ Method, è un'evoluzione dell'originale *DQ Method*, conosciuto nella lingua inglese come *Differential Quadrature Method*. Rispetto ad altre tecniche numeriche, il vantaggio del GDQ Method consiste nel raggiungimento di precisioni elevate con un minor sforzo computazionale. Quando si parla di altre tecniche numeriche si fa riferimento al Metodo delle Differenze Finite (o *FD Method*), al Metodo agli Elementi Finiti (o *FE Method*) ed al Metodo dei Volumi Finiti (o *FV Method*).

Nella meccanica strutturale le tecniche numeriche maggiormente impiegate sono il metodo alle differenze finite ed il metodo agli elementi finiti.

Il *Metodo di Quadratura Differenziale* appartiene ai metodi spettrali e pseudospettrali. E' interessante per la sua estrema semplicità applicativa e fornisce risultati soddisfacenti, analoghi a quelli ottenuti mediante metodologie numeriche più consolidate. In origine, detto metodo è nato come solutore diretto di sistemi, lineari e non lineari, di equazioni differenziali a coefficienti variabili.

Il cuore della tecnica numerica in parola consiste nell'approssimazione della derivata di ordine generico, di una qualsiasi funzione sufficientemente regolare, valutata in un punto del dominio di definizione. Tale approssimazione si esprime attraverso una combinazione lineare dei valori assunti dalla funzione medesima nei vari punti in cui è stato discretizzato il dominio stesso.

Il metodo agli Elementi Finiti è la più diffusa e sviluppata tecnica numerica, applicata nella maggior parte dei problemi di interesse scientifico. Permette di ottenere risultati molto buoni utilizzando un elevato numero di punti nodali. I metodi spettrali e pseudospettrali, invece, forniscono risultati interessanti anche facendo uso di pochi punti nodali.

## **1.1.2 GENESI DEL METODO DI QUADRATURA DIFFERENZIALE**

### **1.1.2.1 Premessa**

Le prime tecniche di discretizzazione numerica effettivamente valide vennero

sviluppate a partire dagli anni '50. In particolare, a tali anni risale lo sviluppo del Metodo delle Differenze Finite (FDM), mentre è relativa agli anni '60 l'affermazione del Metodo agli Elementi Finiti (FEM) e del Metodo dei Volumi Finiti (FVM). Tra queste tre procedure, quella più diffusa e sviluppata risulta sicuramente il FEM: un metodo basato su principi variazionali; il FDM e il FVM sono fondati, rispettivamente, sull'espansione in serie di Taylor e sull'applicazione diretta della legge di conservazione fisica alle celle finite.

A partire da queste procedure, sono state sviluppate altre tecniche all'interno della cosiddetta classe dei metodi spettrali. Tali schemi di discretizzazione sono noti con il nome di *metodi dei residui pesati*, i cui elementi fondamentali sono le *funzioni base* o *funzioni test*. Il Metodo agli Elementi Finiti ed i metodi spettrali utilizzano entrambi funzioni base per approssimare la soluzione. Tuttavia, mentre le funzioni base dei metodi spettrali hanno proprietà globali, quelle usate nel FEM hanno caratteristiche locali, ossia sono da specificare per ogni elemento in cui viene discretizzato il dominio, essendo quest'ultimo suddiviso in piccole porzioni. Le funzioni base con carattere locale risultano utili per l'analisi di geometrie complesse.

I metodi spettrali si presentano come tecniche di approssimazione sull'intero dominio e sono in grado di fornire soluzioni numeriche ottimali, impiegando un numero molto limitato di punti nodali.

### 1.1.2.2 La tecnica di Quadratura Differenziale di Bellman

Bellman e Casti (1971) svilupparono il cosiddetto *DQ Method* estendendo il concetto di "quadratura integrale". Essi proposero di approssimare la derivata parziale o totale di una qualsiasi funzione regolare, nell'intorno di un generico punto del suo dominio, con una sommatoria lineare pesata dei valori assunti dalla funzione stessa in tutti i punti in cui viene discretizzato il dominio lungo la direzione di derivazione. La chiave del metodo non è tanto la discretizzazione del dominio, quanto la definizione dei coefficienti di ponderazione per ogni ordine di derivazione. Bellman e i suoi collaboratori suggerirono due vie per determinare tali coefficienti relativi al primo ordine di derivazione. La prima consiste nel risolvere un sistema di equazioni algebriche. La seconda, invece, usa una semplice formulazione algebrica con l'obbligo di scegliere come punti della mesh le radici dei polinomi shiftati di Legendre.

Le prime applicazioni del DQM usarono proprio questi criteri per calcolare i coefficienti di ponderazione. In realtà vi fu un uso prevalente del primo, vista la possibilità di scegliere arbitrariamente le coordinate dei punti di griglia. Tuttavia, quando l'ordine del sistema delle equazioni algebriche è elevato, la matrice ad esso associata risulta mal condizionata. Questa è la ragione per cui le prime applicazioni del DQM vennero svolte usando solamente un numero di punti inferiore o, al massimo uguale, a 13. Per superare le difficoltà relative alla valutazione dei coefficienti di ponderazione vennero condotti diversi studi. Civan (1989), dimostrò che la difficoltà computazionale del primo approccio di Bellman e Casti era dovuta al carattere della matrice di Vandermonde. Tale matrice è associata al sistema di equazioni algebriche ed appare comunemente in molti problemi ingegneristici. La notorietà di tale matrice e del relativo sistema di equazioni aveva già permesso lo sviluppo di alcuni algoritmi speciali per la sua soluzione, tra cui è da ricordare quello di Björck e Pereyra (1970). L'algoritmo in parola permise di calcolare accuratamente i coefficienti di ponderazione con l'uso di più di 31 punti di griglia. Tuttavia, esso non consentiva ancora di valutare i coefficienti per gli ordini di derivazione superiore al primo.

Un ulteriore miglioramento nel calcolo dei coefficienti di ponderazione venne proposto da Quan e Chang (1989), assumendo quali funzioni base i polinomi interpolanti di Lagrange. In questo modo si aveva una formulazione esplicita per calcolare i coefficienti relativi alla discretizzazione del primo e del secondo ordine di derivazione.

Una soluzione ancora migliore del problema venne proposta da Shu (1991) e da Shu e Richards (1992) ed era basata sull'approssimazione polinomiale di ordine superiore e sull'analisi di uno spazio vettoriale lineare. Con quest'ultimo approccio, i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione sono determinabili attraverso una semplice formulazione algebrica senza alcuna restrizione sulla scelta dei punti di griglia. Inoltre, quelli relativi al secondo ed agli ordini superiori sono definibili mediante una relazione ricorsiva.

La proposta generalizzazione del calcolo di questi coefficienti ha portato a tradurre l'originale DQM nell'attuale Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale, o *GDQ Method*. Tutto il lavoro descritto è fondato sull'approssimazione polinomiale per cui, come conseguenza di questo fatto, il nominato GDQ Method (GDQM) può essere considerato un metodo di *quadratura differenziale basato su aspetti polinomiali* (PDQM). Ulteriori sviluppi nelle formulazioni algebriche per calcolare i coefficienti di ponderazione, qualora la funzione o la soluzione delle equazioni differenziali sia approssimabile tramite

l'espansione in serie di Fourier, sono state introdotte da Shu e Chew (1997) e Shu e Xue (1997). Le formulazioni del DQM sono diverse da quelle classiche polinomiali e tale approccio può essere denominato metodo di *quadratura differenziale* basato *sull'espansione in serie di Fourier* (FDQM).

Dall'analisi fatta, appare che i fondamenti matematici del GDQM siano da ricercare nell'analisi di uno spazio vettoriale lineare e nella approssimazione funzionale.

Nella letteratura scientifica e tecnica sono disponibili risultati che mostrano come, il GDQM si sia proposto come un metodo ad elevata potenzialità nel campo dell'analisi strutturale grazie alla sua precisione, efficienza, semplicità d'uso e al suo basso costo computazionale (Civan (1978); Civan e Sliepcevich (1983-84); Jang (1987); Bert (1988); Jang (1989)).

Nelle applicazioni precedenti le equazioni differenziali non superavano il secondo ordine; inoltre esse non avevano più di una condizione al contorno per ogni bordo del dominio di definizione. Nel caso di travi snelle e piastre sottili, invece, l'equazione differenziale risulta essere del quarto ordine e le condizioni di vincolo sono due per ogni bordo. Si dice anche che le condizioni di vincolo sono ridondanti, in quanto l'equazione del problema è una, mentre le condizioni al contorno sono due. L'implementazione di dette condizioni richiede pertanto una particolare attenzione (Striz, 1988; Loo, 1991; Feng e Bert, 1992; Shu, 1991). Le problematiche connesse alla meccanica strutturale contribuirono al perfezionamento della metodologia in parola, come evidenziato dal notevole numero di pubblicazioni degli ultimi anni. La tecnica in discorso è stata applicata anche all'instabilità di travi e piastre, all'analisi dinamica di archi e gusci a doppia curvatura.

### **1.1.3 LA LEGGE DI QUADRATURA DIFFERENZIALE**

Come ben noto, il termine "quadratura" è associato alla valutazione approssimata di un integrale. Viene mostrato come l'idea convenzionale della *quadratura integrale* possa essere utilizzata in modo semplice e sistematico anche per la soluzione computazionale di equazioni differenziali. A tal fine, occorre introdurre il concetto di *quadratura differenziale*.

### 1.1.3.1 Quadratura Integrale

Un problema assai frequente in ambito scientifico ed ingegneristico riguarda la valutazione dell'integrale di una funzione  $f(x)$  nell'intervallo finito  $[a, b]$ . Se esiste una funzione integrale  $F(x)$  tale che  $dF(x)/dx = f(x)$ , allora il valore di questo integrale è fornito da  $F(b) - F(a)$ . Sfortunatamente, nella soluzione di problemi pratici è difficile ottenere un'espressione esplicita per la funzione integrale  $F(x)$ , dal momento che i valori di  $f(x)$  possono essere noti solo in determinati punti del dominio.

Come ben noto, l'integrale della funzione  $f(x)$  su  $[a, b]$  in figura 1.1 rappresenta l'area sottesa dalla funzione integranda  $f(x)$ . In generale, l'integrale può essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_a^b f(x) dx \cong w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_N f_N = \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (1.1)$$

dove  $w_i$  sono i coefficienti peso e  $f(x_i)$  rappresentano i valori funzionali nei punti  $x_i$  in cui è stato suddiviso il dominio. In altre parole, si è discretizzato il dominio di definizione di  $f(x)$  in  $N$  punti nodali  $x_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , che costituiscono il *reticolo della discretizzazione*.

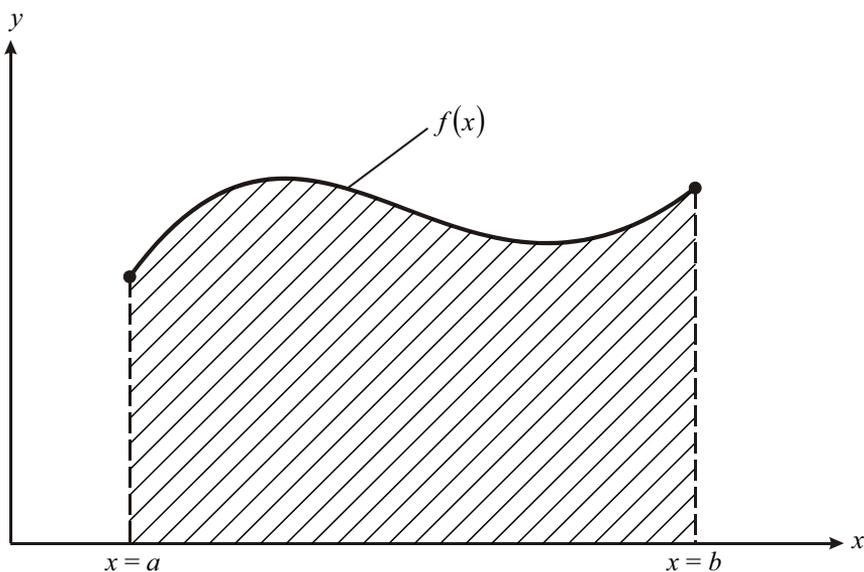


Figura 1.1 – Integrale di  $f(x)$  in un intervallo finito  $[a, b]$ .

L'equazione (1.1) prende il nome di *quadratura integrale*. Solitamente, i punti nodali sono selezionati in modo da fornire una distribuzione uniforme degli stessi nel relativo dominio. Come si vedrà in seguito, la forma di questa relazione è importante dal momento che rappresenta la scrittura con cui si possono identificare tutte le regole di quadratura convenzionale.

### 1.1.3.2 Quadratura Differenziale

Si consideri il seguente problema monodimensionale in cui una funzione  $f(x)$  sufficientemente regolare sia definita nell'intervallo chiuso  $[a, b]$  e si supponga che esso sia discretizzato in  $N$  punti di coordinate  $a = x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N = b$  (figura 1.2):

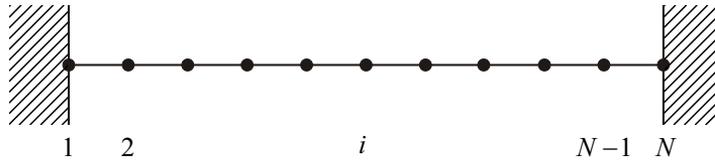


Figura 1.2 – Rappresentazione del problema monodimensionale.

Seguendo il concetto di quadratura integrale esposto in precedenza, Bellman e Casti (1971) estesero la legge di quadratura integrale (1.1) al calcolo delle derivate di una funzione  $f(x)$ . Essi suggerirono che la derivata del primo ordine della funzione  $f(x)$ , fatta rispetto ad  $x$  nel generico punto nodale  $x_i$ , può essere approssimata attraverso una sommatoria lineare pesata di tutti i valori che la funzione stessa assume nell'intero dominio:

$$f'(x_i) = f^{(1)}(x_i) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2)$$

dove le costanti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  sono i *coefficienti di ponderazione* della sommatoria,  $f(x_j)$  rappresentano i valori della funzione nei punti  $x_j$  in cui è stato suddiviso il dominio e  $f'(x_i)$ , oppure  $f^{(1)}(x_i)$ , indica la derivata del primo ordine di  $f(x)$  in  $x_i$ . I coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  sono contraddistinti dai pedici  $i$  e  $j$ . Il pedice  $i$  indica il punto del dominio in cui si calcola la derivata generica. L'equazione (1.2) prende il nome di *quadratura differenziale* (DQ) e definisce, contestualmente, un *operatore lineare*.

Da questa semplice applicazione, si può già intuire come le fasi fondamentali della tecnica numerica in narrativa siano la *discretizzazione* del dominio in  $N$  punti nodali (definizione della mesh) e la *valutazione* dei coefficienti di ponderazione della sommatoria. Il punto chiave della procedura è la definizione dei coefficienti di ponderazione.

In seguito, verrà mostrata la procedura per la determinazione dei coefficienti di ponderazione attraverso l'analisi di uno spazio vettoriale lineare e l'analisi dell'approssimazione funzionale. E' opportuno premettere, però, alcuni concetti e proprietà che sono alle base delle successive considerazioni.

### 1.1.4 LO SPAZIO VETTORIALE POLINOMIALE

In questo paragrafo, sono richiamati concetti e proprietà di uno spazio vettoriale lineare, utili per il calcolo dei coefficienti di ponderazione (1.2).

#### 1.1.4.1 Definizione di uno spazio vettoriale lineare

Uno *spazio vettoriale lineare* risulta definito in un campo  $F$  formato da un insieme di elementi chiamati *scalari* e da due operazioni quali l'*addizione* "+" e la *moltiplicazione* "×" (o "·"). Tali operazioni definite su  $F$ , devono soddisfare le seguenti condizioni:

- 1) Ad ogni coppia di elementi scalari  $a, b$  di  $F$ , corrispondono due elementi  $a + b$  e  $ab$  (o  $a \cdot b$ ) detti rispettivamente *somma* e *prodotto* di  $a, b$ .
- 2) Le operazioni di addizione e di moltiplicazione godono entrambe della *proprietà commutativa*; ossia, per ogni coppia di scalari  $a, b$  di  $F$ , si ha:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba$$

- 3) L'addizione e la moltiplicazione godono entrambe della *proprietà associativa*; ossia, per ogni terna di scalari  $a, b, c$  di  $F$ , risulta:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$$

- 4) La moltiplicazione gode della *proprietà distributiva* rispetto all'addizione; ossia, per ogni terna di scalari  $a, b, c$  di  $F$ , si ha:

$$a(b + c) = (ab) + (ac)$$

- 5) Il campo  $F$  contiene due elementi  $0$  (*elemento neutro dell'addizione*) e  $1$  (*elemento neutro della moltiplicazione*) tali che, per ogni scalare  $a$  di  $F$ :

$$a + 0 = a$$

$$a1 = a$$

6) Per ogni elemento  $a$  di  $F$ , esiste uno scalare  $b$  (detto *opposto*) di  $F$  tale che:

$$a + b = 0$$

7) Per ogni elemento  $a$  di  $F$  che non sia lo  $0$ , esiste uno scalare  $b$  (detto *inverso*) di  $F$  tale che:

$$ac = 1$$

In base alle caratteristiche appena elencate, si può osservare che l'insieme di oggetti costituenti il campo può essere un qualunque elenco di elementi; un elenco esteso nella misura in cui le due operazioni riescono ad essere ancora definite per tali scalari. I campi che verranno trattati sono quello dei numeri reali e quello delle funzioni razionali a coefficienti reali. L'addizione e la moltiplicazione all'interno di questi due campi sono definite nella maniera usuale.

Prima di introdurre il concetto di spazio vettoriale, si consideri un piano geometrico bidimensionale. Una volta scelta la sua origine, ogni punto appartenente al piano stesso può essere rappresentato attraverso un vettore posizione, definito da una direzione, da un'intensità e da un verso. Se all'interno del piano si prendono in esame due vettori, essi possono essere sommati, ma il loro prodotto non risulta definito. Usando la terminologia matematica, un piano che presenta tali caratteristiche viene chiamato *spazio lineare*, o *spazio vettoriale*, o *spazio vettoriale lineare* ed è indicato con la lettera  $V$ . Esso è formato da una serie di elementi chiamati *vettori*, da un campo  $F$  e da due operazioni dette *addizione vettoriale* e *moltiplicazione scalare*. Tali operazioni sono definite in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

1) Ad ogni coppia di vettori  $\alpha, \beta$  di  $V$ , corrisponde un vettore  $\alpha + \beta$  chiamato *somma* di  $\alpha$  e  $\beta$ .

2) L'addizione è un'operazione che gode della *proprietà commutativa*; ossia, per ogni coppia di vettori  $\alpha, \beta$  di  $V$ , risulta:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

3) L'addizione è un'operazione che gode della *proprietà associativa*; ossia, per ogni terna di vettori  $\alpha, \beta, \gamma$  di  $V$ , si ha:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

4) Lo spazio  $V$  contiene un vettore indicato con  $\mathbf{0}$ , chiamato *vettore nullo* (oppure origine), tale che, per ogni vettore  $\alpha$  di  $V$ , si ha:

$$\alpha + \mathbf{0} = \alpha$$

5) Per ogni vettore  $\alpha$  di  $V$ , esiste un vettore  $\beta$  di  $V$  tale che:

$$\alpha + \beta = \mathbf{0}$$

6) Per ogni elemento  $c$  di  $F$  e per ogni vettore  $\alpha$  di  $V$ , esiste un corrispondente vettore  $c\alpha$  di  $V$  chiamato *prodotto scalare* di  $c$  ed  $\alpha$ .

7) La moltiplicazione scalare è un'operazione che gode della *proprietà associativa*; ossia, per ogni coppia  $a, b$  di  $F$  e per ogni vettore  $\gamma$  di  $V$ , risulta:

$$(ab)\gamma = a(b\gamma)$$

8) La moltiplicazione scalare è un'operazione che gode della *proprietà distributiva rispetto all'addizione vettoriale*; ossia, per ogni elemento  $a$  di  $F$  e per ogni coppia di vettori  $\beta, \gamma$  di  $V$ , si ha:

$$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$$

9) La moltiplicazione scalare è un'operazione che gode della *proprietà distributiva rispetto all'addizione scalare*; ossia, per ogni coppia di elementi  $a, b$  di  $F$  e per ogni vettore  $\gamma$  di  $V$ , risulta:

$$(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$$

10) Per ogni vettore  $\alpha$  di  $V$  si ha:

$$1\alpha = \alpha$$

essendo 1 un elemento di  $F$ .

Le proprietà appena elencate, caratterizzano lo spazio  $V$  come spazio vettoriale lineare, rispetto alle operazioni di addizione vettoriale e moltiplicazione scalare.

Si consideri l'insieme  $\{P_N(x)\}$  di tutti i polinomi di grado inferiore a  $N$  con fattori reali  $c_i$ :

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i x^{i-1} \quad (1.3)$$

Eseguendo l'addizione vettoriale e la moltiplicazione scalare con riferimento alla sommatoria (1.3), si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i x^{i-1} + \sum_{i=1}^N d_i x^{i-1} &= \sum_{i=1}^N (c_i + d_i) x^{i-1} \\ a \left( \sum_{i=1}^N c_i x^{i-1} \right) &= \sum_{i=1}^N (ac_i) x^{i-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Da quanto è stato detto, è facile verificare che l'insieme  $\{P_N(x)\}$  risulta essere uno spazio vettoriale lineare.

### 1.1.4.2 Proprietà di uno spazio vettoriale lineare

Vengono elencate le proprietà di uno spazio vettoriale lineare che stanno alla base dello sviluppo della quadratura differenziale.

- *Lineare Indipendenza.* Un insieme di vettori  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  di uno spazio vettoriale lineare  $V$  (definito su un campo  $F$ ) si dice *linearmente indipendente*, se la relazione:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_N\alpha_N = 0 \quad (1.5)$$

risulta soddisfatta se e solo se  $c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$ , dove  $c_1, c_2, \dots, c_N$  sono elementi appartenenti ad  $F$ .

In base a tale definizione si può notare che la lineare indipendenza è frutto non solo dei vettori scelti, ma anche del campo  $F$ . Inoltre, da questa relazione risulta che se i vettori  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  sono linearmente dipendenti, uno di essi può essere scritto come combinazione lineare dei restanti.

- *Dimensione di uno spazio vettoriale lineare.* Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti all'interno di uno spazio vettoriale lineare  $V$  definisce la *dimensione dello spazio vettoriale lineare* stesso.
- *Base o vettori base.* Un insieme di vettori linearmente indipendenti assunti in uno spazio vettoriale lineare  $V$  costituisce una *base di  $V$*  se un qualsiasi vettore di  $V$  può essere espresso come combinazione lineare dei suddetti *vettori di base*. Ebbene, in uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale ( $V_N$ ), ogni insieme di vettori linearmente indipendenti definisce una base (composta da  $N$  vettori). In altre parole, una volta scelta la base di uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale ( $V_N$ ), ogni vettore di  $V_N$  può essere rappresentato in modo univoco tramite una serie di scalari  $d_1, d_2, \dots, d_N$  nel campo  $F$ .
- *Cambio di base.* In uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale ( $V_N$ ) esistono molti insiemi di vettori di base ed ognuno di essi può essere univocamente espresso in funzione di un altro insieme di vettori base. Ad esempio, se si considerano due insiemi di vettori base quali  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  e  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  di  $V_N$ , tale proprietà indica che:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} \boldsymbol{\beta}_j \quad , \quad \boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \boldsymbol{\alpha}_j \quad (1.6)$$

per  $i = 1, 2, \dots, N$  e dove  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  sono elementi scalari del campo scalare  $F$ .

Questa proprietà può essere facilmente derivata dalla proprietà precedente.

- *Operatore lineare.* Una funzione viene definita *operatore lineare* se e solo se:

$$L(a_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + a_2 \boldsymbol{\alpha}_2) = a_1 L(\boldsymbol{\alpha}_1) + a_2 L(\boldsymbol{\alpha}_2) \quad (1.7)$$

per qualunque coppia  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$  dello spazio  $V_N$  e per qualsiasi coppia  $a_1, a_2$  del campo  $F$ .

In base a tale proprietà è facile dimostrare che l'equazione (1.2) definisce un operatore lineare poiché:

$$\left. \frac{\partial (a_1 f_1 + a_2 f_2)}{\partial x} \right|_{x=x_j} \cong a_1 \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f_1(x_j) + a_2 \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f_2(x_j) \quad (1.8)$$

dove  $f_1(x)$  ed  $f_2(x)$  rappresentano due funzioni monodimensionali.

- *Operatore lineare e vettori di base in uno spazio vettoriale lineare.* In uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale  $V_N$ , siano  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$  i vettori di base. Se tutti questi vettori soddisfano la proprietà dell'operatore lineare, allo stesso modo essa sarà verificata da ogni vettore dello spazio  $V_N$ . Infatti, se tale insieme di vettori di base soddisfa l'equazione lineare:

$$L(\boldsymbol{\alpha}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.9)$$

e si considera  $\boldsymbol{\alpha} = a_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + a_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + a_N \boldsymbol{\alpha}_N$  come un vettore arbitrario dello spazio vettoriale lineare  $V_N$ , in base all'equazione (1.7) si ha:

$$L(\boldsymbol{\alpha}) = L\left(\sum_{i=1}^N a_i \boldsymbol{\alpha}_i\right) = \sum_{i=1}^N a_i L(\boldsymbol{\alpha}_i) = 0 \quad (1.10)$$

- *Operatore lineare e differenti basi in uno spazio vettoriale lineare.* In uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale  $V_N$ , se un insieme di vettori di base soddisfa la proprietà dell'operatore lineare, allo stesso modo essa sarà verificata da un altro insieme diverso dal precedente. Ad esempio, si considerino  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_N$  e  $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_N$  due basi di  $V_N$  e si supponga, inoltre, che il primo dei due insiemi soddisfi l'equazione (1.9). Se si sfruttano le equazioni (1.6) e (1.7) si ottiene:

$$L(\boldsymbol{\beta}_i) = L\left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \boldsymbol{\alpha}_j\right) = \sum_{j=1}^N a_{ij} L(\boldsymbol{\alpha}_j) = 0 \quad (1.11)$$

L'equazione (1.11) indica che anche il secondo insieme di vettori base soddisfa l'equazione lineare.

### 1.1.5 APPROSSIMAZIONE FUNZIONALE

Come già affermato in precedenza, non sempre è possibile esprimere in forma chiusa la soluzione di una *equazione differenziale alle derivate parziali* (PDE). Tuttavia, mediante tecniche numeriche (quali ad esempio il DQM) è possibile ottenere soluzioni approssimate.

La soluzione di una PDE si può esprimere mediante una *funzione polinomiale*, oppure attraverso una *funzione armonica*. Quando si ricerca una soluzione con tecniche numeriche, l'approssimazione funzionale da adottare può essere *un'approssimazione polinomiale di ordine superiore*, oppure *un'espansione in serie di Fourier* (funzione armonica). Inoltre, si può osservare che esiste uno stretto legame tra la soluzione e la funzione approssimante adottata.

#### 1.1.5.1 Approssimazione polinomiale

L'approssimazione polinomiale si basa sul *primo teorema di Weierstrass* per il quale, se  $f(x)$  è una funzione continua a valori reali definita nell'intervallo chiuso  $[a, b]$ , allora esiste una sequenza di polinomi  $P_N(x)$  che converge uniformemente a  $f(x)$ , al tendere di  $N$  all'infinito. Tale teorema può essere anche formulato nel seguente modo: *se  $f(x)$  è una funzione continua a valori reali definita nell'intervallo chiuso  $[a, b]$  allora, per ogni  $\varepsilon$  maggiore di zero, esiste un polinomio di grado  $N = N(\varepsilon)$  tale che:*

$$|f(x) - P_N(x)| \leq \varepsilon \quad (1.12)$$

Nelle applicazioni ingegneristiche, questo teorema consente di affermare che, se  $f(x)$  rappresenta la soluzione di una PDE, allora tale soluzione può essere approssimata da un polinomio di grado inferiore ad  $N$ . La forma convenzionale per esprimere questa approssimazione risulta essere:



$$\mathcal{L}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) = \prod_{j=1}^N (x - x_j)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_k) = (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_N) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (x_k - x_j)$$

dove  $\mathcal{L}^{(1)}(x_k)$  rappresenta la derivata del primo ordine del polinomio  $\mathcal{L}(x)$  valutata nel punto  $x_k$ . Dall'equazione (1.16) appare che, l'approssimazione polinomiale risulta definita una volta noti i valori  $f(x_k)$  negli  $N$  punti della discretizzazione. Il polinomio  $P_N(x)$  è di grado inferiore ad  $N$  e soddisfa le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare. Pertanto, esso può essere considerato come un polinomio appartenente allo spazio vettoriale polinomiale  $V_N$ .

Per quel che riguarda i termini  $l_k(x)$ , con  $k = 1, 2, \dots, N$ , essi sono funzioni per cui vale la seguente proprietà:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases} \quad (1.17)$$

Tali termini sono funzioni e quindi possono essere considerati vettori (polinomi) linearmente indipendenti dello spazio vettoriale  $V_N$ . E' lecito considerarli come una ulteriore base dello spazio vettoriale  $V_N$ .

Il polinomio approssimante  $P_N(x)$  può anche essere determinato attraverso l'*interpolazione polinomiale di Newton*:

$$P_N(x) = a_1 + \sum_{k=2}^N a_k (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{k-1}) \quad (1.18)$$

Tale polinomio soddisfa le operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare, oltre ad essere di grado inferiore ad  $N$ . Queste sono le condizioni necessarie affinché esso appartenga allo spazio vettoriale polinomiale  $V_N$ . All'interno della precedente espressione si possono individuare fattori che sono funzioni di  $x$ :

$$n_1(x) = 1, \quad n_k(x) = n_{k-1}(x)(x - x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (1.19)$$

L'insieme di vettori linearmente indipendenti (1.19) può essere considerato base di  $V_N$ . Si osservi che nell'equazione (1.18) vi sono anche costanti  $a_k$  che possono essere espresse in termini dei valori della funzione nei punti nodali. Dall'analisi dei coefficienti  $a_k$  si può notare come  $a_N$  sia identico al fattore relativo alla potenza più elevata del polinomio

$P_N(x)$  dell'equazione (1.16) e che:

$$a_1 + \sum_{k=2}^m a_k (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$$

sia un polinomio di grado  $m-1$  che soddisfa i valori funzionali nei punti  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Dall'equazione (1.16) si ricava direttamente:

$$a_m = \sum_{k=1}^m \frac{f(x_k)}{\mathcal{L}_m^{(1)}(x_k)}, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (1.20)$$

dove:

$$\mathcal{L}_m^{(1)}(x_k) = (x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_N) = \prod_{j=1, j \neq k}^m (x_k - x_j) \quad (1.21)$$

Se l'approssimazione polinomiale viene espressa usando altre forme, i vettori di base che ne derivano possono essere differenti da quelli considerati precedentemente.

**Tabella 1.1** – Radici dei polinomi shiftati di Legendre  $L_N^*(\bar{x})$ .

$\bar{x}$	$N = 7$	$N = 9$
$\bar{x}_1$	0.02544604	0.01591988
$\bar{x}_2$	0.12923440	0.08198445
$\bar{x}_3$	0.29707742	0.19331428
$\bar{x}_4$	0.50000000	0.33787329
$\bar{x}_5$	0.70292257	0.50000000
$\bar{x}_6$	0.80076559	0.66212671
$\bar{x}_7$	0.97455395	0.80668572
$\bar{x}_8$	-	0.91801555
$\bar{x}_9$	-	0.98408012

Ad esempio, si consideri il polinomio approssimante definito attraverso l'*interpolazione polinomiale di Legendre*:

$$P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k L_{k-1}(x) \quad (1.22)$$

dove  $c_k$  sono costanti,  $L_{k-1}(x)$  è il *polinomio di Legendre* di grado  $k-1$ . In questo caso i diversi polinomi di Legendre rappresentano un insieme di vettori di base. Dal momento che i polinomi stessi sono le autofunzioni di un *problema singolare di Sturm-Liouville*, essi possono venire definiti risolvendo quest'ultimo. In particolare, tale problema assume la seguente forma differenziale:

$$(1-x^2)L_i^{(2)}(x) - 2xL_i^{(1)}(x) + i(i+1)L_i(x) = 0 \quad (1.23)$$

dove  $L_i^{(1)}(x)$  e  $L_i^{(2)}(x)$  rappresentano, rispettivamente, le derivate del primo e del secondo ordine del polinomio  $L_i(x)$ . Dalla sua soluzione si può notare come i vari polinomi di Legendre soddisfino la seguente relazione ricorsiva essendo  $L_0(x) = 1$  e  $L_1(x) = x$ :

$$L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1}xL_i(x) - \frac{i}{i+1}L_{i-1}(x) \quad (1.24)$$

Qui di seguito sono rappresentati i primi sette polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ L_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ L_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned} \quad (1.25)$$

I polinomi di Legendre sono polinomi ortogonali nell'intervallo  $[-1,1]$  rispetto al peso  $\omega(x) = 1$  e la *condizione di ortogonalità* è espressa tramite la relazione:

$$\int_{-1}^{+1} L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (1.26)$$

Per la determinazione dei polinomi di Legendre  $L_i^*(\bar{x})$  shiftati nell'intervallo  $[a,b]$ , occorre fare riferimento alla seguente trasformazione di variabili:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}[(b-a)x + (b+a)] \quad (1.27)$$

che fa corrispondere all'intervallo  $[-1,1]$  l'intervallo  $[a,b]$ . Ponendo  $x = -1$ ,  $x = 1$  e  $x = 0$ , risulta  $\bar{x} = a$ ,  $\bar{x} = b$  e  $\bar{x} = (b+a)/2$ , rispettivamente. In simboli si ha:  $x \in [-1,1] \Rightarrow \bar{x} \in [a,b]$ .

Nel caso  $a = 0$  e  $b = 1$ , dalla (1.27) risulta:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}[x+1] \quad \Rightarrow \quad x = 2\bar{x} - 1 \quad (1.28)$$

Un generico polinomio di Legendre  $L_i^*(\bar{x})$  shiftato nell'intervallo  $[0,1]$  può essere ottenuto dal corrispondente polinomio di Legendre di pari grado con la seguente relazione:

$$L_i[x] = L_i[2\bar{x} - 1] = L_i^*[\bar{x}] \quad (1.29)$$

Attraverso il cambio di coordinate, i primi quattro polinomi shiftati di Legendre si possono scrivere a partire dai polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} L_0^*(\bar{x}) &= 1 \\ L_1^*(\bar{x}) &= 2\bar{x} - 1 \\ L_2^*(\bar{x}) &= 6\bar{x}^2 - 6\bar{x} + 1 \\ L_3^*(\bar{x}) &= 20\bar{x}^3 - 30\bar{x}^2 + 12\bar{x} - 1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

La tabella 1.1 mostra le radici  $\bar{x}_i$  di  $L_N^*(\bar{x})$ , polinomio shiftato di Legendre di grado  $N$ , per  $N = 7$  e  $N = 9$ .

In modo analogo, quando il polinomio viene definito mediante l'*interpolazione polinomiale di Chebyshev*:

$$P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k T_{k-1}(x) \quad (1.31)$$

dove  $c_k$  sono costanti,  $T_{k-1}(x)$  è il *polinomio di Chebyshev* di grado  $k-1$ . Anche i polinomi di Chebyshev sono polinomi ortogonali e costituiscono un insieme di vettori di base. Essi rappresentano le autofunzioni di un *problema singolare di Sturm-Liouville* che assume la seguente espressione:

$$\frac{\partial(\sqrt{1-x^2}T_i^{(1)}(x))}{\partial x} + \frac{i^2 T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (1.32)$$

dove  $T_i^{(1)}(x)$  rappresenta la derivata prima del polinomio  $T_i(x)$ . Dalla sua soluzione si può notare come i vari polinomi di Chebyshev soddisfino la seguente relazione ricorsiva:

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x) \quad (1.33)$$

essendo  $T_0(x) = 1$  e  $T_1(x) = x$ . E' possibile scrivere il polinomio  $T_i(x)$  in una forma diversa senza ricorrere a relazioni ricorsive:

$$T_k(x) = \cos k\theta, \quad \theta = \arccos(x) \quad (1.34)$$

In base alle precedenti considerazioni si evince che in uno spazio vettoriale polinomiale  $V_N$ , ci possono essere diversi insiemi di vettori di base. Gli insiemi di vettori di base, maggiormente utilizzati, sono:

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.35)$$

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x-x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.36)$$

$$p_1(x) = 1, \quad p_k(x) = p_{k-1}(x)(x-x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (1.37)$$

Si può osservare che l'insieme di vettori di base (1.36) dipende dalla distribuzione dei punti nodali, ovvero dalle coordinate della discretizzazione. Nel caso in cui tali coordinate siano assunte quali radici del polinomio di Legendre  $L_N(x)$  di grado  $N$  nell'intervallo  $[-1, 1]$ , l'equazione (1.36) si particolarizza nella forma seguente:

$$p_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.38)$$

### 1.1.5.2 Espansione in serie di Fourier

Quando la soluzione di un'equazione differenziale alle derivate parziali è periodica in un dato intervallo, essa può essere approssimata mediante l'*espansione in serie di Fourier*.

#### 1.1.5.2.1 Espansione di una funzione generica

Si consideri una generica funzione periodica  $f(x)$ . In generale, tale funzione si può presentare a valori complessi oppure a valori reali sul medesimo intervallo. Nel caso di funzione  $f(x)$  a valori complessi definita sull'intervallo  $[0, 2\pi]$  l'espansione in serie di Fourier può essere scritta:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.39)$$

dove i termini  $c_k$  sono valutabili attraverso la seguente relazione:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

D'altra parte, se  $f(x)$  è una funzione a valori reali, definita sullo stesso intervallo

chiuso  $[0, 2\pi]$ , l'espansione in serie di Fourier è usualmente riportata nella seguente forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (1.40)$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

In molti problemi ingegneristici, la soluzione di una PDE coinvolge la scrittura di funzioni a valori reali. Pertanto, appare lecito considerare solo l'espansione definita dall'equazione (1.40). Nelle applicazioni, si è soliti usare un'espansione troncata della serie:

$$f(x) \cong F_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} b_k \sin kx \quad (1.41)$$

Per consentire l'esatta approssimazione l'espansione sopra riportata deve convergere alla funzione  $f(x)$  al tendere di  $N$  all'infinito. Tale convergenza è garantita dal *secondo teorema di Weierstrass* per il quale, se  $f(x)$  è una funzione continua di periodo  $2\pi$ , per ogni  $\varepsilon$  maggiore di zero esiste una sommatoria di termini trigonometrici:

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \quad (1.42)$$

(dove  $n = n(\varepsilon)$ ) tale che sia soddisfatta la seguente disuguaglianza per tutti i valori di  $x$ :

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \quad (1.43)$$

E' facile mostrare che la  $F_N(x)$ , fornita dall'equazione (1.41), soddisfa le operazioni di addizione vettoriale e moltiplicazione scalare. Di conseguenza, essa costituisce uno spazio vettoriale lineare  $V_N$ . In tale spazio, un insieme di vettori che risultano linearmente indipendenti è formato dai seguenti elementi:

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos((N-1)x/2), \sin((N-1)x/2) \quad (1.44)$$

L'insieme in parola rappresenta una base dello spazio vettoriale lineare suddetto. Altri

insiemi di vettori base di  $V_N$  si possono indicare con un insieme di *funzioni coseno*  $C_m(x)$  e con un insieme di *funzioni seno*  $S_m(x)$ :

$$C_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos^k x \quad , \quad S_m(x) = \sin x \sum_{k=1}^m b_k \cos^{k-1} x \quad (1.45)$$

Da queste relazioni si nota come  $\cos x$  appartenga all'insieme  $C_1(x)$  e come  $\sin x$  faccia parte di  $S_1(x)$ ; inoltre, si può osservare che  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$  fa parte dell'insieme  $C_2(x)$  e che  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  appartiene a  $S_2(x)$ . Se si assume che, per  $k \leq n$  (dove  $n$  è un arbitrario numero intero con  $n \geq 2$ )  $\cos kx$  faccia parte dell'insieme  $C_k(x)$  e  $\sin kx$  appartenga a  $S_k(x)$ , è possibile dimostrare che  $\cos((n+1)x)$  appartiene all'insieme  $C_{n+1}(x)$  e  $\sin((n+1)x)$  appartiene a  $S_{n+1}(x)$ . Infatti, si ha (Shu 1999):

$$\cos((n+1)x) = \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \bar{a}_k \cos^k x \quad , \quad \sin((n+1)x) = \sin x \sum_{k=1}^{n+1} \bar{b}_k \cos^{k-1} x \quad (1.46)$$

per cui la  $F_N(x)$  può essere anche espressa come segue:

$$F_N(x) = \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \bar{a}_k \cos^k x + \sin x \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \bar{b}_k \cos^{k-1} x \quad (1.47)$$

Ricordando che per determinare la soluzione numerica di una PDE è necessario definire i valori assunti dalla funzione nei vari punti del dominio, l'espansione in serie di Fourier deve essere usata in forma discreta. In tal caso, se  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sono le coordinate degli  $N$  punti del dominio definiti nell'intervallo chiuso  $[0, 2\pi]$  e  $f(x_i)$  è il valore della funzione nel punto di coordinata  $x_i$ ,  $F_N(x)$  può essere espressa attraverso la seguente formula relativa all'*interpolazione di Lagrange per polinomi trigonometrici*:

$$F_N(x) = \sum_{k=1}^N f(x_k) g_k(x) \quad (1.48)$$

dove: 
$$g_k(x) = \frac{\mathcal{G}(x)}{\sin((x-x_k)/2) \mathcal{G}^{(1)}(x_k)}$$

$$\mathcal{G}(x) = \sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x-x_N}{2}\right) = \prod_{j=1}^N \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)$$

$$\mathcal{G}^{(1)}(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^N \sin\left(\frac{x_k-x_j}{2}\right)$$

E' facile mostrare che  $g_k(x_i)$  ha le medesime proprietà espresse dalle equazioni (1.17)

per  $l_k(x_i)$ . In modo del tutto simile a quanto visto per  $l_k(x)$ ,  $g_k(x)$  rappresenta un insieme di vettori linearmente indipendenti nello spazio  $V_N$ , e quindi una base di  $V_N$ .

### 1.1.5.2.2 Espansione di una funzione pari

Nel caso di una funzione pari  $f(x)$  definita sull'intervallo chiuso  $[0, \pi]$ , l'espansione in serie di Fourier può essere scritta:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (1.49)$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

Come già affermato in precedenza, nelle applicazioni viene solitamente usata un'espansione troncata della serie che, per l'equazione (1.49), si presenta nella seguente forma:

$$f(x) \cong F_N(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \cos kx \quad (1.50)$$

La sua convergenza è sempre garantita dal secondo teorema di Weierstrass e  $F_N(x)$  costituisce uno spazio  $V_N$ . In tale spazio, un insieme di vettori di base è formato dalla seguente serie di vettori linearmente indipendenti:

$$1, \cos x, \dots, \cos((N-1)x) \quad (1.51)$$

Usando l'equazione (1.45) per esprimere  $F_N(x)$  in un altro modo ed indicando  $\phi = \cos x$ , si ottiene che  $F_N(x)$  può essere riscritta nella forma:

$$F_N(x) = \bar{a}_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{a}_k \cos^k x = \sum_{k=1}^N \bar{a}_{k-1} \phi_k \quad (1.52)$$

Si noti che l'ultima espressione dell'equazione (1.52) risulta identica alla forma più convenzionale di approssimazione polinomiale (1.13), per cui è possibile definire la seguente serie di vettori come base di  $V_N$ :

$$\phi_k(x) = \cos^{k-1} x, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.53)$$

Dal momento che per approssimare la soluzione di una PDE è necessario determinare i valori assunti dalla funzione nei punti del dominio, occorre usare l'espansione in serie di Fourier in forma discreta. E' possibile esprimere  $F_N(x)$  attraverso la formula dell'interpolazione di Lagrange:

$$F_N(x) = \sum_{k=1}^N f(x_k) c_k(x) \quad (1.54)$$

dove: 
$$c_k(x) = \frac{\mathcal{C}(x)}{(\cos x - \cos x_k) \mathcal{C}^{(1)}(x_k)}$$

$$\mathcal{C}(x) = (\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2) \cdots (\cos x - \cos x_N) = \prod_{j=1}^N (\cos x - \cos x_j)$$

$$\mathcal{C}^{(1)}(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (\cos x_k - \cos x_j)$$

Il termine  $c_k(x_i)$ , che ha le medesime proprietà espresse dalle equazioni (1.17) per  $l_k(x_i)$ , rappresenta un insieme di vettori linearmente indipendenti nello spazio  $V_N$ , e quindi è una base di  $V_N$ .

### 1.1.5.2.3 Espansione di una funzione dispari

Nel caso di una funzione dispari  $f(x)$  definita sull'intervallo aperto  $]0, \pi[$ , l'espansione in serie di Fourier può essere scritta come:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (1.55)$$

dove:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Come già affermato in precedenza, nelle applicazioni viene solitamente usata un'espansione troncata della serie che, per l'equazione (1.55), si presenta nella seguente forma:

$$f(x) \cong F_N(x) = \sum_{k=1}^N b_k \sin kx \quad (1.56)$$

La convergenza di  $F_N(x)$  è garantita dal secondo teorema di Weierstrass. Inoltre,  $F_N(x)$  costituisce uno spazio  $V_N$ . In tale spazio, un insieme di vettori base è formato dalla

seguinte serie di termini linearmente indipendenti:

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(Nx) \quad (1.57)$$

Utilizzando l'equazione (1.45), è possibile esprimere  $F_N(x)$  nella forma:

$$F_N(x) = \sin x \sum_{k=1}^N \bar{b}_k \cos^{k-1} x = \sum_{k=1}^N \bar{a}_{k-1} \psi_k \quad (1.58)$$

In relazione a questa nuova espressione di  $F_N(x)$  è possibile individuare un'ulteriore serie di vettori che rappresentano una base di  $V_N$ :

$$\psi_k(x) = \sin x \cos^{k-1} x, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.59)$$

E' possibile esprimere  $F_N(x)$  attraverso la formula dell'interpolazione di Lagrange:

$$F_N(x) = \sum_{k=1}^N f(x_k) s_k(x) \quad (1.60)$$

dove: 
$$s_k(x) = \frac{\mathcal{S}(x) \sin x}{\sin x_k (\cos x - \cos x_k) \mathcal{S}^{(1)}(x_k)}$$

$$\mathcal{S}(x) = (\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2) \cdots (\cos x - \cos x_N) = \prod_{j=1}^N (\cos x - \cos x_j)$$

$$\mathcal{S}^{(1)}(x_k) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (\cos x_k - \cos x_j)$$

E' facile mostrare che  $s_k(x_i)$  ha le medesime proprietà espresse dalle equazioni (1.17) per  $l_k(x_i)$  e rappresenta un insieme di vettori linearmente indipendenti nello spazio  $V_N$ , e quindi costituisce una base di  $V_N$ .

Si noti che l'espressione di  $s_k(x)$  richiede al termine "sin  $x_k$ " di essere diverso da zero, affinché non si abbiano valori di  $s_k(x)$  pari ad infinito, ciò capita qualora  $x$  assuma i valori 0 e  $\pi$ . Si osservi che, per gli stessi valori di  $x$ , la  $f(x)$  espressa dall'equazione (1.56) risulta nulla. Da queste due osservazioni si può constatare che, se l'intervallo di definizione della  $f(x)$  fosse chiuso, l'equazione (1.60) presenterebbe degli addendi in forma indeterminata, a meno che questo non venga scongiurato escludendo dal dominio proprio i valori 0 e  $\pi$ . In altre parole, le coordinate dei punti nodali  $x_1, x_2, \dots, x_N$  vanno prese in un intervallo aperto  $]0, \pi[$ , il che risulta garantito dall'assunzione fatta inizialmente.

## 1.2 FORMULAZIONE MATEMATICA

### 1.2.1 QUADRATURA DIFFERENZIALE POLINOMIALE

Il metodo di quadratura differenziale proposto da Bellman mira a superare le difficoltà, connesse con la stabilità numerica e l'elevato costo computazionale, incontrate nella procedura alle differenze finite. Nello sviluppo del metodo, una difficoltà ha riguardato la determinazione dei coefficienti di ponderazione necessari per l'approssimazione delle derivate.

I fondamenti del DQM sono l'analisi dello spazio vettoriale lineare e l'approssimazione funzionale. Quando la soluzione di una PDE viene approssimata mediante un polinomio di ordine elevato, la tecnica numerica viene anche definita *Quadratura Differenziale di tipo Polinomiale* (PDQ).

Come descritto in precedenza, la tecnica di quadratura differenziale in narrativa approssima le derivate ordinarie o parziali di una funzione rispetto a una variabile, attraverso una somma lineare pesata dei valori della funzione in tutti i punti in cui è stato discretizzato il dominio. Il punto chiave della tecnica è la determinazione dei coefficienti di ponderazione, per le derivate di qualunque ordine.

Nel 1971 Bellman e Casti suggerirono due vie per definire i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione. Il primo metodo comporta la soluzione di un sistema di equazioni algebriche. Il secondo propone una semplice formulazione algebrica, ma con l'inconveniente di dover scegliere come punti nodali le radici dei polinomi di Legendre  $L_N^*(x)$  shiftati nell'intervallo  $[0,1]$ . Nella maggior parte delle pionieristiche applicazioni del metodo di quadratura differenziale si utilizzò il primo dei due approcci, poiché esso permette una scelta arbitraria dei punti della discretizzazione. All'aumentare del numero dei punti nodali però, ovvero dell'ordine del sistema algebrico, la matrice associata ad esso risulta mal condizionata e ciò fornisce grosse difficoltà di valutazione dei coefficienti (la matrice diventa difficilmente invertibile).

Per superare le difficoltà connesse con il secondo approccio vennero fatti numerosi tentativi, che portarono ad un nuovo criterio di calcolo dei suddetti coefficienti. Quan e Chang (1989) adottarono i polinomi interpolanti di Lagrange come funzioni di base, ottenendo formulazioni algebriche per i coefficienti relativi al primo e al secondo ordine di derivazione. L'impiego dei polinomi di Lagrange rende libera la scelta dei punti di

discretizzazione del dominio, senza dover assumere come punti le radici dei polinomi shiftati di Legendre.

Sfruttando le proprietà dello spazio vettoriale lineare polinomiale, Shu (1991) mostrò che i metodi di calcolo dei coefficienti nel PDQM possono essere generalizzati attraverso un'adeguata scelta dei vettori di base nello spazio vettoriale stesso.

Una variante del metodo di quadratura originale venne introdotta da Shu e Richards nel 1992. Come caso generale, Shu presentò una semplice formulazione algebrica per calcolare i coefficienti di ponderazione relativi al primo ordine di derivazione e una relazione ricorsiva per il calcolo dei coefficienti relativi al secondo e agli ordini superiori di derivazione, senza alcuna restrizione in merito alla scelta dei punti nodali. La determinazione dei coefficienti di ponderazione delle derivate di qualsiasi ordine fa uso dei polinomi di Lagrange. La generalizzazione del metodo di quadratura costituisce il *Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale (Generalized Differential Quadrature Method* oppure *GDQ Method*).

In questa parte verrà mostrato, in modo dettagliato, il procedimento di valutazione dei coefficienti di ponderazione descritto nel caso di problemi monodimensionali e l'ulteriore estensione al caso di problemi multidimensionali.

### 1.2.1.1 Calcolo dei coefficienti per le derivate del primo ordine

E' stato descritto precedentemente come l'approssimazione delle derivate mediante il DQM sia stata proposta da Bellman, estendendo il concetto di quadratura integrale. In tale contesto è stata mostrata anche l'espressione mediante cui è possibile approssimare la derivata del primo ordine di una funzione monodimensionale regolare definita in un intervallo chiuso:

$$f'(x_i) = f^{(1)}(x_i) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.61)$$

La (1.61) risulta definita solo quando è stabilito il procedimento con cui vengono valutati i relativi coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(1)}$ . Di seguito si mostrano alcune formulazioni esplicite.

### 1.2.1.1.1 Approcci di Bellman

I primi metodi di valutazione dei coefficienti di ponderazione vennero sviluppati da Bellman e Casti (1971), i quali proposero due diversi modi per calcolare i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  presenti nell'equazione (1.61). Essenzialmente, questi due approcci si differenziano a causa di un aspetto fondamentale, ossia la scelta dei *polinomi di base*.

#### 1.2.1.1.1.1 Primo approccio di Bellman

In questo primo criterio, le funzioni di base scelte da Bellman sono i polinomi:

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.62)$$

Dall'equazione (1.61) si può notare che i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  hanno entrambi gli indici che variano da 1 ad  $N$ , per cui il numero totale di coefficienti è pari a  $N \times N$ . Per determinare i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  si può richiedere che l'equazione (1.61) sia verificata per la classe di funzioni considerate. Assumendo il dominio discretizzato in  $N$  punti nodali, occorre applicare la legge di quadratura alle  $N$  funzioni negli  $N$  punti del dominio discreto in modo da ottenere  $N \times N$  equazioni algebriche.

I polinomi in forma monomia (1.62) conducono ad un sistema lineare di  $N$  equazioni algebriche nelle  $N$  incognite  $\zeta_{i1}^{(1)}, \zeta_{i2}^{(1)}, \dots, \zeta_{iN}^{(1)}$ , per valori  $x_i$  distinti ed arbitrari ( $i = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\left. \frac{dp_k(x)}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j^{k-1} = (k-1)x_i^{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.63)$$

Dalla soluzione del sistema algebrico lineare (1.63) si determinano in maniera esplicita i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$ , una volta definiti i punti  $x_i$  del dominio. In altre parole, pretendendo che l'equazione (1.61) sia verificata per tutti i polinomi (1.62) di grado minore e uguale a  $N-1$ , si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} k=1 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} = \zeta_{i1}^{(1)} + \zeta_{i2}^{(1)} + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} = 0 \\ k=2 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j = \zeta_{i1}^{(1)} x_1 + \zeta_{i2}^{(1)} x_2 + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} x_N = 1 \\ k=3 \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j^2 = \zeta_{i1}^{(1)} x_1^2 + \zeta_{i2}^{(1)} x_2^2 + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} x_N^2 = 2x_i \\ \vdots \\ k=N \Rightarrow \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} x_j^{N-1} = \zeta_{i1}^{(1)} x_1^{N-1} + \zeta_{i2}^{(1)} x_2^{N-1} + \dots + \zeta_{iN}^{(1)} x_N^{N-1} = (N-1)x_i^{N-2} \end{array} \right. \quad (1.64)$$

Il sistema algebrico (1.64) assume la forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_j & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \dots & x_j^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{i1}^{(1)} \\ \zeta_{i2}^{(1)} \\ \zeta_{i3}^{(1)} \\ \vdots \\ \zeta_{ij}^{(1)} \\ \vdots \\ \zeta_{iN}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_i \\ \vdots \\ (j-1)x_i^{j-2} \\ \vdots \\ (N-1)x_i^{N-2} \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

dove la matrice dei coefficienti è la *matrice di Vandermonde*:

$$V_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_j & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & x_3^{N-1} & \dots & x_j^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

Il sistema di equazioni (1.65) presenta un'unica soluzione, poiché la matrice ad esso associata è la classica matrice di Vandermonde. Sfortunatamente, tale matrice risulta mal condizionata all'aumentare di  $N$ , per cui vi sono difficoltà nella sua inversione e, di conseguenza, nella soluzione del sistema stesso. Il fenomeno del malcondizionamento peggiora aumentando il numero di punti nodali utilizzati, come pure l'ordine delle derivate. Tale inconveniente ha limitato l'uso di questo approccio ad applicazioni numeriche per  $N \leq 13$ .

### 1.2.1.1.2 Secondo approccio di Bellman

A differenza del caso precedente ed analogamente alla formula d'interpolazione di Lagrange, in questo secondo approccio le funzioni di base scelte sono i polinomi di seguito

riportati:

$$p_k(x) = \frac{L_N^*(x)}{(x-x_k)L_N^{*(1)}(x_k)} \quad (1.67)$$

dove  $L_N^*(x)$  rappresenta il polinomio shiftato di Legendre nell'intervallo  $[0,1]$  di grado  $N$  ed  $L_N^{*(1)}(x_k)$  indica la derivata del primo ordine del polinomio medesimo valutata nel punto  $x_k$ . In funzione di questa scelta, Bellman, Kashef e Casti (1972) dimostrarono che, con una discretizzazione ottenuta scegliendo come  $x_k$  le radici dei polinomi shiftati di Legendre ed applicando l'equazione (1.61) in questi  $N$  punti nodali, i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  possono essere ottenuti con una semplice formulazione algebrica:

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \frac{L_N^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)L_N^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.68)$$

$$\zeta_{ii}^{(1)} = \frac{1-2x_i}{2x_i(x_i-1)}, \quad i = j \quad (1.69)$$

Il procedimento risulta da una parte efficace, perché consente di calcolare direttamente i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  senza risolvere alcun sistema algebrico, ma alquanto restrittivo per quanto riguarda la scelta del tipo di discretizzazione del dominio. La valutazione dei coefficienti di ponderazione diventa assai semplice, ma questo approccio non è flessibile come il precedente, poiché le  $N$  coordinate dei punti nodali non possono essere scelte arbitrariamente. A causa di quest'ultimo aspetto associato alla scelta dei punti nodali, tale criterio non ha trovato lo stesso grado di applicazione del primo.

### *1.2.1.1.2 Approccio di Quan e Chang*

Per definire criteri alternativi nella valutazione dei coefficienti di ponderazione, nel 1989 Quan e Chang adottarono come funzioni base i seguenti polinomi interpolanti di Lagrange:

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x-x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.70)$$

dove:

$$\mathcal{L}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N) = \prod_{j=1}^N (x-x_j) \quad (1.71)$$

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_k) = (x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_N) = \prod_{j=1, j \neq k}^N (x_k - x_j) \quad (1.72)$$

In funzione di questa scelta essi dimostrarono che, applicando l'equazione (1.61) negli  $N$  punti nodali in cui è stato discretizzato il dominio, i coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(1)}$  si possono calcolare attraverso le seguenti formulazioni algebriche:

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \frac{1}{x_j - x_i} \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}, \quad i \neq j \quad (1.73)$$

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_k}, \quad i = j \quad (1.74)$$

In questo caso, come per il secondo approccio di Bellman, il calcolo dei coefficienti di ponderazione è abbastanza semplice; inoltre, le formule trovate possono essere applicate senza restrizioni sulla scelta dei punti nodali.

### 1.2.1.1.3 Approccio generalizzato di Shu

Gli approcci sviluppati da Bellman condussero Shu nel 1991 a definire un *approccio generalizzato*. Infatti, mediante esso si riescono a riunire, sotto un'unica forma, tutti i criteri sviluppati precedentemente.

Secondo il teorema dell'approssimazione polinomiale di Weierstrass, una funzione  $f(x)$  continua nel suo dominio di definizione può essere approssimata uniformemente con una successione infinita di polinomi. Ai fini pratici, però, può essere utilizzata solo una somma finita di polinomi di grado elevato.

Alcuni metodi, come ad esempio quello spettrale, hanno applicato con successo il concetto dell'approssimazione polinomiale di ordine superiore, per la soluzione delle equazioni alle derivate parziali. La soluzione di una PDE può essere approssimata accuratamente tramite un polinomio di ordine superiore. Seguendo tale approccio, si suppone che una funzione continua in un dominio possa essere approssimata con un polinomio di ordine  $N-1$  per  $N$  abbastanza grande. In base a quanto detto, il polinomio in questione definisce uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale  $V_N$ , poiché risulta chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare, oltre ad essere esprimibile in diversi modi.

Se  $p_k(x)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ , è una base dello spazio vettoriale  $V_N$ , per il teorema

dell'approssimazione polinomiale, la funzione  $f(x)$  può essere approssimata con un polinomio di grado  $N-1$ , che è combinazione lineare degli elementi della base:

$$f(x) \cong P_N(x) = \sum_{k=1}^N d_k p_k(x) \quad (1.75)$$

dove  $d_k$  rappresentano delle costanti che dipendono dalla tipologia di vettori di base scelti.

Utilizzando come base dello spazio vettoriale  $V_N$ , i polinomi in forma monomia,  $p_k(x) = x^{k-1}$ ,  $k=1,2,\dots,N$ , la relazione precedente può essere riscritta nella seguente forma:

$$f(x) \cong P_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k x^{k-1} \quad (1.76)$$

dove  $c_k$  rappresentano le opportune costanti. Come mostrato precedentemente, esistono diversi insiemi di vettori di base nello spazio  $V_N$ . Il fatto che i vettori del suddetto spazio siano, a tutti gli effetti, dei polinomi porta a sostenere che i vettori di base possono anche essere chiamati *polinomi di base*.

Nello spazio vettoriale lineare  $V_N$ , ogni base può essere espressa in maniera univoca come combinazione lineare di un'altra base. Quattro tipici insiemi di polinomi base di  $V_N$  sono elencati di seguito:

$$p_k(x) = x^{k-1}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.77)$$

$$p_k(x) = \frac{L_N^*(x)}{(x-x_k)L_N^{*(1)}(x_k)}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.78)$$

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{L}(x)}{(x-x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.79)$$

$$p_1(x) = 1, \quad p_k(x) = p_{k-1}(x)(x-x_{k-1}), \quad k=2,3,\dots,N \quad (1.80)$$

dove  $L_N^*(x)$  rappresenta il polinomio shiftato di Legendre di grado  $N$  ed  $\mathcal{L}(x)$  è definito dall'equazione (1.71). Fra i quattro insiemi evidenziati, il secondo ed il terzo derivano entrambi dal concetto di polinomio interpolante di Lagrange, ma sono diversi per via della distribuzione dei punti nodali (il secondo insieme implica una discretizzazione eseguita utilizzando le radici del polinomio shiftato di Legendre di grado  $N$ , per cui è descrivibile come caso particolare del terzo). A differenza dei primi tre, il quarto lo si ottiene partendo dal concetto di polinomio interpolante di Newton.

Si può anche notare come la prima relazione rispecchi la scrittura delle funzioni base

del primo approccio di Bellman, mentre la seconda rifletta quelle del secondo approccio. In altre parole, si può osservare che le funzioni base dei due approcci di Bellman sono proprio due insiemi di polinomi di base per lo spazio  $V_N$ . A questo punto, ricordando che l'equazione (1.61) definisce un operatore lineare, per le proprietà dello spazio vettoriale lineare, se un insieme di polinomi di base soddisfa l'operatore lineare dell'equazione (1.61), lo stesso si può dire per gli altri polinomi di base. Ciò significa che *ogni insieme di polinomi base deve fornire coefficienti di ponderazione il cui valore dipende dalla scelta delle funzioni base*. D'altra parte, la differenza tra i due approcci di Bellman è dovuta solamente all'uso di diverse funzioni base. Si può, quindi, dedurre che *l'uso di diversi insiemi di polinomi base indicherà, conseguentemente, l'uso di differenti approcci per il calcolo dei coefficienti di ponderazione* e che, poiché ci sono diversi insiemi di polinomi base in uno spazio vettoriale lineare  $V_N$ , *esistono molti criteri per calcolare quest'ultimi*.

I coefficienti di cui sopra devono essere utilizzati per ottenere una soluzione approssimata di una PDE, in quanto le proprietà di uno spazio vettoriale lineare forniscono anche questa capacità. La soluzione di una equazione è approssimabile mediante un polinomio di grado  $N-1$  (costituente uno spazio vettoriale lineare  $V_N$ ); polinomio la cui espressione è ancora sconosciuta. L'equazione (1.75) è definita solo quando sono note le costanti  $d_k$ . Inoltre, dalle proprietà di uno spazio vettoriale lineare si evince anche che, se un insieme di polinomi base soddisfa l'operatore lineare dell'equazione (1.61), allo stesso modo si comporta ogni polinomio base dello spazio  $V_N$ . Questo indica che la soluzione della PDE scritta secondo l'equazione (1.75) soddisfa anch'essa l'equazione (1.61) e cioè, *che i coefficienti di ponderazione ottenuti dai polinomi base possono essere utilizzati per discretizzare le derivate di una PDE*.

Quando l'insieme di polinomi base è dato dall'equazione (1.77), per definire i coefficienti di ponderazione è possibile ricavare lo stesso sistema di equazioni (1.64) del primo approccio di Bellman. Se l'insieme di polinomi base è quello fornito dall'equazione (1.78), si ritrova la stessa formulazione algebrica del secondo approccio di Bellman (1.67).

Attraverso l'approccio generale di Shu si definiscono i coefficienti di ponderazione usando due differenti insiemi di polinomi di base. In particolare, il primo insieme è quello dei polinomi interpolanti di Lagrange nella loro scrittura più generale (1.79), mentre il secondo è quello dei polinomi in forma monomia (1.77).

Per semplicità si pone:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{N}(x, x_k)(x - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.81)$$

Dalle (1.71), (1.72) e (1.81), si può verificare che:

$$\mathcal{N}(x_i, x_j) = \mathcal{L}^{(1)}(x_i) \delta_{ij} \quad (1.82)$$

dove  $\delta_{ij}$  è l'operatore di Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (1.83)$$

Per la (1.81), l'equazione (1.79) può essere semplificata nella seguente forma:

$$p_k(x) = \frac{\mathcal{N}(x, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.84)$$

La (1.83) rappresenta la nuova scrittura per l'insieme dei polinomi di base adottato. Se si applica a quest'ultima relazione (1.84) la legge di quadratura differenziale (1.61), si può porre nella forma:

$$\left. \frac{dp_k(x)}{dx} \right|_{x=x_h} = \frac{\mathcal{N}^{(1)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \varsigma_{hj}^{(1)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \varsigma_{ij}^{(1)} \frac{\mathcal{N}(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.85)$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $\mathcal{L}^{(1)}(x_k)$ , ricordando la relazione (1.82) ed eliminando i termini nulli, si ottiene:

$$\mathcal{N}^{(1)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \varsigma_{hj}^{(1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \varsigma_{hk}^{(1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.86)$$

Operando il cambiamento di indici  $i = h, j = k$ , si ricava:

$$\varsigma_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.87)$$

I termini  $\mathcal{L}^{(1)}(x_j)$  ed  $\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)$  nella (1.86) devono essere opportunamente valutati; in particolare, il primo può essere facilmente calcolato in base all'equazione (1.72), mentre per definire il secondo occorre derivare l'equazione (1.81) rispetto alla variabile  $x$ . La generica derivata di ordine  $n$ -esimo del polinomio  $\mathcal{L}(x)$  risulta esprimibile attraverso la formulazione ricorsiva:

$$\mathcal{L}^{(n)}(x) = \mathcal{N}^{(n)}(x, x_k)(x - x_k) + n\mathcal{N}^{(n-1)}(x, x_k) \quad (1.88)$$

in cui  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$  e dove  $\mathcal{L}^{(n)}(x)$  ed  $\mathcal{N}^{(n)}(x, x_k)$  indicano le derivate di ordine  $n$ , rispettivamente, di  $\mathcal{L}(x)$  ed  $\mathcal{N}(x, x_k)$ . Dall'osservazione di questa relazione

è possibile notare come  $\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)$  sia esprimibile nel modo seguente:

$$\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.89)$$

$$\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i)}{2}, \quad i = j \quad (1.90)$$

Noti i termini  $\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)$ , attraverso la loro sostituzione nell'equazione (1.87) si riescono ad ottenere i coefficienti di ponderazione per la derivata di primo ordine introdotta da Quan e Chang (1989):

$$\zeta_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)\mathcal{L}^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.91)$$

$$\zeta_{ii}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i)}{2\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}, \quad i = j \quad (1.92)$$

Si può osservare che, una volta definito il tipo di discretizzazione  $x_i$ , la valutazione dei  $\zeta_{ij}^{(1)}$  risulta elementare, in base alla definizione di  $\mathcal{L}^{(1)}(x_i)$ . L'equazione (1.91) permette di calcolare  $\zeta_{ij}^{(1)}$ ,  $i \neq j$ , senza alcuna restrizione sulla scelta dei punti nodali  $x_i$ . Al contrario, il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ii}^{(1)}$  si basa sulla determinazione della derivata seconda  $\mathcal{L}^{(2)}(x_i)$ , che non è facile ottenere. Questa difficoltà può essere superata qualora si passi ad utilizzare il secondo insieme di polinomi base a cui si accennava in precedenza. Infatti, se si rammenta la proprietà per cui tutti i polinomi base di  $V_N$  soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.61), si ha che il sistema di equazioni per il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  dedotto dai polinomi interpolanti di Lagrange è equivalente a quello derivato da un altro insieme di polinomi di base come, ad esempio,  $p_k(x) = x^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . E' possibile definire altre relazioni per il calcolo dei  $\zeta_{ii}^{(1)}$ . Pertanto, per la determinazione dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$ , il sistema di equazioni derivato utilizzando i polinomi di Lagrange equivale a quello che si ricava impiegando la seconda base  $p_k(x) = x^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Prendendo in considerazione il polinomio di base  $p_k(x) = x^{k-1}$  per  $k=1$  (ossia  $p_1(x) = x^0 = 1$ ) e applicando la legge di quadratura differenziale (1.61) a tale polinomio, i coefficienti  $c_{ij}^{(1)}$  devono soddisfare la seguente relazione:

$$\left. \frac{dp_1(x)}{dx} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} \mathbf{1} = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^{(1)} \quad (1.93)$$

Le equazioni (1.91) e (1.93) rappresentano due diverse formulazioni per il calcolo dei coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(1)}$ . In particolare, applicando l'approccio generale di Shu si ha che i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(1)}$  vanno calcolati in base all'equazione (1.91) nel caso di  $i \neq j$ , mentre i coefficienti  $\zeta_{ii}^{(1)}$  sono da valutare in un secondo tempo attraverso l'equazione (1.93). Nelle equazioni precedenti i coefficienti di ponderazione dipendono solo dai punti nodali.

I coefficienti di ponderazione possono essere dedotti anche attraverso l'interpolazione polinomiale di Lagrange. Si consideri la legge di interpolazione polinomiale di Lagrange:

$$f(x) = \sum_{j=1}^N p_j(x) f(x_j) + R(x) \quad (1.94)$$

dove con  $p_j(x) = l_j(x)$  si indicano in questo caso i polinomi di Lagrange (1.79) e con  $R(x)$  l'errore di troncamento. Trascurando l'errore di troncamento e rimandando agli studi di Shu (2000) per l'analisi dell'errore stesso, la derivata prima dell'equazione (1.94) nel generico punto  $x_i$  risulta essere:

$$f^{(1)}(x_i) \cong \sum_{j=1}^N p_j^{(1)}(x_i) f(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(1)} f(x_j) \quad (1.95)$$

Ricordando la definizione dei polinomi di Lagrange (1.79) e scrivendone la derivata prima, si ottiene:

$$p_j^{(1)}(x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) \mathcal{L}^{(1)}(x_j)} = \zeta_{ij}^{(1)} \quad (1.96)$$

Tale relazione fornisce una ulteriore interpretazione per i coefficienti di ponderazione. Essi possono essere ottenuti direttamente attraverso l'interpolazione polinomiale di Lagrange e rappresentano le derivate dei polinomi di Lagrange calcolate nei punti in cui si è discretizzato il dominio. Dalle considerazioni precedenti appare che la legge di quadratura differenziale risulta una formulazione esatta, qualora la funzione di cui si vuole calcolare le derivate sia un polinomio, visto che tale polinomio può essere espresso esattamente come combinazione lineare di una base polinomiale della spazio vettoriale lineare  $V_N$ .

### 1.2.1.2 Calcolo dei coefficienti per le derivate di ordine superiore al primo

Fino ad ora si è sempre puntato l'attenzione sull'approssimazione delle derivate del primo ordine di una funzione regolare monodimensionale. Poiché nelle equazioni governanti i problemi ingegneristici compaiono spesso derivate parziali di ordine superiore al primo, occorre definire i coefficienti di ponderazione per approssimare le derivate di ordine superiore al primo. Tali coefficienti possono essere determinati agevolmente attraverso relazioni ricorsive. In particolare, saranno mostrate prima le formule per il calcolo dei coefficienti per l'approssimazione delle derivate del secondo ordine, per poi definire le formule ricorsive per calcolare i coefficienti di ponderazione relativi alle derivate di ordine superiore.

#### 1.2.1.2.1 Coefficienti di ponderazione per le derivate del secondo ordine

In base a quanto è stato appena accennato, ricordando la definizione di *quadratura differenziale* è possibile esprimere la derivata del secondo ordine di una funzione  $f(x)$ , regolare, monodimensionale e definita in un intervallo chiuso, attraverso la relazione:

$$f''(x_i) = f^{(2)}(x_i) = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.97)$$

dove  $f^{(2)}(x_i)$  è la derivata seconda di  $f(x)$  nel punto nodale  $x_i$ ,  $\zeta_{ij}^{(2)}$  sono i coefficienti di ponderazione relativi a tale derivata e  $f(x_j)$  rappresenta il valore della funzione nei punti  $x_j$  in cui è stato discretizzato il dominio. Ovviamente, visto che tale espressione è formalmente analoga all'equazione (1.61), anch'essa definisce un *operatore lineare*. La sola differenza apprezzabile tra l'equazione (1.97) e l'equazione (1.61) consiste nell'uso di diversi coefficienti di ponderazione che, come in precedenza, sono al momento incogniti. Di seguito si mostrano diverse modalità di calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$  in parola.

##### 1.2.1.2.1.1 Approccio di Quan e Chang

Nel 1989 Quan e Chang definirono delle relazioni per il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$

usando i polinomi interpolanti di Lagrange come funzioni base. Tali relazioni vengono riportate qui di seguito:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{2}{x_j - x_i} \left( \prod_{k=1, k \neq i, j}^N \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k} \right) \left( \sum_{l=1, l \neq i, j}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right), \quad i \neq j \quad (1.98)$$

$$\zeta_{ii}^{(2)} = 2 \sum_{k=1, k \neq i}^{N-1} \left( \frac{1}{x_i - x_k} \left( \sum_{l=k+1, l \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_l} \right) \right), \quad i = j \quad (1.99)$$

### 1.2.1.2.1.2 Approccio generalizzato di Shu

L'approccio generalizzato di Shu per il calcolo dei coefficienti di ponderazione si basa sui concetti fondamentali dell'approssimazione polinomiale e dell'analisi di uno spazio vettoriale lineare. Shu definì tali coefficienti usando i due insiemi di polinomi base descritti dall'equazioni (1.77) e (1.79). In particolare, facendo riferimento all'insieme dei polinomi interpolanti di Lagrange  $\mathcal{L}(x)$  (1.70), (1.71) e (1.72), egli riuscì a definire i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$  sostituendo l'equazione (1.84) all'interno dell'equazione (1.79).

In maniera analoga a quanto fatto per determinare i coefficienti per la derivata prima, applicando alla relazione (1.84) la legge di quadratura differenziale (1.97), risulta:

$$\left. \frac{d^2 p_k(x)}{dx^2} \right|_{x=x_k} = \frac{\mathcal{N}^{(2)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(2)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} \frac{\mathcal{N}(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.100)$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $\mathcal{L}^{(1)}(x_k)$ , ricordando la relazione (1.82) ed eliminando i termini nulli, si ottiene:

$$\mathcal{N}^{(2)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(2)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \zeta_{hk}^{(2)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.101)$$

Operando il cambiamento di indici  $i = h, j = k$ , dalla (1.101) si ricava:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.102)$$

Il termine  $\mathcal{L}^{(1)}(x_j)$  può essere facilmente calcolato attraverso l'equazione (1.72), mentre il termine  $\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_j)$  può essere valutato sfruttando l'equazione (1.88). Da tale relazione si evince:

$$\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i) - 2\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.103)$$

$$\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(3)}(x_i)}{3}, \quad i = j \quad (1.104)$$

Noti i termini  $\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_j)$ , la loro sostituzione nell'equazione (1.102) porta a definire le seguenti espressioni per i coefficienti di ponderazione:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{\mathcal{L}^{(2)}(x_i) - 2\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)}{(x_i - x_j)\mathcal{L}^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.105)$$

$$\zeta_{ii}^{(2)} = \frac{\mathcal{L}^{(3)}(x_i)}{3\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}, \quad i = j \quad (1.106)$$

Si può osservare come l'equazione (1.105) possa essere ulteriormente semplificata se si sostituiscono in essa le equazioni (1.91) e (1.92). Eseguendo tale operazione si ottiene:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = 2\zeta_{ij}^{(1)} \left( \zeta_{ii}^{(1)} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (1.107)$$

Appare che i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$  sono facilmente determinabili una volta noti i valori di  $\zeta_{ij}^{(1)}$  e  $\zeta_{ii}^{(1)}$ , oltre alla disposizione dei punti nodali. Ciò che non si presenta facile è il calcolo di  $\zeta_{ii}^{(2)}$ , dal momento che la (1.106) richiede la valutazione di una derivata di terzo ordine  $\mathcal{L}^{(3)}(x_i)$ . Questa difficoltà può essere superata in base alla proprietà dello spazio vettoriale lineare  $V_N$  per la quale, tutti i polinomi di base soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.97). Il sistema di equazioni per il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$  dedotto dall'uso dei polinomi interpolanti di Lagrange (polinomi di base adottati) è del tutto equivalente a quello derivato da un altro insieme di polinomi di base come  $p_k(x) = x^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . I coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$  devono anche soddisfare la seguente relazione ottenuta utilizzando il polinomio di base  $p_k(x) = x^{k-1}$  per  $k = 1$  (ossia  $p_1(x) = x^0 = 1$ ):

$$\left. \frac{d^2 p_1(x)}{dx^2} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} 1 = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(2)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^{(2)} \quad (1.108)$$

Con tale approccio i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(2)}$  possono essere calcolati mediante l'equazione (1.107) per  $i \neq j$ , mentre i coefficienti  $\zeta_{ii}^{(2)}$  vengono valutati successivamente attraverso l'equazione (1.108).

### 1.2.1.2.2 Coefficienti per le derivate di ordine superiore: formule ricorsive di Shu

Si è visto come determinare i coefficienti di ponderazione per le derivate del primo e del secondo ordine. In base alla legge di quadratura differenziale (1.61), si può generalizzare tale relazione per calcolare le derivate di ordine superiore di una funzione  $f(x)$ , regolare in un intervallo chiuso, esprimendo i seguenti operatori lineari:

$$f^{(n-1)}(x_i) = \left. \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n-1)} f(x_j) \quad (1.109)$$

$$f^{(n)}(x_i) = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad (1.110)$$

per  $i=1,2,\dots,N$  e  $n=2,3,\dots,N-1$ . Occorre notare che, in base al teorema dell'approssimazione di Weierstrass deve risultare  $N > n$ , ossia l'ordine di quadratura  $N$  deve essere sempre maggiore dell'ordine di derivazione  $n$ . In tali relazioni  $f^{(n-1)}(x_i)$  e  $f^{(n)}(x_i)$  indicano, rispettivamente, le derivate di ordine  $n-1$  ed  $n$  di  $f(x)$  nel punto nodale  $x_i$ ,  $\zeta_{ij}^{(n-1)}$  e  $\zeta_{ij}^{(n)}$  rappresentano i coefficienti di ponderazione relativi a tali derivate e  $f(x_j)$  definiscono i valori della funzione nei punti  $x_j$  in cui è stato discretizzato il dominio. I coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  sono contraddistinti dai pedici  $i$  e  $j$ . Il pedice  $i$  indica il punto del dominio in cui si vuole calcolare la derivata generica. Lo scopo del metodo è quello di trovare una semplice espressione algebrica che permetta di calcolare i coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(n)}$ , per una scelta arbitraria di punti nodali e per un qualsiasi ordine di derivazione superiore al primo.

In maniera analoga a quanto fatto per i coefficienti di ponderazione per le derivate del primo ordine si può procedere attraverso il primo approccio di Bellman utilizzando come polinomi di base dello spazio vettoriale polinomiale le funzioni riportate nell'espressione (1.77). Per tali polinomi la regola di quadratura si presenta nella forma:

$$\left. \frac{d^n p_k(x)}{dx^n} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} x_j^{k-1} = (k-1)(k-2)(k-3)\dots(k-n)x_i^{k-n-1} \quad (1.111)$$

$$k=1,2,\dots,N, \quad i=1,2,\dots,N, \quad N > n$$

Il sistema che si ricava dalle (1.111) ha come incognite i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  ed ammette

una sola soluzione, perché la matrice dei coefficienti è la matrice di Vandermonde. In questo caso, però, la matrice del sistema algebrico risulta mal condizionata all'aumentare del numero di punti nodali. Quindi, pur esistendo la soluzione del sistema, risulta difficile ottenerla dal punto di vista numerico. Si vuol far rilevare allora che, sebbene i coefficienti di ponderazione in via teorica possano essere calcolati indifferentemente seguendo uno qualsiasi degli approcci visti precedentemente, ciò non vuol dire che sia facile eseguire tale calcolo dal punto di vista numerico. Infatti, è stato già osservato che alcuni degli approcci per la determinazione dei coefficienti di ponderazione danno luogo a problemi di carattere computazionale. Il punto chiave dell'approccio generale proposto da Shu consiste nella possibilità di calcolare i coefficienti di ponderazione per qualsiasi ordine di derivazione in maniera ricorsiva, senza dover risolvere alcun sistema e senza essere obbligati a scegliere una definita tipologia di discretizzazione. E' per tali motivazioni che Shu diede l'appellativo *generalizzato* al metodo di quadratura differenziale che fa uso dell'approccio da lui proposto per il calcolo dei coefficienti di ponderazione per le derivate di qualsiasi ordine.

In modo analogo a quanto visto in precedenza, la determinazione dei coefficienti di ponderazione si basa sui concetti fondamentali dell'approssimazione polinomiale e dell'analisi di uno spazio vettoriale lineare. Anche in questo caso, le formule per il calcolo dei suddetti coefficienti verranno derivate usando due insiemi di polinomi di base.

Il primo a cui si fa riferimento è quello riportato nell'equazione (1.79), ossia quello descritto dai polinomi interpolanti di Lagrange. Una volta scelti tali vettori di base, Shu definì i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n-1)}$  e  $\zeta_{ij}^{(n)}$  sostituendo l'espressione (1.84) all'interno dell'equazioni (1.109) e (1.110):

$$\left. \frac{d^{(n-1)} p_k(x)}{dx^{(n-1)}} \right|_{x=x_h} = \frac{\mathcal{N}^{(n-1)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n-1)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n-1)} \frac{\mathcal{N}(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.112)$$

$$\mathcal{N}^{(n-1)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \zeta_{hk}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.113)$$

$$\left. \frac{d^{(n)} p_k(x)}{dx^{(n)}} \right|_{x=x_h} = \frac{\mathcal{N}^{(n)}(x_h, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n)} p_k(x_j) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} \frac{\mathcal{N}(x_j, x_k)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_k)} \quad (1.114)$$

$$\mathcal{N}^{(n)}(x_h, x_k) = \sum_{j=1}^N \zeta_{hj}^{(n)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \delta_{jk} = \zeta_{hk}^{(n)} \mathcal{L}^{(1)}(x_k) \quad (1.115)$$

Da cui operando il cambiamento di indici  $i = h, j = k$ , si ricava:

$$\zeta_{ij}^{(n-1)} = \frac{\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.116)$$

$$\zeta_{ij}^{(n)} = \frac{\mathcal{N}^{(n)}(x_i, x_j)}{\mathcal{L}^{(1)}(x_j)} \quad (1.117)$$

La prima di queste due equazioni può essere riscritta in altra maniera esplicitando il termine  $\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_j)$ . Tale relazione è valida per ogni valore di  $i$  e  $j$ :

$$\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_j) = \zeta_{ij}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j) \quad (1.118)$$

$\mathcal{L}^{(1)}(x_j)$  risulta facilmente determinabile come precedentemente visto attraverso la relazione (1.72), mentre  $\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_j)$  ed  $\mathcal{N}^{(n)}(x_i, x_j)$  sono valutabili sfruttando la formula ricorsiva (1.88). Dalla relazione (1.88) si evince:

$$\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(n)}(x_i)}{n}, \quad i = j \quad (1.119)$$

$$\mathcal{N}^{(n)}(x_i, x_j) = \frac{\mathcal{L}^{(n)}(x_i) - n\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_j)}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.120)$$

$$\mathcal{N}^{(n)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{L}^{(n+1)}(x_i)}{n+1}, \quad i = j \quad (1.121)$$

Ricavando  $\mathcal{L}^{(n)}(x_i)$  dall'equazione (1.119) e sostituendolo nell'equazione (1.120), si ottiene:

$$\mathcal{N}^{(n)}(x_i, x_j) = \frac{n(\mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_i) - \mathcal{N}^{(n-1)}(x_i, x_j))}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.122)$$

La relazione (1.122) può essere ulteriormente semplificata usando l'equazione (1.91):

$$\mathcal{N}^{(n)}(x_i, x_j) = \frac{n(\zeta_{ii}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_i) - \zeta_{ij}^{(n-1)} \mathcal{L}^{(1)}(x_j))}{x_i - x_j}, \quad i \neq j \quad (1.123)$$

Tenendo conto dell'espressione (1.91), utilizzando l'equazione (1.123) e sostituendola nell'equazione (1.117), si ricava la formulazione ricorsiva per il calcolo dei coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(n)}$ :

$$\zeta_{ij}^{(n)} = n \left( \zeta_{ij}^{(1)} \zeta_{ii}^{(n-1)} - \frac{\zeta_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right), \quad i \neq j \quad (1.124)$$

dove  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = 2, 3, \dots, N-1$ .

Per quanto riguarda la determinazione dei coefficienti  $\zeta_{ii}^{(n)}$ , sostituendo l'equazione (1.121) all'interno dell'equazione (1.117) si ricava:

$$\zeta_{ii}^{(n)} = \frac{\mathcal{L}^{(n+1)}(x_i)}{(n+1)\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}, \quad i = j \quad (1.125)$$

dove  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = 2, 3, \dots, N-1$ . L'equazione (1.124) offre un metodo estremamente semplice per valutare i coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(n)}$ , una volta noti i valori di  $\zeta_{ij}^{(n-1)}$ ,  $\zeta_{ii}^{(n-1)}$  ed  $\zeta_{ij}^{(1)}$ , oltre alla disposizione dei punti nodali. Il calcolo di  $\zeta_{ii}^{(n)}$  richiede di valutare la derivata  $\mathcal{L}^{(n+1)}(x_i)$  di ordine  $n+1$ . Ancora una volta, questa difficoltà può essere superata qualora si tenga conto della proprietà dello spazio vettoriale lineare  $V_N$  per la quale, tutti i polinomi di base soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.110). Infatti, analogamente all'analisi effettuata nel caso di derivate del primo e secondo ordine, il sistema di equazioni per il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  dedotto dall'uso dei polinomi interpolanti di Lagrange è del tutto equivalente a quello derivato da un altro insieme di polinomi di base come  $p_k(x) = x^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . In base alle precedenti affermazioni, i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  devono soddisfare la seguente relazione ottenuta utilizzando il polinomio di base  $p_k(x) = x^{k-1}$  per  $k = 1$  (ossia  $p_1(x) = x^0 = 1$ ):

$$\left. \frac{d^n p_1(x)}{dx^n} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} 1 = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \zeta_{ij}^{(n)} \quad (1.126)$$

Da quest'ultima relazione si ha che i coefficienti  $\zeta_{ii}^{(n)}$  possono essere definiti attraverso i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$ , per  $i \neq j$ . Restano così determinati i coefficienti di ponderazione per le derivate di qualsiasi ordine.

In conclusione, le espressioni (1.91), (1.93), (1.124) e (1.126) sono facili da implementare in un calcolatore e non hanno alcuna restrizione sulla scelta dei punti nodali, permettendo la determinazione in maniera ricorsiva dei coefficienti di ponderazione per una derivata di ordine generico.

## 1.2.2 QUADRATURA DIFFERENZIALE BASATA SULL'ESPANSIONE DI FOURIER

Come visto in precedenza, la soluzione di una PDE può essere approssimata attraverso un polinomio di grado elevato, oppure attraverso l'espansione in serie di Fourier e ciò

dipende dal tipo di problema che si intende analizzare. Si vuol far rilevare che le espressioni dell'approssimazione polinomiale e dell'espansione in serie di Fourier sono differenti e che questa differenza comporta formulazioni diverse per il calcolo dei coefficienti di ponderazione. L'unica differenza tra le due metodologie risiede nella maniera in cui vengono valutati i coefficienti di ponderazione. Precedentemente, si è mostrato in dettaglio come calcolare i coefficienti di ponderazione per la quadratura differenziale polinomiale. In questa sezione si intende esporre come ricavare le espressioni esplicite dei coefficienti di ponderazione per la quadratura differenziale basata sull'espansione in serie di Fourier.

L'approccio in parola, chiamato *Harmonic Differential Quadrature Method* (HDQ Method) o *Fourier Expansion-based Differential Quadrature Method* (FDQ Method) è stato proposto da Striz, Wang e Bert nel 1995.

A differenza del *PDQ Method*, l'*HDQ Method* utilizza come vettori di base dello spazio vettoriale  $V_N$  i polinomi trigonometrici. E' da notare fin da ora che, nonostante i risultati promettenti, il calcolo dei coefficienti di ponderazione risulta essere alquanto scomodo. Infatti, le espressioni che definiscono i coefficienti di ponderazione per la valutazione delle derivate di ogni grado devono essere determinate esplicitamente attraverso una procedura ricorsiva. Recentemente, una procedura per calcolare i coefficienti di ponderazione è stata proposta da Shu e Chew (1997) e da Shu e Xue (1997).

E' da notare che una funzione  $f(x)$  definita nell'intervallo  $[0,1]$  si possa approssimare attraverso l'espansione in serie di Fourier nella forma:

$$f(x) \cong F_N(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (c_k \cos k\pi x + d_k \sin k\pi x) \quad (1.127)$$

Si vuol far rilevare che  $F_N$  nell'equazione (1.127) definisce uno spazio vettoriale lineare  $V_N$  di dimensione  $N$ , poiché risulta chiuso rispetto alla somma e alla moltiplicazione per uno scalare.

Per il concetto di linearità indipendente, le basi di uno spazio vettoriale lineare possono essere considerate come sottoinsiemi linearmente indipendenti. Due tipiche basi dello spazio vettoriale  $N$ -dimensionale  $V_N$  sono:

$$1, \sin(\pi x), \cos(\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi x), \dots, \sin\left(\frac{N-1}{2}\pi x\right), \cos\left(\frac{N-1}{2}\pi x\right) \quad (1.128)$$

$$g_k(x) = \frac{\pi \mathcal{G}(x)}{2 \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) \mathcal{G}^{(1)}(x_k)}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (1.129)$$

dove:  $\mathcal{G}(x) = \sin\left(\frac{x-x_1}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\pi\right) \dots \sin\left(\frac{x-x_N}{2}\pi\right) = \prod_{j=1}^N \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\pi\right)$

$$\mathcal{G}^{(1)}(x_k) = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1, j \neq k}^N \sin\left(\frac{x_j-x_k}{2}\pi\right)$$

Si ponga:

$$\mathcal{G}(x) = \prod_{k=1}^N \sin\left(\frac{x-x_k}{2}\pi\right) = \frac{2}{\pi} \mathcal{N}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\pi\right) \quad (1.130)$$

dove:

$$\mathcal{N}(x_i, x_j) = \mathcal{N}(x_i, x_i) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1, k \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i-x_k}{2}\pi\right) = L^{(1)}(x_i), \quad i=j \quad (1.131)$$

$$\mathcal{N}(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j \quad (1.132)$$

Considerando la relazione (1.130) e sostituendo l'indice  $k$  con l'indice  $j$ , l'equazione (1.129) diventa:

$$g_j(x) = \frac{\pi \mathcal{G}(x)}{2 \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\pi\right) \mathcal{G}^{(1)}(x_j)} = \frac{\mathcal{N}(x, x_j)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_j)} \quad (1.133)$$

dove la generica derivata  $n$ -esima rispetto ad  $x$  viene indicata nel seguente modo:

$$\mathcal{G}^{(n)}(x) = \frac{d^n \mathcal{G}(x)}{dx^n}, \quad \mathcal{N}^{(n)}(x, x_j) = \frac{d^n \mathcal{N}(x, x_j)}{dx^n} \quad (1.134)$$

Ricordando che per l'interpolazione di Lagrange si può scrivere:

$$F_N(x) = \sum_{j=1}^N f(x_j) g_j(x) \quad (1.135)$$

e utilizzando i polinomi trigonometrici (1.133) e le proprietà (1.131) e (1.132), si ricavano i coefficienti di ponderazione:

$$\mathcal{S}_{ij}^{(n)} = \frac{d^n g_j(x)}{dx^n} \Big|_{x_i} \quad (1.136)$$

Differenziando l'equazione (1.130) fino alla derivata quarta, si ricava:

$$\mathcal{G}^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi} \mathcal{N}^{(1)}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\pi\right) + \mathcal{N}(x, x_j) \cos\left(\frac{x-x_j}{2}\pi\right) \quad (1.137)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(2)}(x) = \frac{2}{\pi} \mathcal{N}^{(2)}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + 2\mathcal{N}^{(1)}(x, x_j) \cos\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + \\ - \frac{\pi}{2} \mathcal{N}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) \end{aligned} \quad (1.138)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(3)}(x) = \frac{2}{\pi} \mathcal{N}^{(3)}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + 3\mathcal{N}^{(2)}(x, x_j) \cos\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + \\ - \frac{3\pi}{2} \mathcal{N}^{(1)}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) - \frac{\pi^2}{4} \mathcal{N}(x, x_j) \cos\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) \end{aligned} \quad (1.139)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(4)}(x) = \frac{2}{\pi} \mathcal{N}^{(4)}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + 4\mathcal{N}^{(3)}(x, x_j) \cos\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + \\ - 3\pi \mathcal{N}^{(2)}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) - \pi^2 \mathcal{N}^{(1)}(x, x_j) \cos\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) + \\ + \frac{\pi^3}{8} \mathcal{N}(x, x_j) \sin\left(\frac{x-x_j}{2} \pi\right) \end{aligned} \quad (1.140)$$

Dall'equazione (1.137), ponendo  $x = x_i$  per  $i \neq j$  e ricordando le (1.131) e (1.132), si ottiene  $\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)$  in funzione di  $\mathcal{G}^{(1)}(x_i)$ :

$$\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j) = \frac{\pi \mathcal{G}^{(1)}(x_i)}{2 \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)} \quad (1.141)$$

Sostituendo l'equazione (1.133) nella (1.136) ed impiegando la (1.141), si ricavano i termini non diagonali della matrice dei coefficienti di ponderazione della derivata del primo ordine:

$$\mathcal{G}_{ij}^{(1)} = \frac{\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_j)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_j)} = \frac{\pi \mathcal{G}^{(1)}(x_i)}{2 \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) \mathcal{G}^{(1)}(x_j)}, \quad i \neq j \quad (1.142)$$

Dall'equazione (1.137), ponendo  $x = x_i$  per  $i = j$ , si deduce:

$$\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{G}^{(2)}(x_i)}{2} \quad (1.143)$$

Sostituendo l'equazione (1.133) nella (1.136) ed introducendo la (1.143), si ricavano i termini diagonali della matrice dei coefficienti di ponderazione della derivata del primo ordine:

$$\mathcal{G}_{ii}^{(1)} = \frac{\mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_i)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_i)} = \frac{\mathcal{G}^{(2)}(x_i)}{2\mathcal{G}^{(1)}(x_i)} \quad (1.144)$$

In maniera analoga, ponendo  $x = x_i$  per  $i \neq j$  e utilizzando le equazioni (1.143) e (1.144), dall'equazione (1.138) si ricava:

$$\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{\pi \mathcal{G}^{(1)}(x_i) \zeta_{ii}^{(1)}}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)} - \pi \zeta_{ij}^{(1)} \mathcal{G}^{(1)}(x_i) \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) \quad (1.145)$$

Sostituendo la (1.145) nella (1.136), si ottengono i termini non diagonali della matrice dei coefficienti di ponderazione della derivata seconda:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \frac{\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_j)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_j)} = \zeta_{ij}^{(1)} \left( 2\zeta_{ii}^{(1)} - \pi \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) \right), \quad i \neq j \quad (1.146)$$

Dall'equazione (1.139), ponendo  $x = x_i$  per  $i = j$  e ricordando le (1.131) e (1.132), risulta:

$$\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{G}^{(3)}(x_i)}{3} + \frac{\pi}{12} \mathcal{G}^{(1)}(x_i) \quad (1.147)$$

Dalle (1.133), (1.136) e (1.147), si ricavano i termini diagonali della matrice dei coefficienti di ponderazione della derivata seconda:

$$\zeta_{ii}^{(2)} = \frac{\mathcal{N}^{(2)}(x_i, x_i)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_i)} = \frac{\mathcal{G}^{(3)}(x_i)}{3\mathcal{G}^{(1)}(x_i)} + \frac{\pi^2}{12} \quad (1.148)$$

Allo stesso modo, utilizzando le equazioni (1.139) e (1.140), si determinano i coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine superiore. Ponendo  $x = x_i$  per  $i \neq j$  e utilizzando le equazioni (1.139), (1.148), (1.131) e (1.132), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(3)}(x_i, x_j) &= \frac{\pi}{2} \left( \zeta_{ii}^{(2)} - \frac{\pi^2}{12} \right) \frac{3\mathcal{G}^{(1)}(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)} + \\ &\quad - \frac{3\pi}{2} \zeta_{ij}^{(2)} \mathcal{G}^{(1)}(x_j) \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) + \frac{3\pi^2}{4} \zeta_{ij}^{(1)} \mathcal{G}^{(1)}(x_j) \end{aligned} \quad (1.149)$$

Sostituendo la (1.147) nella (1.136) si ricavano i termini non diagonali della matrice dei coefficienti di ponderazione della derivata terza:

$$\zeta_{ij}^{(3)} = \frac{\mathcal{N}^{(3)}(x_i, x_j)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_j)} = \zeta_{ij}^{(1)} \left( 3\zeta_{ii}^{(2)} + \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{3\pi}{2} \zeta_{ij}^{(2)} \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right), \quad i \neq j \quad (1.150)$$

Dall'equazione (1.140), ponendo  $x = x_i$  per  $i = j$  e ricordando le (1.131) e (1.132), si ottiene:

$$\mathcal{N}^{(3)}(x_i, x_i) = \frac{\mathcal{G}^{(4)}(x_i)}{4} + \frac{\pi^2}{4} \mathcal{N}^{(1)}(x_i, x_i) \quad (1.151)$$

da cui, ricordando la (1.144), si ha:

$$\zeta_{ii}^{(3)} = \frac{\mathcal{N}^{(3)}(x_i, x_i)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_i)} = \frac{\mathcal{G}^{(4)}(x_i)}{4\mathcal{G}^{(1)}(x_i)} + \frac{\pi^2}{4} \zeta_{ii}^{(1)} \quad (1.152)$$

Ponendo  $x = x_i$  per  $i \neq j$  e utilizzando le equazioni (1.140), (1.152), (1.131) e (1.132), si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(4)}(x_i, x_j) = & \frac{\pi}{2} (4\zeta_{ii}^{(3)} - \pi^2 \zeta_{ii}^{(1)}) \frac{\mathcal{G}^{(1)}(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right)} + \frac{3\pi^2}{2} \zeta_{ij}^{(2)} \mathcal{G}^{(1)}(x_j) + \\ & + \pi \left( \frac{\pi^2}{2} \zeta_{ij}^{(1)} - 2\zeta_{ij}^{(3)} \right) \mathcal{G}^{(1)}(x_j) \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right) \end{aligned} \quad (1.153)$$

Sostituendo la (1.153) nella (1.136), si deducono i termini non diagonali della matrice dei coefficienti di ponderazione della derivata quarta:

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}^{(4)} = \frac{\mathcal{N}^{(4)}(x_i, x_j)}{\mathcal{G}^{(1)}(x_j)} = & \zeta_{ij}^{(1)} (4\zeta_{ii}^{(3)} - \pi^2 \zeta_{ii}^{(1)}) + \frac{3\pi^2}{2} \zeta_{ij}^{(2)} + \\ & + \pi \left( \frac{\pi^2}{2} \zeta_{ij}^{(1)} - 2\zeta_{ij}^{(3)} \right) \cot\left(\frac{x_i - x_j}{2} \pi\right), \quad i \neq j \end{aligned} \quad (1.154)$$

Le equazioni (1.142), (1.146), (1.150) e (1.154) offrono un metodo estremamente semplice per valutare i coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ij}^{(n)}$  per  $i \neq j$  e  $n=1, \dots, 4$ . Ciò che, invece, non si presenta facile è il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ii}^{(n)}$ . Ancora una volta, questa difficoltà può essere superata qualora si tenga presente la proprietà dello spazio vettoriale lineare  $V_N$  per la quale, tutti i polinomi di base soddisfano l'operatore lineare dell'equazione (1.110). Infatti, analogamente all'analisi effettuata per la valutazione dei coefficienti  $\zeta_{ii}^{(n)}$  nella quadratura differenziale polinomiale, il sistema di equazioni per il calcolo dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  dedotto dall'uso dei polinomi trigonometrici (1.129) è del tutto equivalente a quello derivato da un altro insieme di polinomi di base. Si sceglie allora come seconda base di  $V_N$  la (1.128). Dalle precedenti affermazioni, i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  devono soddisfare la seguente relazione ottenuta utilizzando il polinomio  $p(x)=1$  della base (1.128):

$$\sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(n)} = 0 \Rightarrow \zeta_{ii}^{(n)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N \zeta_{ik}^{(n)}, \quad n=1,2,3,4, \quad i=1,2,\dots,N \quad (1.155)$$

La determinazione dei coefficienti di ponderazione diviene così una procedura ricorsiva. In primo luogo si ricavano i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$ ,  $i \neq j$ , poi attraverso la relazione (1.155) si deducono i coefficienti  $\zeta_{ii}^{(n)}$ .

Si vuol far rilevare che, in base alla precedente descrizione, il dominio della funzione  $f(x)$  è l'intervallo chiuso  $[0,1]$  e quindi le formule esplicite per la valutazione dei coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  si riferiscono a tale intervallo. Nelle applicazioni, il dominio potrebbe non essere l'intervallo  $[0,1]$ , ma altresì l'intervallo generico  $[a,b]$ . In tal caso, occorre prescrivere la trasformazione:

$$x = \frac{\hat{x} - a}{b - a} \quad (1.156)$$

allo scopo di fare corrispondere a  $\hat{x}$  nell'intervallo  $[a,b]$ ,  $x$  nell'intervallo  $[0,1]$ . In generale, esistono due modi per risolvere un problema definito nel generico dominio  $[a,b]$ . Il primo consiste nel trasformare tutte le derivate rispetto a  $\hat{x}$  in derivate rispetto a  $x$ . A questo punto la discretizzazione viene effettuata nell'intervallo  $[0,1]$  e le relazioni (1.142), (1.146), (1.150), (1.154) e (1.155) possono essere utilizzate direttamente. Il secondo, invece, consiste nel discretizzare direttamente il dominio  $[a,b]$  e nel trasformare i coefficienti  $\zeta_{ij}^{(n)}$  definiti nell'intervallo  $[0,1]$  nei corrispondenti coefficienti  $\hat{\zeta}_{ij}^{(n)}$  definiti nell'intervallo  $[a,b]$ . Infatti, utilizzando l'equazione (1.156) è possibile scrivere:

$$\frac{df(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{d\hat{x}} = \frac{1}{b-a} \frac{df(x)}{dx} \quad (1.157)$$

In maniera del tutto analoga, per le derivate di ordine  $n$ , è possibile ricavare la relazione:

$$\frac{d^n f(\hat{x})}{d\hat{x}^n} = \frac{1}{(b-a)^n} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (1.158)$$

Ricordando la legge di quadratura differenziale (1.110) e sostituendola nella (1.158), si ricava:

$$\left. \frac{d^n f(\hat{x})}{d\hat{x}^n} \right|_{\hat{x}_i} = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad (1.159)$$

Si è così dedotta la legge di trasformazione dei coefficienti di ponderazione che consente di passare dall'intervallo  $[0,1]$  al generico intervallo  $[a,b]$ :

$$\hat{\zeta}_{ij}^{(n)} = \frac{\zeta_{ij}^{(n)}}{(b-a)^n} \quad (1.160)$$

La (1.160) risulta essere generale e valida non solo per la quadratura differenziale basata sull'espansione di Fourier, ma anche per la quadratura differenziale polinomiale.

### 1.2.3 APPROCCIO MEDIANTE LA MOLTIPLICAZIONE MATRICIALE

In base alla definizione di operatore differenziale è lecito scrivere:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) \quad (1.161)$$

Nella relazione (1.161) compaiono la derivata prima e la derivata seconda di  $f(x)$  rispetto ad  $x$  che, per semplicità di rappresentazione, vengono spesso indicate attraverso i simboli  $f^{(1)}(x)$  e  $f^{(2)}(x)$  rispettivamente. Qualora si applichi il concetto di quadratura differenziale per approssimare il primo membro dell'equazione (1.161), si ottiene:

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{j=1}^N \zeta_{ij}^{(2)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.162)$$

Applicando due volte tale approssimazione al secondo membro, si ha:

$$f^{(2)}(x_i) = \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} f^{(1)}(x_k) = \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} \left( \sum_{j=1}^N \zeta_{kj}^{(1)} f(x_j) \right) = \sum_{j=1}^N \left( \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} \zeta_{kj}^{(1)} \right) f(x_j) \quad (1.163)$$

Le relazioni (1.162) e (1.163), consentono di ricavare:

$$\zeta_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} \zeta_{kj}^{(1)} \quad (1.164)$$

Definendo le due matrici:

$$\zeta^{(1)} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(1)} & \zeta_{12}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{1N}^{(1)} \\ \zeta_{21}^{(1)} & \zeta_{22}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2N}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{N1}^{(1)} & \zeta_{N2}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{NN}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \zeta^{(2)} = \begin{bmatrix} \zeta_{11}^{(2)} & \zeta_{12}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{1N}^{(2)} \\ \zeta_{21}^{(2)} & \zeta_{22}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{2N}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_{N1}^{(2)} & \zeta_{N2}^{(2)} & \cdot & \cdot & \cdot & \zeta_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1.165)$$

l'equazione (1.164) può essere riscritta mediante la seguente espressione:

$$\zeta^{(2)} = \zeta^{(1)} \zeta^{(1)} \quad (1.166)$$

Tale equazione indica che i coefficienti di ponderazione relativi al secondo ordine di derivazione possono anche essere determinati attraverso la moltiplicazione della matrice dei coefficienti di ponderazione del primo ordine per se stessa.

Ragionando in maniera analoga e ricordando che si stanno utilizzando operatori lineari quali le derivate, si può anche scrivere la derivata di ordine  $n$  di una funzione regolare  $f(x)$ :

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{df}{dx} \right) \quad (1.167)$$

Se si indicano con  $\zeta^{(n-1)}$  ed  $\zeta^{(n)}$  le matrici dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine  $n-1$  ed  $n$ , l'applicazione della legge di quadratura differenziale all'equazione (1.167) fornisce la seguente relazione ricorsiva:

$$\zeta^{(n)} = \zeta^{(1)} \zeta^{(n-1)} = \zeta^{(n-1)} \zeta^{(1)}, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (1.168)$$

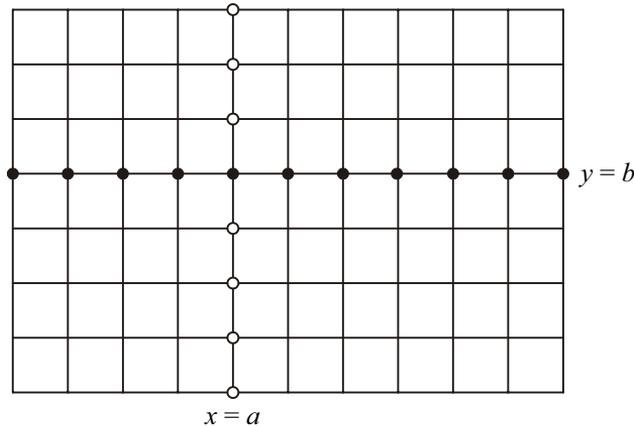
Sebbene la relazione appena illustrata appaia semplice, essa comporta più operazioni aritmetiche rispetto all'applicazione delle equazioni (1.124) e (1.126). Infatti, si può osservare come il calcolo di ogni coefficiente di ponderazione effettuato secondo l'equazioni (1.164) o l'equazione (1.168) coinvolga  $N$  moltiplicazioni ed  $N-1$  addizioni per un totale di  $2N-1$  operazioni aritmetiche. D'altro canto, l'applicazione dell'equazione (1.107) o della relazione ricorsiva (1.124) comporta solo due moltiplicazioni, una divisione ed una sottrazione ovvero un totale di quattro operazioni aritmetiche per il calcolo di ogni fattore non appartenente alla diagonale principale della relativa matrice. Tale calcolo risulta indipendente dal numero di punti nodali. Per il calcolo di ciascun fattore appartenente alla diagonale principale, invece, occorre utilizzare l'equazione (1.108) o l'equazione (1.126), il che comporta un complesso di  $N-2$  sottrazioni. Il numero di operazioni aritmetiche da eseguire applicando le equazioni (1.124) e (1.126) è sostanzialmente inferiore a quello indotto dall'utilizzo dell'equazione (1.168). La conclusione che si può trarre da quanto detto è che, all'aumentare del numero di punti nodali, il calcolo dei coefficienti di ponderazione attraverso le equazioni ricorsive (1.124) e (1.126) risulta relativamente poco oneroso e maggiormente accurato rispetto a quello derivante dall'uso dell'equazione (1.168), a causa dei minori errori di arrotondamento. Infatti, la formulazione ricorsiva di Shu riduce l'eventuale propagazione dell'errore insita nell'approccio matriciale per la determinazione dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine elevato. Occorre tener presente che, se dal punto di vista formale il

calcolo dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine superiore  $\zeta^{(2)}, \zeta^{(3)}, \zeta^{(4)}$  a partire dalla matrice dei coefficienti del primo ordine, è corretto, l'approssimazione ottenuta risulta sempre meno accurata. Questo fenomeno è dovuto al fatto che, al crescere dell'ordine di derivazione aumenta l'errore commesso nella valutazione dei coefficienti di ponderazione per le derivate di ordine superiore.

### 1.2.4 ESTENSIONE AL CASO MULTIDIMENSIONALE

Nelle applicazioni a problemi formulati in spazi a due, tre o più dimensioni come, ad esempio nel caso di piastre o gusci, l'approssimazione descritta in precedenza deve essere estesa al caso multidimensionale.

L'estensione al caso multidimensionale verrà sviluppata con riferimento all'approssimazione polinomiale. I domini multidimensionali possono essere regolari o meno, ma in seguito verrà affrontata solo l'espansione diretta ad un dominio regolare, tenendo comunque presente che per domini irregolari occorre seguire una strada diversa.



**Figura 1.3** – Distribuzione dei punti nodali in un dominio rettangolare.

La formulazione del GDQM nel caso di problemi in una sola dimensione può essere direttamente estesa al caso multidimensionale, qualora il dominio di discretizzazione sia regolare. Nel caso bidimensionale, per dominio regolare si intende un rettangolo o una qualsiasi altra forma regolare, come ad esempio un cerchio anche se, nella presente esposizione, si farà riferimento solo ad un dominio rettangolare, per semplicità.

Si consideri una funzione  $f(x, y)$  definita su un dominio bidimensionale rettangolare.

In figura 1.3 il dominio è stato discretizzato, per semplicità, in modo tale che l'intervallo lungo ogni linea orizzontale rimanga lo stesso, così come lungo ogni linea verticale. In questo modo, è facile osservare che è possibile usare la medesima distribuzione di coordinate per ogni linea orizzontale e in maniera analoga per ogni linea verticale.

Si prenda in esame una singola linea orizzontale, corrispondente all'equazione  $y = b$ , dove  $b$  è un valore costante. Lungo questa linea si può supporre che il valore della funzione  $f(x, b)$  è approssimabile da un polinomio  $P_N(x)$  di grado  $N-1$  che costituisce uno spazio vettoriale lineare  $N$ -dimensionale  $V_N$ , nel quale è possibile individuare un insieme di  $N$  vettori di base (o polinomi di base)  $p_h(x)$ ,  $h = 1, 2, \dots, N$ . Allo stesso modo si prenda in esame una singola linea verticale corrispondente all'equazione  $x = a$ , dove  $a$  è un valore costante. Lungo questa linea coordinata il valore della funzione  $f(a, y)$  è approssimabile da un polinomio  $P_M(y)$  di grado  $M-1$  che costituisce uno spazio vettoriale lineare  $M$ -dimensionale  $V_M$ , nel quale è possibile individuare un insieme di  $M$  vettori di base (o polinomi di base)  $s_r(y)$ ,  $r = 1, 2, \dots, M$ .

La  $f(x, y)$  in ogni punto del dominio rettangolare può essere approssimata da un polinomio  $P_{N \times M}(x, y)$  che assume la forma generale:

$$f(x, y) \cong P_{N \times M}(x, y) = \sum_{h=1}^N \sum_{r=1}^M c_{hr} p_h(x) s_r(y) \quad (1.169)$$

dove  $c_{hr}$  sono degli opportuni coefficienti. Scegliendo come polinomi di base i polinomi in forma monomia (1.77) per entrambe le direzioni coordinate, si può riscrivere l'espressione (1.169):

$$f(x, y) \cong P_{N \times M}(x, y) = \sum_{h=1}^N \sum_{r=1}^M d_{hr} x^{h-1} y^{r-1} \quad (1.170)$$

dove  $d_{hr}$  sono le costanti che definiscono il polinomio approssimante.  $P_{N \times M}(x, y)$  costituisce uno spazio vettoriale lineare  $V_{N \times M}$  di dimensione  $N \times M$  nel rispetto delle operazioni di addizione vettoriale e di moltiplicazione per uno scalare. In quanto spazio vettoriale lineare,  $V_{N \times M}$  conterrà un insieme di vettori di base (o polinomi di base) rappresentabile nella forma:

$$\Phi_{hr}(x, y) = p_h(x) s_r(y) \quad (1.171)$$

In particolare, la dimostrazione della validità di questa scelta è fatta ricordando che

$p_h(x)$ ,  $s_r(y)$  devono essere linearmente indipendenti essendo, a loro volta, dei vettori di base degli spazi  $V_N$  e  $V_M$ .

Si supponga, in base alla legge di quadratura differenziale, che la formulazione lineare seguente sia soddisfatta per la funzione  $f(x, y)$  e per le sue derivate prime:

$$f_x^{(1)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} f(x_k, y_j), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1.172)$$

$$f_y^{(1)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{l=1}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(1)} f(x_i, y_l), \quad j=1, 2, \dots, M \quad (1.173)$$

dove  $f_x^{(1)}(x_i, y_j)$  e  $f_y^{(1)}(x_i, y_j)$  sono le derivate parziali del primo ordine, fatte rispetto a  $x$  ed a  $y$ , della funzione  $f(x, y)$  nel punto nodale  $(x_i, y_j)$ ,  $\zeta_{ik}^{(1)}$  e  $\bar{\zeta}_{jl}^{(1)}$  rappresentano i coefficienti di ponderazione relativi a tali derivate e  $f(x_k, y_j)$ ,  $f(x_i, y_l)$  definiscono i valori della funzione nei punti in cui è stato discretizzato il dominio. Poiché tali espressioni sono formalmente analoghe a quelle già viste nel caso di problemi monodimensionali, anch'esse definiscono degli *operatori lineari*. Inoltre, per le proprietà di uno spazio vettoriale lineare, è possibile constatare che se tutti i polinomi di base  $\Phi_{hr}(x, y)$  soddisfano gli operatori lineari delle equazioni (1.172) e (1.173), allora questo è verificato per ogni polinomio di  $V_{N \times M}$ . Sostituendo  $\Phi_{ij}(x, y)$  nelle equazioni (1.172) e (1.173), si ricava:

$$\sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} p_h(x_k) = p_h^{(1)}(x_i), \quad i, h=1, 2, \dots, N \quad (1.174)$$

$$\sum_{l=1}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(1)} s_r(y_l) = s_r^{(1)}(y_j), \quad j, r=1, 2, \dots, M \quad (1.175)$$

dove  $p_h^{(1)}(x_i)$  rappresenta la derivata del primo ordine di  $p_h(x)$  nei punti  $x_i$ , mentre  $s_r^{(1)}(y_j)$  rappresenta la derivata del primo ordine di  $s_r(y)$  nei punti  $y_j$ . In base alle ultime equazioni mostrate si evince che i coefficienti  $\zeta_{ik}^{(1)}$  o  $\bar{\zeta}_{jl}^{(1)}$  sono relazionati solamente ai polinomi base  $p_h(x)$  o  $s_r(y)$ . Facendo riferimento alla quadratura differenziale polinomiale e tenendo presente che analoghe considerazioni possono essere fatte per la quadratura differenziale basata sull'espansione in serie di Fourier, la formulazione adottata nel caso monodimensionale per il calcolo dei coefficienti può essere direttamente estesa al

caso in esame come segue:

$$\zeta_{ik}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_k)\mathcal{L}^{(1)}(x_k)}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N \quad (1.176)$$

$$\zeta_{ii}^{(1)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N \zeta_{ik}^{(1)}, \quad i = k \quad (1.177)$$

per il calcolo dei coefficienti delle derivate parziali del primo ordine in  $x$  e:

$$\bar{\zeta}_{jl}^{(1)} = \frac{\mathcal{P}^{(1)}(y_j)}{(y_j - y_l)\mathcal{P}^{(1)}(y_l)}, \quad j \neq l, \quad j, l = 1, 2, \dots, M \quad (1.178)$$

$$\bar{\zeta}_{jj}^{(1)} = - \sum_{l=1, l \neq j}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(1)}, \quad j = l \quad (1.179)$$

per il calcolo dei coefficienti delle derivate parziali del primo ordine in  $y$ .

Nelle (1.176) e (1.178) si può osservare la presenza delle quantità  $\mathcal{L}^{(1)}(x_i)$  e  $\mathcal{P}^{(1)}(y_j)$  che hanno le seguenti espressioni:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (1.180)$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(y_j) = \prod_{l=1, l \neq j}^M (y_j - y_l) \quad (1.181)$$

In modo del tutto simile, si possono ottenere le relazioni per il calcolo dei coefficienti di ponderazione relative alle derivate del secondo ordine ed a quelle di ordine superiore. Le relazioni ricorsive per problemi bidimensionali risultano essere:

$$\zeta_{ik}^{(n)} = n \left( \zeta_{ii}^{(n-1)} \zeta_{ik}^{(1)} - \frac{\zeta_{ik}^{(n-1)}}{x_i - x_k} \right), \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, N, \quad n = 2, 3, \dots, N-1 \quad (1.182)$$

$$\zeta_{ii}^{(n)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N \zeta_{ik}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.183)$$

$$\bar{\zeta}_{jl}^{(m)} = m \left( \bar{\zeta}_{jj}^{(m-1)} \bar{\zeta}_{jl}^{(1)} - \frac{\bar{\zeta}_{jl}^{(m-1)}}{y_j - y_l} \right), \quad j \neq l, \quad j, l = 1, 2, \dots, M, \quad m = 2, 3, \dots, M-1 \quad (1.184)$$

$$\bar{\zeta}_{jj}^{(m)} = - \sum_{l=1, l \neq j}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(m)}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (1.185)$$

Nelle (1.182)-(1.185)  $\zeta_{ik}^{(n)}$  rappresentano i coefficienti di ponderazione delle derivate di ordine  $n$  di  $f(x, y)$  fatte rispetto alla variabile  $x$  e calcolate nel punto nodale  $(x_i, y_j)$ , mentre  $\bar{\zeta}_{jl}^{(m)}$  indicano i coefficienti di ponderazione delle derivate di ordine  $m$  di  $f(x, y)$

fatte rispetto alla variabile  $y$  e calcolate nel punto nodale  $(x_i, y_j)$ . Indicando le prime derivate  $f_x^{(n)}(x_i, y_j)$ , le seconde  $f_y^{(m)}(x_i, y_j)$  e le rispettive derivate miste  $f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j)$ , i suddetti coefficienti sono tali da soddisfare le relazioni:

$$f_x^{(n)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(n)} f(x_k, y_j) \quad (1.186)$$

$$f_y^{(m)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial^m f(x, y)}{\partial y^m} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{l=1}^M \bar{\zeta}_{jl}^{(m)} f(x_i, y_l) \quad (1.187)$$

$$f_{xy}^{(n+m)}(x_i, y_j) = \left. \frac{\partial^{n+m} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \right|_{x=x_i, y=y_j} \cong \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \zeta_{ik}^{(n)} \bar{\zeta}_{jl}^{(m)} f(x_k, y_l) \quad (1.188)$$

con  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots, N-1$  e  $m = 1, 2, \dots, M-1$ .

Noti i valori della funzione in tutti i punti della discretizzazione, è facile determinare la funzione in ogni punto del dominio, anche non nodale, attraverso i polinomi interpolanti di Lagrange. Infatti, lungo una linea orizzontale della griglia definita da  $y = y_j$ , il valore della funzione può essere calcolato attraverso la seguente relazione:

$$f(x, y_j) = \sum_{i=1}^N p_i(x) f(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (1.189)$$

mentre lungo una linea verticale  $x = x_i$ , il valore funzionale diventa:

$$f(x_i, y) = \sum_{j=1}^M s_j(y) f(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.190)$$

In ogni punto non nodale del dominio rettangolare preso in considerazione, la funzione bidimensionale  $f(x, y)$  può essere espressa nella forma:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M p_i(x) s_j(y) f(x_i, y_j) \quad (1.191)$$

in cui  $p_i(x)$  ed  $s_j(y)$  rappresentano i polinomi interpolanti di Lagrange:

$$p_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^N \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad s_j(y) = \prod_{k=1, k \neq j}^M \frac{y - y_k}{y_j - y_k} \quad (1.192)$$

In maniera analoga a quanto precedentemente esposto, l'approssimazione tridimensionale delle derivate parziali, di ordine generico  $p$ ,  $r$  e  $s$  della funzione  $f(x, y, z)$  regolare risulta essere:

$$\left. \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{l=1}^{N_x} \zeta_{il}^{(p)} f(x_l, y_j, z_k), \quad p = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (1.193)$$

$$\left. \frac{\partial^r f}{\partial y^r} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{m=1}^{N_y} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)} f(x_i, y_m, z_k), \quad r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (1.194)$$

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial z^s} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{n=1}^{N_z} \tilde{\zeta}_{kn}^{(s)} f(x_i, y_j, z_n), \quad s = 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (1.195)$$

$$\left. \frac{\partial^p}{\partial x^p} \left( \frac{\partial^r f}{\partial y^r} \right) \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{l=1}^{N_x} \zeta_{il}^{(p)} \sum_{m=1}^{N_y} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)} f(x_l, y_m, z_k) \quad (1.196)$$

$$\left. \frac{\partial^{p+r+s} f}{\partial x^p \partial y^r \partial z^s} \right|_{(x_i, y_j, z_k)} \cong \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} \zeta_{il}^{(p)} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)} \tilde{\zeta}_{kn}^{(s)} f(x_l, y_m, z_n) \quad (1.197)$$

Nelle equazioni (1.193)-(1.197),  $\zeta_{il}^{(p)}$ ,  $\bar{\zeta}_{jm}^{(r)}$  e  $\tilde{\zeta}_{kn}^{(s)}$  indicano i coefficienti di ponderazione, calcolati nel generico punto dello spazio tridimensionale e utilizzati nella determinazione delle derivate di qualsiasi ordine della funzione  $f(x, y, z)$ , nelle direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$ , rispettivamente.  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$  sono il numero totale dei punti nodali scelti per discretizzare il dominio lungo gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

I coefficienti di ponderazione  $\zeta_{il}^{(p)}$  con  $i \neq l$  possono essere ottenuti attraverso la formula ricorsiva:

$$\zeta_{il}^{(p)} = p \left( \zeta_{il}^{(p-1)} \zeta_{il}^{(1)} - \frac{\zeta_{il}^{(p-1)}}{x_i - x_l} \right), \quad p = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad i, l = 1, 2, \dots, N_x \quad (1.198)$$

dove  $\zeta_{il}^{(1)}$  risulta:

$$\zeta_{il}^{(1)} = \frac{\mathcal{L}^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_l) \mathcal{L}^{(1)}(x_l)}, \quad i, l = 1, 2, \dots, N_x \quad (1.199)$$

essendo:

$$\mathcal{L}^{(1)}(x_i) = \prod_{l=1, l \neq i}^{N_x} (x_i - x_l)$$

Quando  $i = l$ , i coefficienti di ponderazione  $\zeta_{ii}^{(p)}$  si ottengono dalla relazione:

$$\zeta_{ii}^{(p)} = - \sum_{l=1, l \neq i}^{N_x} \zeta_{il}^{(p)}, \quad i, l = 1, 2, \dots, N_x, \quad p = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (1.200)$$

I coefficienti di ponderazione  $\bar{\zeta}_{jm}^{(r)}$  con  $j \neq m$  possono essere ottenuti attraverso la formula ricorsiva:

$$\bar{\zeta}_{jm}^{(r)} = r \left( \bar{\zeta}_{jj}^{(r-1)} \bar{\zeta}_{jm}^{(1)} - \frac{\bar{\zeta}_{jm}^{(r-1)}}{y_j - y_m} \right), \quad r = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad j, m = 1, 2, \dots, N_y \quad (1.201)$$

dove  $\bar{\zeta}_{jm}^{(1)}$  risulta:

$$\bar{\zeta}_{jm}^{(1)} = \frac{\mathcal{P}^{(1)}(y_j)}{(y_j - y_m) \mathcal{P}^{(1)}(y_m)}, \quad j, m = 1, 2, \dots, N_y \quad (1.202)$$

essendo:

$$\mathcal{P}^{(1)}(y_j) = \prod_{m=1, m \neq j}^{N_y} (y_j - y_m)$$

Quando  $j = m$ , i coefficienti di ponderazione  $\bar{\zeta}_{jj}^{(r)}$  si ottengono dalla relazione:

$$\bar{\zeta}_{jj}^{(r)} = - \sum_{m=1, m \neq j}^{N_y} \bar{\zeta}_{jm}^{(r)}, \quad j, m = 1, 2, \dots, N_y, \quad r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (1.203)$$

I coefficienti di ponderazione  $\tilde{\zeta}_{kn}^{(s)}$ , con  $k \neq n$ , possono essere ottenuti attraverso la formula ricorsiva:

$$\tilde{\zeta}_{kn}^{(s)} = s \left( \tilde{\zeta}_{kk}^{(s-1)} \tilde{\zeta}_{kn}^{(1)} - \frac{\tilde{\zeta}_{kn}^{(s-1)}}{z_k - z_n} \right), \quad s = 1, 2, \dots, N_z - 1, \quad k, n = 1, 2, \dots, N_z \quad (1.204)$$

dove  $\tilde{\zeta}_{kn}^{(1)}$  risulta:

$$\tilde{\zeta}_{kn}^{(1)} = \frac{\mathcal{Q}^{(1)}(z_k)}{(z_k - z_n) \mathcal{Q}^{(1)}(z_n)}, \quad k, n = 1, 2, \dots, N_z \quad (1.205)$$

essendo:

$$\mathcal{Q}^{(1)}(z_k) = \prod_{n=1, n \neq k}^{N_z} (z_k - z_n)$$

Quando  $k = n$ , i coefficienti di ponderazione  $\tilde{\zeta}_{kk}^{(s)}$  si calcolano dalla relazione:

$$\tilde{\zeta}_{kk}^{(s)} = - \sum_{n=1, n \neq k}^{N_z} \tilde{\zeta}_{kn}^{(s)}, \quad k, n = 1, 2, \dots, N_z, \quad s = 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (1.206)$$

## 1.2.5 TIPOLOGIE DI DISCRETIZZAZIONE

Si è visto in precedenza che il GDQM permette di approssimare le derivate parziali o totali di una qualsiasi funzione regolare, con una sommatoria lineare pesata dei valori assunti dalla funzione stessa in tutti i punti in cui è stato discretizzato il dominio. Dall'analisi dell'equazione (1.2) è possibile intuire come l'applicazione di tale tecnica

richieda una preventiva discretizzazione del dominio, oltre al calcolo dei coefficienti di ponderazione. Questi stadi computazionali sono le due fasi fondamentali del metodo numerico in parola. Tenendo presente che il punto chiave della tecnica è la definizione dei coefficienti di ponderazione per ogni ordine di derivazione, occorre ora dare risalto alla fase riguardante la definizione della discretizzazione del dominio. La scelta dei punti di griglia risulta un fattore decisivo per la precisione e l'accuratezza delle soluzioni ottenibili mediante la quadratura differenziale.

Ipotizzando un problema monodimensionale, per semplicità, i punti nodali in cui suddividere il dominio lineare possono essere scelti secondo due modalità ben precise: attraverso l'uso di una *discretizzazione con punti equidistanti* o *equispaziati* (detta anche *uniforme*), oppure mediante una *discretizzazione non equispaziata* (detta anche *non uniforme*). Tra le due classi menzionate viene frequentemente preferita la seconda, dal momento che il GDQM conduce a soluzioni approssimate più accurate, rispetto a quelle ottenibili tramite una discretizzazione uniforme.

Una metodologia razionale per la scelta della disposizione dei punti di griglia è fornita dalle radici dei *polinomi ortogonali*, che possono essere scelti come vettori base dello spazio vettoriale polinomiale. I classici polinomi ortogonali risultano suddivisi in tre classi, dette di Jacobi, Laguerre ed Hermite. Si può effettivamente utilizzare solo quella dei polinomi ortogonali di Jacobi, dal momento che solo essi risultano definiti in un intervallo chiuso (quasi tutte le applicazioni di interesse sono ristrette a dimensioni finite). La discretizzazione con punti non equidistanti può essere ottenuta scegliendo la loro disposizione in base alle radici dei *polinomi di Chebyshev del primo tipo*, dei *polinomi di Chebyshev del secondo tipo* e dei *polinomi di Legendre*, essendo tutti questi appartenenti alla suddetta categoria di polinomi ortogonali.

Una scelta che si è rivelata migliore di quelle effettuabili tramite i precedenti polinomi, è quella nota come "*Chebyshev-Gauss-Lobatto grid distribution*". In essa la posizione dei punti nodali è definita mediante una *discretizzazione armonica di tipo cosenico*. (discretizzazione non uniforme). Caratteristiche simili si riscontrano utilizzando un altro tipo di suddivisione del dominio nota come *discretizzazione quadratica*.

La discretizzazione di *Chebyshev-Gauss-Lobatto* presenta caratteristiche migliori, per quanto riguarda la velocità di convergenza ed l'accuratezza. Si vuol far rilevare che l'utilizzo della discretizzazione equispaziata conduce, nella maggior parte dei casi, a risultati inaccurati e oscillanti, in quanto le matrici dei coefficienti di ponderazione diventano mal condizionate all'aumentare del numero dei punti nodali.

Nell'applicazione del metodo di quadratura differenziale si consiglia, quindi, l'utilizzo di una discretizzazione non equispaziata.

Si indichi con  $N$  il numero di punti in cui si vuole suddividere il dominio e si consideri quest'ultimo come un dominio adimensionalizzato (cioè di estensione lineare unitaria:  $a \leq x \leq b \rightarrow 0 \leq \xi \leq 1$ , essendo  $\xi = (x-a)/L$ ). Con  $L = b-a$  si è indicata la lunghezza totale dell'intervallo di definizione  $[a, b]$  della funzione nella direzione  $x$ . In sintesi, la posizione dei punti di griglia può essere definita in uno dei seguenti modi:

- *Discretizzazione equispaziata o uniforme*

E' la scelta più semplice e naturale per la disposizione dei punti nodali. Una sua interpretazione grafica è già stata proposta in figura 1.2 mentre, a livello analitico, le posizioni dei punti nodali vengono individuate mediante la seguente relazione:

$$\xi_k = \frac{k-1}{N-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.207)$$

Pur essendo semplice, tale tipo di suddivisione non viene quasi mai utilizzata.

- *Discretizzazione armonica di tipo cosenico o "Chebyshev-Gauss-Lobatto grid distribution"*

Vista l'accuratezza dei risultati ottenuti e le ottime caratteristiche di stabilità e convergenza, è una tipologia di discretizzazione frequentemente utilizzata, con la quale è possibile definire un infittimento dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio. In particolare, le posizioni dei punti di griglia vengono individuate tramite la seguente relazione:

$$\xi_k = \frac{1 - \cos\left(\frac{k-1}{N-1}\pi\right)}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.208)$$

- *Discretizzazione quadratica*

E' una tipologia di discretizzazione che presenta caratteristiche di convergenza simili a quella precedente. Il posizionamento dei punti nodali viene ottenuto mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \xi_k = 2\left(\frac{k-1}{N-1}\right)^2 & k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2} \\ \xi_k = -2\left(\frac{k-1}{N-1}\right)^2 + 4\left(\frac{k-1}{N-1}\right) - 1 & k = \frac{N+1}{2} + 1, \dots, N-1, N \end{cases} \quad (1.209)$$

Appare evidente che per utilizzare una siffatta tipologia di discretizzazione è necessario

definire un numero dispari di punti nodali, in modo tale che il parametro  $k$  assuma valori interi. Tale assunzione permette la suddivisione del dominio in un numero pari di intervalli.

- *Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di prima specie (I tipo)*  
E' una tipologia di discretizzazione con la quale è possibile definire il posizionamento dei punti di griglia attraverso le seguenti espressioni ( $r_k$  è la radice del polinomio  $k$ -esimo):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}, \quad r_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.210)$$

- *Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di seconda specie (II tipo)*

Utilizzando tale tipologia di discretizzazione, il posizionamento dei punti di griglia è esprimibile mediante le espressioni seguenti ( $r_k$  è la radice del polinomio  $k$ -esimo):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}, \quad r_k = \cos\left(\frac{k}{N+1}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.211)$$

- *Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Legendre*

In quest'ultimo caso i punti di griglia vengono definiti nella seguente forma ( $r_k$  è la radice del polinomio  $k$ -esimo):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1}, \quad r_k = \left(1 - \frac{1}{8N^2} + \frac{1}{8N^3}\right) \cos\left(\frac{4k-1}{4N+2}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1.212)$$

Giova osservare che le ultime tre tipologie di discretizzazione utilizzano come punti nodali le radici di polinomi ortogonali e operano un infittimento dei punti di griglia agli estremi del dominio.

Queste tipologie di discretizzazione possono essere applicate per ottenere la discretizzazione nelle varie direzioni di un dominio multidimensionale regolare, pur essendo state definite con riferimento ad un problema monodimensionale.

Oltre alle sei tipologie di discretizzazione riportate precedentemente è possibile definire, a partire da queste, altri tipi di suddivisione caratterizzati da un maggiore o minore infittimento dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio lineare. La tecnica che consente di ottenere questo risultato è definita "*stretching formulation*". Essa permette di infittire o diradare i punti nodali in prossimità degli estremi più di quanto non riesca a fare la sola tecnica di discretizzazione tradizionale. Quest'ultima caratteristica risulta efficace, perché in alcune tipologie di problemi strutturali produce risultati più accurati rispetto a

quelli prodotti dalle distribuzioni nodali tradizionali.

- “*Stretching formulation*”

Il posizionamento dei punti di griglia è esprimibile attraverso le tipologie di discretizzazione tradizionale usando la seguente formulazione:

$$\zeta_k = (1 - \alpha)(3\xi_k^2 - 2\xi_k^3) + \alpha\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.213)$$

dove  $\xi_k$  rappresenta le coordinate nodali di una qualsiasi delle sei tipologie di discretizzazione e  $\alpha$  è il *parametro di stretching*. Per  $\alpha = 1$ , si riottengono le discretizzazioni fondamentali. In particolare si ha:

$$\alpha = 1 \Rightarrow \zeta_k = \xi_k$$

Il valore scelto per il parametro di stretching  $\alpha$  caratterizza l’infittimento agli estremi. Se il parametro di stretching  $\alpha$  viene assunto negativo, alcuni dei valori delle coordinate dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio possono risultare minori dell’estremo inferiore o maggiori dell’estremo superiore, ossia al di fuori del dominio. E’ facile osservare che il tipo di discretizzazione costituita da un numero dispari di punti di griglia risulta simmetrica rispetto alla mezzeria del dominio. Quindi alle coordinate negative dei punti vicini all’estremo inferiore corrispondono le coordinate di punti al di fuori dell’estremo superiore. Ciò significa che è sufficiente cercare solo i punti le cui coordinate risultino negative. Per evitare l’inconveniente sopra ricordato e in base alle precedenti affermazioni, le coordinate dei punti  $\zeta_k$  vicini alle estremità del dominio, che soddisfano contemporaneamente le condizioni:

$$\zeta_k < 0, \quad \zeta_{k+1} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}$$

vengono ridefinite nella seguente maniera:

$$\zeta_k = \beta\zeta_{k+1}, \quad \zeta_{N-k+1} = 1 - \zeta_k \quad (1.214)$$

dove  $\beta$  è una costante positiva che deve verificare la condizione:  $\zeta_k - \zeta_{k-1} < \zeta_{k+1} - \zeta_k$ . Frequentemente si assume  $\beta = 0.1$ . Con tale tipologia di discretizzazione risulta possibile addensare ( $\alpha < 1$ ) o diradare ( $\alpha > 1$ ) in maniera arbitraria i punti nodali agli estremi del dominio.

### 1.2.5.1 Tecnica dei $\delta$ -Sampling Points

E’ stato più volte affermato che le equazioni che governano diversi problemi

dell'ingegneria strutturale sono equazioni differenziali alle derivate parziali. L'ordine di tali equazioni può essere superiore al secondo. Inoltre, le condizioni al contorno associate alla frontiera variano con il modello matematico impiegato a rappresentare il problema in esame. Dette condizioni possono presentarsi in forma differenziale, e quindi approssimabili con la tecnica GDQ.

Molto spesso occorre soddisfare due condizioni al contorno in un solo punto. L'approssimazione introdotta con il GDQ Method si riferisce, invece, ad un solo punto. Per implementare tutte e due le condizioni al contorno si fa ricorso alla cosiddetta *tecnica dei  $\delta$ -Sampling Points*, introdotta per la prima volta da Jang, Bert e Striz nel 1989.

Tale tecnica considera punti molto vicini a quelli estremi ( $\delta = 10^{-5}L$ , dove  $\delta$  rappresenta la distanza dal bordo e  $L$  la lunghezza del dominio lineare), per rispettare il più possibile le condizioni geometriche del problema. Lo scopo è quello di ottenere un'approssimazione accurata. Pertanto, le condizioni al contorno vengono imposte nei punti estremi del dominio e nei cosiddetti  $\delta$ -points. I  $\delta$ -points sono considerati come punti del contorno, visto che la loro distanza  $\delta$  dal contorno stesso viene scelta molto piccola. Agendo in questo modo, si è in grado di soddisfare entrambe le condizioni dal momento che si può applicare una condizione di bordo nel punto estremo e l'altra nel  $\delta$ -point.

Si vuol far rilevare che, per lo studio di un problema via GDQ Method occorre prestare attenzione alla formulazione del problema stesso. Utilizzando una formulazione del problema, in cui il numero di equazioni governanti sia pari al numero di condizioni al contorno non si rende necessaria l'applicazione della tecnica dei  $\delta$ -points.

Recentemente, Shu (2000) ha proposto una metodologia che permette di evitare l'utilizzo della tecnica in parola anche quando il numero di equazioni governati non sia pari al numero di condizioni al contorno. In tal modo, si possono applicare due condizioni al contorno nello stesso punto. L'approccio in parola consiste nello scrivere le due condizioni al contorno nel punto estremo del dominio, senza definire alcuna equazione nel punto prossimo all'estremità. In tal caso, si scrivono due equazioni in un punto, dalle quali si riescono a ricavare le incognite nel punto estremo e nel punto ad esso attiguo. Infatti, poiché le condizioni al contorno discretizzate attraverso la tecnica GDQ contengono entrambe le incognite cercate, da una delle due equazioni al contorno si ricava un'incognita e dall'altra la rimanente.

Per ottenere risultati accurati, la metodologia richiede un numero di punti di griglia  $N$

maggiore rispetto a quelli necessari utilizzando la tecnica dei  $\delta$ -points. In altre parole, quando si considerano distribuzioni rade di punti nodali, conviene utilizzare i  $\delta$ -points per migliorare l'accuratezza della soluzione. Quando si scelgono distribuzioni con un numero di punti di griglia abbastanza elevato, invece, risulta possibile non considerare  $\delta$ -points.

L'utilizzo dei  $\delta$ -points modifica leggermente l'interpretazione analitica delle tipologie di discretizzazione descritte in precedenza. In particolare, le espressioni atte a definire la posizione dei punti nodali in presenza della tecnica dei  $\delta$ -points sono le seguenti:

- *Discretizzazione equispaziata o uniforme*

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_k = \frac{k-2}{N-3}, \quad k = 3, 4, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (1.215)$$

- *Discretizzazione armonica di tipo cosenico o "Chebyshev-Gauss-Lobatto grid distribution"*

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_k = \frac{1 - \cos\left(\frac{k-2}{N-3}\pi\right)}{2}, \quad k = 3, 4, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (1.216)$$

- *Discretizzazione quadratica*

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \left\{ \begin{aligned} \xi_k &= 2\left(\frac{k-1}{N-1}\right)^2 & k = 3, 4, \dots, \frac{N+1}{2} \\ \xi_k &= -2\left(\frac{k-1}{N-1}\right)^2 + 4\left(\frac{k-1}{N-1}\right) - 1 & k = \frac{N+1}{2} + 1, \dots, N-3, N-2 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.217)$$

E' da notare che il numero di punti nodali deve essere dispari di modo da definire valori interi per il parametro  $k$ .

- *Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di prima specie (I tipo)*

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_{k+1} = \frac{r_k - r_1}{r_{N-2} - r_1}, \quad r_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2(N-2)}\pi\right), \quad k = 2, 3, \dots, N-3 \end{aligned} \quad (1.218)$$

- *Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Chebyshev di seconda specie (II tipo)*

$$\begin{aligned} \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_{k+1} = \frac{r_k - r_1}{r_{N-2} - r_1}, \quad r_k = \cos\left(\frac{k}{(N-2)+1}\pi\right), \quad k = 2, 3, \dots, N-3 \end{aligned} \quad (1.219)$$

- Discretizzazione secondo le radici del polinomio di Legendre

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, \quad \xi_2 = \delta, \quad \xi_{N-1} = 1 - \delta, \quad \xi_N = 1, \\ \xi_{k+1} &= \frac{r_k - r_1}{r_{N-2} - r_1}, \quad k = 2, 3, \dots, N-3, \\ r_k &= \left( 1 - \frac{1}{8(N-2)^2} + \frac{1}{8(N-2)^3} \right) \cos \left( \frac{4k-1}{4(N-2)+2} \pi \right) \end{aligned} \quad (1.220)$$

### 1.2.5.2 Discretizzazione di un dominio lineare

Si consideri un dominio lineare adimensionalizzato per suddividerlo attraverso  $N = 11$  punti nodali. Tale suddivisione può essere effettuata utilizzando una discretizzazione equispaziata, oppure disponendo i punti in modo che la loro distanza non sia uniforme. Indipendentemente dalla tipologia di discretizzazione, è possibile adottare o meno la tecnica dei  $\delta$ -points. Pertanto, si può suddividere il dominio in differenti modi, applicando le equazioni precedentemente esposte. I risultati riportati nelle tabelle 1.2-1.9 sono relativi a specifiche tipologie di suddivisione del dominio. In particolare, le prime sei tabelle 1.2-1.7 presentano le coordinate dei punti relative alle discretizzazioni tradizionali con e senza  $\delta$ -points. Le ultime due tabelle 1.8-1.9, invece, mostrano le coordinate dei punti nodali ottenute applicando la stretching formulation alla discretizzazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto, per due diversi valori del parametro di stretching  $\alpha$ .

Gli stessi risultati possono essere anche visualizzati graficamente disponendo i vari punti lungo una retta di riferimento per ognuna delle discretizzazioni considerate. La suddivisione del dominio risulta simmetrica, sia eseguendo una discretizzazione uniforme sia operando una discretizzazione non uniforme. Mediante una qualunque discretizzazione non uniforme, si osserva che la griglia di punti è molto più fitta in prossimità degli estremi, rispetto al caso di una discretizzazione equispaziata.

Si preferisce discretizzare il dominio secondo una suddivisione non uniforme per studiare in modo più accurato le zone estreme del dominio, oltre a conseguire soluzioni più accurate.

La figura 1.4 confronta le sei tipologie di collocazione tradizionali, mentre la figura 1.5 mostra come cambiano tali discretizzazioni qualora si utilizzi la tecnica dei  $\delta$ -points. La figura successiva 1.6 mostra un ingrandimento, effettuato vicino all'estremità sinistra del dominio, evidenziando la presenza del  $\delta$ -point. In tale immagine, si osserva la presenza

del  $\delta$ -point ad una distanza  $\delta = 10^{-5}$  dal punto d'estremità, non visibile nella precedente figura vista l'estrema vicinanza di tali punti.

Le ultime tre figure 1.7-1.9 mostrano l'influenza della stretching formulation sulle tipologie di collocazione tradizionali. La discretizzazione ottenuta tramite la stretching formulation risulta essere più fitta alle estremità rispetto alla distribuzione di partenza per  $\alpha < 1$ , mentre per  $\alpha > 1$  è più rada alle estremità rispetto alla discretizzazione di partenza.

**Tabella 1.2** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione uniforme.

Discretizzazione uniforme $N = 11 ; \delta = 10^{-5}$	$k$	$\xi_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\xi_1$	0.000000	0.000000
	2	$\xi_2$	0.100000	0.000010
	3	$\xi_3$	0.200000	0.125000
	4	$\xi_4$	0.300000	0.250000
	5	$\xi_5$	0.400000	0.375000
	6	$\xi_6$	0.500000	0.500000
	7	$\xi_7$	0.600000	0.625000
	8	$\xi_8$	0.700000	0.750000
	9	$\xi_9$	0.800000	0.875000
	10	$\xi_{10}$	0.900000	0.999990
	11	$\xi_{11}$	1.000000	1.000000

**Tabella 1.3** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Chebyshev-Gauss-Lobatto.

Discretizzazione armonica (cosenica) $N = 11 ; \delta = 10^{-5}$	$k$	$\xi_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\xi_1$	0.000000	0.000000
	2	$\xi_2$	0.024472	0.000010
	3	$\xi_3$	0.095492	0.038060
	4	$\xi_4$	0.206107	0.146447
	5	$\xi_5$	0.345492	0.308658
	6	$\xi_6$	0.500000	0.500000
	7	$\xi_7$	0.654508	0.691342
	8	$\xi_8$	0.793893	0.853553
	9	$\xi_9$	0.904508	0.961940
	10	$\xi_{10}$	0.975528	0.999990
	11	$\xi_{11}$	1.000000	1.000000

**Tabella 1.4** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione quadratica.

Discretizzazione quadratica $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	$\xi_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\xi_1$	0.000000	0.000000
	2	$\xi_2$	0.020000	0.000010
	3	$\xi_3$	0.080000	0.080000
	4	$\xi_4$	0.180000	0.180000
	5	$\xi_5$	0.320000	0.320000
	6	$\xi_6$	0.500000	0.500000
	7	$\xi_7$	0.680000	0.680000
	8	$\xi_8$	0.820000	0.820000
	9	$\xi_9$	0.920000	0.920000
	10	$\xi_{10}$	0.980000	0.999990
11	$\xi_{11}$	1.000000	1.000000	

**Tabella 1.5** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Chebyshev (I tipo).

Discretizzazione di Chebyshev (I tipo) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	senza $\delta$ -points		con $\delta$ -points	
		$r_k$	$\xi_k$	$r_k$	$\xi_k$
	1	0.989821	0.000000	0.984808	0.000000
2	0.909632	0.040507	0.866025	0.000010	
3	0.755750	0.118239	0.642788	0.060307	
4	0.540641	0.226900	0.342020	0.173648	
5	0.281733	0.357685	0.000000	0.326352	
6	0.000000	0.500000	-0.342020	0.500000	
7	-0.281733	0.642315	-0.642788	0.673648	
8	-0.540641	0.773100	-0.866025	0.826352	
9	-0.755750	0.881761	-0.984808	0.939693	
10	-0.909632	0.959493	-	0.999990	
11	-0.989821	1.000000	-	1.000000	

**Tabella 1.6** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Chebyshev (II tipo).

Discretizzazione di Chebyshev (II tipo) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	senza $\delta$ -points		con $\delta$ -points	
		$r_k$	$\xi_k$	$r_k$	$\xi_k$
	1	0.965926	0.000000	0.951057	0.000000
2	0.866025	0.051712	0.809017	0.000010	
3	0.707107	0.133975	0.587785	0.074675	
4	0.500000	0.241181	0.309017	0.190983	
5	0.258819	0.366025	0.000000	0.337540	
6	0.000000	0.500000	-0.309017	0.500000	
7	-0.258819	0.633975	-0.587785	0.662460	
8	-0.500000	0.758819	-0.809017	0.809017	
9	-0.707107	0.866025	-0.951057	0.925325	
10	-0.866025	0.948288	-	0.999990	
11	-0.965926	1.000000	-	1.000000	

**Tabella 1.7** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la discretizzazione di Legendre.

Discretizzazione di Legendre $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$	$k$	senza $\delta$ -points		con $\delta$ -points	
		$r_k$	$\xi_k$	$r_k$	$\xi_k$
	1	0.978165	0.000000	0.968070	0.000000
2	0.887051	0.046574	0.836018	0.000010	
3	0.730150	0.126776	0.613370	0.068204	
4	0.519096	0.234658	0.324254	0.183200	
5	0.269543	0.362220	0.000000	0.332526	
6	0.000000	0.500000	-0.324254	0.500000	
7	-0.269543	0.637780	-0.613370	0.667474	
8	-0.519096	0.765342	-0.836018	0.816800	
9	-0.730150	0.873224	-0.968070	0.931796	
10	-0.887051	0.953426	-	0.999990	
11	-0.978165	1.000000	-	1.000000	

**Tabella 1.8** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la stretching formulation.

Discretizzazione armonica (cosenica) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$ ; $\alpha = 0.2$	$k$	$\zeta_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\zeta_1$	0.000000	0.000000
	2	$\zeta_2$	0.006308	0.000002
	3	$\zeta_3$	0.039590	0.011000
	4	$\zeta_4$	0.129170	0.075736
	5	$\zeta_5$	0.289590	0.243330
	6	$\zeta_6$	0.500000	0.500000
	7	$\zeta_7$	0.710410	0.756670
	8	$\zeta_8$	0.870830	0.924264
	9	$\zeta_9$	0.960410	0.989000
	10	$\zeta_{10}$	0.993690	0.999998
	11	$\zeta_{11}$	1.000000	1.000000

**Tabella 1.9** – Suddivisione di un dominio adimensionalizzato secondo la stretching formulation.

Discretizzazione armonica (cosenica) $N = 11$ ; $\delta = 10^{-5}$ ; $\alpha = 1.5$	$k$	$\zeta_k$	senza $\delta$ -points	con $\delta$ -points
	1	$\zeta_1$	0.000000	0.000000
	2	$\zeta_2$	0.035824	0.000015
	3	$\zeta_3$	0.130430	0.054973
	4	$\zeta_4$	0.254196	0.190641
	5	$\zeta_5$	0.380430	0.349488
	6	$\zeta_6$	0.500000	0.500000
	7	$\zeta_7$	0.619570	0.650512
	8	$\zeta_8$	0.745804	0.809359
	9	$\zeta_9$	0.869570	0.945027
	10	$\zeta_{10}$	0.964176	0.999985
	11	$\zeta_{11}$	1.000000	1.000000

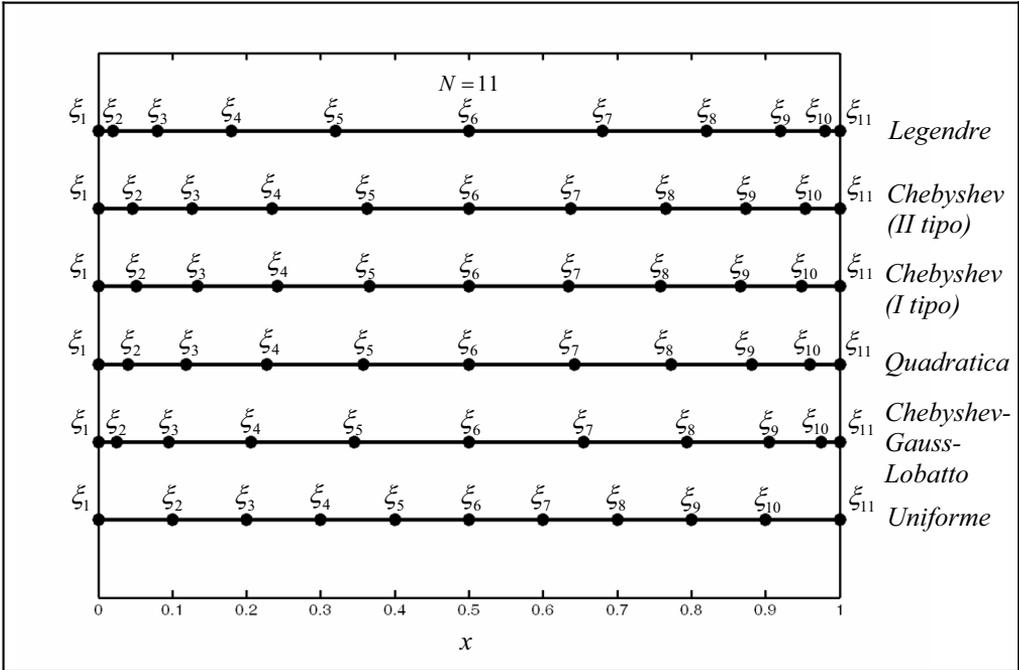


Figura 1.4 – Tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato senza  $\delta$ -points.

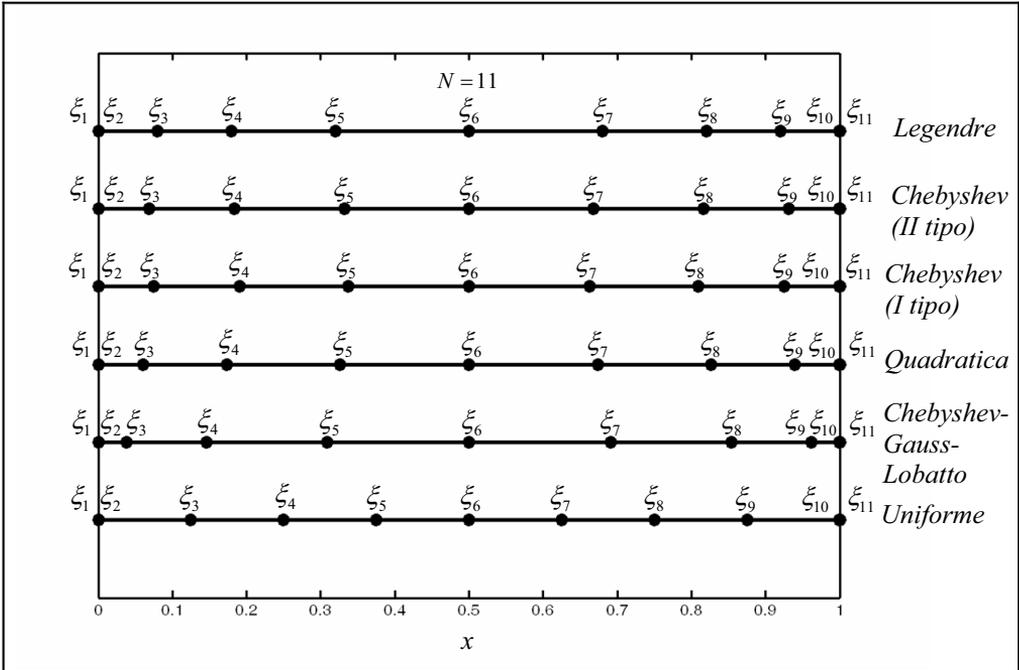


Figura 1.5 – Tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato con  $\delta$ -points.

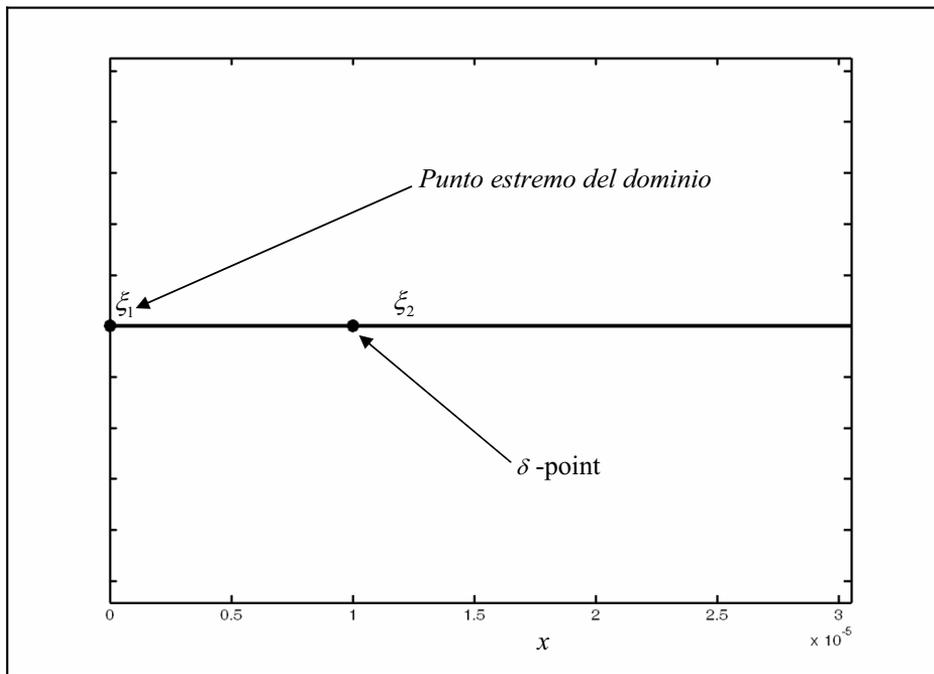


Figura 1.6 – Tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato:  $\delta$ -point.

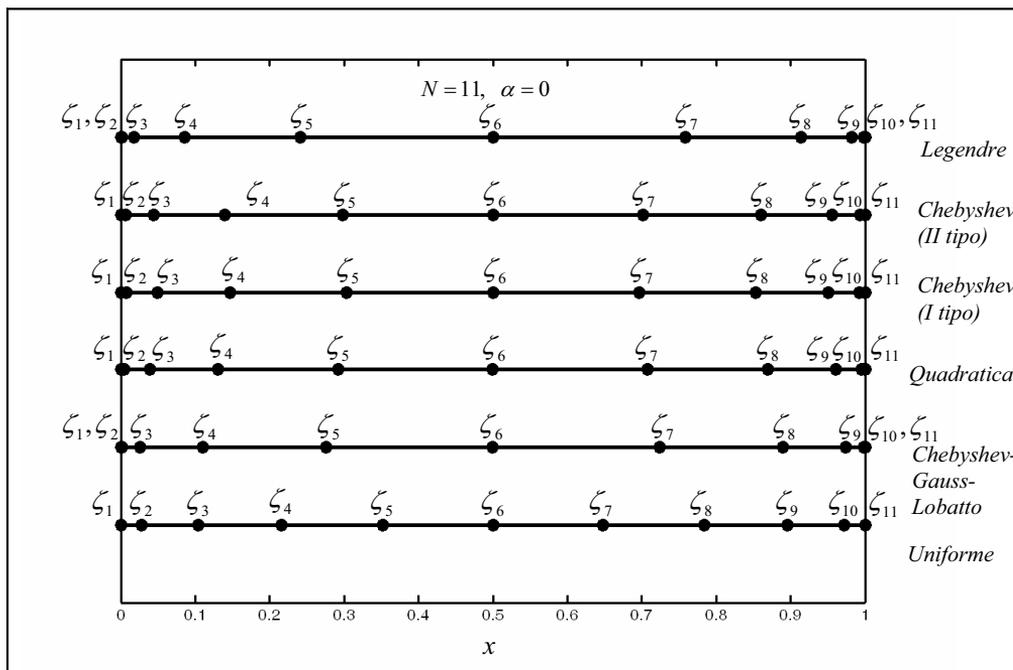


Figura 1.7 – Tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato con coefficiente di stretching  $\alpha = 0$  senza  $\delta$ -points.

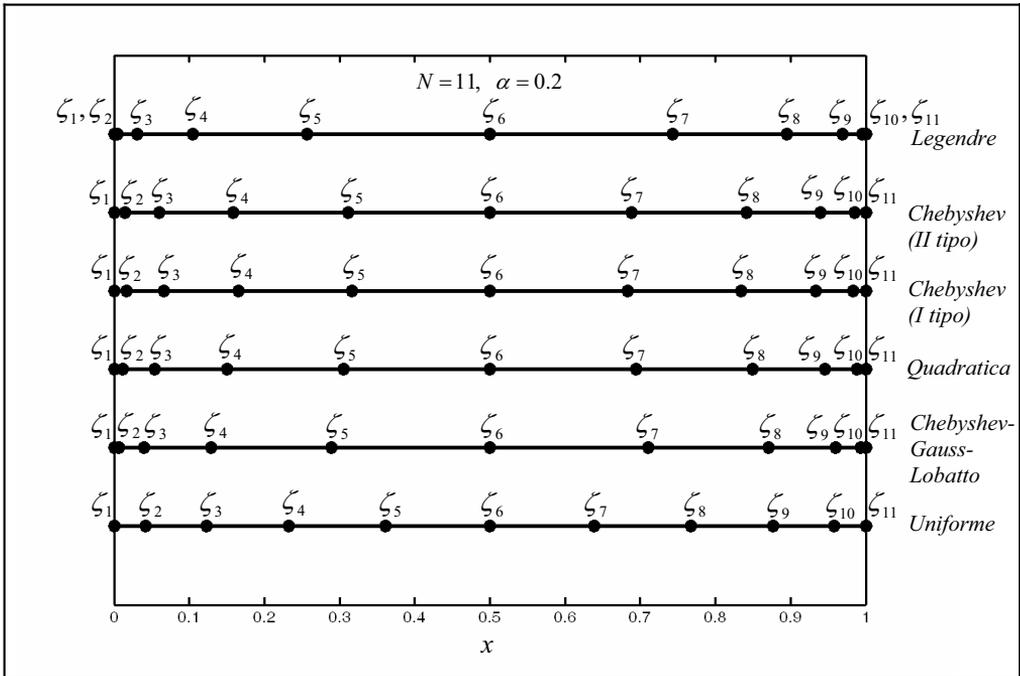


Figura 1.8 – Tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato con coefficiente di stretching  $\alpha = 0.2$  senza  $\delta$ -points.

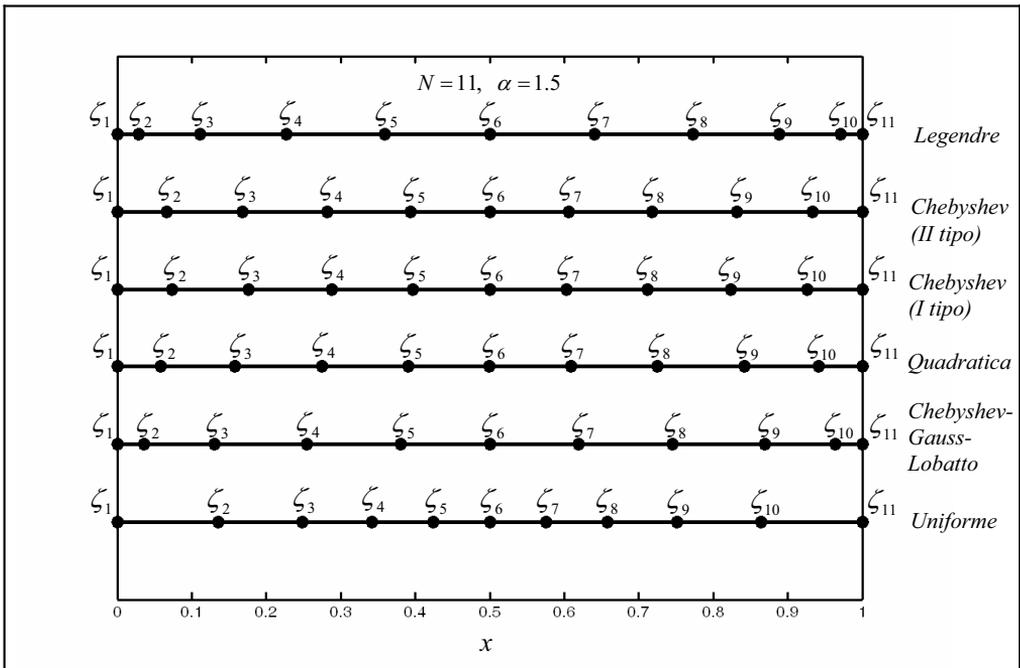


Figura 1.9 – Tipologie di discretizzazione di un dominio adimensionalizzato con coefficiente di stretching  $\alpha = 1.5$  senza  $\delta$ -points.



# *Chapter 2*

## *Mechanics of Anisotropic Thick Shells*

### **ABSTRACT**

Thick shell structures occupy a leading position in many branches of engineering technology and, in particular, in civil, mechanical, architectural, aeronautical, and marine engineering. Examples of shell structures in civil and architectural engineering are large-span roofs, cooling towers, liquid-retaining structures and water tanks, containment shells of nuclear power plants and concrete arch domes. In mechanical engineering, shell shapes are used in piping systems, turbine disks and pressure vessels. Aircrafts, missiles, rockets, ships and submarines are examples of the use of shells in aeronautical and marine engineering.

Shell structures are widespread in many fields of engineering because they show optimum conditions for dynamical behaviour, strength and stability. Shell structures support applied external forces efficiently by virtue of their geometrical shape. In other words, shells are much stronger and stiffer than other structural shapes. The aim of this chapter is to present the mechanical behaviour of shell structures.

A shell may be considered as a three-dimensional body and the methods of the linear elasticity theory may be applied [223-225]. However, a calculation based on these methods will generally be difficult and computationally expensive. In the theory of shells, an alternative simplified method is therefore used. Adapting some hypotheses, the 3D

problem of shell equilibrium may be reduced to the analysis of its middle surface only, and the given shell may be regarded as a 2D body. The approximations necessary for the development of an adequate theory of shells have been the subject of considerable discussions among investigators [226-247]. Starting from Love's theory for thin shells, which dates back to about 100 years ago, many contributions on this topic have been made, in order to seek better and better approximations of the exact three-dimensional elasticity solutions for shells. In the last fifty years, two-dimensional linear theories of thin shells have been developed including important contributions by Sanders [226], Timoshenko-Kreiger [227], Flügge [228], Gol'Denveizer [229], Novozhilov [230], Vlasov [231], Kraus [232], Leissa [233,234], Donnel [235], Niordson [236], Markuš [237] and Ventsel et al. [238]. All these contributions are based on the Kirchhoff-Love assumptions. This theory, named the Classical Shell Theory (CST), assumes that normals to the shell middle-surface remain straight and normal to it during deformations and unstretched in length.

It is worth noting that, when the theories of thin shells are applied to thick shells, the errors could be quite large. With the increasing use of thick shells in various engineering applications, simple and accurate theories for thick shells have been developed [232,239-246]. With respect to thin shells, thick shell theories take the transverse shear deformation and rotary inertia into account. The transverse shear deformation has been incorporated into shell theories by following the theory of Reissner-Mindlin, also named First-order Shear Deformation Theory (FSDT). Abandoning the assumption on the preservation of the normals, a comprehensive analysis for elastic shells was made by Kraus [232], Gould [238,239], Reddy [241,245], Wang et al. [242] and Soedel [243]. The present work is just based on FSDT.

The increase in the use of composite materials in all types of engineering structures in the last decades calls for improved analysis and design tools for these types of structures [245,246]. Thus, in this chapter, the mechanics of laminated composite shells is widely presented. Furthermore, due to the significant developments that have taken place in composite materials and structures, a new class of composite materials [247-269], called functionally graded materials (FGM), is considered. The mechanical characteristics of FGM are variable through the thickness of the shell in order to obtain the required response.

## *Capitolo 2*

# *Meccanica dei Gusci Moderatamente Spessi in Materiale Anisotropo*

### **INTRODUZIONE**

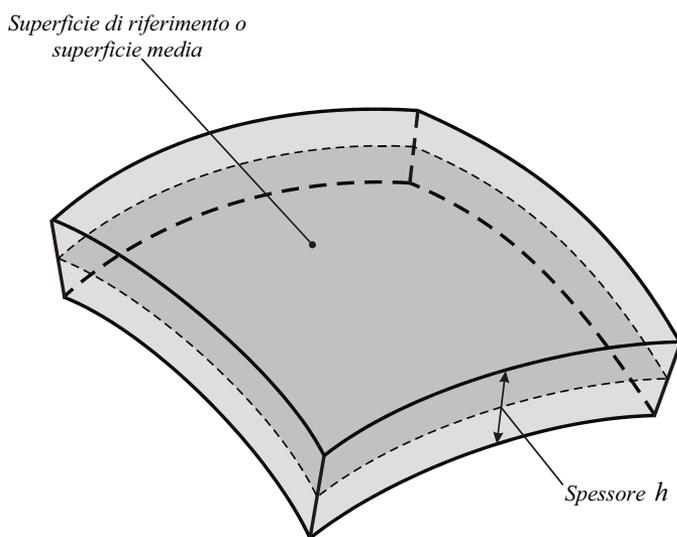
Gli elementi strutturali a guscio occupano una posizione importante nell'ingegneria civile, meccanica, architettonica, aeronautica e navale. Esempi di strutture a guscio nell'ingegneria civile e architettonica sono le coperture di grande luce, contenitori di liquidi e serbatoi, gusci di contenimento per le centrali nucleari, torri di raffreddamento, volte. Nell'ingegneria meccanica, le strutture a forma di guscio sono sfruttate in vari impianti, nei componenti per turbine, nei recipienti in pressione, negli pneumatici delle automobili. Aerei, missili, razzi, navi e sottomarini sono esempi che mostrano l'impiego delle strutture in parola nell'ingegneria aeronautica e navale. Altre applicazioni si trovano nell'ingegneria biomeccanica. Strutture a guscio sono presenti in diverse forme biologiche, come per esempio l'occhio, il cranio, e anche nel mondo vegetale e animale.

L'ampio utilizzo dei gusci nell'ingegneria è dovuto a diversi vantaggi. Le strutture in narrativa mostrano una straordinaria efficienza nel sopportare i carichi esterni, un alto grado di resistenza, un'ottima rigidità e un elevato rapporto peso-resistenza. Quest'ultimo rapporto è un criterio comunemente usato per valutare l'efficienza di un

componente strutturale. Più elevato è il rapporto peso-resistenza, migliore risulta essere la struttura. Secondo il suddetto criterio i gusci sono superiori alle altre tipologie strutturali a parità di luce e di ingombro. I gusci risultano anche estremamente gradevoli dal punto di vista estetico.

Un *guscio* è un corpo delimitato da due superfici curve che possono essere più o meno vicine tra di loro. In particolare, la distanza tra le due superfici risulta piccola se confrontata con le altre dimensioni della struttura. Qualora tali superfici degenerino in due piani, il guscio prende il nome di *piastra*.

Il luogo dei punti equidistanti dalle due superfici curve viene chiamata *superficie media* o *superficie di riferimento* (figura 2.1) La lunghezza del segmento perpendicolare alle superfici curve individua lo *spessore*  $h$ . Un guscio risulta interamente definito una volta che siano state specificate la forma della superficie media e lo spessore in ogni suo punto.



**Figura 2.1** – Superficie di riferimento e spessore di un guscio.

E' possibile caratterizzare le strutture a guscio in funzione dello spessore. Un guscio viene definito *sottile* quando il rapporto tra lo spessore e il raggio di curvatura minimo o il rapporto tra lo spessore e la dimensione minima della superficie media di riferimento può essere trascurato rispetto all'unità. Dal punto di vista ingegneristico, un guscio sottile soddisfa la condizione:

$$\max\left(\frac{h}{R_{\min}}, \frac{h}{L_{\min}}\right) \leq \frac{1}{20}$$

dove  $R_{\min}$  rappresenta il raggio di curvatura minimo ed  $L_{\min}$  la dimensione minima definita sulla superficie media. I gusci *moderatamente spessi*, invece, vengono definiti attraverso la relazione:

$$\max\left(\frac{h}{R_{\min}}, \frac{h}{L_{\min}}\right) \leq \frac{1}{10}$$

I gusci per i quali non è verificata nessuna delle precedenti condizioni vengono denominati *gusci spessi*. In questo caso, tutte le dimensioni strutturali sono comparabili tra loro. Nella maggior parte delle applicazioni ingegneristiche, lo spessore di un guscio risulta compreso all'interno del seguente intervallo:

$$\frac{1}{1000} \leq \max\left(\frac{h}{R_{\min}}, \frac{h}{L_{\min}}\right) \leq \frac{1}{10}$$

Un'altra caratteristica che contraddistingue gli elementi strutturali a guscio è la *curvatura* che consente di operare una classificazione. Basandosi su di essa gli elementi strutturali a guscio si distinguono in gusci cilindrici (circolari e non), conici, sferici, ellissoidali, parabolici, cicloidali, toroidali ed iperboliche. Le strutture a curvatura nulla come le piastre possono essere considerate come caso limite delle precedenti.

Un aspetto che assume un grande rilievo dal punto di vista tecnologico è il modello reologico del materiale costituente. Le strutture a guscio possono essere costituite da un unico materiale, oppure da più materiali accoppiati per realizzare le cosiddette strutture laminate o composite. La presente trattazione analizzerà i gusci laminati moderatamente spessi, costituiti da più strati di materiale isotropo, ortotropo e "functionally graded".

Come ben noto, la teoria dell'elasticità tridimensionale è la base di molte teorie ingegneristiche che, a loro volta, sono applicate alla progettazione strutturale e meccanica. Un problema elastico risulta composto dall'equilibrio, dalla congruenza e dal legame costitutivo. Il simultaneo soddisfacimento di ciascun aspetto del problema è spesso un obiettivo irraggiungibile dal punto di vista matematico. Pertanto, occorre operare semplificazioni e approssimazioni per giungere a soluzioni semplici. Per derivare una *teoria semplificata* o *ingegneristica* si può assumere un certo numero di postulati fondamentali, inerenti il rapporto fra le dimensioni caratteristiche, l'ampiezza relativa degli spostamenti che si manifestano sotto l'azione dei carichi, l'entità delle rotazioni della normale alla superficie di riferimento e le azioni trasversali.

Un guscio è un corpo tridimensionale che può essere studiato attraverso i metodi della teoria dell'elasticità. Le teorie ingegneristiche riconducono lo studio dell'equilibrio di un

guscio all'analisi della sua superficie di riferimento. In tal modo, il problema tridimensionale si riduce ad un problema bidimensionale.

Nel corso degli anni sono state introdotte diverse teorie. Esse sono state sviluppate originariamente per gusci sottili, sulla base delle ipotesi cinematiche di Kirchhoff-Love. L'ipotesi fondamentale, nota comunemente con il nome di *prima approssimazione di Love* (1881) o *teoria classica*, è che la normale rettilinea alla superficie di riferimento indeformata si mantenga rettilinea e normale ad essa anche dopo la deformazione. In tal modo si trascura la deformabilità trasversale dovuta agli sforzi di taglio. Per gusci moderatamente spessi risulta necessario adoperare la cosiddetta *teoria del primo ordine* (o di Reissner-Mindlin), o *First-order Shear Deformation Theory* (FSDT) che considera anche la deformabilità tagliante. Facendo un'analogia con l'analisi teorica di strutture monodimensionali, si può osservare che la teoria di Kirchhoff-Love dei gusci non è altro che l'equivalente della teoria di Eulero-Bernoulli relativa alle travi. Allo stesso modo, la teoria del primo ordine dei gusci può essere comparata alla teoria di Timoshenko della trave. Si può inoltre osservare come la teoria di Kirchhoff-Love possa essere ricavata a partire da quella di Reissner-Mindlin, imponendo l'annullamento degli scorrimenti trasversali. In seguito, si farà riferimento alla teoria del primo ordine.

Prima di giungere all'equazioni governanti il problema dei gusci, è opportuno premettere i principi che stanno alla base della *teoria delle superfici*. Dato che la teoria delle superfici coinvolge i risultati della *teoria delle curve*, risulta utile partire dai risultati della geometria differenziale.

## **2.1 ELEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE**

### **2.1.1 CURVE NELLO SPAZIO**

Per ragioni di completezza, si forniscono alcuni risultati fondamentali relativi alla teoria delle curve nello spazio tridimensionale. Tali risultati faciliteranno lo sviluppo successivo della teoria delle superfici.

#### **2.1.1.1 Rappresentazione parametrica di una curva**

Una curva tridimensionale  $\mathcal{C}$  in un sistema globale di coordinate ortogonali  $x_1, x_2, x_3$

può essere rappresentata attraverso il luogo dei punti descritti dal vettore posizione  $\mathbf{x}$  (figura 2.2):

$$\mathbf{x} = x_1(\xi)\mathbf{e}_1 + x_2(\xi)\mathbf{e}_2 + x_3(\xi)\mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

per ogni valore assunto dal parametro  $\xi$  nell'intervallo chiuso  $[\xi_1, \xi_2]$ . Nella (2.1)  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sono i versori degli assi del sistema di riferimento. Se le componenti del vettore posizione  $x_i$ ,  $i=1,2,3$ , sono funzioni lineari nel solo parametro  $\xi$ , allora un dato valore di  $\xi$  definisce un solo punto della curva.

### 2.1.1.2 Versore tangente

Si indichi con  $s$  l'ascissa curvilinea sulla curva tridimensionale  $\mathcal{C}$  definita dalla (2.1). La derivata del vettore posizione  $\mathbf{x}$  rispetto ad  $s$  risulta essere:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dx_1}{ds}\mathbf{e}_1 + \frac{dx_2}{ds}\mathbf{e}_2 + \frac{dx_3}{ds}\mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

Facendo il prodotto scalare di tale derivata per se stessa, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 \quad (2.3)$$

Per il calcolo differenziale essendo  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ , ove  $\delta_{ij}$  denota il delta di Kronecker (1.83), si ha:

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (2.4)$$

Per la (2.4), il primo membro della (2.3) risulta essere uguale ad uno:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 1 \quad (2.5)$$

Il vettore  $d\mathbf{x}/ds$  ha modulo unitario e rappresenta, quindi, un *versore*. La sua interpretazione geometrica può essere fornita osservando la figura 2.2.

Il vettore  $\Delta\mathbf{x}$  è definito in modo tale da unire due punti  $P$  e  $P'$  posti sulla curva  $\mathcal{C}$  (figura 2.3). Indicando con  $\Delta s$  la lunghezza dell'arco tra tali punti, si può osservare che il vettore  $\Delta\mathbf{x}/\Delta s$  ha la stessa direzione di  $\Delta\mathbf{x}$ . A questo punto, facendo tendere a zero la lunghezza  $\Delta s$  (ovvero, avvicinando il punto  $P'$  a  $P$ ) è possibile constatare che il vettore  $\Delta\mathbf{x}/\Delta s$  diventa il vettore tangente alla curva  $\mathcal{C}$  nel punto  $P$ .

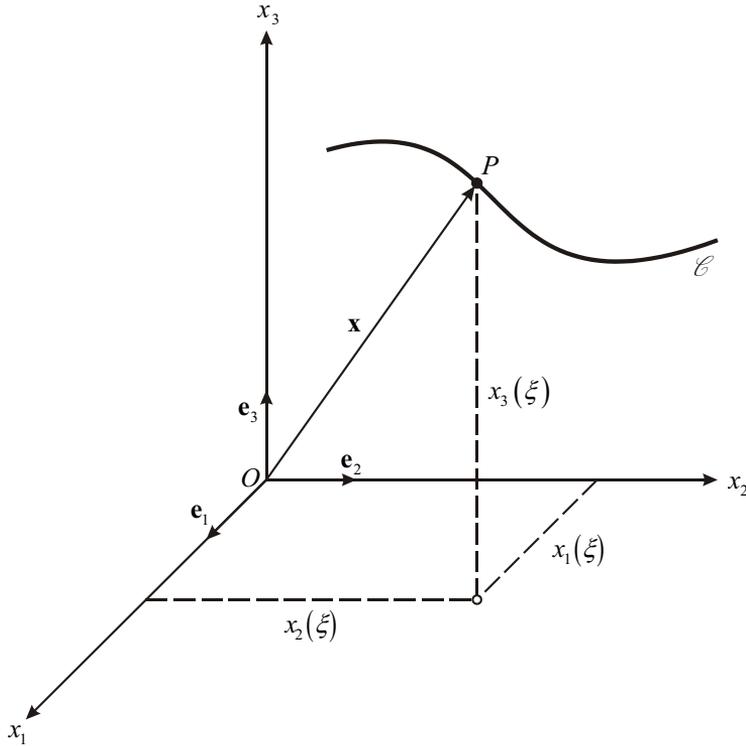


Figura 2.2 – Rappresentazione parametrica di una curva.

In base a quanto esposto, è lecito definire il *versore tangente*:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta s} \quad (2.6)$$

A partire da esso, è possibile introdurre un altro vettore tangente tenendo presente la dipendenza dal tempo del vettore posizione  $\mathbf{x}(s(t))$ . La dipendenza in parola può essere evidenziata se si pensa di generare la curva  $\mathcal{C}$  muovendo nel tempo un punto  $P$  lungo  $s$ . La derivata del vettore  $\mathbf{x}(s(t))$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \mathbf{t} = \dot{s} \mathbf{t} \quad (2.7)$$

rappresenta, a tutti gli effetti, una *velocità*. La differenza sostanziale tra i vettori  $\mathbf{t}$  ed  $\dot{\mathbf{x}}$  è che il secondo non può essere interpretato come un versore, in quanto non è necessariamente di lunghezza unitaria (lo scalare  $ds/dt$  può non essere uguale ad uno).

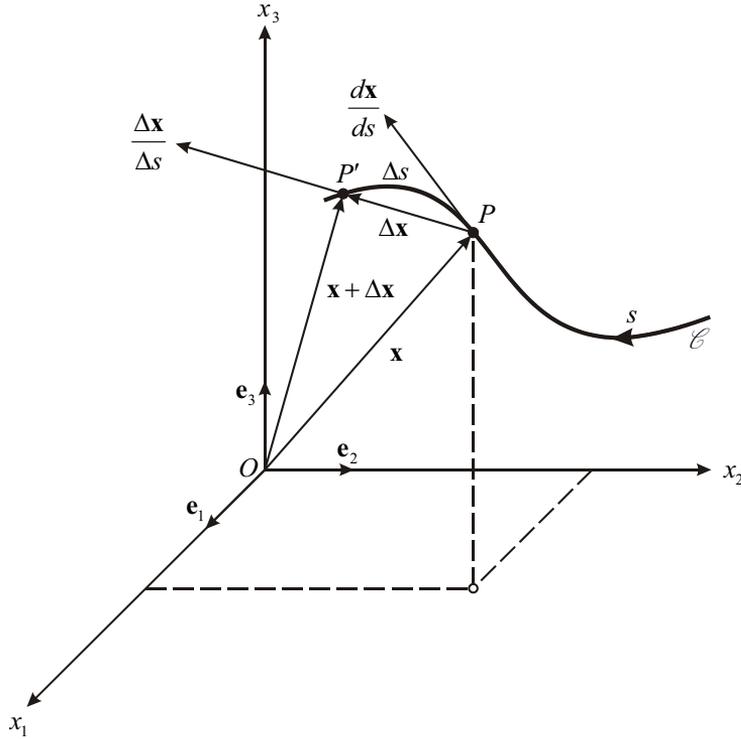


Figura 2.3 – Interpretazione geometrica di un vettore.

### 2.1.1.3 Piano osculatore e normale principale

In precedenza è stato mostrato che la tangente ad una curva generica in un suo punto  $P$  risulta interpretabile quale posizione limite della retta che congiunge i punti  $P$  e  $P'$  al tendere a zero della lunghezza dell'arco  $\Delta s = \widehat{PP'}$ . Come passo successivo, si può considerare la posizione limite assunta da un piano passante per tre punti consecutivi e distinti posti su una generica curva, qualora due di questi punti tendano al terzo. In altre parole, quello che si vuole definire è il *piano osculatore*, ossia il piano contenente l'intorno del punto  $P$  appartenente alla curva  $\mathcal{C}$ . Esso può essere trovato specificando che il vettore  $\mathbf{X} - \mathbf{x}$ , congiungente un punto generico del piano osculatore (vettore posizione  $\mathbf{X}$ ) con un punto generico appartenente alla curva (vettore posizione  $\mathbf{x}$ ), deve giacere sullo stesso piano del vettore tangente  $\dot{\mathbf{x}}$  e del vettore  $\ddot{\mathbf{x}}$ , dove quest'ultimo individua la velocità di variazione del vettore  $\dot{\mathbf{x}}$ . In base a quanto detto, si ha che un'espressione analitica per definire il piano osculatore è data dalla relazione:

$$(\mathbf{X} - \mathbf{x}) \cdot (\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.8)$$

poiché il prodotto misto di tre vettori complanari è nullo. La *normale principale* alla curva nel punto  $P$  rappresenta quel vettore del piano osculatore passante per  $P$  che risulta ortogonale alla tangente  $\mathbf{t}$  della curva nel medesimo punto.

### 2.1.1.4 Curvatura

Per la (2.5), il prodotto scalare del vettore  $\mathbf{t}$  per se stesso è uguale all'unità. Differenziando tale prodotto rispetto la coordinata curvilinea  $s$  si ottiene:

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0 \quad (2.9)$$

dove l'apice sta ad indicare la derivata rispetto  $s$ . D'altra parte, ricordando la definizione del versore  $\mathbf{t}$ , è possibile anche ricavare la seguente espressione:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{x}} t' \quad (2.10)$$

che, derivata rispetto ad  $s$ , porta al risultato:

$$\mathbf{t}' = \dot{\mathbf{x}} t'' + \ddot{\mathbf{x}} (t')^2 \quad (2.11)$$

Osservando le equazioni (2.9)-(2.11), si può notare come i vettori  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}'$  risultino perpendicolari tra loro e come il vettore  $\mathbf{t}'$  appartenga al piano dei vettori  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\ddot{\mathbf{x}}$ , e cioè al piano osculatore. Il vettore  $\mathbf{t}'$ , parallelo alla normale principale nel punto considerato, risulta proporzionale al vettore normale:

$$\mathbf{t}' = \mathbf{k} = k \mathbf{n} \quad (2.12)$$

dove  $\mathbf{n}$  rappresenta il versore della normale principale alla curva nel punto considerato e  $\mathbf{k}$  definisce il *vettore curvatura*. Quest'ultimo esprime la variabilità della direzione del vettore tangente qualora un punto si muova lungo la curva data.  $k$  è un fattore di proporzionalità che rappresenta la *curvatura*, mentre il suo reciproco ( $R = k^{-1}$ ) viene definito *raggio di curvatura*. Geometricamente,  $R$  rappresenta il raggio del cerchio osculatore e cioè di quel cerchio appartenente al piano osculatore che passa attraverso tre punti consecutivi della curva. Infine, si noti che se il verso di  $\mathbf{t}'$ , e quindi di  $\mathbf{k}$ , è determinato solamente dalla curva, quello della normale principale  $\mathbf{n}$  risulta arbitrario. Pertanto, il segno del fattore  $k$  dipende dal verso assunto per  $\mathbf{n}$ . Per convenzione, si assume che il vettore normale  $\mathbf{n}$  punti dal centro di curvatura verso l'esterno. Così, quando il verso di  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{k}$  è il medesimo si ha  $k > 0$ , quando il verso di  $\mathbf{n}$  è opposto a quello di  $\mathbf{k}$  risulta  $k < 0$ .

## 2.1.2 SUPERFICI NELLO SPAZIO

In base ai risultati preliminari ottenuti precedentemente, si può sviluppare l'analisi geometrica delle superfici.

### 2.1.2.1 Curve parametriche: prima forma fondamentale

Una superficie  $\mathcal{S}$  definita in un sistema globale di coordinate cartesiane  $x_1, x_2, x_3$  può sempre essere descritta come una funzione di due parametri  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  nel modo seguente:

$$x_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad x_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad x_3 = f_3(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.13)$$

dove  $f_1, f_2, f_3$  sono funzioni continue che forniscono un sol valore per ogni coppia di parametri  $\alpha_1, \alpha_2$ . Tali parametri sono le *coordinate curvilinee* della superficie. Si può notare che, fissando a turno una coordinata e incrementando l'altra, è possibile ottenere una famiglia di curve definite *curve parametriche* o *linee coordinate* della superficie. Queste curve sono mostrate in figura 2.4.

L'equazione (2.13) può anche essere scritta in forma vettoriale attraverso il vettore posizione:

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = f_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_3 \quad (2.14)$$

La variazione infinitesima  $d\mathbf{r}$ , qualora si supponga di spostarsi sulla superficie dal punto  $P$ , di cui  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione, verso un punto  $P'$  infinitamente vicino ad esso, può essere espressa nella forma:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 = \mathbf{r}_{,1} d\alpha_1 + \mathbf{r}_{,2} d\alpha_2 \quad (2.15)$$

Nella precedente relazione è stata introdotta la notazione:

$$\mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_i} \quad (i=1,2) \quad (2.16)$$

L'equazione (2.15) non rappresenta lo spostamento effettivo sulla superficie dal punto  $P$  al punto  $P'$ , ma è la differenza tra i vettori posizione relativi ai due punti suddetti. Dato che si tratta di uno spostamento infinitesimo, risulta possibile valutare il quadrato dello spostamento effettivo attraverso il prodotto scalare di  $d\mathbf{r}$  per se stesso:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = E(d\alpha_1)^2 + 2Fd\alpha_1 d\alpha_2 + G(d\alpha_2)^2 \quad (2.17)$$

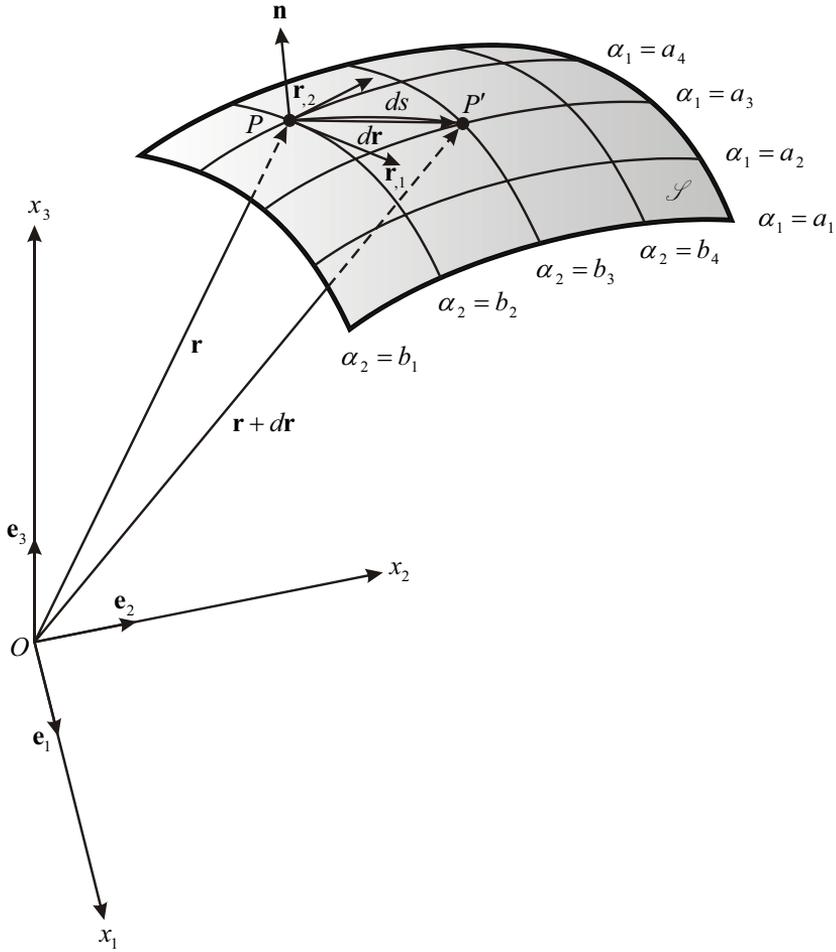


Figura 2.4 – Rappresentazione parametrica di una superficie.

dove:

$$E = \mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,1}, \quad F = \mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,2}, \quad G = \mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{,2} \quad (2.18)$$

L'equazione (2.17) è nota con il nome di *prima forma fondamentale* della superficie  $\mathcal{S}$  definita dal vettore posizione  $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$  e le grandezze  $E, F, G$  sono chiamate *prime grandezze fondamentali*. In base alle definizioni introdotte, le lunghezze infinitesime degli archi, staccate nelle direzioni delle linee parametriche, vengono valutate in forma esplicita:

$$ds_1 = \sqrt{E} d\alpha_1, \quad ds_2 = \sqrt{G} d\alpha_2 \quad (2.19)$$

essendo  $ds_1$  l'arco infinitesimo lungo la curva di costante  $\alpha_2$  e  $ds_2$  l'arco infinitesimo lungo la curva di costante  $\alpha_1$ . Inoltre, poiché  $\mathbf{r}_{,1}$  ed  $\mathbf{r}_{,2}$  sono i vettori tangenti alle curve di

costante  $\alpha_2$  ed  $\alpha_1$ , rispettivamente, la quantità  $F$  è nulla solo se le curve parametriche definiscono una reticolo a maglie ortogonali.

In tal caso, la prima forma fondamentale assume il seguente aspetto:

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2 \quad (2.20)$$

dove:

$$A_1 = \sqrt{E}, \quad A_2 = \sqrt{G}, \quad F = 0 \quad (2.21)$$

Le due nuove entità  $A_1, A_2$  (2.20) vengono chiamate *parametri di Lamè* e permettono di valutare la variazione di lunghezza di un arco sulla superficie dalle corrispondenti variazioni di coordinate curvilinee. I parametri di Lamè possono essere definiti agevolmente attraverso una interpretazione geometrica delle equazioni (2.19) e (2.20). Esistono alcuni casi più complessi per i quali devono essere calcolati analiticamente mediante le equazioni (2.14) e (2.18). Per un dato problema, la scelta del sistema più opportuno di coordinate curvilinee, cui corrisponde la forma più semplice dei parametri metrici, può sveltire e semplificare notevolmente la soluzione del problema stesso.

Prima di concludere è bene notare che, la prima forma fondamentale consente di misurare delle distanze sulla superficie, ossia ne fornisce la metrica, ma non coinvolge le grandezze che permettono di specificare la forma della superficie medesima. Utilizzando la prima forma fondamentale è possibile calcolare la lunghezza di un arco di curva giacente sulla superficie  $\mathcal{S}$ :

$$s = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sqrt{E \left( \frac{d\alpha_1}{d\xi} \right)^2 + 2F \frac{d\alpha_1}{d\xi} \frac{d\alpha_2}{d\xi} + G \left( \frac{d\alpha_2}{d\xi} \right)^2} d\xi \quad (2.22)$$

### 2.1.2.2 Normale alla superficie

In ogni punto  $P$  appartenente ad una superficie esiste un *versore normale*  $\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$  perpendicolare ad  $\mathbf{r}_{,1}$  ed  $\mathbf{r}_{,2}$  e, quindi, al piano passante per  $P$  che contiene i due vettori  $\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}$ . In altre parole, per il punto  $P$  passerà un versore  $\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$  ortogonale al piano tangente ad  $\mathcal{S}$  nel punto  $P$ . Il versore  $\mathbf{n}$  risulta parallelo al prodotto vettoriale tra  $\mathbf{r}_{,1}$  ed  $\mathbf{r}_{,2}$ . Visto che un versore può essere interpretato come un vettore diviso per il suo modulo, un'espressione per  $\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$  viene fornita dalla relazione:

$$\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2|} \quad (2.23)$$

Indicando con  $\theta$  l'angolo tra i vettori  $\mathbf{r}_1$  ed  $\mathbf{r}_2$ , sfruttando l'algebra vettoriale e le equazioni (2.18) si ricava:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2| &= |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \sin \theta \\ \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 &= |\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2| \cos \theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{(EG - F^2)/EG} \\ \cos \theta &= F/\sqrt{EG} \end{aligned} \quad (2.25)$$

In questo modo si perviene ad un'espressione per  $\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2)$  del tipo:

$$\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{H} \quad (2.26)$$

essendo:

$$H = \sqrt{EG - F^2} \neq 0 \quad (2.27)$$

Occorre osservare che la normale principale di una curva posta sulla superficie  $\mathcal{S}$  non è necessariamente normale alla superficie stessa. Il verso della normale alla superficie  $\mathbf{n}$  è arbitrario per cui si adotterà la convenzione che le curve parametriche siano sempre sistemate in modo tale che  $\mathbf{n}$  vada dal lato concavo verso il lato convesso della superficie oppure coincida con la normale uscente alla superficie.

### 2.1.2.3 Seconda forma fondamentale

Un'altra caratteristica importante delle superfici è rappresentata dalla *seconda forma fondamentale*. Tale caratteristica deriva, essenzialmente, dall'uso delle proprietà del vettore curvatura  $\mathbf{k}$  di una generica curva spaziale definita su di una superficie  $\mathcal{S}$ .

Se  $\mathbf{t}$  indica il versore tangente della curva considerata si può scrivere:

$$\mathbf{k} = \mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_t \quad (2.28)$$

essendo  $\mathbf{k}_n$  e  $\mathbf{k}_t$  le componenti normale e tangenziale alla superficie di  $\mathbf{k}$ . Alla componente  $\mathbf{k}_n$  viene dato il nome di *vettore curvatura normale*, mentre alla seconda quello di *vettore curvatura tangenziale*. La curvatura normale, essendo orientata come la normale alla superficie, è proporzionale ad  $\mathbf{n}$  e può essere espressa come:

$$\mathbf{k}_n = -k_n \mathbf{n} \quad (2.29)$$

dove  $k_n$  è chiamata *curvatura normale*. Il segno meno tiene conto della convenzione che considera positivo il verso di  $\mathbf{k}$  opposto al verso positivo di  $\mathbf{n}$ .

Poiché  $\mathbf{n}$  è perpendicolare a  $\mathbf{t}$ , eseguendo la derivata del prodotto scalare  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$  rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  della curva posta sulla superficie, risulta:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (2.30)$$

Essendo  $\mathbf{n}$  anche perpendicolare a  $\mathbf{k}_t$  (il che significa che  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_t = 0$ ), eseguendo il prodotto scalare per  $\mathbf{n}$  di entrambe i membri dell'equazione (2.28), si ha:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{n}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_n \quad (2.31)$$

Dato che  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , se si esegue il prodotto scalare dell'equazione (2.29) per  $\mathbf{n}$ , si ricava:

$$(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{n}) = -k_n (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \quad \rightarrow \quad -(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{n}) = k_n \quad (2.32)$$

Tenendo conto che  $(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ , dalla combinazione delle ultime tre equazioni (2.30), (2.31) e (2.32), si riesce ad esprimere  $k_n$  come:

$$k_n = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{n}}{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} \quad (2.33)$$

Notando che  $d\mathbf{n}$  e  $d\mathbf{r}$  possono essere definiti:

$$\begin{aligned} d\mathbf{n} &= \mathbf{n}_{,1} d\alpha_1 + \mathbf{n}_{,2} d\alpha_2 \\ d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{,1} d\alpha_1 + \mathbf{r}_{,2} d\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

rispettivamente, la loro sostituzione nella relazione (2.33) permette di scrivere:

$$k_n = \frac{\Pi}{I} = \frac{L(d\alpha_1)^2 + 2Md\alpha_1 d\alpha_2 + N(d\alpha_2)^2}{E(d\alpha_1)^2 + 2Fd\alpha_1 d\alpha_2 + G(d\alpha_2)^2} \quad (2.35)$$

Nell'equazione (2.35) sono presenti delle nuove quantità  $L, M, N$ , chiamate *secondo grandezze fondamentali* e definite attraverso le seguenti espressioni:

$$L = \mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{n}_{,1}, \quad 2M = (\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{n}_{,2} + \mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{n}_{,1}), \quad N = \mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{n}_{,2} \quad (2.36)$$

Una modalità alternativa per descrivere queste quantità è fornita dalla derivazione delle espressioni  $\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{n} = 0$  e  $\mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{n} = 0$ , assumendo che  $\mathbf{r}$  possieda una derivata seconda continua (ciò assicurerà  $\mathbf{r}_{,12} = \mathbf{r}_{,21}$ ). Infatti, in questo modo si possono valutare tali grandezze come:

$$L = -\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1^2} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_{,11} \cdot \mathbf{n}, \quad M = -\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_{,12} \cdot \mathbf{n}, \quad N = -\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_2^2} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r}_{,22} \cdot \mathbf{n} \quad (2.37)$$

Nelle precedenti relazioni è stata usata la seguente notazione:

$$\mathbf{r}_{,ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.38)$$

Si noti che nell'equazione (2.35) compare a denominatore la prima forma fondamentale, mentre l'espressione a numeratore risulta essere la *seconda forma fondamentale* della superficie  $\mathcal{S}$  definita dal vettore posizione  $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ . Inoltre, poiché  $E, F, G, L, M, N$  sono tutte esprimibili in funzione di  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  e poiché tali grandezze sono costanti in un dato punto della superficie, dall'equazione (2.35) si può anche osservare che la curvatura normale dipende solo dal rapporto  $d\alpha_2/d\alpha_1$ . Tale rapporto definisce, a tutti gli effetti, una direzione. Pertanto, è possibile stabilire che tutte le curve passanti per tale punto e tangenti alla medesima direzione hanno lo stesso valore per  $k_n$ .

#### 2.1.2.4 Curvature principali e direzioni principali

Per ricercare quelle direzioni (e cioè quei rapporti  $d\alpha_2/d\alpha_1$ ) per le quali la curvatura normale  $k_n$  presenta un massimo o un minimo, si può dividere numeratore e denominatore dell'equazione (2.35) per  $d\alpha_1^2$ . Definendo  $\lambda = d\alpha_2/d\alpha_1$ , l'espressione della curvatura normale assume l'aspetto:

$$k_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (2.39)$$

In particolare, essendo  $k_n$  una funzione nella sola variabile  $\lambda$ , tale curvatura assume un valore estremo quando si annulla la derivata prima di  $k_n$  fatta rispetto a  $\lambda$ :

$$\frac{dk_n(\lambda)}{d\lambda} = \frac{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(M + N\lambda) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(F + G\lambda)}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)^2} = 0 \quad (2.40)$$

Risolvendo l'equazione (2.40) si ricava quel valore di  $\lambda$  che, sostituito nell'equazione (2.39), permette di definire il massimo o il minimo della funzione  $k_n$ . Osservando il numeratore ed il denominatore dell'equazione (2.39), si può notare che:

$$\begin{aligned} E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= (E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda) \\ L + 2M\lambda + N\lambda^2 &= (L + M\lambda) + \lambda(M + N\lambda) \end{aligned} \quad (2.41)$$

da cui risulta:

$$(E + F\lambda)(M + N\lambda) = (F + G\lambda)(L + M\lambda) \quad (2.42)$$

La relazione (2.42) permette di valutare il valore estremo della curvatura normale mediante una delle seguenti espressioni equivalenti tra loro:

$$k_n = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (2.43)$$

L'equazione (2.42) può porsi nella forma:

$$(MG - NF)\lambda^2 + (LG - NE)\lambda + (LF - ME) = 0 \quad (2.44)$$

La (2.44) è un'equazione di secondo grado che ha come soluzione due radici,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , corrispondenti a due direzioni,  $(d\alpha_2/d\alpha_1)_1$  e  $(d\alpha_2/d\alpha_1)_2$ , di curvatura estrema. Una di queste soluzioni è quella associata alla curvatura massima, mentre l'altra permette di definire quella minima. In particolare, tali curvature saranno indicate con  $k_{n1}$  e  $k_{n2}$  a seconda che si faccia riferimento, rispettivamente, a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Le curvature in parola vengono definite *curvature principali* della superficie  $\mathcal{S}$ , mentre i loro reciproci  $R_1 = k_{n1}^{-1}$  e  $R_2 = k_{n2}^{-1}$  vengono denominati *raggi principali di curvatura*.

Tali curvature sono associate a direzioni di curvatura principale ortogonali. Tale aspetto, se verificato, consente di dare all'equazione (2.44) la facoltà di individuare, mediante la sua integrazione, le cosiddette *linee di curvatura* sulla superficie e cioè quelle linee che formano una famiglia di curve ortogonali su  $\mathcal{S}$ .

Quanto descritto risulta osservabile prendendo in considerazione due direzioni tangenti alla superficie data, ad esempio,  $d\alpha_2/d\alpha_1$  e  $\delta\alpha_2/\delta\alpha_1$ . Si consideri l'angolo  $\theta$  tra le due direzioni tangenti alla superficie. La variazione del vettore posizione  $\mathbf{r}$  lungo tali direzioni risulta:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{,1}d\alpha_1 + \mathbf{r}_{,2}d\alpha_2 \\ \delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}_{,1}\delta\alpha_1 + \mathbf{r}_{,2}\delta\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dalla definizione di prodotto scalare, il coseno dell'angolo compreso tra  $d\mathbf{r}$  e  $\delta\mathbf{r}$  può essere espresso:

$$\cos\theta = \frac{d\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|} = E \frac{d\alpha_1}{ds} \frac{\delta\alpha_1}{\delta s} + F \left( \frac{d\alpha_1}{ds} \frac{\delta\alpha_2}{\delta s} + \frac{d\alpha_2}{ds} \frac{\delta\alpha_1}{\delta s} \right) + G \frac{d\alpha_2}{ds} \frac{\delta\alpha_2}{\delta s} \quad (2.46)$$

dove  $ds$  e  $\delta s$  sono ottenute dalla prima forma fondamentale lungo ciascuna direzione tangente. Quando  $\theta = \pi/2$ , si ottiene la condizione di ortogonalità tra le due direzioni:

$$Ed\alpha_1\delta\alpha_1 + F(d\alpha_1\delta\alpha_2 + d\alpha_2\delta\alpha_1) + Gd\alpha_2\delta\alpha_2 = 0 \quad (2.47)$$

Se si divide la relazione (2.47) per  $d\alpha_1\delta\alpha_1$  e si pone  $\lambda_1 = d\alpha_2/d\alpha_1$ ,  $\lambda_2 = \delta\alpha_2/\delta\alpha_1$  si ha:

$$E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2 = 0 \quad (2.48)$$

Le radici dell'equazione (2.44) sono:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(LG - NE) \pm \sqrt{(LG - NE)^2 - 4(MG - NF)(LF - ME)}}{2(MG - NF)} \quad (2.49)$$

Al fine di operare la sostituzione nell'equazione (2.48), si ricava:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{LG - NE}{MG - NF}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{LF - ME}{MG - NF} \quad (2.50)$$

Sostituendo le espressioni ricavate (2.50) nell'equazione (2.48), la condizione di ortogonalità risulta soddisfatta. Dunque, le direzioni di curvatura principale definiscono una famiglia di curve ortogonali sulla superficie  $\mathcal{S}$ .

Si consideri la situazione in cui tali linee di curvatura siano assunte quali *linee parametriche* (o curve parametriche) di una superficie. Nel caso in questione, è necessario che l'equazione (2.44) sia soddisfatta contemporaneamente dalla condizione  $d\alpha_1/d\alpha_2 = 0$  e dalla condizione  $d\alpha_2/d\alpha_1 = 0$  per cui, affinché ciò sia possibile, si deve avere:

$$LF - ME = 0, \quad MG - NF = 0 \quad (2.51)$$

Poiché si è supposto che le linee parametriche debbano coincidere con le direzioni di curvatura principale e poiché si è dimostrato che queste ultime sono ortogonali, il risultato che ne consegue è l'annullamento di F ( $F = 0$ ). Inoltre, dato che si può dimostrare che  $EG - F^2 > 0$ , associando questo risultato a quello precedente, le restanti prime grandezze fondamentali E, G devono assumere valori diversi da zero. In base a quanto detto e sfruttando le equazioni (2.51), si giunge ad affermare che anche M deve essere nulla ( $M = 0$ ). In definitiva, le condizioni, affinché le linee parametriche coincidano con le direzioni di curvatura principali, sono le seguenti:

$$F = M = 0 \quad (2.52)$$

Ponendo  $F = M = 0$  nell'equazione (2.35) e considerando poi a turno  $d\alpha_1 = 0$  e  $d\alpha_2 = 0$ , risulta:

$$k_{n1} = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad k_{n2} = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \quad (2.53)$$

Si definisce *sezione normale* alla superficie  $\mathcal{S}$ , la curva piana staccata sulla superficie stessa da un piano contenente la normale  $\mathbf{n}$ . Se si considera un punto generico su di una

superficie, si può interpretare ogni linea coordinata, passante per esso come una sezione normale, caratterizzata da un raggio di curvatura diretto secondo la normale dal centro di curvatura verso il punto. E' ovvio che vi sono infiniti raggi di curvatura per un punto di una superficie, essendo infinite le orientazioni possibili per le linee parametriche.

Da quanto precedentemente esposto, discende che esiste, per una data superficie, un sistema di coordinate curvilinee ortogonali avente come raggi di curvatura, puntualmente, il minimo e il massimo. Tale sistema di coordinate prende il nome di *sistema principale* ed i raggi di curvatura sono detti *principali*. Le linee coordinate sono le direzioni di curvatura principale. Da ora in poi, si considerano solamente sistemi ortogonali del tipo appena introdotto. Lo sviluppo della teoria dei gusci elastici risulta notevolmente più semplice e chiara nel caso in cui le linee di curvatura principale della superficie di riferimento siano usate come linee parametriche.

### 2.1.2.5 Derivate dei versori lungo le linee parametriche

Occorre definire alcune espressioni relative alle derivate dei versori lungo le linee parametriche adottate. Si consideri una terna di versori reciprocamente ortogonali e definiti in un determinato punto  $P$  sulla superficie  $\mathcal{S}$ . Questi versori, indicati con  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$ , sono assunti in modo tale che i primi due risultino orientati secondo le tangenti alle direzioni principali  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  (linee parametriche), mentre il terzo è normale ad  $\mathcal{S}$ . Comunque si muova la terna sopra la superficie (ovvero, in qualunque punto venga definita), il modulo dei versori costituenti si manterrà unitario e le loro direzioni rimarranno sempre ortogonali a due a due. Ciò che varia, è l'orientamento della terna e, come conseguenza di questo fatto, si deve prestare attenzione alle derivate di tali versori.

Un vettore unitario può sempre essere definito come il vettore diviso per il suo modulo, per cui la terna di versori appena illustrata può essere definita analiticamente nel modo seguente:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{|\mathbf{r}_{,1}|} = \frac{\mathbf{r}_{,1}}{A_1}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_{,2}}{|\mathbf{r}_{,2}|} = \frac{\mathbf{r}_{,2}}{A_2}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{r}_{,1} \wedge \mathbf{r}_{,2}}{A_1 A_2} \quad (2.54)$$

Si noti come in tali relazioni sia stata adottata la notazione già introdotta nell'equazione (2.21) per sistemi ortogonali di linee parametriche.

Siano  $\mathbf{n}_{,1}, \mathbf{n}_{,2}$  le derivate del vettore unitario  $\mathbf{n}$  fatte rispetto ai parametri  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ .

Poiché  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  sono anche vettori perpendicolari ad  $\mathbf{n}$ , esse giacciono nel piano individuato dai versori  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  e, ognuno di essi può essere decomposto nelle sue componenti secondo le direzioni di  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ :

$$\mathbf{n}_1 = a\mathbf{t}_1 + b\mathbf{t}_2 \quad (2.55)$$

Nelle (2.55)  $a$  e  $b$  sono incognite che rappresentano le proiezioni di  $\mathbf{n}_1$  secondo  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ , rispettivamente. Ricordando le equazioni (2.37), (2.54) e che le linee parametriche considerate sono ortogonali (cioè  $M=0=\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2$ ), tali incognite possono essere definite dallo sviluppo del sistema di due equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{A_1} = \frac{L}{A_1} = a(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_1) + b(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2) & \rightarrow & a = \frac{L}{A_1} \\ \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}_1}{A_2} = \frac{M}{A_2} = a(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1) + b(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2) & & b = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Così facendo si riesce ad ottenere una prima espressione di  $\mathbf{n}_1$  sostituendo  $a$  e  $b$  nell'equazione (2.55). Tale espressione può essere ulteriormente particolarizzata, qualora si tenga conto dell'equazione (2.53) relativa alla curvatura principale della prima linea parametrica:

$$k_{n1} = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} = \frac{L}{A_1^2} \quad \rightarrow \quad \frac{A_1}{R_1} = \frac{L}{A_1} \quad (2.57)$$

Si perviene al seguente risultato finale:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{L}{A_1} \mathbf{t}_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{n}_1 = \frac{A_1}{R_1} \mathbf{t}_1 \quad (2.58)$$

Ragionando in modo del tutto analogo per  $\mathbf{n}_2$ , si ottiene:

$$\mathbf{n}_2 = \frac{L}{A_2} \mathbf{t}_2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{n}_2 = \frac{A_2}{R_2} \mathbf{t}_2 \quad (2.59)$$

D'altro canto, si prendano in considerazione i vettori unitari  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  di cui  $\mathbf{t}_{1,1}, \mathbf{t}_{1,2}, \mathbf{t}_{2,1}, \mathbf{t}_{2,2}$  sono le rispettive derivate fatte rispetto alle linee parametriche indicate con  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ . Per trovare queste ultime si procede in maniera analoga a quanto visto per le derivate di  $\mathbf{n}$ . In quest'ultimo caso, i passaggi risultano leggermente più complessi. Per funzioni con derivate seconde continue,  $\mathbf{r}_{,12} = \mathbf{r}_{,21}$ , dalle equazioni (2.54) si può scrivere:

$$\left(A_1 \mathbf{t}_1\right)_{,2} = \left(A_2 \mathbf{t}_2\right)_{,1} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{t}_{2,1} = \frac{1}{A_2} \left(A_1 \mathbf{t}_{1,2} + \mathbf{t}_1 A_{1,2} - \mathbf{t}_2 A_{2,1}\right) \quad (2.60)$$

Se, ad esempio si vuole trovare la derivata  $\mathbf{t}_{1,1}$  (derivata di  $\mathbf{t}_1$  fatta rispetto a  $\alpha_1$ ) è necessario osservare che essa è anche un vettore perpendicolare a  $\mathbf{t}_1$  e, quindi, giacente nel piano definito dai vettori unitari  $\mathbf{n}, \mathbf{t}_2$ . Ciò fa sì che tale vettore possa essere decomposto nelle sue componenti secondo  $\mathbf{n}, \mathbf{t}_2$  e indicato come:

$$\mathbf{t}_{1,1} = c\mathbf{n} + d\mathbf{t}_2 \quad (2.61)$$

dove  $c$  e  $d$  sono le proiezioni incognite di  $\mathbf{t}_{1,1}$  secondo  $\mathbf{n}, \mathbf{t}_2$ , rispettivamente. Per determinare tali incognite si consideri il sistema di due equazioni costituito dai prodotti scalari  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{1,1}$  e  $\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{1,1}$ . Per la reciproca ortogonalità dei vettori unitari  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{1,1} &= c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) + d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_2) = c \\ \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{1,1} &= c(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}) + d(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2) = d \end{aligned} \quad (2.62)$$

L'ortogonalità dei versori permette di scrivere  $(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}) = 0$  e, di conseguenza,  $(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n})_{,1} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_{,1} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{1,1} = 0$ . Sfruttando i risultati dell'equazione (2.58), si ha anche:

$$c = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_{1,1} = -\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_{,1} = -\frac{A_1}{R_1} \quad (2.63)$$

Essendo  $(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1) = 0$  e, di conseguenza,  $(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1)_{,1} = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{1,1} + \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_{2,1} = 0$ , ricordando i risultati dell'equazione (2.60) e che  $\mathbf{t}_{1,2}$  è ortogonale a  $\mathbf{t}_1$ , si ottiene:

$$d = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_{1,1} = -\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_{2,1} = -\frac{\mathbf{t}_1}{A_2} \cdot (A_1 \mathbf{t}_{1,2} + \mathbf{t}_1 A_{1,2} - \mathbf{t}_2 A_{2,1}) = -\frac{1}{A_2} A_{1,2} \quad (2.64)$$

Per le (2.63) e (2.64) l'espressione definitiva di  $\mathbf{t}_{1,1}$  (2.61) ammette la rappresentazione:

$$\mathbf{t}_{1,1} = -\frac{A_1}{R_1} \mathbf{n} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{t}_2 \quad (2.65)$$

Procedendo in maniera analoga si possono dimostrare le rimanenti derivate:

$$\mathbf{t}_{1,2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{t}_{2,1} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{t}_{2,2} = -\frac{A_2}{R_2} \mathbf{n} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mathbf{t}_1 \quad (2.66)$$

Si noti come le espressioni delle derivate dei versori  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$  siano espresse in funzione dei vettori unitari medesimi per cui è possibile raggruppare le equazioni (2.58), (2.59), (2.65) e (2.66) all'interno di un'unica notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,1} \\ \mathbf{t}_{1,2} \\ \mathbf{t}_{2,1} \\ \mathbf{t}_{2,2} \\ \mathbf{n}_{,1} \\ \mathbf{n}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{A_{1,2}}{A_2} & -\frac{A_1}{R_1} \\ 0 & \frac{A_{2,1}}{A_1} & 0 \\ \frac{A_{1,2}}{A_2} & 0 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_1} & 0 & -\frac{A_2}{R_2} \\ \frac{A_1}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

### 2.1.2.6 Teorema fondamentale della teoria delle superfici

Fino ad ora non si è stabilita alcuna relazione matematica tra i parametri di Lamè  $A_1, A_2$  ed i raggi di curvatura principali  $R_1, R_2$ . Ebbene, esistono tre equazioni differenziali, note come *condizioni di Gauss-Codazzi*, che legano tra loro le quantità  $A_1, A_2, R_1, R_2$  di una data superficie. In quanto parte del *teorema fondamentale della teoria delle superfici*, tali equazioni vengono usate per accertare che una scelta arbitraria dei quattro parametri in argomento permetta di definire una superficie reale nello spazio tridimensionale. In particolare, dette relazioni si possono ricavare sfruttando l'uguaglianza delle derivate miste del secondo ordine relative alla terna di versori descritta in precedenza. Perché ciò sia valido, si assume la continuità delle derivate seconde dei vettori unitari.

In base alla supposta continuità delle derivate ed all'uso delle espressioni di  $\mathbf{n}_{,1}, \mathbf{n}_{,2}$  precedentemente definite, si ha:

$$\mathbf{n}_{,12} = \mathbf{n}_{,21} \quad \rightarrow \quad \left( \frac{A_1}{R_1} \mathbf{t}_1 \right)_{,2} - \left( \frac{A_2}{R_2} \mathbf{t}_2 \right)_{,1} = 0 \quad (2.68)$$

Le derivate indicate nell'ultima espressione (2.68) e le espressioni delle derivate di  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  fatte rispetto alle linee parametriche  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$ , conducono a:

$$\mathbf{t}_1 \left( -\frac{A_{1,2}}{R_2} + \left( \frac{A_1}{R_1} \right)_{,2} \right) + \mathbf{t}_2 \left( \frac{A_{2,1}}{R_1} - \left( \frac{A_2}{R_2} \right)_{,1} \right) = 0 \quad (2.69)$$

L'equazione vettoriale (2.69) risulta soddisfatta solo se le espressioni contenute entro le parentesi si annullano. Pertanto, devono essere verificate le seguenti espressioni:

$$\frac{A_{1,2}}{R_2} = \left( \frac{A_1}{R_1} \right)_{,2}, \quad \frac{A_{2,1}}{R_1} = \left( \frac{A_2}{R_2} \right)_{,1} \quad (2.70)$$

Le relazioni (2.70) sono note con il nome di *condizioni di Codazzi*. Partendo da una delle due eguaglianze  $\mathbf{t}_{1,12} = \mathbf{t}_{1,21}$  e  $\mathbf{t}_{2,12} = \mathbf{t}_{2,21}$ , se si procede in maniera analoga, si ricava una terza relazione differenziale:

$$\left( \frac{A_{2,1}}{A_1} \right)_{,1} + \left( \frac{A_{1,2}}{A_2} \right)_{,2} = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2} \quad (2.71)$$

La (2.71) è conosciuta con il nome di *condizione di Gauss*.

Il ruolo delle condizioni di Gauss-Codazzi può essere espresso attraverso il *teorema fondamentale della teoria delle superfici*: “Se  $E, G, L, N$  ( $E > 0$  e  $G > 0$ ) sono funzioni delle coordinate curvilinee  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , sono sufficientemente differenziabili e soddisfano le condizioni di Gauss-Codazzi, allora esiste una superficie reale che ha come prima e seconda forma fondamentale le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} I &= E(d\alpha_1)^2 + G(d\alpha_2)^2 \\ II &= L(d\alpha_1)^2 + N(d\alpha_2)^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

*Tale superficie risulta univocamente determinata ad eccezione della sua posizione”.*

In base al teorema fondamentale, le condizioni di Gauss-Codazzi possono essere assegnate come condizioni di compatibilità della teoria delle superfici. Si vuol far notare che il teorema fondamentale è ristretto a quelle superfici le cui linee di curvatura principale sono anche le sue linee parametriche ( $F = M = 0$ ). Considerando forme più generali per le condizioni di Gauss-Codazzi rispetto a quelle derivate in precedenza, è possibile estendere l'analisi al caso con linee parametriche generiche.

### **2.1.2.7 Curvatura Gaussiana**

Osservando la condizione di Gauss, si può notare che al secondo membro dell'equazione (2.71) compare il termine  $\Gamma = 1/R_1 R_2$  raffigurante il prodotto tra le curvatures principali della superficie. Tale rapporto prende il nome di *curvatura gaussiana* ed è una grandezza che svolge un ruolo fondamentale nella caratterizzazione dei gusci. In

particolare, sebbene la curvatura gaussiana sia facilmente calcolabile una volta noti  $R_1, R_2$ , la sua valutazione è raramente necessaria. Al fine della sola classificazione è spesso sufficiente conoscere solamente il segno algebrico della curvatura in parola.

Con riferimento alle sezioni normali corrispondenti alle direzioni principali, e cioè alle curve ottenibili dall'intersezione con la superficie di riferimento mediante i due piani contenenti la normale  $\mathbf{n}$  e, rispettivamente, i versori tangenti alle direzioni principali  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ , se entrambi i centri di curvatura di queste sezioni si trovano dalla medesima parte rispetto alla superficie, la curvatura gaussiana è positiva. Essa risulta negativa qualora tali centri siano collocati su lati opposti rispetto alla superficie stessa. Inoltre, se uno dei due raggi di curvatura è uguale ad infinito la curvatura gaussiana è evidentemente nulla, mentre se lo sono entrambi il guscio degenera in una piastra (la piastra è un caso degenero di guscio con curvatura gaussiana nulla). Si vuol far rilevare che la curvatura gaussiana è tecnicamente una funzione puntuale di tipo scalare e che un guscio generico può presentare diverse regioni aventi valori positivi, negativi o nulli per la suddetta funzione. Ciononostante, nella pratica si incontrano quasi sempre gusci in cui la curvatura gaussiana possiede un segno predominante tra quelli definiti se non, addirittura, unico.

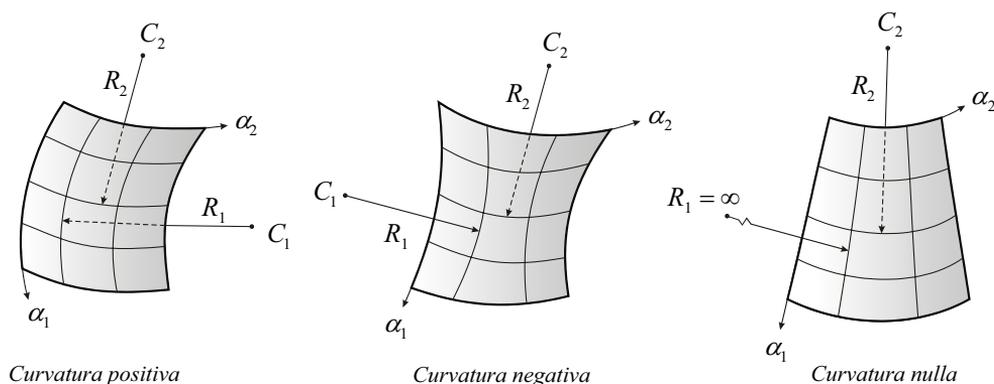


Figura 2.5 – Rappresentazione grafica della curvatura gaussiana.

Per un guscio generico, quanto è stato descritto a parole può essere rappresentato graficamente attraverso gli schemi di figura 2.5.

E' bene notare nella classificazione dei gusci mediante la curvatura gaussiana, che se essa è positiva o negativa, il guscio risulta essere a doppia curvatura, mentre, se tale grandezza è nulla, la superficie presenterà un'unica curvatura oppure nessuna curvatura.

### **2.1.2.8 Classificazioni delle superfici**

Vi sono differenti possibili classificazioni delle superfici che sono comunemente usate nella pratica ingegneristica. In precedenza si è vista la classificazione basata sulla curvatura gaussiana. Di seguito, si presentano altre categorie di superfici definite attraverso la loro forma e il loro sviluppo geometrico.

#### *2.1.2.8.1 Classificazione basata sulla forma*

##### *(a) Superfici di rivoluzione*

Le superfici di rivoluzione sono generate dalla rotazione di una curva piana, chiamata *meridiano*, attorno ad un asse che non necessariamente interseca il meridiano. Il cilindro circolare, il cono, l'ellissoide di rivoluzione, il parabolide di rivoluzione, l'iperboloide a una falda, la superficie sferica e i toroidi sono esempi di superfici di rivoluzione. Si può osservare che il cilindro circolare e il cono hanno come meridiano un retta e quindi sono superfici che presentano curvatura gaussiana nulla. L'ellissoide di rivoluzione, il parabolide di rivoluzione e la superficie sferica sono gusci caratterizzati da una curvatura gaussiana positiva, poiché i centri dei raggi di curvatura principale giacciono dallo stesso lato rispetto alla superficie. L'iperboloide di rivoluzione, invece, ha curvatura gaussiana negativa, dato che i centri dei raggi di curvatura giacciono su lati opposti rispetto alla superficie. La piastra circolare è un guscio di rivoluzione avente curvatura gaussiana nulla. Ben diverso è il caso dei toroidi la cui curvatura gaussiana cambia da positiva a negativa a seconda del punto considerato.

##### *(b) Superfici di traslazione*

Una superficie di traslazione viene definita facendo traslare una curva piana parallelamente al piano contenente la curva stessa, lungo un'altra curva piana. I due piani contenenti le curve sono tra loro ortogonali. Il parabolide ellittico è un esempio di superficie di traslazione. Esso viene ottenuto trasladando una parabola su un'altra parabola. Tale superficie possiede una curvatura gaussiana positiva. Un'altra famiglia di superfici appartenente a questa classe è quella dei cilindri a direttrice generica. Essi sono ottenuti trasladando lungo una retta la curva direttrice parallelamente al piano della curva stessa. Anche la superficie rettangolare può essere ottenuta trasladando una retta lungo un'altra retta.

*(c) Superfici rigate*

Le superficie rigate vengono ottenute traslando una retta lungo due curve di estremità. Le rette generatrici non sono necessariamente ortogonali ai piani contenenti le curve di estremità. Il tronco di cono può essere considerato come una superficie rigata dal momento che può essere generata traslando una retta lungo le due circonferenze di estremità. Esso è ovviamente anche un guscio di rivoluzione. L'iperboloide a una falda è un altro esempio di superficie rigata: può essere generato facendo traslare attorno alle due circonferenze di estremità una retta. La superficie che si ottiene traslando una retta lungo una curva ad una estremità e lungo una retta all'altra estremità prende il nome di conoide. Le ultime due superfici hanno entrambe curvatura gaussiana negativa. Appartengono alla classe delle superfici rigate anche le superfici rettangolari e i settori circolari.

*2.1.2.8.2 Classificazione basata sulla curvatura*

*(a) Superfici a singola curvatura*

Questi gusci possiedono tutti curvatura gaussiana nulla. Alcuni sono superfici di rivoluzione (cilindro circolare, cono), altri sono superfici di traslazione o superfici rigate (cilindri circolari e non).

*(b) Superfici a doppia curvatura con curvatura gaussiana positiva*

Fanno parte di questa categoria alcune superfici di rivoluzione (sfera, ellissoide di rivoluzione, paraboloidi di rivoluzione), alcune superfici di traslazione e superfici rigate (paraboloidi ellittici).

*(c) Superfici a doppia curvatura con curvatura gaussiana negativa*

Appartengono a questa categoria alcuni gusci di rivoluzione (iperboloide a una falda), alcuni gusci di traslazione e superfici rigate (conoide).

*(d) Superfici degeneri*

Le superfici rettangolari e i settori circolari sono gusci degeneri. Esse hanno una curvatura gaussiana nulla. Inoltre, sono caratterizzati dall'aver entrambi i raggi di curvatura infiniti, e quindi curvature principali nulle.

### 2.1.2.8.3 Classificazione basata sulla sviluppabilità

#### (a) Superfici sviluppabili

Le superfici sviluppabili sono superfici che possono essere sviluppate in un piano senza operare tagli e deformazioni. Tutti i gusci a singola curvatura sono sviluppabili.

#### (b) Superfici non sviluppabili

Le superfici non sviluppabili sono superfici che devono essere tagliate o deformate al fine di svilupparle in un piano. I gusci a doppia curvatura sono di solito non sviluppabili.

Questa classificazione racchiude in sé un determinato significato meccanico. Dal punto di vista fisico, i gusci non sviluppabili necessitano di una maggiore energia per essere deformati di quella richiesta per deformare un guscio sviluppabile, e quindi occorre una maggiore energia per farli collassare in un piano. In generale, tali strutture presentano maggiore resistenza e stabilità dei corrispondenti gusci sviluppabili a parità di dimensioni d'ingombro. In altre parole, le strutture a guscio non sviluppabili possiedono alcuni vantaggi dovuti alla loro efficacia geometrica.

### 2.1.2.9 Definizione di una superficie di rivoluzione

Nelle applicazioni ingegneristiche si ha a che fare comunemente con gusci le cui superfici di riferimento risultano superfici di rivoluzione. Questa è la tipologia strutturale che si incontra maggiormente nell'ambito di problemi di interesse tecnico.

Una *superficie di rivoluzione* è ottenuta dalla rotazione di una curva piana (detta *generatrice*) attorno ad un asse appartenente al piano stesso (denominato *asse di rivoluzione*) di modo da formare una superficie chiusa o aperta (*guscio chiuso* o *pannello*). La curva generatrice viene chiamata *curva meridiana* o, semplicemente, *meridiano* della superficie ed ogni punto di essa identificherà il cosiddetto *cerchio di latitudine* o *parallelo*, una volta che la suddetta curva sia stata ruotata attorno all'asse. Un esempio molto familiare di superficie di rivoluzione è rappresentato dal globo terrestre.

Ipotizzando che la posizione dei paralleli venga definita attraverso la coordinata  $x_3$  del sistema ortogonale assunto (figura 2.6), l'equazione della curva meridiana può essere fornita dalla scrittura  $R_0 = R_0(x_3)$ , dove  $R_0$  è il raggio del parallelo relativo alla quota  $x_3$ . In base a tale definizione, osservando la figura 2.6 si può notare che il vettore posizione per

un dato punto  $P$  della superficie di rivoluzione è esprimibile mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{r}(x_3, \vartheta) = R_0(x_3) \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + R_0(x_3) \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.73)$$

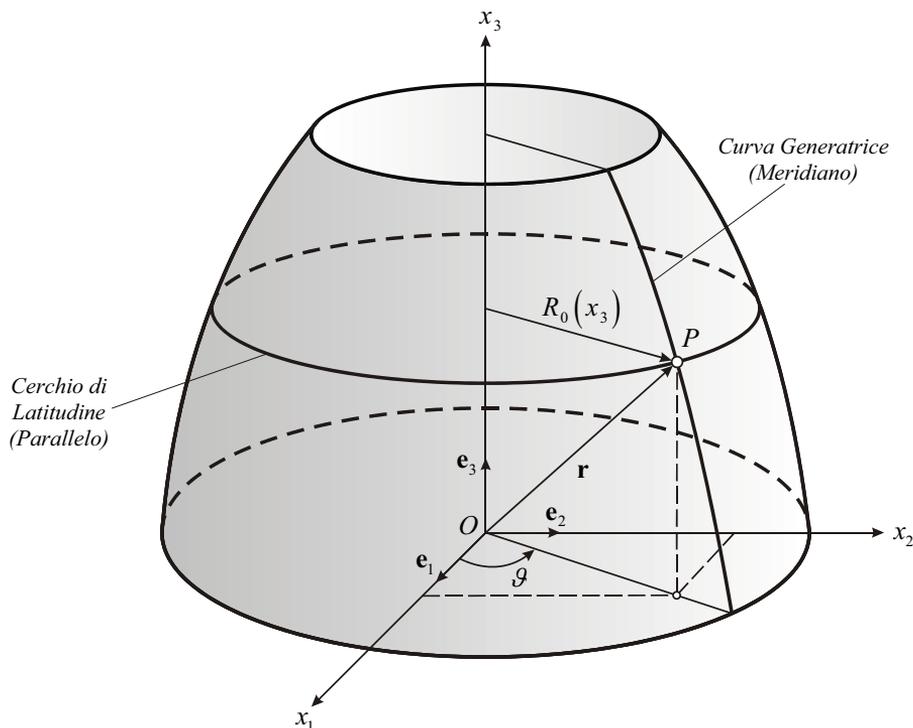


Figura 2.6 – Geometria di una superficie di rivoluzione.

Attraverso l'equazione (2.73) si definisce una superficie di rivoluzione associando ad  $\alpha_1$  la coordinata lineare  $x_3$  e ad  $\alpha_2$  quella curvilinea  $\vartheta$  (coordinate cilindriche). Adottando questa notazione, si determinano le quantità necessarie per esprimere la prima e la seconda forma fondamentale di tali superfici. Le derivate di  $\mathbf{r}(x_3, \theta)$  fatte rispetto ai parametri suddetti risultano essere:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{,1} &= R'_0 \cos \vartheta \mathbf{e}_1 + R'_0 \sin \vartheta \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{r}_{,2} &= -R_0 \sin \vartheta \mathbf{e}_1 + R_0 \cos \vartheta \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (2.74)$$

dove l'apice sta ad indicare la derivazione fatta rispetto alla coordinata  $x_3$ . In base alle (2.74) è possibile scrivere la prima forma fondamentale delle superfici di rivoluzione. Sostituendo le relazioni (2.74) nelle equazioni (2.18), si ha:

$$E = \mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,1} = 1 + (R'_0)^2, \quad F = \mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,2} = 0, \quad G = \mathbf{r}_{,2} \cdot \mathbf{r}_{,2} = R_0^2 \quad (2.75)$$

Dalle (2.75) si può osservare che i meridiani ed i paralleli definiscono una famiglia ortogonale di linee parametriche. La prima forma fondamentale assume l'aspetto:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = I = E(dx_3)^2 + G(d\vartheta)^2 = \left(1 + (R'_0)^2\right)(dx_3)^2 + R_0^2(d\vartheta)^2 \quad (2.76)$$

Inoltre, in base all'equazione (2.21) si ha:

$$A_1 = \sqrt{E} = \sqrt{1 + (R'_0)^2}, \quad A_2 = \sqrt{G} = R_0 \quad (2.77)$$

La normale (2.26) alla superficie di rivoluzione, tenendo conto delle equazioni (2.74), risulta essere:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2}{H} = -\frac{R_0}{H} (\cos \vartheta \mathbf{e}_1 + \sin \vartheta \mathbf{e}_2 - R'_0 \mathbf{e}_3) \quad (2.78)$$

dove:

$$H = R_0 \sqrt{1 + (R'_0)^2} \quad (2.79)$$

Si osservi che l'equazione (2.78) indica un verso per la normale  $\mathbf{n}$  orientato dal lato concavo della superficie verso il suo lato convesso così come si era assunto in precedenza. Una volta definito il versore  $\mathbf{n}$ , è possibile scrivere la seconda forma fondamentale delle superfici di rivoluzione. In base alle equazioni (2.37) e (2.78), e alle derivate fatte rispetto  $x_3$  e  $\vartheta$  delle equazioni (2.74), si ottiene:

$$L = -\mathbf{r}_{,11} \cdot \mathbf{n} = -\frac{R_0 R_0''}{H}, \quad M = -\mathbf{r}_{,12} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad N = -\mathbf{r}_{,22} \cdot \mathbf{n} = \frac{R_0^2}{H} \quad (2.80)$$

da cui ne consegue che:

$$II = L(dx_3)^2 + N(d\vartheta)^2 = -\frac{R_0 R_0''}{H}(dx_3)^2 + \frac{R_0^2}{H}(d\vartheta)^2 \quad (2.81)$$

Poiché le grandezze  $F$  ed  $M$  risultano entrambe nulle, i meridiani ed i paralleli definiscono le linee di curvatura principale della superficie di rivoluzione. Quindi, è possibile dedurre i raggi di curvatura principale dalle equazioni (2.53):

$$R_1 = \frac{1}{k_{n1}} = \frac{E}{L} = -\frac{\left(1 + (R'_0)^2\right)^{3/2}}{R_0''} \quad (2.82)$$

$$R_2 = \frac{1}{k_{n2}} = \frac{G}{N} = R_0 \sqrt{1 + (R'_0)^2}$$

Considerando le espressioni (2.82), si può osservare che  $R_1$  rappresenta il raggio di curvatura della curva di meridiano e il segno meno indica solo che esso ha direzione opposta a quella del versore normale  $\mathbf{n}$ .

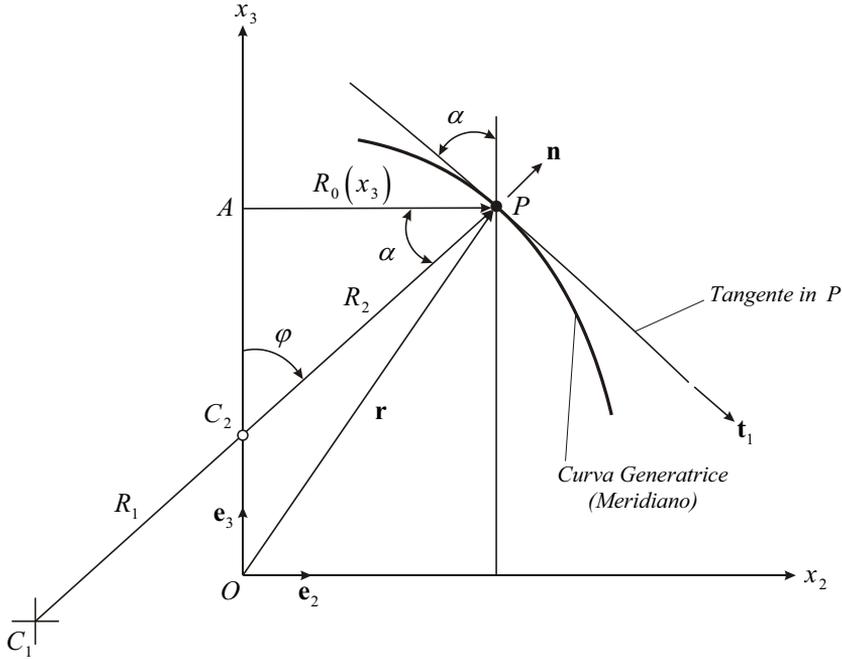


Figura 2.7 – Interpretazione geometrica del raggio  $R_2$ .

Per l'interpretazione geometrica di  $R_2$  si può osservare che:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= R'_0 \\ \overline{AC_2} &= \overline{AP} \tan \alpha = R_0 R'_0 \\ \overline{C_2P} &= \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AC_2}^2} = R_0 \sqrt{1 + (R'_0)^2} = R_2 \end{aligned} \quad (2.83)$$

$R_2$  è la distanza lungo la normale alla curva meridiana disegnata a partire dal punto  $P$  fino ad arrivare all'asse di rivoluzione della superficie.

Per controllare che le quantità caratteristiche  $A_1, A_2, R_1, R_2$  di una superficie di rivoluzione definiscano una superficie reale, è necessario eseguire il test fornito dal teorema fondamentale della teoria delle superfici basato sulle condizioni di Gauss-Codazzi.

Una superficie di rivoluzione può essere anche descritta associando ad  $\alpha_1, \alpha_2$  le coordinate curvilinee  $\varphi, \vartheta$  (coordinate sferiche), dove  $\varphi$  è l'angolo tra l'asse di rivoluzione della superficie e la normale ad essa in un dato punto. Impiegando come variabili indipendenti  $\varphi$  e  $\vartheta$ , la prima forma fondamentale risulta:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = I = E(d\varphi)^2 + G(d\vartheta)^2 = R_1^2 (d\varphi)^2 + R_0^2 (d\vartheta)^2 \quad (2.84)$$

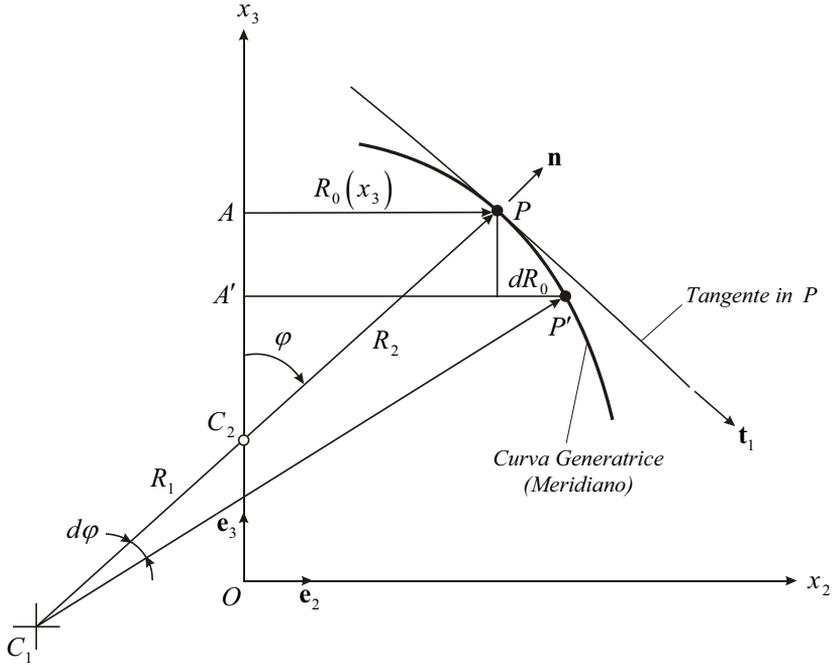


Figura 2.8 – Interpretazione geometrica della condizione di Gauss per superfici di rivoluzione.

dove il primo addendo della relazione rappresenta il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco lungo la curva meridiana, mentre il secondo definisce il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco lungo un parallelo. Le equazioni (2.21) consentono di scrivere:

$$A_1 = \sqrt{E} = R_1, \quad A_2 = \sqrt{G} = R_0 \quad (2.85)$$

Sostituendo le (2.85) nelle condizioni di Gauss-Codazzi espresse in funzione dell'attuale sistema di coordinate, le condizioni di Codazzi risultano identicamente soddisfatte, mentre la condizione di Gauss si riduce alla seguente relazione:

$$\frac{dR_0}{d\varphi} = R_1 \cos \varphi \quad (2.86)$$

Considerando lo schema in figura 2.8 si può notare che:

$$\begin{aligned} \overline{C_2P} &= R_2 \\ \overline{AP} &= R_0 = R_2 \sin \varphi \\ \overline{A'P'} - \overline{AP} &= dR_0 \\ dR_0 &= \overline{PP'} \cos \varphi = R_1 d\varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.87)$$

L'ultima delle relazioni (2.87) ribadisce il risultato dell'equazione (2.86), ossia è verificato che la condizione di Gauss è certamente soddisfatta per la formulazione

alternativa in termini delle coordinate  $\varphi, \vartheta$ . L'angolo di meridiano  $\varphi$  e l'angolo di parallelo  $\vartheta$  prendono il nome di *colatitudine* e *longitudine*, rispettivamente.

Per descrivere una superficie di rivoluzione è anche possibile associare ad  $\alpha_1, \alpha_2$  le coordinate curvilinee  $\varphi, s_\vartheta$ , dove  $s_\vartheta$  è l'ascissa curvilinea lungo il parallelo della superficie in esame. La prima forma fondamentale risulta:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = I = E(d\varphi)^2 + G(ds_\vartheta)^2 = R_1^2(d\varphi)^2 + (ds_\vartheta)^2 \quad (2.88)$$

Il primo addendo della relazione più a destra della (2.88) rappresenta il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco lungo la curva meridiana, mentre il secondo definisce il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco lungo il parallelo. Per le (2.21) si ha:

$$A_1 = \sqrt{E} = R_1, \quad A_2 = \sqrt{G} = 1 \quad (2.89)$$

Dagli esempi riportati appare che i parametri di Lamè possono essere quantità costanti, oppure funzioni più o meno complicate. La scelta del più appropriato sistema di riferimento sulla superficie dipende dal tipo di problema, ovvero dalla geometria della struttura in esame. Nei gusci a torre, essenzialmente strutture verticali, la coordinata  $x_3$  è fisicamente la più indicata. Per gusci chiusi (cupole), abbastanza ribassati, la coordinata  $x_3$  non si discosta molto dallo zero, nemmeno per paralleli relativamente distanti dall'apice. In tali casi anche l'angolo  $\varphi$  presenta la medesima proprietà e quindi l'ascissa curvilinea sembra essere la scelta più sensata. Nel caso in cui la curva meridiana presenti una inflessione, la scelta della coordinata  $\varphi$  potrebbe causare problemi, quali la non biunivocità nella corrispondenza tra i punti sulla superficie e i valori di  $\varphi$ .

La scelta più frequente, comunque, ricade sull'angolo  $\varphi$ , poiché le equazioni dei gusci sferici (inizialmente i più studiati) si semplificano notevolmente.

In questa trattazione, verrà considerato come sistema di riferimento più appropriato per lo studio dei gusci a doppia curvatura quello definito mediante il sistema di coordinate sferiche  $\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = \vartheta$ , mentre per lo studio dei gusci a singola curvatura e dei gusci degeneri si adotterà il sistema di *coordinate curvilinee*  $\alpha_1 = s_1, \alpha_2 = s_2$ , dove  $s_1$  rappresenta la lunghezza infinitesima dell'arco di curva lungo la prima direzione coordinata, mentre  $s_2$  definisce la lunghezza infinitesima dell'arco di curva lungo la seconda direzione coordinata. La prima forma fondamentale per quest'ultimo sistema risulta:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = I = E(ds_1)^2 + G(ds_2)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 \quad (2.90)$$

da cui si evince:

$$A_1 = \sqrt{E} = 1, \quad A_2 = \sqrt{G} = 1 \quad (2.91)$$

Operando la scelta opportuna è possibile scrivere in forma semplice le equazioni governanti le tipologie di guscio considerate, e passare da una tipologia all'altra attraverso l'imposizione di semplici condizioni geometriche.

### 2.1.2.10 Definizione di una superficie cilindrica di traslazione

Un *cilindro* o una volta a profilo variabile è una superficie di traslazione a singola curvatura, generata dalla traslazione lungo una generica curva, detta *direttrice*, di una linea retta parallelamente a se stessa. Da questa definizione, segue che per ogni punto della superficie cilindrica passa una linea retta, chiamata *generatrice*. Tutti i piani normali alle generatrici definiscono identiche curve di intersezione, che prendono il nome di *profili*. Il tipo di cilindro viene caratterizzato attraverso la forma del profilo: cilindro ellittico, circolare, cicloidale, parabolico, a catenaria. Tra questi solo il cilindro circolare è una superficie di rivoluzione, mentre tutti gli altri sono superfici di traslazione.

Si consideri un cilindro di forma generica. Osservando la figura 2.9 si può notare che il vettore posizione per un dato punto  $P$  della superficie di traslazione è esprimibile mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{r}(x_1, \varphi) = x_1 \mathbf{e}_1 + u(\varphi) \mathbf{e}_2 + v(\varphi) \mathbf{e}_3 \quad (2.92)$$

dove  $u(\varphi), v(\varphi)$  sono le proiezioni lungo gli assi coordinati  $x_2, x_3$ , rispettivamente, in funzione dell'angolo  $\varphi$ , che la normale al profilo del cilindro forma con l'asse  $x_3$ .

Usando le coordinate  $\alpha_1 = \varphi, \alpha_2 = x_1$  per descrivere la posizione di un generico punto sulla superficie cilindrica, la prima forma fondamentale assume l'aspetto:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = I = E(d\varphi)^2 + G(dx_1)^2 = R_1^2(d\varphi)^2 + (dx_1)^2 \quad (2.93)$$

dove il primo addendo della relazione rappresenta il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco di curva lungo il profilo, mentre il secondo definisce il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco di curva lungo una generatrice. Per le (2.21) si ha:

$$A_1 = \sqrt{E} = R_1, \quad A_2 = \sqrt{G} = 1 \quad (2.94)$$

Si può osservare che  $R_1$  rappresenta il raggio di curvatura principale del profilo del cilindro, mentre il raggio di curvatura principale  $R_2$  della generatrice risulta infinito

( $R_2 = \infty$ ). Per il cilindro circolare il raggio di curvatura principale risulta essere costante ( $R_1 = cost$ ).

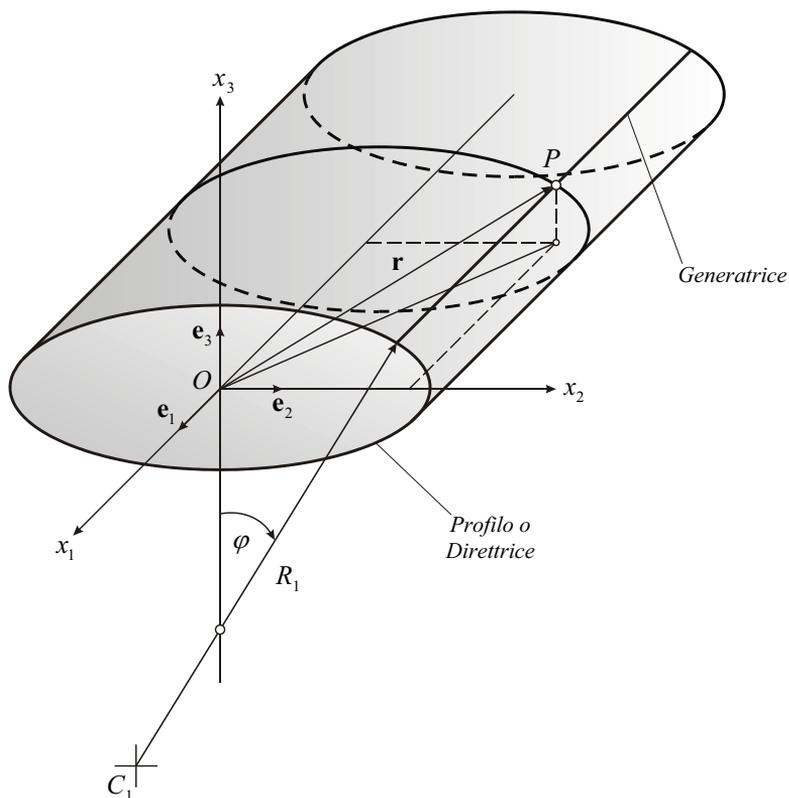


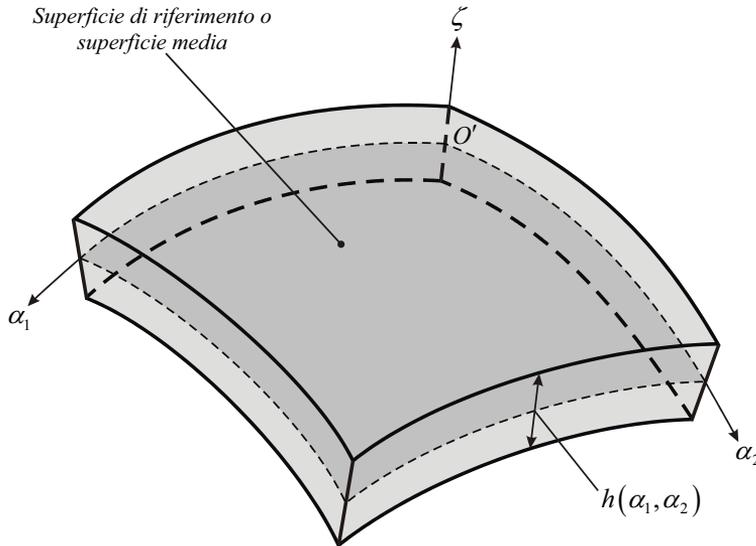
Figura 2.9 – Geometria di una superficie cilindrica.

Finora sono stati esposti tutti quei concetti e risultati della geometria differenziale che saranno necessari per la modellazione analitica delle strutture a guscio. In particolare, nel derivare la teoria dei gusci si farà un uso molto marcato del concetto di prima forma fondamentale di una superficie e delle associate prime grandezze fondamentali oltre ai vari aspetti legati all'ortogonalità delle linee di curvatura principale, alle condizioni di Gauss-Codazzi ed alle proprietà delle superfici di rivoluzione e di traslazione.

## 2.2 TEORIA DI REISSNER-MINDLIN

### 2.2.1 IPOTESI FONDAMENTALI

Le equazioni fondamentali che permettono di descrivere il comportamento dei gusci elastici moderatamente spessi sono state derivate originariamente da Reissner (1969) sulla base di alcune ipotesi fondamentali meno restrittive rispetto a quelle di Kirchhoff-Love per l'analisi di gusci sottili. Le ipotesi in parola e le equazioni che ne derivano definiscono la *teoria del primo ordine*, nota nella letteratura anglosassone come *First-order Shear Deformation Theory (FSDT)* oppure *teoria di Reissner-Mindlin*.



**Figura 2.10** – Geometria di un guscio generico e sistema di riferimento locale.

Il comportamento di un guscio moderatamente spesso può essere studiato considerandone la relativa *superficie media*, che viene assunta come superficie di riferimento. Per descrivere tale superficie occorre definire un sistema di riferimento locale. In base alla geometria differenziale, il sistema di coordinate curvilinee sulla superficie media può essere scelto coincidente con le linee ortogonali di curvatura principale della superficie stessa, come mostrato in figura 2.10. Viene assunto come sistema di riferimento locale il riferimento ortogonale  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  di origine  $O'$ , in cui  $\alpha_1, \alpha_2$  individuano le linee parametriche della superficie media e  $\zeta$  rappresenta l'asse ortogonale a quest'ultima. Si

vuol far rilevare che i versori associati al suddetto sistema sono rispettivamente  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$ . I primi due versori sono tangenti alle linee coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$ , rispettivamente, mentre il terzo è normale alla superficie in parola. La scelta di questo sistema di riferimento consente una comoda definizione delle equazioni fondamentali.

Nel sistema locale è possibile descrivere il campo di spostamento di un qualsiasi punto del solido attraverso la terna di componenti  $U_1, U_2, W$ . Le componenti di spostamento  $U_1, U_2, W$  secondo le linee coordinate  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ , rispettivamente, dipendono dal tempo oltre che dalla posizione del punto e sono definite nel modo seguente:

$$U_1 = U_1(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t), \quad U_2 = U_2(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t), \quad W = W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) \quad (2.95)$$

Dopo la deformazione la superficie media prede il nome di *superficie elastica*.

La teoria del primo ordine (FSDT) dei gusci moderatamente spessi si basa sulle ipotesi fondamentali di seguito elencate.

- 1) I segmenti rettilinei e normali alla superficie di riferimento del guscio nella sua configurazione indeformata, si conservano rettilinei, ma non necessariamente normali alla superficie elastica dopo la deformazione (rilassamento dell'ipotesi di Kirchhoff-Love per gusci sottili). In questo modo, non si trascurano le deformazioni taglianti.
- 2) Tutti gli spostamenti sono piccoli, e in particolare lo spostamento  $W$  dei punti del guscio, secondo la direzione normale alla superficie di riferimento, è indipendente da  $\zeta$  e piccolo rispetto allo spessore  $h$  del solido (*ipotesi di piccoli spostamenti*). L'ipotesi sullo spostamento  $W$  può essere espressa simbolicamente:

$$W = W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) = W(\alpha_1, \alpha_2, t) \ll h \quad (2.96)$$

Come conseguenza, le deformazioni secondo la normale alla superficie elastica sono trascurabili. Ne consegue che la dilatazione lungo la normale alla superficie media risulta nulla:

$$\varepsilon_n \approx 0 \quad (2.97)$$

L'ipotesi di piccoli spostamenti consente di riferire tutti i calcoli alla configurazione indeformata e di trascurare gli effetti del secondo ordine.

- 3) La tensione normale  $\sigma_n$ , trascurabile rispetto alle restanti componenti di tensione, si assume uguale a zero in tutti i punti del solido:

$$\sigma_n = \sigma_n(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) = 0 \quad (2.98)$$

## 2.2.2 COORDINATE DI UN GUSCIO GENERICO

Si consideri un guscio generico avente spessore  $h(\alpha_1, \alpha_2)$  e sia  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  il sistema di riferimento locale posto sulla superficie media (la definizione analitica della superficie di riferimento può essere fornita attraverso l'espressione  $\zeta = 0$ ). La posizione di un punto arbitrario  $P$  del guscio nello spazio può essere descritta dal vettore posizione (figura 2.11):

$$\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.99)$$

dove  $\mathbf{r}$  è il vettore posizione del punto  $P'$  sulla superficie di riferimento,  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie media e  $\zeta$  rappresenta la distanza del punto  $P$  dalla sua proiezione  $P'$  sulla superficie di riferimento (distanza staccata lungo  $\mathbf{n}$  a partire dalla superficie  $\zeta = 0$ ).  $\alpha_1, \alpha_2$  sono le linee parametriche della superficie di riferimento e coincidono con le linee ortogonali di curvatura principale della superficie stessa.

Dato che il guscio è delimitato superiormente ed inferiormente da due superfici, la distanza  $\zeta$  non dovrà eccedere i limiti definiti dallo spessore locale  $h(\alpha_1, \alpha_2)$ . Inoltre, un guscio possiede di solito un'estensione limitata lungo le linee parametriche  $\alpha_1, \alpha_2$ . Nella valutazione dei vettori presenti nell'equazione (2.99)  $\alpha_1, \alpha_2$  presentano dei limiti. ( $\alpha_1^0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^1$  e  $\alpha_2^0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^1$ ).

Mediante l'equazione (2.99), si può valutare il quadrato della distanza tra un punto arbitrario  $P$  di coordinate  $(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$  ed un punto  $P_1$ , infinitamente vicino ad esso, di coordinate  $(\alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2, \zeta + d\zeta)$  risulta:

$$(ds)^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = (d\mathbf{r} + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n}d\zeta) \cdot (d\mathbf{r} + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n}d\zeta) \quad (2.100)$$

Ricordando che il sistema di coordinate assunto è ortogonale, eseguendo le operazioni si perviene al seguente risultato:

$$(ds)^2 = A_1^2 (1 + \zeta/R_1)^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (1 + \zeta/R_2)^2 (d\alpha_2)^2 + (d\zeta)^2 \quad (2.101)$$

I primi due termini a secondo membro della (2.101) rappresentano la prima forma fondamentale di una superficie posta ad una distanza  $\zeta$  dal superficie media, in analogia alla (2.20).

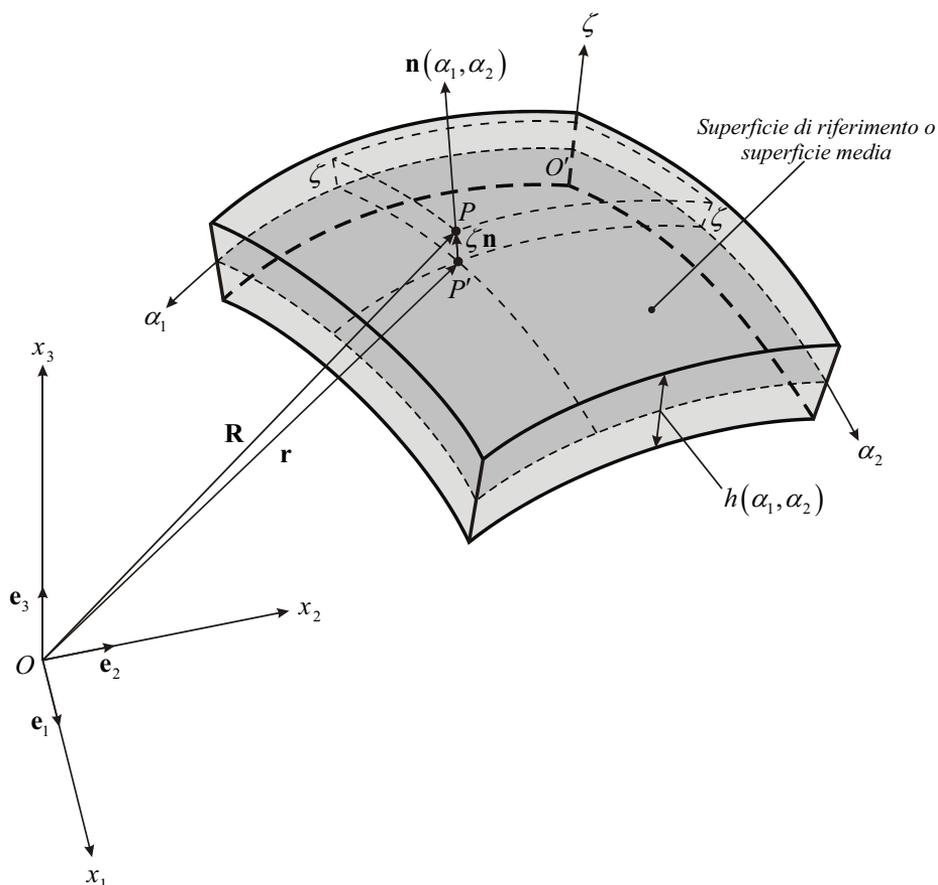


Figura 2.11 – Vettore posizione di un punto arbitrario del guscio.

Una volta stabilito il sistema di coordinate, si può definire l'elemento fondamentale o infinitesimo di guscio come quell'elemento delimitato in direzione  $\mathbf{n}$  da due superfici poste ad una distanza infinitesima  $d\zeta$ , a partire da una quota  $\zeta$  rispetto alla superficie di riferimento e da quattro sezioni perpendicolari alla superficie media nelle direzioni  $\alpha_1, \alpha_2$ . Ogni coppia di tagli è individuata da una coppia di linee parametriche adiacenti sulla superficie media.

La rappresentazione grafica dell'elemento infinitesimo è riportata in figura 2.12, ove sono indicate anche le componenti di tensione agenti sull'elemento stesso. Su ciascuna faccia laterale agisce un tensione che può essere scomposta in tre componenti. In figura 2.12 sono riportate le componenti di tensione agenti sulle facce laterali di normale positiva, e in particolare le componenti normali  $\sigma_1, \sigma_2$ , quelle tangenziali  $\tau_{1n}, \tau_{2n}$  dirette lungo la normale  $\zeta$  e le componenti tangenziali  $\tau_{12}, \tau_{21}$  dirette lungo le direzioni principali  $\alpha_1, \alpha_2$ ,

rispettivamente. Le lunghezze degli archi elementari sulle facce laterali che delimitano l'elemento fondamentale sono, in accordo con l'equazione (2.101):

$$\begin{aligned} ds_1(\zeta) &= A_1(1 + \zeta/R_1)d\alpha_1 \\ ds_2(\zeta) &= A_2(1 + \zeta/R_2)d\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.102)$$

mentre le aree infinitesime definite mediante le quattro sezioni descritte in precedenza possono essere valutate moltiplicando le equazioni (2.102) per l'altezza infinitesima  $d\zeta$  :

$$\begin{aligned} d\Sigma_1(\zeta) &= A_1(1 + \zeta/R_1)d\alpha_1d\zeta \\ d\Sigma_2(\zeta) &= A_2(1 + \zeta/R_2)d\alpha_2d\zeta \end{aligned} \quad (2.103)$$

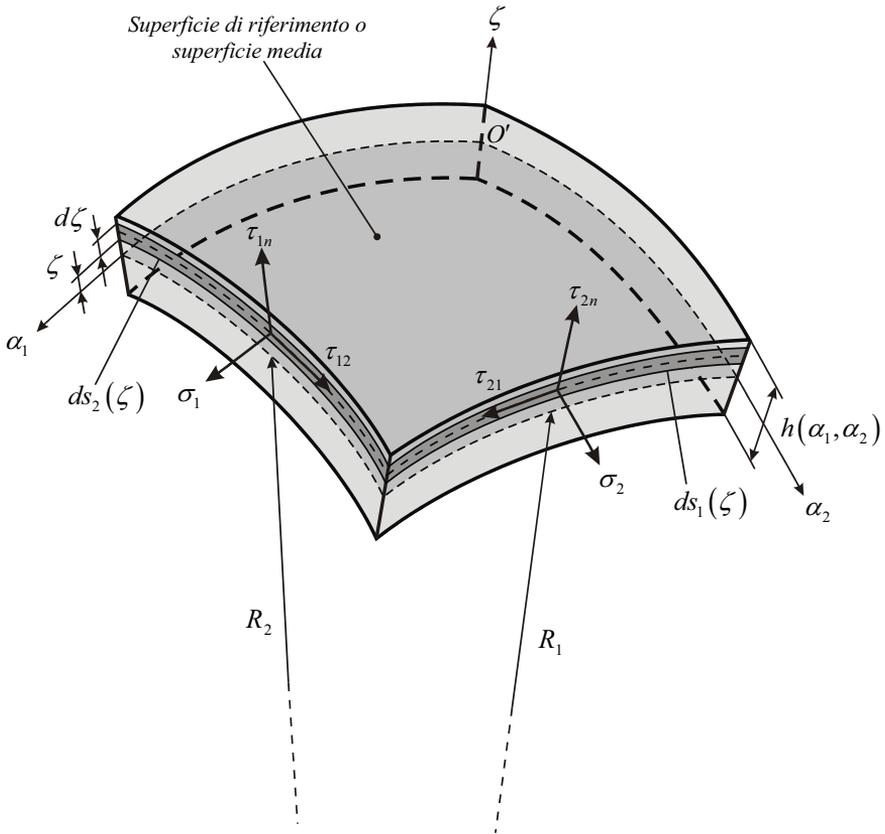


Figura 2.12 – Elemento infinitesimo di guscio.

### 2.2.3 EQUAZIONI DI CONGRUENZA

In base a quanto definito nelle sezioni precedenti, il sistema di riferimento adottato consente di definire il campo di spostamenti in un punto qualsiasi di un guscio mediante la terna di componenti di spostamento  $U_1, U_2, W$ , che risultano essere funzioni delle coordinate del punto  $(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$  e del tempo  $t$ . Le ipotesi della FSDT consentono di definire il *modello cinematico* che descrive il comportamento delle strutture in esame. Da tale modello si può risalire alle relazioni tra componenti di spostamento e componenti di deformazione che costituiscono le *equazioni di congruenza*.

#### 2.2.3.1 Modello cinematico

Lo spostamento di un generico punto  $P$  è definito dal vettore spostamento:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) &= U_1(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t)\mathbf{t}_1 + U_2(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t)\mathbf{t}_2 + W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t)\mathbf{n} \\ &\quad \downarrow \\ \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) &= [U_1 \quad U_2 \quad W]^T \end{aligned} \quad (2.104)$$

dove  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$  sono, rispettivamente, i versori secondo le direzioni tangenti alle linee parametriche  $\alpha_1, \alpha_2$  e la normale alla superficie di riferimento, mentre  $U_1, U_2, W$  sono le componenti del vettore spostamento nelle corrispondenti direzioni coordinate ortogonali. Queste ultime rappresentano le componenti di spostamento di punto arbitrario  $P$  del guscio (figura 2.13) e possono essere definite localmente mediante un'opportuna combinazione lineare.

Il campo di spostamento può essere descritto nella forma seguente:

$$\begin{aligned} U_1(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) &= u_1(\alpha_1, \alpha_2, t) + \zeta\beta_1(\alpha_1, \alpha_2, t) \\ U_2(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) &= u_2(\alpha_1, \alpha_2, t) + \zeta\beta_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \\ W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta, t) &= w(\alpha_1, \alpha_2, t) \end{aligned} \quad (2.105)$$

dove  $u_1, u_2, w$  rappresentano le componenti del vettore spostamento del punto  $P'$  posto sulla superficie di riferimento del guscio (corrispondente di  $P$  lungo la normale  $\mathbf{n}$ ), mentre  $\beta_1, \beta_2$  sono le rotazioni attorno alle tangenti al piano medio orientate lungo le linee parametriche  $\alpha_2, \alpha_1$ , rispettivamente. Le componenti di spostamento  $u_1, u_2, w$  possono anche essere interpretate come componenti di spostamento  $U_1, U_2, W$  per  $\zeta = 0$ , mentre

$\beta_1, \beta_2$  rappresentano le rotazioni della normale alla superficie di riferimento attorno alle linee coordinate  $\alpha_2, \alpha_1$ , rispettivamente (figura 2.13). Si vuol far rilevare che nel modello cinematico introdotto è stata trascurata la rotazione attorno alla normale  $\mathbf{n}$ . Esistono modelli più sofisticati che tengono in considerazione anche questo contributo, tuttavia in questa trattazione l'effetto in parola verrà trascurato.

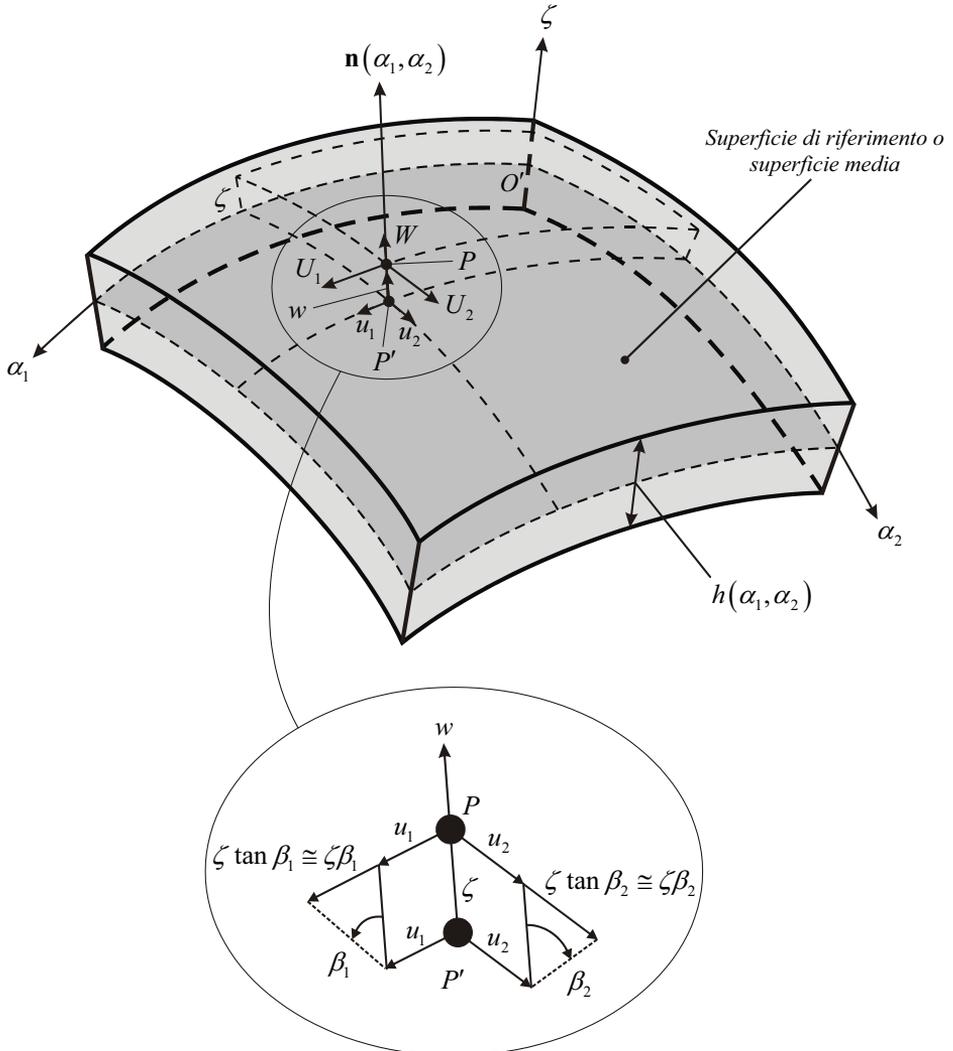


Figura 2.13 – Interpretazione geometrica del modello cinematico.

Come conseguenza di questa assunzione, l'equilibrio alla rotazione attorno alla normale  $\mathbf{n}$  dovrà essere identicamente soddisfatto. Dalle relazioni (2.105) si può notare che per gli spostamenti tangenziali  $U_1, U_2$  si presume un modello di variazione lineare lungo lo

spessore in funzione delle rotazioni  $\beta_1, \beta_2$ , mentre si è ipotizzata una variazione uniforme per quanto riguarda la traslazione  $W$  lungo la coordinata  $\zeta$ .

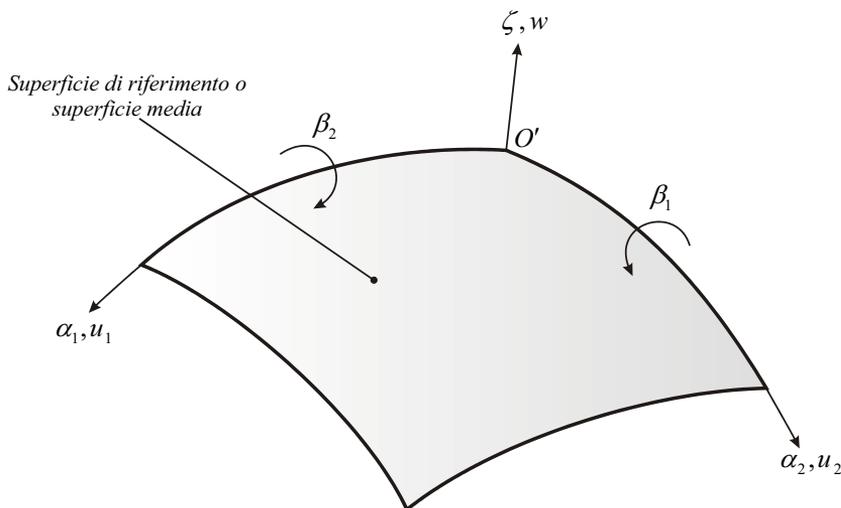


Figura 2.14 – Componenti generalizzate di spostamento.

Per definire in maniera completa il campo di spostamento sono state introdotte cinque nuove quantità  $u_1, u_2, w, \beta_1, \beta_2$  riferite alla superficie di riferimento (figura 2.14), denominate *componenti generalizzate di spostamento*. Esse sono le reali incognite, o *gradi di libertà*, del problema in esame e rappresentano le *variabili di configurazione* del guscio generico nel sistema di riferimento adottato. Possono essere interpretate come componenti del seguente vettore spostamento generalizzato riferito alla superficie di riferimento:

$$\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, t) = [u_1 \quad u_2 \quad w \quad \beta_1 \quad \beta_2]^T \quad (2.106)$$

### 2.2.3.2 Caratteristiche della deformazione

In un sistema ortogonale di coordinate curvilinee le componenti di deformazione normale e tagliante possono essere espresse in termini di componenti generalizzate di spostamento. Allo scopo di semplificare la trattazione, l'equazione (2.101) può essere riscritta in maniera più generale:

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) (d\alpha_i)^2 \quad (2.107)$$

mediante le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned}
 \zeta &= \alpha_3 \\
 W &= U_3 \\
 A_1^2 \left(1 + \zeta/R_1\right)^2 &= g_{11}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
 A_2^2 \left(1 + \zeta/R_2\right)^2 &= g_{22}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
 1 &= g_{33}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Si considerino due punti  $P_0$  e  $P_1$  infinitamente vicini nella configurazione indeformata e siano  $P'_0$  e  $P'_1$  i corrispondenti punti dopo la deformazione. Le coordinate curvilinee dei punti  $P_0$  e  $P_1$  prima della deformazione sono  $\alpha_i$  e  $\alpha_i + d\alpha_i$ , mentre le coordinate curvilinee dei punti  $P'_0$  e  $P'_1$  a deformazione avvenuta risultano  $\alpha_i + \xi_i$  e  $\alpha_i + d\alpha_i + \xi_i + d\xi_i$ . Le quantità  $\xi_i$  rappresentano le variazioni delle coordinate curvilinee nel passaggio dalla configurazione indeformata a quella deformata. La distanza tra punti  $P'_0$  e  $P'_1$  nella configurazione deformata assume l'aspetto:

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii}(\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2, \alpha_3 + \xi_3) (d\alpha_i + d\xi_i)^2 \tag{2.109}$$

Nell'ipotesi di deformazioni infinitesime, sviluppando in serie di Taylor le quantità  $g_{ii}(\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2, \alpha_3 + \xi_3)$  nell'intorno del punto  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha:

$$g_{ii}(\alpha_1 + \xi_1, \alpha_2 + \xi_2, \alpha_3 + \xi_3) = g_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g_{ii}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial \alpha_j} \xi_j \tag{2.110}$$

In maniera analoga, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo  $(d\xi_i)^2$ , si può scrivere:

$$(d\alpha_i + d\xi_i)^2 = (d\alpha_i)^2 + 2d\alpha_i d\xi_i + (d\xi_i)^2 = (d\alpha_i)^2 + 2d\alpha_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j \tag{2.111}$$

dove è stata introdotta la definizione del differenziale  $d\xi_i$ :

$$d\xi_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} d\alpha_j \tag{2.112}$$

Introducendo le relazioni (2.110) e (2.111) nell'equazione (2.109) e trascurando ancora una volta gli infinitesimi di ordine superiore al primo, si ottiene:

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \delta_{ij} \left( g_{ii} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \xi_k \right) + g_{ii} \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} + g_{ij} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \right) d\alpha_i d\alpha_j \tag{2.113}$$

dove  $\delta_{ij}$  rappresenta il delta di Kronecker (1.83). Definendo la quantità tra parentesi tonde più esterne nell'equazione (2.113):

$$G_{ij} = \delta_{ij} \left( g_{ii} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \xi_k \right) + g_{ii} \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} + g_{jj} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \quad (2.114)$$

si ha:

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 G_{ij} d\alpha_i d\alpha_j \quad (2.115)$$

Si vuol far inoltre rilevare che i coefficienti  $G_{ij}$  sono simmetrici:

$$G_{ij} = G_{ji} \quad (2.116)$$

La lunghezza dell'elemento d'arco infinitesimo lungo una direzione coordinata  $\alpha_i$  nella configurazione indeformata vale:

$$ds_i = \sqrt{g_{ii}} d\alpha_i \quad (2.117)$$

Nella configurazione deformata la lunghezza dello stesso elemento d'arco risulta essere:

$$ds'_i = \sqrt{G_{ii}} d\alpha_i \quad (2.118)$$

La deformazione  $\varepsilon_{ii}$  secondo la direzione  $\alpha_i$  può essere allora definita nel seguente modo:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{ds'_i - ds_i}{ds_i} = \frac{\sqrt{G_{ii}} d\alpha_i - \sqrt{g_{ii}} d\alpha_i}{\sqrt{g_{ii}} d\alpha_i} = \sqrt{\frac{G_{ii}}{g_{ii}}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{G_{ii} - g_{ii}}{g_{ii}}} - 1 \quad (2.119)$$

Sviluppando in serie di Taylor la radice presente nell'equazione (2.119):

$$\sqrt{1 + \frac{G_{ii} - g_{ii}}{g_{ii}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{G_{ii} - g_{ii}}{g_{ii}} + \dots \quad (2.120)$$

e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ricava:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} \frac{G_{ii} - g_{ii}}{g_{ii}} \quad (2.121)$$

Le deformazioni  $\varepsilon_{ij}, (i \neq j)$ , sono definite attraverso la variazione angolare dovuta alla deformazione:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \theta_{ij} \quad (2.122)$$

L'angolo  $\theta_{ij}$  tra i due segmenti infinitesimi  $ds'_i$  e  $ds'_j$  può essere valutato nel seguente modo:

$$(ds')^2 = (ds'_i)^2 + (ds'_j)^2 - 2(ds'_i)(ds'_j) \cos \theta_{ij} \quad (2.123)$$

Per le (2.115) e (2.117), si ha:

$$\cos \theta_{ij} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}G_{jj}}} \quad (2.124)$$

Sostituendo la relazione (2.122) nella (2.124) e ricordando che si è fatta l'ipotesi di deformazioni infinitesime, si ricava:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{ij}\right) = \sin \varepsilon_{ij} \cong \varepsilon_{ij} \quad (2.125)$$

Considerando le equazioni (2.114) e trascurando i termini di ordine superiore al primo risulta lecita anche la seguente approssimazione:

$$\frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}G_{jj}}} \cong \frac{G_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad (2.126)$$

Le deformazioni  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ), assumono allora il seguente aspetto:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \quad (2.127)$$

Le relazioni che legano le componenti di spostamento  $U_i$  secondo le direzioni coordinate  $\alpha_i$  alle variazioni delle coordinate curvilinee  $\xi_i$  possono scriversi:

$$U_i = \sqrt{g_{ii}} \xi_i \quad (2.128)$$

Infine, introducendo le equazioni (2.114) e (2.128) nelle equazioni (2.121) e (2.127), si deducono le espressioni generali delle componenti di deformazione:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{2g_{ii}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \xi_k = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{U_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + \frac{1}{2g_{ii}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_{ii}}{\partial \alpha_k} \frac{U_k}{\sqrt{g_{kk}}} \\ \gamma_{ij} &= 2\varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \left( g_{ii} \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} + g_{jj} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \left( g_{ii} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{U_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) + g_{jj} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{U_j}{\sqrt{g_{jj}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.129)$$

dove  $i, j = 1, 2, 3$  per la prima ed  $i, j = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$  per la seconda delle due relazioni (2.129).

Introducendo le posizioni (2.108) nelle equazioni (2.129), si ottengono le relazioni tra spostamenti e deformazioni per un generico guscio. Si è quindi in grado di scrivere le equazioni di congruenza:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \left( \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{A_1}{R_1} W \right) \quad (2.130)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2(1+\zeta/R_2)} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} U_1 + \frac{A_2}{R_2} W \right) \quad (2.131)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\partial W}{\partial \zeta} \quad (2.132)$$

$$\gamma_{1n} = \frac{1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + A_1(1+\zeta/R_1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{U_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) \quad (2.133)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + A_2(1+\zeta/R_2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{U_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) \quad (2.134)$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_2(1+\zeta/R_2)}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{U_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) + \frac{A_1(1+\zeta/R_1)}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{U_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) \quad (2.135)$$

Le relazioni (2.130)-(2.135) sono del tutto generali. Pertanto, non tengono in considerazione nessuna delle ipotesi introdotte dalla FSDT. Inserendo il campo di spostamento (2.105) all'interno delle equazioni (2.130)-(2.135), si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \left( \frac{\partial(u_1 + \zeta\beta_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (u_2 + \zeta\beta_2) + \frac{A_1}{R_1} w \right) = \\ &= \frac{1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \zeta \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \beta_2 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2(1+\zeta/R_2)} \left( \frac{\partial(u_2 + \zeta\beta_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (u_1 + \zeta\beta_1) + \frac{A_2}{R_2} w \right) = \\ &= \frac{1}{A_2(1+\zeta/R_2)} \left( \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \zeta \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \beta_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.138)$$

$$\gamma_{1n} = \frac{1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + A_1(1+\zeta/R_1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_1 + \zeta\beta_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) \quad (2.139)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + A_2(1+\zeta/R_2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_2 + \zeta\beta_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \frac{A_2(1+\zeta/R_2)}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2 + \zeta \beta_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) + \frac{A_1(1+\zeta/R_1)}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1 + \zeta \beta_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) = \\ &= \left( \frac{A_2(1+\zeta/R_2)}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) + \frac{A_1(1+\zeta/R_1)}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) \right) + \\ &+ \zeta \left( \frac{A_2(1+\zeta/R_2)}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\beta_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) + \frac{A_1(1+\zeta/R_1)}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\beta_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.141)$$

Svolgendo le derivate e trascurando i termini del tipo  $\zeta/R_1, \zeta/R_2$  rispetto all'unità ( $\zeta/R_1 \ll 1, \zeta/R_2 \ll 1$ ), essendo lecito farlo visto che il guscio è moderatamente spesso, le componenti di deformazione assumono il seguente aspetto:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \zeta \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \beta_2 \right) \right) \quad (2.142)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \left( \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \zeta \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \beta_1 \right) \right) \quad (2.143)$$

$$\varepsilon_n = \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.144)$$

$$\gamma_{1n} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1} + \beta_1 \quad (2.145)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{R_2} + \beta_2 \quad (2.146)$$

$$\gamma_{12} = \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) \right) + \zeta \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\beta_1}{A_1} \right) \right) \quad (2.147)$$

Le due grandezze  $\gamma_{1n}, \gamma_{2n}$  rappresentano gli *scorrimenti angolari medi* tra la normale e ciascuna delle due direzioni principali  $\alpha_1, \alpha_2$ . Per comodità, le equazioni (2.142), (2.143) e (2.147) possono risciversi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \zeta \chi_1 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + \zeta \chi_2 \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12}^0 + \zeta \chi_{12} \end{aligned} \quad (2.148)$$

dove  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$  rappresentano le *deformazioni* o *dilatazioni membranali* secondo le linee parametriche della superficie di riferimento,  $\gamma_{12}^0$  è lo *scorrimento angolare* tra le

coordinate curvilinee della superficie media e misura la diminuzione dell'angolo compreso tra le direzioni principali di curvatura a deformazione avvenuta,  $\chi_1, \chi_2$  sono le *curvature flessionali* e  $\chi_{12}$  è la *curvatura torsionale* della superficie di riferimento. Le quantità  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \gamma_{12}^0, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  vengono definite nel modo seguente:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) \quad (2.149)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \quad (2.150)$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) \quad (2.151)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \beta_2 \right) \quad (2.152)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \beta_1 \right) \quad (2.153)$$

$$\chi_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\beta_1}{A_1} \right) \quad (2.154)$$

Le relazioni di congruenza (2.142)-(2.147) sono funzione delle otto quantità indipendenti  $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \gamma_{12}^0, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}$ . Le grandezze in parola, definite sulla superficie di riferimento ( $\zeta = 0$ ), prendono il nome di *caratteristiche della deformazione* e possono essere raggruppate all'interno del vettore algebrico:

$$\boldsymbol{\eta} = \left[ \varepsilon_1^0 \quad \varepsilon_2^0 \quad \gamma_{12}^0 \quad \chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_{12} \quad \gamma_{1n} \quad \gamma_{2n} \right]^T \quad (2.155)$$

Impiegando la notazione introdotta nell'equazione (2.16), le caratteristiche della deformazione possono porsi nella forma:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) \quad (2.156)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \quad (2.157)$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{1}{A_1 A_2} (u_{2,1} A_2 - u_2 A_{2,1} + u_{1,2} A_1 - u_1 A_{1,2}) \quad (2.158)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) \quad (2.159)$$

$$\chi_2 = \frac{1}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) \quad (2.160)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \beta_{2,1} A_2 - \beta_2 A_{2,1} + \beta_{1,2} A_1 - \beta_1 A_{1,2} \right) \quad (2.161)$$

$$\gamma_{1n} = \frac{1}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) \quad (2.162)$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \quad (2.163)$$

\* \* \*

Di seguito vengono dedotte le equazioni (2.142)-(2.147) e (2.156)-(2.163) dalle equazioni (2.136)-(2.141):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{1}{A_1 (1 + \zeta/R_1)} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) = \frac{1}{A_1} \left( u_{,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{A_2 (1 + \zeta/R_2)} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) = \frac{1}{A_2} \left( u_{,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \\ \gamma_{12}^0 &= \frac{A_2 (1 + \zeta/R_2)}{A_1 (1 + \zeta/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2 (1 + \zeta/R_2)} \right) + \frac{A_1 (1 + \zeta/R_1)}{A_2 (1 + \zeta/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1 (1 + \zeta/R_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} A_2 - u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_2 A_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} A_1 - u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} A_2 - u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} A_1 - u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{1}{A_1 A_2} (u_{2,1} A_2 - u_2 A_{2,1} + u_{1,2} A_1 - u_1 A_{1,2}) \\ \chi_1 &= \frac{1}{A_1 (1 + \zeta/R_1)} \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \beta_2 \right) = \frac{1}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) \\ \chi_2 &= \frac{1}{A_2 (1 + \zeta/R_2)} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \beta_1 \right) = \frac{1}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) \\ \chi_{12} &= \frac{A_2 (1 + \zeta/R_2)}{A_1 (1 + \zeta/R_1)} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\beta_2}{A_2 (1 + \zeta/R_2)} \right) + \frac{A_1 (1 + \zeta/R_1)}{A_2 (1 + \zeta/R_2)} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{\beta_1}{A_1 (1 + \zeta/R_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{1}{A_2 A_1} \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{1}{A_1 A_2} (\beta_{2,1} A_2 - \beta_2 A_{2,1} + \beta_{1,2} A_1 - \beta_1 A_{1,2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1n} &= \frac{1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + A_1(1+\zeta/R_1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_1 + \zeta \beta_1}{A_1(1+\zeta/R_1)} \right) = \\
 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + (1+\zeta/R_1) u_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{1+\zeta/R_1} \right) + (1+\zeta/R_1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta \beta_1}{1+\zeta/R_1} \right) = \\
 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + u_1 \frac{(1+\zeta/R_1)}{(1+\zeta/R_1)^2} \left( -\frac{1}{R_1} \right) + \frac{(1+\zeta/R_1)}{(1+\zeta/R_1)^2} \left( \beta_1(1+\zeta/R_1) - \frac{\zeta}{R_1} \beta_1 \right) = \\
 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{(1+\zeta/R_1)} \frac{u_1}{R_1} + \beta_1 - \frac{(1+\zeta/R_1)}{(1+\zeta/R_1)^2} \frac{\zeta}{R_1} \beta_1 = \frac{1}{A_1} w_{,1} - \frac{u_1}{R_1} + \beta_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{2n} &= \frac{1}{A_2(1+\zeta/R_2)} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + A_2(1+\zeta/R_2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{u_2 + \zeta \beta_2}{A_2(1+\zeta/R_2)} \right) = \\
 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + (1+\zeta/R_2) u_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{1+\zeta/R_2} \right) + (1+\zeta/R_2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta \beta_2}{1+\zeta/R_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + u_2 \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_2)^2} \left( -\frac{1}{R_2} \right) + \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_2)^2} \left( \beta_2(1+\zeta/R_2) - \frac{\zeta}{R_2} \beta_2 \right) = \\
 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{(1+\zeta/R_2)} \frac{u_2}{R_2} + \beta_2 - \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_2)^2} \frac{\zeta}{R_2} \beta_2 = \frac{1}{A_2} w_{,2} - \frac{u_2}{R_2} + \beta_2
 \end{aligned}$$

Si vuol far rilevare che si sono trascurati i termini  $\zeta/R_1, \zeta/R_2$  rispetto all'unità ( $\zeta/R_1 \ll 1, \zeta/R_2 \ll 1$ ).

Nelle ultime due componenti di deformazione, si è tenuta presente l'indipendenza dalla variabile  $\zeta$  delle grandezze  $A_1, A_2, u_1, u_2$  in base alle ipotesi introdotte.

\* \* \*

## 2.2.4 EQUAZIONI DI LEGAME

Per valutare il comportamento di una qualsiasi struttura, il legame costitutivo è di fondamentale importanza, perchè mette in relazione le componenti di deformazione con le componenti di tensioni. Il legame in parola dipende essenzialmente dal mezzo che costituisce la struttura ed è definito da tante relazioni quante sono le componenti tensionali agenti all'interno della struttura stessa.

### 2.2.4.1 Leggi generalizzate di Hooke

Le relazioni che legano le componenti di deformazione e quelle di tensione, prendono il nome di *equazioni costitutive* e descrivono la legge secondo cui si deforma l'elemento di materia per effetto dei carichi applicati.

I materiali per i quali il comportamento costitutivo risulta essere funzione solo dello stato deformativo, sono chiamati *elastici*. Nel caso particolare in cui il lavoro compiuto dalle azioni esterne durante la deformazione dipende solo dallo stato iniziale e da quello deformativo finale, il materiale viene denominato *iperelastico*. Si definisce, poi, *corpo elastico* un solido di materiale continuo capace di subire deformazioni che svaniscono rimuovendo le forze applicate. L'elemento di materia riprende la sua forma iniziale una volta che siano scomparse le cause che lo deformano.

Un materiale è *omogeneo* se le proprietà meccaniche sono costanti in tutti i punti del volume occupato dal corpo (indipendentemente dalla posizione). In un mezzo *eterogeneo* le proprietà meccaniche risultano funzione della posizione. Ad esempio, le strutture composite costituite da strati uniformi di materiale differente sono eterogenei lungo lo spessore. Un materiale *anisotropo* presenta nell'intorno di ciascun punto proprietà meccaniche variabili con la direzione. Un materiale che presenta nell'intorno di un punto le medesime proprietà meccaniche in tutte le direzioni uscenti dal punto stesso, viene denominato *isotropo*. I materiali anisotropi e isotropi possono essere a loro volta omogenei o non omogenei.

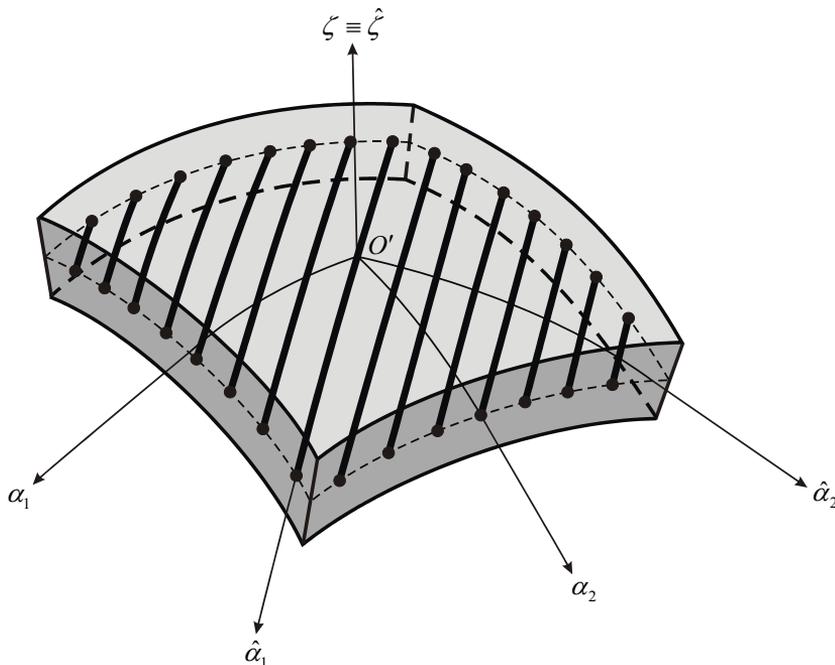


Figura 2.15 – Sistema di coordinate della geometria e del materiale.

Si supponga che  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  sia il sistema di riferimento del materiale, denominato *sistema di coordinate del materiale*. Il sistema di coordinate  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  rappresenta il *sistema di riferimento del problema* o *sistema di coordinate della geometria* per distinguerlo dal sistema di riferimento del materiale. Entrambi i sistemi sono definiti all'interno del solido, hanno la medesima origine e sono orientati in maniera differente l'uno rispetto all'altro (figura 2.15).

Si definisce materiale elastico lineare quello per cui i legami costitutivi risultano lineari, ossia le relazioni tra le tensioni e le deformazioni sono lineari. Nella forma più generale le relazioni in discorso si scrivono come segue:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{hk} &= \sum_{i,j} C_{hkij} \hat{\epsilon}_{ij} \\ \hat{\epsilon}_{hk} &= \sum_{i,j} K_{hkij} \hat{\sigma}_{ij}\end{aligned}\tag{2.164}$$

Le relazioni (2.164) prendono il nome di *leggi generalizzate di Hooke*, perché generalizzano la ben nota legge di proporzionalità tra tensione e deformazione per il caso monoassiale, rilevata per la prima volta da Robert Hooke nel 1678. Le equazioni (2.164), denominate *equazioni costitutive per materiali linearmente elastici*, legano lo spazio delle deformazioni con quello degli sforzi nel punto e caratterizzano il materiale.

Si vuol far rilevare che le relazioni (2.164) sono valide quando gli spostamenti e quindi le deformazioni si mantengono infinitesimi. Le costanti  $C_{hkij}$  oppure  $K_{hkij}$  possono identificarsi con le componenti cartesiane di un tensore del quarto ordine, detto *tensore di elasticità*.

I coefficienti  $C_{hkij}$  e  $K_{hkij}$  prendono il nome di *costanti elastiche*, poiché non dipendono dalle componenti di tensione e deformazione nel punto. Nel caso più generale, ossia in assenza della simmetria delle componenti di tensione e di deformazione, le costanti elastiche distinte sono 81. I coefficienti  $C_{hkij}$  sono denominati *rigidezze*, mentre i coefficienti  $K_{hkij}$  vengono chiamati *cedibilità*.

Se si ammette la simmetria dei tensori delle tensioni e delle deformazioni, le 81 costanti elastiche indipendenti si riducono a 36. Sotto tale ipotesi le equazioni (2.164) si possono scrivere nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.165)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

\* \* \*

Si precisa che per le componenti di tensione e di deformazione è stata adottata la notazione nota come *notazione di Voigt-Kelvin*, nella quale si utilizza un pedice per indicare le componenti di tensioni e di deformazione, due pedici per indicare i coefficienti di rigidezza del materiale:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &= \hat{\sigma}_{11}, & \hat{\sigma}_2 &= \hat{\sigma}_{22}, & \hat{\sigma}_3 &= \hat{\sigma}_{33} = \hat{\sigma}_n, & \hat{\sigma}_4 &= \hat{\sigma}_{13} = \hat{\tau}_{13} = \hat{\tau}_{1n}, & \hat{\sigma}_5 &= \hat{\sigma}_{23} = \hat{\tau}_{23} = \hat{\tau}_{2n}, & \hat{\sigma}_6 &= \hat{\sigma}_{12} = \hat{\tau}_{12} \\ \hat{\varepsilon}_1 &= \hat{\varepsilon}_{11}, & \hat{\varepsilon}_2 &= \hat{\varepsilon}_{22}, & \hat{\varepsilon}_3 &= \hat{\varepsilon}_{33} = \hat{\varepsilon}_n, & \hat{\varepsilon}_4 &= 2\hat{\varepsilon}_{13} = \hat{\gamma}_{13} = \hat{\gamma}_{1n}, & \hat{\varepsilon}_5 &= 2\hat{\varepsilon}_{23} = \hat{\gamma}_{23} = \hat{\gamma}_{2n}, & \hat{\varepsilon}_6 &= 2\hat{\varepsilon}_{12} = \hat{\gamma}_{12} \end{aligned}$$

\* \* \*

### 2.2.4.1.1 Materiali anisotropi

Assumendo che il materiale sia iperelastico, il numero di costanti elastiche indipendenti si riduce a 21. In tal caso le matrici  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  risultano simmetriche ( $C_{ij} = C_{ji}, K_{ij} = K_{ji}$ ). Un materiale, le cui costanti elastiche indipendenti sono 21, viene denominato *anisotropo*. Nel sistema di riferimento del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  le relazioni tensioni-deformazioni (2.165) assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

dove la matrice  $\mathbf{C}$  di dimensioni  $6 \times 6$  prende il nome di *matrice di rigidità*. Le relazioni inverse (2.166) diventano:

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.168)$$

dove la matrice  $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}$  di dimensioni  $6 \times 6$  prende il nome di *matrice di cedibilità*. Qualora il materiale sia omogeneo occorre determinare 21 costanti elastiche, in quanto le proprietà meccaniche non dipendono dal punto.

### 2.2.4.1.2 Simmetria materiale

Quando i materiali possiedono uno o più piani di simmetria del materiale il numero dei coefficienti elastici indipendenti si riduce. Se le costanti elastiche nell'intorno di un punto presentano gli stessi valori per coppie di punti simmetrici rispetto ad un piano, il piano stesso prende il nome di *piano di simmetria materiale*. Tale simmetria può essere dovuta, ad esempio, alla simmetria interna della struttura, dipendente dalla forma cristallografica oppure da una regolare disposizione di fibre o particelle. Si vuol far rilevare che la simmetria in parola è una proprietà che dipende dalla direzione e non dalla posizione. Quindi, un materiale può avere una certa simmetria elastica nell'intorno di ogni punto e, allo stesso tempo, le proprietà meccaniche possono variare da punto a punto. Questa dipendenza delle proprietà del materiale dalla posizione viene indicata come non-omogeneità del materiale.

### 2.2.4.1.3 Materiali monoclini

Ulteriori riduzioni nel numero di costanti elastiche indipendenti discende dalla *simmetria materiale*. I materiali che presentano un solo piano di simmetria vengono denominati *monoclini*. Le costanti elastiche indipendenti si riducono a 13. Nel caso in cui la direzione  $\hat{\zeta}$  sia normale al piano di simmetria materiale, le relazioni (2.167) e (2.168) si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & K_{26} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & K_{55} & 0 \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & 0 & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.170)$$

La direzione normale al piano di simmetria viene denominata *direzione principale* del materiale.

#### 2.2.4.1.4 Materiali ortotropi

Quando i materiali possiedono tre piani ortogonali di simmetria materiale, il numero dei coefficienti elastici indipendenti si riduce a 9. I materiali caratterizzati solo da 9 coefficienti elastici vengono detti *ortotropi*. Le relazioni (2.169) e (2.170) per un materiale ortotropo assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.171)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.172)$$

Le proprietà dei materiali possono essere determinate in laboratorio in termini di costanti ingegneristiche, come il *modulo di Young*  $E$ , il *modulo di elasticità trasversale*  $G$

e il coefficiente di Poisson  $\nu$ . Queste costanti sono misurate attraverso semplici test, come la prova di trazione monoassiale e di taglio puro. A causa del loro significato fisico, le costanti ingegneristiche vengono usate al posto dei più astratti coefficienti elastici  $C_{ij}$  e  $K_{ij}$ . In particolare le costanti elastiche  $K_{ij}$  sono legate in maniera diretta alle costanti ingegneristiche.

Come conseguenza dell'ipotesi di elasticità lineare del materiale, è lecito applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Questo vuol dire che se le forze applicate e le restrizioni geometriche sono indipendenti dalla deformazione, allora la somma delle deformazioni prodotte singolarmente da due sistemi di forze risulta uguale alla deformazione prodotta dalla somma di due sistemi di forze applicati contemporaneamente. In particolare, le deformazioni dello stesso tipo prodotte dall'applicazione di componenti di tensione differenti possono essere sovrapposte. Per esempio, si considerino le tre dilatazioni  $\hat{\epsilon}_1^{(1)}$ ,  $\hat{\epsilon}_1^{(2)}$  e  $\hat{\epsilon}_1^{(3)}$ . La dilatazione  $\hat{\epsilon}_1^{(1)}$ , in direzione  $\hat{\alpha}_1$ , prodotta dallo sforzo  $\hat{\sigma}_1$  che agisce nella stessa direzione, è  $\hat{\sigma}_1/E_1$ , dove  $E_1$  indica il modulo di Young del materiale in direzione  $\hat{\alpha}_1$ . La dilatazione  $\hat{\epsilon}_1^{(2)}$ , prodotta da un secondo sforzo  $\hat{\sigma}_2$  che agisce in direzione  $\hat{\alpha}_2$  risulta  $-\nu_{21}\hat{\sigma}_2/E_2$ , ove  $\nu_{21}$  è il rapporto di Poisson pari a  $\nu_{21} = -\hat{\epsilon}_1/\hat{\epsilon}_2$  ed  $E_2$  è il modulo di Young del materiale nella direzione  $\hat{\alpha}_2$ . Infine, la dilatazione  $\hat{\epsilon}_1^{(3)}$  prodotta da un terzo sforzo  $\hat{\sigma}_n$  agente in direzione  $\hat{\zeta}$  è pari a  $-\nu_{31}\hat{\sigma}_n/E_3$ , con l'ovvio significato dei simboli introdotti. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, la deformazione  $\hat{\epsilon}_1$  prodotta dall'applicazione simultanea di tutte e tre le componenti normali di tensione risulta pari a:

$$\hat{\epsilon}_1 = \hat{\epsilon}_1^{(1)} + \hat{\epsilon}_1^{(2)} + \hat{\epsilon}_1^{(3)} = \frac{\hat{\sigma}_1}{E_1} + \left( -\frac{\nu_{21}}{E_2} \hat{\sigma}_2 \right) + \left( -\frac{\nu_{31}}{E_3} \hat{\sigma}_n \right) \quad (2.173)$$

Procedendo in maniera analoga per le dilatazioni  $\hat{\epsilon}_2$ ,  $\hat{\epsilon}_3$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \hat{\sigma}_1 + \frac{\hat{\sigma}_2}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \hat{\sigma}_n \\ \hat{\epsilon}_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \hat{\sigma}_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \hat{\sigma}_2 + \frac{\hat{\sigma}_n}{E_3} \end{aligned} \quad (2.174)$$

Le prove di taglio puro per un materiale ortotropo forniscono i seguenti risultati:

$$\hat{\gamma}_{1n} = \frac{\hat{\tau}_{1n}}{G_{13}}, \quad \hat{\gamma}_{2n} = \frac{\hat{\tau}_{2n}}{G_{23}}, \quad \hat{\gamma}_{12} = \frac{\hat{\tau}_{12}}{G_{12}} \quad (2.175)$$

Riscrivendo le equazioni (2.173), (2.174) e (2.175) in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

dove  $E_1, E_2, E_3$  sono i moduli di Young nelle direzioni del sistema di riferimento  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$ ,  $\nu_{ij}$  è il rapporto di Poisson, definito come il rapporto della deformazione trasversale nella  $j$ -esima direzione e della deformazione assiale nella  $i$ -esima direzione quando lo sforzo agisce nella  $i$ -esima direzione.  $G_{13}, G_{23}, G_{12}$  sono i moduli di elasticità trasversale nei piani  $\hat{\alpha}_1 - \hat{\zeta}, \hat{\alpha}_2 - \hat{\zeta}, \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$ . Dato che la matrice  $\mathbf{K}$ , inversa della matrice simmetrica  $\mathbf{C}$ , è anch'essa simmetrica, si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (2.177)$$

che in forma abbreviata divengono:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

I 9 coefficienti elastici indipendenti per un mezzo ortotropo omogeneo sono allora:

$$E_1, E_2, E_3, G_{13}, G_{23}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

#### 2.2.4.1.5 Materiali trasversalmente isotropi

Quando le costanti elastiche nell'intorno di un punto presentano gli stessi valori in tutte le direzioni uscenti dal punto e parallele ad un piano, il piano in parola prende il nome di *piano di isotropia materiale*. Se uno dei tre piani di simmetria materiale di un mezzo ortotropo è anche un piano di isotropia materiale, il numero dei coefficienti elastici

indipendenti si riduce a 5. I materiali caratterizzati da 5 costanti elastiche vengono denominati *trasversalmente isotropi*. Nel caso in cui la direzione  $\hat{\zeta}$  sia normale al piano di isotropia materiale, le relazioni (2.167) e (2.168) si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{11} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{13} & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(K_{11}-K_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

#### 2.2.4.1.6 Materiali isotropi

Un materiale che presenta nell'intorno di ogni punto le medesime proprietà meccaniche in tutte le direzioni uscenti dal punto, viene denominato *isotropo*. Quando i tre piani di simmetria materiale di un mezzo ortotropo sono anche piani di isotropia materiale, il numero dei coefficienti elastici indipendenti si riduce a 2. Le relazioni (2.169) e (2.170) per un materiale isotropo assumono la forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{12} & K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(K_{11}-K_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(K_{11}-K_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(K_{11}-K_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.181)$$

I materiali isotropi non hanno direzioni preferenziali, ossia posseggono infiniti piani di simmetria. Per tali materiali si ha:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad G_{13} = G_{23} = G_{12} = G, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu$$

e, di conseguenza, le relazioni (2.176) assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

### 2.2.4.2 Materiali compositi

I *materiali compositi* sono costituiti combinando due o più materiali (costituenti) in maniera da ottenere dal punto di vista macroscopico proprietà ingegneristiche migliori rispetto ai materiali convenzionali, come ad esempio i metalli. Alcune delle proprietà che possono essere migliorate attraverso la progettazione di un materiale composito sono la rigidità, la resistenza, la riduzione di peso, la resistenza alla corrosione, le proprietà termiche, la vita a fatica, la vita utile e così via.

I costituenti vengono combinati a livello macroscopico. La maggior parte dei materiali compositi sono costituiti da due materiali: un materiale di rinforzo chiamato *fase di rinforzo* e un materiale di base denominato *matrice*.

I materiali composti possono essere classificati in tre differenti categorie:

- 1) *compositi fibrosi* o *a fibre* costituiti da fibre di un materiale immerse in una matrice di un altro materiale;
- 2) *compositi particellari* o *granulari* costituiti da macroparticelle di un materiale immerse in una matrice di un altro materiale;
- 3) *compositi laminati* costituiti da strati di materiali differenti, inclusi i compositi delle prime due categorie.

Le macroparticelle e la matrice nei materiali compositi granulari possono essere entrambi metallici o non metallici. Per questo motivo, esistono quattro possibili combinazioni: metallo in matrice non metallica, non metallo in matrice metallica, non metallo in matrice non metallica, metallo in matrice metallica.

Una *lamina* è uno strato di materiale composito e rappresenta un elemento fondamentale per la progettazione dei laminati. La formulazione delle equazioni costitutive per una lamina si basa sulle seguenti ipotesi:

- 1) la lamina è un corpo continuo: non esistono discontinuità o spazi vuoti;
- 2) il comportamento di una lamina è quello di un materiale elastico-lineare.

La prima ipotesi considera il comportamento *macromeccanico* della lamina, non permettendo di analizzare il comportamento meccanico dei singoli costituenti e le loro interazioni. Per lo studio di tali problematiche, occorre procedere seguendo l'approccio *micromeccanico*. La seconda assunzione permette alle equazioni generalizzate di Hooke di essere applicabili a tali materiali.

Se considerati da un punto di vista microscopico, i materiali compositi sono intrinsecamente eterogenei. Da un punto di vista macroscopico, in cui le proprietà di tali materiali derivano da una media ponderata delle proprietà dei costituenti, matrice e fase di rinforzo, i materiali compositi possono essere assunti come omogenei.

#### *2.2.4.2.1 Compositi fibrosi: la lamina unidirezionale*

Le proprietà meccaniche di compositi fibrosi dipendono dall'orientazione delle fibre stesse. La matrice tiene insieme le fibre e agisce come mezzo di trasferimento del carico tra le fibre proteggendole pure dalle condizioni ambientali.

Il meccanismo base di trasferimento del carico tra matrice e fibra può essere illustrato considerando una barra cilindrica (che rappresenta una singola fibra) e supponendo che tale barra sia immersa nel materiale-matrice. Il trasferimento del carico trae origine dalle

tensioni tangenziali. Quando il carico applicato sulla matrice è di trazione, nella superficie laterale della fibra si sviluppa l'azione tangenziale di taglio che genera uno sforzo di trazione nella fibra. I due sforzi bilanciano il carico applicato sulla matrice.

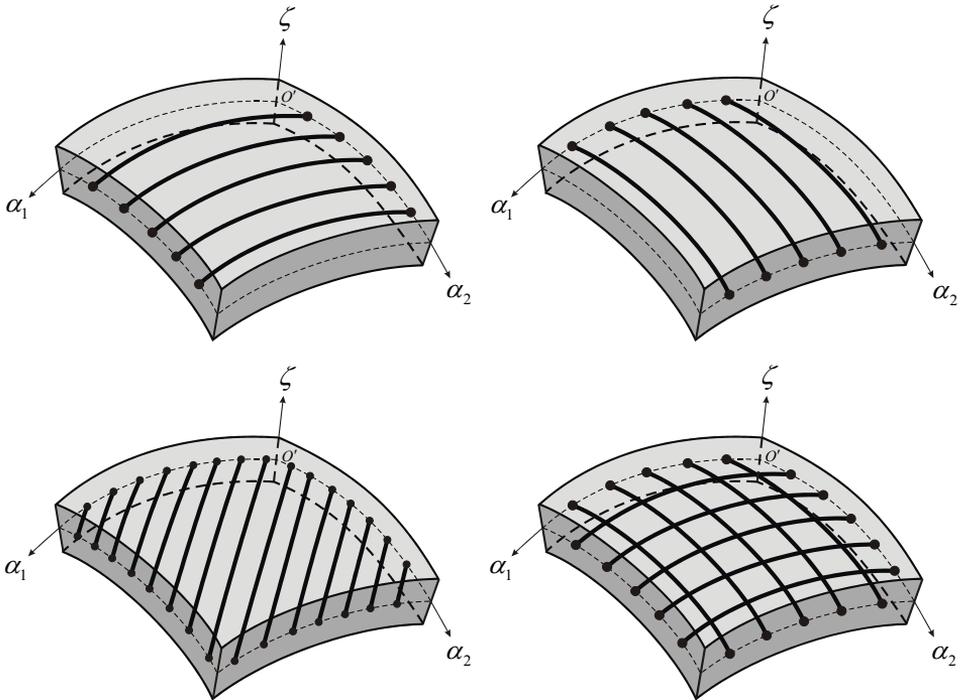


Figura 2.16 – Lamine fibro-rinforzate con diversa disposizione delle fibre.

Una lamina fibro-rinforzata è costituita da molte fibre annegate in un materiale-matrice, che può essere metallico, come l'alluminio, o non metallico, come i polimeri termoindurenti o termoplastici. Spesso, per migliorare ed incrementare l'aderenza tra matrice e fibre, vengono utilizzati degli additivi. La disposizione delle fibre all'interno della matrice può essere continua, discontinua, intrecciata, unidirezionale, bidirezionale (figura 2.16), ma anche distribuita casualmente.

Una lamina fibro-rinforzata, in cui la disposizione delle fibre è *unidirezionale*, può essere pensata come una lamina di materiale ortotropo in cui due piani di simmetria materiale sono uno parallelo e l'altro trasversale alla direzione delle fibre. Sulla lamina di spessore costante  $h$  viene definita una terna di riferimento del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  (figura 2.17). Questa terna viene assunta sulla superficie media della lamina. L'asse  $\hat{\alpha}_1$  viene scelto parallelo alla direzione delle fibre, l'asse  $\hat{\alpha}_2$  trasversale alla direzione delle fibre, l'asse  $\hat{\zeta}$  normale alle linee parametriche della superficie media della lamina. Le lamine

rinforzate con fibre unidirezionali esibiscono la massima resistenza nella direzione delle fibre, ma presentano un comportamento meccanico insoddisfacente nella direzione trasversale alle fibre stesse. Scarsi ancoraggi delle fibre nella matrice causano un pessimo comportamento meccanico in direzione trasversale alle fibre che può sfociare nell'espulsione delle fibre dalla matrice o nella rottura delle fibre stesse.

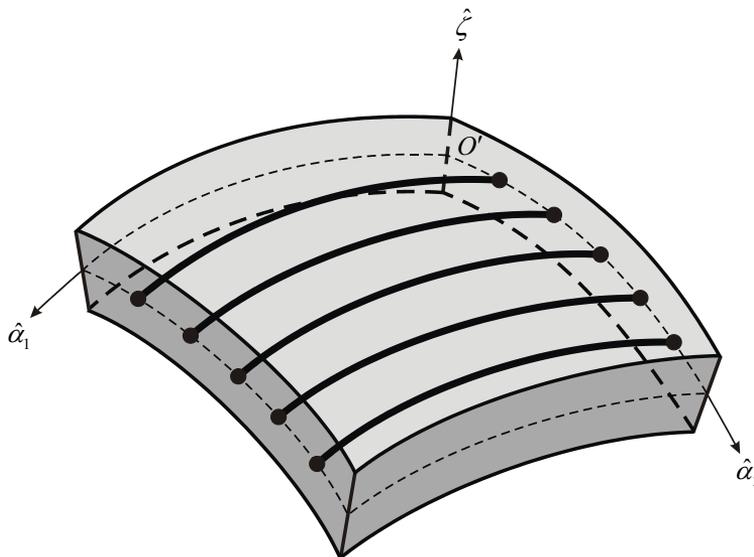


Figura 2.17 – Sistema di coordinate del materiale per una lamina unidirezionale.

Le proprietà meccaniche di una lamina ortotropa possono essere definite sia mediante un approccio teorico, sia mediante opportune prove di laboratorio. L'approccio teorico, denominato approccio *micromeccanico*, può essere usato per determinare le costanti ingegneristiche di un materiale composito continuo rinforzato con fibre unidirezionali. L'approccio in parola si basa sulle seguenti assunzioni:

- 1) esiste un legame perfetto tra matrice e fibra;
- 2) le fibre sono continue, parallele e uniformemente distribuite su tutta la lamina;
- 3) la matrice è priva di vuoti o di microfessure e non presenta stati tensionali residui;
- 4) le fibre e la matrice sono corpi isotropi ed entrambi obbediscono alle leggi di Hooke (elasticità lineare);
- 5) le forze applicate sono parallele o perpendicolari alla direzione delle fibre.

Sulla base della *teoria delle miscele*, le frazioni in volume  $V_f$  delle fibre e  $V_m$  della matrice sono definite nel modo seguente:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}, \quad V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (2.183)$$

dove  $v_f$ ,  $v_m$ ,  $v_c$  rappresentano il volume delle fibre, della matrice e del materiale composito, rispettivamente. Le quantità (2.183) sono legate dalla relazione:

$$V_f + V_m = 1 \quad (2.184)$$

da cui discende che il volume del materiale composito  $v_c$  è la somma dei volumi dei costituenti:

$$v_f + v_m = v_c \quad (2.185)$$

Le frazioni in massa  $M_f$  delle fibre e  $M_m$  della matrice sono definite nel modo seguente:

$$M_f = \frac{m_f}{m_c}, \quad M_m = \frac{m_m}{m_c} \quad (2.186)$$

dove  $m_f$ ,  $m_m$ ,  $m_c$  rappresentano la massa delle fibre, della matrice e del materiale composito, rispettivamente. Le quantità (2.186) sono legate dalla relazione:

$$M_f + M_m = 1 \quad (2.187)$$

da cui discende che la massa del materiale composito  $m_c$  è la somma delle masse dei costituenti:

$$m_f + m_m = m_c \quad (2.188)$$

Ricordando che la densità  $\rho$  di un corpo viene definita come rapporto tra la massa  $m$  e il volume  $v$  occupato dal corpo stesso, dalle equazioni (2.188) e (2.183) si ricava:

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2.189)$$

dove  $\rho_f$ ,  $\rho_m$ ,  $\rho_c$  sono la densità del materiale costituente le fibre, la densità del materiale costituente la matrice e la densità del materiale composito, rispettivamente.

In maniera analoga, è possibile dimostrare che le proprietà meccaniche, ossia i moduli di Young, i moduli di elasticità trasversale ed i coefficienti di Poisson di un materiale rinforzato con fibre unidirezionali possono essere espressi in funzione dei moduli di Young e dei coefficienti di Poisson dei materiali costituenti il materiale composito. Siano  $E_f, \nu_f$  il modulo di Young, il coefficiente di Poisson delle fibre e  $E_m, \nu_m$  il modulo di Young, il coefficiente di Poisson della matrice. Le costanti ingegneristiche del materiale composito possono essere definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_f V_f + E_m V_m \\
 E_2 &= \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \\
 \nu_{12} &= \nu_f V_f + \nu_m V_m \\
 G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f}
 \end{aligned} \tag{2.190}$$

dove  $E_1$  è il modulo di Young longitudinale lungo la direzione delle fibre,  $E_2$  è il modulo di Young trasversale,  $\nu_{12}$  è il maggiore tra i rapporti di Poisson e  $G_{12}$  è il modulo di elasticità trasversale. Inoltre si ha:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \tag{2.191}$$

Per i materiali ortotropi bidirezionali e generici le costanti ingegneristiche  $E_1, E_2, E_3, G_{13}, G_{23}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  possono essere determinate mediante opportune prove di laboratorio.

#### 2.2.4.2.2 Compositi granulari: “functionally graded materials”

Come affermato in precedenza, i “functionally graded materials” (FGM) appartengono alla categoria dei compositi granulari. Questi sono caratterizzati da una variazione graduale continua delle proprietà meccaniche del materiale dalla superficie inferiore alla superficie superiore della lamina di spessore costante  $h$ . La variazione graduale delle proprietà meccaniche riduce gli stress termici e le tensioni residue, nonché i fattori di concentrazione di tensione. Sono principalmente costituiti da materiali isotropi come, ad esempio, i metalli e le ceramiche. Vengono principalmente usati come barriere termiche in situazioni con elevati gradienti di temperatura. Le ceramiche, infatti, conferiscono al materiale composito elevata resistenza agli shock termici e i metalli forniscono elevata resistenza e duttilità.

I “functionally graded materials”, che possono essere fabbricati per sinterizzazione, combustione ad elevata temperatura, per centrifugazione, si presentano come materiali isotropi non omogenei lungo la direzione  $\zeta \equiv \hat{\zeta}$  normale alla superficie media della lamina, ossia lungo lo spessore  $h$  (figura 2.18).

Si consideri un materiale composito costituito combinando due materiali costituenti, ad

esempio un metallo e una ceramica. In seguito per semplicità si farà riferimento a questi due costituenti, anche se in generale i materiali in parola possono essere ottenuti miscelando due materiali metallici, oppure due materiali non metallici. La determinazione delle costanti ingegneristiche di un siffatto materiale può essere ottenuta mediante un approccio *micromeccanico*.

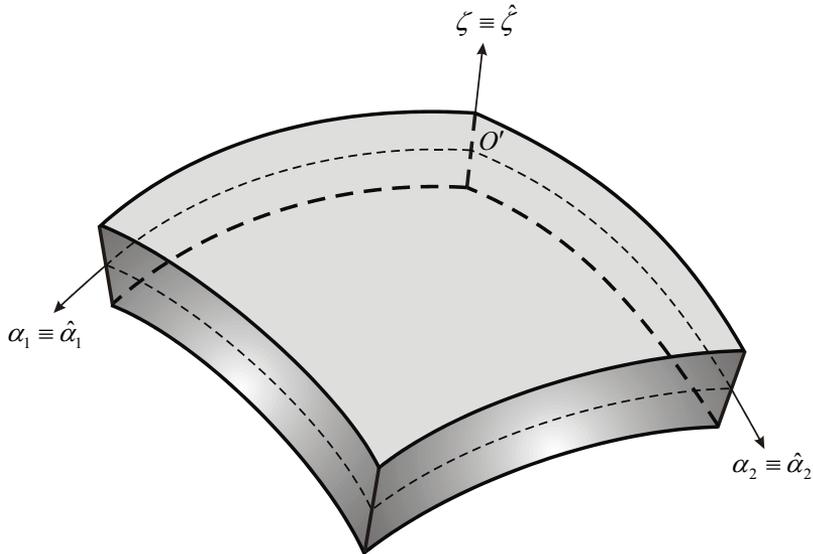


Figura 2.18 – Lamina di “functionally graded material”.

La tecnica di omogeneizzazione più usata per la modellazione delle effettive proprietà macroscopiche di questi compositi è la *teoria delle miscele*, precedentemente introdotta per descrivere il comportamento di un materiale composito fibro-rinforzato.

Sulla base della teoria delle miscele, le frazioni in volume  $V_M$  del materiale metallico e  $V_C$  della matrice ceramica sono legate dalla relazione:

$$V_C + V_M = 1 \quad (2.192)$$

Si supponga che la variazione delle proprietà meccaniche sia definita attraverso una legge esponenziale del tipo:

$$V_C = \left( \frac{1}{2} - \frac{\zeta}{h} \right)^p \quad \text{oppure} \quad V_C = \left( \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{h} \right)^p \quad (2.193)$$

dove  $p$  è il parametro che governa il profilo di variazione lungo lo spessore  $h$  della lamina. Le due differenti leggi introdotte nella (2.193) permettono di individuare se la superficie inferiore della lamina è costituita da materiale ceramico o da materiale metallico (figure 2.19 e 2.20). Infatti, se si considera la prima legge (2.193), per  $\zeta = -h/2$ , ossia

sulla superficie inferiore, si ha  $V_C = 1$  e quindi per l'equazione (2.192)  $V_M = 0$ . Ciò significa che in corrispondenza della superficie inferiore il materiale composito presenta le proprietà meccaniche proprie della ceramica.

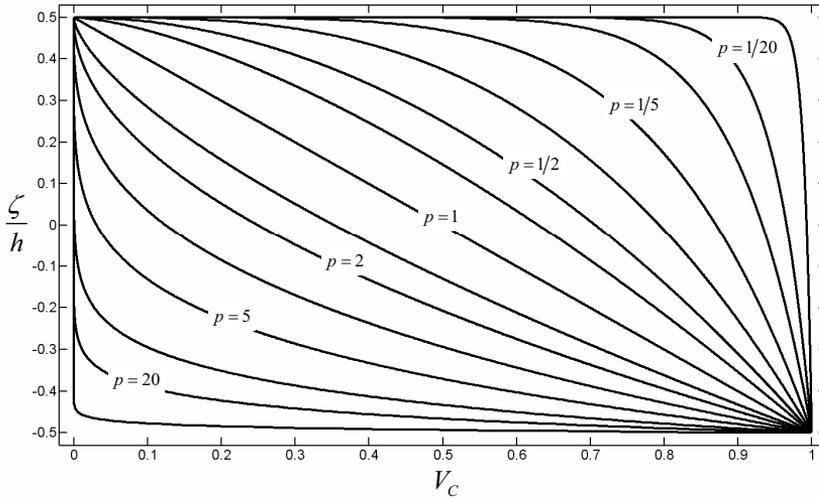


Figura 2.19 – Frazione in volume  $V_C = (1/2 - \zeta/h)^p$  al variare di  $p$  lungo lo spessore della lamina.

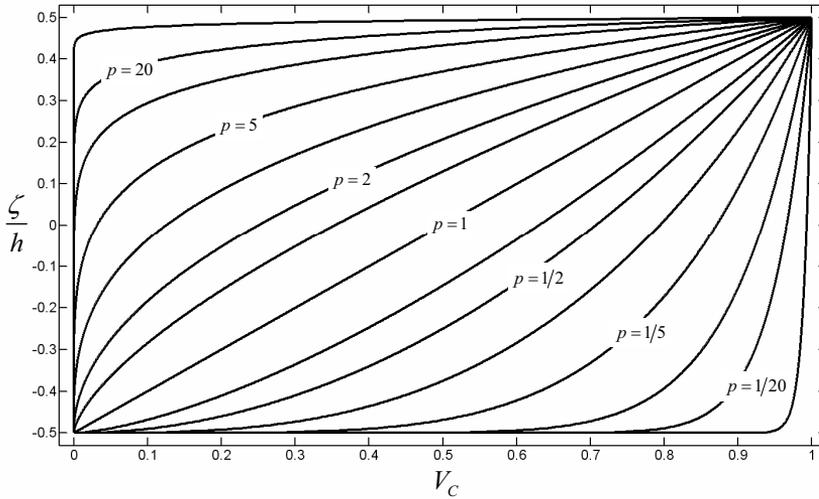


Figura 2.20 – Frazione in volume  $V_C = (1/2 + \zeta/h)^p$  al variare di  $p$  lungo lo spessore della lamina.

Per  $\zeta = h/2$ , ossia sulla superficie superiore, si ha  $V_C = 0$  e quindi per l'equazione (2.192)  $V_M = 1$ . Ciò significa che in corrispondenza della superficie superiore il materiale composito presenta le proprietà meccaniche proprie del metallo. Considerando la seconda

legge (2.193), invece, il materiale composito presenta sulla faccia superiore le proprietà proprie della ceramica (per  $\zeta = h/2$ , si ha  $V_C = 1$  e  $V_M = 0$ ) e su quella inferiore le proprietà meccaniche proprie del metallo (per  $\zeta = -h/2$ , si ha  $V_C = 0$  e  $V_M = 1$ ).

Ricordando che i materiali compositi in parola sono isotropi e non omogenei lungo la direzione  $\zeta$ , le proprietà meccaniche di un composito “functionally graded” possono essere espresse nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\rho(\zeta) &= \rho_C V_C + \rho_M V_M \\ E(\zeta) &= E_C V_C + E_M V_M \\ \nu(\zeta) &= \nu_C V_C + \nu_M V_M \\ G(\zeta) &= \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu(\zeta))}\end{aligned}\tag{2.194}$$

dove  $\rho_C, E_C, \nu_C$  sono la densità, il modulo di Young e il coefficiente di Poisson del materiale ceramico e  $\rho_M, E_M, \nu_M$  le corrispondenti grandezze del materiale metallico.

Nelle relazioni (2.194) è messa in evidenza la dipendenza delle proprietà meccaniche dalla variabile  $\zeta$ . Considerando l’equazione (2.192), le relazioni (2.194) possono esprimersi anche nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\rho(\zeta) &= (\rho_C - \rho_M)V_C + \rho_M \\ E(\zeta) &= (E_C - E_M)V_C + E_M \\ \nu(\zeta) &= (\nu_C - \nu_M)V_C + \nu_M\end{aligned}\tag{2.195}$$

### 2.2.4.2.3 Trasformazione delle componenti di tensione e di deformazione

Fino ad ora è stata presentata la legge generalizzata di Hooke per diverse tipologie di materiali nel sistema di riferimento proprio del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$ . Nella formulazione di molti problemi accade spesso che tale sistema di coordinate non coincida con quello della geometria. Infatti, una lamina può essere caratterizzata da una propria orientazione del materiale rispetto al sistema di riferimento descrivente il problema geometrico. Per questo motivo, nasce l’esigenza di introdurre relazioni in grado di trasformare le componenti di tensione e di deformazione riferite ad uno specifico sistema di riferimento nelle corrispondenti quantità in un altro sistema di riferimento.

Si consideri una lamina fibro-rinforzata unidirezionale. Sia  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  il sistema di

riferimento usato per descrivere le equazioni governanti il problema e  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  il sistema di riferimento del materiale costituente la lamina. Considerando la figura 2.21 si nota che i due sistemi di riferimento hanno la stessa origine  $O'$  e sono definiti entrambi sulla superficie di riferimento o superficie media della lamina, in modo che gli assi  $\zeta$  e  $\hat{\zeta}$  siano coincidenti. Di conseguenza, le due superfici  $\alpha_1 - \alpha_2$  e  $\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$  sono tra loro parallele.

Si assuma l'asse  $\hat{\alpha}_1$  ruotato di un angolo  $\theta$  (positivo in senso antiorario) rispetto all'asse  $\alpha_1$  del riferimento del problema. Le coordinate di un punto della lamina nei due sistemi di riferimento sono legate dalla seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

L'inversa dell'equazione (2.196) risulta essere:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

Si vuol far rilevare che l'inversa  $\mathbf{H}^{-1}$  della matrice di trasformazione  $\mathbf{H}$ , di ordine  $3 \times 3$ , presente nell'equazione (2.196), è uguale alla sua trasposta:  $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}^T$ , essendo  $\mathbf{H}$  ortogonale.

Si consideri ora la trasformazione tra le componenti di tensione nel sistema di riferimento del problema e le componenti di tensione nel sistema di riferimento del materiale. Siano  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  i tensori degli sforzi nei sistemi di riferimento del problema  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  e del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & \sigma_{2n} \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 & \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{1n} \\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_2 & \hat{\sigma}_{2n} \\ \hat{\sigma}_{1n} & \hat{\sigma}_{2n} & \hat{\sigma}_n \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

I tensori (2.198) sono legati tra loro dalle seguenti espressioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{H}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}^T \quad (2.199)$$

Come ben noto,  $\mathbf{H}$  è la matrice dei coseni direttori (2.196) che permette la trasformazione di coordinate. Eseguendo le operazioni matriciali nelle prima delle equazioni (2.199) e utilizzando la notazione vettoriale delle componenti di tensione, si ottiene l'espressione compatta:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.200)$$

che in forma estesa risulta essere:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_n \\ \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.201)$$

La relazione inversa tra  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  si ottiene esplicitando i termini della seconda equazione (2.199):

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.202)$$

che in forma estesa assume l'aspetto:

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_n \\ \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_n \\ \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.203)$$

Si noti che la forma matriciale dell'equazione (2.203) può essere ottenuta dalla forma matriciale (2.201) sostituendo  $\theta$  con  $-\theta$ .

Le equazioni di trasformazione delle componenti di deformazione possono essere ricavate per analogia dalle equazioni di trasformazione delle componenti di tensione. Si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{H}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{H}^T \quad (2.204)$$

In differente notazione si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.205)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\varepsilon}_n \\ \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_n \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.206)$$

La matrice  $\mathbf{T}$  dell'equazione (2.201) è la trasposta della matrice quadrata presente nell'equazione (2.206) e la matrice di trasformazione nell'equazione (2.205) è la trasposta della matrice  $\mathbf{G}$  nell'equazione (2.203):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.207)$$

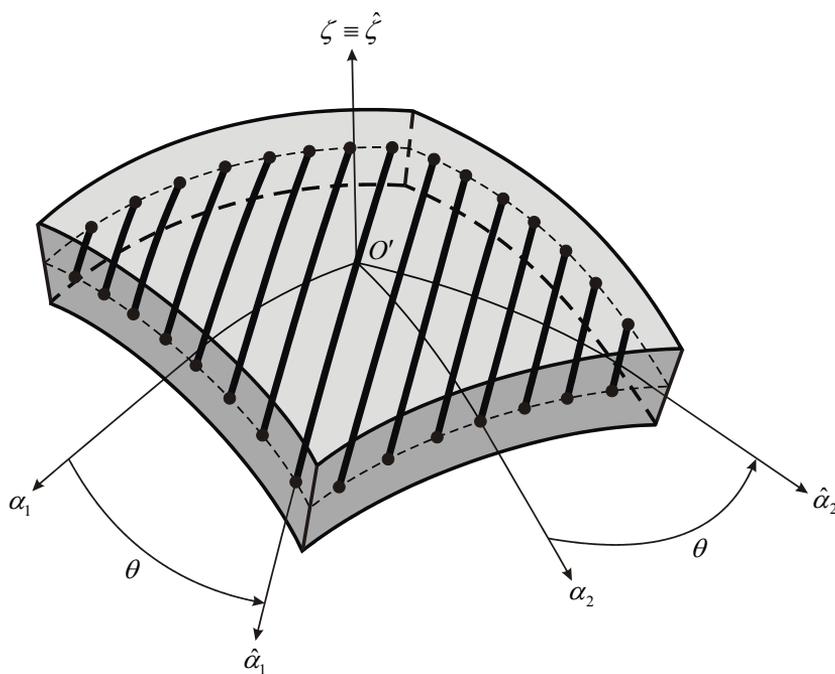


Figura 2.21 – Lamina con fibre orientate di un angolo  $\theta$ .

#### 2.2.4.2.4 Trasformazione dei coefficienti elastici

Nelle pagine precedenti sono state analizzate le leggi di trasformazione delle componenti di tensione e di deformazione dal sistema di riferimento del materiale al sistema di riferimento del problema e viceversa. Restano da determinare le leggi di trasformazione delle componenti della matrice di rigidità del materiale  $C_{ij}$ . Per ricavare tali relazioni è possibile usare le equazioni di legame  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , unitamente alle equazioni di

trasformazione delle tensioni (2.200), (2.202), e delle deformazioni (2.207). Componendo le relazioni in parola si ha:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{TC}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{TCT}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.208)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la matrice di rigidezza nel sistema di riferimento del materiale, mentre  $\bar{\mathbf{C}}$  è la matrice di rigidezza nel sistema di riferimento del problema. Si deduce che la trasformazione della matrice di rigidezza è data dalla relazione:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{TCT}^T \quad (2.209)$$

Siano  $\bar{C}_{ij}$  gli elementi della matrice di rigidezza  $\bar{\mathbf{C}}$  e  $C_{ij}$  gli elementi della matrice di rigidezza  $\mathbf{C}$ . La matrice di rigidezza per un materiale anisotropo (2.167) e la (2.209) consentono di scrivere:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= C_{11} \cos^4 \theta - 4C_{16} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad - 4C_{26} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{C}_{12} &= C_{12} \cos^4 \theta + 2(C_{16} - 2C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad + 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{12} \sin^4 \theta \\ \bar{C}_{13} &= C_{13} \cos^2 \theta - 2C_{36} \cos \theta \sin \theta + C_{23} \sin^2 \theta \\ \bar{C}_{16} &= C_{16} \cos^4 \theta + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{26} - C_{16}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad + (2C_{66} + C_{12} - C_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta - C_{26} \sin^4 \theta \\ \bar{C}_{22} &= C_{22} \cos^4 \theta + 4C_{26} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad + 4C_{16} \cos \theta \sin^3 \theta + C_{11} \sin^4 \theta \\ \bar{C}_{23} &= C_{23} \cos^2 \theta + 2C_{36} \cos \theta \sin \theta + C_{13} \sin^2 \theta \\ \bar{C}_{26} &= C_{26} \cos^4 \theta + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(C_{16} - C_{26}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad + (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - C_{16} \sin^4 \theta \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} \\ \bar{C}_{36} &= (C_{13} - C_{23}) \cos \theta \sin \theta + C_{36} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \bar{C}_{66} &= 2(C_{16} - C_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ &\quad + 2(C_{26} - C_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + C_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{C}_{44} &= C_{44} \cos^2 \theta + C_{55} \sin^2 \theta - 2C_{45} \cos \theta \sin \theta \\ \bar{C}_{45} &= C_{45} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (C_{44} - C_{55}) \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{55} &= C_{55} \cos^2 \theta + C_{44} \sin^2 \theta + 2C_{45} \cos \theta \sin \theta \\
 \bar{C}_{14} &= C_{14} \cos^3 \theta + (C_{15} - 2C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{24} - 2C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{25} \sin^3 \theta \\
 \bar{C}_{15} &= C_{15} \cos^3 \theta - (C_{14} + 2C_{56}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{25} + 2C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - C_{24} \sin^3 \theta \\
 \bar{C}_{24} &= C_{24} \cos^3 \theta + (C_{25} + 2C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{14} + 2C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{15} \sin^3 \theta \\
 \bar{C}_{25} &= C_{25} \cos^3 \theta + (2C_{56} - C_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{15} - 2C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - C_{14} \sin^3 \theta \\
 \bar{C}_{34} &= C_{34} \cos \theta + C_{35} \sin \theta \\
 \bar{C}_{35} &= C_{35} \cos \theta - C_{34} \sin \theta \\
 \bar{C}_{46} &= C_{46} \cos^3 \theta + (C_{56} + C_{14} - C_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (C_{15} - C_{25} + C_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - C_{56} \sin^3 \theta \\
 \bar{C}_{56} &= C_{56} \cos^3 \theta + (C_{15} - C_{25} - C_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + \\
 &\quad + (C_{24} - C_{14} - C_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + C_{46} \sin^3 \theta
 \end{aligned} \tag{2.210}$$

Per ricavare le leggi di trasformazione delle componenti  $K_{ij}$  della matrice di cedibilità è possibile usare le relazioni di legame  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , unitamente alle equazioni di trasformazione delle tensioni (2.200), (2.202) e delle deformazioni (2.207). Componendo le relazioni in parola si ha:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{G}^T \mathbf{K} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{K}} \boldsymbol{\sigma} \tag{2.211}$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di cedibilità nel sistema di riferimento del materiale, mentre  $\bar{\mathbf{K}}$  è la matrice di cedibilità nel sistema di riferimento del problema. Dalla relazione (2.211) si deduce:

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G} \tag{2.212}$$

Siano  $\bar{K}_{ij}$  gli elementi della matrice di cedibilità  $\bar{\mathbf{K}}$  e  $K_{ij}$  gli elementi della matrice di cedibilità  $\mathbf{K}$ . Ricordando la forma della matrice di cedibilità per un materiale anisotropo (2.168), la (2.212) consente di scrivere:

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{11} &= K_{11} \cos^4 \theta - 4K_{16} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(K_{12} + 2K_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 &\quad - 4K_{26} \cos \theta \sin^3 \theta + K_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{K}_{12} &= K_{12} \cos^4 \theta + 2(K_{16} - 2K_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (K_{11} + K_{22} - 4K_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 &\quad + 2(K_{26} - K_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + K_{12} \sin^4 \theta \\
 \bar{K}_{13} &= K_{13} \cos^2 \theta - 2K_{36} \cos \theta \sin \theta + K_{23} \sin^2 \theta \\
 \bar{K}_{16} &= K_{16} \cos^4 \theta + (K_{11} - K_{12} - 2K_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(K_{26} - K_{16}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +(2K_{66} + K_{12} - K_{22}) \cos \theta \sin^3 \theta - K_{26} \sin^4 \theta \\
 \bar{K}_{22} = & K_{22} \cos^4 \theta + 4K_{26} \cos^3 \theta \sin \theta + 2(K_{12} + 2K_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 & +4K_{16} \cos \theta \sin^3 \theta + K_{11} \sin^4 \theta \\
 \bar{K}_{23} = & K_{23} \cos^2 \theta + 2K_{36} \cos \theta \sin \theta + K_{13} \sin^2 \theta \\
 \bar{K}_{26} = & K_{26} \cos^4 \theta + (K_{12} - K_{22} + 2K_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + 3(K_{16} - K_{26}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 & +(K_{11} - K_{12} - 2K_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - K_{16} \sin^4 \theta \\
 \bar{K}_{33} = & K_{33} \\
 \bar{K}_{36} = & (K_{13} - K_{23}) \cos \theta \sin \theta + K_{36} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\
 \bar{K}_{66} = & 2(K_{16} - K_{26}) \cos^3 \theta \sin \theta + (K_{11} + K_{22} - 2K_{12} - 2K_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\
 & +2(K_{26} - K_{16}) \cos \theta \sin^3 \theta + K_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 \bar{K}_{44} = & K_{44} \cos^2 \theta + K_{55} \sin^2 \theta - 2K_{45} \cos \theta \sin \theta \\
 \bar{K}_{45} = & K_{45} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (K_{44} - K_{55}) \cos \theta \sin \theta \\
 \bar{K}_{55} = & K_{55} \cos^2 \theta + K_{44} \sin^2 \theta + 2K_{45} \cos \theta \sin \theta \\
 \bar{K}_{14} = & K_{14} \cos^3 \theta + (K_{15} - 2K_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (K_{24} - 2K_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + K_{25} \sin^3 \theta \\
 \bar{K}_{15} = & K_{15} \cos^3 \theta - (K_{14} + 2K_{56}) \cos^2 \theta \sin \theta + (K_{25} + 2K_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - K_{24} \sin^3 \theta \\
 \bar{K}_{24} = & K_{24} \cos^3 \theta + (K_{25} + 2K_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + (K_{14} + 2K_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + K_{15} \sin^3 \theta \\
 \bar{K}_{25} = & K_{25} \cos^3 \theta + (2K_{56} - K_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (K_{15} - 2K_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - K_{14} \sin^3 \theta \\
 \bar{K}_{34} = & K_{34} \cos \theta + K_{35} \sin \theta \\
 \bar{K}_{35} = & K_{35} \cos \theta - K_{34} \sin \theta \\
 \bar{K}_{46} = & K_{46} \cos^3 \theta + (K_{56} + K_{14} - K_{24}) \cos^2 \theta \sin \theta + (K_{15} - K_{25} + K_{46}) \cos \theta \sin^2 \theta - K_{56} \sin^3 \theta \\
 \bar{K}_{56} = & K_{56} \cos^3 \theta + (K_{15} - K_{25} - K_{46}) \cos^2 \theta \sin \theta + \\
 & +(K_{24} - K_{14} - K_{56}) \cos \theta \sin^2 \theta + K_{46} \sin^3 \theta
 \end{aligned} \tag{2.213}$$

Per un materiale ortotropo orientato di un angolo  $\theta$  rispetto al sistema di riferimento del problema, le matrici di rigidezza (2.209) e di cedibilit  (2.212) diventano:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & 0 & 0 & \bar{K}_{16} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & 0 & 0 & \bar{K}_{26} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & 0 & 0 & \bar{K}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_{44} & \bar{K}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_{45} & \bar{K}_{55} & 0 \\ \bar{K}_{16} & \bar{K}_{26} & \bar{K}_{36} & 0 & 0 & \bar{K}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

### 2.2.4.2.5 Compositi laminati

Un *laminato* è un materiale composito costituito da una serie di lamine o strati sovrapposti (figura 2.22) di differenti materiali. Esistono molteplici combinazioni di materiali che consentono di ottenere laminati ognuno con caratteristiche meccaniche differenti. Le lamine costituenti il composito laminato possono essere identificate attraverso la posizione all'interno del laminato, il materiale costituente e l'orientazione rispetto al sistema di riferimento del laminato.

La sequenza delle diverse orientazioni di ogni lamina che concorre alla formazione del laminato è detta *schema di laminazione* o *sequenza di sovrapposizione*. Lo schema di laminazione e le proprietà del materiale di ogni singola lamina sono fattori che permettono al progettista di ottenere compositi che sono in grado di sviluppare caratteristiche meccaniche prestabilite. Tuttavia, l'eterogeneità delle proprietà dei materiali costituenti il laminato, gli sforzi di taglio tra le lamine, specialmente lungo i bordi del laminato, possono causare il fenomeno di “delaminazione”. I compositi “functionally graded” sono nati con lo scopo di eliminare la non omogeneità fisica dei laminati fibro-rinforzati, ossia le discontinuità geometriche e le concentrazioni di tensione.

Il processo produttivo dei laminati è molto delicato e deve essere eseguito con la massima accortezza per evitare difetti di fabbricazione dei materiali compositi, quali vuoti interlaminari, incorretta orientazione o danneggiamento delle fibre, variazione di spessore delle lamine. Tuttavia, risulta impossibile eliminare tutti i difetti di fabbricazione. Pertanto, nell'analisi e nella progettazione dei compositi laminati, occorre considerare i diversi meccanismi di rottura e le possibili imperfezioni.

In figura 2.22 è rappresentato un generico laminato costituito, ad esempio, da  $l$  lamine di materiali ortotropi o “functionally graded”. La prima lamina si trova in corrispondenza della superficie inferiore del guscio e l'ultima in corrispondenza della superficie superiore.

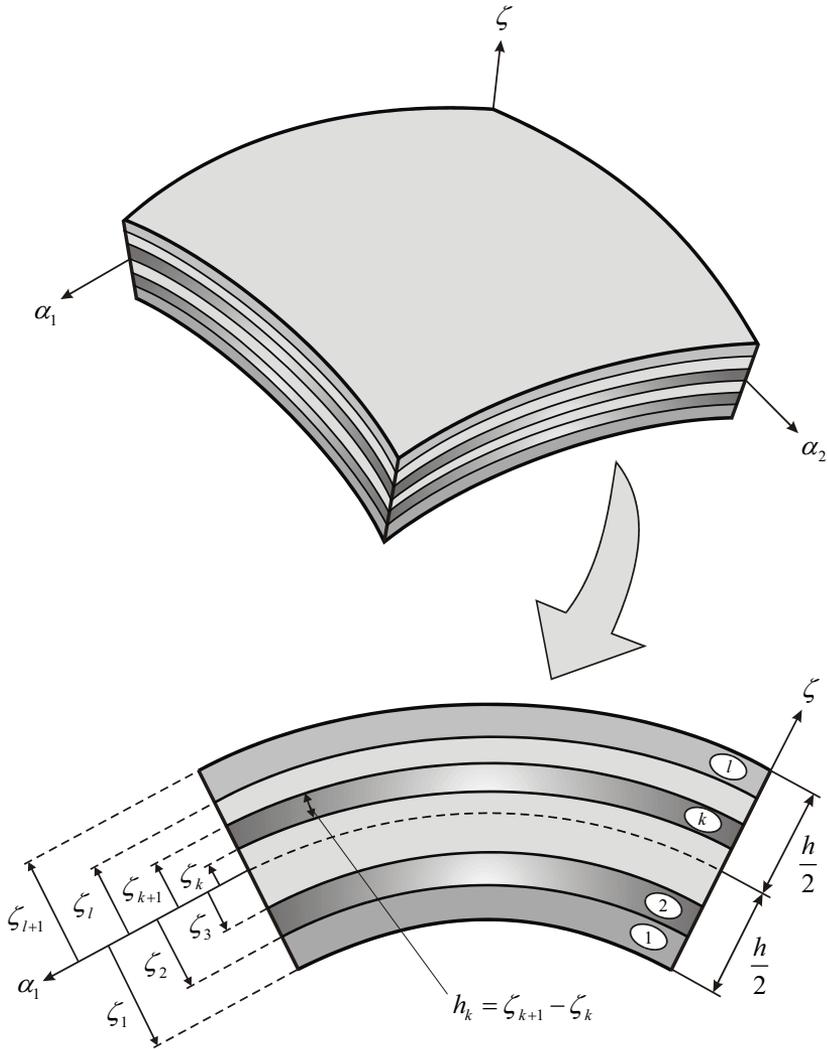


Figura 2.22 – Laminato costituito da diversi strati.

La  $k$ -esima lamina è caratterizzata dalle coordinate  $\zeta_k$  e  $\zeta_{k+1}$  rispetto alla superficie di riferimento del laminato e dallo spessore  $h_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$ . Lo spessore costante del laminato è definito dalla relazione:

$$h = \sum_{k=1}^l h_k \quad (2.215)$$

La superficie media, posta a distanza  $h/2$  dalla superficie superiore e inferiore del laminato, viene assunta come superficie di riferimento.

Per ogni lamina o strato costituente il laminato valgono le relazioni di trasformazione delle componenti di tensione (2.201), (2.203), di deformazione (2.205), (2.206) e delle

costanti elastiche (2.209), (2.212). Per la  $k$ -esima lamina, le relazioni (2.208) e (2.211) possono porsi in forma compatta nel modo seguente:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \bar{\mathbf{C}}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \quad (2.216)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \bar{\mathbf{K}}^{(k)} \boldsymbol{\sigma}^{(k)} \quad (2.217)$$

dove le equazioni di legame sono definite nel sistema di riferimento del problema.

Qualora la  $k$ -esima lamina sia costituita da materiale “functionally graded”, le leggi esponenziali (2.193) assumono il seguente aspetto:

$$V_C^{(k)} = \left( \frac{\zeta_{k+1}}{h_k} - \frac{\zeta_k}{h_k} \right)^p \quad \text{oppure} \quad V_C^{(k)} = \left( \frac{\zeta_k + h_k}{h_k} - \frac{\zeta_{k+1}}{h_k} \right)^p \quad (2.218)$$

mentre per le proprietà meccaniche si ha:

$$\begin{aligned} \rho^{(k)}(\zeta) &= (\rho_C^{(k)} - \rho_M^{(k)}) V_C^{(k)} + \rho_M^{(k)} \\ E^{(k)}(\zeta) &= (E_C^{(k)} - E_M^{(k)}) V_C^{(k)} + E_M^{(k)} \\ \nu^{(k)}(\zeta) &= (\nu_C^{(k)} - \nu_M^{(k)}) V_C^{(k)} + \nu_M^{(k)} \quad \text{per } \zeta_k \leq \zeta \leq \zeta_{k+1} \\ G^{(k)}(\zeta) &= \frac{E^{(k)}(\zeta)}{2(1 + \nu^{(k)}(\zeta))} \end{aligned} \quad (2.219)$$

#### 2.2.4.2.6 Equazioni costitutive per la teoria del primo ordine (FSDT)

Per lo studio dei gusci laminati moderatamente spessi, occorre aggiungere alle ipotesi fondamentali introdotte dalla teoria del primo ordine, o FSDT, le ipotesi qui di seguito elencate e riguardanti le assunzioni relative al comportamento meccanico dei materiali compositi.

1) Le lamine costituenti il laminato sono perfettamente incollate tra di loro e durante la deformazione non si verificano slittamenti relativi tra le lamine.

2) Il materiale di ogni strato è elastico lineare e risulta omogeneo su superfici parallele alla superficie di riferimento.

3) Ogni lamina ha spessore uniforme e costante.

4) Gli spostamenti, e di conseguenza le deformazioni, sono infinitesimi.

5) Le tensioni tangenziali agenti sulle superfici inferiore e superiore del laminato sono nulle.

L'ultima assunzione riflette il fatto che il problema inizialmente tridimensionale viene trasformato in un problema bidimensionale, definito sulla superficie di riferimento del

guscio laminato, non permettendo di considerare gli sforzi tangenziali sulle superfici inferiore e superiore del laminato.

In base alle ipotesi della FSDT, è lecito trascurare le componenti di deformazione  $\hat{\varepsilon}_n$  e di tensione  $\hat{\sigma}_n$ . Per tener conto di queste ipotesi occorre modificare le equazioni costitutive (2.216). Nel sistema di riferimento del materiale la legge di Hooke (2.167) per la  $k$ -esima lamina anisotropa e monoclina si specializza nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix}^{(k)} \\ \hat{\sigma}_n^{(k)} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.220)$$

dove  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_n$  sono le componenti di tensione normale lungo le tre direzioni mutuamente ortogonali del sistema di riferimento del materiale e  $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_n$  le corrispondenti componenti di deformazione, mentre  $\hat{\tau}_{1n}, \hat{\tau}_{2n}, \hat{\tau}_{12}$  sono le tensioni tangenziali e  $\hat{\gamma}_{1n}, \hat{\gamma}_{2n}, \hat{\gamma}_{12}$  le corrispondenti deformazioni. Qualora la  $k$ -esima lamina sia ortotropa, si ha:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\tau}_{12} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix}^{(k)} \\ \hat{\sigma}_n^{(k)} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{\tau}_{1n} \\ \hat{\tau}_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{1n} \\ \hat{\gamma}_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.221)$$

dove  $Q_{ij}^{(k)}$  sono le rigidezze della  $k$ -esima lamina e vengono definite attraverso le seguenti relazioni in funzione delle costanti ingegneristiche:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, & Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, & Q_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} \\ Q_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)}, & Q_{44}^{(k)} &= G_{13}^{(k)}, & Q_{55}^{(k)} &= G_{23}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.222)$$

Visto che i laminati sono costituiti dalla sovrapposizione di diverse lamine, ognuna della quali può essere arbitrariamente orientata rispetto al sistema di riferimento del laminato, le equazioni costitutive di ogni lamina devono essere trasformate nelle coordinate del problema geometrico. Per la  $k$ -esima lamina arbitrariamente orientata si ha:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}^{(k)} \\ \sigma_n^{(k)} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.223)$$

Ricordando le definizioni (2.210), se la  $k$ -esima lamina è anisotropa o monoclina, i coefficienti  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  risultano definiti nel modo seguente:

$$\bar{Q}_{ij}^{(k)} = \bar{C}_{ij}^{(k)} \quad (2.224)$$

Considerando le equazioni (2.210) e (2.221), se la  $k$ -esima lamina è ortotropa, i coefficienti  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}^{(k)} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 4Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}^{(k)} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \sin^4 \theta + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22}^{(k)} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12}^{(k)} - Q_{22}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} &= (Q_{11}^{(k)} + Q_{22}^{(k)} - 2Q_{12}^{(k)} - 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}^{(k)} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{44}^{(k)} &= Q_{44}^{(k)} \cos^2 \theta + Q_{55}^{(k)} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45}^{(k)} &= (Q_{44}^{(k)} - Q_{55}^{(k)}) \cos \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{55}^{(k)} &= Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta + Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.225)$$

Qualora la  $k$ -esima lamina sia isotropa omogenea oppure non omogenea lungo lo spessore, come accade per i “functionally graded materials”, dalle equazioni (2.225) si ha:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} = \bar{Q}_{11}^{(k)} = Q_{22}^{(k)} = \bar{Q}_{22}^{(k)} &= \frac{E^{(k)}}{1 - (\nu^{(k)})^2}, \quad Q_{12}^{(k)} = \bar{Q}_{12}^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{1 - (\nu^{(k)})^2} \\ Q_{66}^{(k)} = \bar{Q}_{66}^{(k)} = Q_{44}^{(k)} = \bar{Q}_{44}^{(k)} = Q_{55}^{(k)} = \bar{Q}_{55}^{(k)} &= G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} = \bar{Q}_{26}^{(k)} = \bar{Q}_{45}^{(k)} = \bar{Q}_{55}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.226)$$

da cui discendono le relazioni:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}^{(k)} \\ \sigma_n^{(k)} &= 0 \\ \begin{bmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{66} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.227)$$

Si vuol far notare che, a differenza di un materiale isotropo omogeneo, per un materiale “functionally graded” le costanti ingegneristiche del materiale (2.219) dipendono da  $\zeta$ . Di conseguenza dalle equazioni (2.226), discende che anche le costanti elastiche  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  presenteranno la stessa dipendenza ( $\bar{Q}_{ij}^{(k)} = \bar{Q}_{ij}^{(k)}(\zeta)$ ).

Sono state determinate le leggi di Hooke per la generica lamina, il cui sistema di riferimento  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  è arbitrariamente orientato rispetto al sistema di riferimento del laminato  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ . Il passo successivo consiste nel ricavare il secondo sistema di equazioni fondamentali, ossia le caratteristiche della sollecitazione interna.

### 2.2.4.3 Caratteristiche della sollecitazione

In figura 2.12 sono rappresentate le componenti di tensione agenti sull'elemento infinitesimo di guscio. La soluzione del problema in termini delle varie componenti di tensione, in un qualunque punto  $(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$  del solido, è oggetto della teoria dell'elasticità tridimensionale. Per semplificare il problema delineato, le teorie ingegneristiche si riferiscono alle risultanti di tensione, ossia a forze e coppie risultanti per unità di lunghezza, definite mediante criteri di equivalenza statica. Risolto il problema in termini di risultanti, si ritorna alle tensioni puntuali mediante inversione delle equazioni di equivalenza. Si vuol far rilevare che questo procedimento di inversione, in alcuni casi, può effettuarsi solo in via approssimata. La formulazione in termini di azioni risultanti piuttosto che in termini di azioni puntuali, costituisce la più importante semplificazione nella teoria dei gusci moderatamente spessi.

Per integrare le tensioni lungo lo spessore del guscio è necessario impiegare le leggi costitutive (2.223), sostituendovi all'interno le equazioni (2.145)-(2.148), ossia riscrivere le componenti di tensione in funzione delle caratteristiche della deformazione:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \bar{Q}_{11}(\varepsilon_1^0 + \zeta\chi_1) + \bar{Q}_{12}(\varepsilon_2^0 + \zeta\chi_2) + \bar{Q}_{16}(\gamma_{12}^0 + \zeta\chi_{12}) \\
 \sigma_2 &= \bar{Q}_{12}(\varepsilon_1^0 + \zeta\chi_1) + \bar{Q}_{22}(\varepsilon_2^0 + \zeta\chi_2) + \bar{Q}_{26}(\gamma_{12}^0 + \zeta\chi_{12}) \\
 \sigma_n &= 0 \\
 \tau_{12} &= \bar{Q}_{16}(\varepsilon_1^0 + \zeta\chi_1) + \bar{Q}_{26}(\varepsilon_2^0 + \zeta\chi_2) + \bar{Q}_{66}(\gamma_{12}^0 + \zeta\chi_{12}) \\
 \tau_{1n} &= \kappa(\bar{Q}_{44}\gamma_{1n} + \bar{Q}_{45}\gamma_{2n}) \\
 \tau_{2n} &= \kappa(\bar{Q}_{45}\gamma_{1n} + \bar{Q}_{55}\gamma_{2n})
 \end{aligned} \tag{2.228}$$

Si noti come le due componenti di tensione  $\tau_{1n}, \tau_{2n}$  associate agli scorrimenti trasversali siano state scritte dividendo l'espressione originaria per il *fattore di taglio*, o *fattore di forma*,  $\kappa = 1/\kappa_0$ . Esso è un fattore correttivo con cui si tiene conto che, in analogia con la teoria della trave, le tensioni tangenziali non sono distribuite linearmente lungo lo spessore del guscio, bensì presentano un andamento parabolico. Tale andamento non permetterebbe una facile integrazione degli sforzi  $\tau_{1n}$  e  $\tau_{2n}$  a differenza di quanto accade per le integrazioni di  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ . Il fattore di forma rappresenta il rapporto tra il valore di picco della tensione tangenziale ed il suo valore medio lungo lo spessore del guscio. Nel caso di gusci moderatamente spessi esso può essere assunto uguale a quello di una sezione rettangolare e quindi, in base alla teoria approssimata del taglio, pari a  $\kappa_0 = 6/5$ , anche se, a livello quantitativo, varia al variare della sezione della laminato e al variare dello schema di laminazione.

A questo punto si è in grado di integrare agevolmente tutte le distribuzioni di tensione lungo lo spessore del guscio ed i risultati ottenuti, ovvero le forze e le coppie risultanti, vengono definite, convenientemente, per unità di lunghezza sulla superficie di riferimento. A tal proposito, in base allo schema di 2.12, si osservi che una forza generalizzata agente nella sezione ortogonale alla linea coordinata  $\alpha_1$  per una lunghezza unitaria di linea parametrica  $\alpha_2$  è fornita dal prodotto tra la componente di tensione ad essa associata e la lunghezza  $ds_2$  calcolata mediante la seconda equazione (2.102). Analogamente, una forza generalizzata agente nella sezione ortogonale alla linea coordinata  $\alpha_2$  per una lunghezza unitaria di linea parametrica  $\alpha_1$  è data dal prodotto tra la componente di tensione ad essa associata e la lunghezza  $ds_1$  calcolata mediante la prima equazione (2.102). Infine, le azioni risultanti, agenti sull'elemento infinitesimo di guscio laminato lungo le due direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$ , possono essere valutate mediante l'integrazione delle quantità appena

definite lungo lo spessore del guscio. Per un laminato costituito da  $l$  lamine, si ottiene:

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 ds_2(\zeta) d\zeta = A_2 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 (1 + \zeta/R_2) d\zeta \right) d\alpha_2 \equiv N_1 A_2 d\alpha_2 \quad (2.229)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 ds_1(\zeta) d\zeta = A_1 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 (1 + \zeta/R_1) d\zeta \right) d\alpha_1 \equiv N_2 A_1 d\alpha_1 \quad (2.230)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} ds_2(\zeta) d\zeta = A_2 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} (1 + \zeta/R_2) d\zeta \right) d\alpha_2 \equiv N_{12} A_2 d\alpha_2 \quad (2.231)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} ds_2(\zeta) d\zeta = A_1 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} (1 + \zeta/R_1) d\zeta \right) d\alpha_1 \equiv N_{21} A_1 d\alpha_1 \quad (2.232)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 ds_2(\zeta) \zeta d\zeta = A_2 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 (1 + \zeta/R_2) \zeta d\zeta \right) d\alpha_2 \equiv M_1 A_2 d\alpha_2 \quad (2.233)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 ds_1(\zeta) \zeta d\zeta = A_1 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 (1 + \zeta/R_1) \zeta d\zeta \right) d\alpha_1 \equiv M_2 A_1 d\alpha_1 \quad (2.234)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} ds_2(\zeta) \zeta d\zeta = A_2 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} (1 + \zeta/R_2) \zeta d\zeta \right) d\alpha_2 \equiv M_{12} A_2 d\alpha_2 \quad (2.235)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} ds_1(\zeta) \zeta d\zeta = A_1 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} (1 + \zeta/R_1) \zeta d\zeta \right) d\alpha_1 \equiv M_{21} A_1 d\alpha_1 \quad (2.236)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{1n} ds_2(\zeta) d\zeta = A_2 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{1n} (1 + \zeta/R_2) d\zeta \right) d\alpha_2 \equiv T_1 A_2 d\alpha_2 \quad (2.237)$$

$$\sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{2n} ds_1(\zeta) d\zeta = A_1 \left( \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{2n} (1 + \zeta/R_1) d\zeta \right) d\alpha_1 \equiv T_2 A_1 d\alpha_1 \quad (2.238)$$

dove  $\zeta_k$  e  $\zeta_{k+1}$  determinano la posizione delle facce superiore ed inferiore della  $k$ -esima lamina. Nelle definizioni appena mostrate le espressioni fra parentesi tonde rappresentano le sollecitazioni interne per unità di lunghezza, nelle rispettive direzioni coordinate. Queste quantità possono essere definite, in modo alternativo, sfruttando le definizioni di area infinitesima (2.103) e di lunghezza d'arco (2.102). Le azioni risultanti sono esprimibili anche nel modo seguente:

$$N_1 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 \frac{d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 (1 + \zeta/R_2) d\zeta \quad (2.239)$$

$$N_2 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 \frac{d\Sigma_1(\zeta)}{ds_1(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 (1 + \zeta/R_1) d\zeta \quad (2.240)$$

$$N_2 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 \frac{d\Sigma_1(\zeta)}{ds_1(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 (1 + \zeta/R_1) d\zeta \quad (2.241)$$

$$N_{12} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} \frac{d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} (1 + \zeta/R_2) d\zeta \quad (2.242)$$

$$N_{21} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} \frac{d\Sigma_1(\zeta)}{ds_1(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} (1 + \zeta/R_1) d\zeta \quad (2.243)$$

$$M_1 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 \zeta \frac{d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_1 (1 + \zeta/R_2) \zeta d\zeta \quad (2.244)$$

$$M_2 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 \zeta \frac{d\Sigma_1(\zeta)}{ds_1(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \sigma_2 (1 + \zeta/R_1) \zeta d\zeta \quad (2.245)$$

$$M_{12} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} \zeta \frac{d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{12} (1 + \zeta/R_2) \zeta d\zeta \quad (2.246)$$

$$M_{21} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} \zeta \frac{d\Sigma_1(\zeta)}{ds_1(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{21} (1 + \zeta/R_1) \zeta d\zeta \quad (2.247)$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{1n} \frac{d\Sigma_2(\zeta)}{ds_2(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{1n} (1 + \zeta/R_2) d\zeta \quad (2.248)$$

$$T_2 = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{2n} \frac{d\Sigma_1(\zeta)}{ds_1(0)} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tau_{2n} (1 + \zeta/R_1) d\zeta \quad (2.249)$$

Le equazioni (2.239)-(2.249) possono essere espresse in forma matriciale come segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ T_1 \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{1n} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta \\ \begin{bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ T_2 \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{2n} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta \\ \begin{bmatrix} M_1 \\ M_{12} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta \\ \begin{bmatrix} M_2 \\ M_{21} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{bmatrix} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta \end{aligned} \quad (2.250)$$

Dalle relazioni (2.250), si può notare che la simmetria del tensore degli sforzi ( $\tau_{12} = \tau_{21}$ ) non implica necessariamente che le sollecitazioni  $N_{12}$  e  $N_{21}$  siano uguali tra loro o che lo siano le azioni risultanti  $M_{12}$  e  $M_{21}$ . Ciò accade solo per gusci di rivoluzione caricati in maniera assialsimmetrica, per il guscio sferico e per le piastre. Tuttavia, dal momento che è lecito risolvere il problema riferendosi alla superficie media del guscio, le equazioni (2.250) possono essere specializzate imponendo  $\zeta = 0$ . In altre parole, in base all'ipotesi di guscio moderatamente spesso, è lecito trascurare i termini del tipo  $\zeta/R_1, \zeta/R_2$  rispetto all'unità ( $\zeta/R_1 \ll 1, \zeta/R_2 \ll 1$ ) e considerare, con buona approssimazione, che le azioni interne  $N_{12}, N_{21}$  e  $M_{12}, M_{21}$  siano uguali a due a due:  $N_{12} = N_{21}, M_{12} = M_{21}$ . Inoltre, gli errori che questa assunzione introduce non sono superiori a quelli relativi alle ipotesi di base. Sono state così definite le *caratteristiche di sollecitazione*, e precisamente:

$N_1$  = sforzo normale associato a  $\sigma_1$  (*sforzo di membrana* lungo  $\alpha_1$ )

$N_2$  = sforzo normale associato a  $\sigma_2$  (*sforzo di membrana* lungo  $\alpha_2$ )

$N_{12} = N_{21}$  = sforzi di taglio associati a  $\tau_{12} = \tau_{21}$  (*tagli di membrana*)

$M_1$  = momento flettente associato a  $\sigma_1$  (*momento flettente* in direzione  $\alpha_2$ )

$M_2$  = momento flettente associato a  $\sigma_2$  (*momento flettente* in direzione  $\alpha_1$ )

$M_{12} = M_{21}$  = *momenti torcenti* associati a  $\tau_{12} = \tau_{21}$

$T_1$  = *sforzo di taglio* associato a  $\tau_{1n}$

$T_2$  = *sforzo di taglio* associato a  $\tau_{2n}$

In sintesi, si vuol far notare che le caratteristiche di sollecitazione illustrate in figura 2.23 sono positive, per definizione, e sono in tutto otto. Esse possono essere raggruppate all'interno del vettore algebrico degli sforzi generalizzati per unità di lunghezza:

$$\mathbf{S}(\alpha_1, \alpha_2, t) = [N_1 \quad N_2 \quad N_{12} \quad M_1 \quad M_2 \quad M_{12} \quad T_1 \quad T_2]^T \quad (2.251)$$

Inserendo nelle definizioni (2.250) le equazioni (2.228) e ricordando che  $\zeta/R_1 \ll 1, \zeta/R_2 \ll 1$ , si ottengono le equazioni di legame tra le caratteristiche della sollecitazione e le caratteristiche della deformazione:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 + \zeta \chi_1 \\ \varepsilon_2^0 + \zeta \chi_2 \\ \gamma_{12}^0 + \zeta \chi_{12} \end{bmatrix} d\zeta \\
 \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 + \zeta \chi_1 \\ \varepsilon_2^0 + \zeta \chi_2 \\ \gamma_{12}^0 + \zeta \chi_{12} \end{bmatrix} \zeta d\zeta \\
 \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} &= \kappa \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} d\zeta
 \end{aligned} \tag{2.252}$$

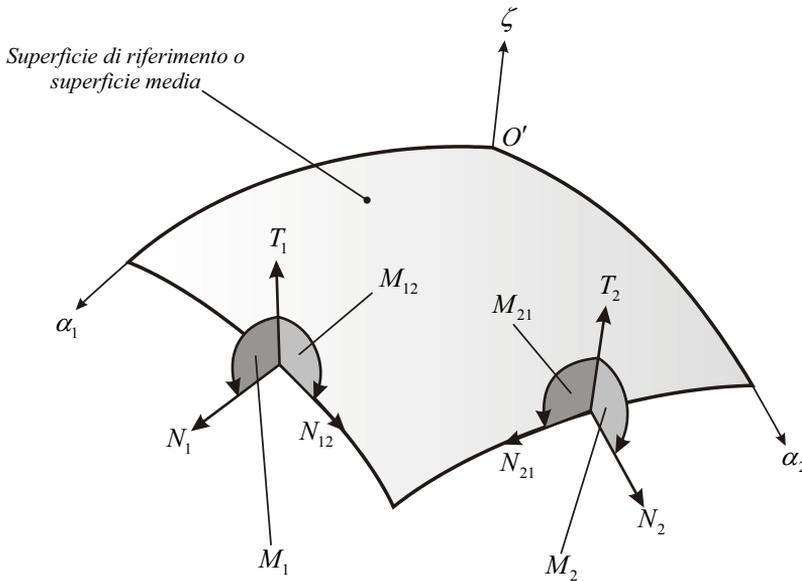


Figura 2.23 – Caratteristiche della sollecitazione agenti sul piano medio dell’elemento di guscio.

Introducendo le matrici **A**, **D** e **B**, denominate *matrice di rigidezza membranale*, *matrice di rigidezza flessionale* e *matrice di rigidezza d’accoppiamento flessio-membranale*, rispettivamente, le caratteristiche della sollecitazione in termini di caratteristiche della deformazione assumono la forma:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.253}$$

Gli elementi delle matrici **A**, **D** e **B** dipendono dai coefficienti elastici  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  e sono definiti nel modo seguente:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} d\zeta, \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \zeta d\zeta, \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \zeta^2 d\zeta \quad (2.254)$$

Le relazioni (2.253) rappresentano le *equazioni di legame costitutivo* per un guscio in materiale anisotropo. Esse definiscono il legame tra le *variabili secondarie* del problema, o di seconda specie (le caratteristiche della sollecitazione interna) e le *variabili primali*, o di prima specie (le caratteristiche della deformazione). Si vuole sottolineare ancora una volta che, le variabili primali, come pure le variabili secondarie sono state definite sulla superficie di riferimento, consentendo di trasformare il problema originariamente tridimensionale in un problema bidimensionale.

#### 2.2.4.4 Laminati e schemi di laminazione

Le (2.254) mostrano che le rigidezze, o costanti elastiche ingegneristiche di un guscio laminato, sono strettamente legate alle caratteristiche meccaniche dei materiali costituenti le singole lamine, agli spessori delle lamine stesse ed allo schema di laminazione. La simmetria o la antisimmetria dello schema di laminazione e delle proprietà dei materiali rispetto alla superficie di riferimento del laminato comportano l'annullamento di alcuni coefficienti elastici. Al fine di valutare le rigidezze caratteristiche di particolari laminati, si analizzano alcuni schemi di laminazione.

Prima di tutto è utile introdurre la terminologia e le notazioni che verranno associate agli schemi oggetto di studio. Lo *schema di laminazione* di un laminato costituito da lamine fibro-rinforzate viene comunemente definito attraverso la seguente simbologia ( $\alpha/\beta/\gamma/\delta/\dots$ ), dove  $\alpha$  indica l'orientazione delle fibre nella prima lamina,  $\beta$  è l'orientazione delle fibre nella seconda lamina e così via.

Le lamine vengono contate seguendo la direzione positiva dell'asse  $\zeta$  a partire dalla superficie inferiore. Senza altra specifica precisazione, questa notazione implica che tutte le lamine hanno lo stesso spessore e sono fatte dello stesso materiale. Qualora una lamina sia costituita da materiale "functionally graded", essa viene contrassegnata dalla sigla *FGM*. In tal caso occorre specificare la legge esponenziale che caratterizza i due costituenti sulla superficie superiore e inferiore della lamina. Con la sigla *FGM<sub>1</sub>* si indica

un materiale avente una distribuzione esponenziale definita dalla prima legge delle equazioni (2.218), mentre la sigla  $FGM_2$  indica la seconda distribuzione.

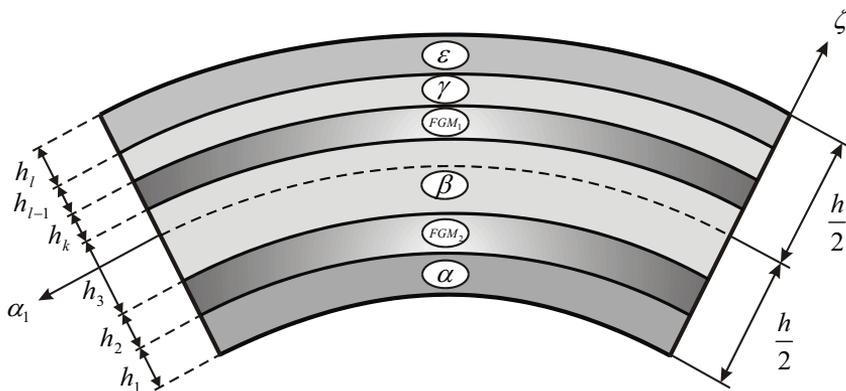


Figura 2.24 – Laminato generico.

In figura 2.24 viene riportato un laminato generico costituito da lamine fibro-rinforzate e da lamine di “functionally graded material” ( $\alpha / FGM_2 / \beta / FGM_1 / \gamma / \delta$ ), aventi differenti spessori.

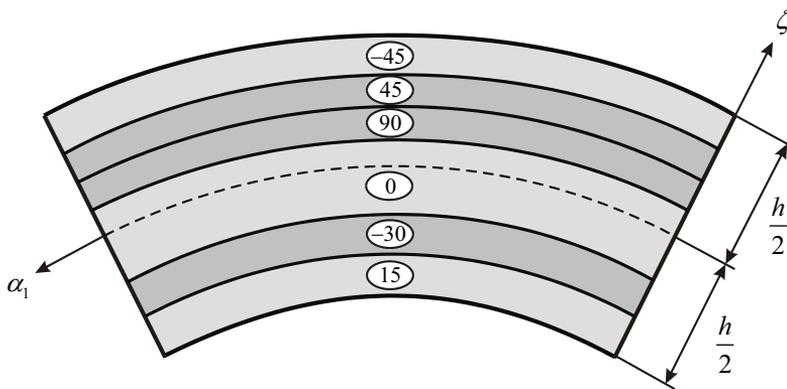


Figura 2.25 – Laminato con lamine orientate.

In genere, una lamina fibro-rinforzata è caratterizzata dall’orientazione delle sue fibre, mediante l’angolo  $\theta$ , con  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ .

Ad esempio, la simbologia  $(0/15/90/-35/45/75/-45)$  indica un generico laminato composto da sette lamine fibro-rinforzate costituite dallo stesso materiale, aventi lo stesso spessore ed orientate diversamente.

Si definisce *laminato con lamine orientate* un composito costituito da lamine fibro-rinforzate con diversa orientazione delle fibre. Come già detto, Le orientazioni di ogni

singola lamina variano da un angolo  $\theta$  ad un angolo  $-\theta$ , con  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  ed almeno una di esse deve avere un'orientazione diversa da  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . Un esempio di laminato con lamine orientate è fornito dalla seguente sigla  $(15/-30/0/90/45/-45)$  (figura 2.25).

I *laminati con lamine incrociate* sono invece quei laminati fibro-rinforzati ove l'orientazione degli strati può assumere solo i valori  $\theta=0^\circ$  o  $\theta=90^\circ$ . Un esempio di laminato con sei strati incrociati è:  $(0/90/90/0/0/90)$  (figura 2.26). Le lamine che presentano un'orientazione di  $\theta=0^\circ$  o  $\theta=90^\circ$  hanno gli elementi della matrice di rigidezza  $\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}, \bar{Q}_{45}$  nulli. Di conseguenza sono nulli anche i coefficienti  $A_{16} = A_{26} = A_{45} = D_{16} = D_{26} = 0$ .

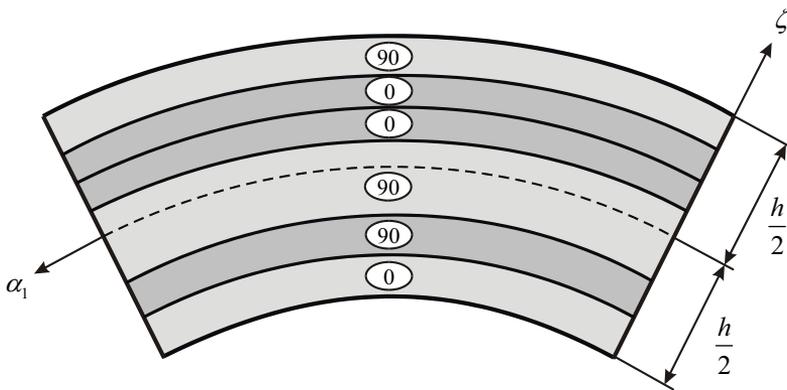


Figura 2.26 – Laminato con lamine incrociate.

Quando la sequenza delle lamine, delle caratteristiche del materiale, della geometria della struttura (come lo spessore della lamina) sono simmetrici rispetto alla superficie di riferimento, allora il laminato è detto *simmetrico* (figura 2.27).

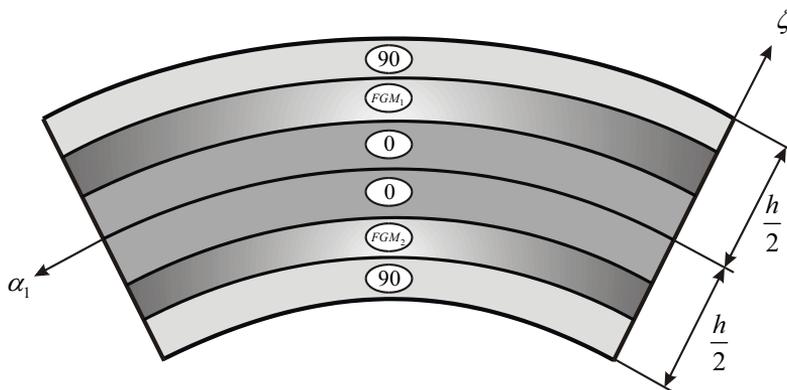


Figura 2.27 – Laminato simmetrico generico.

I laminati simmetrici vengono descritti da una specifica notazione che prevede di menzionare solamente le lamine che stanno sotto il piano medio ed aggiungendo un pedice, fuori parentesi, che indica la presenza di simmetria nel laminato: ad esempio la sigla  $(15/-30/0/0/-30/15)_s$  indica un laminato fibro-rinforzato simmetrico (figura 2.28), mentre la sigla  $(0/90/90/0)_s$  indica un laminato simmetrico con strati incrociati.

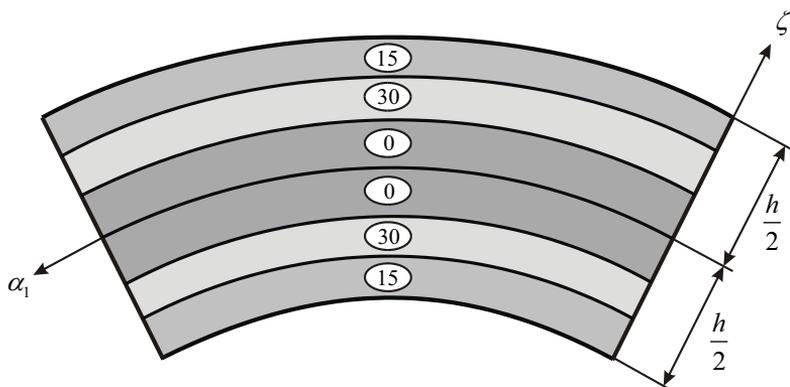


Figura 2.28 – Laminato simmetrico fibro-rinforzato.

Un *laminato asimmetrico* è un laminato non simmetrico. Invece, un *laminato antisimmetrico* è un laminato in cui lo schema di laminazione è antisimmetrico, mentre i materiali e gli spessori delle lamine sono simmetrici rispetto alla superficie media (figura 2.29). Ad esempio la sigla  $(-30/30/-30/30/-30/30)_3$  indica un laminato antisimmetrico fibro-rinforzato, mentre la sigla  $(0/90/0/90/0/90)_3$  indica un laminato antisimmetrico con strati incrociati.

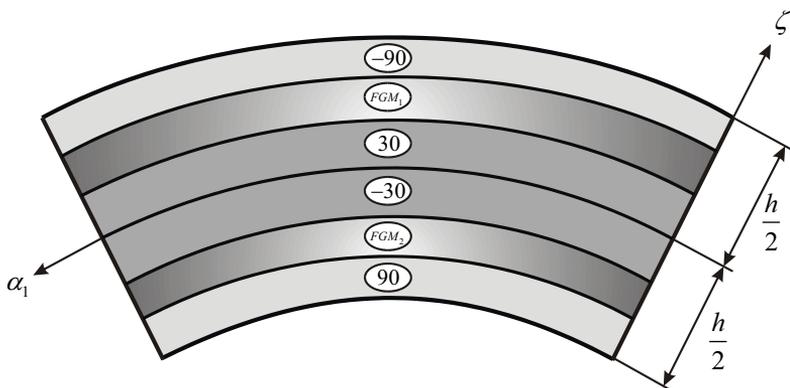


Figura 2.29 – Laminato antisimmetrico generico.

Le rigidezze del laminato  $A_{ij}$  dipendono in genere solamente dallo spessore e dalle rigidezze delle lamine costituenti, ma non dalla disposizione delle lamine nel laminato. Le rigidezze  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$ , invece, dipendono dalla rigidezza, dallo spessore delle lamine e dalla disposizione delle lamine rispetto alla superficie di riferimento. Inoltre, a differenza delle costanti  $A_{ij}$  e  $D_{ij}$ , le rigidezze  $B_{ij}$  possono assumere valori negativi a seconda dello schema di laminazione e del numero di lamine.

I laminati  $(90/0)_s$  e  $(0/90)_s$  hanno le stesse rigidezze  $A_{ij}$  e presentano invece rigidezze  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$  diverse. Il laminato  $(0/90)_s$  ha rigidezze flessionali migliori nella direzione perpendicolare alla direzione delle fibre rispetto al laminato  $(90/0)_s$ , perchè la lamina avente fibre inclinate di  $\theta = 0^\circ$  si trova ad una distanza maggiore dalla superficie media rispetto al laminato  $(90/0)_s$ .

#### 2.2.4.4.1 *Compositi costituiti da una singola lamina*

Vengono analizzate tipologie di gusci costituiti da una singola lamina ( $l = 1$ ) di spessore costante  $h$ . Le lamine possono essere di materiale isotropo, “functionally graded”, ortotropo, anisotropo ed avere un’orientazione arbitraria. Per i compositi costituiti da un singolo strato le rigidezze taglienti  $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$  si dimostrano essere nulle eccetto nel caso in cui il materiale costituente la lamina sia ortotropo genericamente orientato, anisotropo, monoclinico o “functionally graded”, mentre le rigidezze d’accoppiamento  $B_{ij}$  risultano sempre nulle tranne per i “functionally graded materials”.

##### (a) *Laminato costituito da una singola lamina isotropa*

Per una lamina isotropa di spessore  $h$ , le espressioni (2.254) si trasformano nel modo seguente:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} d\zeta = Q_{ij}h, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta d\zeta = 0, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta^2 d\zeta = \frac{Q_{ij}h^3}{12} \quad (2.255)$$

Ricordando le definizioni (2.226), si ottiene che gli unici coefficienti elastici non nulli sono:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & A_{12} &= \nu A_{11}, & A_{44} = A_{55} = A_{66} &= \frac{1-\nu}{2} A_{11} \\
 D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, & D_{12} &= \nu D_{11}, & D_{66} &= \frac{1-\nu}{2} D_{11}
 \end{aligned}
 \tag{2.256}$$

Le equazioni costitutive (2.253) per il caso in esame si possono scrivere nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \nu A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu A_{11} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & \nu D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D_{11} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix}
 \tag{2.257}$$

(b) *Laminato costituito da una singola lamina “functionally graded”*

A differenza di un materiale isotropo omogeneo, per un materiale “functionally graded” le costanti ingegneristiche del materiale (2.219) dipendono da  $\zeta$ . Di conseguenza dalle equazioni (2.226), discende che anche le costanti elastiche  $\bar{Q}_{ij}$  presentano la stessa dipendenza ( $\bar{Q}_{ij} = \bar{Q}_{ij}(\zeta)$ ). Per una lamina di spessore  $h$ , le espressioni (2.254) si trasformano nel modo seguente:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(\zeta) d\zeta, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(\zeta) \zeta d\zeta, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(\zeta) \zeta^2 d\zeta
 \tag{2.258}$$

Ricordando le definizioni (2.226), si ottiene che gli unici coefficienti elastici non nulli sono:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(\zeta)}{1-(\nu(\zeta))^2} d\zeta, & A_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu(\zeta) E(\zeta)}{1-(\nu(\zeta))^2} d\zeta \\
 A_{44} = A_{55} = A_{66} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(\zeta)}{2(1+\nu(\zeta))} d\zeta
 \end{aligned}
 \tag{2.259}$$

$$B_{11} = B_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(\zeta)}{1 - (\nu(\zeta))^2} \zeta d\zeta, \quad B_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu(\zeta) E(\zeta)}{1 - (\nu(\zeta))^2} \zeta d\zeta \quad (2.260)$$

$$B_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(\zeta)}{2(1 + \nu(\zeta))} \zeta d\zeta$$

$$D_{11} = D_{22} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(\zeta)}{1 - (\nu(\zeta))^2} \zeta^2 d\zeta, \quad D_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\nu(\zeta) E(\zeta)}{1 - (\nu(\zeta))^2} \zeta^2 d\zeta \quad (2.261)$$

$$D_{66} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(\zeta)}{2(1 + \nu(\zeta))} \zeta^2 d\zeta$$

Si vuol far rilevare che, a causa della dipendenza delle costanti ingegneristiche (2.219) da  $\zeta$ , e quindi della non simmetria del materiale rispetto alla superficie media, le rigidezze flesso-membranali  $B_{ij}$  non sono tutte nulle. Le equazioni costitutive (2.253) per il caso in esame si possono porre nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.262)$$

(c) *Laminato costituito da una singola lamina ortotropa*

Per una lamina ortotropa, in cui il sistema di riferimento del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  coincide con il sistema di riferimento del problema  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ , le rigidezze  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  possono essere espresse in termini delle costanti  $Q_{ij}$  e dello spessore  $h$ . Ricordando le relazioni (2.225) (per  $\theta = 0$ ), le espressioni (2.254) si trasformano nel modo seguente:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} d\zeta = Q_{ij} h, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \zeta d\zeta = 0, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \zeta^2 d\zeta = \frac{Q_{ij} h^3}{12} \quad (2.263)$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= Q_{11}h, & A_{12} &= Q_{12}h, & A_{22} &= Q_{22}h \\
 A_{66} &= Q_{66}h, & A_{44} &= Q_{44}h, & A_{55} &= Q_{55}h \\
 D_{11} &= \frac{Q_{11}h^3}{12}, & D_{12} &= \frac{Q_{12}h^3}{12}, & D_{22} &= \frac{Q_{22}h^3}{12}, & D_{66} &= \frac{Q_{66}h^3}{12}
 \end{aligned} \tag{2.264}$$

dove  $Q_{ij}$  sono le rigidezze definite nelle equazioni (2.222). Le equazioni costitutive (2.253) per il caso in esame divengono:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.265}$$

Per una lamina ortotropa orientata di un angolo  $\theta$ , in cui il sistema di riferimento del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  non coincide con il sistema di riferimento della lamina  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ , le rigidezze  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  possono essere espresse in funzione dei coefficienti  $\bar{Q}_{ij}$  e dello spessore  $h$ . Le espressioni (2.254) si trasformano nel modo seguente:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} d\zeta = \bar{Q}_{ij}h, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta d\zeta = 0, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta^2 d\zeta = \frac{\bar{Q}_{ij}h^3}{12} \tag{2.266}$$

Di conseguenza si ottengono le seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.267}$$

(d) *Laminato costituito da una singola lamina anisotropa o monoclina*

Per un laminato anisotropo o monoclinico, in cui il sistema di riferimento del materiale

$O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  coincide con il sistema di riferimento del problema  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ , le rigidezze  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  possono essere espresse in funzione dei coefficienti  $C_{ij}$  del materiale e dello spessore  $h$ . Le espressioni (2.254) assumono il seguente aspetto:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} d\zeta = C_{ij}h, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta d\zeta = 0, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta^2 d\zeta = \frac{C_{ij}h^3}{12} \quad (2.268)$$

Qualora la lamina anisotropa o monoclina sia orientata di un angolo  $\theta$  rispetto il sistema di riferimento  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ , le rigidezze  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  sono funzione dei coefficienti  $\bar{C}_{ij}$ , definiti dalle equazioni (2.210) e dello spessore  $h$ . Le espressioni (2.254) si trasformano nel modo seguente:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} d\zeta = \bar{C}_{ij}h, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta d\zeta = 0, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}\zeta^2 d\zeta = \frac{\bar{C}_{ij}h^3}{12} \quad (2.269)$$

In entrambi i casi, le equazioni costitutive possono porsi nella stessa forma delle equazioni (2.267).

#### 2.2.4.4.2 Laminati simmetrici

Quando le proprietà dei materiali, la geometria del laminato (spessori delle lamine) e lo schema di laminazione sono simmetrici rispetto alla superficie media, il laminato viene definito *simmetrico* (figure 2.27 e 2.28). A causa della simmetria dei coefficienti di rigidezza di ogni singola lamina  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ , delle distanze  $\zeta_k$  e degli spessori  $h_k$  rispetto alla superficie di riferimento del laminato, le rigidezze d'accoppiamento flesso-membranali  $B_{ij}$  sono identicamente nulle, con notevole semplificazione delle equazioni che governano il problema.

Le caratteristiche della sollecitazione per un laminato simmetrico, in generale, hanno la stessa forma di quelle di un laminato costituito da una singola lamina ortotropa arbitrariamente orientata (2.267). Per alcuni casi particolari le equazioni costitutive (2.267) possono essere ulteriormente semplificate.

##### (a) Laminato simmetrico costituito da lamine isotrope

Quando diverse lamine isotrope di differente materiale e spessore, vengono sovrapposte

rispetto alla superficie di riferimento simmetricamente dal punto di vista geometrico e dei materiali, le espressioni (2.254) si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} d\zeta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \bar{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1} - \zeta_k) \\
 B_{ij} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \zeta d\zeta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \bar{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1}^2 - \zeta_k^2) = 0 \\
 D_{ij} &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \zeta^2 d\zeta = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l \bar{Q}_{ij}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3)
 \end{aligned} \tag{2.270}$$

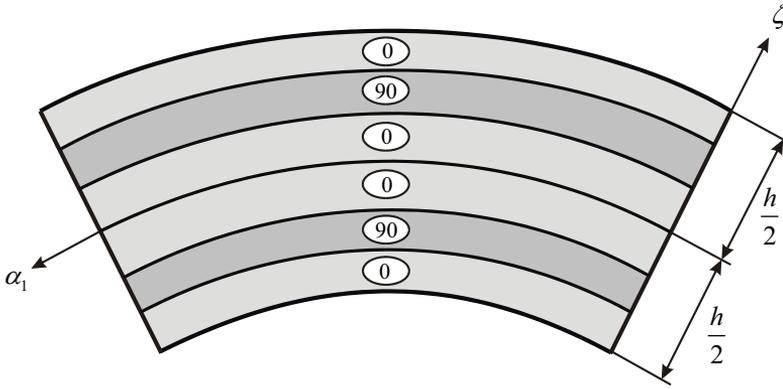


Figura 2.30 – Laminato simmetrico a lamine incrociate.

Dalle equazioni (2.270), ricordando le relazioni (2.226), si ricava:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{22} &= \sum_{k=1}^l Q_{11}^{(k)} h_k, & A_{12} &= \sum_{k=1}^l Q_{12}^{(k)} h_k, & A_{66} = A_{44} = A_{55} &= \sum_{k=1}^l Q_{66}^{(k)} h_k \\
 D_{11} = D_{22} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{11}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3), & D_{12} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{12}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3) \\
 D_{66} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{66}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3)
 \end{aligned} \tag{2.271}$$

Le equazioni costitutive (2.253) per il caso in esame assumono il seguente aspetto:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_{12} \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.272}$$

(b) *Laminato simmetrico costituito da lamine ortotrope*

Un laminato simmetrico costituito da lamine ortotrope, per le quali il sistema di riferimento del materiale  $O'\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2\hat{\zeta}$  coincide con il sistema di riferimento del laminato  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  e disposte simmetricamente, sia per quanto riguarda le proprietà dei materiali che la geometria (spessori delle lamine), rispetto alla superficie media del laminato, è caratterizzato da rigidzze flesso-membranali  $B_{ij}$  nulle. Le espressioni (2.254) assumono lo stesso aspetto delle (2.270). Dalle equazioni (2.270), ricordando le relazioni (2.222), si ricava:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \sum_{k=1}^l Q_{11}^{(k)} h_k, & A_{12} &= \sum_{k=1}^l Q_{12}^{(k)} h_k, & A_{22} &= \sum_{k=1}^l Q_{22}^{(k)} h_k \\
 A_{66} &= \sum_{k=1}^l Q_{66}^{(k)} h_k, & A_{44} &= \sum_{k=1}^l Q_{44}^{(k)} h_k, & A_{55} &= \sum_{k=1}^l Q_{55}^{(k)} h_k \\
 D_{11} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{11}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3), & D_{12} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{12}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3) \\
 D_{22} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{22}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3), & D_{66} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^l Q_{66}^{(k)} (\zeta_{k+1}^3 - \zeta_k^3)
 \end{aligned} \tag{2.273}$$

Di conseguenza le equazioni costitutive del laminato (2.253) sono definite nella seguente maniera:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.274}$$

I laminati formati da lamine ortotrope aventi ciascuna differente orientazione rispetto al sistema di riferimento del laminato sono denominati *laminati ortotropi generici*. Se gli spessori, le proprietà dei materiali e l'orientazione delle lamine sono simmetrici rispetto alla superficie media, il laminato risulta simmetrico. In tal caso le costanti elastiche  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  possono essere valutate mediante le relazioni (2.270). A causa della simmetria del laminato gli elementi della matrice di rigidzza d'accoppiamento flesso-membranale  $B_{ij}$  sono identicamente nulli e le equazioni costitutive possono porsi nella stessa forma delle equazioni (2.267). Un esempio di laminato simmetrico composto da lamine ortotrope

arbitrariamente orientate è dato dalla seguente notazione  $(30/-60_3/15_5/-60_3/30)$  dove il pedice indica il numero di lamine aventi stessa orientazione e spessore. Altri esempi di laminati simmetrici sono i *laminati incrociati regolari*, costituiti da lamine aventi uguale spessore e materiale, ma orientati in maniera alternata di  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$  rispetto al sistema di riferimento del laminato (figura 2.30). Questi laminati sono formati necessariamente da un numero dispari di lamine, altrimenti si perderebbe la simmetria rispetto alla superficie media.

Inoltre, si vuol far notare che, qualora siano presenti lamine di “functionally graded material”, perché il laminato risulti simmetrico rispetto alla superficie media, occorre che le coppie di lamine corrispondenti siano caratterizzate dagli stessi costituenti e da leggi esponenziali simmetriche come riportato nello schema di figura 2.27. Infatti, la lamina al di sotto della superficie di riferimento è caratterizzata dalla seconda legge esponenziale  $FGM_2$ , mentre la corrispondente simmetrica dalla prima legge  $FGM_1$ . Il laminato risulta simmetrico anche invertendo di posizione le due lamine. Invece, nel caso in cui lamine corrispondenti presentino la stessa legge  $FGM_1$ , il laminato non risulta più simmetrico dal punto di vista del materiale e gli elementi della matrice di rigidezza d'accoppiamento flesso-membranale  $B_{ij}$  non sono identicamente nulli. In tal caso, le equazioni costitutive del laminato (2.253) possono porsi nella stessa forma delle equazioni (2.267).

#### *(c) Laminato simmetrico costituito da lamine anisotrope o monicline*

I laminati simmetrici costituiti da lamine anisotrope o monocline, orientate e non, risultano caratterizzati da rigidezze flesso-membranali  $B_{ij}$  nulle a causa della simmetria. In tal caso le costanti elastiche  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$  possono essere valutate mediante le equazioni (2.270), ricordando le relazioni (2.224) e (2.210), mentre le equazioni costitutive assumono lo stesso aspetto delle equazioni (2.267).

#### *2.2.4.4.3 Laminati antisimmetrici*

Sebbene i laminati simmetrici siano più semplici da analizzare dal punto di vista teorico, dato che le equazioni costitutive risultano notevolmente semplificate, in molte applicazioni essi non forniscono il comportamento meccanico desiderato. Per questo motivo si ricorre ai laminati antisimmetrici.

Una classe di laminati antisimmetrici è quella costituita dai laminati con un numero pari di lamine ortotrope, simmetriche rispetto alla superficie di riferimento. Esse devono avere ugual spessore e materiale e presentare orientazione alternata  $\theta/-\theta$ , con  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ . A causa dell'antisimmetria dello schema di laminazione (figura 2.31) e della simmetria dello spessore e del materiale di ogni coppia di lamine, i laminati antisimmetrici sono caratterizzati da rigidezze flesso-membranali  $B_{ij}$  non nulle, presentando invece le rigidezze  $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, A_{45}$  nulle.

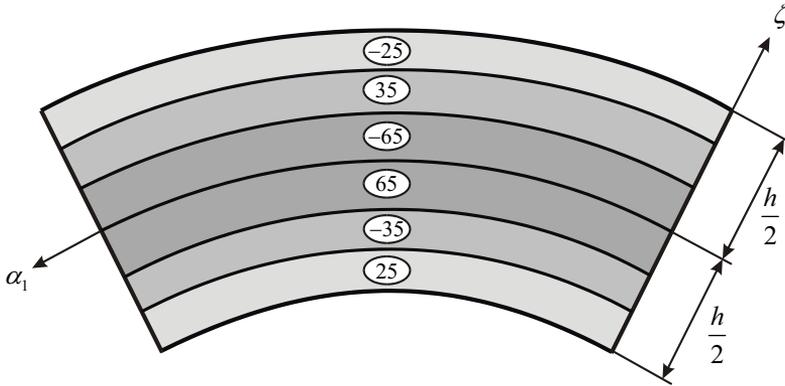


Figura 2.31 – Laminato antisimmetrico.

Di conseguenza, dalle (2.253) si ottengono le seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.275)$$

Di seguito vengono riportati particolari laminati antisimmetrici che presentano equazioni di legame semplificate rispetto alle (2.275).

(a) Laminato antisimmetrico costituito da lamine incrociate

Un caso particolare di laminato antisimmetrico è quello costituito da un numero pari di lamine ortotrope incrociate. Le lamine fibro-rinforzate sono orientate in maniera alternata di un angolo  $\theta = 0^\circ$  o  $\theta = 90^\circ$  rispetto al sistema di riferimento del laminato. In questo

modo, ad ogni lamina con fibre orientate di  $\theta = 0^\circ$  corrisponde, simmetricamente rispetto alla superficie media, una lamina con fibre orientate di  $\theta = 90^\circ$ , avente lo stesso spessore e materiale (figura 2.32). Per questi laminati gli elementi flesso-membranale  $B_{ij}$  della matrice di rigidezza sono tutti nulli tranne le costanti  $B_{11}, B_{22}$  legate dalla seguente proprietà:

$$B_{22} = -B_{11} \quad (2.276)$$

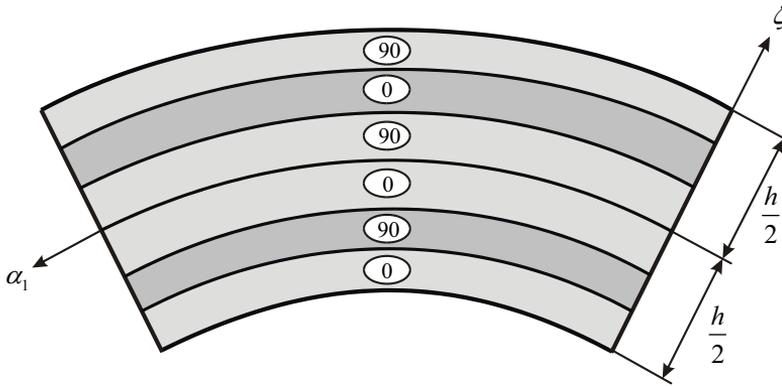


Figura 2.32 – Laminato antisimmetrico con lamine incrociate.

Pertanto, le equazioni costitutive (2.275) diventano:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.277)$$

(b) Laminato antisimmetrico costituito da lamine orientate

Un laminato antisimmetrico con lamine orientate è costituito da un numero pari di lamine ortotrope. Ad ogni lamina con fibre orientate di  $\theta$  corrisponde, simmetricamente rispetto alla superficie media, una lamina con fibre orientate di  $-\theta$ , avente lo stesso spessore e materiale (figura 2.33). Si noti che per una lamina caratterizzata da  $\theta = 0^\circ$ , la corrispondente lamina nello schema di laminazione risulta caratterizzata da  $\theta = -90^\circ$ , e viceversa. Per questi laminati si ha:

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0, \quad B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = 0 \quad (2.278)$$

e le equazioni costitutive (2.275) assumono l'aspetto:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.279)$$

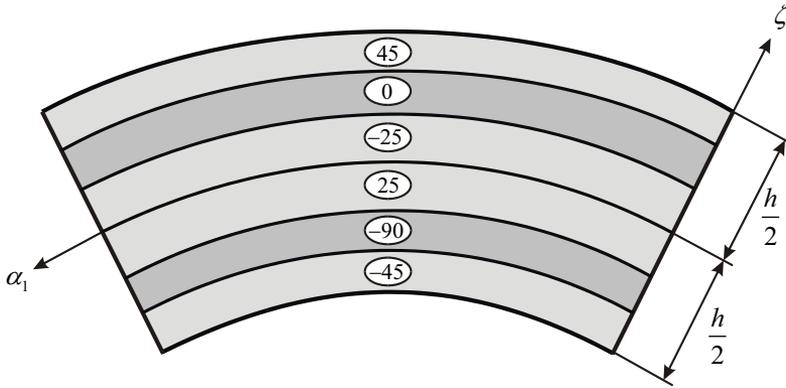


Figura 2.33 – Laminato antisimmetrico con lamine orientate.

#### 2.2.4.4.4 Laminati bilanciati e quasi isotropi

Un laminato è definito *bilanciato* se per ogni lamina genericamente orientata ne esiste, all'interno del laminato stesso, un'altra avente stesso spessore e materiale, con opposta orientazione delle fibre. Le due lamine non devono necessariamente essere simmetriche rispetto alla superficie media del laminato (figura 2.34). Per i laminati in parola gli elementi  $A_{16}$  e  $A_{26}$  della matrice  $A_{ij}$  sono nulli.

I laminati costituiti da tre o più lamine ortotrope di identico spessore e materiale, e sovrapposte in maniera che l'angolo relativo di orientazione delle fibre tra lamine adiacenti e consecutive si mantenga costante, risultano isotropi rispetto alla superficie media (figura 2.35). Infatti, si ha:  $A_{11} = A_{22}$ ,  $A_{66} = A_{11} - A_{12}/2$  e  $A_{16} = A_{26} = 0$ . Questi laminati sono denominati *quasi-isotropi*.

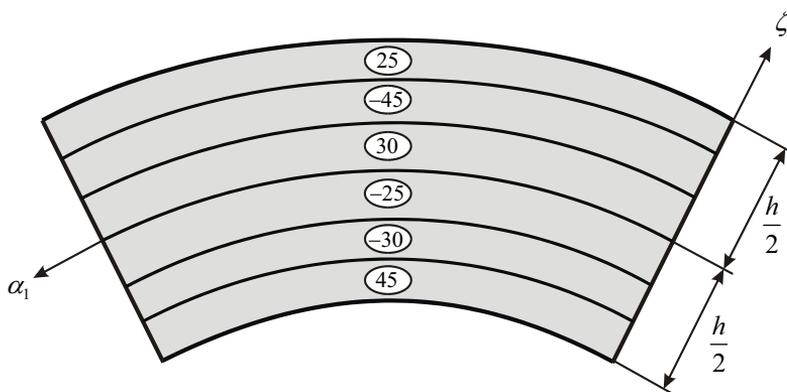


Figura 2.34 – Laminato bilanciato.

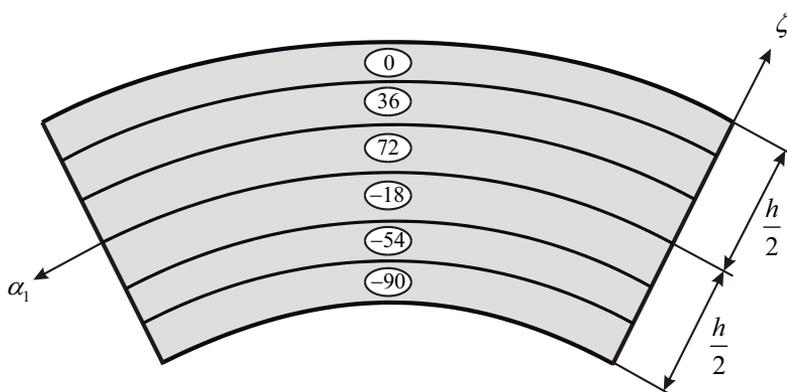


Figura 2.35 – Laminato quasi-isotropo.

## 2.2.5 EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

A questo punto è possibile stabilire le relazioni che esprimono l'equilibrio dinamico dell'elemento infinitesimo di guscio. Prima di effettuare questa operazione, risulta necessario alterare la definizione di elemento infinitesimo. Infatti, la distribuzione delle tensioni lungo lo spessore del guscio è stata sostituita con le risultanti delle azioni interne, definite sulla superficie di riferimento, al fine di trasformare l'iniziale problema di elasticità tridimensionale in un problema bidimensionale. D'ora in avanti, si assume che l'elemento infinitesimo di guscio di spessore  $d\zeta$  (figura 2.12) venga sostituito da un elemento di spessore costante  $h$ , in accordo con l'integrazione eseguita lungo  $\zeta$ . In generale, su questo elemento agiscono tutte le risultanti delle azioni interne definite precedentemente, oltre alle *forze esterne* che si possono pensare suddivise in *forze di*

volume e forze di superficie. Le sollecitazioni interne sono applicate lungo i bordi laterali dell'elemento infinitesimo (figura 2.23). Le forze di volume e le forze di superficie, invece, agiscono in ogni punto del volume e sulle superfici inferiore e superiore dell'elemento fondamentale, rispettivamente. Le risultanti degli sforzi interni sono definite per unità di lunghezza sulla superficie di riferimento. Pertanto, risulta opportuno trasformare anche le azioni esterne in forze staticamente equivalenti agenti sulla superficie media del guscio. Dette forze, denominate *azioni esterne generalizzate*, rappresentano le *variabili di sorgente* del problema e permettono di definire le equazioni che governano il comportamento di un guscio moderatamente spesso. Le equazioni indefinite di equilibrio verranno determinate seguendo due strade diverse: si sfrutta il *principio di Hamilton* verificandone i risultati attraverso il *metodo diretto*, o dell'equilibrio di un elemento infinitesimo.

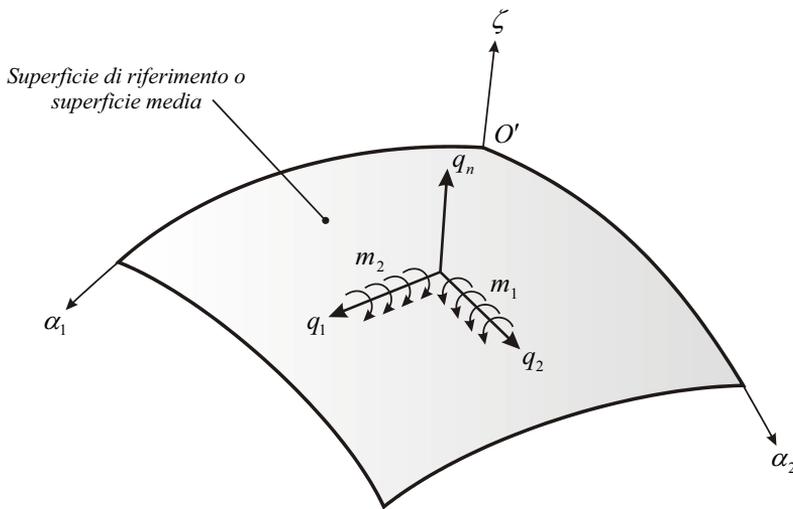


Figura 2.36 – Componenti del vettore delle azioni esterne generalizzate agenti sulla superficie di riferimento.

### 2.2.5.1 Vettore delle azioni esterne generalizzate

Il *vettore delle forze esterne generalizzate* include al suo interno tutti i possibili tipi di forze di volume e di superficie agenti su una porzione d'area unitaria della superficie di riferimento. Esso è il vettore algebrico duale del vettore degli spostamenti generalizzati (2.106). Nel riferimento adottato la sua definizione è fornita dalla seguente scrittura:

$$\mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2, t) = [q_1 \quad q_2 \quad q_n \quad m_1 \quad m_2]^T \quad (2.280)$$

dove  $q_1, q_2, q_n$  sono le componenti delle azioni esterne (agenti su un'area unitaria della

superficie media) nelle corrispondenti direzioni coordinate ortogonali  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ ;  $m_1, m_2$  rappresentano le coppie distribuite per unità di superficie associate alle corrispondenti rotazioni, mentre  $t$  indica la variabile temporale. In figura 2.36 sono riportate le componenti del vettore delle azioni esterne equivalenti agenti sulla superficie di riferimento.

### 2.2.5.2 Equazioni del moto mediante il principio di Hamilton

Le equazioni del moto per un guscio moderatamente spesso possono essere ricavate attraverso il *principio variazionale di Hamilton*. Esso è estremamente efficace, in quanto semplice ed elegante, permettendo di ricavare contemporaneamente sia le *equazioni indefinite di equilibrio* che le *condizioni naturali* o *statiche al contorno* del problema.

Si consideri come corpo elastico un guscio che cambi continuamente il suo stato tra due istanti consecutivi  $t_1$  e  $t_2$  e che sia in equilibrio sotto l'azione del *vettore delle forze di superficie*  $\mathbf{p}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$  e del *vettore delle forze di volume*  $\mathbf{f}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta)$ . Definita con  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_u + \mathcal{S}_p$  la superficie totale del guscio, generalmente si assume che le forze di superficie risultino note sulla porzione  $\mathcal{S}_p$  del corpo, mentre gli spostamenti siano imposti sulla porzione restante  $\mathcal{S}_u$ . Inoltre, sia  $\mathbf{U}$  il vettore spostamento nella configurazione di equilibrio e si consideri un arbitrario vettore spostamento  $\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}$  in cui la variazione  $\delta\mathbf{U}$  rappresenta un vettore, le cui componenti sono gli *spostamenti virtuali*. Sulla porzione di superficie  $\mathcal{S}_u$  il vettore  $\mathbf{U}$  è assegnato e quindi si ha  $\delta\mathbf{U} = \mathbf{0}$ . Sulla porzione di superficie  $\mathcal{S}_p$ , la variazione  $\delta\mathbf{U}$  risulta arbitraria. Il principio di Hamilton afferma che il percorso seguito dal corpo durante il processo dinamico in parola può esprimersi come segue:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T} - \Pi) dt = 0 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\delta\mathcal{T} - \delta\Pi) dt = 0 \quad (2.281)$$

dove  $\mathcal{T}$  indica l'*energia cinetica* del sistema,  $\Pi$  è l'*energia potenziale totale* e i termini  $\delta\mathcal{T}$ ,  $\delta\Pi$  rappresentano le rispettive variazioni. In altre parole, l'equazione (2.281) afferma che l'integrale tra  $t_1$  e  $t_2$  della funzione  $(\mathcal{T} - \Pi)$  possiede un valore estremo, che si può dimostrare essere un minimo. Nel caso in cui il processo sia statico (indipendenza del problema dal tempo), si ottiene il principio di minimo dell'energia potenziale totale:

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.282)$$

L'energia potenziale totale  $\Pi$  è definita dalla somma dell'*energia elastica di deformazione*  $\Phi$  e del *potenziale dei carichi esterni*  $H$  :

$$\Pi = \Phi + H \quad (2.283)$$

L'energia elastica di deformazione  $\Phi$  può essere espressa in termini di *densità di energia di deformazione*  $\phi$  (visto che si è fatta l'ipotesi di materiale elastico lineare), e il potenziale dei carichi  $H$  è dato dalla somma dei lavori, cambiati di segno, delle forze di superficie  $\mathbf{p}$  e dalle forze di volume  $\mathbf{f}$  :

$$\Phi = \int_{\mathcal{V}} \phi d\mathcal{V}, \quad \phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.284)$$

$$H = -L_e = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{p}^T \mathbf{U} d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^T \mathbf{U} d\mathcal{V} \quad (2.285)$$

L'energia cinetica  $\mathcal{T}$  è definita dalla relazione:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} d\mathcal{V} \quad (2.286)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale. Sostituendo le equazioni (2.284) e (2.285) all'interno dell'equazione (2.283) e il risultato così ottenuto nell'equazione (2.281), il principio di Hamilton può essere espresso nella forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \phi d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{p}^T \mathbf{U} d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^T \mathbf{U} d\mathcal{V} \right) dt = 0 \quad (2.287)$$

In notazione più compatta si può scrivere:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (\mathcal{T} - \Phi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta L_e dt = 0 \quad (2.288)$$

L'integrale di volume (2.286) può essere riscritto come integrale triplo nelle coordinate ortogonali del sistema locale  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ . Sostituendo al vettore  $\mathbf{U}$  la sua definizione (2.105) e sviluppando tutte le operazioni e semplificazioni, l'energia cinetica  $\mathcal{T}$  in termini di spostamenti generalizzati (variabili di configurazione) assume il seguente aspetto:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left( I_0 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) + 2I_1 (\dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\beta}_2) + I_2 (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.289)$$

dove i termini  $I_0, I_1, I_2$  prendono il nome di *masse inerziali* e sono definite nel modo seguente:

$$I_i = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \zeta^i \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\zeta, \quad i = 0, 1, 2 \quad (2.290)$$

dato che si sta considerando un guscio laminato costituito da  $l$  lamine. E' da notare che, quando la  $k$ -esima lamina è costituita da materiale "functionally graded", occorre eseguire l'integrazione lungo lo spessore, vista la dipendenza dalla variabile  $\zeta$  della densità del materiale  $\rho^{(k)}(\zeta)$  espressa nell'equazione (2.219). In tutti gli altri casi, le equazioni (2.290) diventano:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta = \sum_{k=1}^l \rho^{(k)} \left[ \zeta + \frac{\zeta^2}{2R_1} + \frac{\zeta^2}{2R_2} + \frac{\zeta^3}{3R_1R_2} \right]_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \\
 I_1 &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \zeta \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta = \sum_{k=1}^l \rho^{(k)} \left[ \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3R_1} + \frac{\zeta^3}{3R_2} + \frac{\zeta^4}{4R_1R_2} \right]_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \\
 I_2 &= \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \zeta^2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta = \sum_{k=1}^l \rho^{(k)} \left[ \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^4}{4R_1} + \frac{\zeta^4}{4R_2} + \frac{\zeta^5}{5R_1R_2} \right]_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}}
 \end{aligned} \tag{2.291}$$

In maniera analoga, dall'equazione (2.284) dell'energia elastica di deformazione  $\Phi$  risulta la seguente relazione:

$$\Phi = \int \int \int \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) A_1 A_2 \left(1 + \zeta/R_1\right) \left(1 + \zeta/R_2\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.292}$$

Avendo ipotizzato che tutte le forze di volume e di superficie agenti sul guscio possono essere sostituite da forze staticamente equivalenti, ma applicate sulla superficie di riferimento ( $\zeta = 0$ ), il lavoro compiuto dalle forze esterne (2.280) per gli spostamenti (2.106) risulta:

$$L_{e_1} = \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} \mathbf{q}^T \mathbf{u} ds_1(0) ds_2(0) = \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_n w + m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{2.293}$$

dove  $ds_1(0)$  e  $ds_2(0)$  sono date dalle equazioni (2.102). Nel definire il lavoro delle forze esterne occorre tenere in conto che le tensioni agenti nelle zone laterali di confine del guscio compiono anch'esse lavoro. Si dovrà aggiungere, quindi, il loro contributo al lavoro  $L_{e_1}$ . I contributi aggiuntivi sono due: uno relativo ai bordi laterali ad  $\alpha_1$  costante e l'altro riferito ai bordi laterali ad  $\alpha_2$  costante. Indicando con  $\bar{\sigma}_1, \bar{\tau}_{12}, \bar{\tau}_{1n}$  le tensioni agenti lungo il bordo ad  $\alpha_1$  costante e con  $\bar{\sigma}_2, \bar{\tau}_{21}, \bar{\tau}_{2n}$  le tensioni agenti lungo il bordo ad  $\alpha_2$  costante (figura 2.12), i suddetti contributi al lavoro complessivo  $L_e$  risultano i seguenti:

$$\begin{aligned}
 L_{e_2} &= \oint_{\alpha_2} \int_{\zeta} (\bar{\sigma}_1 U_1 + \bar{\tau}_{12} U_2 + \bar{\tau}_{1n} W) ds_2(\zeta) d\zeta = \\
 &= \oint_{\alpha_2} (\bar{N}_1 u_1 + \bar{N}_{12} u_2 + \bar{T}_1 w + \bar{M}_1 \beta_1 + \bar{M}_{12} \beta_2) A_2 d\alpha_2
 \end{aligned} \tag{2.294}$$

$$\begin{aligned}
 L_{e_3} &= \oint_{\alpha_1} \int_{\zeta} (\bar{\tau}_{21} U_1 + \bar{\sigma}_2 U_2 + \bar{\tau}_{2n} W) ds_1(\zeta) d\zeta = \\
 &= \oint_{\alpha_1} (\bar{N}_{21} u_1 + \bar{N}_2 u_2 + \bar{T}_2 w + \bar{M}_{21} \beta_1 + \bar{M}_2 \beta_2) A_1 d\alpha_1
 \end{aligned} \tag{2.295}$$

Le relazioni (2.294) e (2.295) sono state ottenute sostituendo le quantità  $ds_1(\zeta), ds_2(\zeta)$  e  $U_1, U_2, W$  definite dalle espressioni (2.102) e (2.105), rispettivamente, ed eseguendo l'integrazione lungo lo spessore. Inoltre, si è fatto uso della definizione delle caratteristiche della sollecitazione interna (2.250) e del fatto che le componenti di spostamento generalizzato sono indipendenti da  $\zeta$ . In definitiva, il lavoro complessivo compiuto dalle forze esterne risulta essere la somma dei tre contributi (2.293), (2.294) e (2.295):

$$L_e = L_{e_1} + L_{e_2} + L_{e_3} \tag{2.296}$$

\* \* \*

Di seguito vengono ricavate le espressioni dell'energia cinetica  $\mathcal{T}$  (2.289), dell'energia elastica di deformazione  $\Phi$  (2.292) e del lavoro delle forze esterne  $L_e$  (2.296) precedentemente introdotte. Ricordando le definizioni (2.102), (2.105) ed il fatto che il guscio in materiale composito è costituito da  $l$  lamine, per quanto riguarda l'energia cinetica  $\mathcal{T}$  si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} ds_1(\zeta) ds_2(\zeta) d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2 + \dot{W}^2) A_1 (1 + \zeta/R_1) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho \left( (\dot{u}_1 + \zeta \dot{\beta}_1)^2 + (\dot{u}_2 + \zeta \dot{\beta}_2)^2 + \dot{w}^2 \right) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho (\dot{u}_1^2 + 2\zeta \dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \zeta^2 \dot{\beta}_1^2 + \dot{u}_2^2 + 2\zeta \dot{u}_2 \dot{\beta}_2 + \zeta^2 \dot{\beta}_2^2 + \dot{w}^2) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} 2\rho \zeta (\dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\beta}_2) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho \zeta^2 (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left( \int_{\zeta} \rho (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\zeta \right) (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( \int_{\zeta} \rho \zeta (1 + \zeta/R_1)(1 + \zeta/R_2) d\zeta \right) (\dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\beta}_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( \int_{\zeta} \rho \zeta^2 (1 + \zeta/R_1)(1 + \zeta/R_2) d\zeta \right) (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 & = \frac{1}{2} \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( I_0 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) + 2I_1 (\dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\beta}_2) + I_2 (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \\
 \text{dove: } I_0 & = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\zeta = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} + \frac{\zeta}{R_2} + \frac{\zeta^2}{R_1 R_2} \right) d\zeta \\
 I_1 & = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \zeta \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\zeta = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \left( \zeta + \frac{\zeta^2}{R_1} + \frac{\zeta^2}{R_2} + \frac{\zeta^3}{R_1 R_2} \right) d\zeta \\
 I_2 & = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \zeta^2 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\zeta = \sum_{k=1}^l \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \rho^{(k)} \left( \zeta^2 + \frac{\zeta^3}{R_1} + \frac{\zeta^3}{R_2} + \frac{\zeta^4}{R_1 R_2} \right) d\zeta
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'energia elastica di deformazione  $\Phi$ , ricordando l'equazione (2.284) risulta:

$$\begin{aligned}
 \Phi & = \int_V \phi dV = \iiint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) ds_1(\zeta) ds_2(\zeta) d\zeta = \iiint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \left( \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right) A_1 (1 + \zeta/R_1) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 & = \iiint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_n \varepsilon_n + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{1n} \gamma_{1n} + \tau_{2n} \gamma_{2n}) A_1 (1 + \zeta/R_1) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il lavoro delle forze esterne  $L_e$ , ricordando le definizioni (2.102) e (2.105), si perviene al seguente risultato:

$$\begin{aligned}
 L_e & = L_{\alpha_1} + L_{\alpha_2} + L_{\alpha_3} = \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \mathbf{q}^T \mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, 0) ds_1(0) ds_2(0) + \\
 & \quad + \oint_{\alpha_2, \zeta} (\bar{\sigma}_1 U_1 + \bar{\tau}_{12} U_2 + \bar{\tau}_{1n} W) ds_2(\zeta) d\zeta + \oint_{\alpha_1, \zeta} (\bar{\tau}_{21} U_1 + \bar{\sigma}_2 U_2 + \bar{\tau}_{2n} W) ds_1(\zeta) d\zeta = \\
 & = \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \mathbf{q}^T \mathbf{u} ds_1(0) ds_2(0) + \oint_{\alpha_2, \zeta} (\bar{\sigma}_1 U_1 + \bar{\tau}_{12} U_2 + \bar{\tau}_{1n} W) ds_2(\zeta) d\zeta + \oint_{\alpha_1, \zeta} (\bar{\tau}_{21} U_1 + \bar{\sigma}_2 U_2 + \bar{\tau}_{2n} W) ds_1(\zeta) d\zeta = \\
 & = \iint_{\alpha_1, \alpha_2} (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_n w + m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & \quad + \oint_{\alpha_2, \zeta} (\bar{\sigma}_1 (u_1 + \zeta \beta_1) + \bar{\tau}_{12} (u_2 + \zeta \beta_2) + \bar{\tau}_{1n} w) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_2 d\zeta + \\
 & \quad + \oint_{\alpha_1, \zeta} (\bar{\tau}_{21} (u_1 + \zeta \beta_1) + \bar{\sigma}_2 (u_2 + \zeta \beta_2) + \bar{\tau}_{2n} w) A_1 (1 + \zeta/R_1) d\alpha_1 d\zeta = \\
 & = \iint_{\alpha_1, \alpha_2} (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_n w + m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & \quad + \oint_{\alpha_2} (\bar{N}_1 u_1 + \bar{N}_{12} u_2 + \bar{T}_1 w + \bar{M}_1 \beta_1 + \bar{M}_{12} \beta_2) A_2 d\alpha_2 + \oint_{\alpha_1} (\bar{N}_{21} u_1 + \bar{N}_2 u_2 + \bar{T}_2 w + \bar{M}_{21} \beta_1 + \bar{M}_2 \beta_2) A_1 d\alpha_1
 \end{aligned}$$

\* \* \*

Sulla base delle definizioni (2.288) e (2.296), il principio di Hamilton può essere riscritto come segue:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Phi) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta L_{e_1} + \delta L_{e_2} + \delta L_{e_3}) dt = 0 \quad (2.297)$$

Per valutare tutte le variazioni indicate nella relazione (2.297), occorre applicare le proprietà dell'operazione di variazione.

- 1) L'operazione di variazione e quella d'integrazione sono commutative. Quindi gli operatori  $\delta$  e  $\int$  possono scambiarsi di posizione:

$$\delta \int_x (\dots) dx = \int_x \delta (\dots) dx \quad (2.298)$$

- 2) L'operazione di variazione e quella di derivazione sono commutative. Quindi gli operatori  $\delta$  e  $\partial$  possono scambiarsi di posizione:

$$\delta \frac{\partial (\dots)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta (\dots) \quad (2.299)$$

- 3) L'operazione di variazione segue le stesse regole delle operazioni di derivazione e d'integrazione. In particolare, si ha quanto segue:

$$\begin{aligned} \delta f^n(x) &= n f^{n-1}(x) \delta f(x) \\ \delta (f(x)g(x)) &= (\delta f(x))g(x) + f(x)(\delta g(x)) \\ \delta \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{(\delta f(x))g(x) - f(x)(\delta g(x))}{g^2(x)} \end{aligned} \quad (2.300)$$

Partendo dall'equazione (2.297), la variazione dell'energia cinetica (2.289) assume l'aspetto:

$$\begin{aligned} \delta T = \int \int_{\alpha_1, \alpha_2} & \left( I_0 (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{w} \delta \dot{w}) + \right. \\ & \left. + I_1 (\dot{\beta}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_2 \delta \dot{\beta}_2) + I_2 (\dot{\beta}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{\beta}_2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (2.301)$$

La variazione dell'energia elastica di deformazione (2.292) risulta la seguente:

$$\delta \Phi = \int \int \int_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.302)$$

Ricordando le espressioni delle componenti di deformazione fornite dalle equazioni (2.136)-(2.141) e le definizioni delle caratteristiche della sollecitazione (2.250), l'espressione (2.302) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \delta \Phi = \int \int_{\alpha_1, \alpha_2} & \left( N_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \delta u_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w \right) + M_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \delta \beta_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \right. \\ & \left. + N_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_2} + \delta u_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta w \right) + M_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_2} + \delta \beta_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +N_{12} \left( A_2 \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_1} - \delta u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + M_{12} \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_1} - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\
 & +N_{21} \left( A_1 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_2} - \delta u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + M_{21} \left( A_1 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_2} - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) + \\
 & +T_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} - \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta u_1 + A_1 A_2 \delta \beta_1 \right) + \\
 & +T_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta u_2 + A_1 A_2 \delta \beta_2 \right) \Big) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.303)
 \end{aligned}$$

In maniera analoga le variazioni dei lavori delle forze esterne (2.293)-(2.295) ammettono la rappresentazione:

$$\delta L_{e_1} = \iint_{\alpha_1 \alpha_2} \left( q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_n \delta w + m_1 \delta \beta_1 + m_2 \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.304)$$

$$\delta L_{e_2} = \oint_{\alpha_2} \left( \bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{N}_{12} \delta u_2 + \bar{T}_1 \delta w + \bar{M}_1 \delta \beta_1 + \bar{M}_{12} \delta \beta_2 \right) A_2 d\alpha_2 \quad (2.305)$$

$$\delta L_{e_3} = \oint_{\alpha_1} \left( \bar{N}_{21} \delta u_1 + \bar{N}_2 \delta u_2 + \bar{T}_2 \delta w + \bar{M}_{21} \delta \beta_1 + \bar{M}_2 \delta \beta_2 \right) A_1 d\alpha_1 \quad (2.306)$$

\* \* \*

Di seguito vengono ricavate le espressioni delle variazioni dell'energia cinetica  $\delta \mathcal{T}$  (2.301), dell'energia elastica di deformazione  $\delta \Phi$  (2.303) e del lavoro delle forze esterne  $\delta L_{e_1}, \delta L_{e_2}, \delta L_{e_3}$  (2.304)-(2.306) precedentemente introdotte. Per quanto riguarda la variazione dell'energia elastica cinetica  $\delta \mathcal{T}$  si ha:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{T} &= \delta \left( \frac{1}{2} \iint_{\alpha_1 \alpha_2} \left( I_0 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) + 2I_1 (\dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\beta}_2) + I_2 (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{\alpha_1 \alpha_2} \delta \left( I_0 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{w}^2) + 2I_1 (\dot{u}_1 \dot{\beta}_1 + \dot{u}_2 \dot{\beta}_2) + I_2 (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 &= \iint_{\alpha_1 \alpha_2} \left( I_0 (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{w} \delta \dot{w}) + I_1 (\dot{\beta}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_2 \delta \dot{\beta}_2) + I_2 (\dot{\beta}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{\beta}_2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2
 \end{aligned}$$

La variazione della densità di energia elastica di deformazione per un corpo elastico assume l'aspetto  $\delta \phi = (\partial \phi / \partial \varepsilon_{ij}) \delta \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$  e, per ipotesi,  $w = w(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\varepsilon_n = 0$  e quindi  $\delta \varepsilon_n = 0$ . Pertanto, per la variazione dell'energia elastica di deformazione  $\delta \Phi$ , dalle definizioni (2.136)-(2.141) e (2.250), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi &= \delta \left( \iiint_{\alpha_1 \alpha_2 \zeta} \phi A_1 (1 + \zeta / R_1) A_2 (1 + \zeta / R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \right) = \iiint_{\alpha_1 \alpha_2 \zeta} \delta \phi A_1 (1 + \zeta / R_1) A_2 (1 + \zeta / R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 &= \iiint_{\alpha_1 \alpha_2 \zeta} (\sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \tau_{12} \delta \gamma_{12} + \tau_{1n} \delta \gamma_{1n} + \tau_{2n} \delta \gamma_{2n}) A_1 (1 + \zeta / R_1) A_2 (1 + \zeta / R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \sigma_1 \left( \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_2 + \frac{A_1}{R_1} \delta w \right) + \zeta \left( \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta \beta_2 \right) \right) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \sigma_2 \left( \left( \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_1 + \frac{A_2}{R_2} \delta w \right) + \zeta \left( \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta \beta_1 \right) \right) A_1 (1 + \zeta/R_1) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \tau_{12} \left( \left( \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \delta u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) (1 + \zeta/R_2) + \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \delta u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) (1 + \zeta/R_1) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \tau_{12} \zeta \left( \left( \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) (1 + \zeta/R_2) + \left( \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) (1 + \zeta/R_1) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \tau_{1n} \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} - \frac{\delta u_1}{R_1} + \delta \beta_1 \right) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2, \zeta} \tau_{2n} \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_2} - \frac{\delta u_2}{R_2} + \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 (1 + \zeta/R_1) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta = \\
 &= \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( N_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_2 + \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w \right) + M_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta \beta_2 \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( N_2 \left( A_1 \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_1 + \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta w \right) + M_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta \beta_1 \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( N_{12} \left( \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \delta u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + N_{21} \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \delta u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( M_{12} \left( \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + M_{21} \left( \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( T_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} - \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta u_1 + A_1 A_2 \delta \beta_1 \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( T_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta u_2 + A_1 A_2 \delta \beta_2 \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la variazione del lavoro compiuto dalle forze esterne  $\delta L_{e_1}, \delta L_{e_2}, \delta L_{e_3}$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e &= \delta L_{e_1} + \delta L_{e_2} + \delta L_{e_3} \\
 &= \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \delta (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_n w + m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \oint_{\alpha_2, \zeta} \delta (\bar{\sigma}_1 (u_1 + \zeta \beta_1) + \bar{\tau}_{12} (u_2 + \zeta \beta_2) + \bar{\tau}_{1n} w) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_2 d\zeta + \\
 &+ \oint_{\alpha_1, \zeta} \delta (\bar{\tau}_{21} (u_1 + \zeta \beta_1) + \bar{\sigma}_2 (u_2 + \zeta \beta_2) + \bar{\tau}_{2n} w) A_1 (1 + \zeta/R_1) d\alpha_1 d\zeta = \\
 &= \iint_{\alpha_1, \alpha_2} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_n \delta w + m_1 \delta \beta_1 + m_2 \delta \beta_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 &+ \oint_{\alpha_2} (\bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{N}_{12} \delta u_2 + \bar{T}_1 \delta w + \bar{M}_1 \delta \beta_1 + \bar{M}_{12} \delta \beta_2) A_2 d\alpha_2 + \\
 &+ \oint_{\alpha_1} (\bar{N}_{21} \delta u_1 + \bar{N}_2 \delta u_2 + \bar{T}_2 \delta w + \bar{M}_{21} \delta \beta_1 + \bar{M}_2 \delta \beta_2) A_1 d\alpha_1
 \end{aligned}$$

\* \* \*

Prima di definire le equazioni del moto e le condizioni al contorno attraverso il principio di Hamilton occorre integrare le variazioni sopra calcolate. Ricordando la proprietà commutativa dell'operazione di integrazione e la regola fondamentale di *integrazione per parti*, che consente di eliminare le derivate fatte rispetto al tempo delle variazioni presenti nell'espressione di  $\delta\mathcal{T}$  e di rimuovere le derivate degli spostamenti virtuali dall'espressione di  $\delta\Phi$ , si ha:

$$\int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx} g(x) dx \quad (2.307)$$

Integrando per parti nell'intervallo temporale  $[t_1, t_2]$  la variazione dell'energia cinetica  $\delta\mathcal{T}$  (2.301), si perviene al risultato:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{T} dt = & \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} \left( (I_0 \dot{u}_1 + I_1 \dot{\beta}_1) \delta u_1 + (I_0 \dot{u}_2 + I_1 \dot{\beta}_2) \delta u_2 + I_0 \dot{w} \delta w + \right. \\ & \left. + (I_1 \dot{u}_1 + I_2 \dot{\beta}_1) \delta \beta_1 + (I_1 \dot{u}_2 + I_2 \dot{\beta}_2) \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Big|_{t_1}^{t_2} + \\ & - \int \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} \left( (I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1) \delta u_1 + (I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2) \delta u_2 + I_0 \ddot{w} \delta w + \right. \\ & \left. + (I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1) \delta \beta_1 + (I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2) \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \end{aligned} \quad (2.308)$$

Il primo termine risulta identicamente nullo, visto che per ipotesi, gli spostamenti virtuali generalizzati vengono assunti nulli negli istanti di tempo  $t_1, t_2$ . In altre parole, si sta trattando con moti sincroni ( $\delta \dots(t_1) = \delta \dots(t_2) = 0$ ).

Integrando nell'intervallo temporale  $[t_1, t_2]$  la variazione dell'energia elastica di deformazione  $\delta\Phi$  (2.303) e sviluppando tutti i passaggi, l'energia elastica di deformazione  $\Phi$  può essere riscritta nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta\Phi dt = & - \int \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} \left( \left( \frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} \right) \delta u_1 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} \right) \delta u_2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) A_1 A_2 \right) \delta w + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{\partial(M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 A_1 A_2 \right) \delta \beta_1 + \\
 & + \left( \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2 A_1 A_2 \right) \delta \beta_2 \Big) d\alpha_1 d\alpha_2 dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_1} \left( N_{21} \delta u_1 + N_2 \delta u_2 + T_2 \delta w + M_{21} \delta \beta_1 + M_2 \delta \beta_2 \right) A_1 d\alpha_1 dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_2} \left( N_1 \delta u_1 + N_{12} \delta u_2 + T_1 \delta w + M_1 \delta \beta_1 + M_{12} \delta \beta_2 \right) A_2 d\alpha_2 dt \quad (2.309)
 \end{aligned}$$

Integrando nell'intervallo temporale  $[t_1, t_2]$  le variazioni dei lavori  $\delta L_{e_1}, \delta L_{e_2}, \delta L_{e_3}$  (2.304), (2.305), (2.306), si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L_{e_1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left( q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_n \delta w + m_1 \delta \beta_1 + m_2 \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \quad (2.310)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L_{e_2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_2} \left( \bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{N}_{12} \delta u_2 + \bar{T}_1 \delta w + \bar{M}_1 \delta \beta_1 + \bar{M}_{12} \delta \beta_2 \right) A_2 d\alpha_2 dt \quad (2.311)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L_{e_3} dt = \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_1} \left( \bar{N}_{21} \delta u_1 + \bar{N}_2 \delta u_2 + \bar{T}_2 \delta w + \bar{M}_{21} \delta \beta_1 + \bar{M}_2 \delta \beta_2 \right) A_1 d\alpha_1 dt \quad (2.312)$$

\* \* \*

Di seguito vengono ricavate le espressioni dell'energia cinetica  $\mathcal{T}$  (2.308) e dell'energia elastica di deformazione  $\Phi$  (2.309) sopra riportate. Partendo dall'energia cinetica  $\mathcal{T}$  e ricordando che gli spostamenti virtuali generalizzati vengono assunti nulli negli istanti di tempo  $t_1, t_2$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{T} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left( I_0 \left( \dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{w} \delta \dot{w} \right) + I_1 \left( \dot{\beta}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_2 \delta \dot{\beta}_2 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + I_2 \left( \dot{\beta}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{\beta}_2 \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt = \\
 &= \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{t_1}^{t_2} \left( I_0 \left( \dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{w} \delta \dot{w} \right) + I_1 \left( \dot{\beta}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_2 \delta \dot{\beta}_2 \right) + \right. \\
 & \quad \left. + I_2 \left( \dot{\beta}_1 \delta \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \delta \dot{\beta}_2 \right) \right) dt \Big) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 &= \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left( I_0 \left( \dot{u}_1 \delta u_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_1 \delta u_1 dt + \dot{u}_2 \delta u_2 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_2 \delta u_2 dt + \dot{w} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt \right) + \right. \\
 & \quad \left. + I_1 \left( \dot{\beta}_1 \delta u_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_1 \delta u_1 dt + \dot{u}_1 \delta \beta_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_1 \delta \beta_1 dt + \dot{\beta}_2 \delta u_2 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_2 \delta u_2 dt + \dot{u}_2 \delta \beta_2 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_2 \delta \beta_2 dt \right) + \right. \\
 & \quad \left. + I_2 \left( \dot{\beta}_1 \delta \beta_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_1 \delta \beta_1 dt + \dot{\beta}_2 \delta \beta_2 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_2 \delta \beta_2 dt \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + I_2 \left( \dot{\beta}_1 \delta \beta_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\beta}_1 \delta \beta_1 dt + \dot{\beta}_2 \delta \beta_2 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\beta}_2 \delta \beta_2 dt \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \\
 = & \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( I_0 \left( - \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{w} \delta w) dt \right) + I_1 \left( - \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{\beta}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_1 \delta \beta_1 + \ddot{\beta}_2 \delta u_2 + \ddot{u}_2 \delta \beta_2) dt \right) + \right. \\
 & \left. + I_2 \left( - \int_{t_1}^{t_2} (\ddot{\beta}_1 \delta \beta_1 + \ddot{\beta}_2 \delta \beta_2) dt \right) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \\
 = & - \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( I_0 (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{w} \delta w) + I_1 (\ddot{\beta}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_1 \delta \beta_1 + \ddot{\beta}_2 \delta u_2 + \ddot{u}_2 \delta \beta_2) + \right. \\
 & \left. + I_2 (\ddot{\beta}_1 \delta \beta_1 + \ddot{\beta}_2 \delta \beta_2) \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \\
 = & - \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( (I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1) \delta u_1 + (I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2) \delta u_2 + I_0 \ddot{w} \delta w + \right. \\
 & \left. + (I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1) \delta \beta_1 + (I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2) \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt
 \end{aligned}$$

Integrando per parti i termini contenuti nell'energia elastica di deformazione  $\Phi$  si ricava:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta \Phi dt = & \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( N_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_2 + \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w \right) + M_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta \beta_2 \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \\
 & + \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( N_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_1 + \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta w \right) + M_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta \beta_1 \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \\
 & + \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( N_{12} \left( \frac{\partial \delta u_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \delta u_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + N_{21} \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \delta u_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \\
 & + \iint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( M_{12} \left( \frac{\partial \delta \beta_2}{\partial \alpha_1} A_2 - \delta \beta_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + M_{21} \left( \frac{\partial \delta \beta_1}{\partial \alpha_2} A_1 - \delta \beta_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \\
 & + \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} T_1 \left( A_2 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_1} - \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta u_1 + A_1 A_2 \delta \beta_1 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \\
 & + \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} T_2 \left( A_1 \frac{\partial \delta w}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta u_2 + A_1 A_2 \delta \beta_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt = \\
 = & \int_{t_1}^{t_2} \left( \oint_{\alpha_2} N_1 A_2 \delta u_1 d\alpha_2 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial (N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} \delta u_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} N_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta w d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_2} M_1 A_2 \delta \beta_1 d\alpha_2 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial (M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} \delta \beta_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta \beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_1} N_2 A_1 \delta u_2 d\alpha_1 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial (N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} \delta u_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_1 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} N_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta w d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_1} M_2 A_1 \delta \beta_2 d\alpha_1 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial (M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} \delta \beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta \beta_1 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_2} N_{12} A_2 \delta u_2 d\alpha_2 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial (N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} \delta u_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_1 d\alpha_1 d\alpha_2 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \oint_{\alpha_1} N_{21} A_1 \delta u_1 d\alpha_1 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} \delta u_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_2} M_{12} A_2 \delta \beta_2 d\alpha_2 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} \delta \beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta \beta_1 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_1} M_{21} A_1 \delta \beta_1 d\alpha_1 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} \delta \beta_1 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta \beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_2} T_1 A_2 \delta w d\alpha_2 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} \delta w d\alpha_1 d\alpha_2 \right) - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} \delta u_1 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} T_1 A_1 A_2 \delta \beta_1 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + \left( \oint_{\alpha_1} T_2 A_1 \delta w d\alpha_1 - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} \delta w d\alpha_1 d\alpha_2 \right) - \iint_{\alpha_1, \alpha_2} T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} \delta u_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{\alpha_1, \alpha_2} T_2 A_1 A_2 \delta \beta_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Big) dt \\
 = & - \iiint_{t_1, \alpha_1, \alpha_2} \left( \left( \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} \right) \delta u_1 + \right. \\
 & + \left( \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} \right) \delta u_2 + \\
 & + \left( \frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_{12}}{R_1} + \frac{N_{21}}{R_2} \right) A_1 A_2 \right) \delta w + \\
 & + \left( \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 A_1 A_2 \right) \delta \beta_1 + \\
 & + \left. \left( \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2 A_1 A_2 \right) \delta \beta_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_1} (N_{21} \delta u_1 + N_{12} \delta u_2 + T_2 \delta w + M_{21} \delta \beta_1 + M_{12} \delta \beta_2) A_1 d\alpha_1 dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_2} (N_{12} \delta u_1 + N_{21} \delta u_2 + T_1 \delta w + M_{12} \delta \beta_1 + M_{21} \delta \beta_2) A_2 d\alpha_2 dt
 \end{aligned}$$

\* \* \*

Una volta esplicitati tutti i termini che compaiono nell'equazione (2.297), è possibile scrivere in forma estesa il principio di Hamilton. Effettuando la sostituzione degli integrali (2.308), (2.309) e (2.310)-(2.312) nell'espressione (2.297) e raccogliendo si perviene al risultato:

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\alpha_1, \alpha_2} \left( \left( \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) A_1 A_2 \right) \delta u_1 + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) A_1 A_2 \right) \delta u_2 + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_{12}}{R_1} + \frac{N_{21}}{R_2} \right) A_1 A_2 \right) \delta w + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 A_1 A_2 \right) \delta \beta_1 + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2 A_1 A_2 \right) \delta \beta_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) A_1 A_2 + (q_n - I_0 \ddot{w}) A_1 A_2 \right) \delta w + \\
 & + \left( \frac{\partial(M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 A_1 A_2 + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) A_1 A_2 \right) \delta \beta_1 + \\
 & + \left( \frac{\partial(M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2 A_1 A_2 + (m_2 - I_1 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) A_1 A_2 \right) \delta \beta_2 \Big) d\alpha_1 d\alpha_2 dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_1} \left( (\bar{N}_{21} - N_{21}) \delta u_1 + (\bar{N}_2 - N_2) \delta u_2 + (\bar{T}_2 - T_2) \delta w + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (\bar{M}_{21} - M_{21}) \delta \beta_1 + (\bar{M}_2 - M_2) \delta \beta_2 \right) A_1 d\alpha_1 dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\alpha_2} \left( (\bar{N}_1 - N_1) \delta u_1 + (\bar{N}_{12} - N_{12}) \delta u_2 + (\bar{T}_1 - T_1) \delta w + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (\bar{M}_1 - M_1) \delta \beta_1 + (\bar{M}_{12} - M_{12}) \delta \beta_2 \right) A_2 d\alpha_2 dt = 0 \quad (2.313)
 \end{aligned}$$

L'espressione (2.313) risulta soddisfatta solo se tutti i coefficienti moltiplicativi di ogni singola variazione sono nulli, essendo le variazioni  $\delta u_1, \delta u_2, \delta w, \delta \beta_1, \delta \beta_2$  degli spostamenti generalizzati arbitrarie. Dall'annullamento dei coefficienti in parola si ottengono le *equazioni indefinite di equilibrio*, oppure *equazioni di Eulero-Lagrange*, dette anche *equazioni del moto*, nonché le *condizioni al contorno* per un guscio moderatamente spesso in materiale anisotropo. Si ricavano così cinque equazioni del moto:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} + q_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1) \\
 & \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} + q_2 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2) \\
 & \frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) A_1 A_2 + q_n A_1 A_2 = A_1 A_2 I_0 \ddot{w} \\
 & \frac{\partial(M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 A_1 A_2 + m_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(M_{12}A_2)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(M_2A_1)}{\partial\alpha_2} + M_{21}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} - M_1\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} - T_2A_1A_2 + m_2A_1A_2 = A_1A_2(I_1\ddot{u}_2 + I_2\ddot{\beta}_2) \quad (2.314)$$

Si vuol far rilevare che le cinque equazioni (2.314) non riflettono ancora le due ipotesi di simmetria delle caratteristiche della sollecitazione  $N_{12} = N_{21}$  e  $M_{12} = M_{21}$ . Esiste una sesta equazione indefinita di equilibrio deducibile dall'annullamento dei momenti attorno alla normale all'elemento infinitesimo. Quest'ultima equazione non discende dal principio di Hamilton e risulta identicamente soddisfatta in base all'ipotesi introdotte ed al modello cinematico assunto:

$$\frac{M_{21}}{R_2} - \frac{M_{12}}{R_1} + N_{21} - N_{12} = 0 \quad (2.315)$$

Nella forma attuale l'equazione (2.315) non è verificata, se non per gusci sferici ( $R_1 = R_2$ ), per piastre ( $R_1 = R_2 = \infty$ ) e per gusci di rivoluzione caricati in maniera assial-simmetrica ( $N_{12} = N_{21} = M_{12} = M_{21} = 0$ ). Questa apparente inconsistenza, può essere superata, considerando le definizioni di  $N_{12}, N_{21}, M_{12}, M_{21}$  (2.250). Infatti, l'equazione (2.315) può essere riscritta nella seguente forma integrale:

$$\int_{\zeta} (1 + \zeta/R_1)(1 + \zeta/R_2)(\tau_{12} - \tau_{21})d\zeta = 0 \quad (2.316)$$

L'equazione (2.316) risulta verificata per la simmetria del tensore degli sforzi ( $\tau_{12} = \tau_{21}$ ). Si vuol far rilevare che questo risultato discende dal modello cinematico adottato (2.105). Infatti, è stata trascurata la rotazione attorno alla normale  $\mathbf{n}$ . Pertanto, l'equilibrio alla rotazione attorno alla normale  $\mathbf{n}$  deve essere identicamente soddisfatto.

Per quanto esposto, il comportamento di un guscio moderatamente spesso in materiale anisotropo è completamente definito dalle cinque equazioni del moto (2.314). Le prime tre equazioni (2.314) rappresentano l'equilibrio lungo le tangenti  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  alle linee coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$  e l'equilibrio lungo la direzione normale  $\mathbf{n}$ , rispettivamente, mentre le ultime due (2.314) definiscono l'equilibrio alla rotazione attorno alle direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$ , rispettivamente.

Visto che anche gli ultimi due integrali delle equazioni (2.314) devono essere nulli per il principio di Hamilton, si ha:

$$\begin{aligned}
 (\bar{N}_2 - N_2) \delta u_2 &= 0 & (\bar{N}_1 - N_1) \delta u_1 &= 0 \\
 (\bar{N}_{21} - N_{21}) \delta u_1 &= 0 & (\bar{N}_{12} - N_{12}) \delta u_2 &= 0 \\
 (\bar{T}_2 - T_2) \delta w &= 0 & (\bar{T}_1 - T_1) \delta w &= 0 \\
 (\bar{M}_2 - M_2) \delta \beta_2 &= 0 & (\bar{M}_1 - M_1) \delta \beta_1 &= 0 \\
 (\bar{M}_{21} - M_{21}) \delta \beta_1 &= 0 & (\bar{M}_{12} - M_{12}) \delta \beta_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.317}$$

Le condizioni naturali al contorno su un bordo ad  $\alpha_1$  costante sono:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_1 = N_1 & \quad \text{oppure} \quad u_1 = \bar{u}_1 \\
 \bar{N}_{12} = N_{12} & \quad \text{oppure} \quad u_2 = \bar{u}_2 \\
 \bar{T}_1 = T_1 & \quad \text{oppure} \quad w = \bar{w} \\
 \bar{M}_1 = M_1 & \quad \text{oppure} \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1 \\
 \bar{M}_{12} = M_{12} & \quad \text{oppure} \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.318}$$

mentre su un bordo ad  $\alpha_2$  costante risultano:

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{21} = N_{21} & \quad \text{oppure} \quad u_1 = \bar{u}_1 \\
 \bar{N}_2 = N_2 & \quad \text{oppure} \quad u_2 = \bar{u}_2 \\
 \bar{T}_2 = T_2 & \quad \text{oppure} \quad w = \bar{w} \\
 \bar{M}_{21} = M_{21} & \quad \text{oppure} \quad \beta_1 = \bar{\beta}_1 \\
 \bar{M}_2 = M_2 & \quad \text{oppure} \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.319}$$

Le grandezze  $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_{21}, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_{21}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$  indicano le sollecitazioni e gli spostamenti imposti al contorno, rispettivamente. Combinando in maniera opportuna le equazioni (2.318) o (2.319) si possono ricavare tutte le tipologie di vincolamento possibili lungo i quattro bordi laterali del guscio.

### 2.2.5.3 Equazioni del moto dedotte mediante il metodo diretto

Le equazioni indefinite di equilibrio possono essere ottenute anche mediante il *metodo diretto*, cioè imponendo l'equilibrio di un elemento infinitesimo. Si consideri un elemento fondamentale di guscio (figura 2.12) e si definisca il sistema di riferimento ortogonale locale  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$ . L'elemento in parola è delimitato superiormente ed inferiormente da due superfici poste ad una distanza  $h$  l'una rispetto all'altra, oltre che da quattro sezioni perpendicolari alla superficie di riferimento nelle direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Si supponga che sull'elemento infinitesimo agiscano tutte le componenti delle azioni

esterne rappresentate dal vettore delle azioni esterne generalizzate  $\mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2, t)$  e dalle varie componenti della sollecitazione interna applicate sulle facce laterali lungo i bordi della superficie di riferimento. Si considerino anche le sollecitazioni indotte dalle forze inerziali associate alle varie componenti di spostamento generalizzato. L'elemento descritto e corredato da tutte le azioni considerate è riportato nelle figure 2.37, 2.38 e 2.39.

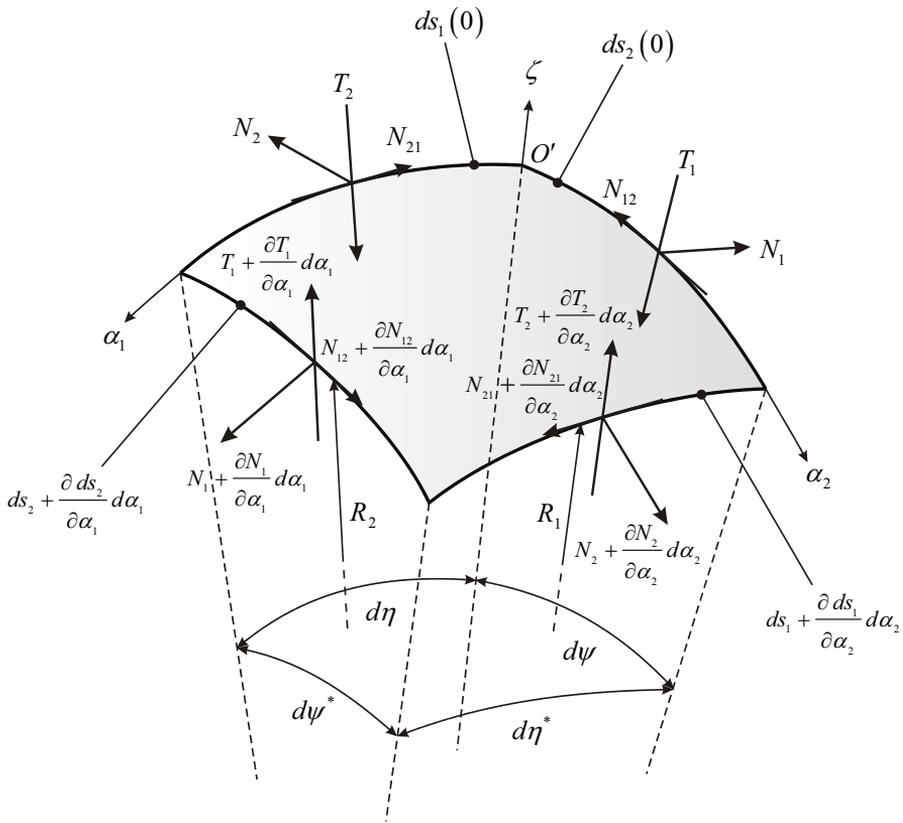


Figura 2.37 – Elemento fondamentale sollecitato dagli sforzi di membrana e di taglio.

Nella prima sono riportati gli sforzi di membrana e di taglio, nella seconda le coppie interne flettenti e torcenti e nella terza i carichi esterni unitamente alle forze inerziali.

Le caratteristiche di sollecitazione sono applicate sulla superficie di riferimento dell'elemento di guscio ed i rispettivi incrementi sono rappresentati sulle facce di normale positiva. Le azioni interne sono definite per unità di lunghezza dell'arco posto sulla superficie di riferimento e le loro definizioni sono riportate nelle equazioni (2.250). Come assunto in precedenza, l'elemento fondamentale viene sostituito dalla superficie media e tutte le azioni agenti sono riferite ad essa. L'elemento infinitesimo è individuato da quattro

archi di curva posti sulla superficie di equazione  $\zeta = 0$ , e la loro estensione può essere definita sfruttando le equazioni (2.102). Gli archi di curva lungo le linee coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$  hanno lunghezza  $ds_1(0) = A_1 d\alpha_1$  e  $ds_2(0) = A_2 d\alpha_2$ , rispettivamente, mentre i restanti due presenteranno un incremento infinitesimo rispetto ad essi. Per ogni arco di curva in parola è possibile definire la rispettiva apertura angolare. Siano  $d\eta, d\psi$  le due aperture lungo le linee del riferimento  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $d\eta^*, d\psi^*$  le aperture incrementali.

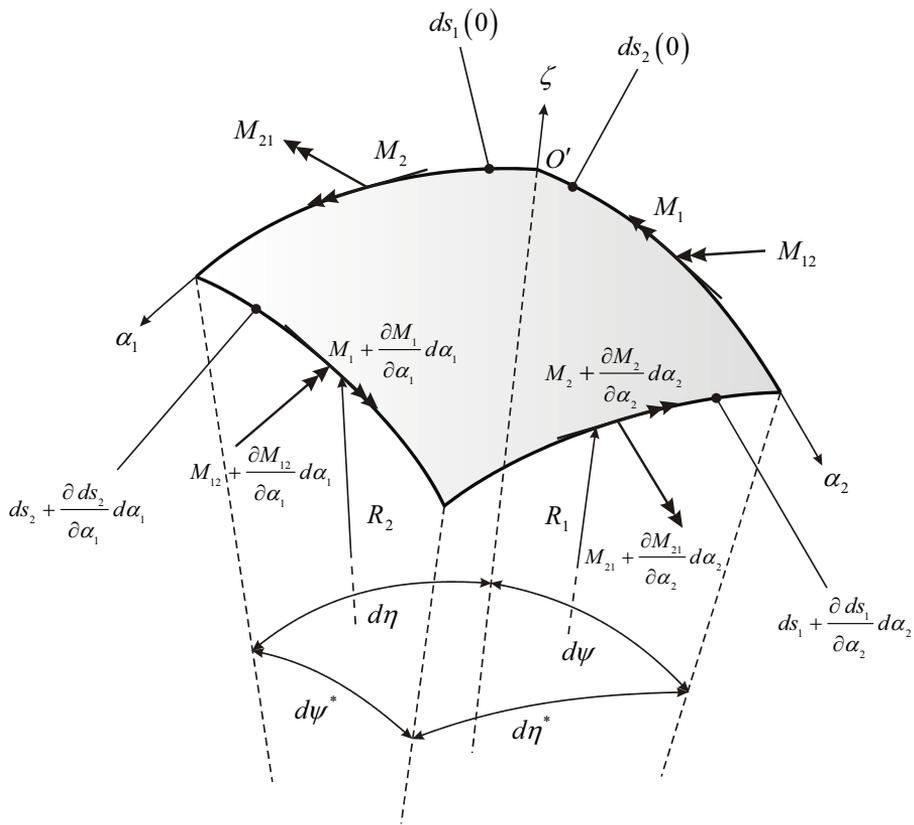


Figura 2.38 – Elemento fondamentale sollecitato dalle coppie interne.

Entrambe le coppie di aperture introdotte descrivono angoli infinitesimi. Di conseguenza è lecito assumere che il coseno di uno qualsiasi degli angoli menzionati risulti pari all'unità e che il seno di  $d\eta$  o di  $d\psi$  sia confondibile con il seno di  $d\eta^*$  o di  $d\psi^*$ , rispettivamente. Per l'ipotesi di spostamenti infinitesimi, è sempre possibile approssimare il seno di un angolo piccolo con il valore dell'angolo stesso. E' quindi lecito introdurre le seguenti semplificazioni:

$$\sin d\eta^* \cong \sin d\eta \cong d\eta, \quad \cos d\eta^* \cong \cos d\eta \cong 1, \quad d\eta = ds_1(0)/R_1 \quad (2.320)$$

$$\sin d\psi^* \cong \sin d\psi \cong d\psi, \quad \cos d\psi^* \cong \cos d\psi \cong 1, \quad d\psi = ds_2(0)/R_2 \quad (2.321)$$

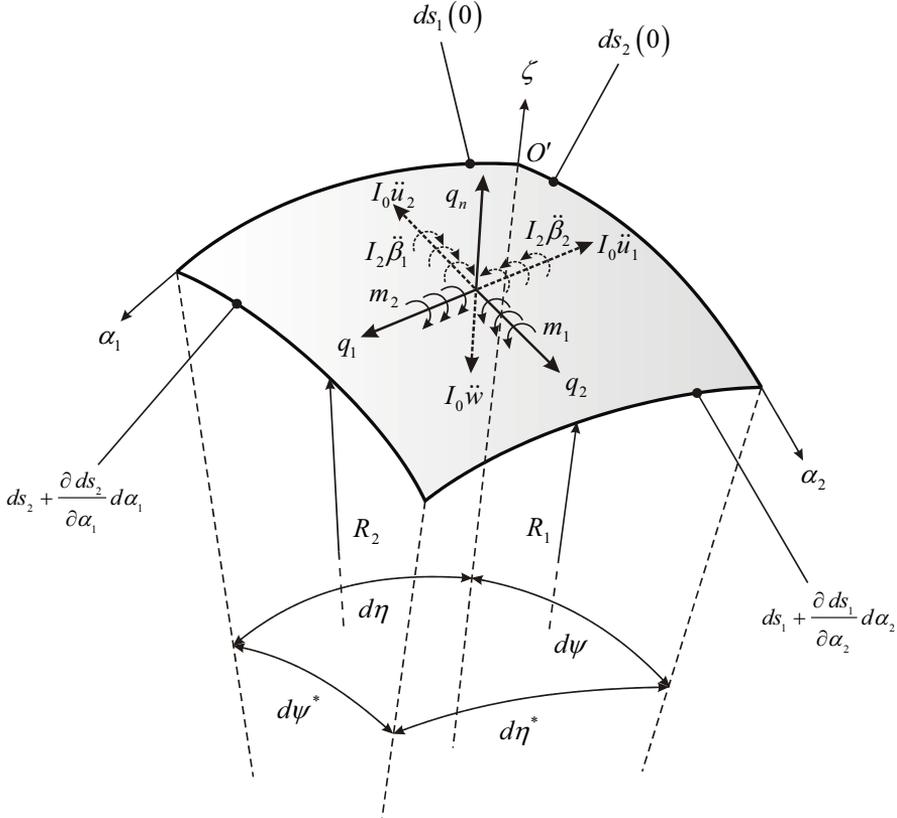


Figura 2.39 – Elemento fondamentale sollecitato dai carichi esterni e dalle azioni inerziali.

Sviluppando in pianta la superficie di riferimento (figura 2.40), essa definisce un'area quadrangolare in cui solo un angolo risulta retto  $A\hat{O}B$ . Infatti, a causa della differenza infinitesima tra le lunghezze degli archi posti lungo la medesima direzione, i due angoli  $O'\hat{A}C$  e  $O'\hat{B}C$  risultano superiori all'angolo retto di quantità molto piccole che vengono indicate con  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , rispettivamente, mentre l'angolo  $A\hat{C}B$ , opposto all'angolo retto  $A\hat{O}B$ , è più piccolo di quest'ultimo della somma  $\gamma_1 + \gamma_2$ . Questo è causa del mancato allineamento degli sforzi membranali incrementali rispetto alle direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2$ , come mostrato in figura 2.40.

L'area della superficie di riferimento dell'elemento fondamentale risulta data dalla

somma tra il prodotto delle lunghezze  $ds_1, ds_2$  ed altre quantità di ordine superiore che possono essere trascurate. L'area in parola può essere valutata attraverso il prodotto  $ds_1 \cdot ds_2$  in modo del tutto lecito, visto che gli incrementi di lunghezza sono infinitesimi. A questo punto è possibile studiare attraverso il metodo diretto l'equilibrio dell'elemento infinitesimo. Di seguito, si scrivono gli equilibri alla traslazione lungo le tre direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$  e gli equilibri alla rotazione attorno agli assi coordinati  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ .

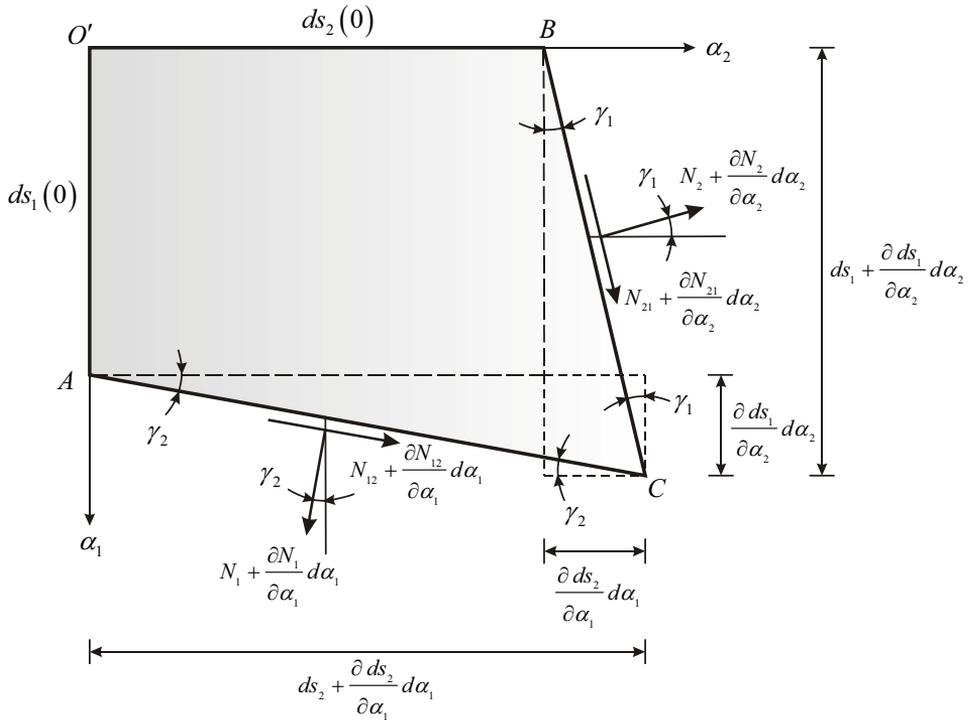


Figura 2.40 – Interpretazione planimetrica dell'elemento infinitesimo.

(a) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_1$ :

Dalle figure 2.37, 2.39 e 2.40 attraverso considerazioni geometriche si evince l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned}
 & -N_1 ds_2 \cos \frac{d\eta}{2} + \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \cos \frac{d\eta^*}{2} - N_{21} ds_1 + \\
 & + \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) - \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 + T_1 ds_2 \sin \frac{d\eta}{2} + \\
 & + \left( T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \frac{d\eta^*}{2} + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \quad (2.322)
 \end{aligned}$$

Dalla relazione (2.322), effettuando le opportune semplificazioni in base alle ipotesi precedentemente esposte, si perviene alla prima equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} + q_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1) \quad (2.323)$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_2$ :*

In maniera analoga, dalle figure 2.37, 2.39 e 2.40 attraverso considerazioni geometriche si ricava l'equazione di equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned}
 & -N_2 ds_1 \cos \frac{d\psi}{2} + \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \cos \frac{d\psi^*}{2} - N_{12} ds_2 + \\
 & + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) - \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 + \\
 & + \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + T_2 ds_1 \sin \frac{d\psi}{2} + \\
 & + \left( T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \frac{d\psi^*}{2} + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \quad (2.324)
 \end{aligned}$$

Dalla relazione (2.324), effettuando le opportune semplificazioni in base alle ipotesi precedentemente esposte, la seconda equazione indefinita di equilibrio assume la forma seguente:

$$\frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} + q_2 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2) \quad (2.325)$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$ :*

Dalle figure 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40 attraverso considerazioni geometriche l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  risulta:

$$-N_1 ds_2 \sin \frac{d\eta}{2} - \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \frac{d\eta^*}{2} - N_2 ds_1 \sin \frac{d\psi}{2} +$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \frac{d\psi^*}{2} - T_1 ds_2 \cos \frac{d\eta}{2} + \\
 & + \left( T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \cos \frac{d\eta^*}{2} - T_2 ds_1 \cos \frac{d\psi}{2} + \\
 & + \left( T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \cos \frac{d\psi^*}{2} + (q_n - I_0 \ddot{w}) ds_1 ds_2 = 0 \quad (2.326)
 \end{aligned}$$

Dalla relazione (2.326), si ottiene la terza equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) A_1 A_2 + q_n A_1 A_2 = A_1 A_2 I_0 \ddot{w} \quad (2.327)$$

(d) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_1$  :*

Dalle figure 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40 attraverso considerazioni geometriche ed imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_1$  si ha:

$$\begin{aligned}
 & -M_1 ds_2 + \left( M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) - M_{21} ds_1 + \\
 & + \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) - \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + \\
 & + \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 - T_1 ds_2 \frac{ds_1}{2} \cos \frac{d\eta}{2} + \\
 & - \left( T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2} \cos \frac{d\eta^*}{2} + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \quad (2.328)
 \end{aligned}$$

Dall'equazione (2.328), effettuando le opportune semplificazioni, si ricava la quarta equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial(M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 A_1 A_2 + m_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1) \quad (2.329)$$

(e) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_2$  :*

Dalle figure 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40 attraverso considerazioni geometriche ed imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_2$  si può scrivere:

$$M_2 ds_1 - \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) + M_{12} ds_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) + \left( M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 + \\
 & - \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + T_2 ds_1 \frac{ds_2}{2} \cos \frac{d\psi}{2} + \\
 & + \left( T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2} \cos \frac{d\psi^*}{2} - (m_2 - I_1 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \quad (2.330)
 \end{aligned}$$

Dall'equazione (2.330) si deduce la quinta equazione indefinita di equilibrio:

$$\frac{\partial (M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2 A_1 A_2 + m_2 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2) \quad (2.331)$$

(f) *Equilibrio alla rotazione attorno direzione coordinata  $\zeta$  :*

Dalle figure 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40 attraverso considerazioni geometriche imponendo l'equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\zeta$  si ricava:

$$\begin{aligned}
 & N_{12} ds_2 \frac{ds_1}{2} + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2} - N_{21} ds_1 \frac{ds_2}{2} + \\
 & - \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2} + M_{12} ds_2 \sin \frac{d\eta}{2} + \\
 & + \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \frac{d\eta^*}{2} - M_{21} ds_1 \sin \frac{d\psi}{2} + \\
 & - \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \frac{d\psi^*}{2} = 0 \quad (2.332)
 \end{aligned}$$

Dall'equazione (2.332) si perviene alla la sesta equazione indefinita di equilibrio:

$$N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (2.333)$$

\* \* \*

Vengono di seguito dimostrate le sei equazioni indefinite di equilibrio (2.314)-(2.315) ottenute per via diretta.

*Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_1$  :*

$$-N_1 ds_2 \cos \frac{d\eta}{2} + \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \cos \frac{d\eta^*}{2} - N_{21} ds_1 + \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 + T_1 ds_2 \sin \frac{d\eta}{2} + \\
 & + \left( T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \frac{d\eta^*}{2} + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \left( N_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) + \left( N_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) - \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \\
 & + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \left( 2T_1 ds_2 + T_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) \frac{d\eta}{2} + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \left( N_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 + \left( N_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 - N_2 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + N_{12} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \\
 & + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \left( 2T_1 ds_2 + \left( T_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2R_1} + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial(N_1 ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial(N_{21} ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - N_2 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + N_{12} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \\
 & + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + T_1 \frac{ds_1 ds_2}{R_1} + \frac{\partial(T_1 ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \frac{ds_1}{2R_1} + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + (q_1 - I_0 \ddot{u}_1 - I_1 \ddot{\beta}_1) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \\
 & \frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + T_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} + q_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1)
 \end{aligned}$$

Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_2$  :

$$\begin{aligned}
 & -N_2 ds_1 \cos \frac{d\psi}{2} + \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \cos \frac{d\psi^*}{2} - N_{12} ds_2 + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) + \\
 & - \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 + \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + T_2 ds_1 \sin \frac{d\psi}{2} + \\
 & + \left( T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \frac{d\psi^*}{2} + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \left( N_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) + \left( N_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) - \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \\
 & + \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \left( 2T_2 ds_1 + T_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) \frac{d\psi}{2} + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \left( N_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 + \left( N_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 - N_1 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + N_{21} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \\
 & + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \left( 2T_2 ds_1 + \left( T_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2R_2} + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial(N_2 ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial(N_{12} ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - N_1 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + N_{21} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \\
 & + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + T_2 \frac{ds_1 ds_2}{R_2} + \frac{\partial(T_2 ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \frac{ds_2}{2R_2} + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + (q_2 - I_0 \ddot{u}_2 - I_1 \ddot{\beta}_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(N_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + T_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} + q_2 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2)$$

Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned} & -N_1 ds_2 \sin \frac{d\eta}{2} - \left( N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \frac{d\eta^*}{2} - \left( N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \frac{d\psi^*}{2} + \\ & -N_2 ds_1 \sin \frac{d\psi}{2} - T_1 ds_2 \cos \frac{d\eta}{2} + \left( T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \cos \frac{d\eta^*}{2} - T_2 ds_1 \cos \frac{d\psi}{2} + \\ & + \left( T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \cos \frac{d\psi^*}{2} + (q_n - I_0 \ddot{w}) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left( 2N_1 ds_2 + N_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) \frac{d\eta}{2} - \left( 2N_2 ds_1 + N_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) \frac{d\psi}{2} + \\ & + \left( T_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) + \left( T_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) + (q_n - I_0 \ddot{w}) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \left( 2N_1 ds_2 + \left( N_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2R_1} - \left( 2N_2 ds_1 + \left( N_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2R_2} + \\ & + \left( T_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 + \left( T_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 + (q_n - I_0 \ddot{w}) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -N_1 \frac{ds_1 ds_2}{R_1} - \frac{\partial(N_1 ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \frac{ds_1}{2R_1} - N_2 \frac{ds_1 ds_2}{R_2} - \frac{\partial(N_2 ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \frac{ds_2}{2R_2} + \\ & + \frac{\partial(Q_2 ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial(Q_2 ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + (q_n - I_0 \ddot{w}) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 - N_1 \frac{A_1 A_2}{R_1} d\alpha_1 d\alpha_2 - N_2 \frac{A_1 A_2}{R_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + (q_n - I_0 \ddot{w}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0$$

$$\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} - \left( \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) A_1 A_2 + q_n A_1 A_2 = I_0 A_1 A_2 \ddot{w}$$

Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} & -M_1 ds_2 + \left( M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) - M_{21} ds_1 + \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) + \\ & - \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 + \\ & - T_1 ds_2 \frac{ds_1}{2} \cos \frac{d\eta}{2} - \left( T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2} \cos \frac{d\eta^*}{2} + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( M_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) + \left( M_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) - \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \\ & + \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - \left( 2T_1 ds_2 + T_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) \frac{ds_1}{2} + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( M_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 + \left( M_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 - M_2 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & + M_{12} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 - \left( 2T_1 ds_2 + \left( T_1 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2} + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial (M_1 ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial (M_{21} ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - M_2 \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + M_{12} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \\
 & + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 - T_1 ds_1 ds_2 - \frac{\partial (T_1 ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \frac{ds_1}{2} + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial (M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial (M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & - T_1 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + (m_1 - I_1 \ddot{u}_1 - I_2 \ddot{\beta}_1) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \\
 & \frac{\partial (M_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (M_{21} A_1)}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_1 A_1 A_2 + m_1 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1)
 \end{aligned}$$

Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_2$  :

$$\begin{aligned}
 & M_2 ds_1 - \left( M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) + M_{12} ds_2 - \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) + \\
 & + \left( M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \gamma_2 - \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \gamma_1 + \\
 & + T_2 ds_1 \frac{ds_2}{2} \cos \frac{d\psi}{2} + \left( T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2} \cos \frac{d\psi}{2} - (m_2 - I_2 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & - \left( M_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) - \left( M_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) + \left( M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \\
 & - \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \left( 2T_2 ds_1 + T_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) \frac{ds_2}{2} - (m_2 - I_2 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & - \left( M_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 - \left( M_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 + M_1 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & - M_{21} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \left( 2T_2 ds_1 + \left( T_2 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2} - (m_2 - I_2 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial (M_2 ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial (M_{12} ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 - M_1 \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 - \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + M_{21} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \\
 & + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 - T_2 ds_1 ds_2 - \frac{\partial (T_2 ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \frac{ds_2}{2} + (m_2 - I_2 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) ds_1 ds_2 = 0 \\
 & \frac{\partial (M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + \frac{\partial (M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_1 d\alpha_2 + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
 & - T_2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + (m_2 - I_2 \ddot{u}_2 - I_2 \ddot{\beta}_2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \\
 & \frac{\partial (M_2 A_1)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (M_{12} A_2)}{\partial \alpha_1} - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_2 A_1 A_2 + m_2 A_1 A_2 = A_1 A_2 (I_2 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2)
 \end{aligned}$$

Equilibrio alla rotazione attorno direzione coordinata  $\zeta$  :

$$N_{12} ds_2 \frac{ds_1}{2} + \left( N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2} - N_{21} ds_1 \frac{ds_2}{2} - \left( N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2} +$$

$$\begin{aligned}
 & +M_{12}ds_2 \sin \frac{d\eta}{2} + \left( M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \left( ds_2 + \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \right) \sin \frac{d\eta^*}{2} - M_{21}ds_1 \sin \frac{d\psi}{2} + \\
 & - \left( M_{21} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \left( ds_1 + \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \right) \sin \frac{d\psi^*}{2} = 0 \\
 & \left( 2N_{12}ds_2 + N_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) \frac{ds_1}{2} - \left( 2N_{21}ds_1 + N_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) \frac{ds_2}{2} + \\
 & + \left( 2M_{12}ds_2 + M_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 ds_2 \right) \frac{d\eta}{2} - \left( 2M_{21}ds_1 + M_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 ds_1 \right) \frac{d\psi}{2} = 0 \\
 & \left( 2N_{12}ds_2 + \left( N_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2} - \left( 2N_{21}ds_1 + \left( N_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2} + \\
 & + \left( 2M_{12}ds_2 + \left( M_{12} \frac{\partial ds_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} ds_2 \right) d\alpha_1 \right) \frac{ds_1}{2R_1} - \left( 2M_{21}ds_1 + \left( M_{21} \frac{\partial ds_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} ds_1 \right) d\alpha_2 \right) \frac{ds_2}{2R_2} = 0 \\
 & N_{12}ds_1 ds_2 + \frac{\partial(N_{12}ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \frac{ds_1}{2} - N_{21}ds_1 ds_2 - \frac{\partial(N_{21}ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \frac{ds_2}{2} + \\
 & + M_{12} \frac{ds_1 ds_2}{R_1} + \frac{\partial(M_{12}ds_2)}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 \frac{ds_1}{2R_1} - M_{21} \frac{ds_1 ds_2}{R_2} - \frac{\partial(M_{21}ds_1)}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 \frac{ds_2}{2R_2} = 0 \\
 & N_{12}A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - N_{21}A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + M_{12} \frac{A_1 A_2}{R_1} d\alpha_1 d\alpha_2 - M_{21} \frac{A_1 A_2}{R_2} d\alpha_1 d\alpha_2 = 0 \\
 & N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0
 \end{aligned}$$

\* \* \*

## 2.2.6 EQUAZIONI FONDAMENTALI

Nel paragrafo precedente si sono ricavate tutte le equazioni che governano il comportamento di un guscio moderatamente spesso in materiale anisotropo. In particolare, risultano espresse le 5 equazioni del moto (2.314), o equazioni indefinite di equilibrio, le 8 equazioni di legame tra le caratteristiche della sollecitazione interna e le caratteristiche della deformazione (2.253) e le 8 equazioni di congruenza (2.156)-(2.163), che legano le caratteristiche della deformazione e le componenti generalizzate di spostamento, o gradi di libertà del problema. In totale sono state definite 21 equazioni in funzione di 21 variabili. Il problema risulta ben posto e può essere risolto una volta specificate tutte le condizioni al contorno, unitamente alle condizioni iniziali.

Se si introducono le equazioni di congruenza (2.156)-(2.163) all'interno delle equazioni di legame (2.253) ed il risultato così ottenuto viene inserito nelle equazioni indefinite di equilibrio, è possibile descrivere il comportamento del generico guscio attraverso le equazioni indefinite di equilibrio espresse in termini di componenti generalizzate di

spostamento, ossia in funzione dei gradi di libertà del problema. Le equazioni che derivano da questa serie di sostituzioni concatenate prendono il nome di *equazioni fondamentali*. Esse racchiudono, in un unico *sistema fondamentale*, i tre aspetti del problema dell'equilibrio elastico di un guscio moderatamente spesso in materiale anisotropo, ovvero *congruenza, legame ed equilibrio dinamico*.

Le equazioni di congruenza (2.156)-(2.163) possono essere riscritte in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.334)$$

ed in notazione compatta:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.335)$$

dove  $\mathbf{u}(\alpha_1, \alpha_2, t)$  è il vettore delle componenti generalizzate di spostamento,  $\boldsymbol{\eta}(\alpha_1, \alpha_2, t)$  il vettore delle caratteristiche della deformazione e  $\mathbf{D}$  l'*operatore di congruenza*.

Le equazioni di legame elastico, qui di seguito riportate per comodità, hanno la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_{12} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.336)$$

e la notazione compatta:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\eta} \quad (2.337)$$

dove  $\mathbf{S}(\alpha_1, \alpha_2, t)$  è il vettore delle caratteristiche della sollecitazione ed  $\mathbf{E}$  l'operatore di costitutivo o matrice di rigidezza. Ricordando che per ipotesi  $N_{12} = N_{21}$  e  $M_{12} = M_{21}$ , le equazioni indefinite di equilibrio (2.314) assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{N_1 - N_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{T_1}{R_1} + q_1 = I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1 \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{N_2 - N_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{T_2}{R_2} + q_2 = I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2 \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_2}{\partial \alpha_2} + \frac{T_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{T_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = I_0 \ddot{w} \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{M_1 - M_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - T_1 + m_1 = I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1 \\
 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_2}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{M_2 - M_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - T_2 + m_2 = I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.338}$$

Le equazioni (2.338) si possono scrivere in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\
 \frac{1}{R_1} & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & -1 & 0 \\
 0 & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & 0 & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{w} \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix}
 \tag{2.339}$$

ed in notazione compatta ammettono la rappresentazione:

$$\mathbf{D}^* \mathbf{S} + \mathbf{q} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.340}$$

dove  $\mathbf{D}^*$  è l'operatore di equilibrio o di bilancio,  $\mathbf{M}$  la matrice delle masse inerziali,  $\ddot{\mathbf{u}}(\alpha_1, \alpha_2, t)$  il vettore delle accelerazioni e  $\mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2, t)$  il vettore delle azioni esterne.

Introducendo ora l'equazione di congruenza (2.335) all'interno dell'equazione di legame (2.337) e il risultato ottenuto nell'equazione di equilibrio (2.340), si ha:

$$\mathbf{D}^* \mathbf{S} + \mathbf{q} = \mathbf{D}^* \mathbf{E} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{q} = \mathbf{D}^* \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.341}$$

Definendo infine l'operatore fondamentale  $\mathbf{L} = \mathbf{D}^* \mathbf{E} \mathbf{D}$ , l'equazione (2.341) assume

l'aspetto:

$$\mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.342)$$

In particolare, sfruttando la notazione compatta (2.16), le equazioni indefinite di equilibrio (2.342) in termini di spostamenti generalizzati possono essere scritte in forma estesa:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_1$ :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_1} \left( \frac{A_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_{16}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{B_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} (A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1) \right)_{,1} + \\ & \quad + \frac{1}{A_2} \left( \frac{A_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_{66}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{B_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} (A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1) \right)_{,2} + \\ & \quad + \left( \frac{A_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_{66}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{B_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{B_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} (A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1) \right) \frac{2A_{1,2}}{A_1 A_2} + \\ & \quad + \left( \left( \frac{A_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{A_{16}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{B_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \Big) + \\
 & - \left( \frac{A_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{A_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & \left. + \frac{B_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \right) \Big) \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} + \\
 & + \frac{\kappa}{R_1} \left( \frac{A_{44}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{45}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) + \\
 & + q_1 = I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1 \tag{2.343}
 \end{aligned}$$

(b) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_2$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \left( \frac{A_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{A_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & \left. + \frac{B_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \right)_{,1} + \\
 & + \frac{1}{A_2} \left( \frac{A_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{A_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & \left. + \frac{B_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \right)_{,2} + \\
 & + \left( \frac{A_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{A_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \frac{2A_{2,1}}{A_1 A_2} + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \right. \\
 & + \frac{A_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{B_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \left. \right) + \\
 & - \left( \frac{A_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{A_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{B_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \left. \right) \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} + \\
 & + \frac{\kappa}{R_2} \left( \frac{A_{45}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{55}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) + \\
 & + q_2 = I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2 \tag{2.344}
 \end{aligned}$$

(c) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \left( \kappa \left( \frac{A_{44}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{45}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) \right)_{,1} + \\
 & + \frac{1}{A_2} \left( \kappa \left( \frac{A_{45}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{55}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) \right)_{,2} + \\
 & + \left( \kappa \left( \frac{A_{44}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{45}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) \right) \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} + \\
 & + \left( \kappa \left( \frac{A_{45}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{55}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) \right) \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{1}{R_1} \left( \frac{A_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \right) + \right. \\
 & + \frac{A_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{B_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) + \\
 & + \frac{1}{R_2} \left( \frac{A_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{A_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \right) + \\
 & + \frac{A_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{B_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & \left. + \frac{B_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \right) + \\
 & + q_n = I_0 \ddot{w} \tag{2.345}
 \end{aligned}$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_1$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \left( \frac{B_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{D_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & \left. + \frac{D_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \right)_{,1} + \\
 & + \frac{1}{A_2} \left( \frac{B_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{D_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & \left. + \frac{D_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \right)_{,2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{B_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \right) + \\
 & + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{D_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{D_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{66}}{A_1 A_2} (A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1) \left) \frac{2A_{1,2}}{A_1 A_2} + \right. \\
 & + \left( \left( \frac{B_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \right) \right. + \\
 & + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{D_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \left. \frac{D_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{16}}{A_1 A_2} (A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1) \right) + \\
 & - \left( \frac{B_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \right) + \\
 & + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{D_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \left. \frac{D_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{26}}{A_1 A_2} (A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1) \right) \left) \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} + \right. \\
 & - \kappa \left( \frac{A_{44}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{45}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) + \\
 & + m_1 = I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1 \tag{2.346}
 \end{aligned}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_2$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1} \left( \frac{B_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) \right) + \\
 & + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} (A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1) + \frac{D_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{D_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \Bigg)_{,1} + \\
 & + \frac{1}{A_2} \left( \frac{B_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{D_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{D_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \Bigg)_{,2} + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{26}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{B_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{D_{16}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{D_{26}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{66}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \Bigg) \frac{2A_{2,1}}{A_1 A_2} + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{12}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{22}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \right. \\
 & + \frac{B_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{D_{12}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{D_{22}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{26}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \Bigg) + \\
 & - \left( \frac{B_{11}}{A_1} \left( u_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} u_2 + \frac{A_1}{R_1} w \right) + \frac{B_{12}}{A_2} \left( u_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} u_1 + \frac{A_2}{R_2} w \right) + \right. \\
 & + \frac{B_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 u_{2,1} - A_{2,1} u_2 + A_1 u_{1,2} - A_{1,2} u_1 \right) + \frac{D_{11}}{A_1} \left( \beta_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} \beta_2 \right) + \\
 & + \frac{D_{12}}{A_2} \left( \beta_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} \beta_1 \right) + \frac{D_{16}}{A_1 A_2} \left( A_2 \beta_{2,1} - A_{2,1} \beta_2 + A_1 \beta_{1,2} - A_{1,2} \beta_1 \right) \Bigg) \Bigg) \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\kappa \left( \frac{A_{45}}{A_1} \left( w_{,1} - \frac{A_1}{R_1} u_1 + A_1 \beta_1 \right) + \frac{A_{55}}{A_2} \left( w_{,2} - \frac{A_2}{R_2} u_2 + A_2 \beta_2 \right) \right) + \\
 & + m_2 = I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.347}$$

Raccogliendo i termini che moltiplicano le componenti del vettore spostamento, le relazioni del sistema fondamentale (2.343)-(2.347) possono porsi nella seguente forma contratta:

$$\begin{aligned}
 L_{11} u_1 + L_{12} u_2 + L_{13} w + L_{14} \beta_1 + L_{15} \beta_2 + q_1 &= I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1 \\
 L_{21} u_1 + L_{22} u_2 + L_{23} w + L_{24} \beta_1 + L_{25} \beta_2 + q_2 &= I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2 \\
 L_{31} u_1 + L_{32} u_2 + L_{33} w + L_{34} \beta_1 + L_{35} \beta_2 + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 L_{41} u_1 + L_{42} u_2 + L_{43} w + L_{44} \beta_1 + L_{45} \beta_2 + m_1 &= I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1 \\
 L_{51} u_1 + L_{52} u_2 + L_{53} w + L_{54} \beta_1 + L_{55} \beta_2 + m_2 &= I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2
 \end{aligned} \tag{2.348}$$

oppure in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{w} \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} \tag{2.349}$$

dove  $L_{ij}$  rappresenta la componente generica dell'operatore fondamentale  $\mathbf{L}$ .

Le variabili e le equazioni del problema dell'equilibrio elastico di un guscio in materiale anisotropo, considerate in questo paragrafo, possono essere riassunte nello *schema delle teorie fisiche*. La figura 2.41 illustra anche l'espressione del vettore *quantità di moto* per unità di superficie:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \tag{2.350}$$

come equazione costitutiva, essendo:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \tag{2.351}$$

l'equazione di definizione del *vettore velocità*. Il *vettore delle forze inerziali* per unità di superficie che appare nell'equazione fondamentale (2.342), è definito dalla derivata temporale di  $\mathbf{\Lambda}$ , cambiata di segno:

$$\mathbf{f}_I = -\frac{\partial \mathbf{\Lambda}}{\partial t} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.352}$$

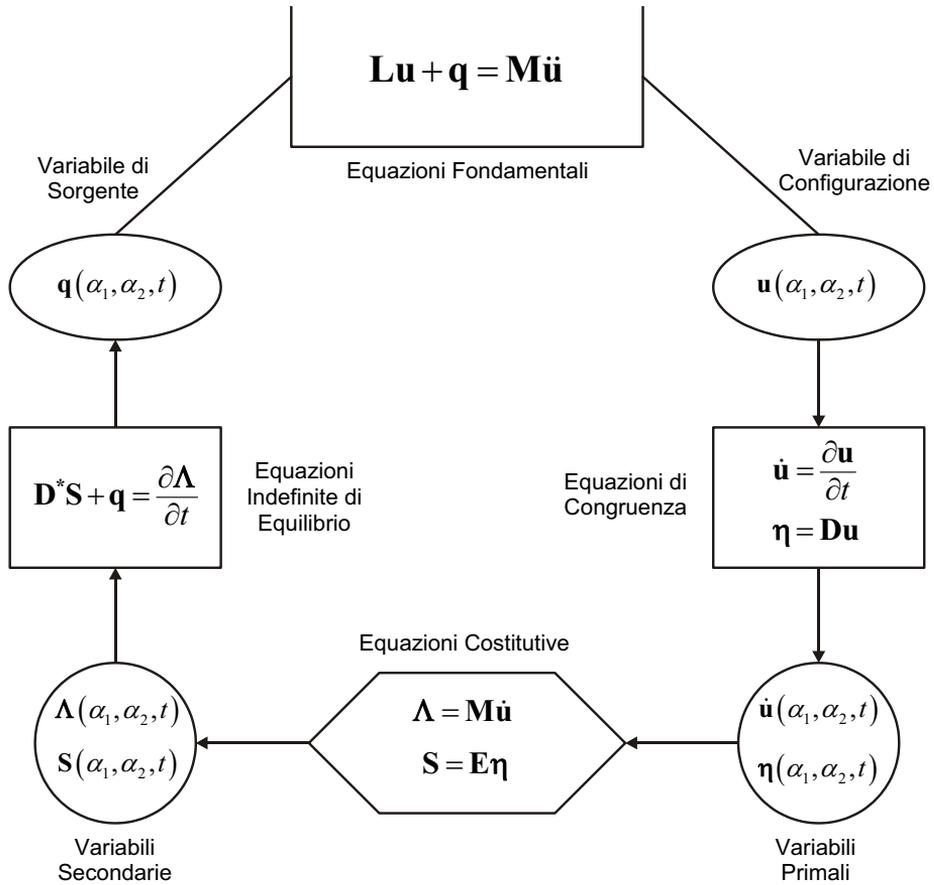


Figura 2.41 – Schema delle teorie fisiche (o diagramma di Tonti).

## 2.2.7 SPECIALIZZAZIONE DEI RISULTATI PER GUSCI DI RIVOLUZIONE

Le equazioni fondamentali ricavate per i gusci di forma generica possono, attraverso considerazioni geometriche, essere specializzate ai gusci di rivoluzione. Un guscio di rivoluzione non è altro che una particolare struttura a doppia curvatura, la cui superficie di riferimento è identificata da una superficie di rivoluzione e cioè da una superficie ottenibile per rotazione di una curva piana, denominata *generatrice*, attorno ad un asse appartenente al piano stesso della curva, che prende il nome di *asse di rivoluzione*.

La forma di un guscio di rivoluzione risulta completamente definita una volta nota l'equazione cartesiana della *curva meridiana* o *di meridiano*. Definito il sistema di riferimento globale  $Ox_1x_2x_3$ , l'equazione della curva di meridiano può essere individuata dalla funzione  $R_0 = R_0(x_3)$ , dove  $R_0$  rappresenta il *raggio di parallelo* alla quota  $x_3$ .

Si vuol far rilevare che l'asse di rivoluzione  $x_3$  può non coincidere con l'asse geometrico  $x'_3$ , descrivente la curva generatrice. In tal caso la struttura risulta caratterizzata da un offset  $R_b$  dell'asse di rivoluzione  $x_3$  rispetto all'asse geometrico  $x'_3$  della curva generatrice (figura 2.42).

Per descrivere la superficie di riferimento di una struttura di rivoluzione si può assumere un sistema di coordinate cilindriche  $\alpha_1 = x_3$  e  $\alpha_2 = \vartheta$ . Tuttavia, questa scelta, come pure il sistema di coordinate  $\alpha_1 = s_1$  e  $\alpha_2 = s_2$ , definite mediante le ascisse curvilinee, non risulta ottimale. Per un superficie di rivoluzione generica il sistema di coordinate sferiche  $\alpha_1 = \varphi$  e  $\alpha_2 = \vartheta$  risulta il più appropriato. Nel sistema di riferimento adottato  $\varphi$  indica l'angolo tra l'asse geometrico  $x'_3$  della curva meridiana e la normale alla curva in un punto e definisce il meridiano, mentre  $\vartheta$  rappresenta l'angolo di rivoluzione e definisce il parallelo.

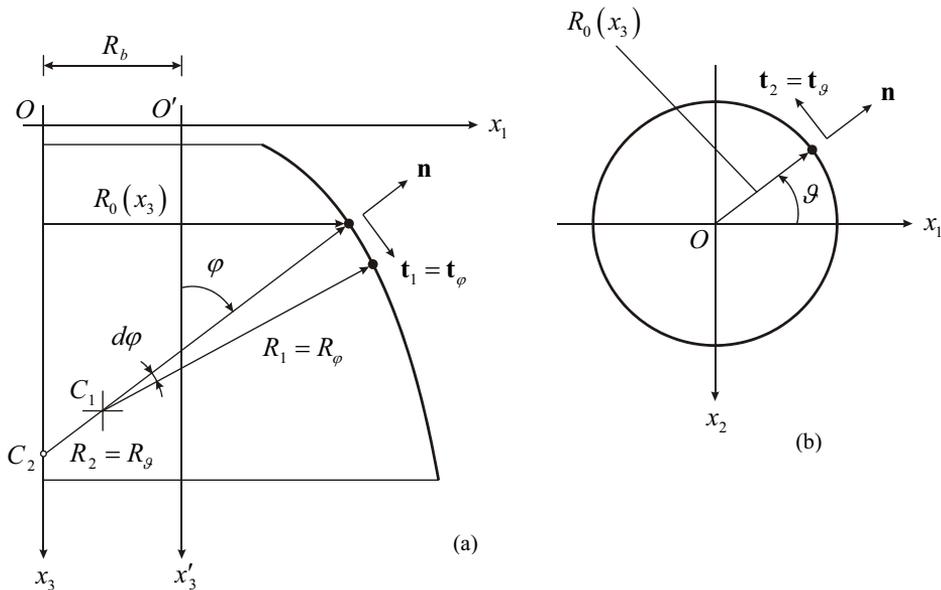


Figura 2.42 – Rappresentazione di un guscio di rivoluzione generico: sezione di meridiano (a), sezione di parallelo (b).

Ricordando i risultati della geometria differenziale (2.84), la prima forma fondamentale per una generica superficie di rivoluzione può essere espressa nel seguente modo:

$$(ds)^2 = R_1^2 (d\varphi)^2 + R_0^2 (d\vartheta)^2 = R_\varphi^2 (d\varphi)^2 + R_\vartheta^2 (d\vartheta)^2 \quad (2.353)$$

dove il primo addendo rappresenta il quadrato della lunghezza infinitesima dell'arco lungo la curva meridiana, ed il secondo definisce il quadrato della lunghezza infinitesima

dell'arco lungo un parallelo. Ricordando le relazioni (2.85) e (2.87), si ha:

$$A_1 = \sqrt{E} = R_1 = R_\varphi, \quad A_2 = \sqrt{G} = R_0 = R_2 \sin \varphi = R_g \sin \varphi \quad (2.354)$$

dove  $R_1 = R_\varphi$  rappresenta il raggio di curvatura della curva meridiana,  $R_2 = R_g$  il raggio di curvatura della curva di parallelo e  $R_0$  rappresenta il raggio di curvatura del parallelo.

Si vuol far notare che, per una superficie di rivoluzione, i raggi di curvatura principale  $R_\varphi, R_g$  ed il raggio di parallelo  $R_0$  sono tutte quantità che dipendono solo dal parametro  $\varphi$ , mentre risultano completamente indipendenti da  $\vartheta$ .

Si ricorda inoltre che, per le superfici di rivoluzione, le condizioni di Codazzi (2.68)-(2.69) risultano identicamente soddisfatte, mentre la condizione di Gauss (2.71) permette di scrivere il seguente risultato:

$$\frac{dR_0}{d\varphi} = R_\varphi \cos \varphi \quad (2.355)$$

Tutte le relazioni sopra riportate sono estremamente importanti in quanto caratterizzano intrinsecamente le superfici di rivoluzione e permettono di semplificare le equazioni del moto.

### 2.2.7.1 Equazioni di congruenza

Tenendo conto delle relazioni geometriche (2.354), (2.355), dell'indipendenza da  $\vartheta$  dei raggi di curvatura  $R_\varphi, R_g, R_0$  e ponendo  $\alpha_1 = \varphi$ ,  $\alpha_2 = \vartheta$ ,  $1 = \varphi$  e  $2 = \vartheta$ , le equazioni di congruenza (2.156)-(2.163) per un guscio di rivoluzione si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^0 &= \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + w \right) \\ \varepsilon_\vartheta^0 &= \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + u_\varphi \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \\ \gamma_{\varphi\vartheta}^0 &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} - u_\vartheta \cos \varphi \right) \\ \chi_\varphi &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} \\ \chi_\vartheta &= \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial \beta_\vartheta}{\partial \vartheta} + \beta_\varphi \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{\varphi\vartheta} &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial \beta_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \vartheta} - \beta_\vartheta \cos \varphi \right) \\
 \gamma_{\varphi n} &= \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \beta_\varphi \\
 \gamma_{\vartheta n} &= \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - u_\vartheta \sin \varphi \right) + \beta_\vartheta
 \end{aligned} \tag{2.356}$$

ed in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_\varphi^0 \\ \varepsilon_\vartheta^0 \\ \gamma_{\varphi\vartheta}^0 \\ \chi_\varphi \\ \chi_\vartheta \\ \chi_{\varphi\vartheta} \\ \gamma_{\varphi n} \\ \gamma_{\vartheta n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & \frac{1}{R_\varphi} & 0 & 0 \\ \frac{\cos \varphi}{R_0} & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\sin \varphi}{R_0} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{R_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \varphi}{R_0} & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{R_0} \\ -\frac{1}{R_\varphi} & 0 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \varphi}{R_0} & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\varphi \\ u_\vartheta \\ w \\ \beta_\varphi \\ \beta_\vartheta \end{bmatrix} \tag{2.357}$$

### 2.2.7.2 Equazioni di legame

Per quanto concerne le equazioni di legame elastico, dalle equazioni (2.253) ponendo  $1 = \varphi$  e  $2 = \vartheta$ , si ricava la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} N_\varphi \\ N_\vartheta \\ N_{\varphi\vartheta} \\ M_\varphi \\ M_\vartheta \\ M_{\varphi\vartheta} \\ T_\varphi \\ T_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\varphi^0 \\ \varepsilon_\vartheta^0 \\ \gamma_{\varphi\vartheta}^0 \\ \chi_\varphi \\ \chi_\vartheta \\ \chi_{\varphi\vartheta} \\ \gamma_{\varphi n} \\ \gamma_{\vartheta n} \end{bmatrix} \tag{2.358}$$

### 2.2.7.3 Equazioni indefinite di equilibrio

Ricordando le relazioni geometriche (2.354), (2.355), l'indipendenza da  $\mathcal{G}$  dei raggi di curvatura  $R_\varphi, R_\vartheta, R_0$  e ponendo  $\alpha_1 = \varphi$ ,  $\alpha_2 = \mathcal{G}$ ,  $1 = \varphi$  e  $2 = \mathcal{G}$ , le equazioni indefinite di equilibrio (2.338) per un guscio di rivoluzione sono date dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial N_{\varphi\mathcal{G}}}{\partial \mathcal{G}} + (N_\varphi - N_\mathcal{G}) \frac{\cos \varphi}{R_0} + \frac{T_\varphi}{R_\varphi} + q_\varphi &= I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_{\varphi\mathcal{G}}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial N_\mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}} + 2N_{\varphi\mathcal{G}} \frac{\cos \varphi}{R_0} + T_\mathcal{G} \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_\mathcal{G} &= I_0 \ddot{u}_\mathcal{G} + I_1 \ddot{\beta}_\mathcal{G} \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial T_\mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}} + T_\varphi \frac{\cos \varphi}{R_0} - \frac{N_\varphi}{R_\varphi} - N_\mathcal{G} \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial M_{\varphi\mathcal{G}}}{\partial \mathcal{G}} + (M_\varphi - M_\mathcal{G}) \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_\varphi + m_\varphi &= I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_{\varphi\mathcal{G}}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial M_\mathcal{G}}{\partial \mathcal{G}} + 2M_{\varphi\mathcal{G}} \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_\mathcal{G} + m_\mathcal{G} &= I_1 \ddot{u}_\mathcal{G} + I_2 \ddot{\beta}_\mathcal{G}
 \end{aligned} \tag{2.359}$$

ed in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{R_0} & 0 & -\frac{1}{R_\varphi} & 0 & 0 \\
 -\frac{\cos \varphi}{R_0} & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} & -\frac{\sin \varphi}{R_0} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2 \frac{\cos \varphi}{R_0} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{R_0} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \varphi}{R_0} & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2 \frac{\cos \varphi}{R_0} \\
 \frac{1}{R_\varphi} & 0 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{R_0} & -1 & 0 \\
 0 & \frac{\sin \varphi}{R_0} & \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} & 0 & -1
 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_\varphi \\ N_\mathcal{G} \\ N_{\varphi\mathcal{G}} \\ M_\varphi \\ M_\mathcal{G} \\ M_{\varphi\mathcal{G}} \\ T_\varphi \\ T_\mathcal{G} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_\varphi \\ q_\mathcal{G} \\ q_n \\ m_\varphi \\ m_\mathcal{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_\varphi \\ \ddot{u}_\mathcal{G} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\beta}_\varphi \\ \ddot{\beta}_\mathcal{G} \end{bmatrix} \tag{2.360}$$

### 2.2.7.4 Equazioni fondamentali

Ricordando le relazioni geometriche (2.354), (2.355), l'indipendenza da  $\mathcal{G}$  dei raggi di curvatura  $R_\varphi, R_\mathcal{G}, R_0$  e ponendo  $\alpha_1 = \varphi$ ,  $\alpha_2 = \mathcal{G}$ ,  $1 = \varphi$  e  $2 = \mathcal{G}$ , anche le equazioni fondamentali (2.343)-(2.347) possono essere riscritte in forma estesa:

(a) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_\varphi$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{A_{66}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{2A_{16}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \vartheta} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) u_\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{A_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \right. \\
 & \quad - \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left( \frac{A_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \vartheta} + \\
 & \quad \left. + \frac{A_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_\vartheta + \\
 & \quad + \left( \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \right. \\
 & \quad \left. + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{66}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2B_{16}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \vartheta} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \beta_\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \right. \\
 & \quad - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left( \frac{B_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \vartheta} + \\
 & \quad \left. + \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \beta_\vartheta + q_\varphi = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.361}$$

(b) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\alpha_\vartheta$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{A_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \left( \frac{A_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \vartheta} + \right. \\
 & \quad \left. + A_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_\vartheta +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{A_{22}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & + \frac{2A_{26}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} - A_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & + A_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) + A_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \Big) w + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \left( \frac{B_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \Big) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{22}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \frac{2B_{26}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + q_\varphi = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.362}$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( - \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. - \frac{A_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) u_\varphi + \\
 & + \left( - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. + \frac{A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa \frac{A_{55}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\kappa \left. \frac{2A_{45}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{2A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{12}}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{55}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\mathcal{G} + q_n = I_0 \ddot{w} \quad (2.363)
 \end{aligned}$$

(d) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_\varphi$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{66}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \frac{2B_{16}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \left( \frac{B_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) u_\mathcal{G} + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{D_{66}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{2D_{16}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} - \frac{D_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{D_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{D_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \left( \frac{D_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \\
 & + \frac{D_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \Big) \beta_\varphi + m_\varphi = I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{2.364}$$

(e) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $\alpha_g$ :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \left( \frac{B_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{B_{22}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & + \frac{2B_{26}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \Big) u_g + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{55}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) + B_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \Big) w + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + D_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{D_{26}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} + \left( \frac{D_{12}}{R_0 R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_0 R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \\
 & + D_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{45} \Big) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{D_{22}}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{G}^2} + \frac{2D_{26}}{R_0 R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \mathcal{G}} + \right. \\
 & \left. - D_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{55} \right) \beta_g + m_g = I_1 \ddot{u}_g + I_2 \ddot{\beta}_g
 \end{aligned} \tag{2.365}$$

Dalle equazioni (2.361)-(2.365) risultano così definiti gli elementi  $L_{ij}$  dell'operatore fondamentale  $\mathbf{L}$ :

$$\begin{aligned}
 L_{11} u_\varphi + L_{12} u_g + L_{13} w + L_{14} \beta_\varphi + L_{15} \beta_g + q_\varphi &= I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi \\
 L_{21} u_\varphi + L_{22} u_g + L_{23} w + L_{24} \beta_\varphi + L_{25} \beta_g + q_g &= I_0 \ddot{u}_g + I_1 \ddot{\beta}_g \\
 L_{31} u_\varphi + L_{32} u_g + L_{33} w + L_{34} \beta_\varphi + L_{35} \beta_g + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 L_{41} u_\varphi + L_{42} u_g + L_{43} w + L_{44} \beta_\varphi + L_{45} \beta_g + m_\varphi &= I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi \\
 L_{51} u_\varphi + L_{52} u_g + L_{53} w + L_{54} \beta_\varphi + L_{55} \beta_g + m_g &= I_1 \ddot{u}_g + I_2 \ddot{\beta}_g
 \end{aligned} \tag{2.366}$$

ed in notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\varphi \\ u_g \\ w \\ \beta_\varphi \\ \beta_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_\varphi \\ q_g \\ q_n \\ m_\varphi \\ m_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_\varphi \\ \ddot{u}_g \\ \ddot{w} \\ \ddot{\beta}_\varphi \\ \ddot{\beta}_g \end{bmatrix} \tag{2.367}$$

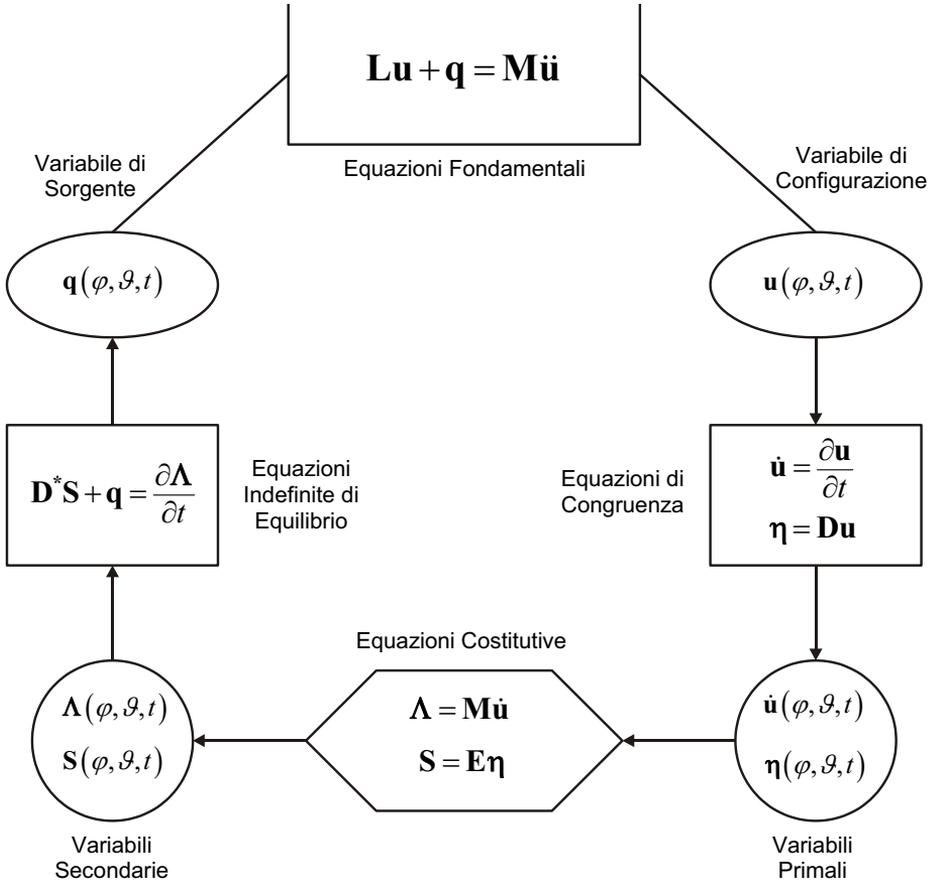


Figura 2.43 – Schema delle teorie fisiche per gusci di rivoluzione.

Le variabili e le equazioni del problema dell'equilibrio elastico di un guscio di rivoluzione in materiale anisotropo, considerate in questo paragrafo, possono essere riassunte nello *schema delle teorie fisiche* di figura 2.43. La combinazione dei tre insiemi di equazioni, ossia le equazioni di congruenza, le equazioni costitutive e le equazioni indefinite di equilibrio, permette di determinare le equazioni fondamentali (2.366) che, in forma matriciale compatta, assumono il seguente aspetto:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} \quad (2.368)$$

### 2.2.7.5 Alcuni casi particolari

Di seguito vengono ricavate le equazioni dei gusci rotanti a velocità costante attorno all'asse di rivoluzione, dei gusci soggetti ad azioni viscosse ed appoggiati su suolo elastico.

#### 2.2.7.5.1 Gusci rotanti a velocità costante attorno a un asse

Si consideri un guscio rotante a velocità costante  $\boldsymbol{\omega}$  attorno ad un asse. L'energia cinetica  $\mathcal{T}$  assume il seguente aspetto:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V}^T \mathbf{V} d\mathcal{V} \quad (2.369)$$

La velocità del generico punto del guscio può essere espressa dalla relazione:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{o'} + \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') \quad (2.370)$$

dove  $\mathbf{V}_{o'} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}')$  rappresenta la *velocità di trascinamento* di un punto della superficie media e  $\mathbf{V}_r$  la *velocità relativa*. In generale la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  può essere decomposta nel sistema di riferimento locale  $O'\alpha_1\alpha_2\zeta$  nel seguente modo:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{t}_1 + \omega_2 \mathbf{t}_2 + \omega_3 \mathbf{n} \quad (2.371)$$

Nel caso particolare di un guscio di rivoluzione (figura 2.42) rotante con velocità angolare costante  $\Omega$  attorno al proprio asse di rivoluzione  $x_3$ , valgono le seguenti relazioni generali:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{o'} &= \Omega R_0 \mathbf{t}_2 \\ \boldsymbol{\omega} &= -\Omega \mathbf{e}_3 = \Omega (\cos \varphi \mathbf{n} - \sin \varphi \mathbf{t}_1) \\ \mathbf{V}_r &= \dot{\mathbf{U}} = \dot{U}_1 \mathbf{t}_1 + \dot{U}_2 \mathbf{t}_2 + \dot{W} \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$(P - O') = \mathbf{U} = U_1 \mathbf{t}_1 + U_2 \mathbf{t}_2 + W \mathbf{n} \quad (2.372)$$

Sostituendo le (2.372) all'interno della definizione (2.370) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = & (\dot{U}_1 - U_2 \Omega \cos \varphi) \mathbf{t}_1 + \\ & + (\dot{U}_2 + \Omega R_0 + U_1 \Omega \cos \varphi + W \Omega \sin \varphi) \mathbf{t}_2 + (\dot{W} - U_2 \Omega \sin \varphi) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.373)$$

Introducendo l'espressione (2.373) all'interno della definizione dell'energia cinetica  $\mathcal{T}$  (2.369) si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V}^T \mathbf{V} d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \left( (\dot{U}_1 - U_2 \Omega \cos \varphi)^2 + \right. \\ & \left. + (\dot{U}_2 + \Omega R_0 + U_1 \Omega \cos \varphi + W \Omega \sin \varphi)^2 + (\dot{W} - U_2 \Omega \sin \varphi)^2 \right) d\mathcal{V} = \\ = & \frac{1}{2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \int_{\zeta} \rho \left( \dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2 + \dot{W}^2 + U_2^2 \Omega^2 + R_0^2 \Omega^2 + 2\dot{U}_2 \Omega R_0 + 2 \cos \varphi (\dot{U}_2 U_1 - \dot{U}_1 U_2) + \right. \\ & \left. + 2 \sin \varphi (\dot{U}_2 W - \dot{W} U_2) + 2U_1 W \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + U_1^2 \Omega^2 \cos^2 \varphi + W^2 \Omega^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ & \left. + 2U_1 \Omega^2 R_0 \cos \varphi + 2W \Omega^2 R_0 \sin \varphi \right) A_1 (1 + \zeta/R_1) A_2 (1 + \zeta/R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \end{aligned} \quad (2.374)$$

Una volta introdotto il campo di spostamento (2.105) e calcolata la variazione  $\delta \mathcal{T}$  dell'energia cinetica (2.374), integrando per parti nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ , ricordando le definizioni delle masse inerziali per gusci laminati (2.290) e raccogliendo i vari termini, si perviene al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{T} dt = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} \left( \left( - (I_0 \ddot{u}_1 + I_1 \ddot{\beta}_1) + u_1 I_0 \Omega^2 \cos^2 \varphi + w I_0 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + \beta_1 I_1 \Omega^2 \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\dot{u}_2 I_0 \Omega \cos \varphi + 2\dot{\beta}_2 I_1 \Omega \cos \varphi + I_0 \Omega^2 R_0 \cos \varphi \right) \delta u_1 + \right. \\ & \left. + \left( - (I_0 \ddot{u}_2 + I_1 \ddot{\beta}_2) + u_2 I_0 \Omega^2 + \beta_2 I_1 \Omega^2 - 2\dot{u}_1 I_0 \Omega \cos \varphi - 2\dot{w} I_0 \Omega \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\dot{\beta}_1 I_1 \Omega \cos \varphi \right) \delta u_2 + \right. \\ & \left. + \left( - I_0 \ddot{w} + u_1 I_0 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + w I_0 \Omega^2 \sin^2 \varphi + \beta_1 I_1 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\dot{u}_2 I_0 \Omega \sin \varphi + 2\dot{\beta}_2 I_1 \Omega \sin \varphi + R_0 I_0 \Omega^2 \sin \varphi \right) \delta w + \right. \\ & \left. + \left( - (I_1 \ddot{u}_1 + I_2 \ddot{\beta}_1) + u_1 I_1 \Omega^2 \cos^2 \varphi + w I_1 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + \beta_2 I_2 \Omega^2 \cos^2 \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\dot{u}_2 I_1 \Omega \cos \varphi + 2\dot{\beta}_2 I_2 \Omega \cos \varphi + I_1 \Omega^2 R_0 \cos \varphi \right) \delta \beta_1 + \right. \\ & \left. + \left( - (I_1 \ddot{u}_2 + I_2 \ddot{\beta}_2) + u_2 I_1 \Omega^2 + \beta_2 I_2 \Omega^2 - 2\dot{u}_1 I_1 \Omega \cos \varphi - 2\dot{w} I_1 \Omega \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\dot{\beta}_1 I_2 \Omega \cos \varphi \right) \delta \beta_2 \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dt \end{aligned} \quad (2.375)$$

Analogamente a quanto visto precedentemente, attraverso il principio di Hamilton

(2.297) si ottengono le equazioni del moto per un guscio di rivoluzione rotante a velocità angolare costante  $\Omega$  attorno al proprio asse. Ponendo  $\alpha_1 = \varphi$ ,  $\alpha_2 = \vartheta$ ,  $1 = \varphi$  e  $2 = \vartheta$  si ha:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + (N_\varphi - N_\vartheta) \frac{\cos \varphi}{R_0} + \frac{T_\varphi}{R_\varphi} + q_\varphi = \\
 & = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi - u_\varphi I_0 \Omega^2 \cos^2 \varphi - w I_0 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi - \beta_\varphi I_1 \Omega^2 \cos^2 \varphi + \\
 & \quad - 2\dot{u}_\vartheta I_0 \Omega \cos \varphi - 2\dot{\beta}_\vartheta I_1 \Omega \cos \varphi - I_0 \Omega^2 R_0 \cos \varphi \\
 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial N_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2N_{\varphi\vartheta} \frac{\cos \varphi}{R_0} + T_\vartheta \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_\vartheta = \\
 & = I_0 \ddot{u}_\vartheta + I_1 \ddot{\beta}_\vartheta - u_\vartheta I_0 \Omega^2 - \beta_\vartheta I_1 \Omega^2 + 2\dot{u}_\varphi I_0 \Omega \cos \varphi + 2\dot{w} I_0 \Omega \sin \varphi + \\
 & \quad + 2\dot{\beta}_\varphi I_1 \Omega \cos \varphi \\
 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial T_\vartheta}{\partial \vartheta} + T_\varphi \frac{\cos \varphi}{R_0} - \frac{N_\varphi}{R_\varphi} - N_\vartheta \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_n = \\
 & = I_0 \ddot{w} - u_\varphi I_0 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi - w I_0 \Omega^2 \sin^2 \varphi - \beta_\varphi I_1 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + \\
 & \quad - 2\dot{u}_\vartheta I_0 \Omega \sin \varphi - 2\dot{\beta}_\vartheta I_1 \Omega \sin \varphi - I_0 \Omega^2 R_0 \sin \varphi \\
 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial M_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} + (M_\varphi - M_\vartheta) \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_\varphi + m_\varphi = \\
 & = I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi - u_\varphi I_1 \Omega^2 \cos^2 \varphi - w I_1 \Omega^2 \cos \varphi \sin \varphi - \beta_\varphi I_2 \Omega^2 \cos^2 \varphi + \\
 & \quad - 2\dot{u}_\vartheta I_1 \Omega \cos \varphi - 2\dot{\beta}_\vartheta I_2 \Omega \cos \varphi - I_1 \Omega^2 R_0 \cos \varphi \\
 & \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_{\varphi\vartheta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial M_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2M_{\varphi\vartheta} \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_\vartheta + m_\vartheta = \\
 & = I_1 \ddot{u}_\vartheta + I_2 \ddot{\beta}_\vartheta - u_\vartheta I_1 \Omega^2 - \beta_\vartheta I_2 \Omega^2 + 2\dot{u}_\varphi I_1 \Omega \cos \varphi + 2\dot{w} I_1 \Omega \sin \varphi + \\
 & \quad + 2\dot{\beta}_\varphi I_2 \Omega \cos \varphi \tag{2.376}
 \end{aligned}$$

Ricordando le relazioni (2.367), le equazioni fondamentali in termini di spostamenti generalizzati (2.376) possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\varphi \\ u_\vartheta \\ w \\ \beta_\varphi \\ \beta_\vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_\varphi + \Omega^2 R_0 I_0 \cos \varphi \\ q_\vartheta \\ q_n + \Omega^2 R_0 I_0 \sin \varphi \\ m_\varphi + \Omega^2 R_0 I_1 \cos \varphi \\ m_\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_\varphi \\ \ddot{u}_\vartheta \\ \ddot{w} \\ \ddot{\beta}_\varphi \\ \ddot{\beta}_\vartheta \end{bmatrix} +$$

$$+2\Omega \begin{bmatrix} 0 & -I_0 \cos \varphi & 0 & 0 & -I_1 \cos \varphi \\ I_0 \cos \varphi & 0 & I_0 \sin \varphi & I_1 \cos \varphi & 0 \\ 0 & -I_0 \sin \varphi & 0 & 0 & -I_1 \sin \varphi \\ 0 & -I_1 \cos \varphi & 0 & 0 & -I_2 \cos \varphi \\ I_1 \cos \varphi & 0 & I_1 \sin \varphi & I_2 \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_\varphi \\ \dot{u}_g \\ \dot{w} \\ \dot{\beta}_\varphi \\ \dot{\beta}_g \end{bmatrix} + \\
 -\Omega^2 \begin{bmatrix} I_0 \cos^2 \varphi & 0 & I_0 \sin \varphi \cos \varphi & I_1 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & I_1 \\ I_0 \sin \varphi \cos \varphi & 0 & I_0 \sin^2 \varphi & I_0 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ I_1 \cos^2 \varphi & 0 & I_1 \sin \varphi \cos \varphi & I_2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & I_1 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\varphi \\ u_g \\ w \\ \beta_\varphi \\ \beta_g \end{bmatrix} \quad (2.377)$$

Si vuol far notare che i termini  $\Omega^2 R_0 \cos \varphi$  e  $\Omega^2 R_0 \sin \varphi$  presenti nelle equazioni (2.376) o (2.377) sono dovuti alla forza centrifuga e provocano un'inflexione statica. Trascurando questi termini, le equazioni (2.376) o (2.377) descrivono le vibrazioni libere di un guscio, rotante a velocità angolare costante  $\Omega$  attorno al proprio asse di rivoluzione, rispetto alla configurazione di equilibrio statica dovuta alla forza centrifuga.

### 2.2.7.5.2 Gusci appoggiati su suolo elastico e soggetti a forze viscoso

Un guscio moderatamente spesso appoggiato su suolo elastico può essere studiato in prima approssimazione applicando alla superficie di riferimento molle elastiche uniformemente distribuite, aventi rigidezza  $k_1, k_2, k_n$  lungo le tre direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ , rispettivamente. Una fondazione, costituita da materiale omogeneo avente spessore uniforme  $h_F$ , è caratterizzata da un modulo elastico  $E_F$ , da un coefficiente di Poisson  $\nu_F$  e da un modulo di elasticità tangenziale  $G_F$ . Le costanti elastiche possono essere determinate attraverso prove di laboratorio. In prima approssimazione [243] si possono definire le rigidezza delle molle elastiche  $k_1 = k_2 = G_F/h_F$ ,  $k_n = E_F/h_F$  nelle tre direzioni coordinate  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ , rispettivamente. Volendo inoltre considerare l'effetto inerziale della fondazione, definita la sua densità  $\rho_F$ , si può aggiungere alla massa del guscio un terzo della massa per unità di area  $\rho_F h_F$  della fondazione stessa. Introducendo anche i coefficienti di smorzamento viscoso nelle tre direzioni  $c_1, c_2, c_n$ , definiti dal modello della fondazione ed eventuali coefficienti viscosi equivalenti  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_n$  caratteristici del materiale, è possibile riscrivere le componenti dell'azione esterna  $q_1, q_2, q_n$  nelle tre

direzioni coordinate nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_1^* - k_1 u_1 - (c_1 + \bar{c}_1) \dot{u}_1 - \frac{1}{3} \rho_F h_F \ddot{u}_1 \\
 q_2 &= q_2^* - k_2 u_2 - (c_2 + \bar{c}_2) \dot{u}_2 - \frac{1}{3} \rho_F h_F \ddot{u}_2 \\
 q_n &= q_n^* - k_n w - (c_n + \bar{c}_n) \dot{w} - \frac{1}{3} \rho_F h_F \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{2.378}$$

dove si sono indicate con  $q_1^*, q_2^*, q_n^*$  le forzanti esterne nelle direzioni  $\alpha_1, \alpha_2, \zeta$ . Restano così definite le azioni dovute ad una fondazione elastica alla Winkler.

Le relazioni (2.378) sono valide per un guscio di forma generica. Per un guscio di rivoluzione, ponendo  $1 = \varphi$  e  $2 = \vartheta$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 q_\varphi &= q_\varphi^* - k_\varphi u_\varphi - (c_\varphi + \bar{c}_\varphi) \dot{u}_\varphi - \frac{1}{3} \rho_F h_F \ddot{u}_\varphi \\
 q_\vartheta &= q_\vartheta^* - k_\vartheta u_\vartheta - (c_\vartheta + \bar{c}_\vartheta) \dot{u}_\vartheta - \frac{1}{3} \rho_F h_F \ddot{u}_\vartheta \\
 q_n &= q_n^* - k_n w - (c_n + \bar{c}_n) \dot{w} - \frac{1}{3} \rho_F h_F \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{2.379}$$



# *Chapter 3*

## *Principal Shell Structures*

### **ABSTRACT**

It was shown in the previous chapter that the governing equations and relations of the general theory of thick anisotropic shells are formulated in terms of the Lamé parameters as well as of the principal curvatures of the shell reference surface. In the general case of shells having an arbitrary geometry of the middle surface, the coefficients of the first and second quadratic forms and the principal curvatures are some functions of the curvilinear coordinates. In this chapter, the Lamé parameters for some shell geometries commonly encountered in engineering practice are determined and the motion equations of the relative structures are illustrated.

As shown in the previous chapter, the equations obtained for a generic shell have been specialized to doubly curved shells of revolution. The reference surface of revolution shell structures, widely used in structural mechanics, is generated by rotating a plane curve, called meridian, about the axis of revolution, that not necessarily intersects the meridian. The parallels are generated from the rotation of the meridian curve. It is worth noting that, according to the previous definition, the shape of these structures is completely defined when the equation of the meridian curve is assigned. Starting from the governing equations

of a doubly curved shell of revolution, it is possible to infer the fundamental equations of different typologies of structures by imposing and introducing simple geometric considerations and relations. In order to study the mechanical behaviour of a generic shell of revolution, one needs to define the geometry of the meridian curve. This curve can assume different shapes in a plane. In particular, the meridian curve can be straight or curved. Thus, the shells of revolution are classified in two categories: shells generated by a curved meridian and shells generated by a straight meridian.

The doubly curved shells of revolution belongs to the first category. In this chapter, shells with iperbolic, parabolic, cycloidal, catenary, elliptical and circular meridian are considered. The toroidal shells belongs to the same class and are characterized by an offset of the revolution axis from the geometry axis of the meridian curve. The second category is constituted by the singly curved shells such as conical and circular cylindrical shells.

The shells of translation and the so-called degenerate shells such as rectangular and circular plates are also considered and described.

The governing equations of all the mentioned structures are derived from the equations of revolution shells. In particular, the equations of the singly curved shells of revolution can be obtained by rectifying the meridian curve of the doubly curved shells of revolution. From the equations of the conical shell one can infer the equations of the circular cylinder and the circular plate by imposing simple geometrical relationships.

Furthermore, it should be noted that by rectifying the circumferential curve of doubly curved shells of revolution the motion equations of shells of translation such as cylinders can be inferred. A surface of translation is defined as the surface generated by keeping a plane curve, called profile, parallel to its initial plane as it is moved along a straight line, named generator. In particular, parabolic, cycloidal, catenary, elliptical and circular profiles are considered in this section.

Finally, by rectifying at the same time the meridional and the circumferential curves of shells of revolution the equations of rectangular plates are derived.

To conclude, in this chapter the governing equations of doubly curved shells, singly curved shells and degenerate shells are widely illustrated. For all these structures, three basic set of equations, namely, the kinetic (equilibrium), kinematic (strain-displacement) and constitutive (Hooke's law) equations are presented and discussed.

# *Capitolo 3*

## *Principali Strutture a Guscio*

### **INTRODUZIONE**

Nel capitolo precedente sono riportate le equazioni generali dei gusci a doppia curvatura in materiale anisotropo. I risultati sono stati specializzati ai gusci di rivoluzione a doppia curvatura. La superficie di riferimento delle strutture di rivoluzione viene ottenuta per rotazione di una curva piana (detta *generatrice* o *meridiano*) attorno ad un asse (denominato *asse di rivoluzione*) appartenente al piano stesso della figura. Da questa definizione si evince che la forma di tali strutture è completamente assegnata qualora venga fornita l'equazione cartesiana della curva di meridiano. La figura 3.1 illustra graficamente le tipologie strutturali che è possibile studiare partendo dalle equazioni governanti il problema elastico dei gusci a doppia curvatura. Infatti, è possibile dedurre dalle equazioni in parola, attraverso considerazioni di carattere geometrico, le equazioni fondamentali per un'ampia classe di strutture a guscio.

Per studiare una particolare tipologia di guscio di rivoluzione, occorre individuare la forma del meridiano ad essa associata per poi definire le equazioni che ne governano il comportamento. Si può osservare che il meridiano può assumere diverse forme nel piano, ossia può essere una linea curva, oppure una linea retta. I gusci di rivoluzione possono essere suddivisi nelle seguenti categorie:

- gusci a generatrice curvilinea
- gusci a generatrice rettilinea

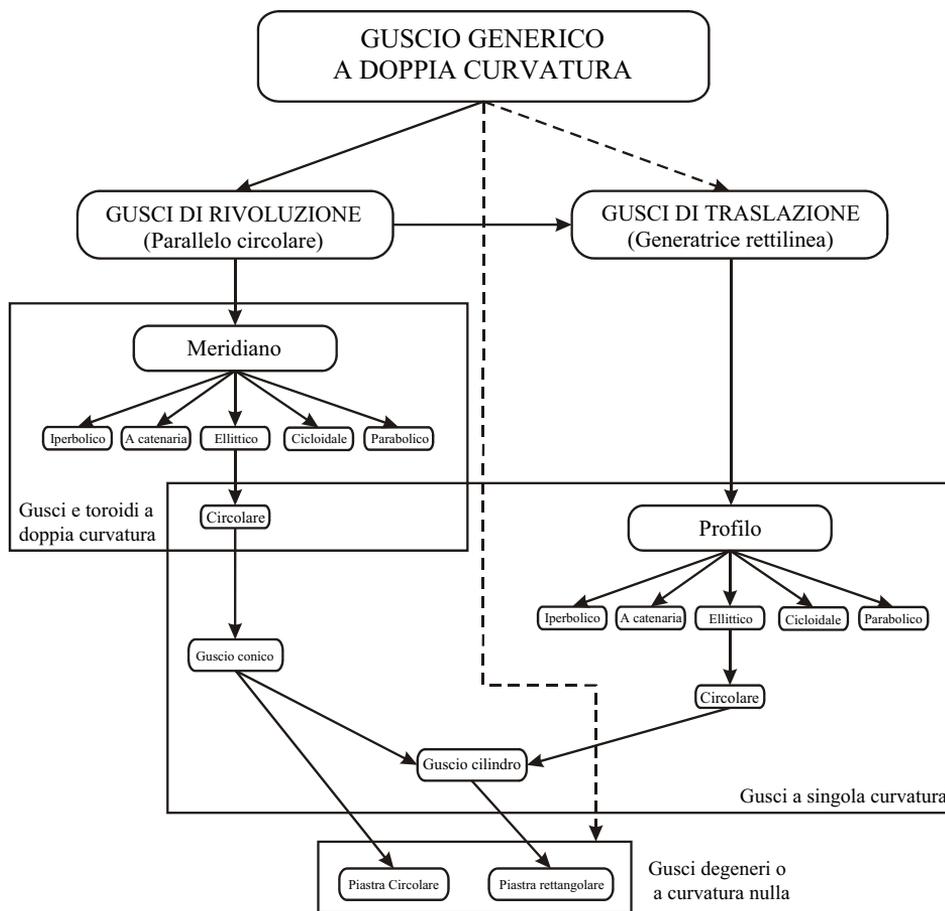


Figura 3.1 – Classificazione delle principali tipologie strutturali.

Alla prima categoria appartengono i gusci *a doppia curvatura* caratterizzati, oltre dalla curvatura indotta dalla rivoluzione, anche dalla curvatura di meridiano. In questa tesi, vengono trattati gusci di rivoluzione a meridiano iperbolico, parabolico, cicloidale, a catenaria, ellittico e circolare. I gusci toroidali fanno parte di questa classe e sono gusci a doppia curvatura caratterizzati da un offset dell'asse di rivoluzione rispetto all'asse geometrico descrivente la curva di meridiano. Alla seconda categoria appartengono i gusci *a singola curvatura* come i gusci conici, i gusci cilindrici circolari, come pure i gusci *degeneri* (piastre circolari). In particolare, le equazioni dei gusci a generatrice rettilinea si ricavano rettificando il meridiano dei gusci di rivoluzione a doppia curvatura. Il guscio a

meridiano circolare (guscio sferico) può essere visto come caso particolare del guscio a meridiano ellittico. Si vuol far notare che, mentre quest'ultimo è caratterizzato da due curvatures distinte, il primo ha anch'esso due curvatures, che risultano uguali e costanti. Il guscio sferico rappresenta un guscio di transizione tra i gusci di rivoluzione a doppia curvatura e a singola curvatura (guscio conico). Inoltre, dal guscio conico si possono dedurre le equazioni del cilindro e della piastra circolare.

Rettificando il parallelo di un guscio di rivoluzione a doppia curvatura, è possibile ottenere le equazioni descriventi il comportamento del cilindri di traslazione a profilo generico, rappresentati nella seconda colonna di figura 3.1. Queste tipologie strutturali sono definite da diversi profili. In particolare vengono considerati cilindri a profilo parabolico, cicloidale, a catenaria, ellittico e circolare.

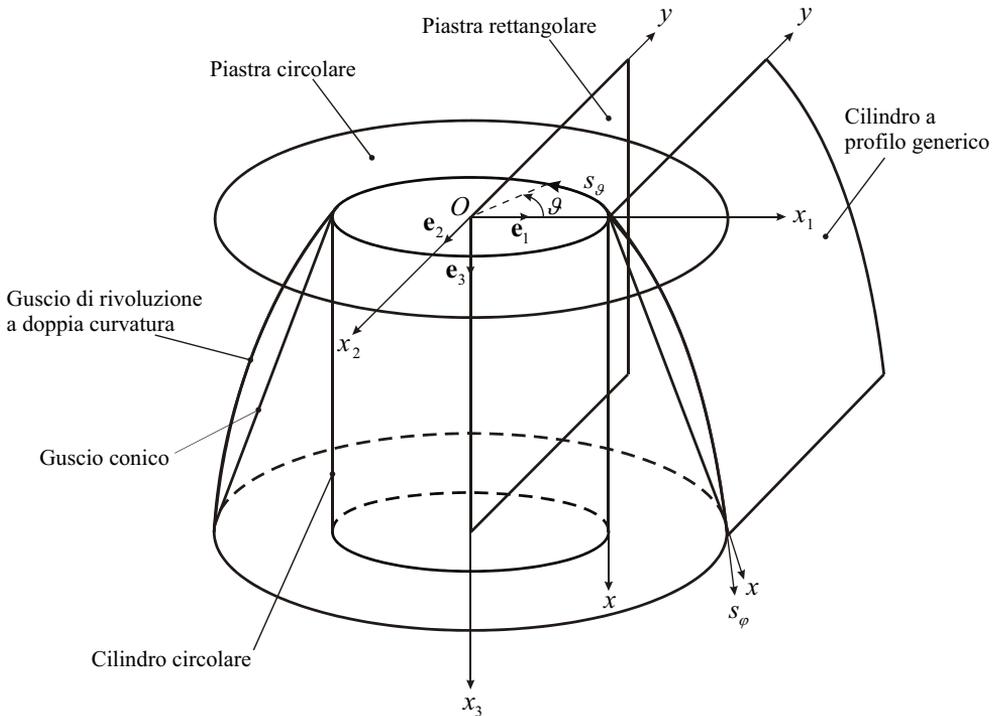


Figura 3.2 – Rappresentazione delle principali tipologie strutturali.

Infine, rettificando contemporaneamente il parallelo e il meridiano di un guscio di rivoluzione a doppia curvatura, si ottengono le equazioni delle piastre rettangolari. Esse appartengono alla categoria dei gusci degeneri, in quanto dotati di curvatura nulla. Si vuol far rilevare che le equazioni delle piastre rettangolari possono essere dedotte indifferentemente partendo dai gusci di rivoluzione o dai gusci di traslazione. In figura 3.2

viene riportata la sintesi grafica di quanto testé esposto. In definitiva, risulta possibile ricavare dalle equazioni descriventi il comportamento di un guscio di rivoluzione a doppia curvatura, ad esempio un iperboloido iperbolico, le equazioni governanti il problema elastico dei gusci conici e cilindrici, delle piastre circolari e rettangolari e dei cilindri di traslazione a profilo generico.

Nel seguito vengono determinate le equazioni dei gusci di rivoluzione a doppia curvatura, dei gusci di rivoluzione a singola curvatura, dei gusci di traslazione a singola curvatura e dei gusci degeneri.

### 3.1 GUSCI DI RIVOLUZIONE A DOPPIA CURVATURA

In base alla prima forma fondamentale (2.88) e alle relazioni (2.89), è possibile descrivere una superficie di rivoluzione associando ad  $\alpha_1, \alpha_2$  le coordinate curvilinee  $\varphi, s$ . L'ascissa curvilinea  $s_g = s$  lungo il parallelo della superficie risulta definita dalla seguente relazione:

$$ds_g = ds = R_0(\varphi)d\vartheta \quad (3.1)$$

dove  $R_0(\varphi)$  è il raggio di parallelo ed è funzione della quota del parallelo, quindi del parametro  $\varphi$ . La relazione (3.1) permette di porre in altra forma le equazioni dei gusci di rivoluzione. Vengono riscritte di seguito tutte le equazioni ricavate nel precedente capitolo per i gusci di rivoluzione a doppia curvatura.

Ponendo  $\vartheta = s$  e introducendo la relazione (3.1), le equazioni di congruenza (2.356) per un guscio di rivoluzione assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi^0 &= \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + w \right) \\ \varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_\varphi \cos \varphi}{R_0} + \frac{w \sin \varphi}{R_0} \\ \gamma_{\varphi s}^0 &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial u_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial s} - \frac{u_s \cos \varphi}{R_0} \\ \chi_\varphi &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_s &= \frac{\partial \beta_s}{\partial s} + \frac{\beta_\varphi \cos \varphi}{R_0} \\
 \chi_{\varphi s} &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial \beta_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial s} - \frac{\beta_s \cos \varphi}{R_0} \\
 \gamma_{\varphi n} &= \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \beta_\varphi \\
 \gamma_{sn} &= \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u_s \sin \varphi}{R_0} + \beta_s
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Per quanto concerne le equazioni di legame elastico (2.358), tenendo conto della posizione  $\mathcal{G} = s$ , si ricava la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} N_\varphi \\ N_s \\ N_{\varphi s} \\ M_\varphi \\ M_s \\ M_{\varphi s} \\ T_\varphi \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_\varphi^0 \\ \mathcal{E}_s^0 \\ \gamma_{\varphi s}^0 \\ \chi_\varphi \\ \chi_s \\ \chi_{\varphi s} \\ \gamma_{\varphi n} \\ \gamma_{sn} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Ricordando le relazioni (2.359), ponendo  $\mathcal{G} = s$  e introducendo la relazione (3.1), le equazioni indefinite di equilibrio dinamico per un guscio di rivoluzione sono date dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{\varphi s}}{\partial s} + (N_\varphi - N_s) \frac{\cos \varphi}{R_0} + \frac{T_\varphi}{R_\varphi} + q_\varphi &= I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_{\varphi s}}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + 2N_{\varphi s} \frac{\cos \varphi}{R_0} + T_s \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_s &= I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_s}{\partial s} + T_\varphi \frac{\cos \varphi}{R_0} - \frac{N_\varphi}{R_\varphi} - N_s \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi s}}{\partial s} + (M_\varphi - M_s) \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_\varphi + m_\varphi &= I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_{\varphi s}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_s}{\partial s} + 2M_{\varphi s} \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_s + m_s &= I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Infine, anche le equazioni fondamentali (2.361)-(2.365) possono essere riscritte per un guscio di rivoluzione in forma estesa. Ponendo  $\mathcal{G} = s$  e introducendo la relazione (3.1) si ha:

(a) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s_\varphi$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) u_\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad - \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & \quad \left. + \frac{A_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_s + \\
 & \quad + \left( \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \beta_\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & \quad \left. + \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \beta_s + q_\varphi = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

(b) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + A_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_\varphi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \frac{2A_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - A_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \Big) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & + A_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + A_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \Big) w + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \Big) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_s + q_s = I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( - \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{A_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) u_\varphi + \\
 & + \left( - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\kappa \frac{2A_{45}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{2A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \Big) w + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{12}}{R_\varphi} - \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s + q_n = I_0 \ddot{w} \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & \left. + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{2D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{D_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{D_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + \left. \frac{D_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_s + m_\varphi = I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

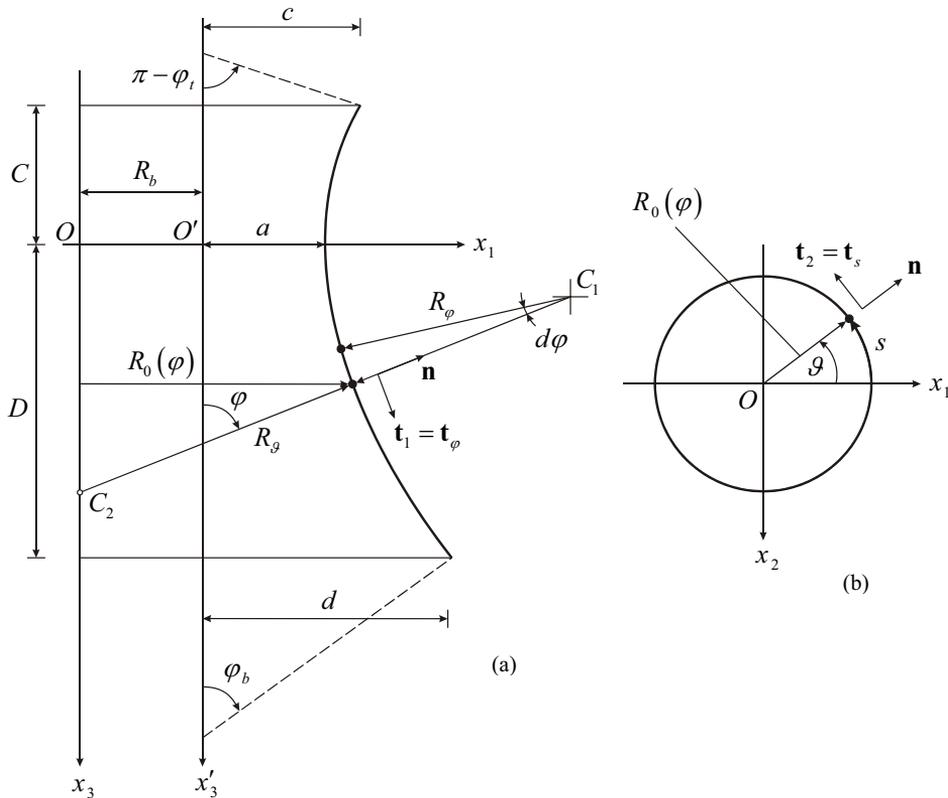
(e) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \left. \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \left. \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & + B_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \left. \right) w + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + D_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + D_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{45} \left. \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2D_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - D_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{55} \right) \beta_s + m_s = I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

A questo punto, occorre definire i parametri geometrici della curva di meridiano  $R_\varphi(\varphi)$  e  $R_0(\varphi)$ . Di seguito sono analizzate le principali tipologie strutturali.

### 3.1.1 GUSCIO A MERIDIANO IPERBOLICO

Il guscio a meridiano iperbolico, rappresentato in figura 3.3, è un guscio di rivoluzione a doppia curvatura, la cui superficie di riferimento viene generata dalla rotazione attorno all'asse  $x_3$  di un ramo di *iperbole*. La superficie in parola è caratterizzata da una curvatura gaussiana negativa, poiché i centri di curvatura  $C_1, C_2$ , corrispondenti ai due raggi principali  $R_\varphi, R_\varrho$ , giacciono su lati opposti della superficie.



**Figura 3.3** – Rappresentazione di un iperboloide iperbolico: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

In figura 3.3 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie. L'angolo di rivoluzione è indicato con  $\varrho$ .  $R_b$  rappresenta l'offset dell'asse della curva di meridiano  $x'_3$  rispetto all'asse di rivoluzione  $x_3$ . Si vuol far notare che per  $R_b = 0$  si ottiene un *iperboloide iperbolico*. Le quantità  $c, d$  sono i raggi alla base e alla sommità dell'iperboloide rispetto all'asse  $x'_3$  e  $C, D$  sono le rispettive quote. La

descrizione della curva generatrice o di meridiano in coordinate cartesiane è la seguente:

$$\frac{(R_0 - R_b)^2}{a^2} - \frac{x_3'^2}{b^2} = 1 \quad (3.10)$$

dove  $a$  è il minimo raggio di parallelo, ossia il raggio nella sezione di gola dell'iperboloide, e  $b$  una dimensione caratteristica dell'iperbole. Quest'ultima quantità può essere valutata agevolmente introducendo le coordinate alla base del guscio  $(d, D)$ , o le coordinate in sommità  $(c, C)$ , nell'equazione (3.10):

$$b = \frac{aC}{\sqrt{(c^2 - a^2)}} = \frac{aD}{\sqrt{(d^2 - a^2)}} \quad (3.11)$$

Dalla relazione (3.11) si può osservare che il parametro  $b$ , e quindi il profilo geometrico del meridiano, può essere definito imponendo le dimensioni in sommità o alla base della struttura, oltre alla sezione di gola. La forma del meridiano può essere caratterizzata anche attraverso il rapporto  $a/b$ , e cioè dalla pendenza dell'asintoto inferiore all'iperbole generatrice, oppure attraverso un parametro  $k$  che può essere visto come un indicatore della deviazione del profilo del guscio rispetto al caso degenerare di una retta parallela all'asse  $x_3'$ . Il parametro  $k$  è funzione del rapporto  $a/b$  ed il legame tra queste quantità viene fornito, analiticamente, dalle seguenti relazioni:

$$k = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{k^2 - 1} \quad (3.12)$$

Se il parametro  $k$  risulta elevato, si avrà a che fare con un maggiore pronunciamento della curvatura del meridiano, mentre al tendere di  $k$  al valore unitario si avrà un avvicinamento sempre più rilevante al caso degenerare. Infatti, per  $k=1$  l'iperboloide iperbolico degenera in un guscio cilindrico. Una volta definito  $k$ , l'equazione (3.10) può essere riscritta nella seguente forma:

$$(R_0 - R_b)^2 - (k^2 - 1)x_3'^2 = a^2 \quad (3.13)$$

dove  $R_0$  il raggio di parallelo. Nota l'equazione del meridiano, il passaggio successivo è quello di definire le quantità caratteristiche della superficie, ossia i parametri di Lamè  $A_1, A_2$  ed i raggi di curvatura principali  $R_1, R_2$ . Ricordando le relazioni (2.85) e (2.87), per un qualsiasi guscio di rivoluzione si ha  $A_1 = R_1 = R_\varphi$  e  $A_2 = R_0 = R_2 \sin \varphi = R_g \sin \varphi$ . Occorre quindi definire le espressioni dei raggi  $R_\varphi, R_g$  e  $R_0$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ .

Si consideri un arco di meridiano di lunghezza infinitesima  $ds_\varphi$ . Applicando il teorema di Pitagora, è possibile approssimare la lunghezza in parola attraverso la seguente espressione:

$$ds_\varphi^2 = dx_3'^2 + dR_0^2 \quad (3.14)$$

Ricordando che è possibile scrivere  $ds_\varphi = R_1 d\varphi = R_\varphi d\varphi$ ,  $dx_3' = x'_{3,\varphi} d\varphi$  e  $dR_0 = R_{0,\varphi} d\varphi$ , per cui l'equazione (3.14) diviene:

$$R_\varphi^2 d\varphi^2 = \left( \frac{dx_3'}{d\varphi} \right)^2 d\varphi^2 + \left( \frac{dR_0}{d\varphi} \right)^2 d\varphi^2 \quad (3.15)$$

Dall'equazione (3.13), ricavando  $x_3'$  in funzione del raggio di parallelo  $R_0$  e derivando l'espressione di  $x_3'$  così ottenuta, si perviene al risultato:

$$x_3' = \sqrt{\frac{(R_0 - R_b)^2 - a^2}{k^2 - 1}} \rightarrow \frac{dx_3'}{d\varphi} = \frac{R_0 - R_b}{x_3'(k^2 - 1)} \frac{dR_0}{d\varphi} \quad (3.16)$$

La condizione di Gauss (2.86) per superfici di rivoluzione assume il seguente aspetto:

$$\frac{dR_0}{d\varphi} = R_\varphi \cos \varphi \quad (3.17)$$

Introducendo la (3.17) nella seconda equazione (3.16) si ottiene:

$$\frac{dx_3'}{d\varphi} = \frac{(R_0 - R_b) R_\varphi \cos \varphi}{\sqrt{(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right)}} \quad (3.18)$$

Sostituendo le relazioni (3.17) e (3.18) nell'equazione (3.15) si ricava la seguente espressione di  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ :

$$R_0(\varphi) = a \sin \varphi \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} + R_b \quad (3.19)$$

\* \* \*

Viene di seguito dedotta l'espressione (3.19) del raggio di parallelo  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ .

$$ds_\varphi^2 = dx_3'^2 + dR_0^2 \rightarrow R_\varphi^2 d\varphi^2 = x_{3,\varphi}'^2 d\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 d\varphi^2 \rightarrow 1 = x_{3,\varphi}'^2 / R_\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 / R_\varphi^2$$

dove:  $R_{0,\varphi} = R_\varphi \cos \varphi$

$$x_{3,\varphi}' = \left( \sqrt{\frac{(R_0 - R_b)^2 - a^2}{k^2 - 1}} \right)_{,\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{(R_0 - R_b)^2 - a^2}{k^2 - 1} \right)^{-1/2} \frac{2(R_0 - R_b) R_{0,\varphi}}{k^2 - 1} =$$

$$= \frac{(R_0 - R_b) R_{0,\varphi} \sqrt{k^2 - 1}}{(k^2 - 1) \sqrt{(R_0 - R_b)^2 - a^2}} = \frac{(R_0 - R_b) R_{0,\varphi}}{\sqrt{(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right)}} = \frac{(R_0 - R_b) R_\varphi \cos \varphi}{\sqrt{(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right)}}$$

Sostituendo l'ultima relazione nell'espressione ottenuta inizialmente si ricava quanto segue:

$$1 = \frac{(R_0 - R_b)^2 R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2 (k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right)} + \frac{R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2} \rightarrow 1 = \frac{(R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi}{(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right)} + \cos^2 \varphi$$

$$(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right) = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi + (k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right) \cos^2 \varphi$$

$$(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right) (1 - \cos^2 \varphi) = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$(k^2 - 1) \left( (R_0 - R_b)^2 - a^2 \right) \sin^2 \varphi = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$\left( (R_0 - R_b)^2 k^2 - R_0^2 - a^2 k^2 + a^2 \right) \sin^2 \varphi = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$(R_0 - R_b)^2 k^2 \sin^2 \varphi - (R_0 - R_b)^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = a^2 (k^2 - 1) \sin^2 \varphi$$

$$(R_0 - R_b)^2 k^2 \sin^2 \varphi - (R_0 - R_b)^2 = a^2 (k^2 - 1) \sin^2 \varphi$$

$$(R_0 - R_b)^2 (k^2 \sin^2 \varphi - 1) = a^2 (k^2 - 1) \sin^2 \varphi$$

$$(R_0 - R_b)^2 = \frac{a^2 (k^2 - 1) \sin^2 \varphi}{k^2 \sin^2 \varphi - 1}$$

$$R_0(\varphi) = \sqrt{\frac{a^2 (k^2 - 1) \sin^2 \varphi}{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} + R_b = a \sin \varphi \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} + R_b$$

\* \* \*

Nota l'espressione di  $R_0(\varphi)$  (3.19), è possibile valutare i raggi di curvatura principale  $R_\varphi, R_g$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ . Mentre  $R_g$  è deducibile attraverso una semplice considerazione geometrica (2.87),  $R_\varphi$  lo si ricava sfruttando l'espressione di  $R_0$  e la scrittura della condizione di Gauss (3.17). Le espressioni finali dei raggi di curvatura principali di un guscio a meridiano iperbolico sono le seguenti:

$$R_g(\varphi) = a \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} + \frac{R_b}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(\varphi) = -a \sqrt{\frac{k^2 - 1}{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3}} \quad (3.20)$$

Dalle relazioni (3.20) si può osservare che la curvatura gaussiana risulta negativa, essendo  $R_\varphi$  negativo ed  $R_g$  positivo:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g < 0$ . La derivata di  $R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$  si ricava facilmente dalla seconda espressione (3.20):

$$\frac{dR_\varphi}{d\varphi} = \frac{3ak^2 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{k^2 - 1} \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}}{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3} \quad (3.21)$$

\* \* \*

Vengono qui di seguito ricavate le espressioni (3.20) dei raggi di curvatura principali  $R_\varphi, R_\vartheta$  in funzione di  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}
 R_\vartheta(\varphi) &= \frac{R_0}{\sin \varphi} = a \sqrt{\frac{k^2 - 1}{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} + \frac{R_b}{\sin \varphi} \\
 R_\varphi(\varphi) &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dR_0}{d\varphi} = \\
 &= \frac{1}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{k^2 \sin^2 \varphi - 1} \left( a \cos \varphi \sqrt{k^2 - 1} \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1} - a \sin \varphi \sqrt{k^2 - 1} \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{a \cos \varphi \sqrt{k^2 - 1}}{k^2 \sin^2 \varphi - 1} \left( \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1} - \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} \right) = \\
 &= \frac{a \sqrt{k^2 - 1}}{k^2 \sin^2 \varphi - 1} \frac{k^2 \sin^2 \varphi - 1 - k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} = \frac{a \sqrt{k^2 - 1}}{k^2 \sin^2 \varphi - 1} \frac{-1}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}} = \\
 &= - \frac{a \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3}} = -a \sqrt{\frac{k^2 - 1}{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3}}
 \end{aligned}$$

\* \* \*

Considerando le relazioni geometriche sopra determinate, attraverso le equazioni di congruenza (3.2), di legame elastico (3.3) ed indefinite di equilibrio (3.4), oppure attraverso le equazioni fondamentali (3.5)-(3.9), è possibile studiare il comportamento meccanico di un guscio a meridiano iperbolico.

\* \* \*

Nelle equazioni fondamentali (3.5)-(3.9) si può osservare che le derivate di  $1/R_0$  e di  $1/R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$  sono già state sviluppate, in quanto i termini ad esse relativi non compaiono esplicitamente. Questo è stato possibile poiché le derivate appena descritte possono essere valutate nel seguente modo:

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{R_0} \right) = - \frac{R_{0,\varphi}}{R_0^2} = - \frac{R_\varphi \cos \varphi}{R_0^2}, \quad \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{R_\varphi} \right) = - \frac{R_{\varphi,\varphi}}{R_\varphi^2}$$

dove è stata sfruttata la condizione di Gauss (3.17) per superfici di rivoluzione:  $R_{0,\varphi} = R_\varphi \cos \varphi$ .

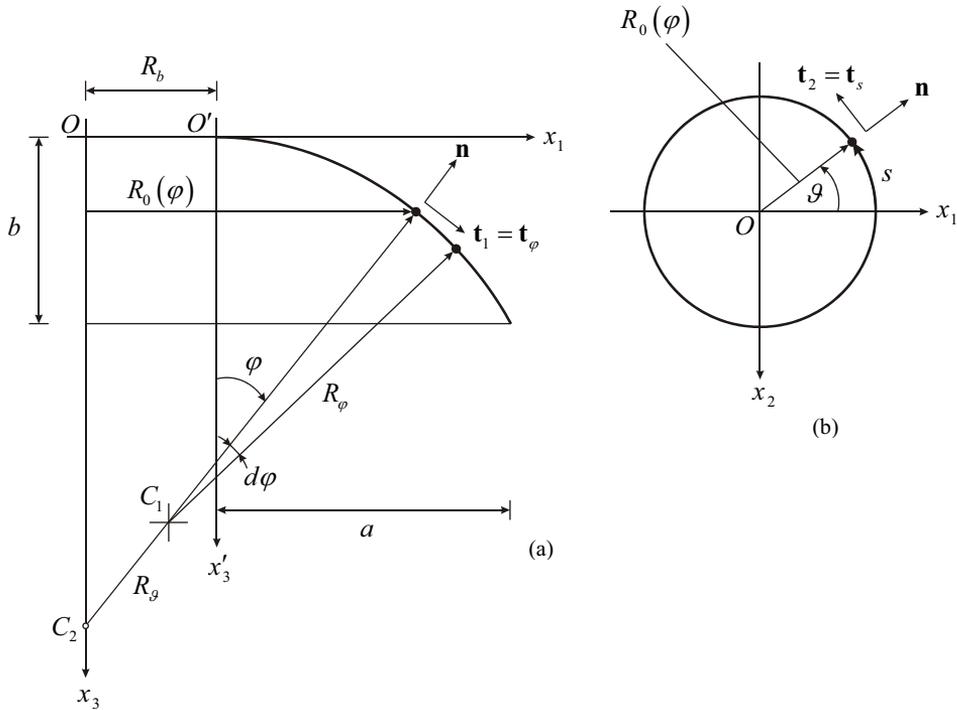
Si riporta inoltre il calcolo dell'espressione  $(1/R_\varphi)_{,\varphi}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{R_\varphi} \right) &= - \frac{1}{R_\varphi^2} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} = - \frac{1}{R_\varphi^2} \left( - \frac{a \sqrt{k^2 - 1}}{\sqrt{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3}} \right) = \\
 &= \frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3}{2} \frac{2ak^2 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{k^2 - 1} \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}}{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3} = \\
 &= \frac{3ak^2 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{k^2 - 1} \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}}{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3} \frac{(k^2 \sin^2 \varphi - 1)^3}{a^2 (k^2 - 1)} = \frac{3k^2 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{k^2 \sin^2 \varphi - 1}}{a \sqrt{k^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

\* \* \*

### 3.1.2 GUSCIO A MERIDIANO AVENTE FORMA DI CATENARIA

La superficie di riferimento di un guscio di rivoluzione a doppia curvatura è generata dalla rotazione attorno all'asse  $x_3$  di una curva. Se si assume come curva generatrice un ramo di *catenaria*, si ottiene la struttura rappresentata in figura 3.4. La superficie in parola è caratterizzata da una curvatura gaussiana positiva dal momento che i centri di curvatura  $C_1, C_2$ , corrispondenti ai due raggi principali  $R_\varphi, R_g$ , giacciono sullo stesso lato rispetto alla superficie media.



**Figura 3.4** – Rappresentazione di un guscio a meridiano a forma di catenaria: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

In figura 3.4 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie.  $R_b$  rappresenta l'offset dell'asse della curva di meridiano  $x'_3$  rispetto all'asse di rivoluzione  $x_3$ . La quantità  $a$  rappresenta il raggio alla base rispetto all'asse  $x'_3$  e  $b$  è la rispettiva quota. La descrizione della curva generatrice o di meridiano in coordinate cartesiane è la seguente:

$$x'_3 = b \left( 1 - \cosh \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) \right) \quad (3.22)$$

dove  $b$  è il raggio di curvatura al vertice della catenaria e  $R_0$  il raggio di parallelo. Nota l'equazione del meridiano, il passaggio successivo è quello di definire le quantità caratteristiche della superficie, ossia i parametri di Lamè  $A_1, A_2$  ed i raggi di curvatura principali  $R_1, R_2$ . Ricordando le relazioni (2.85) e (2.87), per un qualsiasi guscio di rivoluzione si ha  $A_1 = R_1 = R_\varphi$  e  $A_2 = R_0 = R_2 \sin \varphi = R_g \sin \varphi$ . Occorre quindi definire le espressioni dei raggi  $R_\varphi, R_g$  e  $R_0$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ .

In maniera analoga a quanto fatto per un arco di iperbole, considerando un arco di meridiano di lunghezza infinitesima ed applicando il teorema di Pitagora, è possibile approssimare la lunghezza in parola attraverso l'espressione (3.14). Essendo  $ds_\varphi = R_1 d\varphi = R_\varphi d\varphi$ ,  $dx'_3 = x'_{3,\varphi} d\varphi$  e  $dR_0 = R_{0,\varphi} d\varphi$ , si perviene alla (3.15).

Derivando l'espressione di  $x'_3$  (3.22), si perviene al risultato:

$$\frac{dx'_3}{d\varphi} = -\sinh \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) \frac{dR_0}{d\varphi} \quad (3.23)$$

Introducendo la condizione di Gauss (3.17) nell'equazione (3.23) si ricava:

$$\frac{dx'_3}{d\varphi} = -\sinh \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) R_\varphi \cos \varphi \quad (3.24)$$

Sostituendo le relazioni (3.17) e (3.24) nell'equazione (3.15) si ottiene la seguente espressione di  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ :

$$R_0(\varphi) = b \operatorname{arcsinh}(\tan \varphi) + R_b \quad (3.25)$$

\* \* \*

Viene qui di seguito dedotta l'espressione (3.25) del raggio di parallelo  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ .

$$ds_\varphi^2 = dx'^2_3 + dR_0^2 \rightarrow R_\varphi^2 d\varphi^2 = x'^2_{3,\varphi} d\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 d\varphi^2 \rightarrow 1 = x'^2_{3,\varphi} / R_\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 / R_\varphi^2$$

dove:  $R_{0,\varphi} = R_\varphi \cos \varphi$

Sostituendo la relazione (3.24) nell'espressione ottenuta inizialmente si ricava quanto segue:

$$1 = \sinh^2 \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) \frac{R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2} + \frac{R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2} \rightarrow 1 = \sinh^2 \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$1 - \cos^2 \varphi = \sinh^2 \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) \cos^2 \varphi \rightarrow \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \sinh^2 \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right) \rightarrow \tan^2 \varphi = \sinh^2 \left( \frac{R_0 - R_b}{b} \right)$$

$$\operatorname{arcsinh}(\tan \varphi) = \frac{R_0 - R_b}{b} \rightarrow R_0(\varphi) = b \operatorname{arcsinh}(\tan \varphi) + R_b$$

\* \* \*

L'espressione di  $R_0(\varphi)$  (3.25) consente di valutare il raggio di curvatura principale  $R_g$  in funzione dell'angolo  $\varphi$  attraverso una semplice considerazione geometrica (2.87). Le espressioni dei raggi di curvatura principale  $R_\varphi, R_g$  per un guscio a meridiano avente forma di catenaria sono le seguenti:

$$R_g(\varphi) = \frac{b \operatorname{arcsinh}(\tan \varphi) + R_b}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(\varphi) = \frac{b}{\cos^2 \varphi} \quad (3.26)$$

\* \* \*

Viene ricavata l'espressione (3.26) del raggio di curvatura principale  $R_\varphi$  in funzione di  $\varphi$ .

$$R_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dR_0}{d\varphi} = \frac{b}{\cos \varphi} \frac{1 + \tan^2 \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{b\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{\cos \varphi} = \frac{b}{\cos^2 \varphi}$$

\* \* \*

Dalle relazioni (3.26) si può osservare che la curvatura gaussiana risulta positiva essendo  $R_\varphi$  ed  $R_g$  entrambi positivi:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g > 0$ . La derivata di  $R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$  si ricava facilmente dalla seconda espressione (3.26):

$$\frac{dR_\varphi}{d\varphi} = \frac{2b \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \quad (3.27)$$

Considerando le relazioni geometriche sopra determinate, attraverso le equazioni di congruenza (3.2), di legame elastico (3.3) e di equilibrio (3.4), oppure attraverso le equazioni fondamentali (3.5)-(3.9), è possibile studiare il comportamento meccanico di un guscio a meridiano a forma di catenaria.

### 3.1.3 GUSCIO A MERIDIANO CICLOIDALE

La *cicloide* è il luogo dei punti descritti da un punto di una circonferenza, denominata generatrice, nel suo moto senza strisciare lungo una linea retta. Facendo ruotare attorno all'asse  $x_3$  un ramo di cicloide si ottiene la struttura rappresentata in figura 3.5. La superficie di riferimento della struttura rappresentata è caratterizzata da una curvatura

gaussiana positiva, poiché i centri di curvatura  $C_1, C_2$ , corrispondenti ai due raggi di curvatura principali  $R_\varphi, R_g$ , giacciono dallo stesso lato rispetto alla superficie. In figura 3.5 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie.  $R_b$  rappresenta l'offset dell'asse della curva di meridiano  $x'_3$  rispetto all'asse di rivoluzione  $x_3$ , mentre  $r_c$  è il raggio della circonferenza generatrice. La quantità  $a = \pi r_c$  rappresenta il raggio alla base rispetto all'asse  $x'_3$  e  $b = 2r_c$  è la rispettiva quota.

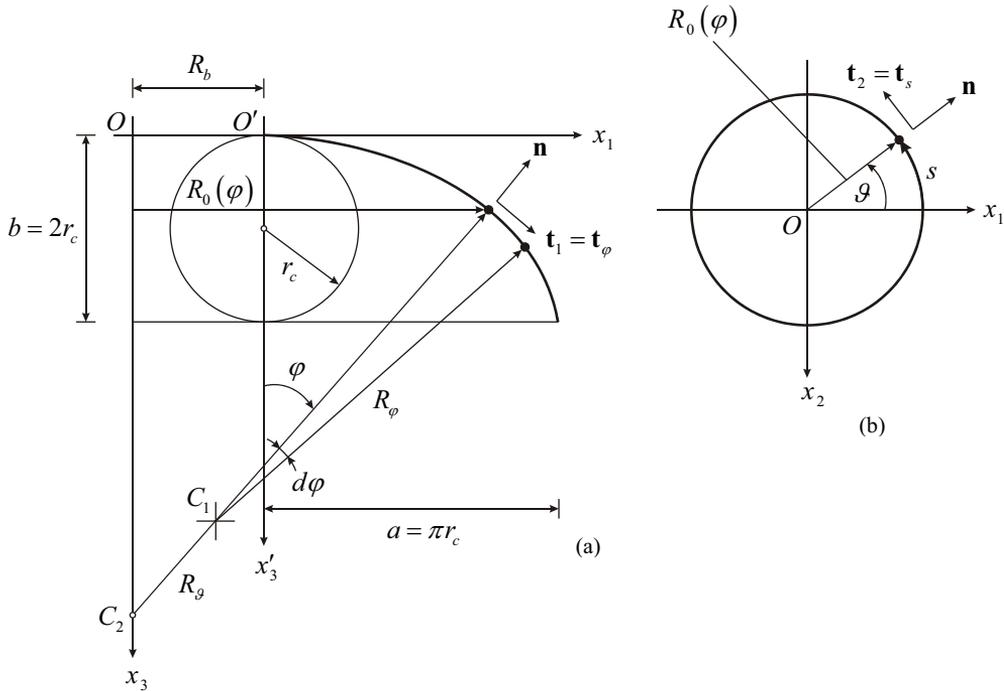


Figura 3.5 – Rappresentazione di un guscio a meridiano cicloidale: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

La descrizione della curva generatrice o di meridiano in forma parametrica è la seguente:

$$\begin{aligned} R_0 &= r_c (2\varphi + \sin 2\varphi) + R_b \\ x'_3 &= r_c (1 - \cos 2\varphi) \end{aligned} \quad (3.28)$$

A differenza delle precedenti curve le equazioni parametriche (3.28) forniscono il raggio di parallelo  $R_0$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ . Per definire le quantità caratteristiche della superficie, ossia i parametri di Lamè  $A_1, A_2$  ed i raggi di curvatura principali  $R_1, R_2$ , occorre impiegare le relazioni (2.85) e (2.87), nonché le equazioni  $A_1 = R_1 = R_\varphi$  e

$A_2 = R_0 = R_2 \sin \varphi = R_g \sin \varphi$ . Nota l'espressione di  $R_0(\varphi)$  (3.28), è possibile valutare il raggio di curvatura principale  $R_g$  in funzione dell'angolo  $\varphi$  attraverso una semplice considerazione geometrica (2.87). Le espressioni dei raggi di curvatura principale  $R_\varphi, R_g$  per un guscio a meridiano cicloidale risultano essere le seguenti:

$$R_g(\varphi) = \frac{r_c(2\varphi + \sin 2\varphi)}{\sin \varphi} + \frac{R_b}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(\varphi) = 4r_c \cos \varphi \quad (3.29)$$

\* \* \*

Viene dedotta l'espressione (3.29) del raggio di curvatura principale  $R_\varphi$  in funzione di  $\varphi$ .

$$R_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dR_0}{d\varphi} = \frac{2r_c(1 + \cos 2\varphi)}{\cos \varphi} = \frac{4r_c \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} = 4r_c \cos \varphi$$

\* \* \*

Dalle relazioni (3.29) si può osservare che la curvatura gaussiana risulta positiva essendo  $R_\varphi$  ed  $R_g$  entrambi positivi:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g > 0$ . La derivata di  $R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$  si ricava facilmente dalla seconda espressione (3.29):

$$\frac{dR_\varphi}{d\varphi} = -4r_c \sin \varphi \quad (3.30)$$

Considerando le relazioni geometriche sopra determinate, attraverso le equazioni di congruenza (3.2), di legame elastico (3.3) e di equilibrio (3.4), oppure attraverso le equazioni fondamentali (3.5)-(3.9), è possibile studiare il comportamento meccanico di un guscio a meridiano cicloidale.

### 3.1.4 GUSCIO A MERIDIANO PARABOLICO

Facendo ruotare attorno all'asse  $x_3$  un arco di *parabola* si ottiene un guscio a doppia curvatura a meridiano parabolico, rappresentato in figura 3.6. L'arco di parabola viene descritto mediante la definizione di tre punti, caratterizzati dalle ascisse  $a, c, d$  rispetto all'asse  $x'_3$  e dalla distanza relativa  $b$ . In particolare,  $a, c$  definiscono i raggi alla base e all'apice del guscio e  $b$  è la distanza relativa tra queste due sezioni. La superficie in parola è dotata di una curvatura gaussiana positiva, poiché i centri di curvatura  $C_1, C_2$ , corrispondenti ai due raggi principali  $R_\varphi, R_g$ , giacciono dalla stessa parte rispetto alla

superficie di riferimento. La descrizione della curva generatrice o di meridiano in coordinate cartesiane è la seguente:

$$(R_0 - R_b)^2 - \frac{a^2 - d^2}{b} x'_3 = 0 \quad (3.31)$$

dove  $R_0$  il raggio di parallelo. Facendo la posizione:

$$k = \frac{a^2 - d^2}{b} \quad (3.32)$$

l'espressione (3.31) può essere riscritta nella forma:

$$(R_0 - R_b)^2 - kx'_3 = 0 \quad (3.33)$$

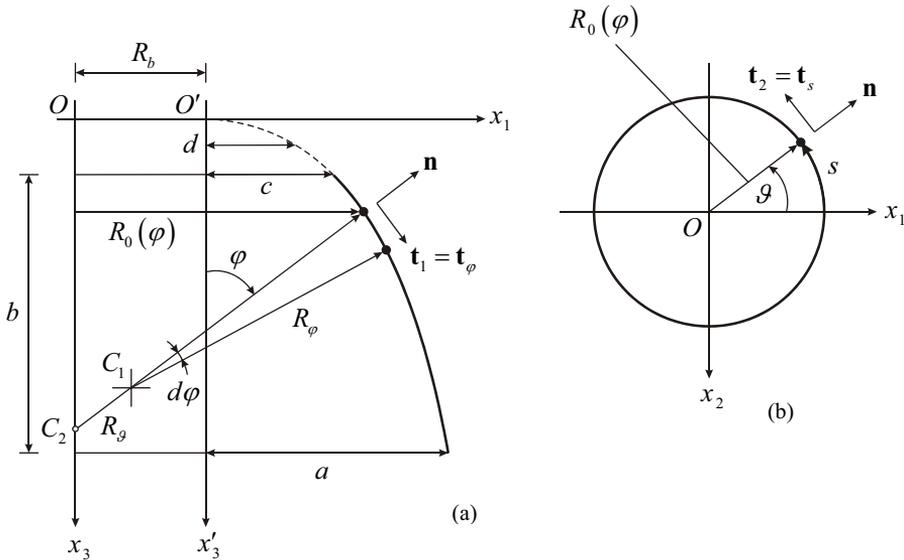


Figura 3.6 – Rappresentazione di un guscio a meridiano parabolico: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

Nota l'equazione del meridiano, occorre definire le quantità caratteristiche della superficie, ossia i parametri di Lamè  $A_1, A_2$  ed i raggi di curvatura principali  $R_1, R_2$ . Ricordando le relazioni (2.85) e (2.87), per un qualsiasi guscio di rivoluzione si ha  $A_1 = R_1 = R_\varphi$  e  $A_2 = R_0 = R_2 \sin \varphi = R_g \sin \varphi$ . Occorre quindi calcolare le espressioni dei raggi  $R_\varphi, R_g$  e  $R_0$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ .

In maniera analoga a quanto fatto per un arco di iperbole, considerando un arco di meridiano di lunghezza infinitesima ed applicando il teorema di Pitagora, è possibile approssimare la lunghezza in parola attraverso l'espressione (3.14). Ricordando che

$ds_\varphi = R_1 d\varphi = R_\varphi d\varphi$ ,  $dx'_3 = x'_{3,\varphi} d\varphi$  e  $dR_0 = R_{0,\varphi} d\varphi$ , la (3.14) assume la forma (3.15).

Derivando l'espressione di  $x'_3$  (3.33), si ha:

$$\frac{dx'_3}{d\varphi} = 2 \frac{R_0 - R_b}{k} \frac{dR_0}{d\varphi} \quad (3.34)$$

Introducendo la condizione di Gauss (3.17) nell'equazione (3.34), risulta:

$$\frac{dx'_3}{d\varphi} = 2 \frac{R_0 - R_b}{k} R_\varphi \cos \varphi \quad (3.35)$$

Sostituendo le relazioni (3.17) e (3.35) nell'equazione (3.15) si ricava l'espressione di  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ :

$$R_0(\varphi) = \frac{k \tan \varphi}{2} + R_b \quad (3.36)$$

\* \* \*

Viene qui di seguito dedotta l'espressione (3.36) del raggio di parallelo  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ .

$$ds_\varphi^2 = dx_3'^2 + dR_0^2 \rightarrow R_\varphi^2 d\varphi^2 = x_{3,\varphi}'^2 d\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 d\varphi^2 \rightarrow 1 = x_{3,\varphi}'^2 / R_\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 / R_\varphi^2$$

dove:  $R_{0,\varphi} = R_\varphi \cos \varphi$

Sostituendo la relazione (3.35) nell'espressione ottenuta inizialmente si ricava:

$$1 = 4 \left( \frac{R_0 - R_b}{k} \right)^2 \frac{R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2} + \frac{R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2} \rightarrow 1 = 4 \left( \frac{R_0 - R_b}{k} \right)^2 \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$1 - \cos^2 \varphi = 4 \left( \frac{R_0 - R_b}{k} \right)^2 \cos^2 \varphi \rightarrow \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 4 \left( \frac{R_0 - R_b}{k} \right)^2 \rightarrow \tan^2 \varphi = 4 \left( \frac{R_0 - R_b}{k} \right)^2$$

$$\tan \varphi = 2 \frac{R_0 - R_b}{k} \rightarrow R_0(\varphi) = \frac{k \tan \varphi}{2} + R_b$$

\* \* \*

Nota l'espressione di  $R_0(\varphi)$  (3.36), è possibile valutare il raggio di curvatura principale  $R_g$  in funzione dell'angolo  $\varphi$  attraverso una semplice considerazione geometrica (2.87). Le espressioni dei raggi di curvatura principale  $R_\varphi, R_g$  per un guscio a meridiano parabolico sono le seguenti:

$$R_g(\varphi) = \frac{k}{2 \cos \varphi} + \frac{R_b}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(\varphi) = \frac{k}{2 \cos^3 \varphi} \quad (3.37)$$

Dalle relazioni (3.37) si può osservare che la curvatura gaussiana risulta positiva essendo  $R_\varphi$  ed  $R_g$  entrambi positivi:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g > 0$ . La derivata di  $R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$  si ricava facilmente dalla seconda espressione (3.29):

$$\frac{dR_\varphi}{d\varphi} = \frac{3k \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \quad (3.38)$$

\* \* \*

Viene di seguito dedotta l'espressione (3.37) del raggio di parallelo  $R_\varphi$  in funzione di  $\varphi$ .

$$R_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dR_0}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{k}{2} (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{k}{2} \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{k}{2 \cos^3 \varphi}$$

\* \* \*

Considerando le relazioni geometriche sopra determinate, attraverso le equazioni di congruenza (3.2), di legame elastico (3.3) e di equilibrio (3.4), oppure attraverso le equazioni fondamentali (3.5)-(3.9), è possibile studiare il comportamento meccanico di un guscio a meridiano cicloidale.

### 3.1.5 GUSCIO A MERIDIANO ELLITTICO E CIRCOLARE

Se si assume come curva meridiana un arco di *ellisse*, il guscio di rivoluzione che si ottiene è rappresentato in figura 3.7. La superficie in parola è caratterizzata da una curvatura gaussiana positiva, poiché i centri di curvatura  $C_1, C_2$ , corrispondenti ai due raggi principali  $R_\varphi, R_g$ , giacciono dalla stessa parte rispetto alla superficie. In figura 3.7 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie.  $R_b$  rappresenta l'offset dell'asse della curva di meridiano  $x'_3$  rispetto all'asse di rivoluzione  $x_3$ , mentre  $a, b$  sono i semi-diametri dell'ellisse.

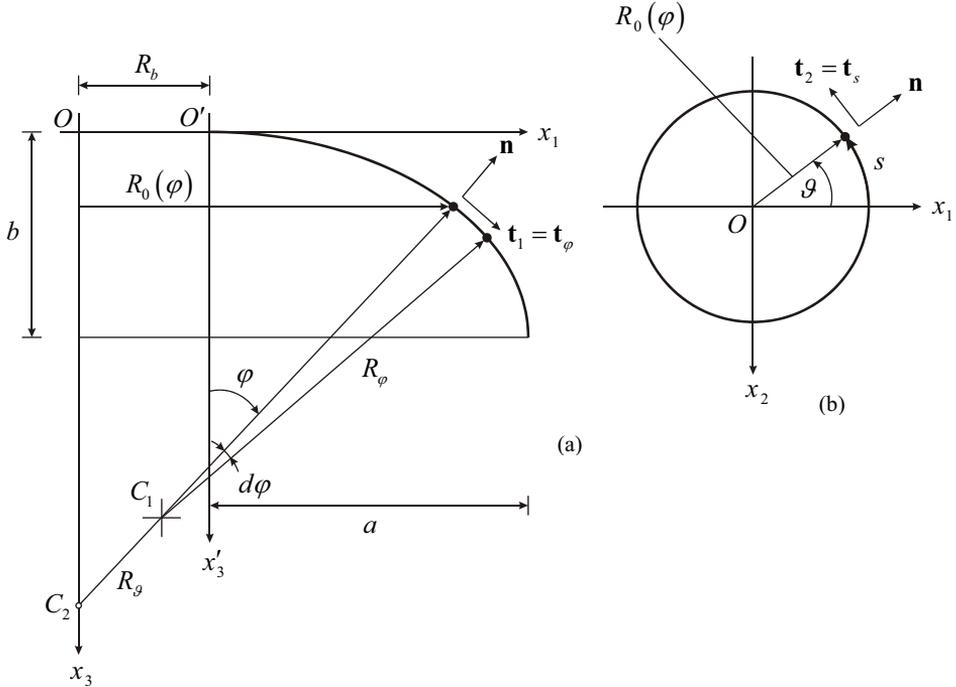
La descrizione della curva generatrice o di meridiano in coordinate cartesiane è la seguente:

$$\frac{(R_0 - R_b)^2}{a^2} + \frac{(b - x'_3)^2}{b^2} = 1 \quad (3.39)$$

dove  $R_0$  il raggio di parallelo. Ponendo  $k = a/b$ , l'espressione (3.39) può essere riscritta nella forma:

$$(R_0 - R_b)^2 + k^2 (b - x'_3)^2 = a^2 \quad (3.40)$$

La forma del meridiano risulta definita una volta assegnato il rapporto  $k = a/b$ .



**Figura 3.7** – Rappresentazione di un guscio a meridiano ellittico: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

Si può osservare che se il parametro  $k$  risulta elevato, la curvatura di meridiano risulta molto ribassata, tanto da degenerare in una retta orizzontale al tendere di  $k$  all'infinito. D'altra parte, se  $k$  è piccolo la curva di meridiano risulterà tale da definire un ulteriore caso degenerare per  $k$  tendente a zero. Quando  $k$  possiede valore unitario, si ricava un arco di circonferenza ( $k=1 \rightarrow a=b=R$ ).

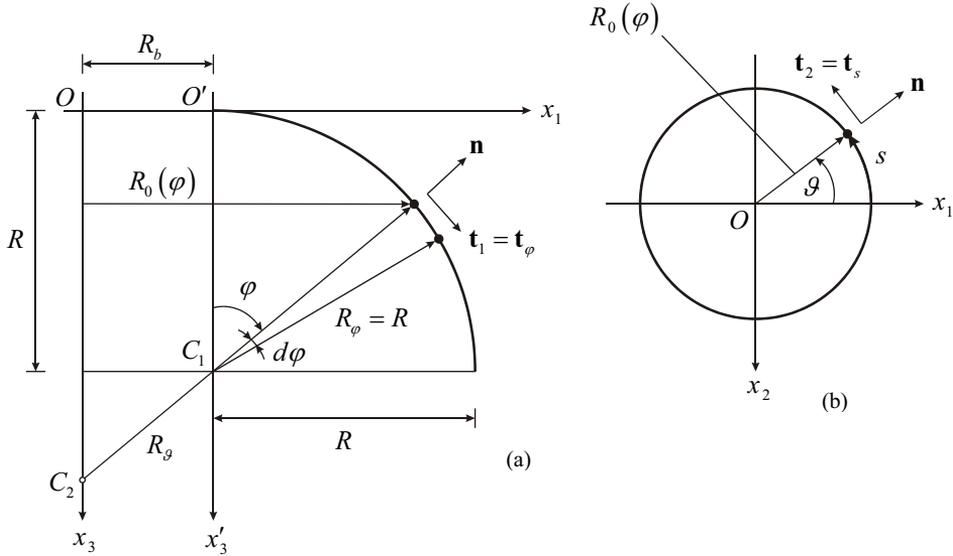
Il guscio a meridiano *circolare* può quindi essere visto come un caso particolare del guscio ellittico (figura 3.8). Per  $k=1$ , l'equazione (3.40) diventa la seguente:

$$(R_0 - R_b)^2 + (R - x'_3)^2 = R^2 \quad (3.41)$$

dove  $R$  è il raggio dell'arco circolare. Nota l'equazione del meridiano, risulta possibile definire le quantità caratteristiche della superficie, ossia i parametri di Lamè  $A_1, A_2$  ed i raggi di curvatura principale  $R_1, R_2$ . Ricordando le relazioni (2.85) e (2.87), per un qualsiasi guscio di rivoluzione risulta  $A_1 = R_1 = R_\varphi$  e  $A_2 = R_0 = R_2 \sin \varphi = R_g \sin \varphi$ . Occorre quindi definire le espressioni dei raggi  $R_\varphi, R_g$  e  $R_0$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ .

In maniera analoga a quanto fatto per un arco di iperbole, considerando un arco di

meridiano di lunghezza infinitesima ed applicando il teorema di Pitagora, è possibile approssimare la lunghezza in parola attraverso l'espressione (3.14), la quale ricordando che  $ds_\varphi = R_1 d\varphi = R_\varphi d\varphi$ ,  $dx'_3 = x'_{3,\varphi} d\varphi$  e  $dR_0 = R_{0,\varphi} d\varphi$ , assume la forma (3.15).



**Figura 3.8** – Rappresentazione di un guscio a meridiano circolare: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

Dall'equazione (3.40), ricavando  $x'_3$  in funzione del raggio di parallelo  $R_0$  e derivando l'espressione di  $x'_3$  così ottenuta, si perviene al seguente risultato:

$$x'_3 = b - \sqrt{\frac{a^2 - (R_0 - R_b)^2}{k^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{dx'_3}{d\varphi} = \frac{R_0 - R_b}{(b - x'_3)k^2} \frac{dR_0}{d\varphi} \quad (3.42)$$

Introducendo le relazioni (3.17) e (3.40) nella seconda equazione (3.42) si ricava:

$$\frac{dx'_3}{d\varphi} = \frac{(R_0 - R_b)R_\varphi \cos \varphi}{\sqrt{k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2)}} \quad (3.43)$$

Sostituendo le relazioni (3.17) e (3.43) nell'equazione (3.15) si deduce la seguente espressione di  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ :

$$R_0(\varphi) = \frac{ak \tan \varphi}{\sqrt{1 + k^2 \tan^2 \varphi}} + R_b \quad (3.44)$$

\* \* \*

Viene qui di seguito dedotta l'espressione (3.44) del raggio di parallelo  $R_0(\varphi)$  in funzione di  $\varphi$ .

$$ds_\varphi^2 = dx_{3,\varphi}^2 + dR_0^2 \rightarrow R_\varphi^2 d\varphi^2 = x_{3,\varphi}^{\prime 2} d\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2 d\varphi^2 \rightarrow 1 = x_{3,\varphi}^{\prime 2}/R_\varphi^2 + R_{0,\varphi}^2/R_\varphi^2$$

dove:  $R_{0,\varphi} = R_\varphi \cos \varphi$

$$\begin{aligned} x_{3,\varphi}' &= \left( b - \sqrt{\frac{a^2 - (R_0 - R_b)^2}{k^2}} \right)_{,\varphi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - (R_0 - R_b)^2}{k^2} \right)^{-1/2} \left( -\frac{2(R_0 - R_b)R_{0,\varphi}}{k^2} \right) = \\ &= \frac{k(R_0 - R_b)R_{0,\varphi}}{k^2 \sqrt{a^2 - (R_0 - R_b)^2}} = \frac{(R_0 - R_b)R_{0,\varphi}}{\sqrt{k^2(a^2 - (R_0 - R_b)^2)}} = \frac{(R_0 - R_b)R_\varphi \cos \varphi}{\sqrt{k^2(a^2 - (R_0 - R_b)^2)}} \end{aligned}$$

Sostituendo l'ultima relazione nell'espressione ottenuta inizialmente si ricava:

$$1 = \frac{(R_0 - R_b)^2 R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2 k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2)} + \frac{R_\varphi^2 \cos^2 \varphi}{R_\varphi^2} \rightarrow 1 = \frac{(R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi}{k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2)} + \cos^2 \varphi$$

$$k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2) = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi + k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2) \cos^2 \varphi$$

$$k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2) (1 - \cos^2 \varphi) = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$k^2 (a^2 - (R_0 - R_b)^2) \sin^2 \varphi = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$(a^2 k^2 - k^2 (R_0 - R_b)^2) \sin^2 \varphi = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$a^2 k^2 \sin^2 \varphi - k^2 (R_0 - R_b)^2 \sin^2 \varphi = (R_0 - R_b)^2 \cos^2 \varphi$$

$$a^2 k^2 \sin^2 \varphi = (R_0 - R_b)^2 (k^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

$$(R_0 - R_b)^2 = \frac{a^2 k^2 \sin^2 \varphi}{k^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}$$

$$R_0(\varphi) = \sqrt{\frac{a^2 k^2 \sin^2 \varphi}{k^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} + R_b = \frac{ak \sin \varphi}{\sqrt{k^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} + R_b = \frac{ak \tan \varphi}{\sqrt{1 + k^2 \tan^2 \varphi}} + R_b$$

\* \* \*

Nota l'espressione di  $R_0(\varphi)$  (3.44), è possibile valutare i raggi di curvatura principale  $R_\varphi, R_g$  in funzione dell'angolo  $\varphi$ . Mentre  $R_g$  è deducibile attraverso una semplice considerazione geometrica (2.87),  $R_\varphi$  si ricava sfruttando l'espressione di  $R_0$  e la scrittura della condizione di Gauss (3.17). Le espressioni finali dei raggi di curvatura principali di un guscio a meridiano ellittico sono le seguenti:

$$R_g(\varphi) = \frac{ak}{\cos \varphi \sqrt{1 + k^2 \tan^2 \varphi}} + \frac{R_b}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(\varphi) = \frac{ak}{\cos^3 \varphi \sqrt{(1 + k^2 \tan^2 \varphi)^3}} \quad (3.45)$$

Dalle relazioni (3.45) si può osservare che la curvatura gaussiana risulta positiva essendo  $R_\varphi$  ed  $R_g$  entrambi positivi:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g > 0$ . La derivata di  $R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$  si

ricava facilmente dalla seconda espressione (3.45):

$$\frac{dR_\varphi}{d\varphi} = \frac{3ak \sin \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (1-k^2)}{\cos^4 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} \quad (3.46)$$

\* \* \*

Vengono qui di seguito ricavate le espressioni (3.45) dei raggi di curvatura principali  $R_\varphi, R_\psi$  in funzione di  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} R_\psi(\varphi) &= \frac{R_0}{\sin \varphi} = \frac{ak}{\cos \varphi \sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi}} + \frac{R_0}{\sin \varphi} \\ R_\varphi(\varphi) &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dR_0}{d\varphi} = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \left( \frac{1}{1+k^2 \tan^2 \varphi} \left( ak(1+\tan^2 \varphi) \sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi} - ak \tan \varphi \frac{k^2 \tan \varphi (1+\tan^2 \varphi)}{\sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{ak(1+\tan^2 \varphi)}{1+k^2 \tan^2 \varphi} \left( \sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi} - \frac{k^2 \tan \varphi}{\sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi}} \right) = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{ak(1+\tan^2 \varphi)}{1+k^2 \tan^2 \varphi} \left( \frac{1+k^2 \tan^2 \varphi - k^2 \tan^2 \varphi}{\sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi}} \right) = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{ak(1+\tan^2 \varphi)}{\sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3}} = \frac{ak}{\cos^3 \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3}} \end{aligned}$$

Si riporta anche il calcolo dell'espressione  $(1/R_\varphi)_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{R_\varphi} \right) &= -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} = -\frac{1}{R_\varphi^2} \left( \frac{ak}{\cos^3 \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3}} \right)_\varphi = \\ &= -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3ak \cos^2 \varphi \sin \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} - \frac{3}{2} ak \cos^3 \varphi 2k^2 \tan \varphi (1+\tan^2 \varphi) \sqrt{1+k^2 \tan^2 \varphi}}{\cos^6 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = \\ &= -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3ak \cos^2 \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (\sin \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi) - \cos \varphi (1+\tan^2 \varphi) k^2 \tan \varphi)}{\cos^6 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = \\ &= -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3ak \cos^3 \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (\tan \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi) - (1+\tan^2 \varphi) k^2 \tan \varphi)}{\cos^6 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = \\ &= -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3ak \tan \varphi \cos^3 \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (1+k^2 \tan^2 \varphi - (1+\tan^2 \varphi) k^2)}{\cos^6 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = \\ &= -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3ak \tan \varphi \cos^3 \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (1-k^2)}{\cos^6 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = -\frac{1}{R_\varphi^2} \frac{3ak \sin \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (1-k^2)}{\cos^4 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = \\ &= -\frac{\cos^6 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3}{a^2 k^2} \frac{3ak \sin \varphi \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} (1-k^2)}{\cos^4 \varphi (1+k^2 \tan^2 \varphi)^3} = \\ &= \frac{3 \cos^2 \varphi \sin \varphi (k^2 - 1) \sqrt{(1+k^2 \tan^2 \varphi)^3}}{ak} \end{aligned}$$

\* \* \*

Per  $k=1$  la curva di meridiano risulta essere un arco di circonferenza ( $a=b=R$ ). Pertanto, le espressioni (3.44) e (3.45) assumono l'aspetto:

$$R_0(\varphi) = R \sin \varphi + R_b, \quad R_g(\varphi) = R + \frac{R_b}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(\varphi) = R \quad (3.47)$$

dove  $R$  è il raggio dell'arco circolare, che risulta essere costante. Si vuol far notare che per  $R_b = 0$  si ha  $R_g = R_\varphi = R$ . Inoltre, la derivata (3.46) risulta identicamente nulla, in quanto derivata di una quantità costante. Si può osservare che un guscio a meridiano circolare si distingue dai gusci a doppia curvatura precedentemente analizzati, poiché  $R_\varphi$  risulta indipendente da  $\varphi$ , ossia non varia rispetto a tale parametro, e di conseguenza si ha  $R_{\varphi,\varphi} = 0$ . Questo comporta una semplificazione delle equazioni fondamentali.

Considerando le relazioni geometriche sopra determinate, attraverso le equazioni di congruenza (3.2), di legame elastico (3.3) e di equilibrio (3.4), oppure attraverso le equazioni fondamentali (3.5)-(3.9), è possibile studiare il comportamento meccanico di un guscio a meridiano ellittico o circolare.

In particolare, vista l'indipendenza di  $R_\varphi$  rispetto a  $\varphi$ , per un guscio a meridiano circolare le equazioni fondamentali (3.5)-(3.9) assumono il seguente aspetto:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s_\varphi$ :*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{A_{11} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\ & \quad \left. - \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) u_\varphi + \\ & \quad + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\ & \quad \left. - \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_s + \\ & \quad + \left( \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{A_{11} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{B_{11} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \beta_s + q_\varphi = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata s :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + A_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{2A_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - A_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & + A_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \left. \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) w + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{2B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + \left. B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} \right. \\
 & \left. - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_s + q_s = I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( - \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{A_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \kappa \frac{2A_{45}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{2A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( \left( - \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( - \frac{B_{16}}{R_\varphi} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \left( - \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( - \frac{B_{12}}{R_\varphi} - \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s + q_n = I_0 \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

(d) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s_\varphi$  :*

$$\left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{B_{11} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{B_{11} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{D_{11} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{2D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{D_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{D_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{D_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_s + m_\varphi = I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{2B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial s} - B_{66} \left( \frac{\cos^2\varphi}{R_0^2} - \frac{\sin\varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin\varphi}{R_0} \Big) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{26} \sin\varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial\varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{22} \sin\varphi}{R_0} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & \left. + \frac{2B_{16} \cos\varphi}{R_\varphi R_0} + B_{26} \left( \frac{\cos\varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{R_0^2} \right) \right) w + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \left( \frac{2D_{16} \cos\varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{26} \cos\varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial\varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{D_{22} \cos\varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos\varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial s} + \right. \\
 & \left. + D_{26} \left( \frac{\cos^2\varphi}{R_0^2} - \frac{\sin\varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{45} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{D_{66} \cos\varphi}{R_\varphi R_0} \frac{\partial}{\partial\varphi} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2D_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial s} + \right. \\
 & \left. - D_{66} \left( \frac{\cos^2\varphi}{R_0^2} - \frac{\sin\varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{55} \right) \beta_s + m_s = I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Le relazioni (3.48)-(3.52) rappresentano le equazioni fondamentali o equazioni indefinite di equilibrio in termini di componenti di spostamento per il guscio di rivoluzione a meridiano circolare.

## 3.2 GUSCI DI RIVOLUZIONE A SINGOLA CURVATURA

### 3.2.1 GUSCIO CONICO

Un *guscio conico* è una struttura bidimensionale, la cui superficie di riferimento a generatrice rettilinea viene definita dalla rotazione attorno all'asse di rivoluzione  $x_3$  di una linea retta inclinata rispetto all'asse stesso di un angolo  $\alpha$  (figura 3.9). L'angolo  $\alpha$  è costante ed di conseguenza anche l'angolo  $\varphi$  ad esso legato ( $\varphi = \pi/2 - \alpha$ ). La curvatura di meridiano è nulla e, di conseguenza, il raggio di curvatura è pari a infinito ( $R_\varphi = \infty$ ). La superficie in parola è caratterizzata da una curvatura gaussiana nulla, essendo uno dei due raggi di curvatura principali  $R_\varphi, R_g$  infinito ( $R_\varphi = \infty$ ). In figura 3.9 sono rappresentati i

principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie.  $R_b$  rappresenta il raggio all'apice del guscio.

La descrizione della curva generatrice o di meridiano in funzione dell'ascissa curvilinea  $x$  della retta generatrice è la seguente:

$$R_0(x) = R_b + x \sin \alpha = R_b + x \cos \varphi \quad (3.53)$$

Nota l'espressione di  $R_0(x)$  (3.53), è possibile valutare il raggio di curvatura principale  $R_\varphi$  attraverso le relazioni geometriche (2.87), mentre  $R_\varphi$  risulta essere infinito. Per un guscio conico si ha:

$$R_\varphi(x) = \frac{R_b + x \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad R_\varphi(x) = \infty \quad (3.54)$$

Dalle relazioni (3.54) si ricava che la curvatura gaussiana risulta nulla essendo  $R_\varphi$  infinito:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_\varphi = 0$ .

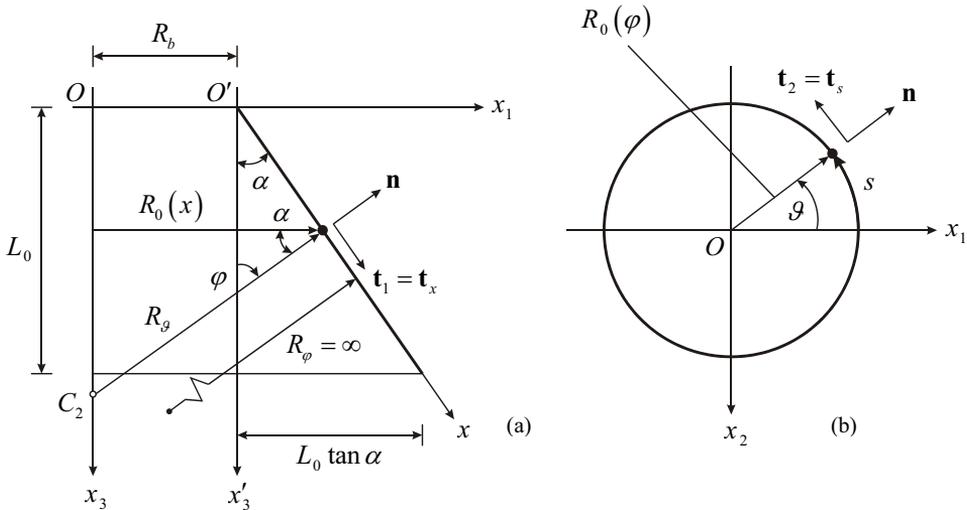


Figura 3.9 – Rappresentazione di un guscio conico: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

Le equazioni governanti il comportamento meccanico del guscio conico possono essere ricavate dalle equazioni del guscio a meridiano circolare. Per quest'ultimo guscio il parallelo risulta descritto attraverso la coordinata curvilinea  $s$ . Inoltre, è sempre possibile definire il meridiano attraverso l'ascissa curvilinea  $s_\varphi$  effettuando il seguente cambio di variabile:

$$ds_\varphi = R_\varphi d\varphi \quad (3.55)$$

Una volta operato il cambio di variabile (3.55), ponendo:

$$ds_\varphi = dx \quad (3.56)$$

ed introducendo nelle equazioni così ottenute le relazioni geometriche (3.53) e (3.54), risulta possibile definire le equazioni del guscio conico. In altre parole, operando in questo modo si è rettificato il meridiano.

Eseguiti i cambiamenti di parametro indotti dalle relazioni (3.55) e (3.56), ponendo  $\varphi = x$  ed eliminando i termini aventi come coefficiente  $1/R_\varphi = 0$ , le equazioni di congruenza (3.2) per un guscio conico assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_x \cos \varphi}{R_0} + \frac{w \sin \varphi}{R_0} \\ \gamma_{xs}^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s} - \frac{u_s \cos \varphi}{R_0} \\ \chi_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \chi_s &= \frac{\partial \beta_s}{\partial s} + \frac{\beta_x \cos \varphi}{R_0} \\ \chi_{xs} &= \frac{\partial \beta_s}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial s} - \frac{\beta_s \cos \varphi}{R_0} \\ \gamma_{xn} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \gamma_{sn} &= \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u_s \sin \varphi}{R_0} + \beta_s \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ponendo  $\varphi = x$ , si ricava la seguente forma matriciale delle equazioni di legame elastico (3.3):

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_s \\ N_{xs} \\ M_x \\ M_s \\ M_{xs} \\ T_x \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_s^0 \\ \gamma_{xs}^0 \\ \chi_x \\ \chi_s \\ \chi_{xs} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{sn} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Introdotti i cambiamenti di parametro (3.55) e (3.56), ponendo  $\varphi = x$  ed eliminando i termini aventi come coefficiente  $1/R_\varphi = 0$ , dalle (3.4) si ottengono le seguenti equazioni indefinite di equilibrio:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + (N_x - N_s) \frac{\cos \varphi}{R_0} + q_x &= I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \\
 \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + 2N_{xs} \frac{\cos \varphi}{R_0} + T_s \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_s &= I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \\
 \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial s} + T_x \frac{\cos \varphi}{R_0} - N_s \frac{\sin \varphi}{R_0} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} + (M_x - M_s) \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_x + m_x &= I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \\
 \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial s} + 2M_{xs} \frac{\cos \varphi}{R_0} - T_s + m_s &= I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Infine, procedendo in maniera analoga, introdotti i cambiamenti di parametro (3.55) e (3.56), ponendo  $\varphi = x$  ed eliminando i termini aventi come coefficiente  $1/R_\varphi = 0$ , dalle equazioni (3.48)-(3.52) si perviene al seguente risultato:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $x$  :*

$$\begin{aligned}
 &\left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{11} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{A_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_x + \\
 &+ \left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 &- \left. \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_s + \\
 &+ \left( \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 &+ \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{11} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) \beta_x + \\
 &+ \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 &+ \left. (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) \beta_s + q_x = I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

(b) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_x + \\
 & \quad \left( A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{A_{66} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_s + \\
 & \quad \left( \left( \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & \quad \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2B_{16} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_x + \\
 & \quad \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{B_{66} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_s + q_s = I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

(c) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{A_{12} \sin \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) u_x + \\
 & \quad \left( -\left( \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left( \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) u_s + \\
 & \quad \left( \kappa A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\kappa A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{A_{22} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \right) w +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \left( -\frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( -\frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_x + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( -\frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s + q_n = I_0 \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

(d) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $x$ :*

$$\begin{aligned}
 & \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{11} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_x + \\
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{11} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{D_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_s + m_x = I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

(e) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$ :*

$$\begin{aligned}
 & \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2B_{16} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} \right) u_x + \\
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{66} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) u_s +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \left( \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2D_{16} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{D_{66} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{55} \right) \beta_s + m_s = I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Le relazioni (3.60)-(3.64) rappresentano le equazioni fondamentali o equazioni indefinite di equilibrio in termini di componenti di spostamento per il guscio conico.

### 3.2.2 GUSCIO CILINDRICO CIRCOLARE

Il *guscio cilindrico circolare* ha la superficie di riferimento definita dalla rotazione attorno all'asse di rivoluzione  $x_3$  di una linea retta parallela all'asse stesso come rappresentato in figura 3.10. Può essere pensato come caso degenero del guscio conico. Infatti, osservando la figura 3.9, per  $\alpha = 0$  si ottiene il cilindro circolare. Di conseguenza si ha anche  $\varphi = \pi/2$ . Il cilindro circolare essendo derivato direttamente dal guscio conico ne mantiene le caratteristiche geometriche. Essendo la generatrice della superficie di riferimento una retta, la curvatura di meridiano è nulla e di conseguenza il raggio di curvatura è pari a infinito ( $R_\varphi = \infty$ ). Di conseguenza, la superficie in parola è caratterizzata da una curvatura gaussiana nulla. In figura 3.10 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie.  $R_b = R$  rappresenta il raggio del cilindro circolare.

La descrizione della curva generatrice o di meridiano in funzione dell'ascissa curvilinea  $x$  della retta generatrice è la seguente:

$$R_0(x) = R_b = R \tag{3.65}$$

Nota l'espressione di  $R_0(x)$  (3.65), è possibile valutare il raggio di curvatura principale  $R_\varphi$  attraverso le relazioni geometriche (2.87), mentre  $R_\varphi$  risulta essere infinito. Per

$\varphi = \pi/2$  si ha  $\sin \varphi = 1$ . Pertanto, per il cilindro circolare risulta:

$$R_g(x) = \frac{R}{\sin \varphi} = R, \quad R_\varphi(x) = \infty \quad (3.66)$$

Dalle relazioni (3.66) si può osservare che la curvatura gaussiana è nulla, essendo  $R_\varphi$  infinito:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g = 0$ .

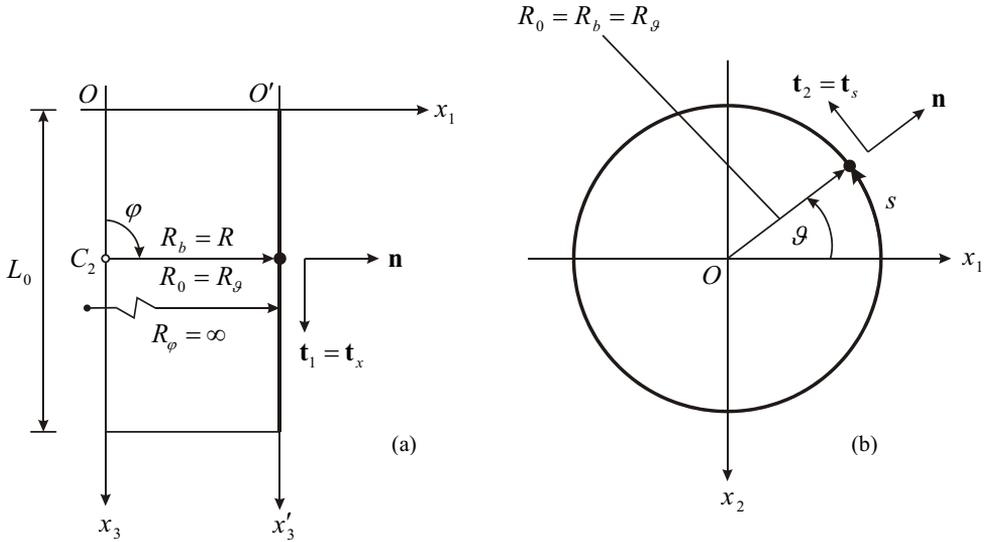


Figura 3.10 – Rappresentazione di un guscio cilindrico circolare: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

Le equazioni governanti il comportamento meccanico del guscio cilindrico circolare possono essere ricavate dalle equazioni del guscio conico imponendo  $\varphi = \pi/2$ . Ricordando che per  $\varphi = \pi/2$  si ha  $\cos \varphi = 0$  e  $\sin \varphi = 1$ , le equazioni di congruenza (3.57) per il guscio cilindrico circolare diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{w}{R_0} \\ \gamma_{xs}^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s} \\ \chi_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \chi_s &= \frac{\partial \beta_s}{\partial s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{xs} &= \frac{\partial \beta_s}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial s} \\
 \gamma_{xn} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\
 \gamma_{sn} &= \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u_s}{R_0} + \beta_s
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Le equazioni di legame elastico (3.58) rimangono inalterate. Imponendo, poi,  $\varphi = \pi/2$  ed eliminando i termini aventi coefficiente nullo, le equazioni (3.59) assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + q_x &= I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \\
 \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{T_s}{R_0} + q_s &= I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \\
 \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial s} - \frac{N_s}{R_0} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} - T_x + m_x &= I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \\
 \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial s} - T_s + m_s &= I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Procedendo in maniera analoga, dalle equazioni (3.60)-(3.64) si perviene al risultato qui di seguito riportato:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $x$  :*

$$\begin{aligned}
 &\left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) u_x + \\
 &\quad + \left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) u_s + \\
 &\quad + \left( \frac{A_{12}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_{26}}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \\
 &\quad + \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) \beta_x + \\
 &\quad + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) \beta_s + q_x = I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$  :*

$$\left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) u_x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \kappa \frac{A_{55}}{R_0^2} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{26}}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{A_{22}}{R_0} + \kappa \frac{A_{55}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \\
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) \beta_x + \\
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \kappa \frac{A_{55}}{R_0} \right) \beta_s + q_s = I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

(c) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( -\frac{A_{12}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{A_{26}}{R_0} \frac{\partial}{\partial s} \right) u_x + \left( -\left( \frac{A_{26}}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left( \frac{A_{22}}{R_0} + \kappa \frac{A_{55}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right) u_s + \\
 & + \left( \kappa A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\kappa A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{A_{22}}{R_0^2} \right) w + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{12}}{R_0} + \kappa A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( -\frac{B_{26}}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right) \beta_x + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{26}}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( -\frac{B_{22}}{R_0} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right) \beta_s + q_n = I_0 \ddot{w} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $x$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) u_x + \\
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{12}}{R_0} - \kappa A_{44} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{26}}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \\
 & + \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \kappa A_{44} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \kappa A_{45} \right) \beta_s + m_x = I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :

$$\left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) u_x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \kappa \frac{A_{55}}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{26}}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{B_{22}}{R_0} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \kappa A_{45} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \kappa A_{55} \right) \beta_s + m_s = I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

Le relazioni (3.69)-(3.73) rappresentano le equazioni fondamentali o equazioni indefinite di equilibrio in termini di componenti di spostamento per il guscio cilindrico circolare.

### 3.3 GUSCI DI TRASLAZIONE A SINGOLA CURVATURA

I *cilindri di traslazione* sono tipologie strutturali, la cui superficie di riferimento è ottenuta facendo traslare parallelamente a se stessa un linea retta, denominata *generatrice* lungo una curva, che prende il nome di *profilo*. La forma del profilo caratterizza il tipo di cilindro. Considerando come profilo, su cui far traslare la retta generatrice, una parabola si ottiene, ad esempio, il cilindro parabolico (figura 3.11). Le strutture in parola sono gusci a singola curvatura.

E' stato mostrato in precedenza come sia possibile ottenere le equazioni governanti i gusci di rivoluzione a singola curvatura, a partire dai gusci di rivoluzione a doppia curvatura rettificandone il meridiano. In maniera analoga, partendo dai gusci di rivoluzione a doppia curvatura è possibile ricavare le equazioni dei gusci di traslazione a singola curvatura rettificandone il parallelo, ossia facendo tendere all'infinito il raggio di parallelo  $R_0$ . Di conseguenza,  $R_g$  risulta infinito ricordando la relazione (2.87). La superficie in parola è dunque caratterizzata da una curvatura gaussiana nulla ( $\Gamma = 1/R_\phi R_g = 0$ ), essendo il raggio di curvatura  $R_g$  infinito. In figura 3.11 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie in esame.

Imponendo  $R_0 = \infty$  e ponendo di conseguenza:

$$ds = dy \quad (3.74)$$

risulta possibile definire le equazioni dei cilindri di traslazione. Ponendo  $s = y$ , ed

eliminando i termini aventi coefficiente nullo ( $1/R_0 = 0$ ), le equazioni di congruenza (3.2) diventano:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\varphi^0 &= \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + w \right) \\
 \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \gamma_{\varphi y}^0 &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial u_y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial y} \\
 \chi_\varphi &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} \\
 \chi_y &= \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\
 \chi_{\varphi y} &= \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial \beta_y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial y} \\
 \gamma_{\varphi n} &= \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \beta_\varphi \\
 \gamma_{yn} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Per quanto concerne le equazioni di legame elastico (3.3), ponendo  $s = y$ , si ricava la seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} N_\varphi \\ N_y \\ N_{\varphi y} \\ M_\varphi \\ M_y \\ M_{\varphi y} \\ T_\varphi \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\varphi^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{\varphi y}^0 \\ \chi_\varphi \\ \chi_y \\ \chi_{\varphi y} \\ \gamma_{\varphi n} \\ \gamma_{yn} \end{bmatrix} \tag{3.76}$$

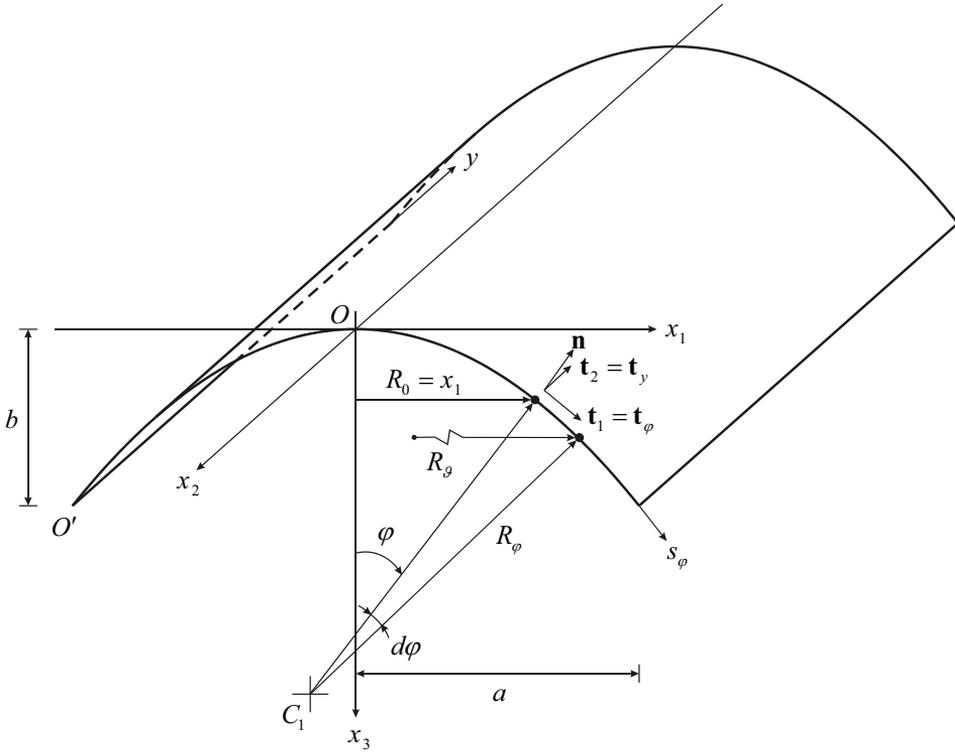


Figura 3.11 – Rappresentazione di un guscio cilindrico a profilo parabolico.

Ponendo  $s = y$ , ed eliminando i termini aventi coefficiente nullo ( $1/R_0 = 0$ ), le equazioni indefinite di equilibrio (3.4) assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{\varphi y}}{\partial y} + \frac{T_\varphi}{R_\varphi} + q_\varphi &= I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial N_{\varphi y}}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y &= I_0 \ddot{u}_y + I_1 \ddot{\beta}_y \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{N_\varphi}{R_\varphi} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi y}}{\partial y} - T_\varphi + m_\varphi &= I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi \\
 \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial M_{\varphi y}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y + m_y &= I_1 \ddot{u}_y + I_2 \ddot{\beta}_y
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Procedendo in maniera analoga, ossia ponendo  $s = y$  ed eliminando i termini aventi coefficiente nullo ( $1/R_0 = 0$ ), dalle equazioni (3.5)-(3.9) si perviene ad un sistema di cinque equazioni differenziali:

(a) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s_\varphi$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) u_y + \\
 & + \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) w + \\
 & + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{11}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \beta_y + q_\varphi = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

(b) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $y$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{A_{66}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2A_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) u_y + \\
 & + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{A_{12}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) w + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{66}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) \beta_y + q_y = I_0 \ddot{u}_y + I_1 \ddot{\beta}_y
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

(c) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( - \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( - \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{A_{12}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y + \\
 & + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa \frac{2A_{45}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \right) w + \\
 & + \left( \left( - \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( - \frac{B_{16}}{R_\varphi} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right) \beta_\varphi +
 \end{aligned}$$

$$+ \left( \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{12}}{R_\varphi} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right) \beta_y + q_n = I_0 \ddot{w} \quad (3.80)$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s_\varphi$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{11}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) u_\varphi + \\ & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) u_y + \\ & + \left( \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{B_{11}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) w + \\ & + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{D_{11}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} - \kappa A_{44} \right) \beta_\varphi + \\ & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{D_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} - \kappa A_{45} \right) \beta_y + m_\varphi = I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi \end{aligned} \quad (3.81)$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $y$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) u_\varphi + \\ & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{B_{66}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} \right) u_y + \\ & + \left( \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} - \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) w + \\ & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{D_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} - \kappa A_{45} \right) \beta_\varphi + \\ & + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{D_{66}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2D_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial y} + \kappa A_{55} \right) \beta_y + m_y = I_1 \ddot{u}_y + I_2 \ddot{\beta}_y \end{aligned} \quad (3.82)$$

Per definire i parametri geometrici del profilo del cilindro occorre porre  $R_b = 0$ . Di conseguenza, l'asse del profilo coincide con l'asse del riferimento esterno  $x_3$  ( $x'_3 \equiv x_3$ ). Inoltre, osservando la geometria delle curve di meridiano dei gusci a doppia curvatura, è possibile porre  $R_0 = x_1$ .

Sulla base delle posizioni introdotte e dei risultati precedentemente ottenuti per gusci di rivoluzione a doppia curvatura, di seguito vengono riportate le principali tipologie di profilo per i gusci cilindrici.

*(a) Cilindro a profilo a forma di catenaria*

Ricordando quanto esposto per il guscio di rivoluzione a meridiano a forma di catenaria e facendo riferimento alla curva rappresentata in figura 3.4, per un cilindro avente come profilo una catenaria si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$x_3 = b \left( 1 - \cosh \left( \frac{x_1}{b} \right) \right) \quad (3.83)$$

$$x_1(\varphi) = b \operatorname{arcsinh}(\tan \varphi) \quad (3.84)$$

$$R_g = \infty, \quad R_\varphi(\varphi) = \frac{b}{\cos^2 \varphi} \quad (3.85)$$

*(b) Cilindro a profilo cicloidale*

In base a quanto esposto per il guscio di rivoluzione a meridiano cicloidale e facendo riferimento alla curva rappresentata in figura 3.5, per un cilindro avente come profilo un arco cicloidale valgono le seguenti relazioni:

$$x_1 = r_c (2\varphi + \sin 2\varphi) \quad (3.86)$$

$$x_3 = r_c (1 - \cos 2\varphi)$$

$$R_g = \infty, \quad R_\varphi(\varphi) = 4r_c \cos \varphi \quad (3.87)$$

*(c) Cilindro a profilo parabolico*

Per un cilindro avente come profilo un arco parabolico (figura 3.6) si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$x_1^2 - kx_3 = 0, \quad k = \frac{a^2}{b}, \quad d = 0 \quad (3.88)$$

$$x_1(\varphi) = \frac{k \tan \varphi}{2} \quad (3.89)$$

$$R_g = \infty, \quad R_\varphi(\varphi) = \frac{k}{2 \cos^3 \varphi} \quad (3.90)$$

*(d) Cilindro a profilo ellittico e circolare*

Ricordando il guscio di rivoluzione a meridiano ellittico e facendo riferimento alle curve rappresentate in figura 3.7 e 3.8, per un cilindro avente per profilo un arco ellittico o circolare ( $k = 1$ ) valgono le seguenti relazioni:

$$x_1^2 + k^2 (b - x_3)^2 = a^2, \quad k = a/b \quad (3.91)$$

$$x_1(\varphi) = \frac{ak \tan \varphi}{\sqrt{1 + k^2 \tan^2 \varphi}} \quad (3.92)$$

$$R_\varphi = \infty, \quad R_\varphi(\varphi) = \frac{ak}{\cos^3 \varphi \sqrt{(1 + k^2 \tan^2 \varphi)^3}} \quad (3.93)$$

### 3.4 GUSCI DEGENERI

#### 3.4.1 PIASTRA CIRCOLARE

La *piastra circolare* è una tipologia strutturale, la cui superficie di riferimento è descritta dalla rotazione attorno all'asse di rivoluzione  $x_3$  di una linea retta ortogonale all'asse  $x_3$  stesso come rappresentato in figura 3.12. La piastra circolare può essere pensata come caso degenero del guscio conico. Infatti, osservando la figura 3.9, essa si ricava per  $\alpha = \pi/2$ . Di conseguenza, si ha anche  $\varphi = 0$ . Poiché la generatrice della superficie di riferimento è una retta, la curvatura di meridiano è nulla e quindi il raggio di curvatura di meridiano è pari a infinito ( $R_\varphi = \infty$ ).

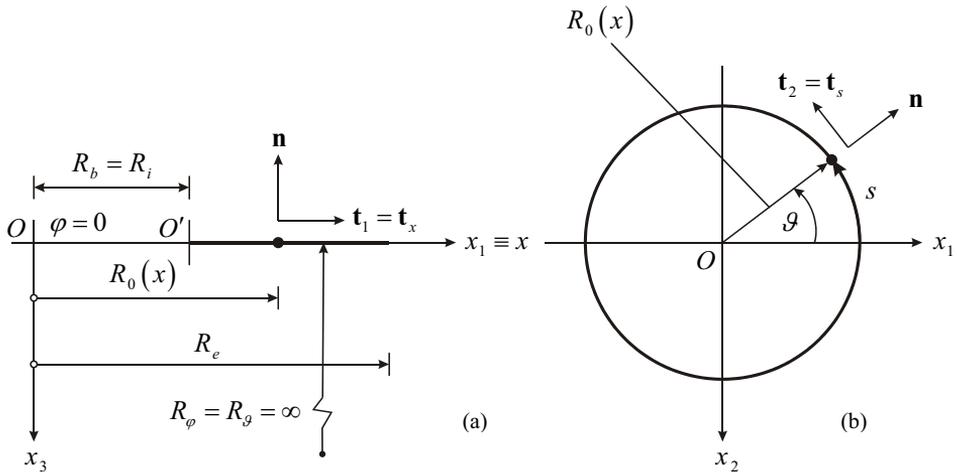


Figura 3.12 – Rappresentazione di una piastra circolare: sezione di meridiano (a); sezione di parallelo (b).

La figura 3.12 illustra i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie.

$R_b = R_i$  rappresenta il raggio interno della piastra circolare, mentre  $R_e$  denota il raggio esterno.

La descrizione della curva generatrice o di meridiano in funzione dell'ascissa curvilinea  $x$  della retta generatrice è la seguente:

$$R_0(x) = R_b + x = R_i + x \quad (3.94)$$

Nota l'espressione di  $R_0(x)$  (3.94), è possibile valutare il raggio di curvatura principale  $R_g$  attraverso le relazioni geometriche (2.87), mentre  $R_\varphi$  risulta essere infinito. Ricordando che per  $\varphi = 0$  si ha  $\sin \varphi = 0$ , per la piastra circolare si ottiene:

$$R_g(x) = \frac{R_i + x}{\sin \varphi} = \infty, \quad R_\varphi(x) = \infty \quad (3.95)$$

Dalle relazioni (3.95) si può osservare che la curvatura gaussiana risulta nulla, essendo sia  $R_\varphi$  che  $R_g$  infiniti:  $\Gamma = 1/R_\varphi R_g = 0$ . Appare che entrambe le curvatures principali sono nulle e l'unica curvatura non nulla è la curvatura del parallelo  $R_0(x)$ . Essendo le curvatures principali nulle, la piastra circolare risulta essere un guscio degenere.

Le equazioni della piastra circolare possono essere ricavate dalle equazioni del guscio conico imponendo  $\varphi = 0$  ( $\cos \varphi = 1$  e  $\sin \varphi = 0$ ). Le equazioni di congruenza (3.57) per la piastra circolare diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_x}{R_0} \\ \gamma_{xs}^0 &= \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s} - \frac{u_s}{R_0} \\ \chi_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \chi_s &= \frac{\partial \beta_s}{\partial s} + \frac{\beta_x}{R_0} \\ \chi_{xs} &= \frac{\partial \beta_s}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial s} - \frac{\beta_s}{R_0} \\ \gamma_{xm} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \end{aligned}$$

$$\gamma_{sn} = \frac{\partial w}{\partial s} + \beta_s \quad (3.96)$$

Le equazioni di legame elastico (3.58) rimangono inalterate. Le equazioni (3.59) assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + \frac{N_x - N_s}{R_0} + q_x &= I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \\ \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{2N_{xs}}{R_0} + q_s &= I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_s}{\partial s} + \frac{T_x}{R_0} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} + \frac{M_x - M_s}{R_0} - T_x + m_x &= I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \\ \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{2M_{xs}}{R_0} - T_s + m_s &= I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s \end{aligned} \quad (3.97)$$

Procedendo in maniera analoga (imponendo  $\varphi = 0$ ), dalle (3.60)-(3.64) si perviene al seguente risultato:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $x$  :*

$$\begin{aligned} &\left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{11}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{A_{22}}{R_0^2} \right) u_x + \\ &+ \left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{A_{26}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\ &- \left. \left( \frac{A_{22}}{R_0} + \frac{A_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{A_{26}}{R_0^2} \right) u_s + \\ &+ \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{11}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{22}}{R_0^2} \right) \beta_x + \\ &+ \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{B_{26}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left( \frac{B_{66}}{R_0} + \frac{B_{22}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\ &+ \left. (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \right) \beta_s + q_x = I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \end{aligned} \quad (3.98)$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$  :*

$$\begin{aligned} &\left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2A_{16}}{R_0} + \frac{A_{26}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left( \frac{A_{22}}{R_0} + \frac{A_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{A_{26}}{R_0^2} \right) u_x + \\ &+ \left( A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{A_{66}}{R_0^2} \right) u_s + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{B_{26}}{R_0} + \frac{2B_{16}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{B_{22}}{R_0} + \frac{B_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \right) \beta_x + \\
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{66}}{R_0^2} \right) \beta_s + q_s = I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \kappa A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2\kappa A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right) w + \\
 & + \left( \kappa A_{44} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial s} + \kappa \frac{A_{44}}{R_0} \right) \beta_x + \\
 & + \left( \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{55} \frac{\partial}{\partial s} + \kappa \frac{A_{45}}{R_0} \right) \beta_s + q_n = I_0 \dot{w} \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

(d) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $x$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{11}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{22}}{R_0^2} \right) u_x + \\
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{B_{26}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{B_{22}}{R_0} + \frac{B_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \right) u_s + \\
 & + \left( -\kappa A_{44} \frac{\partial}{\partial x} - \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \\
 & + \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{11}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{D_{22}}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{D_{26}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left( \frac{D_{22}}{R_0} + \frac{D_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & + \left. (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{D_{26}}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_s + m_x = I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

(e) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :*

$$\left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{B_{26}}{R_0} + \frac{2B_{16}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left( \frac{B_{22}}{R_0} + \frac{B_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{B_{26}}{R_0^2} \right) u_x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{B_{66}}{R_0^2} \right) u_s + \\
 & + \left( -\kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial x} - \kappa A_{55} \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2D_{16}}{R_0} + \frac{D_{26}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{D_{22}}{R_0} + \frac{D_{66}}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} + \frac{D_{26}}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{66}}{R_0} \frac{\partial}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} - \frac{D_{66}}{R_0^2} - \kappa A_{55} \right) \beta_s + m_s = I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Le relazioni (3.98)-(3.102) rappresentano le equazioni fondamentali o equazioni indefinite di equilibrio in termini di componenti di spostamento per la piastra circolare.

### 3.4.2 PIASTRA RETTANGOLARE

La *piastra rettangolare* ha la superficie di riferimento ottenuta trasladando un retta parallelamente ed ortogonalmente a se stessa. In tal modo, le curvature della superficie lungo le due direzioni principali sono entrambe nulle (figura 3.13).

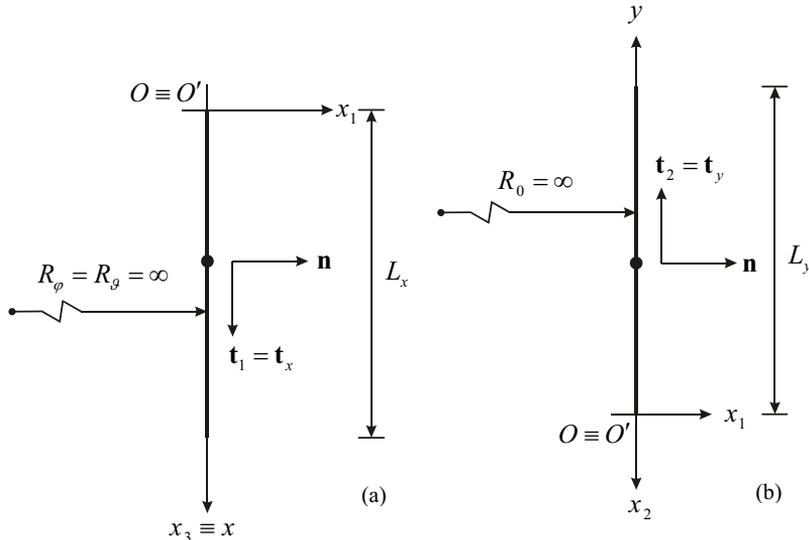


Figura 3.13 – Rappresentazione di una piastra rettangolare.

Da un punto di vista geometrico, essa può essere vista come caso *degenere* del guscio cilindrico circolare. Infatti, facendo tendere all'infinito il raggio  $R$  del cilindro si ricava la piastra rettangolare. Anche la superficie in parola è caratterizzata da una curvatura gaussiana nulla, essendo entrambi i raggi di curvatura principali  $R_\phi, R_\theta$  infiniti ( $\Gamma = 1/R_\phi R_\theta = 0$ ). In figura 3.13 sono rappresentati i principali parametri geometrici utili a descrivere la superficie di riferimento.

Le equazioni della piastra rettangolare possono essere ricavate dalle equazioni del guscio cilindrico circolare. Rettificando, ad esempio, il parallelo del guscio cilindrico di rivoluzione ( $R_0 = \infty$ ) e ponendo di conseguenza:

$$ds = dy \quad (3.103)$$

risulta possibile definire le equazioni della piastra rettangolare. In altre parole, operando in questo modo, si è rettificato il parallelo del guscio di rivoluzione. In maniera analoga si può procedere rettificando il meridiano del guscio cilindrico di traslazione.

Essendo  $R_0 = \infty$  e  $s = y$  per la relazione (3.103), ed eliminando i termini aventi coefficiente nullo, le equazioni di congruenza (3.67) per la piastra rettangolare diventano:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \chi_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \chi_y &= \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \chi_{xy} &= \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \\ \gamma_{xn} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \gamma_{yn} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{aligned} \quad (3.104)$$

Per quanto concerne le equazioni di legame elastico (3.58), ponendo  $s = y$ , si ricava:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & \kappa A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{45} & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \gamma_{xn} \\ \gamma_{yn} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Essendo  $R_0 = \infty$  e  $s = y$  per la relazione (3.103), ed eliminando i termini aventi coefficiente nullo, le equazioni di equilibrio (3.68) assumono il seguente aspetto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x &= I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + q_y &= I_0 \ddot{u}_y + I_1 \ddot{\beta}_y \\ \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q_n &= I_0 \ddot{w} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x + m_x &= I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y + m_y &= I_1 \ddot{u}_y + I_2 \ddot{\beta}_y \end{aligned} \quad (3.106)$$

Infine, procedendo in maniera analoga, ricordando che  $R_0 = \infty$  e  $s = y$  per la relazione (3.103), ed eliminando i termini aventi coefficiente nullo, dalle equazioni (3.69)-(3.73) si perviene al seguente risultato:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $x$  :*

$$\begin{aligned} &\left( A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_x + \\ &+ \left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_y + \\ &+ \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \beta_x + \\ &+ \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \beta_y + q_x = I_0 \ddot{u}_x + I_1 \ddot{\beta}_x \end{aligned} \quad (3.107)$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $y$  :*

$$\left( A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_y + \\
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \beta_x + \\
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \beta_y + q_y = I_0 \ddot{u}_y + I_1 \ddot{\beta}_y
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

(c) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \kappa A_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\kappa A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) w + \\
 & + \left( \kappa A_{44} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial y} \right) \beta_x + \\
 & + \left( \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right) \beta_y + q_n = I_0 \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $x$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_x + \\
 & + \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_y + \\
 & - \left( \kappa A_{44} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial y} \right) w + \\
 & + \left( D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \kappa A_{44} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \kappa A_{45} \right) \beta_y + m_x = I_1 \ddot{u}_x + I_2 \ddot{\beta}_x
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $y$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_x + \\
 & + \left( B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) u_y + \\
 & - \left( \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial x} + \kappa A_{55} \frac{\partial}{\partial y} \right) w + \\
 & + \left( D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \kappa A_{45} \right) \beta_x + \\
 & + \left( D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \kappa A_{55} \right) \beta_y + m_y = I_1 \ddot{u}_y + I_2 \ddot{\beta}_y
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Le relazioni (3.107)-(3.111) rappresentano le equazioni fondamentali o equazioni indefinite di equilibrio in termini di componenti di spostamento per la piastra rettangolare.

Sono state esaminate le principali tipologie strutturali che risulta possibile dedurre a partire dalle equazioni dei gusci di rivoluzione a doppia curvatura, imponendo, di volta in volta, le relazioni geometriche che caratterizzano la superficie di riferimento di ogni singola struttura.



# *Chapter 4*

## *Numerical Solution via GDQM*

### **ABSTRACT**

In the previous chapter, the governing equations of some shell structures commonly encountered in engineering practice were presented. In this chapter, the analysis of thick shells and panels is performed by following two different investigations. In the first one, the solution is obtained by using the numerical technique named Generalized Differential Quadrature (GDQ) method. The main features and the mathematical fundamentals of the numerical technique under discussion are illustrated in chapter 1. The solution is given in terms of generalized displacement components of points lying on the middle surface of the shell. Then, in order to verify the accuracy of the present method, numerical results are also computed by using commercial programs. One of the aims of this chapter is to compare results from the GDQ analysis with those results obtained with finite element techniques and based on the same shell theory.

The solution procedure by means of the GDQ technique has been implemented in a MATLAB 6.5 code. The logical scheme used in the implementation of MATLAB code is exposed in the last chapter. Different FEM commercial codes such as Abaqus, Ansys, Straus, Femap/Nastran and Pro/Mechanica have been used.

In the GDQ method the governing differential equations of motion presented in the previous chapter are directly transformed in one single step to obtain the final algebraic form. In order to demonstrate efficient and accurate applications of the differential quadrature approach, by solving the equations of motion governing the free vibration of thick shells, two independent coordinates are taken into account.

For all the examples, the worked out approximate solutions show good convergence characteristics and appear to be accurate when tested by comparison to finite element analyses.

Different types of grid point distribution are also considered and their effect on the solution accuracy is investigated. The Chebyshev-Gauss-Lobatto (C-G-L) grid point distribution has the fastest convergence and provides more accurate solutions, whereas the solutions obtained by using Chebyshev I° (C I°), Chebyshev II° (C II°), Legendre (Leg) and Quadratic (Quad) grid point distributions oscillate much more. It is shown that the solution accuracy of the non-uniform grid distributions stays steady with increasing  $N = M$  and does not decrease due to numerical instabilities even if  $N = M$  becomes very large. For all the treated cases the non-uniform distributions are stable if the number of grid points increases.

The convergence and the stability of some natural frequencies for the considered structures with different boundary conditions are reported. As shown, to obtain accurate results for the higher frequencies the number of sampling points does not need to be very large. It should be noted that the boundary conditions influence the convergence and stability characteristics. In fact, the solutions for panel type structures show the fastest convergence and provide more accurate results with a lower number of sampling points. Instead, the solutions for the complete shells oscillate much more and require a larger number of sampling points. In these cases, compatibility conditions are introduced and must be implemented to solve the complete shell of revolution problem. It is worth noting that, using all the non-uniform grid distributions, the methodology presents good stability and convergence characteristics. Furthermore, the accuracy depends on the number of sampling points used.

Different geometries, schemes of lamination and materials are investigated for anisotropic laminated composite shells and panels. Two different power-law distributions are considered for functionally graded materials. The numerical results illustrate the influence of the power-law distribution choice on the mechanical behaviour of functionally graded doubly curved shells and panels.

# Capitolo 4

## *Soluzione Numerica via GDQM*

### INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente sono mostrate le equazioni che governano il comportamento meccanico di diverse tipologie di gusci moderatamente spessi in materiale anisotropo a doppia curvatura, a singola curvatura e a curvatura nulla. In particolare, si è illustrato come sia possibile ricavare attraverso considerazioni di carattere geometrico le equazioni dei gusci a singola curvatura, di rivoluzione e di traslazione, e dei gusci degeneri a partire dalle equazioni dei gusci di rivoluzione a doppia curvatura.

Il sistema di equazioni determinato è sempre un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, la cui soluzione in forma chiusa non esiste in generale. Per ottenere una soluzione approssimata accettabile del problema occorre utilizzare una tecnica numerica. Il *Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale*, presentato nel primo capitolo, rappresenta un tecnica numerica particolarmente adatta a risolvere problemi alle derivate parziali, ossia sistemi di equazioni differenziali insieme ad opportune condizioni al contorno. Le soluzioni così ottenute verranno confrontate con quelle ricavate attraverso il ben noto metodo agli elementi finiti.

Ogni solido bidimensionale ha le proprie equazioni governanti che discendono da quelle del generico guscio di rivoluzione. Sulla base di questa osservazione, la soluzione numerica di tutte le strutture illustrate è ottenuta, attraverso un unico algoritmo di calcolo,

partendo dalle equazioni dei gusci di rivoluzione a doppia curvatura ed imponendo di volta in volta le caratteristiche geometriche proprie della struttura in esame.

## 4.1 ANALISI DINAMICA: VIBRAZIONI LIBERE

### 4.1.1 EQUAZIONI DI CAMPO E CONDIZIONI AL CONTORNO

Le vibrazioni libere di un guscio moderatamente spesso si ricavano dalle equazioni (3.5)-(3.9) ponendo uguale a zero il vettore delle azioni esterne ( $\mathbf{q} = 0$ ):

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s_\varphi$ :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) u_\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{A_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_s + \\
 & \quad + \left( \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \quad \left. + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) w + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \beta_\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \Big) \beta_s = I_0 \ddot{u}_\varphi + I_1 \ddot{\beta}_\varphi \quad (4.1)$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$  :*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\ & + \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\ & + A_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \Big) u_\varphi + \\ & + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\ & + \frac{2A_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - A_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \Big) u_s + \\ & + \left( \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\ & + A_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + A_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \Big) w + \\ & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\ & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\ & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \Big) \beta_\varphi + \\ & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\ & \left. - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \beta_s = I_0 \ddot{u}_s + I_1 \ddot{\beta}_s \quad (4.2) \end{aligned}$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :*

$$\left( - \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{A_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( -\left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \kappa \frac{2A_{45}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{2A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \Big) w + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & - \left. \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{12}}{R_\varphi} - \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & + \left. \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s = I_0 \ddot{w}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s_\varphi$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & - \left. \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) u_s +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \Big) w + \\
 & + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{2D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{D_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{D_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left. \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + \left. \frac{D_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) \beta_s = I_1 \ddot{u}_\varphi + I_2 \ddot{\beta}_\varphi
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \Big) u_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & + B_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \Big) w + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + D_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + D_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{45} \Big) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2D_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - D_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{55} \right) \beta_s = I_1 \ddot{u}_s + I_2 \ddot{\beta}_s
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Utilizzando il metodo di separazione delle variabili, è possibile cercare una soluzione stazionaria del sistema di equazioni (4.1)-(4.5) nella forma:

$$\begin{aligned}
 u_\varphi(\varphi, \vartheta, t) &= U^\varphi(\varphi, s) e^{i\omega t} \\
 u_s(\varphi, \vartheta, t) &= U^s(\varphi, s) e^{i\omega t} \\
 w(\varphi, \vartheta, t) &= W(\varphi, s) e^{i\omega t} \\
 \beta_\varphi(\varphi, \vartheta, t) &= B^\varphi(\varphi, s) e^{i\omega t} \\
 \beta_s(\varphi, \vartheta, t) &= B^s(\varphi, s) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

dove  $U^\varphi, U^s, W, B^\varphi, B^s$ , denominate *forme modali*, *modi normali* o *modi naturali* di vibrare, sono funzioni delle coordinate  $\varphi, s$  e descrivono lo spostamento della superficie di riferimento, mentre  $\omega$  è la *frequenza naturale* o *frequenza propria* del sistema corrispondente alla forma modale definita dalle ampiezze  $U^\varphi, U^s, W, B^\varphi, B^s$ . L'equazione (4.6) rappresenta una soluzione stazionaria per il sistema di equazioni differenziali (4.1)-(4.5) che prende il nome di *soluzione generale*.

Dalla posizione (4.6), eseguendo le derivate rispetto alle variabili  $\varphi, s, t$  e le semplificazioni necessarie, si ricava:

(a) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s_\varphi$ :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) U^\varphi + \\
 & + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + \frac{A_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \Big) U^s + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \Big) W + \\
 & + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \Big) B^\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & \left. + \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) B^s = -\omega^2 (I_0 U^\varphi + I_1 B^\varphi) \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

(b) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$  :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{2A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left( \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & + A_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \Big) U^\varphi + \\
 & + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \frac{2A_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - A_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \Big) U^s + \\
 & + \left( \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + A_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \Big) W + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & + \left. \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \Big) B^\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) B^s = -\omega^2 (I_0 U^s + I_1 B^s) \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

(c) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( - \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{A_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) U^\varphi + \\
 & + \left( - \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{A_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{A_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} - \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) U^s + \\
 & + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{55} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \kappa \frac{2A_{45}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{A_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{2A_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{A_{22} \sin^2 \varphi}{R_0^2} \right) W + \\
 & + \left( \left( - \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( - \frac{B_{16}}{R_\varphi} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi}{R_0} \right) B^\varphi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \left( -\frac{B_{16}}{R_\varphi^2} - \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0 R_\varphi} + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( -\frac{B_{12}}{R_\varphi} - \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} + \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi}{R_0} \right) B^s = -\omega^2 I_0 W^c \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

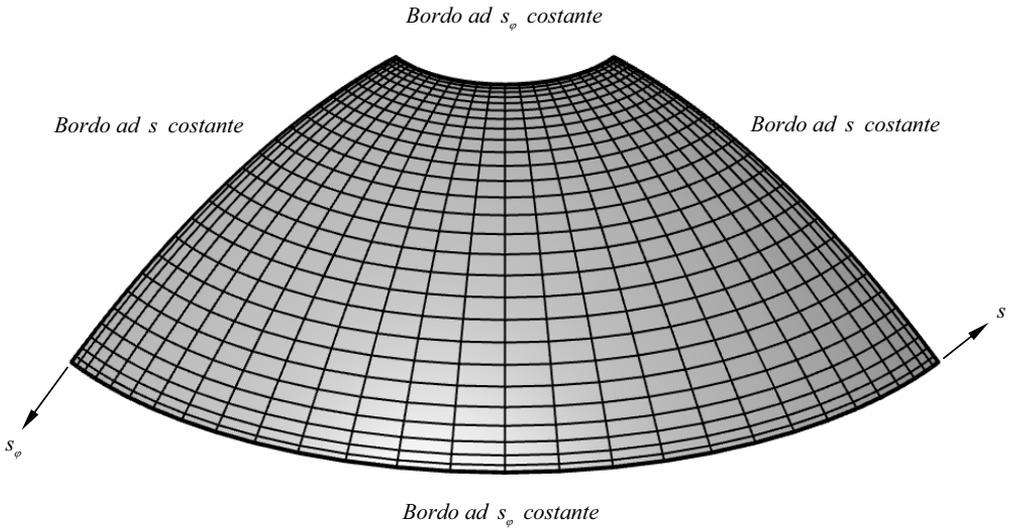
(d) *Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s_\varphi$ :*

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. - \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{B_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) U^\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} \right) U^s + \\
 & + \left( \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{45} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \right. \\
 & \left. + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{B_{22} \sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} \right) W + \\
 & + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{11} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{2D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - \frac{D_{12} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{D_{22} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{44} \right) B^\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{16}}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \left. - \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \left. + \frac{D_{16} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi}{R_0^2} - \kappa A_{45} \right) B^s = -\omega^2 (I_1 U^\varphi + I_2 B^\varphi) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & \quad + B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \Big) U^\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad + \frac{2B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} - B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} \Big) U^s + \\
 & \quad + \left( \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi^2} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_\varphi R_0} - \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} - \kappa A_{55} \right) \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
 & \quad + B_{26} \left( \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{R_0^2} + \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} \right) + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \Big) W + \\
 & \quad + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_\varphi R_0} + D_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \right. \\
 & \quad + \left( \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} + \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} + \frac{D_{66}}{R_\varphi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \\
 & \quad + D_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{45} \Big) B^\varphi + \\
 & \quad + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + D_{66} \left( \frac{\cos \varphi}{R_\varphi R_0} - \frac{1}{R_\varphi^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2D_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial s} + \right. \\
 & \quad \left. - D_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{R_0^2} - \frac{\sin \varphi}{R_\varphi R_0} \right) - \kappa A_{55} \right) B^s = -\omega^2 (I_1 U^s + I_2 B^s) \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Le relazioni (4.7)-(4.11) rappresentano le equazioni fondamentali che governano le vibrazioni libere dei gusci di rivoluzione in materiale anisotropo. In maniera analoga a quanto illustrato nel terzo capitolo, da queste ultime risulta possibile dedurre le equazioni delle vibrazioni libere per gusci a singola curvatura e degeneri.



**Figura 4.1** – Pannello di rivoluzione a doppia curvatura.

Per risolvere il sistema differenziale descritto dalle equazioni in parola, occorre introdurre le condizioni al contorno. Queste ultime sono state ricavate attraverso l'applicazione del principio di Hamilton (2.318)-(2.319). Vengono di seguito riscritte, per un guscio di rivoluzione a doppia curvatura in vibrazione libera, introducendo l'ipotesi di simmetria delle caratteristiche della sollecitazione ( $N_{s\varphi} = N_{\varphi s}$ ,  $M_{s\varphi} = M_{\varphi s}$ ). Su un bordo ad  $s_\varphi$  costante, ossia lungo un parallelo, si ha:

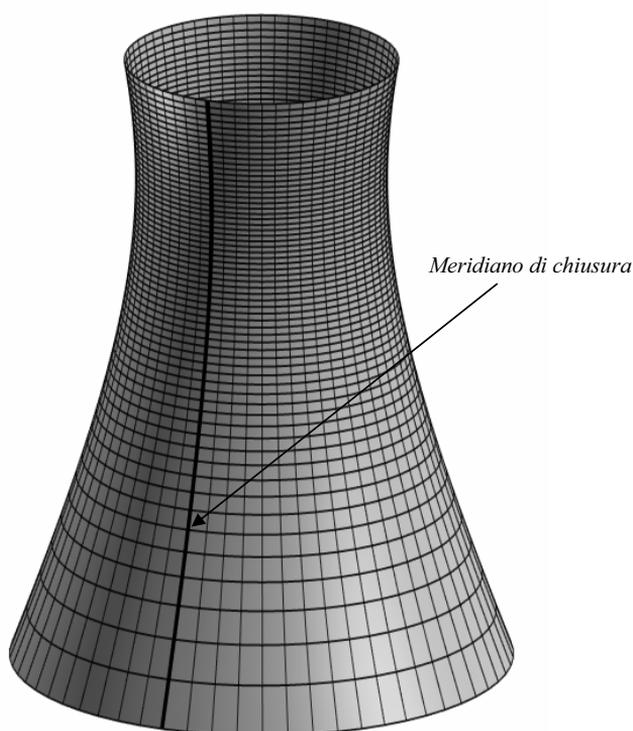
$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= 0 & \text{oppure} & & u_\varphi &= 0 \\
 N_{\varphi s} &= 0 & \text{oppure} & & u_s &= 0 \\
 T_\varphi &= 0 & \text{oppure} & & w &= 0 \\
 M_\varphi &= 0 & \text{oppure} & & \beta_\varphi &= 0 \\
 M_{\varphi s} &= 0 & \text{oppure} & & \beta_s &= 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

mentre su un bordo ad  $s$  costante, ossia lungo un meridiano, risulta:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi s} &= 0 & \text{oppure} & & u_\varphi &= 0 \\
 N_s &= 0 & \text{oppure} & & u_s &= 0 \\
 T_s &= 0 & \text{oppure} & & w &= 0 \\
 M_{\varphi s} &= 0 & \text{oppure} & & \beta_\varphi &= 0 \\
 M_s &= 0 & \text{oppure} & & \beta_s &= 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Combinando in maniera opportuna le equazioni (4.12) o (4.13) tra loro si possono ottenere tutte le tipologie di vincolamento possibili lungo i quattro bordi laterali del guscio.

Le relazioni (4.12) e (4.13) definiscono 5 equazioni differenziali che devono essere verificate lungo i quattro bordi di un generico guscio. Una struttura dotata di quattro bordi distinti definisce un pannello. In particolare, le condizioni al contorno in parola possono essere applicate solo se la struttura da analizzare possiede due limiti distinti in entrambe le direzioni coordinate, come ad esempio nel caso dei pannelli di rivoluzione caratterizzati da  $\vartheta < 2\pi$  (figura 4.1). Nel caso particolare di strutture per le quali i due bordi ad  $s_\varphi$  o ad  $s$  costante siano coincidenti, le condizioni al contorno assumono un aspetto diverso. Si consideri, ad esempio, un guscio di rivoluzione completo ( $\vartheta = 2\pi$ ). Per tale struttura (figura 4.2) i due meridiani per  $\vartheta = 0$  e per  $\vartheta = 2\pi$ , distinti dal punto di vista computazionale, rappresentano lo stesso meridiano dal punto di vista fisico.



**Figura 4.2** – Guscio di rivoluzione a doppia curvatura.

Analogamente, considerando un toroide di rivoluzione (figura 4.3) a sezione circolare ( $\vartheta < 2\pi$ ), i due paralleli per  $\varphi = 0$  e per  $\varphi = 2\pi$  risultano coincidenti. Volendo analizzare strutture di questo tipo come caso degenere di un pannello, non è più lecito parlare di condizioni al contorno in senso stretto lungo i bordi coincidenti ad  $s_\varphi$  o ad  $s$  costante, ma

conviene interpretare queste ultime come *condizioni di continuità*. In altre parole, occorre soddisfare la continuità strutturale nei punti estremi della direzione coordinata  $s_\varphi$  o  $s$  per evitare lacerazioni o compenetrazioni.

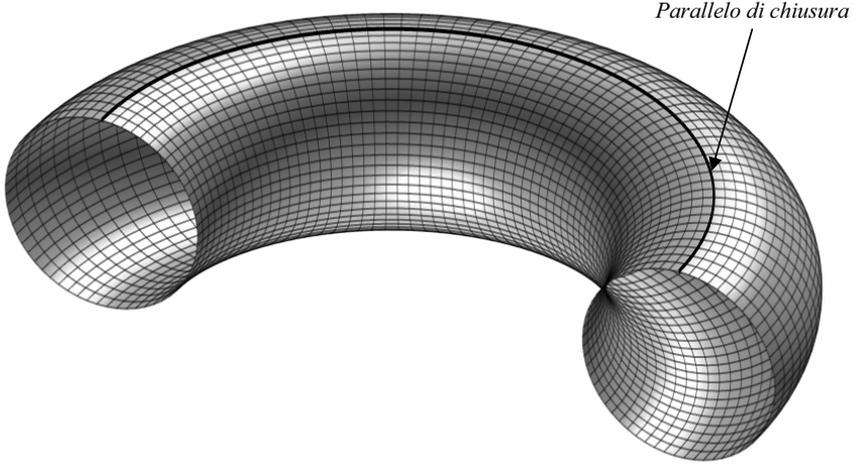


Figura 4.3 – Toroide a sezione circolare.

Di conseguenza, lungo il meridiano o il parallelo di chiusura del guscio (figura 4.2-4.3) è necessario imporre delle condizioni in grado di soddisfare la *congruenza strutturale*. Lungo il meridiano di chiusura, ossia lungo i due meridiani per  $\vartheta=0$  ( $s=0$ ) e per  $\vartheta=2\pi$  ( $s=s_0=2\pi R_0$ ), si ha:

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi s}(\varphi, 0) &= N_{\varphi s}(\varphi, s_0), & u_\varphi(\varphi, 0) &= u_\varphi(\varphi, s_0) \\
 N_s(\varphi, 0) &= N_s(\varphi, s_0), & u_s(\varphi, 0) &= u_s(\varphi, s_0) \\
 T_s(\varphi, 0) &= T_s(\varphi, s_0), & w(\varphi, 0) &= w(\varphi, s_0) \\
 M_{\varphi s}(\varphi, 0) &= M_{\varphi s}(\varphi, s_0), & \beta_\varphi(\varphi, 0) &= \beta_\varphi(\varphi, s_0) \\
 M_s(\varphi, 0) &= M_s(\varphi, s_0), & \beta_s(\varphi, 0) &= \beta_s(\varphi, s_0)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

mentre lungo il parallelo di chiusura, ossia lungo i due paralleli per  $\varphi=0$  e per  $\varphi=2\pi$ , risulta:

$$\begin{aligned}
 N_\varphi(0, s) &= N_\varphi(2\pi, s), & u_\varphi(0, s) &= u_\varphi(2\pi, s) \\
 N_{\varphi s}(0, s) &= N_{\varphi s}(2\pi, s), & u_s(0, s) &= u_s(2\pi, s) \\
 T_\varphi(0, s) &= T_\varphi(2\pi, s), & w(0, s) &= w(2\pi, s) \\
 M_\varphi(0, s) &= M_\varphi(2\pi, s), & \beta_\varphi(0, s) &= \beta_\varphi(2\pi, s) \\
 M_{\varphi s}(0, s) &= M_{\varphi s}(2\pi, s), & \beta_s(0, s) &= \beta_s(2\pi, s)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Le espressioni più a sinistra delle (4.14)-(4.15) prendono il nome di *condizioni di continuità degli sforzi*, mentre quelle più a destra vengono denominate *condizioni di compatibilità cinematica*. Si vuol far notare che le equazioni (4.14)-(4.15) possono essere interpretate come particolari condizioni al contorno in cui le azioni e gli spostamenti agenti su un bordo sono quelli imposti dal comportamento del bordo corrispondente e coincidente.

Ricordando le relazioni (3.3) e inserendovi le definizioni delle caratteristiche di congruenza (3.2) si ha:

$$\begin{aligned}
 N_\varphi = & \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{16} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{A_{12} \cos \varphi}{R_0} \right) u_\varphi + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{12} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{A_{16} \cos \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \frac{A_{11}}{R_\varphi} + \frac{A_{12} \sin \varphi}{R_0} \right) w + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{16} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{12} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
 N_s = & \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{A_{22} \cos \varphi}{R_0} \right) u_\varphi + \left( \frac{A_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{22} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \frac{A_{12}}{R_\varphi} + \frac{A_{22} \sin \varphi}{R_0} \right) w + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\varphi s} = & \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{66} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{A_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) u_\varphi + \left( \frac{A_{66}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_{26} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{A_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \frac{A_{16}}{R_\varphi} + \frac{A_{26} \sin \varphi}{R_0} \right) w + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 M_\varphi = & \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{16} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{12} \cos \varphi}{R_0} \right) u_\varphi + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{12} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{16} \cos \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \frac{B_{11}}{R_\varphi} + \frac{B_{12} \sin \varphi}{R_0} \right) w + \left( \frac{D_{11}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{16} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{D_{12} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{12} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{D_{16} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 M_s = & \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{22} \cos \varphi}{R_0} \right) u_\varphi + \left( \frac{B_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{22} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \frac{B_{12}}{R_\varphi} + \frac{B_{22} \sin \varphi}{R_0} \right) w + \left( \frac{D_{12}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{D_{22} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{26}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{22} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi s} = & \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{66} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{B_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) u_\varphi + \left( \frac{B_{66}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + B_{26} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{B_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) u_s + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_\varphi} + \frac{B_{26} \sin \varphi}{R_0} \right) w + \left( \frac{D_{16}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{66} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{D_{26} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_\varphi + \\
 & + \left( \frac{D_{66}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + D_{26} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{D_{66} \cos \varphi}{R_0} \right) \beta_s
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$T_\varphi = -\kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} u_\varphi - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi}{R_0} u_s + \left( \kappa \frac{A_{44}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{45} \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \kappa A_{44} \beta_\varphi + \kappa A_{44} \beta_s \tag{4.22}$$

$$T_s = -\kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} u_\varphi - \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi}{R_0} u_s + \left( \kappa \frac{A_{45}}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa A_{55} \frac{\partial}{\partial s} \right) w + \kappa A_{45} \beta_\varphi + \kappa A_{55} \beta_s \tag{4.23}$$

Si può osservare che le espressioni differenziali (4.16)-(4.23) rappresentano le caratteristiche della sollecitazione in termini di componenti generalizzate di spostamento.

#### 4.1.1.1 Discretizzazione delle equazioni del moto

Una volta definito il sistema risolvete (4.7)-(4.11), per ottenere la soluzione numerica attraverso la tecnica GDQ, occorre in primo luogo discretizzare lungo le due direzioni coordinate  $\varphi, s$ . Siano  $N, M$  il numero di punti della discretizzazione lungo le coordinate curvilinee  $\varphi, s$ , rispettivamente. In figura 4.4 è illustrata la discretizzazione del dominio bidimensionale di un pannello di rivoluzione a profilo parabolico. Gli indici  $i, j$  individuano la posizione del punto  $(\varphi_i, s_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , lungo le direzioni coordinate  $\varphi$  e  $s$ , rispettivamente. Successivamente, il problema lineare agli autovalori (4.7)-(4.11) viene trasformato in un sistema discreto, approssimando le derivate spaziali secondo la legge di quadratura (1.110). Sulla base di quanto esposto, il sistema puntuale di equazioni (4.7)-(4.11) assume la seguente forma discreta:

(a) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s_\varphi$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_{11}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^\varphi + A_{11} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^\varphi + \\
 & + \frac{2A_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^\varphi - \left( \frac{A_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{A_{22} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}^2} \right) U_{ij}^\varphi + \\
 & + \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^s - \left( \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^s + \\
 & - \left( \frac{A_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{A_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{im}^s + \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^s + \\
 & + \left( \frac{A_{16} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{A_{26} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) U_{ij}^s + \\
 & + \left( \frac{A_{11}}{R_{\varphi i}^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}^2} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{kj} + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} + \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{im} + \\
 & + \left( A_{11} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) - \frac{A_{22} \sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} \right) W_{ij} + \\
 & + \frac{B_{11}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^\varphi + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^\varphi + \\
 & + \frac{2B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^\varphi - \left( \frac{B_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{B_{22} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}} \right) B_{ij}^\varphi + \\
 & + \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^s - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^s + \\
 & - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{im}^s + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^s + \\
 & + \left( \frac{B_{16} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} + \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} \right) B_{ij}^s = -\omega^2 (I_0 U_{ij}^\varphi + I_1 B_{ij}^\varphi) \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

(b) Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $s$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^\varphi + \left( \frac{2A_{16} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_\varphi}{d\varphi} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^\varphi + \\
 & + \left( \frac{A_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{A_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^\varphi + \\
 & + \left( A_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) U_{ij}^\varphi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A_{66}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^s + A_{66} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + A_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^s + \\
 & + \frac{2A_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^s - \left( A_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) + \kappa \frac{A_{55} \sin^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} \right) U_{ij}^s + \\
 & + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{kj} + \\
 & + \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{im} + \\
 & + \left( A_{26} \left( \frac{\sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} + \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) + A_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \right) W_{ij} + \\
 & + \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^{\varphi} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^{\varphi} + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \\
 & + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^{\varphi} + \left( B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) B_{ij}^{\varphi} + \\
 & + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^s + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + \\
 & + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^s + \frac{2B_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^s + \\
 & - \left( B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) B_{ij}^s = -\omega^2 (I_0 U_{ij}^s + I_1 B_{ij}^s) \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

(c) *Equilibrio alla traslazione lungo la direzione coordinata  $\zeta$  :*

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{A_{11}}{R_{\varphi i}^2} + \frac{A_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}^2} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} - \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} + \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{im}^{\varphi} + \\
 & - \left( \frac{A_{12} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{A_{22} \sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} + \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \right) U_{ij}^{\varphi} + \\
 & - \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}^2} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & - \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} + \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{im}^s +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{A_{16} \cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} - \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} \right) U_{ij}^s + \\
 & + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} W_{kj} + \kappa A_{44} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi_i}^3} \frac{dR_{\varphi_i}}{d\varphi_i} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{kj} + \kappa A_{55} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} W_{im} + \\
 & + \kappa \frac{2A_{45}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{km} - \left( \frac{A_{11}}{R_{\varphi_i}^2} + \frac{2A_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{A_{22} \sin^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} \right) W_{ij} + \\
 & - \left( \frac{B_{11}}{R_{\varphi_i}^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} - \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi_i}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} - \kappa A_{45} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \\
 & - \left( \frac{B_{12} \cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{B_{22} \sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} - \kappa \frac{A_{44} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) B_{ij}^{\varphi} + \\
 & - \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi_i}^2} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi_i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^s - \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi_i}} + \frac{B_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} - \kappa A_{55} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{im}^s + \\
 & + \left( \frac{B_{16} \cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} + \kappa \frac{A_{45} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) B_{ij}^s = -\omega^2 I_0 W_{ij} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

(d) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s_{\varphi}$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{B_{11}}{R_{\varphi_i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^{\varphi} + B_{11} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi_i}^3} \frac{dR_{\varphi_i}}{d\varphi_i} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^{\varphi} + \\
 & + \frac{2B_{16}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^{\varphi} - \left( \frac{B_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{B_{22} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_i}} \right) U_{ij}^{\varphi} + \\
 & + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^s - \left( \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_i}^3} \frac{dR_{\varphi_i}}{d\varphi_i} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^s + \\
 & - \left( \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{im}^s + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi_i}} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi_i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^s + \\
 & + \left( \frac{B_{16} \sin \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} + \frac{B_{26} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} + \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) U_{ij}^s + \\
 & + \left( \frac{B_{11}}{R_{\varphi_i}^2} + \frac{B_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{kj} + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi_i}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} - \kappa A_{45} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{im} + \\
 & + \left( B_{11} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi_i}^3} \frac{dR_{\varphi_i}}{d\varphi_i} \right) - \frac{B_{22} \sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} \right) W_{ij} + \\
 & + \frac{D_{11}}{R_{\varphi_i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^{\varphi} + D_{11} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi_i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi_i}^3} \frac{dR_{\varphi_i}}{d\varphi_i} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^{\varphi} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2D_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^{\varphi} - \left( \frac{D_{12} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{D_{22} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} + \kappa A_{44} \right) B_{ij}^{\varphi} + \\
 & + \frac{D_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^s - \left( \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^s + \\
 & - \left( \frac{D_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{D_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{im}^s + \left( \frac{D_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{D_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^s + \\
 & + \left( \frac{D_{16} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + \frac{D_{26} \cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \kappa A_{45} \right) B_{ij}^s = -\omega^2 (I_1 U_{ij}^{\varphi} + I_2 B_{ij}^{\varphi}) \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

(e) Equilibrio alla rotazione attorno alla direzione coordinata  $s$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^{\varphi} + \left( \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^{\varphi} + \\
 & + \left( \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{im}^{\varphi} + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^{\varphi} + \\
 & + \left( B_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) + \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} \right) U_{ij}^{\varphi} + \\
 & + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} U_{kj}^s + B_{66} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} U_{im}^s + \\
 & + \frac{2B_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{km}^s - \left( B_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) - \kappa \frac{A_{55} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) U_{ij}^s + \\
 & + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}^2} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{kj} + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} - \kappa A_{55} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{im} + \\
 & + \left( B_{26} \left( \frac{\sin \varphi_i \cos \varphi_i}{R_{0i}^2} + \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) + B_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \right) W_{ij} + \\
 & + \frac{D_{16}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^{\varphi} + \left( \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} + D_{16} \left( \frac{2 \cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^{\varphi} + \left( \frac{D_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} + \frac{D_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} \right) \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \\
 & + \left( \frac{D_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{D_{66}}{R_{\varphi i}} \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^{\varphi} + \left( D_{26} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) - \kappa A_{45} \right) B_{ij}^{\varphi} + \\
 & + \frac{D_{66}}{R_{\varphi i}^2} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(2)} B_{kj}^s + D_{66} \left( \frac{\cos \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} - \frac{1}{R_{\varphi i}^3} \frac{dR_{\varphi}}{d\varphi} \Big|_i \right) \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kj}^s +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+D_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(2)} B_{im}^s + \frac{2D_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{km}^s + \\
 &-\left( D_{66} \left( \frac{\cos^2 \varphi_i}{R_{0i}^2} - \frac{\sin \varphi_i}{R_{\varphi i} R_{0i}} \right) + \kappa A_{55} \right) B_{ij}^s = -\omega^2 \left( I_1 U_{ij}^s + I_2 B_{ij}^s \right) \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

dove  $i = 2, 3, \dots, N-1$ ,  $j = 2, 3, \dots, M-1$ ,  $\zeta_{ik}^{\varphi(1)}$ ,  $\zeta_{ik}^{\varphi(2)}$  sono i coefficienti di ponderazione del primo e del secondo ordine per le derivate fatte rispetto alla coordinata  $\varphi$ , mentre  $\zeta_{jm}^{s(1)}$ ,  $\zeta_{jm}^{s(2)}$  sono quelli relativi alle derivate fatte lungo  $s$ . Tutte le caratteristiche geometriche del meridiano  $\varphi_i, R_{\varphi i}, R_{0i}$  devono essere calcolate nel generico punto di coordinate  $(\varphi_i, s_j)$ . Inoltre, occorre ricordare che i coefficienti di ponderazione  $\zeta_{jm}^{s(1)}$ ,  $\zeta_{jm}^{s(2)}$  dipendono dalla lunghezza del parallelo  $s_{0j}$  e quindi devono essere valutati per ogni parallelo, a differenza dei coefficienti  $\zeta_{ik}^{\varphi(1)}$ ,  $\zeta_{ik}^{\varphi(2)}$ .

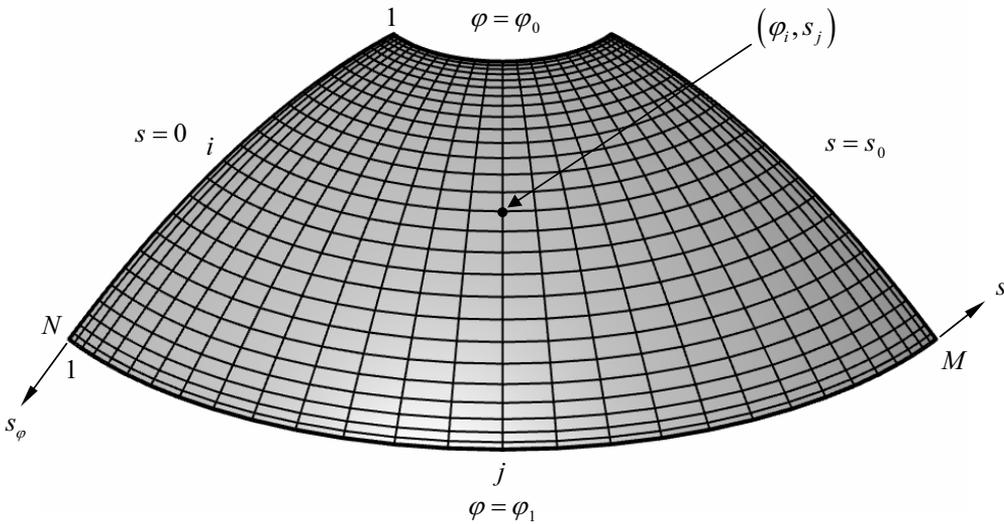


Figura 4.4 – Discretizzazione del dominio bidimensionale.

Le equazioni (4.24)-(4.28) rappresentano la forma discreta delle *equazioni di campo* e sono relazioni valide in ogni punto interno della struttura  $(\varphi_i, s_j)$ ,  $i = 2, 3, \dots, N-1$ ,  $j = 2, 3, \dots, M-1$ . Sui punti di bordo  $(\varphi_i, s_j)$ ,  $i = 1, N, j = 1, M$ , devono essere imposte in forma discreta le *condizioni al contorno*, ricavate nel secondo capitolo.

Analogamente a quanto fatto per le equazioni di campo, introducendo la posizione (4.6) nelle equazioni (4.16)-(4.23), approssimando le derivate spaziali secondo la legge di

quadratura (1.110) ed eseguendo le semplificazioni necessarie, le condizioni al contorno (4.12)-(4.13) possono essere poste in forma discreta. Su un bordo ad  $s_\varphi$  costante, ossia lungo un parallelo, si ha:

$$U_{aj}^\varphi = 0, U_{aj}^s = 0, W_{aj} = 0, B_{aj}^\varphi = 0, B_{aj}^s = 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{11}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^\varphi + \frac{A_{12} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^\varphi + \frac{A_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\ & + A_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^s - \frac{A_{16} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^s + \left( \frac{A_{11}}{R_{\varphi a}} + \frac{A_{12} \sin \varphi_a}{R_{0a}} \right) W_{aj} + \frac{B_{11}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + \\ & + B_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^\varphi + \frac{B_{12} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^\varphi + \frac{B_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^s - \frac{B_{16} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^s = 0 \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^\varphi + \frac{A_{26} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^\varphi + \frac{A_{66}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\ & + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^s - \frac{A_{66} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^s + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi a}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_a}{R_{0a}} \right) W_{aj} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + \\ & + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^\varphi + \frac{B_{26} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^\varphi + \frac{B_{66}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^s = 0 \quad (4.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi a}} U_{aj}^\varphi - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^s + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} W_{kj} + \kappa A_{45} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{am} + \\ & + \kappa A_{44} B_{aj}^\varphi + \kappa A_{44} B_{aj}^s = 0 \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{11}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + B_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^\varphi + \frac{B_{12} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^\varphi + \frac{B_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\ & + B_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^s - \frac{B_{16} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^s + \left( \frac{B_{11}}{R_{\varphi a}} + \frac{B_{12} \sin \varphi_a}{R_{0a}} \right) W_{aj} + \frac{D_{11}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + \\ & + D_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^\varphi + \frac{D_{12} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^\varphi + \frac{D_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + D_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^s - \frac{D_{16} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^s = 0 \quad (4.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^\varphi + \frac{B_{26} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^\varphi + \frac{B_{66}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\ & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{am}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_a}{R_{0a}} U_{aj}^s + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi a}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_a}{R_{0a}} \right) W_{aj} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + \end{aligned}$$

$$+D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^\varphi + \frac{D_{26} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^\varphi + \frac{D_{66}}{R_{\varphi a}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ak}^{(1)} B_{kj}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{am}^s - \frac{D_{66} \cos \varphi_a}{R_{0a}} B_{aj}^s = 0 \quad (4.34)$$

per  $a=1, N$ ,  $j=1, 2, \dots, M$ , mentre su un bordo ad  $s$  costante, ossia lungo un meridiano, si ottiene:

$$U_{ib}^\varphi = 0, U_{ib}^s = 0, W_{ib} = 0, B_{ib}^\varphi = 0, B_{ib}^s = 0 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^\varphi + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^\varphi + \frac{A_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^s + \\ & + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{A_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^s + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{ib} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^\varphi + \\ & + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^\varphi + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^s = 0 \quad (4.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^\varphi + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{A_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^\varphi + \frac{A_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^s + \\ & + A_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^s + \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{ib} + \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^\varphi + \\ & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^\varphi + \frac{B_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^s + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^s = 0 \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} U_{ib}^\varphi - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^s + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} W_{kb} + \kappa A_{45} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} W_{im} + \\ & + \kappa A_{44} B_{ib}^\varphi + \kappa A_{44} B_{ib}^s = 0 \quad (4.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^\varphi + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^\varphi + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^s + \\ & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^s + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{ib} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^\varphi + \\ & + D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^\varphi + \frac{D_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{D_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^s = 0 \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^\varphi + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^\varphi + \frac{B_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} U_{kb}^s + \\ & + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{ib}^s + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{ib} + \frac{D_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{(1)} B_{kb}^\varphi + \end{aligned}$$

$$+D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{D_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^\varphi + \frac{D_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kb}^s + D_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{bm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{ib}^s = 0 \quad (4.40)$$

per  $i=1,2,\dots,N$ ,  $b=1,M$ . E' da notare che qualora lungo un bordo siano applicate le relazioni (4.29) o (4.35), il bordo in parola risulterà incastrato, mentre il bordo risulterà libero applicando le relazioni (4.30)-(4.34) o (4.36)-(4.40). In altre parole, le condizioni (4.29) o (4.35) rappresentano le condizioni di estremo incastrato, mentre le (4.30)-(4.34) o (4.36)-(4.40) quelle relative ad un estremo libero. E' possibile definire altre condizioni al contorno oltre a quelle mostrate, avendo l'accortezza di selezionare solo una relazione da ognuna delle coppie di relazioni (4.12)-(4.13) nelle rispettive direzioni coordinate, altrimenti l'equazione variazionale del principio di Hamilton risulterà violata. Nel definire una data condizione al contorno lungo una determinata direzione coordinata non è possibile specificare contemporaneamente la sollecitazione interna e lo spostamento generalizzato ad essa associato. Combinando opportunamente le condizioni di estremità incastrata o libera espresse su ogni bordo, risulta possibile definire tutte le altre tipologie di vincolamento.

Per quanto riguarda le condizioni di continuità degli sforzi e di compatibilità cinematica, lungo il meridiano di chiusura, ossia lungo i due meridiani per  $\mathcal{G}_1 = 0$  ( $s_1 = 0$ ) e per  $\mathcal{G}_M = 2\pi$  ( $s_{0M} = 2\pi R_{0M}$ ), si ha:

$$U_{i1}^\varphi = U_{iM}^\varphi, U_{i1}^s = U_{iM}^s, W_{i1} = W_{iM}, B_{i1}^\varphi = B_{iM}^\varphi, B_{i1}^s = B_{iM}^s \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^\varphi + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^\varphi + \frac{A_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^s + \\ & + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{A_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^s + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{i1} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^\varphi + \\ & + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^\varphi + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^s = \\ & = \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^\varphi + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^\varphi + \frac{A_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^s + \\ & + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{A_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^s + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{iM} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^\varphi + \\ & + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^\varphi + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^s \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^{\varphi} + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^{\varphi} + \frac{A_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^{\varphi} + \frac{A_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^s + \\
 & + A_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^s + \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{i1} + \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^{\varphi} + \\
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^{\varphi} + \frac{B_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^s + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^s = \\
 & = \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^{\varphi} + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^{\varphi} + \frac{A_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^{\varphi} + \frac{A_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^s + \\
 & + A_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{A_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^s + \left( \frac{A_{12}}{R_{\varphi i}} + \frac{A_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{iM} + \frac{B_{12}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^{\varphi} + \\
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^{\varphi} + \frac{B_{26}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^s + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^s \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} U_{i1}^{\varphi} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^s + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{k1} + \kappa A_{45} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} W_{im} + \\
 & + \kappa A_{44} B_{i1}^{\varphi} + \kappa A_{44} B_{i1}^s = - \kappa \frac{A_{45}}{R_{\varphi i}} U_{iM}^{\varphi} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^s + \\
 & + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} W_{kM} + \kappa A_{45} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} W_{im} + \kappa A_{44} B_{iM}^{\varphi} + \kappa A_{44} B_{iM}^s \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^{\varphi} + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^{\varphi} + \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^{\varphi} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^s + \\
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^s + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{i1} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^{\varphi} + \\
 & + D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^{\varphi} + \frac{D_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{D_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^s = \\
 & = \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^{\varphi} + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^{\varphi} + \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^{\varphi} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^s + \\
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^s + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi i}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{iM} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^{\varphi} + \\
 & + D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^{\varphi} + \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^{\varphi} + \frac{D_{66}}{R_{\varphi i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{D_{66} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^s \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{B_{12}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^\varphi + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^\varphi + \frac{B_{26}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{k1}^s + \\
 & + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{i1}^s + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi_i}} + \frac{B_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{i1} + \frac{D_{12}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^\varphi + \\
 & + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{D_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^\varphi + \frac{D_{26}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{k1}^s + D_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{1m}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{i1}^s = \\
 & = \frac{B_{12}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^\varphi + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^\varphi + \frac{B_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^\varphi + \frac{B_{26}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} U_{kM}^s + \\
 & + B_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} U_{im}^s - \frac{B_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} U_{iM}^s + \left( \frac{B_{12}}{R_{\varphi_i}} + \frac{B_{22} \sin \varphi_i}{R_{0i}} \right) W_{iM} + \frac{D_{12}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^\varphi + \\
 & + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^\varphi + \frac{D_{22} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^\varphi + \frac{D_{26}}{R_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^N \zeta_{ik}^{\varphi(1)} B_{kM}^s + D_{22} \sum_{m=1}^M \zeta_{Mm}^{s(1)} B_{im}^s - \frac{D_{26} \cos \varphi_i}{R_{0i}} B_{iM}^s \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

per  $i = 2, 3, \dots, N-1$ , mentre lungo il parallelo di chiusura, ossia lungo i due paralleli per  $\varphi_1 = 0$  e per  $\varphi_N = 2\pi$ , risulta:

$$U_{1j}^\varphi = U_{Nj}^\varphi, U_{1j}^s = U_{Nj}^s, W_{1j} = W_{Nj}, B_{1j}^\varphi = B_{Nj}^\varphi, B_{1j}^s = B_{Nj}^s \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_{11}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^\varphi + \frac{A_{12} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^\varphi + \frac{A_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & + A_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^s - \frac{A_{16} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^s + \left( \frac{A_{11}}{R_{\varphi_1}} + \frac{A_{12} \sin \varphi_1}{R_{01}} \right) W_{1j} + \frac{B_{11}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + \\
 & + B_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^\varphi + \frac{B_{12} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^\varphi + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^s - \frac{B_{16} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^s = \\
 & = \frac{A_{11}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^\varphi + \frac{A_{12} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^\varphi + \frac{A_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & + A_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^s - \frac{A_{16} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^s + \left( \frac{A_{11}}{R_{\varphi_N}} + \frac{A_{12} \sin \varphi_N}{R_{0N}} \right) W_{Nj} + \frac{B_{11}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^\varphi + \\
 & + B_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^\varphi + \frac{B_{12} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^\varphi + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^s - \frac{B_{16} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^s \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

$$\frac{A_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^\varphi + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^\varphi + \frac{A_{26} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^\varphi + \frac{A_{66}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^s +$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^s - \frac{A_{66} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^s + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi_1}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_1}{R_{01}} \right) W_{1j} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^{\varphi} + \frac{B_{26} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^{\varphi} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^s = \\
 & = \frac{A_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + A_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^{\varphi} + \frac{A_{26} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^{\varphi} + \frac{A_{66}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & + A_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^s - \frac{A_{66} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^s + \left( \frac{A_{16}}{R_{\varphi_N}} + \frac{A_{26} \sin \varphi_N}{R_{0N}} \right) W_{Nj} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^{\varphi} + \frac{B_{26} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^{\varphi} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^s \quad (4.49) \\
 & - \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_1}} U_{1j}^{\varphi} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^s + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} W_{kj} + \kappa A_{45} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{1m} + \\
 & + \kappa A_{44} B_{1j}^{\varphi} + \kappa A_{44} B_{1j}^s = -\kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_N}} U_{Nj}^{\varphi} - \kappa \frac{A_{45} \sin \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^s + \\
 & + \kappa \frac{A_{44}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} W_{kj} + \kappa A_{45} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} W_{Nm} + \kappa A_{44} B_{Nj}^{\varphi} + \kappa A_{44} B_{Nj}^s \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{B_{11}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + B_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^{\varphi} + \frac{B_{12} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^{\varphi} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & + B_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^s - \frac{B_{16} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^s + \left( \frac{B_{11}}{R_{\varphi_1}} + \frac{B_{12} \sin \varphi_1}{R_{01}} \right) W_{1j} + \frac{D_{11}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + D_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^{\varphi} + \frac{D_{12} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^{\varphi} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + D_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^s - \frac{D_{16} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^s = \\
 & = \frac{B_{11}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + B_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^{\varphi} + \frac{B_{12} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^{\varphi} + \frac{B_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & + B_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^s - \frac{B_{16} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^s + \left( \frac{B_{11}}{R_{\varphi_N}} + \frac{B_{12} \sin \varphi_N}{R_{0N}} \right) W_{Nj} + \frac{D_{11}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + D_{16} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^{\varphi} + \frac{D_{12} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^{\varphi} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + D_{12} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^s - \frac{D_{16} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^s \quad (4.51) \\
 & \frac{B_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^{\varphi} + \frac{B_{26} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^{\varphi} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} U_{kj}^s +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{1m}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_1}{R_{01}} U_{1j}^s + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi_1}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_1}{R_{01}} \right) W_{1j} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^{\varphi} + \frac{D_{26} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^{\varphi} + \frac{D_{66}}{R_{\varphi_1}} \sum_{k=1}^N \zeta_{1k}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{1m}^s - \frac{D_{66} \cos \varphi_1}{R_{01}} B_{1j}^s = \\
 & = \frac{B_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^{\varphi} + B_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^{\varphi} + \frac{B_{26} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^{\varphi} + \frac{B_{66}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} U_{kj}^s + \\
 & + B_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} U_{Nm}^s - \frac{B_{66} \cos \varphi_N}{R_{0N}} U_{Nj}^s + \left( \frac{B_{16}}{R_{\varphi_N}} + \frac{B_{26} \sin \varphi_N}{R_{0N}} \right) W_{Nj} + \frac{D_{16}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^{\varphi} + \\
 & + D_{66} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^{\varphi} + \frac{D_{26} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^{\varphi} + \frac{D_{66}}{R_{\varphi_N}} \sum_{k=1}^N \zeta_{Nk}^{\varphi(1)} B_{kj}^s + D_{26} \sum_{m=1}^M \zeta_{jm}^{s(1)} B_{Nm}^s - \frac{D_{66} \cos \varphi_N}{R_{0N}} B_{Nj}^s \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

per  $j=2,3,\dots,M-1$ . Si vuol far rilevare che le condizioni di compatibilità sono state scritte nei soli punti interni del meridiano o del parallelo considerato, visto che nei restanti due punti devono essere soddisfatte le condizioni al contorno strutturali.

#### 4.1.2 SOLUZIONE DEL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI

Definita la forma discreta sia delle equazioni fondamentali (4.24)-(4.28) che delle condizioni al contorno (4.29)-(4.40) e di compatibilità (4.41)-(4.52) in termini di componenti generalizzate di spostamento, è possibile scrivere il sistema risolvete in forma compatta:

$$\mathbf{K}\delta = \omega^2 \mathbf{M}\delta \quad (4.53)$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidezza globale del sistema di ordine  $5(N \times M) \times 5(N \times M)$ ,  $\mathbf{M}$  la matrice di massa di ordine  $5(N \times M) \times 5(N \times M)$ ,  $\delta$  il vettore delle forme modali di ordine  $5(N \times M) \times 1$  e  $\omega$  è la pulsazione propria del sistema. L'equazione (4.53) viene denominata *equazione delle frequenze di vibrazione libera* ed algebricamente costituisce un problema lineare agli autovalori generalizzato. Gli autovalori  $\omega_k$  sono, per definizione, le *pulsazioni circolari naturali* e gli autovettori corrispondenti  $\delta_k$  rappresentano le corrispondenti *forme modali*. Evidentemente il numero massimo autovalori e autovettori calcolati dipendono dalla discretizzazione effettuata (figura 4.4) e quindi dal numero di punti  $N, M$  scelto per discretizzare il dominio bidimensionale nelle due direzioni

coordinate  $\varphi, s$ , rispettivamente. Al fine di ridurre la dimensione del problema agli autovalori si può applicare al sistema (4.53) la ben nota regola denominata *condensazione cinematica*. Il vettore dei gradi di libertà  $\delta$  viene suddiviso in due parti.  $\delta_b$  è il vettore dei gradi di libertà appartenenti al contorno della struttura e  $\delta_d$  il vettore dei gradi di libertà interni. In particolare, le componenti di spostamento  $U_{ij}^\varphi, U_{ij}^s, W_{ij}, B_{ij}^\varphi, B_{ij}^s$  per  $i=1, N$  e  $j=1, M$ , costituiscono il vettore dei gradi di libertà vincolati  $\delta_b$ , mentre le componenti  $U_{ij}^\varphi, U_{ij}^s, W_{ij}, B_{ij}^\varphi, B_{ij}^s$  per  $i=2, \dots, N-1$  e  $j=2, \dots, M-1$  determinano il vettore  $\delta_d$  (figura 4.4).

Una volta introdotta la suddivisione in parola, il sistema risolvete (4.53) può essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bd} \\ \mathbf{K}_{db} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Come conseguenza della suddivisione del vettore dei gradi di libertà  $\delta$ , anche le matrici di rigidezza  $\mathbf{K}$  e di massa  $\mathbf{M}$  risultano partizionate. In forma estesa il sistema può essere posto nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{bb}\delta_b + \mathbf{K}_{bd}\delta_d &= 0 \\ \mathbf{K}_{db}\delta_b + \mathbf{K}_{dd}\delta_d &= \omega^2 \mathbf{M}_{dd}\delta_d \end{aligned} \quad (4.55)$$

La prima equazione (4.55) racchiude in forma compatta tutte le equazioni al contorno e di compatibilità, mentre la seconda tutte le equazioni di campo in forma compatta.

Dalla prima equazione (4.55) è possibile ricavare il vettore  $\delta_b$ , per poi sostituirlo nella seconda equazione al fine di eliminare in quest'ultima equazione i gradi di libertà vincolati  $\delta_b$ . Infatti, dalla prima delle (4.55) risulta:

$$\delta_b = -\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{bd}\delta_d \quad (4.56)$$

Sostituendo la relazione (4.56) nella seconda equazione (4.55) e premoltiplicando ambo i membri per  $\mathbf{M}_{dd}^{-1}$ , si ricava:

$$\left( \mathbf{M}_{dd}^{-1} \left( -\mathbf{K}_{db}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{bd} + \mathbf{K}_{dd} \right) - \omega^2 \mathbf{I} \right) \delta_d = \mathbf{0} \quad (4.57)$$

dove  $\mathbf{I}$  indica la matrice identità  $5(N-2 \times M-2) \times 5(N-2 \times M-2)$ . Si vuol far notare che la matrice  $\mathbf{M}_{dd}$  è una matrice tridiagonale di facile inversione.

L'equazione (4.57) rappresenta un problema generalizzato agli autovalori di ordine  $5(N-2 \times M-2) \times 5(N-2 \times M-2)$ . Dal confronto con il problema di partenza (4.53) di

ordine  $5(N \times M) \times 5(N \times M)$  si osserva che il problema (4.57) risulta ridotto. Risolvendo il problema ridotto (4.57) è possibile definire gli autovalori e di conseguenza le pulsazioni naturali  $\omega_k$  della struttura in esame nonché le forme modali corrispondenti  $\delta_k$ . Le frequenze proprie  $f_k$  si ricavano dalle pulsazioni naturali  $\omega_k$ , essendo  $f_k = \omega_k / 2\pi$ .

### 4.1.3 APPLICAZIONI NUMERICHE

In questa sezione sono mostrati i risultati ottenuti applicando il Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale alle equazioni fondamentali dei gusci moderatamente spessi in materiale anisotropo precedentemente mostrate.

In letteratura sono presenti numerosi articoli che trattano il problema delle vibrazioni libere di piastre rettangolari al variare delle loro dimensioni e della tipologia di vincolamento. Si consideri una piastra rettangolare avente spessore costante  $h$  e lati  $L_x, L_y$  (figura 3.13). Per quanto riguarda le condizioni al contorno si è seguita la convenzione di seguito esposta. Considerando la normale positiva alla superficie di riferimento, girando in senso antiorario e partendo dal bordo caratterizzato dalla coordinata curvilinea  $x=0$ , la simbologia C-F-C-F indica che i bordi per  $x=0$  e  $x=L_x$  sono incastrati, mentre i bordi per  $y=0$  e  $y=L_y$  sono liberi. Analogamente la sigla C-S-C-S implica che i bordi per  $x=0$  e  $x=L_x$  sono incastrati, mentre i bordi per  $y=0$  e  $y=L_y$  sono semplicemente appoggiati. La convenzione introdotta è valida anche per i pannelli di forma generica (figura 4.4).

Si considerino le pulsazioni adimensionalizzate definite dalla seguente relazione:

$$\bar{\omega}_k = \omega_k L_x^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (4.58)$$

dove  $\omega_k$  è la pulsazione naturale,  $\rho$  la densità del materiale e  $D_{11} = D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  la rigidezza flessionale di una piastra costituita da una singola lamina di materiale isotropo.

Le tabelle 4.1-4.4 mostrano le prime cinque pulsazioni adimensionalizzate al variare del rapporto tra i lati  $L_x/L_y$  per quattro differenti condizioni al contorno. La tabella 4.5 presenta invece la pulsazione fondamentale adimensionalizzata per varie combinazioni di condizioni al contorno al variare del rapporto  $L_x/L_y$ . Le soluzioni sono state ricavate utilizzando la discretizzazione armonica (1.208) in entrambe le direzioni coordinate e la

quadratura differenziale polinomiale (PDQ). Nelle tabelle è inoltre indicato il numero di punti di griglia utilizzato in entrambe le direzioni coordinate.

La tabella 4.6 si riferisce ad una piastra laminata non simmetrica (0,45) composta da due lamine di uguale spessore e costituite da materiale ortotropo, caratterizzato dalle seguenti costanti elastiche:  $E_1 = 200 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 8 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4 \text{ GPa}$ ,  $G_{23} = 1.6 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$  e  $\rho = 1450 \text{ Kg/m}^3$ . Nella tabella 4.6 sono presentate le pulsazioni adimensionalizzate  $\bar{\omega}_k = \omega_k L_x \sqrt{\rho/E_2}$  per piastra sottile e moderatamente spessa, ottenute utilizzando sia la quadratura differenziale polinomiale (PDQ) che la quadratura differenziale basata sull'espansione di Fourier (HDQ). Il tipo di discretizzazione scelto è la discretizzazione armonica (1.208). Dal confronto si osserva che i risultati ottenuti risultano soddisfacenti e in buon accordo con quelli presenti in letteratura.

**Tabella 4.1** – Pulsazioni adimensionalizzate  $\bar{\omega}_k$  per una piastra rettangolare C-C-C-C.

$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 0.4$				
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Karami et al.*** DQ 15×15	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	23.648	23.645	23.6437	23.6390
$\bar{\omega}_2$	27.817	27.810	-	27.8004
$\bar{\omega}_3$	35.446	35.414	-	35.4075
$\bar{\omega}_4$	46.702	46.451	-	46.6558
$\bar{\omega}_5$	61.554	62.091	-	61.4692
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 0.66667$				
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Karami et al.*** DQ 15×15	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	27.010	27.006	27.0049	26.9988
$\bar{\omega}_2$	41.716	41.707	-	41.6906
$\bar{\omega}_3$	66.143	66.130	-	66.0933
$\bar{\omega}_4$	66.552	66.465	-	66.4920
$\bar{\omega}_5$	79.850	79.819	-	79.7603
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 1$				
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Karami et al.*** DQ 15×15	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	35.992	35.986	35.9852	35.9745
$\bar{\omega}_2$	73.413	73.399	-	73.3550
$\bar{\omega}_3$	73.413	73.399	-	73.3550
$\bar{\omega}_4$	108.27	108.230	-	108.1349
$\bar{\omega}_5$	131.64	131.418	-	131.4675
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 1.5$				
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Karami et al.*** DQ 15×15	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	60.772	60.763	60.7611	60.7473
$\bar{\omega}_2$	93.860	93.841	-	93.8037
$\bar{\omega}_3$	148.82	148.793	-	148.7098
$\bar{\omega}_4$	149.74	149.547	-	149.6071
$\bar{\omega}_5$	179.66	179.594	-	179.4607
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 2.5$				
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Karami et al.*** DQ 15×15	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	147.80	147.779	147.7733	147.7443
$\bar{\omega}_2$	173.85	173.815	-	173.7534
$\bar{\omega}_3$	221.54	221.338	-	221.2972
$\bar{\omega}_4$	291.89	290.321	-	291.5996
$\bar{\omega}_5$	384.71	388.317	-	384.1825

\* A.W. Leissa, *Journal of Sound and Vibration* 31 (1973), 257-293 [86, 155].

\*\* C. Shu, H. Du, *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), 819-835 [155].

\*\*\* G. Karami, P. Malekzadeh, *International Journal for Numerical methods in Engineering* 56 (2003), 847-868 [86].

**Tabella 4.2** – Pulsazioni adimensionalizzate  $\bar{\omega}_k$  per una piastra rettangolare S-S-S-S.

$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 0.4$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	11.4487	11.4487	11.4482
$\bar{\omega}_2$	16.1862	16.1826	16.1852
$\bar{\omega}_3$	24.0818	24.0529	24.0794
$\bar{\omega}_4$	35.1358	34.7326	35.1319
$\bar{\omega}_5$	41.0576	41.0592	41.0499
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 0.66667$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	14.2561	14.2561	14.2551
$\bar{\omega}_2$	27.4156	27.4161	27.4120
$\bar{\omega}_3$	43.8649	43.8665	43.8560
$\bar{\omega}_4$	49.3480	49.2377	49.3367
$\bar{\omega}_5$	57.0244	57.0258	57.0091
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 1$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	19.7392	19.7392	19.7374
$\bar{\omega}_2$	49.3480	49.3495	49.3367
$\bar{\omega}_3$	49.3480	49.3495	49.3367
$\bar{\omega}_4$	78.9568	78.9586	78.9278
$\bar{\omega}_5$	98.6960	98.4154	98.6510
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 1.5$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi GDQ (15×15)
$\bar{\omega}_1$	32.0762	32.0762	32.0741
$\bar{\omega}_2$	61.6850	61.6861	61.6772
$\bar{\omega}_3$	98.6960	98.6996	98.6760
$\bar{\omega}_4$	111.0330	110.7848	111.0077
$\bar{\omega}_5$	128.3049	128.3081	128.2709
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 2.5$			
Modo	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
$\bar{\omega}_1$	71.5564	71.5546	71.5508
$\bar{\omega}_2$	101.1634	101.1641	101.1558
$\bar{\omega}_3$	150.5115	150.3305	150.4947
$\bar{\omega}_4$	219.5987	217.0789	219.5710
$\bar{\omega}_5$	256.6097	256.6205	256.5611

\* A. W. Leissa, *Journal of Sound and Vibration* 31 (1973), 257-293 [155].

\*\* C. Shu, H. Du, *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), 819-835 [155].

**Tabella 4.3** – Pulsazioni adimensionalizzate  $\bar{\omega}_k$  per una piastra rettangolare C-F-F-F.

$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 0.4$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ $27 \times 27$	Karami et al.*** DQ $27 \times 27$	Risultati Tesi PDQ $21 \times 21$
$\bar{\omega}_1$	3.5107	3.4951	3.5036	3.4937
$\bar{\omega}_2$	4.7861	4.7584	4.7721	4.7694
$\bar{\omega}_3$	8.1146	8.0561	8.0701	8.0445
$\bar{\omega}_4$	13.882	13.793	13.8053	13.7954
$\bar{\omega}_5$	21.521	21.638	21.5033	21.5004
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 0.66667$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ $27 \times 27$	Karami et al.*** DQ $27 \times 27$	Risultati Tesi PDQ $21 \times 21$
$\bar{\omega}_1$	3.5024	3.4759	3.4918	3.4830
$\bar{\omega}_2$	6.4062	6.3490	6.3916	6.4114
$\bar{\omega}_3$	14.538	14.4316	14.4672	14.4340
$\bar{\omega}_4$	22.038	21.9302	21.8939	21.9116
$\bar{\omega}_5$	26.073	25.9367	25.8927	25.9336
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 1$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ $27 \times 27$	Karami et al.*** DQ $27 \times 27$	Risultati Tesi PDQ $21 \times 21$
$\bar{\omega}_1$	3.4917	3.4550	3.4771	3.4707
$\bar{\omega}_2$	8.5246	8.4310	8.5087	8.5481
$\bar{\omega}_3$	21.429	21.3070	21.2633	21.2717
$\bar{\omega}_4$	27.331	27.1590	27.1993	27.1662
$\bar{\omega}_5$	31.111	31.0159	30.9383	31.0094
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 1.5$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ $27 \times 27$	Karami et al.*** GDQ ( $27 \times 27$ )	Risultati Tesi PDQ $21 \times 21$
$\bar{\omega}_1$	3.4772	3.4318	3.4595	3.4567
$\bar{\omega}_2$	11.676	11.5491	11.6574	11.7252
$\bar{\omega}_3$	21.618	21.5082	21.4435	21.4554
$\bar{\omega}_4$	39.492	39.4185	39.3121	39.4479
$\bar{\omega}_5$	53.876	53.5260	53.5481	53.5039
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 2.5$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ $27 \times 27$	Karami et al.*** DQ $27 \times 27$	Risultati Tesi PDQ $21 \times 21$
$\bar{\omega}_1$	3.4562	3.3935	3.4340	3.4380
$\bar{\omega}_2$	17.988	17.8168	17.9622	18.0772
$\bar{\omega}_3$	21.563	21.4564	21.3742	21.3808
$\bar{\omega}_4$	57.458	57.3558	57.2075	57.4805
$\bar{\omega}_5$	60.581	60.0485	60.1565	60.1110

\* A.W. Leissa, *Journal of Sound and Vibration* 31 (1973), 257-293 [86].\*\* T.Y. Wu, G.R. Liu, *International Journal for Numerical methods in Engineering* 50 (2001), 1907-1929 [86, 208].\*\*\* G. Karami, P. Malekzadeh, *International Journal for Numerical methods in Engineering* 56 (2003), 847-868 [86].

**Tabella 4.4** – Pulsazioni adimensionalizzate  $\bar{\omega}_k$  per una piastra rettangolare C-C-F-F.

$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 0.4$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ 28×28	Karami et al.*** DQ 29×29	Risultati Tesi PDQ 21×21
$\bar{\omega}_1$	3.9857	3.9613	3.9778	3.9707
$\bar{\omega}_2$	-	-	7.1311	7.1267
$\bar{\omega}_3$	-	-	13.0436	13.0315
$\bar{\omega}_4$	-	-	21.7165	21.7147
$\bar{\omega}_5$	-	-	22.7839	22.7990
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 0.66667$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ 28×28	Karami et al.*** DQ 29×29	Risultati Tesi PDQ 21×21
$\bar{\omega}_1$	4.9848	4.9266	4.9722	4.9725
$\bar{\omega}_2$	-	-	13.2294	13.2315
$\bar{\omega}_3$	-	-	23.2594	23.2770
$\bar{\omega}_4$	-	-	30.1235	30.0981
$\bar{\omega}_5$	-	-	34.1213	34.1152
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 1$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ 28×28	Karami et al.*** DQ 29×29	Risultati Tesi PDQ 21×21
$\bar{\omega}_1$	6.9421	6.8418	6.9246	6.9284
$\bar{\omega}_2$	-	-	23.8849	23.8902
$\bar{\omega}_3$	-	-	26.5718	26.5905
$\bar{\omega}_4$	-	-	47.6296	47.6022
$\bar{\omega}_5$	-	-	62.7376	62.6700
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 1.5$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ 28×28	Karami et al.*** DQ 29×29	Risultati Tesi PDQ 21×21
$\bar{\omega}_1$	11.216	11.0849	11.1875	11.1879
$\bar{\omega}_2$	-	-	29.7661	29.7708
$\bar{\omega}_3$	-	-	52.3336	52.3731
$\bar{\omega}_4$	-	-	67.7779	67.7205
$\bar{\omega}_5$	-	-	76.7728	76.7585
$h = 0.01 \text{ m}, L_x/L_y = 2.5$				
Modo	Leissa* (analitica)	Wu-Liu** DQ 28×28	Karami et al.*** DQ 29×29	Risultati Tesi PDQ 21×21
$\bar{\omega}_1$	24.911	24.7579	24.8593	24.8182
$\bar{\omega}_2$	-	-	44.5691	44.5444
$\bar{\omega}_3$	-	-	81.5223	81.4479
$\bar{\omega}_4$	-	-	135.7279	135.7191
$\bar{\omega}_5$	-	-	142.3992	142.4893

\* A.W. Leissa, *Journal of Sound and Vibration* 31 (1973), 257-293 [86].

\*\* T.Y. Wu, G.R. Liu, *International Journal for Numerical methods in Engineering* 50 (2001), 1907-1929 [86, 208].

\*\*\* G. Karami, P. Malekzadeh, *International Journal for Numerical methods in Engineering* 56 (2003), 847-868 [86].

**Tabella 4.5** – Pulsazioni fondamentali adimensionalizzate  $\bar{\omega}$ , per una piastra rettangolare.

$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 0.4$			
C. C.	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
C-C-C-S	23.439	23.4375	23.4342
C-C-C-F	22.508	22.5083	22.5028
C-F-C-S	22.544	22.4789	22.4742
C-F-C-F	22.346	22.2767	22.2588
C-C-S-S	16.849	16.8475	16.8456
C-C-S-F	15.696	15.6312	15.6336
C-S-S-F	15.589	15.5460	15.5917
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 0.66667$			
C. C.	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
C-C-C-S	25.861	25.8522	25.8537
C-C-C-F	22.926	22.9282	22.9300
C-F-C-S	22.855	22.7742	22.7779
C-F-C-F	22.314	22.2241	22.2079
C-C-S-S	19.952	19.9512	19.9484
C-C-S-F	16.287	16.2116	16.2225
C-S-S-F	15.998	15.9553	16.0079
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 1$			
C. C.	Leissa* (analitica)	Shu-Du** GDQ (12x12)	Risultati Tesi PDQ 15×15
C-C-C-S	31.829	31.8008	31.8179
C-C-C-F	23.912	23.9228	23.9311
C-F-C-S	23.460	23.3676	23.3800
C-F-C-F	22.272	22.1643	22.1488
C-C-S-S	27.056	27.0541	27.0490
C-C-S-F	17.615	17.5358	17.5586
C-S-S-F	16.844	16.7498	16.8114
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 1.5$			
C. C.	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
C-C-C-S	48.167	48.0818	48.1511
C-C-C-F	26.623	26.6426	26.6600
C-F-C-S	24.775	24.6740	24.7064
C-F-C-F	22.215	22.0889	22.0773
C-C-S-S	44.893	44.8903	44.8840
C-C-S-F	21.035	20.9615	21.0071
C-S-S-F	18.467	18.4281	18.5079
$h = 0.01\text{ m}, L_x/L_y = 2.5$			
C. C.	Leissa* (analitica)	Shu-Du** DQ 12×12	Risultati Tesi PDQ 15×15
C-C-C-S	37.561	37.6497	37.6387
C-C-C-F	28.564	28.4610	28.5390
C-F-C-S	22.130	21.9763	21.9693
C-F-C-F	105.31	105.2970	105.2845
C-C-S-S	33.578	33.5243	33.6053
C-C-S-F	23.002	22.9637	23.0898
C-S-S-F	37.561	37.6497	37.6387

\* A.W. Leissa, *Journal of Sound and Vibration* 31 (1973), 257-293 [155].\*\* C. Shu, H. Du, *International Journal of Solids and Structures* 34 (1997), 819-835 [155].

**Tabella 4.6** – Pulsazioni adimensionalizzate  $\bar{\omega}_k$  per una piastra rettangolare C-C-C-C.

$h = 0.01\text{ m}, L_x = L_y = 1\text{ m}$					
Modo	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
Lanhe et al.* 15×15	1.5483	2.3367	2.9965	3.3315	3.7691
Risultati Tesi PDQ 15×15	1.5478	2.3356	2.9956	3.3103	3.7675
Risultati Tesi HDQ 15×15	1.5478	2.3356	2.9956	3.3103	3.7675
$h = 0.1\text{ m}, L_x = L_y = 1\text{ m}$					
Modo	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
Lanhe et al.* 15×15	0.2154	0.3516	0.5066	0.5463	0.6633
Risultati Tesi PDQ 15×15	0.2129	0.3465	0.5011	0.5375	0.6544
Risultati Tesi HDQ 15×15	0.2129	0.3465	0.5011	0.5375	0.6544

\* W. Lanhe, L. Hua, W. Daobin, *Composite Structures* 68 (2005), 319-330 [99].

**Tabella 4.7** – Prime dieci frequenze di un toroide sottile C-C.

$R = 0.056095\text{ m}, R_b = 0.1524\text{ m}, h = 0.00211\text{ m}, \vartheta_0 = 90^\circ$								
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Wang et al.* 28×27	Nastran 1×80×40	Abaqus 1×80×40	Ansys 1×80×40	Straus 1×80×40	Pro/Mech AutoGEM
$f_1$	3146.05	3146.11	3147.00	3148.16	3146.84	3146.84	3148.27	3163.68
$f_2$	3410.26	3410.13	3411.00	3410.23	3408.82	3408.82	3410.35	3448.38
$f_3$	3466.75	3466.93	3468.00	3466.24	3465.07	3465.07	3466.98	3519.35
$f_4$	3596.86	3596.35	3599.00	3596.80	3595.27	3595.27	3597.76	3674.93
$f_5$	3937.84	3938.44	3943.00	3938.12	3936.62	3936.62	3939.92	4061.47
$f_6$	4083.55	4083.29	4080.00	4076.55	4076.75	4076.75	4079.91	4147.91
$f_7$	4089.56	4089.79	4087.00	4086.42	4083.08	4083.09	4086.26	4169.44
$f_8$	4254.09	4253.76	4257.00	4251.19	4249.70	4249.71	4253.25	4380.67
$f_9$	4262.91	4262.53	4265.00	4260.54	4257.62	4257.63	4261.38	4397.92
$f_{10}$	4267.02	4267.30	4270.00	4264.43	4262.51	4262.51	4266.24	4410.18
$R = 0.056095\text{ m}, R_b = 0.1524\text{ m}, h = 0.00211\text{ m}, \vartheta_0 = 180^\circ$								
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Wang et al.* 28×27	Nastran 1×80×80	Abaqus 1×80×80	Ansys 1×80×80	Straus 1×80×80	Pro/Mech (AutoGEM)
$f_1$	1278.24	1278.20	1278.00	1279.53	1278.66	1278.66	1279.60	1283.02
$f_2$	2220.04	2220.04	2216.00	2216.48	2214.52	2214.52	2215.33	2244.51
$f_3$	2384.86	2384.93	2384.00	2385.35	2384.68	2384.68	2385.96	2390.89
$f_4$	2437.14	2437.04	2429.00	2427.40	2427.25	2427.25	2428.56	2470.53
$f_5$	2450.32	2450.24	2442.00	2442.71	2440.37	2440.38	2441.79	2493.70
$f_6$	2465.44	2465.25	2458.00	2457.01	2456.74	2456.75	2457.93	2503.16
$f_7$	2881.78	2881.92	2877.00	2874.77	2874.04	2874.04	2875.45	2916.02
$f_8$	2936.72	2936.77	2937.00	2937.85	2937.58	2937.58	2938.48	2942.94
$f_9$	2986.54	2986.52	2986.00	2984.61	2983.57	2983.57	2984.60	3008.22
$f_{10}$	3151.49	3151.84	3150.00	3148.18	3146.81	3146.81	3148.23	3200.39

\* X.H. Wang, B. Xu, D. Redekop, *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006), 424-434 [197].

Tabella 4.8 – Prime dieci frequenze di un toroide moderatamente spesso C-C.

$R = 0.05287 \text{ m}$ , $R_b = 0.1524 \text{ m}$ , $h = 0.008561 \text{ m}$ , $\vartheta_0 = 90^\circ$								
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Wang et al.* 28×27	Nastran 2×80×40	Abaqus 2×80×40	Ansys 2×80×40	Straus 2×80×40	Pro/Mech AutoGEM
$f_1$	3519.15	3519.16	3547.00	3519.05	3523.60	3517.98	3518.93	3529.42
$f_2$	4344.31	4344.31	4385.00	4339.25	4336.58	4338.09	4339.07	4344.23
$f_3$	4891.12	4891.12	4947.00	4884.46	4885.24	4884.74	4885.05	4895.22
$f_4$	5938.93	5938.93	5928.00	5924.22	5926.40	5923.99	5925.77	5949.78
$f_5$	6115.07	6115.07	6164.00	6095.13	6095.45	6094.26	6095.81	6121.82
$f_6$	6410.32	6410.33	6486.00	6427.48	6423.03	6428.66	6429.80	6437.92
$f_7$	6909.53	6909.53	7051.00	6915.40	6905.08	6918.10	6920.52	6943.41
$f_8$	7120.38	7120.38	7210.00	7125.13	7117.13	7129.73	7130.77	7144.88
$f_9$	7221.64	7221.64	7278.00	7223.41	7227.81	7223.88	7225.75	7257.04
$f_{10}$	7357.87	7357.87	7426.00	7355.86	7366.85	7358.14	7359.23	7384.53
$R = 0.05287 \text{ m}$ , $R_b = 0.1524 \text{ m}$ , $h = 0.008561 \text{ m}$ , $\vartheta_0 = 180^\circ$								
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Wang et al.* 28×27	Nastran 2×80×80	Abaqus 2×80×80	Ansys 2×80×80	Straus 2×80×80	Pro/Mech AutoGEM
$f_1$	1380.74	1380.74	1376.00	1381.99	1381.73	1381.73	1381.76	1386.89
$f_2$	2434.16	2434.16	2418.00	2437.45	2437.17	2437.17	2437.37	2444.87
$f_3$	2963.76	2963.76	2973.00	2962.81	2962.64	2962.64	2962.79	2974.30
$f_4$	3139.32	3139.32	3179.00	3131.80	3132.25	3132.25	3132.43	3138.18
$f_5$	3532.13	3532.13	3553.00	3530.33	3528.81	3528.81	3529.73	3532.63
$f_6$	3737.22	3737.22	3754.00	3713.36	3713.23	3713.23	3713.79	3720.70
$f_7$	3754.19	3754.19	3773.00	3733.80	3733.09	3733.09	3733.74	3739.05
$f_8$	4045.02	4045.02	4046.00	4032.80	4034.01	4034.01	4033.62	4044.10
$f_9$	4455.63	4455.63	4457.00	4428.59	4429.01	4429.02	4429.37	4446.25
$f_{10}$	4603.66	4603.66	4607.00	4594.09	4593.39	4593.40	4594.17	4604.12

\* X.H. Wang, B. Xu, D. Redekop, *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006), 424-434 [197].

Le tabelle 4.7 e 4.8 mostrano i risultati ricavati per un guscio toroidale a meridiano circolare a doppia curvatura (figura 3.8 o figura 4.3). Il toroide in parola è costituito da una sola lamina di materiale isotropo, le cui proprietà meccaniche sono:  $E = 193 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.291$  e  $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$ . Accanto alle frequenze calcolate via PDQ e HDQ, ed ai risultati di letteratura, sono state affiancate le soluzioni 3D ottenute con alcuni programmi commerciali agli elementi finiti (FEM): Nastran, Abaqus, Ansys, Straus e Pro/Mechanica.

Le soluzioni GDQ sono state ricavate utilizzando un griglia di punti 31×31 e considerando la discretizzazione armonica (1.208) in entrambe le direzioni coordinate. Per quanto riguarda i programmi commerciali Nastran, Abaqus, Ansys e Straus, si sono utilizzati elementi finiti brick con funzioni di forma quadratiche a 20 nodi. Per il guscio toroidale sottile sono state considerate le meshature 1×80×40 e 1×80×80, dove il primo

numero indica il numero di elementi in cui si è discretizzato lo spessore, il secondo il numero di elementi lungo il meridiano circolare ed il terzo il numero di elementi lungo il parallelo. Per il guscio toroidale moderatamente spesso lo spessore è stato discretizzato con due elementi finiti. Per quanto riguarda i risultati ottenuti con Pro/Mechanica la meshatura è stata generata in maniera automatica dal programma e gli elementi utilizzati sono brick e tetraedri, in cui le funzioni di forma sono polinomi fino al nono grado. Occorre osservare che gli elementi finiti utilizzati dal codice commerciale Pro/Mechanica non sono standard e la tecnica numerica in esso implementata viene denominata Geometrical Element Method (GEM).

Dalle tabelle 4.7 e 4.8 si può osservare che i risultati ottenuti mediante la tecnica GDQ e HDQ sono in ottimo accordo con i risultati presenti in letteratura e con quelli della soluzione FEM tridimensionale, sia per il guscio sottile che per il guscio moderatamente spesso.

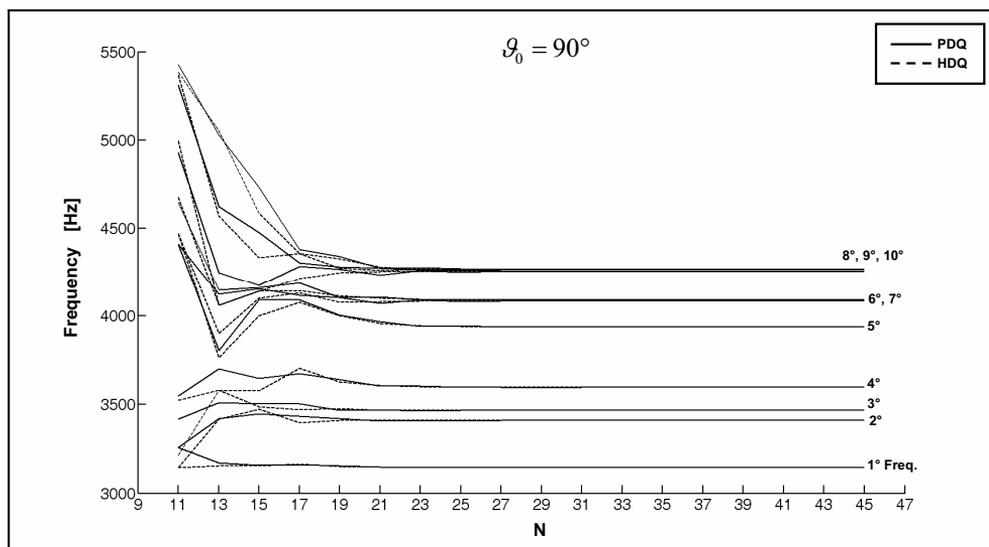
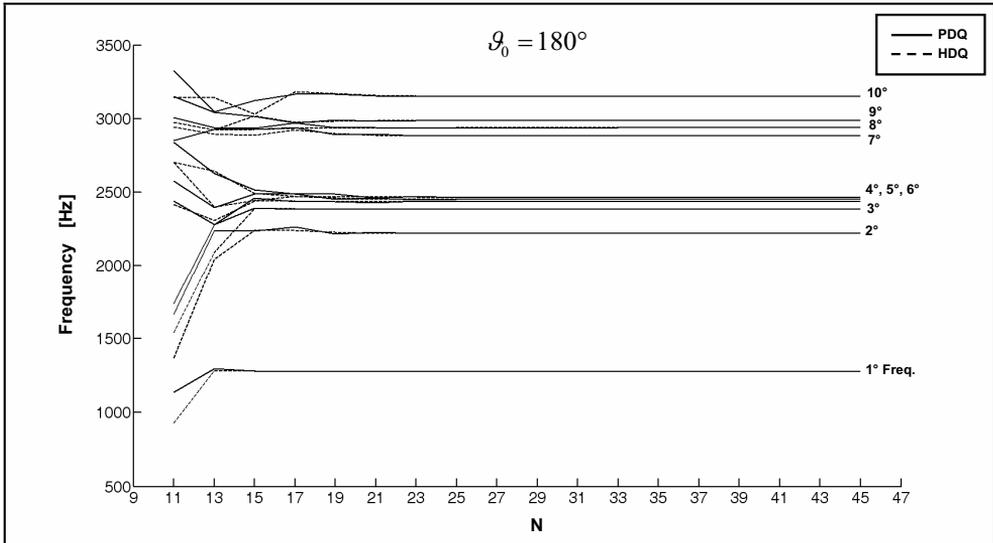


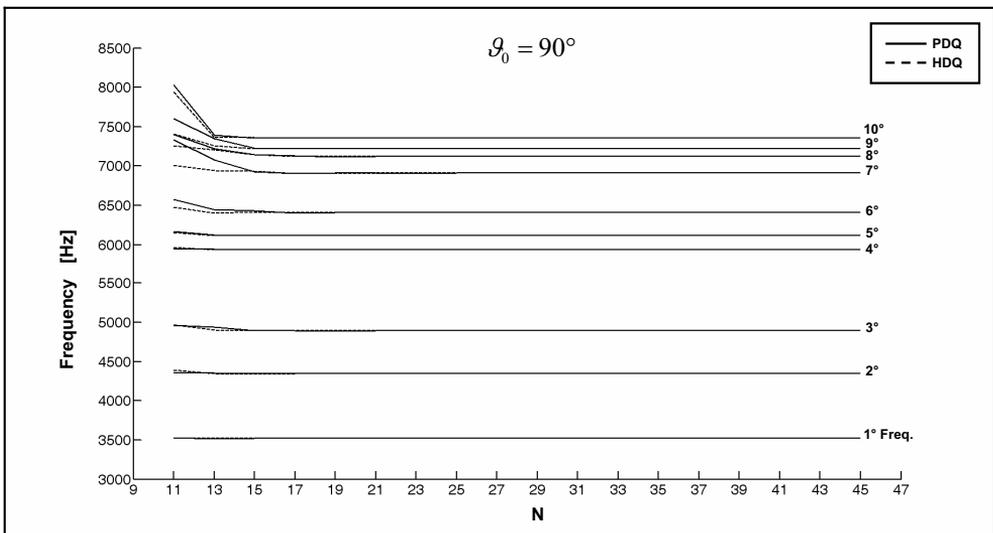
Figura 4.5 – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze di un toroide sottile C-C.

Le figure 4.5-4.8 mostrano le caratteristiche di convergenza e di stabilità della tecnica numerica GDQ. Si può osservare che utilizzando come polinomi di base sia i polinomi di Lagrange (PDQ) che i polinomi trigonometrici (HDQ) le soluzioni convergono e sono stabili all'aumentare del numero di punti di discretizzazione. In particolare, il dominio bidimensionale è stato discretizzato nelle due direzioni utilizzando la distribuzione armonica (1.208) e lo stesso numero di punti nodali  $N = M$ . Dalle figure 4.5-4.8 appare che, mentre per un guscio moderatamente spesso sono sufficienti  $N = M = 19$  punti di

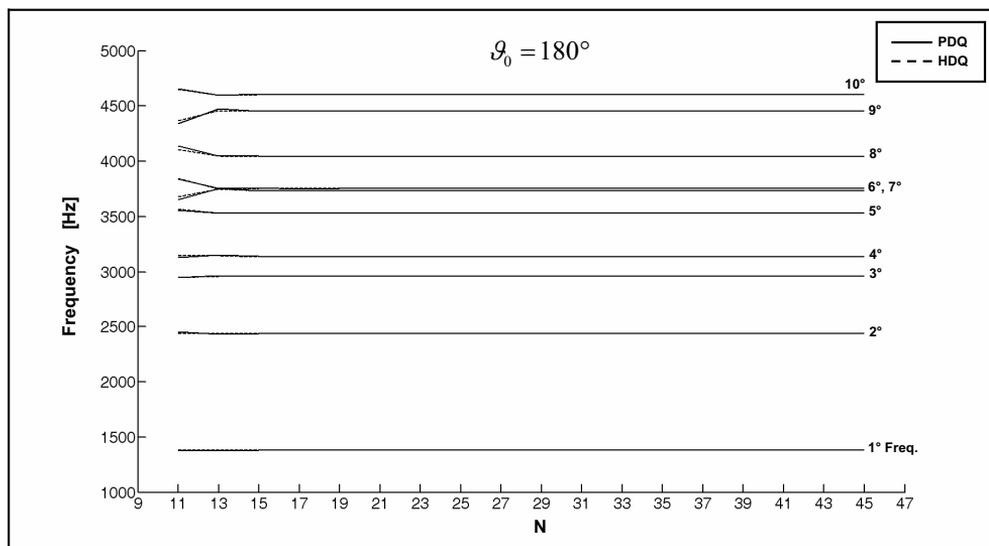
griglia per ottenere una soluzione accurata, per un guscio sottile occorre utilizzare un numero di punti pari a  $N = M = 25$ . Inoltre, a parità di sezione trasversale del toroide, si osserva che la convergenza risulta più lenta all'aumentare dell'ampiezza angolare di rivoluzione  $\mathcal{G}_0$ .



**Figura 4.6** – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze di un toroide sottile C-C.



**Figura 4.7** – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze di un toroide moderatamente spesso C-C.



**Figura 4.8** – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze di un toroide moderatamente spesso C-C.

Di seguito vengono presentati i risultati ottenuti per diverse tipologie strutturali. La presentazione segue lo schema logico introdotto nel capitolo terzo ed utilizzato per la stesura del codice in linguaggio MATLAB. Si parte dai gusci di rivoluzione a doppia curvatura, come il pannello a meridiano iperbolico, fino a giungere ai gusci degeneri come le piastre. Per quel che riguarda il materiale costituente le strutture esaminate si sono considerati diversi schemi di laminazione, tra cui laminati non simmetrici, simmetrici, antisimmetrici costituiti da due, tre o quattro lamine di materiale ortotropo. Le proprietà meccaniche del materiale sono indicate di volta in volta nelle tabelle, come pure le caratteristiche geometriche dei gusci esaminati. Le grandezze geometrico-strutturali si riferiscono alle strutture esposte nel terzo capitolo ed indicate nelle rispettive figure.

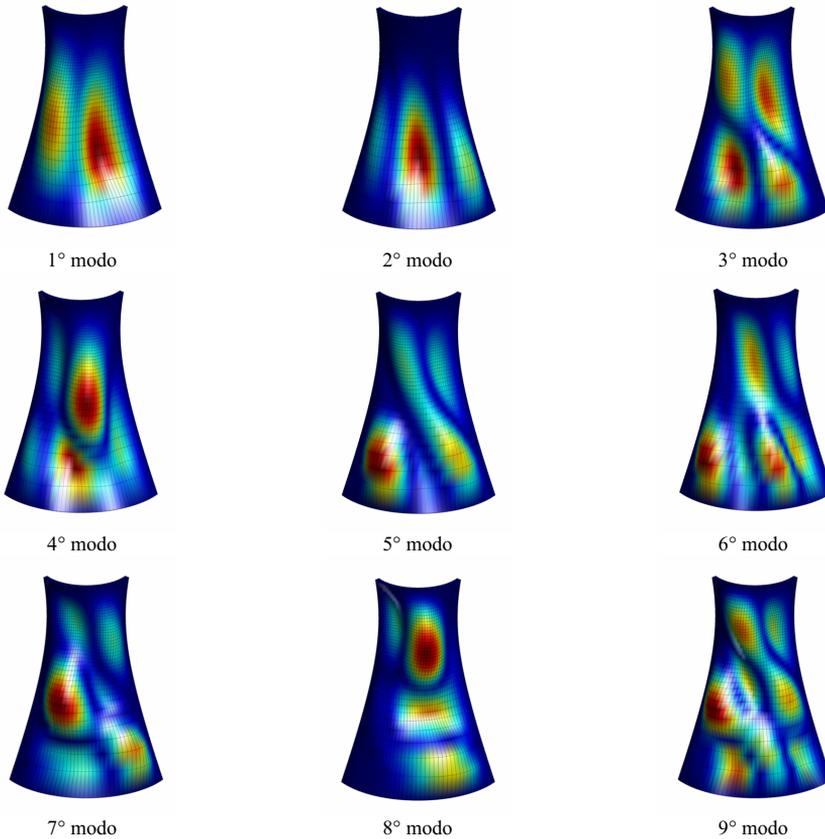
Le soluzioni PDQ e HDQ sono state ottenute considerando la discretizzazione armonica (1.208) e un uguale numero di punti nodali  $N = M$  nelle due direzioni coordinate. Le soluzioni in parola vengono confrontate con le soluzioni FEM ricavate da alcuni software commerciali: Ansys, Abaqus, Nastran, Straus e Pro/Mechanica. La tabella 4.9 mostra le tipologie di elementi shell utilizzati per i confronti numerici. Si è fatto riferimento a elementi finiti shell a 4 e 8 nodi.

**Tabella 4.9** – Tipologia di elementi finiti shell utilizzati nei programmi commerciali.

FEM	Abaqus	Ansys		Straus	Nastran		Pro/Mech
Num. nodi	8	8	8	8	8	4	4
Tipo elemento	S8R6	SHELL93	SHELL99	Quad8	CQUAD8	CQUAD4	GEM-Quad4

**Tabella 4.10** – Prime dieci frequenze di un pannello a meridiano iperbolico costituito da una sola lamina ortotropa orientata di  $\theta = 30^\circ$  (C-C-C-C).

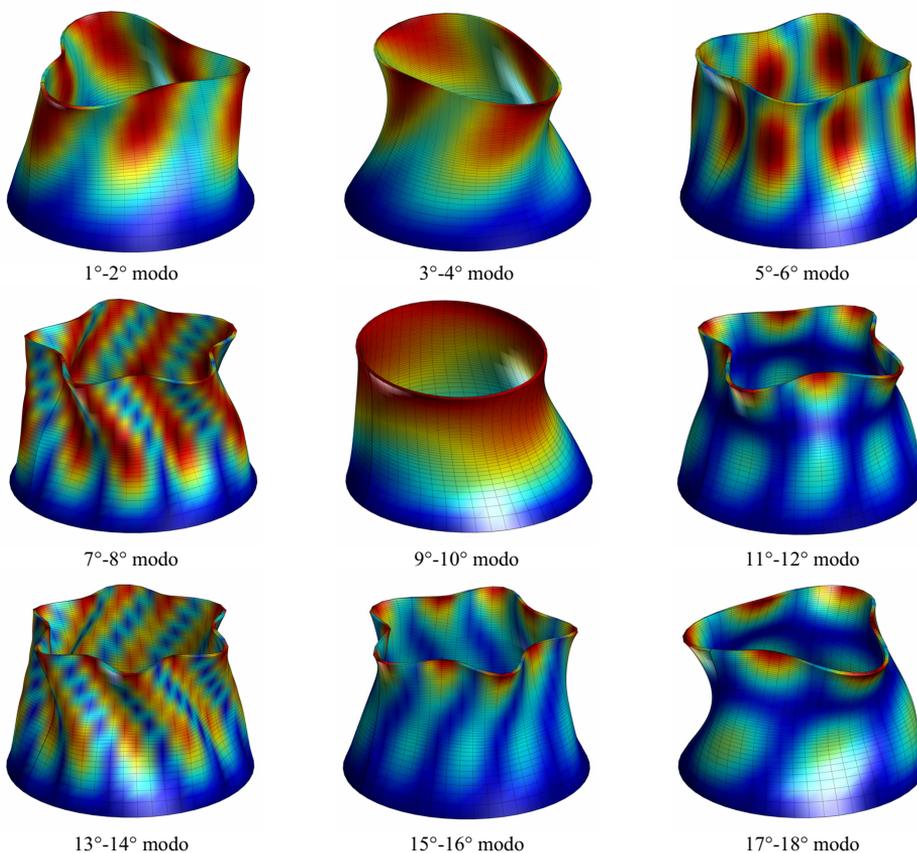
Caratteristiche geometriche: $a = 1\text{ m}$ , $d = 2\text{ m}$ , $D = 4\text{ m}$ , $C = 1\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 100×60 (4 nodi)	Abaqus 60×40 (8 nodi)	Ansys 60×40 (8 nodi)	Straus 60×40 (8 nodi)	Pro/Mech 31×21 (GEM)
$f_1$	195.729	195.729	195.130	195.196	194.896	195.249	194.860
$f_2$	233.480	233.480	233.349	233.499	232.797	233.634	232.779
$f_3$	277.392	277.392	276.901	277.113	276.227	276.744	276.187
$f_4$	304.990	304.989	304.599	304.756	303.811	304.762	303.769
$f_5$	318.883	318.883	319.453	319.493	318.455	318.786	318.425
$f_6$	351.754	351.754	352.753	352.944	351.224	352.178	351.188
$f_7$	362.594	362.594	362.485	362.612	361.600	361.795	361.536
$f_8$	372.420	372.420	371.312	371.400	370.610	371.322	370.559
$f_9$	400.404	400.404	401.002	401.222	399.389	400.024	399.358
$f_{10}$	416.361	416.361	418.753	419.038	415.984	417.657	415.960



**Figura 4.9** – Prime forme modali del pannello a meridiano iperbolico di tabella 4.10.

**Tabella 4.11** – Prime dieci frequenze di un guscio toroidale a meridiano iperbolico laminato non simmetrico (30/60) costituito da due lamine di ugual spessore e materiale (F-C).

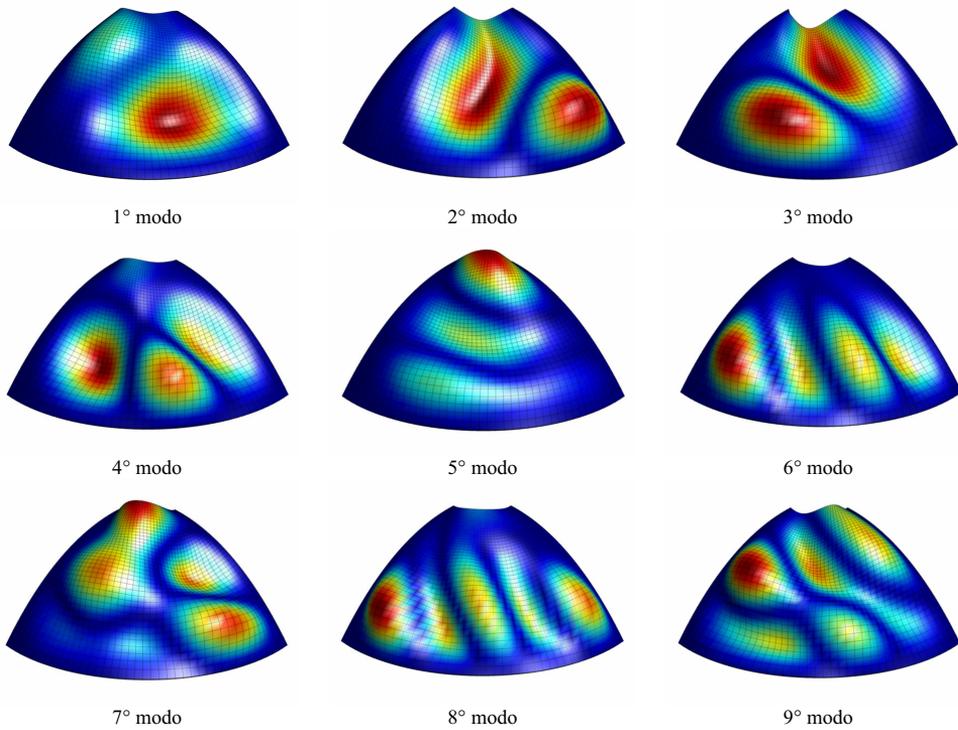
Caratteristiche geometriche: $a = 1\text{ m}$ , $d = 2\text{ m}$ , $D = 4\text{ m}$ , $C = 1\text{ m}$ , $R_b = 2\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 360^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 30×80 (8 nodi)	Abaqus 30×80 (8 nodi)	Ansys 30×80 (8 nodi)	Straus 60×160 (8 nodi)	Pro/Mech 31×82 (GEM)
$f_1$	55.374	55.373	54.728	54.741	54.709	55.445	54.719
$f_2$	55.374	55.373	54.728	54.741	54.814	55.445	54.719
$f_3$	58.372	58.370	57.951	57.970	58.029	58.752	57.998
$f_4$	58.372	58.370	57.957	57.970	58.038	58.752	57.998
$f_5$	68.060	68.060	67.537	67.550	67.418	68.418	67.519
$f_6$	68.060	68.060	67.573	67.550	67.677	68.418	67.519
$f_7$	77.457	77.455	77.428	77.383	77.335	78.056	77.417
$f_8$	77.457	77.455	77.428	77.383	77.507	78.056	77.417
$f_9$	82.409	82.407	82.195	82.230	82.251	83.405	82.272
$f_{10}$	82.409	82.407	82.195	82.230	82.324	83.405	82.272



**Figura 4.10** – Prime forme modali del guscio toroidale a meridiano iperbolico di tabella 4.11.

**Tabella 4.12** – Prime dieci frequenze di un pannello a meridiano a forma di catenaria laminato simmetrico  $(45/0)_s$  costituito da quattro lamine di ugual spessore e materiale (F-C-C-C).

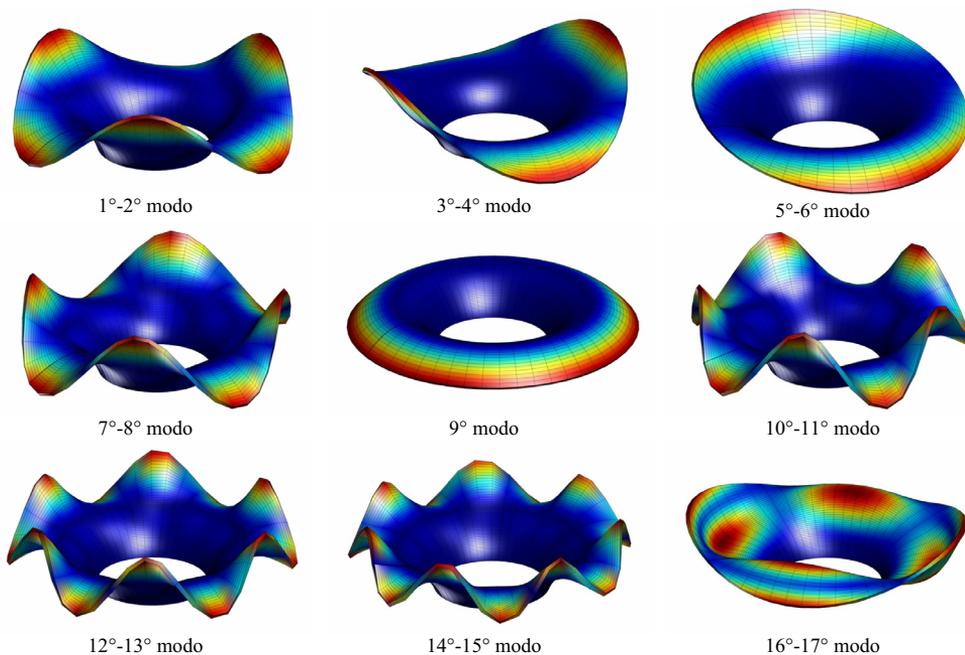
Caratteristiche geometriche: $b = 2\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\varphi \in [15^\circ, 60^\circ]$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 80×80 (4 nodi)	Abaqus 40×40 (8 nodi)	Ansys 40×40 (8 nodi)	Straus 40×40 (8 nodi)	Pro/Mech 21×21 (GEM)
$f_1$	271.278	271.277	271.209	271.476	270.286	271.836	270.306
$f_2$	320.540	320.540	320.476	320.943	318.956	321.397	319.127
$f_3$	330.540	330.540	330.797	330.918	329.660	330.807	329.680
$f_4$	365.049	365.049	365.301	365.931	363.302	365.651	363.472
$f_5$	384.173	384.173	384.716	385.165	381.816	385.620	382.022
$f_6$	400.626	400.626	401.264	402.269	398.495	401.491	398.700
$f_7$	417.113	417.112	417.496	418.235	414.350	418.674	414.615
$f_8$	457.612	457.612	458.752	460.310	454.363	459.342	454.724
$f_9$	468.161	468.161	469.210	470.355	464.474	469.699	464.833
$f_{10}$	507.421	507.421	508.155	509.851	501.521	511.288	502.068



**Figura 4.11** – Prime forme modali del pannello a meridiano a forma di catenaria di tabella 4.12.

**Tabella 4.13** – Prime dieci frequenze di un guscio toroidale a meridiano cicloidale laminato antisimmetrico ( $-45/-20/20/45$ ) costituito da quattro lamine di ugual spessore e materiale (C-F).

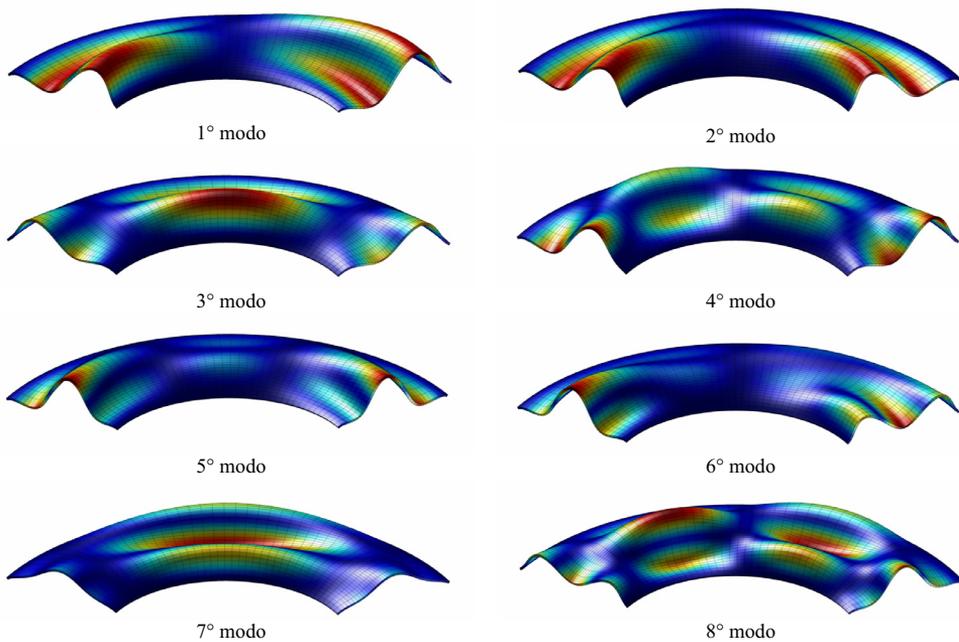
Caratteristiche geometriche: $r_c = 1\text{ m}$ , $R_b = 5\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\varphi \in [-70^\circ, -5^\circ]$ , $\vartheta_0 = 360^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ $31 \times 31$	HDQ $31 \times 31$	Nastran $40 \times 160$ (4 nodi)	Abaqus $40 \times 120$ (8 nodi)	Ansys $40 \times 120$ (8 nodi)	Straus $40 \times 120$ (8 nodi)	Pro/Mech $21 \times 82$ (GEM)
$f_1$	43.875	43.875	43.695	43.754	42.764	43.381	43.709
$f_2$	43.875	43.875	43.695	43.754	42.780	43.381	43.709
$f_3$	45.513	45.513	45.432	45.519	44.591	44.977	45.448
$f_4$	45.513	45.513	45.432	45.519	44.675	44.977	45.448
$f_5$	47.560	47.560	47.538	47.650	46.760	47.309	47.563
$f_6$	47.560	47.560	47.538	47.650	46.847	47.309	47.563
$f_7$	49.004	49.004	48.849	48.941	47.451	48.544	48.877
$f_8$	49.004	49.004	48.849	48.941	47.461	48.544	48.877
$f_9$	51.316	51.316	51.319	51.503	50.456	51.471	51.362
$f_{10}$	60.100	60.100	59.992	60.144	57.863	59.870	60.044



**Figura 4.12** – Prime forme modali del guscio toroidale a meridiano cicloidale di tabella 4.13.

**Tabella 4.14** – Prime dieci frequenze di un pannello toroidale a meridiano parabolico laminato simmetrico (45/0/45) costituito da tre lamine (C-F-C-F). Le lamine 1 e 3, di spessore  $h_1 = h_3 = 0.02\text{ m}$ , sono in materiale ortotropo, mentre la seconda, di spessore  $h_2 = 0.06\text{ m}$ , è costituita da materiale isotropo.

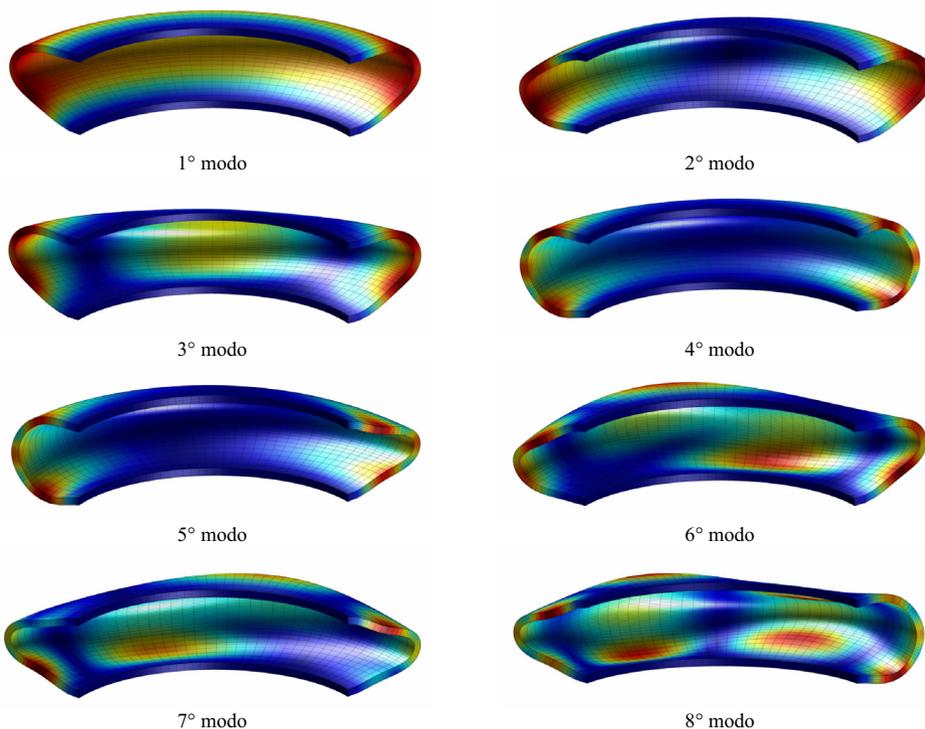
Caratteristiche geometriche: $a = 3\text{ m}$ , $c = -3\text{ m}$ , $b = 1\text{ m}$ , $d = 0\text{ m}$ , $R_b = 9\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale ortotropo (lamine 1-3): $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Proprietà del materiale isotropo (lamina 2): $E = 210\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 80×160 (4 nodi)	Abaqus 40×80 (8 nodi)	Ansys 40×80 (8 nodi)	Straus 40×80 (8 nodi)	Pro/Mech 21×41 (GEM)
$f_1$	44.287	44.287	44.265	44.293	44.284	44.368	44.251
$f_2$	46.778	46.778	46.757	46.785	46.760	46.858	46.746
$f_3$	52.197	52.197	52.167	52.202	52.209	52.253	52.161
$f_4$	61.407	61.407	61.334	61.404	61.375	61.452	61.347
$f_5$	69.261	69.261	69.161	69.284	69.156	69.600	69.150
$f_6$	70.940	70.940	70.840	70.952	70.817	71.287	70.817
$f_7$	74.784	74.784	74.710	74.807	74.677	75.142	74.667
$f_8$	75.853	75.853	75.744	75.872	75.738	76.206	75.716
$f_9$	77.439	77.439	77.360	77.447	77.374	77.488	77.374
$f_{10}$	80.695	80.695	80.558	80.717	80.571	81.011	80.556



**Figura 4.13** – Prime forme modali del pannello toroidale a meridiano parabolico di tabella 4.14.

**Tabella 4.15** – Prime dieci frequenze di un pannello toroidale a meridiano ellittico laminato simmetrico (45/0/45) costituito da tre lamine (C-F-C-F). Le lamine 1 e 3, di spessore  $h_1 = h_3 = 0.02\text{ m}$ , sono in materiale ortotropo, mentre la seconda, di spessore  $h_2 = 0.06\text{ m}$ , è costituita da materiale isotropo.

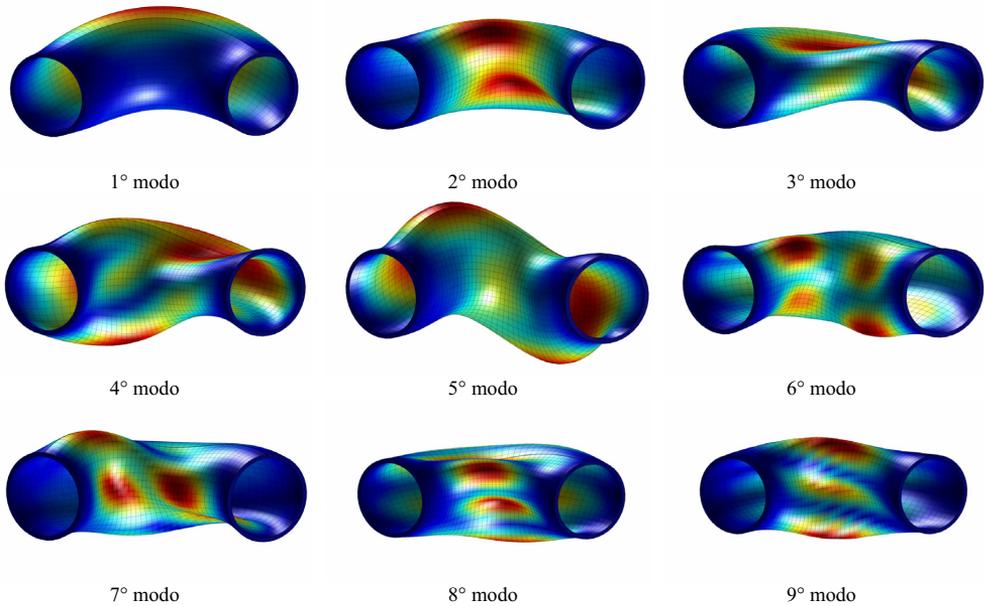
Caratteristiche geometriche: $a = 1\text{ m}$ , $b = 0.5\text{ m}$ , $R_b = 2\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$ $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale ortotropo (lamine 1-3): $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Proprietà del materiale isotropo (lamina 2): $E = 210\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 80×160 (4 nodi)	Abaqus 40×80 (8 nodi)	Ansys 40×80 (8 nodi)	Straus 40×80 (8 nodi)	Pro/Mech 21×41 (GEM)
$f_1$	108.269	108.269	108.156	108.389	108.145	110.307	108.100
$f_2$	141.088	141.098	139.720	139.647	139.812	141.463	139.610
$f_3$	228.916	228.916	226.198	225.941	226.212	227.745	225.987
$f_4$	290.483	290.496	289.292	289.208	288.892	298.200	288.716
$f_5$	290.488	290.508	290.064	289.967	289.624	298.805	289.469
$f_6$	341.929	341.939	339.530	339.221	339.179	341.861	339.091
$f_7$	349.287	349.284	346.898	347.723	346.470	356.290	346.322
$f_8$	402.567	402.575	401.039	402.707	400.438	410.786	400.280
$f_9$	462.236	462.241	458.057	457.585	457.328	460.255	457.285
$f_{10}$	475.631	475.630	473.915	476.051	472.910	483.734	472.800



**Figura 4.14** – Prime forme modali del pannello toroidale a meridiano ellittico di tabella 4.15.

**Tabella 4.16** – Prime dieci frequenze di un pannello toroidale a meridiano circolare laminato non simmetrico (30/60) costituito da due lamine di ugual spessore e materiale (C-C).

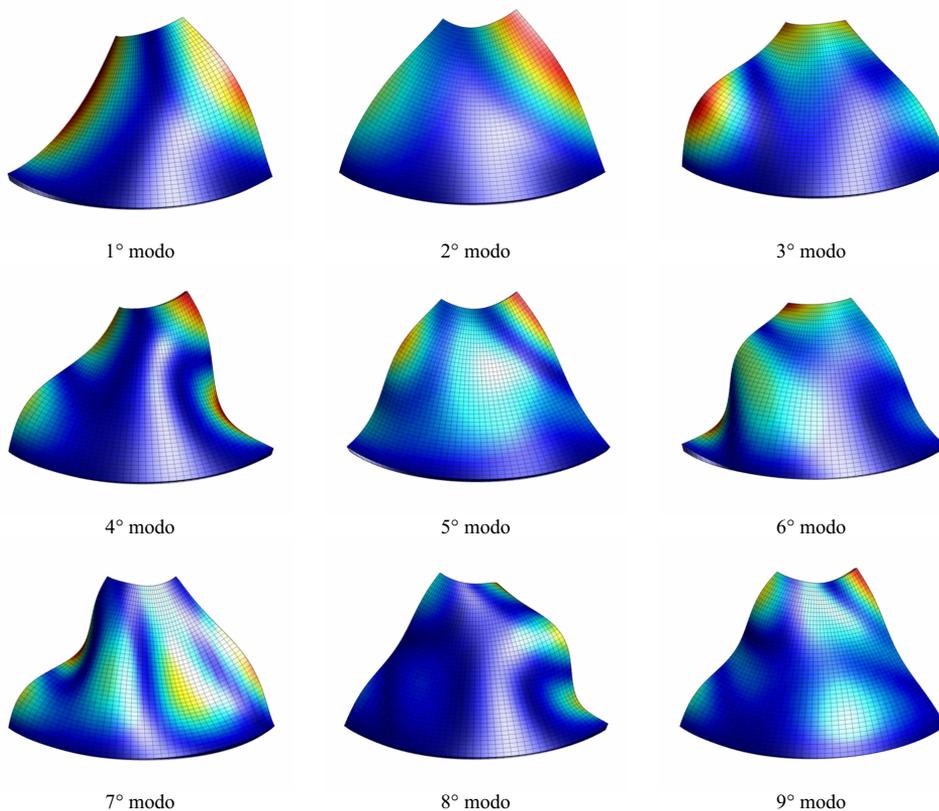
Caratteristiche geometriche: $R = 1\text{ m}$ , $R_b = 3\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\varphi \in [0^\circ, 360^\circ]$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 80×160 (4 nodi)	Abaqus 40×80 (8 nodi)	Ansys 40×80 (8 nodi)	Straus 80×160 (8 nodi)	Pro/Mech 42×31 (GEM)
$f_1$	103.481	103.481	103.148	103.358	103.298	103.542	103.154
$f_2$	150.664	150.664	149.930	150.394	150.494	150.681	149.886
$f_3$	162.837	162.838	161.687	162.088	162.090	162.665	161.687
$f_4$	185.505	185.505	184.064	184.248	185.098	185.729	184.059
$f_5$	194.526	194.526	193.853	194.203	194.040	194.400	193.802
$f_6$	224.148	224.148	222.550	222.859	223.698	225.352	222.390
$f_7$	230.685	230.685	230.177	230.757	231.317	232.238	229.852
$f_8$	235.097	235.097	235.625	236.595	237.013	238.636	235.348
$f_9$	237.502	237.506	238.245	239.515	238.246	241.084	237.903
$f_{10}$	262.718	262.718	262.822	263.375	264.464	267.470	262.383



**Figura 4.15** – Prime forme modali del pannello toroidale a meridiano circolare di tabella 4.16.

**Tabella 4.17** – Prime dieci frequenze di un pannello conico laminato non simmetrico (30/60) costituito da due lamine di ugual spessore e materiale (F-F-S-F).

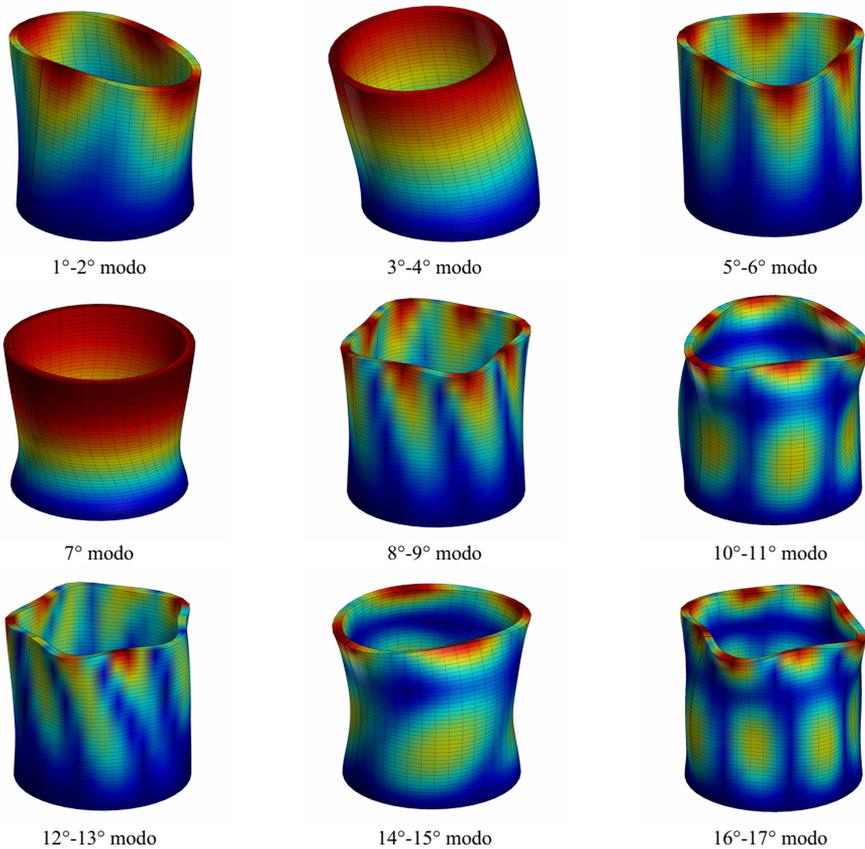
Caratteristiche geometriche: $L_0 = 2\text{ m}$ , $R_0 = 0.5\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\alpha = 40^\circ$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 100×80 (4 nodi)	Abaqus 60×80 (8 nodi)	Ansys 60×80 (8 nodi)	Straus 60×80 (8 nodi)	Pro/Mech 21×21 (GEM)
$f_1$	59.212	59.230	59.463	59.464	59.618	60.365	59.331
$f_2$	70.089	70.138	70.425	70.478	70.529	71.056	70.282
$f_3$	119.813	119.802	120.455	120.032	120.927	122.184	120.139
$f_4$	145.032	144.968	145.843	145.763	146.894	150.821	145.182
$f_5$	172.746	172.708	173.417	173.387	173.555	174.949	172.738
$f_6$	212.150	212.172	212.950	212.342	213.344	215.060	212.148
$f_7$	248.638	248.645	249.385	249.596	250.879	254.919	248.096
$f_8$	253.846	253.913	255.642	255.574	257.872	265.487	253.828
$f_9$	265.031	265.028	265.566	265.653	266.074	269.613	264.059
$f_{10}$	326.470	326.470	327.751	328.031	330.379	337.324	325.854



**Figura 4.16** – Prime forme modali del pannello conico di tabella 4.17.

**Tabella 4.18** – Prime dieci frequenze di un guscio cilindrico circolare laminato non simmetrico (30/60) costituito da due lamine di ugual spessore e materiale (F-C).

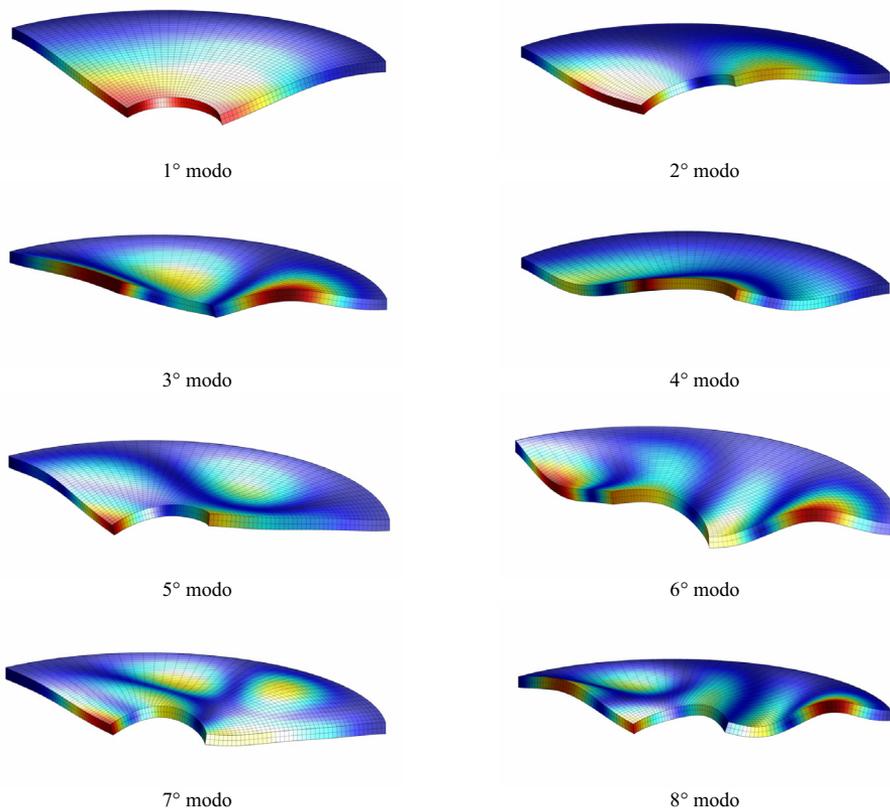
Caratteristiche geometriche: $L_0 = 2\text{ m}$ , $R_0 = 1\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\alpha = 40^\circ$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 80×120 (4 nodi)	Abaqus 40×80 (8 nodi)	Ansys 40×80 (8 nodi)	Straus 100×160 (8 nodi)	Pro/Mech 21×42 (GEM)
$f_1$	128.716	128.715	125.397	125.355	125.880	127.911	125.2696
$f_2$	128.716	128.715	125.398	125.364	126.172	127.911	125.2696
$f_3$	179.883	179.882	179.149	178.906	179.611	180.731	179.1251
$f_4$	179.883	179.883	179.149	178.906	179.782	180.731	179.1251
$f_5$	184.471	184.471	182.166	182.308	182.809	186.833	181.6121
$f_6$	184.471	184.471	182.166	182.308	183.775	186.833	181.6121
$f_7$	276.012	276.012	276.997	276.880	277.766	278.921	276.9912
$f_8$	283.317	283.317	283.689	283.718	284.499	291.055	281.8642
$f_9$	283.317	283.317	283.692	283.721	285.927	291.055	281.8642
$f_{10}$	393.044	393.044	387.626	389.255	392.284	406.742	386.3807



**Figura 4.17** – Prime forme modali del guscio cilindrico circolare di tabella 4.18.

**Tabella 4.19** – Prime dieci frequenze di un pannello circolare laminato non simmetrico (30/60) costituito da due lamine di ugual spessore e materiale (F-F-C-F).

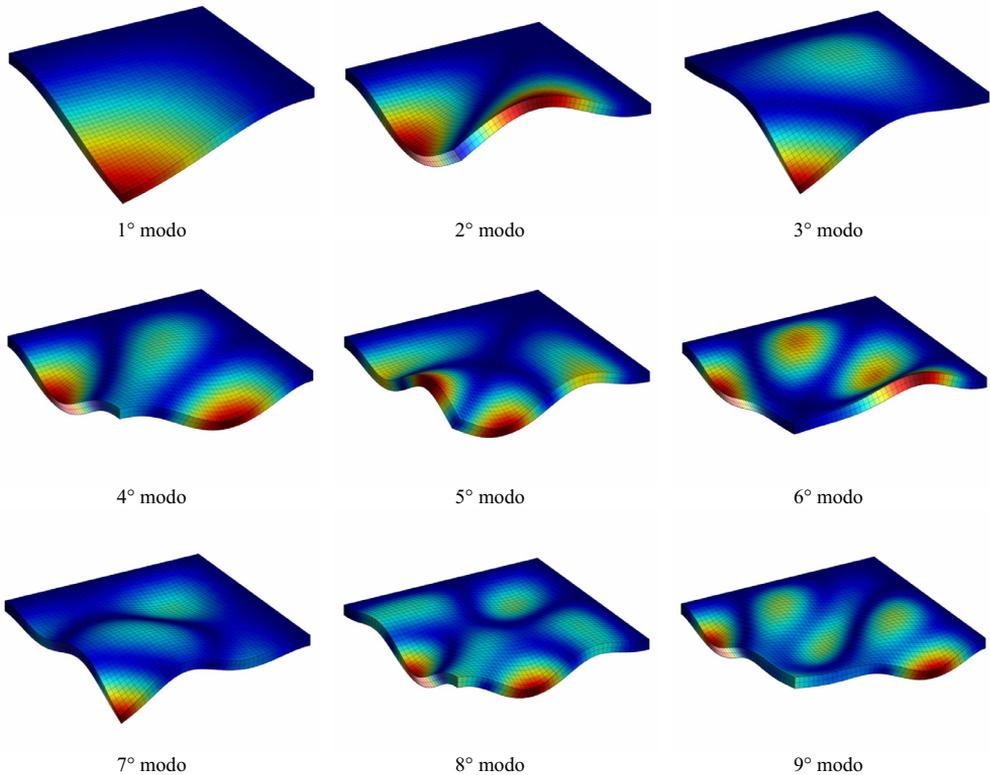
Caratteristiche geometriche: $R_c = 2\text{ m}$ , $R_i = 0.5\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 40×80 (8 nodi)	Abaqus 40×80 (8 nodi)	Ansys 40×80 (8 nodi)	Straus 40×80 (8 nodi)	Pro/Mech AutoGEM
$f_1$	50.894	50.896	50.960	50.960	51.290	51.957	50.909
$f_2$	112.338	112.334	112.669	112.682	114.332	118.122	112.279
$f_3$	191.781	191.781	192.861	192.904	195.029	200.079	191.690
$f_4$	229.672	229.665	231.011	231.062	234.827	242.282	229.746
$f_5$	299.105	299.112	301.383	301.456	306.938	318.659	298.974
$f_6$	321.601	321.600	323.908	324.017	330.527	346.729	321.235
$f_7$	430.763	430.767	435.318	435.490	443.798	462.304	430.672
$f_8$	457.626	457.626	462.439	462.658	472.130	494.963	457.301
$f_9$	546.073	546.087	552.950	553.226	567.733	599.710	546.064
$f_{10}$	586.583	586.608	594.492	594.808	606.234	623.153	587.707



**Figura 4.18** – Prime forme modali del pannello circolare di tabella 4.19.

**Tabella 4.20** – Prime dieci frequenze di una piastra rettangolare laminata non simmetrica (30/60) costituita da due lamine di ugual spessore e materiale (C-C-F-F).

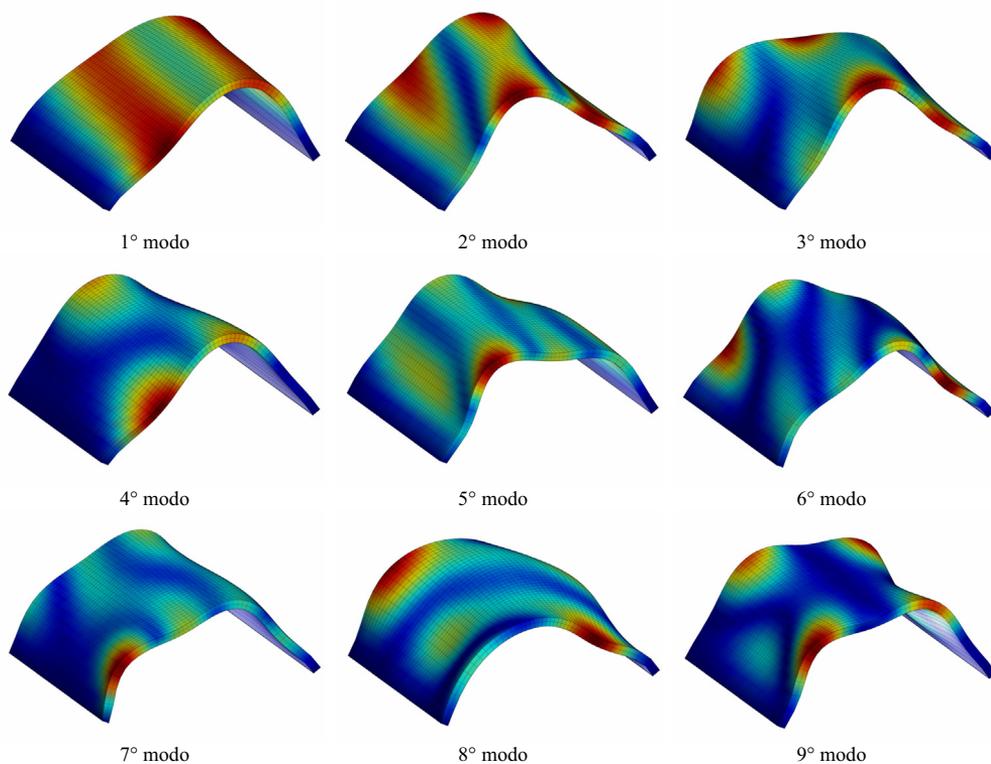
Caratteristiche geometriche: $L_x = L_y = 2\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 40×40 (8 nodi)	Abaqus 40×40 (8 nodi)	Ansys 40×40 (8 nodi)	Straus 40×40 (8 nodi)	Pro/Mech 21×21 (GEM)
$f_1$	42.863	42.849	42.891	42.889	43.101	43.467	42.851
$f_2$	114.567	114.565	114.958	114.984	115.719	117.339	114.518
$f_3$	165.485	165.482	165.937	165.963	168.195	171.960	165.522
$f_4$	212.178	212.179	213.403	213.493	215.618	220.550	211.983
$f_5$	309.521	309.520	311.815	311.991	316.451	326.211	309.336
$f_6$	343.913	343.914	347.050	347.265	352.148	363.547	343.550
$f_7$	373.440	373.441	375.473	375.629	384.478	399.602	373.688
$f_8$	452.975	452.975	457.066	457.387	466.525	485.313	452.685
$f_9$	485.355	485.355	491.091	491.449	497.243	511.831	484.342
$f_{10}$	531.138	531.138	532.153	532.160	536.210	545.739	531.137



**Figura 4.19** – Prime forme modali della piastra rettangolare di tabella 4.20.

**Tabella 4.21** – Prime dieci frequenze di un pannello cilindrico di traslazione a profilo a forma di catenaria laminato non simmetrico (30/60) costituito da due lamine di ugual spessore e materiale (C-F-C-F).

Caratteristiche geometriche: $b = 2\text{ m}$ , $L_y = 2\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\varphi \in [-60^\circ, 60^\circ]$							
Proprietà del materiale: $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$							
Modo [Hz]	PDQ 31×31	HDQ 31×31	Nastran 40×40 (8 nodi)	Abaqus 40×40 (8 nodi)	Ansys 40×40 (8 nodi)	Straus 40×40 (8 nodi)	Pro/Mech 21×21 (GEM)
$f_1$	42.863	42.849	42.891	42.889	43.101	43.467	42.851
$f_2$	114.567	114.565	114.958	114.984	115.719	117.339	114.518
$f_3$	165.485	165.482	165.937	165.963	168.195	171.960	165.522
$f_4$	212.178	212.179	213.403	213.493	215.618	220.550	211.983
$f_5$	309.521	309.520	311.815	311.991	316.451	326.211	309.336
$f_6$	343.913	343.914	347.050	347.265	352.148	363.547	343.550
$f_7$	373.440	373.441	375.473	375.629	384.478	399.602	373.688
$f_8$	452.975	452.975	457.066	457.387	466.525	485.313	452.685
$f_9$	485.355	485.355	491.091	491.449	497.243	511.831	484.342
$f_{10}$	531.138	531.138	532.153	532.160	536.210	545.739	531.137



**Figura 4.20** – Prime forme modali del pannello cilindrico di traslazione a profilo a forma di catenaria di tabella 4.21.

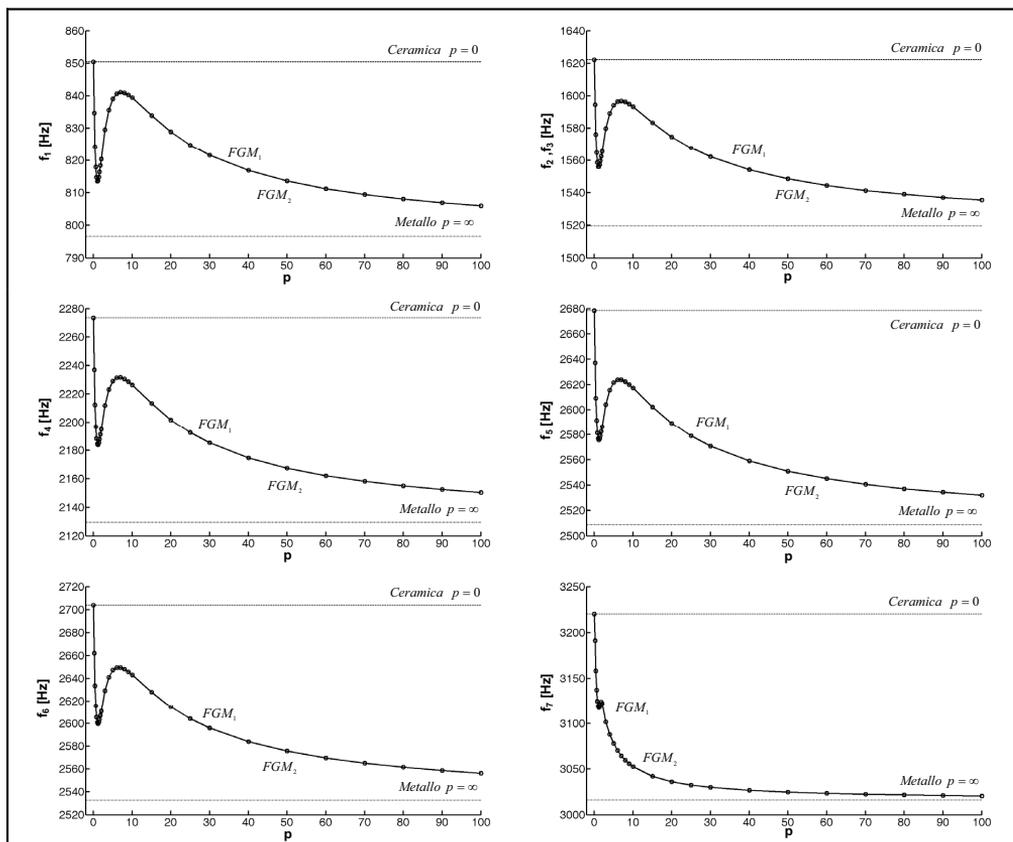
Fin qui si sono considerati gusci laminati costituiti da una o più lamine ortotrope, oppure isotrope. Di seguito vengono riportati i risultati ottenuti considerando gusci costituiti da “functionally graded material”, e quindi caratterizzati dalla perdita di omogeneità lungo lo spessore. Il comportamento delle strutture costituite dai materiali in parola è determinata, oltre che dai singoli costituenti della miscela, anche dalla legge che caratterizza la distribuzione delle macroparticelle lungo lo spessore. Si sono analizzate diverse tipologie strutturali. Per ognuna di esse si sono considerate le due diverse distribuzioni (2.220) caratterizzate dalle sigle  $FGM_1$ ,  $FGM_2$ , rispettivamente. Il primo esempio si riferisce ad una piastra quadrata moderatamente spessa. Le caratteristiche meccaniche dei materiali costituenti e le dimensioni geometriche sono riportate in tabella 4.22. La tabella in parola presenta le prime dieci frequenze proprie di una piastra  $FGM_1$  per alcuni valori dell’esponente  $p$ . Risultati analoghi si ottengono considerando la distribuzione  $FGM_2$ . In figura 4.21 si mostra come variano le prime frequenze al variare dell’esponente  $p$  sia per la legge  $FGM_1$  che per la distribuzione  $FGM_2$ . Come si può osservare nel caso della piastra rettangolare le varie curve coincidono. La coincidenza dei risultati è dovuta al fatto che la piastra è un guscio degenere, ossia un guscio a curvatura nulla. Infatti, per questa sua proprietà, dal punto di vista dinamico, a parità di esponente  $p$ , risulta indifferente quale materiale costituente sia presente sulla faccia superiore o inferiore della piastra. In altre parole, a parità di esponente  $p$ , le caratteristiche dinamiche non dipendono dalla distribuzione considerata. Si vuol far rilevare che quanto esposto non risulta essere valido dal punto di vista statico.

Osservando la figura 4.21, le frequenze partono dal valore corrispondente al materiale ceramico per  $p=0$  (in questo caso la piastra è costituita solo da materiale ceramico), all’aumentare di  $p$  subiscono un brusco decadimento, più o meno accentuato, fino a  $p=1$  e un successivo innalzamento fino ad un valore massimo. Al progressivo aumentare di  $p$  le frequenze decrescono, tendendo alle frequenze proprie del materiale metallico per  $p=\infty$ .

A differenza della piastra, i gusci sono dotati di curvatura. A causa di questa caratteristica geometrica, essi presentano caratteristiche dinamiche differenti a seconda che si utilizzi la distribuzione  $FGM_1$  o  $FGM_2$ . Nelle tabelle 4.23- 4.25 si presentano i risultati ottenuti, mentre nelle figure corrispondenti si evidenzia il diverso comportamento indotto dalle due leggi  $FGM_1$  e  $FGM_2$ .

**Tabella 4.22** – Prime dieci frequenze di una piastra rettangolare costituita da una singola lamina di “functionally graded material”  $FGM_1$  (C-C-C-C).

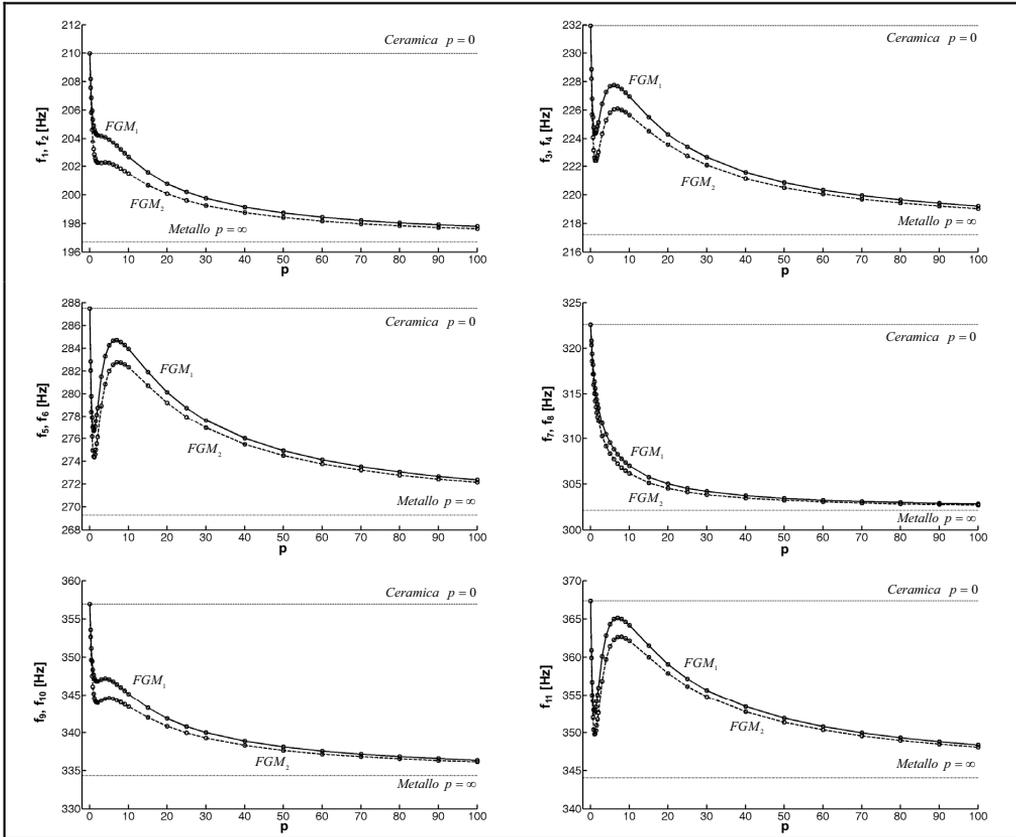
Caratteristiche geometriche: $L_x = L_y = 1\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$								
Proprietà del materiale: $E_C = 168\text{ GPa}$ , $\nu_C = 0.3$ , $\rho_C = 5700\text{ Kg/m}^3$								
$E_M = 70\text{ GPa}$ , $\nu_M = 0.3$ , $\rho_M = 2707\text{ Kg/m}^3$								
Modo [Hz]	$p = 0$	$p = 0.6$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 100$	$p = \infty$
$f_1$	850.420	817.958	813.543	839.042	828.895	813.589	805.953	796.565
$f_2$	1622.138	1564.720	1556.059	1594.213	1574.752	1548.503	1535.454	1519.412
$f_3$	1622.138	1564.720	1556.059	1594.213	1574.752	1548.503	1535.454	1519.412
$f_4$	2273.476	2196.855	2184.500	2229.126	2201.783	2167.436	2150.415	2129.502
$f_5$	2678.378	2591.434	2576.705	2621.637	2589.337	2550.990	2532.039	2508.762
$f_6$	2703.940	2615.700	2600.861	2647.300	2614.686	2575.679	2556.394	2532.705
$f_7$	3220.176	3137.260	3119.265	3077.991	3036.243	3024.752	3020.593	3016.250
$f_8$	3220.176	3137.260	3119.265	3077.991	3036.243	3024.752	3020.593	3016.250
$f_9$	3239.440	3176.062	3155.910	3166.879	3127.765	3083.212	3061.250	3034.293
$f_{10}$	3239.440	3176.062	3155.910	3166.879	3127.765	3083.212	3061.250	3034.293



**Figura 4.21** – Variazione delle prime frequenze della piastra rettangolare di tabella 4.22.

**Tabella 4.23** – Prime dieci frequenze di un guscio conico costituito da una singola lamina di “functionally graded material”  $FGM_1$  (F-C).

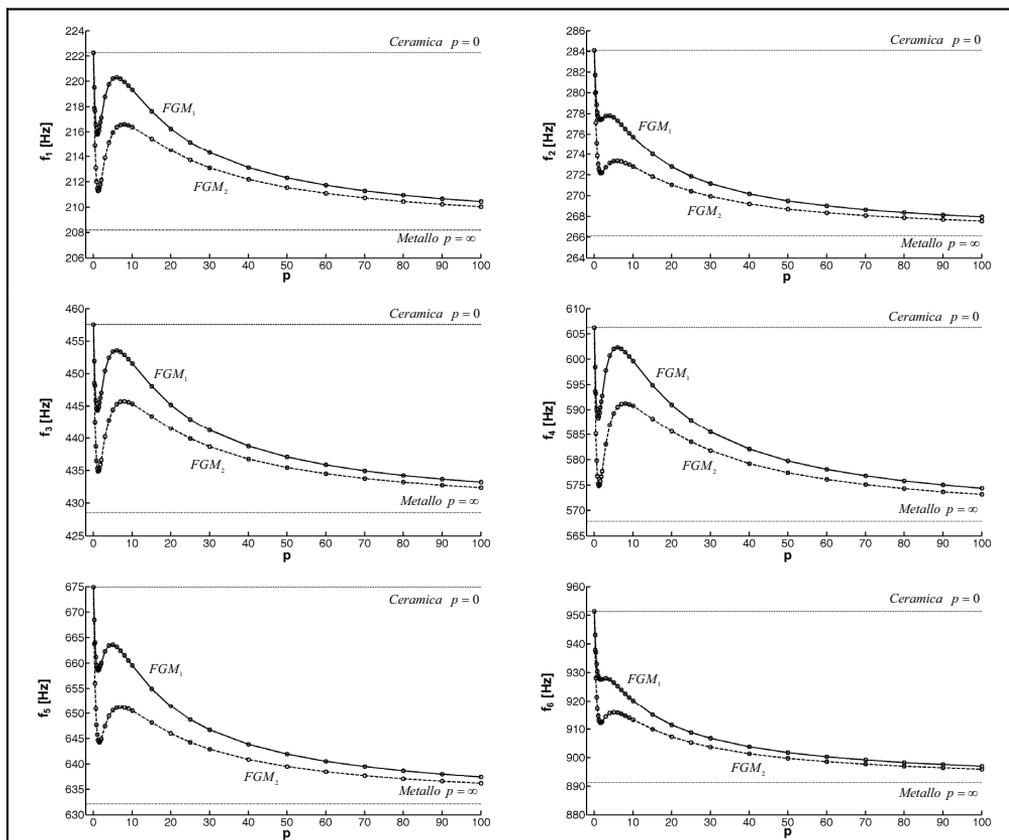
Caratteristiche geometriche: $L_0 = 2\text{ m}$ , $R_b = 0.5\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\alpha = 40^\circ$ , $\vartheta_0 = 360^\circ$								
Proprietà del materiale: $E_C = 168\text{ GPa}$ , $\nu_C = 0.3$ , $\rho_C = 5700\text{ Kg/m}^3$								
$E_M = 70\text{ GPa}$ , $\nu_M = 0.3$ , $\rho_M = 2707\text{ Kg/m}^3$								
Modo [Hz]	$p = 0$	$p = 0.6$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 100$	$p = \infty$
$f_1$	209.991	205.964	204.915	203.935	200.787	198.727	197.792	196.692
$f_2$	209.991	205.964	204.915	203.935	200.787	198.727	197.792	196.692
$f_3$	231.916	225.519	224.438	227.676	224.295	220.859	219.213	217.229
$f_4$	231.916	225.519	224.438	227.676	224.295	220.859	219.213	217.229
$f_5$	287.486	277.933	276.658	284.260	280.141	274.926	272.377	269.280
$f_6$	287.492	277.937	276.663	284.267	280.148	274.932	272.383	269.286
$f_7$	322.575	318.184	316.322	309.574	305.044	303.460	302.835	302.147
$f_8$	322.575	318.184	316.322	309.574	305.044	303.460	302.835	302.147
$f_9$	356.953	349.479	347.662	347.081	341.873	338.115	336.388	334.348
$f_{10}$	356.953	349.479	347.662	347.081	341.873	338.115	336.388	334.348



**Figura 4.22** – Variazione delle prime frequenze del guscio conico di tabella 4.23.

**Tabella 4.24** – Prime dieci frequenze di un pannello a meridiano circolare costituito da una singola lamina di “functionally graded material”  $FGM_1$  (F-F-C-F).

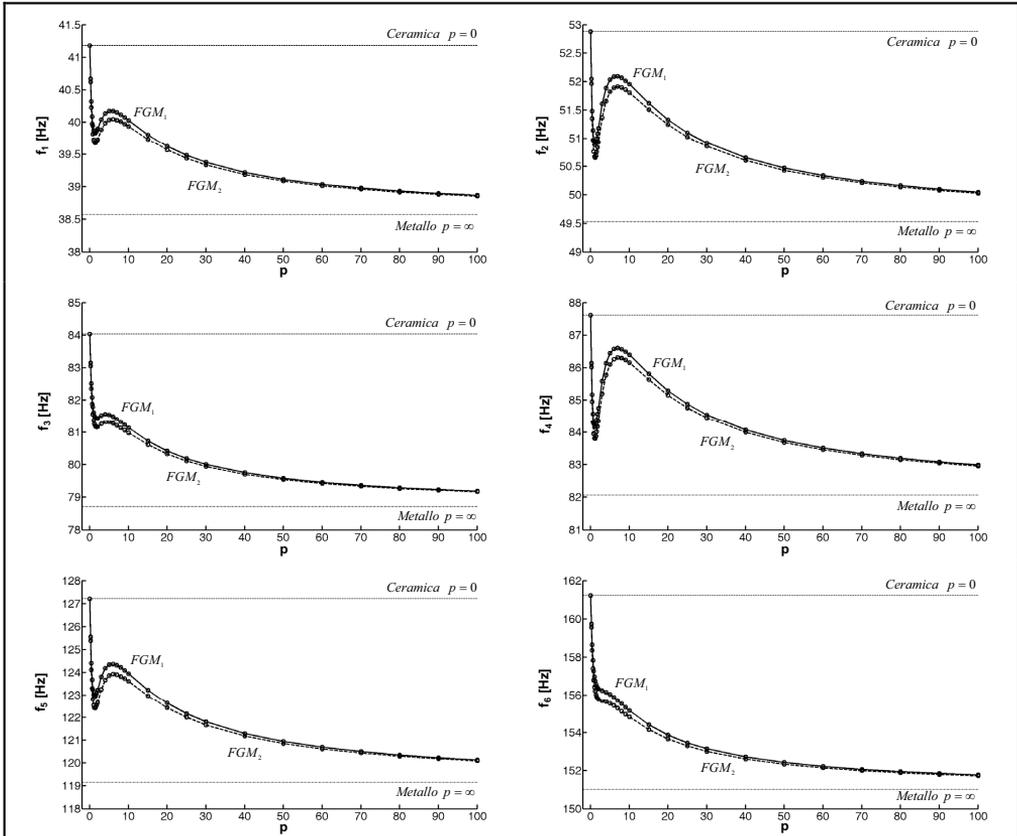
Caratteristiche geometriche: $R = 1\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$								
Proprietà del materiale: $E_C = 168\text{ GPa}$ , $\nu_C = 0.3$ , $\rho_C = 5700\text{ Kg/m}^3$								
$E_M = 70\text{ GPa}$ , $\nu_M = 0.3$ , $\rho_M = 2707\text{ Kg/m}^3$								
Modo [Hz]	$p = 0$	$p = 0.6$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 100$	$p = \infty$
$f_1$	222.265	216.572	215.822	220.213	216.244	212.317	210.443	208.189
$f_2$	284.122	278.868	277.712	277.635	272.792	269.494	267.963	266.129
$f_3$	457.556	445.896	444.360	453.400	445.198	437.091	433.226	428.580
$f_4$	606.245	590.211	588.357	602.068	590.964	579.779	574.388	567.853
$f_5$	674.884	661.245	658.829	663.615	651.458	641.927	637.471	632.145
$f_6$	951.446	933.099	928.973	926.614	911.518	901.753	897.038	891.194
$f_7$	1003.476	989.091	984.743	978.580	960.805	949.817	945.141	939.928
$f_8$	1132.925	1110.152	1105.882	1112.969	1093.005	1077.242	1069.906	1061.179
$f_9$	1341.955	1311.010	1306.074	1321.458	1298.314	1278.261	1268.645	1256.972
$f_{10}$	1409.286	1374.024	1369.172	1391.575	1366.361	1344.251	1333.798	1320.039



**Figura 4.23** – Variazione delle prime frequenze del pannello a meridiano circolare di tabella 4.24.

**Tabella 4.25** – Prime dieci frequenze di un pannello a meridiano parabolico costituito da una singola lamina di “functionally graded material”  $FGM_1$  (F-F-C-F).

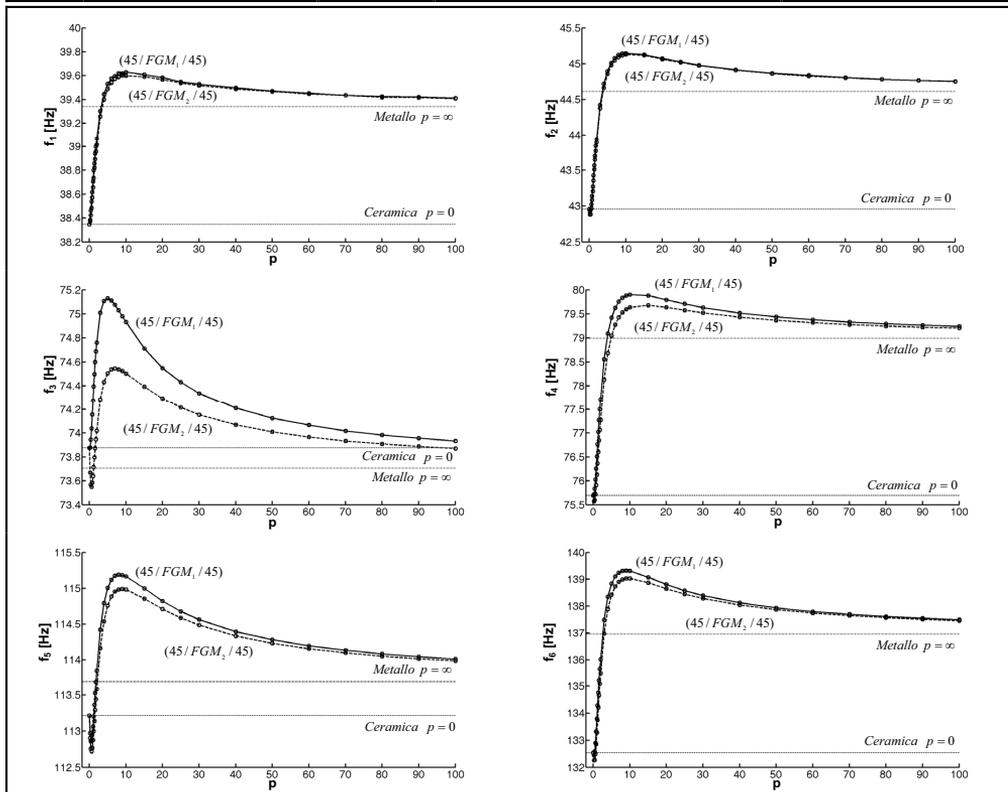
Caratteristiche geometriche: $a = 4\text{ m}$ , $c = 1\text{ m}$ , $b = 2\text{ m}$ , $d = 0\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$								
Proprietà del materiale: $E_C = 168\text{ GPa}$ , $\nu_C = 0.3$ , $\rho_C = 5700\text{ Kg/m}^3$								
$E_M = 70\text{ GPa}$ , $\nu_M = 0.3$ , $\rho_M = 2707\text{ Kg/m}^3$								
Modo [Hz]	$p = 0$	$p = 0.6$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 100$	$p = \infty$
$f_1$	41.182	40.092	39.875	40.176	39.624	39.113	38.869	38.574
$f_2$	52.880	51.144	50.885	52.036	51.332	50.471	50.048	49.532
$f_3$	84.036	82.084	81.624	81.544	80.419	79.582	79.188	78.714
$f_4$	87.612	84.578	84.153	86.448	85.293	83.747	82.988	82.064
$f_5$	127.213	123.685	123.027	124.346	122.634	120.949	120.138	119.157
$f_6$	161.220	157.832	156.971	156.046	153.868	152.431	151.778	151.010
$f_7$	162.001	157.890	156.992	157.789	155.620	153.732	152.832	151.742
$f_8$	167.541	161.257	160.466	165.936	163.742	160.499	158.893	156.931
$f_9$	183.571	178.716	177.747	179.151	176.698	174.373	173.268	171.946
$f_{10}$	193.550	188.605	187.572	188.683	186.094	183.736	182.622	181.293



**Figura 4.24** – Variazione delle prime frequenze del pannello a meridiano parabolico di tabella 4.25.

**Tabella 4.26** – Prime dieci frequenze di un pannello a meridiano parabolico  $(45/FGM_1/45)$  costituito da tre lamine (F-F-C-F). Le lamine 1 e 3, di spessore  $h_1 = h_3 = 0.02\text{ m}$ , sono in materiale ortotropo, mentre la seconda, di spessore  $h_2 = 0.06\text{ m}$ , è costituita da materiale “functionally graded”  $FGM_1$ .

Caratteristiche geometriche: $a = 4\text{ m}$ , $c = 1\text{ m}$ , $b = 2\text{ m}$ , $d = 0\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$								
Proprietà dei materiali: $E_C = 168\text{ GPa}$ , $\nu_C = 0.3$ , $\rho_C = 5700\text{ Kg/m}^3$ , $E_M = 70\text{ GPa}$ , $\nu_M = 0.3$ , $\rho_M = 2707\text{ Kg/m}^3$ , $E_1 = 137.9\text{ GPa}$ , $E_2 = 8.96\text{ GPa}$ , $G_{12} = G_{13} = 7.1\text{ GPa}$ , $G_{23} = 6.21\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 1450\text{ Kg/m}^3$								
Modo [Hz]	$p = 0$	$p = 0.6$	$p = 1$	$p = 5$	$p = 20$	$p = 50$	$p = 100$	$p = \infty$
$f_1$	38.346	38.539	38.707	39.531	39.585	39.472	39.411	39.339
$f_2$	42.956	43.026	43.275	44.896	45.075	44.867	44.755	44.611
$f_3$	73.877	74.038	74.277	75.129	74.549	74.124	73.933	73.706
$f_4$	75.698	76.029	76.511	79.424	79.795	79.438	79.241	78.992
$f_5$	113.216	112.872	113.067	115.007	114.825	114.283	114.011	113.683
$f_6$	132.538	132.903	133.792	138.842	138.808	137.942	137.501	136.957
$f_7$	140.858	140.828	141.344	144.754	144.566	143.700	143.263	142.725
$f_8$	154.781	154.382	154.420	155.165	154.823	154.446	154.267	154.052
$f_9$	168.878	169.409	170.052	173.627	174.065	173.633	173.393	173.088
$f_{10}$	177.832	176.854	176.743	177.494	176.848	176.226	175.936	175.594



**Figura 4.25** – Variazione delle prime frequenze del pannello a meridiano parabolico di tabella 4.26.

Infine, si presentano i risultati ottenuti per un guscio a meridiano parabolico costituito da tre lamine. Di queste la seconda è in materiale “functionally graded”, mentre le altre due sono in materiale ortotropo. Anche in questo esempio è possibile notare la variazione delle frequenze indotta dalla legge di distribuzione  $FGM_1$  e  $FGM_2$ .

Le figure 4.27-4.33 mostrano le caratteristiche di convergenza e di stabilità della soluzione GDQ per diverse tipologie strutturali in materiale isotropo. Nelle figure in parola si vuole mettere in evidenza l’influenza della tipologia di discretizzazione sulla soluzione numerica. In particolare si sono considerate le discretizzazioni di Chebyshev-Gauss-Lobatto (C-G-L) (1.208), Quadratica (Quad) (1.209), di Chebyshev di prima specie (C I°) (1.210), di Chebyshev di seconda specie (CII°) (1.211) e di Legendre (Leg) (1.212). Lo stesso numero di punti nodali  $N = M$  è stato utilizzato lungo le due direzioni coordinate.

Le figure in parola mostrano che la distribuzione di Chebyshev-Gauss-Lobatto presenta la più rapida velocità di convergenza. Infatti, le restanti distribuzioni evidenziano maggiori oscillazioni rispetto alla prima. Per tutti i casi trattati le distribuzioni non-uniformi considerate risultano stabili all’aumentare del numero di punti di griglia  $N = M$  e, per ottenere soluzioni convergenti, non occorre utilizzare un elevato numero di punti. Differenti comportamenti si verificano considerando gusci completi o pannelli. In generale, si osserva che per ottenere soluzioni accurate e convergenti per un guscio completo è necessario utilizzare un numero di punti nodali maggiore di quello che occorre adoperare per un pannello.

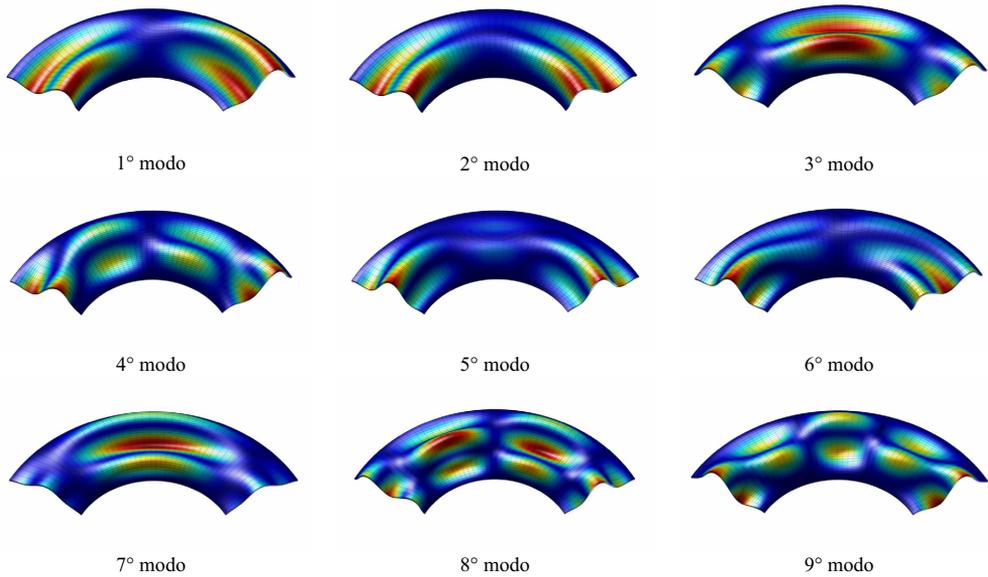
Nelle tabelle 4.27-4.30 si riportano i risultati ottenuti sia con la tecnica GDQ che con gli elementi finiti per quattro tipologie strutturali in materiale isotropo. Le soluzioni FEM si riferiscono a tre differenti meshature e vengono confrontate con altrettante discretizzazioni GDQ. Nelle tabelle è stato anche riportato il tempo di calcolo (CPU Time) impiegato per ogni simulazione. Si può osservare che i risultati riportati e ottenuti con il metodo di quadratura differenziale sono in ottimo accordo con quelli forniti dai codici agli elementi finiti. Inoltre, il costo computazionale in termini di tempo e numero di punti nodali risulta essere inferiore per la tecnica GDQ e, allo stesso tempo, l’accuratezza della soluzione risulta migliore di quella ottenuta dai codici FEM.

Infine, la figura 4.34 mette in relazione il tempo di calcolo delle prime 20 frequenze e dei rispettivi autovettori per il guscio toroidale a meridiano iperbolico di tabella 4.11 con il numero di punti nodali  $N = M$  e con il numero totale di gradi di libertà  $5 \times (N \times M)$  (e

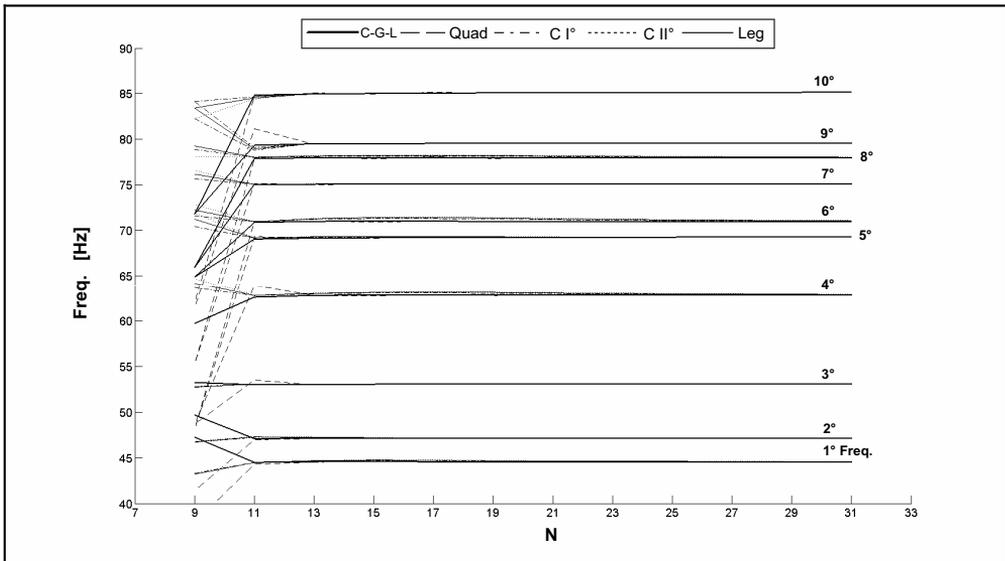
quindi di equazioni). Analoghi risultati si possono ottenere considerando le altre tipologie strutturali.

**Tabella 4.27** – Prime dieci frequenze di un pannello toroidale a meridiano parabolico costituito da una singola lamina di materiale isotropo (C-F-C-F).

Caratteristiche geometriche: $a = 3\text{ m}$ , $c = -3\text{ m}$ , $b = 1\text{ m}$ , $d = 0\text{ m}$ , $R_b = 9\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E = 210\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$							
Frequenze [Hz]	PDQ	Abaqus	Ansys	Straus	Nastran		Pro/Mech
Tipo elemento	-	8-nodi	8-nodi	8-nodi	8-nodi	4-nodi	4-nodi
Mesh	21×21	28×28	28×28	28×28	28×28	50×50	28×28
Num. Nodi	441	2465	2465	2465	2465	2601	841
$f_1$	44.62	44.65	44.63	44.43	44.58	44.64	44.60
$f_2$	47.18	47.21	47.21	47.02	47.16	47.22	47.19
$f_3$	53.11	53.17	53.13	52.77	52.99	53.09	53.10
$f_4$	62.85	62.82	62.83	62.00	62.42	62.68	62.78
$f_5$	69.28	69.33	69.37	68.77	69.10	69.28	69.30
$f_6$	71.00	70.96	71.01	70.50	70.79	70.95	70.95
$f_7$	75.12	75.13	75.17	74.92	75.06	75.09	75.10
$f_8$	78.01	77.98	78.02	77.17	77.42	77.74	77.93
$f_9$	79.59	79.57	79.63	78.34	79.04	79.31	79.56
$f_{10}$	85.13	85.12	85.21	83.61	84.04	84.64	85.09
CPU Time	16 sec	35 sec	13 sec	35 sec	17 sec	15 sec	71 sec
Mesh	27×27	50×50	50×50	50×50	50×50	90×90	50×50
Num. Nodi	729	7701	7701	7701	7701	8281	2601
$f_1$	44.61	44.63	44.62	44.58	44.47	44.63	44.60
$f_2$	47.19	47.20	47.21	47.16	47.05	47.21	47.18
$f_3$	53.12	53.14	53.13	53.07	52.77	53.12	53.10
$f_4$	62.84	62.80	62.82	62.69	61.93	62.78	62.77
$f_5$	69.31	69.31	69.36	69.27	68.73	69.35	69.30
$f_6$	70.98	70.95	71.00	70.93	70.46	71.00	70.94
$f_7$	75.12	75.12	75.17	75.14	74.86	75.15	75.10
$f_8$	78.00	77.95	78.02	77.95	76.72	77.93	77.93
$f_9$	79.61	79.57	79.63	79.42	78.38	79.53	79.56
$f_{10}$	85.16	85.10	85.20	85.06	82.78	85.02	85.09
CPU Time	58 sec	68 sec	42 sec	219 sec	28 sec	23 sec	227 sec
Mesh	31×31	100×100	100×100	100×100	100×100	180×180	100×100
Num. Nodi	961	30401	30401	30401	30401	32761	10201
$f_1$	44.61	44.61	44.62	44.61	44.34	44.62	44.60
$f_2$	47.19	47.19	47.21	47.19	46.91	47.21	47.18
$f_3$	53.12	53.12	53.13	53.11	52.48	53.12	53.10
$f_4$	62.84	62.78	62.82	62.78	61.23	62.81	62.77
$f_5$	69.32	69.30	69.36	69.33	68.13	69.36	69.30
$f_6$	70.98	70.95	71.00	70.98	69.92	71.01	70.94
$f_7$	75.12	75.11	75.17	75.16	74.60	75.16	75.10
$f_8$	78.00	77.94	78.02	78.00	75.78	77.99	77.93
$f_9$	79.61	79.56	79.63	79.57	77.41	79.60	79.56
$f_{10}$	85.17	85.09	85.20	85.17	80.93	85.15	85.09
CPU Time	132 sec	205 sec	249 sec	3566 sec	138 sec	118 sec	1528 sec



**Figura 4.26** – Prime forme modali del pannello toroidale a meridiano parabolico di tabella 4.27.



**Figura 4.27** – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze del pannello toroidale a meridiano parabolico di tabella 4.27 per diverse tipologie di discretizzazione.

**Tabella 4.28** – Prime dieci frequenze di un guscio toroidale a meridiano parabolico costituito da una singola lamina di materiale isotropo (C-F).

Caratteristiche geometriche: $a = 0 \text{ m}$ , $c = -3 \text{ m}$ , $b = 2 \text{ m}$ , $d = 0 \text{ m}$ , $R_b = 6 \text{ m}$ , $h = 0.1 \text{ m}$ , $\vartheta_0 = 360^\circ$							
Proprietà del materiale: $E = 210 \text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$							
Frequenze [Hz]	PDQ	Abaqus	Ansys	Straus	Nastran		Pro/Mech
Tipo elemento	-	8-nodi	8-nodi	8-nodi	8-nodi	4-nodi	4-nodi
Mesh	21×21	28×28	28×28	28×28	28×28	50×50	28×28
Num. Nodi	441	2408	2408	2408	2408	2550	812
$f_1$	43.00	43.09	43.11	41.79	42.86	43.20	43.04
$f_2$	43.00	43.09	43.11	41.79	42.86	43.20	43.04
$f_3$	44.37	44.55	44.52	41.84	43.54	44.51	44.42
$f_4$	44.37	44.55	44.52	41.84	43.54	44.51	44.42
$f_5$	46.63	46.68	46.75	42.75	44.61	46.53	46.63
$f_6$	46.63	46.68	46.75	42.75	44.61	46.53	46.63
$f_7$	46.80	47.05	46.98	46.08	46.71	46.76	46.84
$f_8$	46.80	47.05	46.98	46.08	46.71	46.76	46.84
$f_9$	51.65	51.66	51.82	47.21	49.37	51.77	51.65
$f_{10}$	52.91	53.27	53.19	47.21	49.37	52.03	52.96
CPU Time	17 sec	34 sec	15 sec	29 sec	15 sec	13 sec	51 sec
Mesh	27×27	50×50	50×50	50×50	50×50	90×90	50×50
Num. Nodi	729	7600	7600	7600	7600	8100	2550
$f_1$	43.00	43.04	43.10	42.81	42.59	43.09	43.04
$f_2$	43.00	43.04	43.10	42.81	42.59	43.09	43.04
$f_3$	44.36	44.44	44.48	43.96	42.82	44.44	44.42
$f_4$	44.36	44.44	44.48	43.96	42.82	44.44	44.42
$f_5$	46.63	46.64	46.74	46.26	43.02	46.68	46.63
$f_6$	46.63	46.64	46.74	46.26	43.02	46.68	46.63
$f_7$	46.79	46.87	46.89	46.59	46.55	46.69	46.83
$f_8$	46.79	46.87	46.89	46.59	46.55	46.69	46.83
$f_9$	51.65	51.65	51.82	51.74	46.92	51.72	51.65
$f_{10}$	52.87	52.98	53.01	52.18	46.92	52.58	52.94
CPU Time	61 sec	54 sec	55 sec	247 sec	28 sec	26 sec	177 sec
Mesh	31×31	100×100	100×100	100×100	100×100	180×180	100×100
Num. Nodi	961	30200	30200	30200	30200	32580	10100
$f_1$	43.00	43.04	43.10	43.04	41.48	43.06	43.04
$f_2$	43.00	43.04	43.10	43.04	41.48	43.06	43.04
$f_3$	44.36	44.43	44.47	44.36	42.10	44.44	44.42
$f_4$	44.36	44.43	44.47	44.36	42.10	44.44	44.42
$f_5$	46.63	46.63	46.74	46.71	42.33	46.66	46.63
$f_6$	46.63	46.63	46.74	46.71	42.33	46.66	46.63
$f_7$	46.79	46.84	46.88	46.75	44.61	46.81	46.83
$f_8$	46.79	46.84	46.88	46.75	44.61	46.81	46.83
$f_9$	51.65	51.65	51.82	51.81	46.43	51.69	51.65
$f_{10}$	52.87	52.94	52.99	52.84	46.43	52.86	52.94
CPU Time	139 sec	196 sec	236 sec	2583 sec	205 sec	190 sec	804 sec

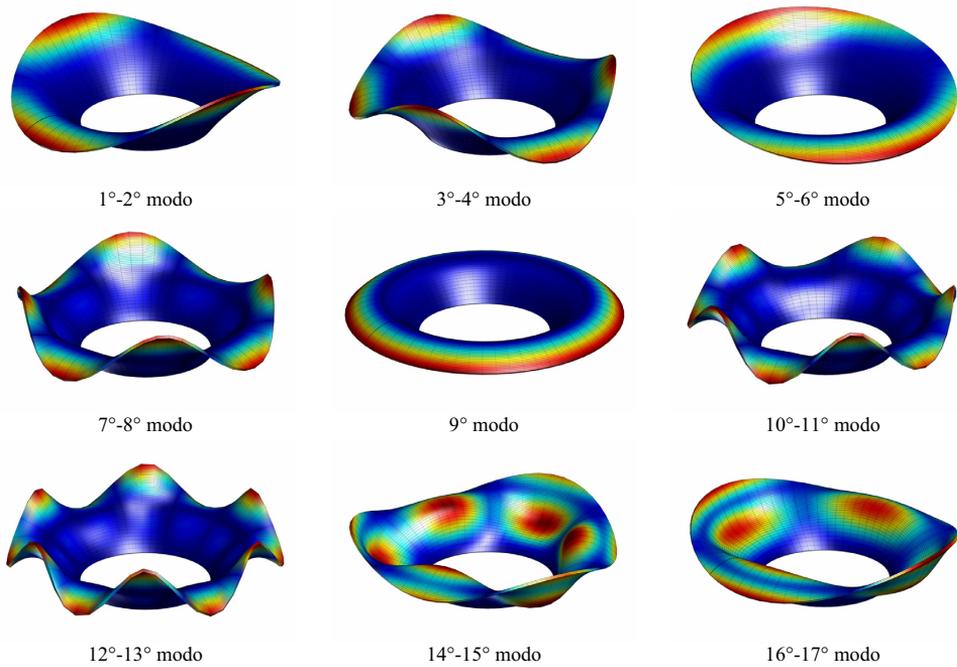


Figura 4.28 – Prime forme modali del guscio toroidale a meridiano parabolico di tabella 4.28.

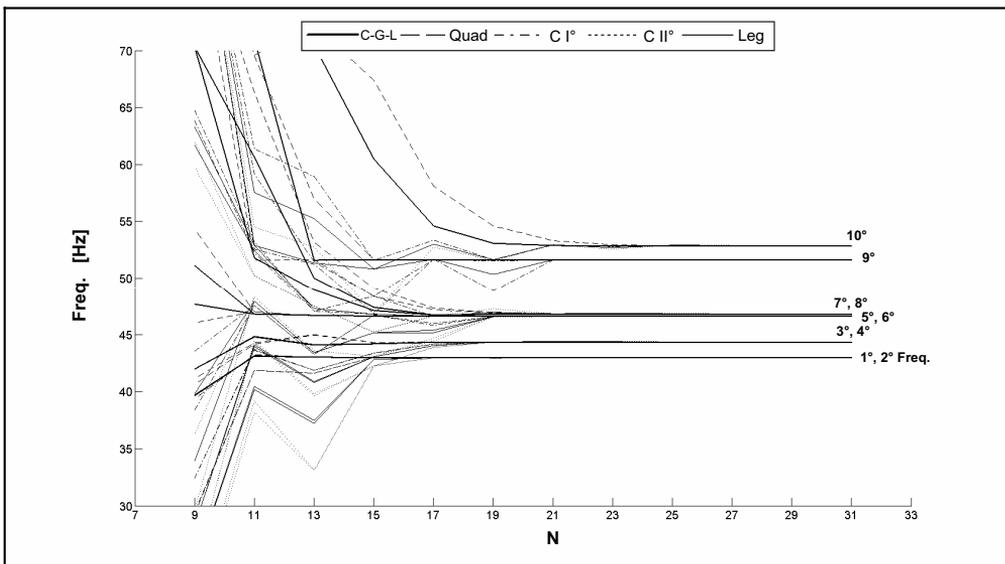


Figura 4.29 – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze del guscio toroidale a meridiano parabolico di tabella 4.28 per diverse tipologie di discretizzazione.

**Tabella 4.29** – Prime dieci frequenze di un pannello a meridiano parabolico costituito da una singola lamina di materiale isotropo (F-F-C-C).

Caratteristiche geometriche: $a = 4\text{ m}$ , $c = 1\text{ m}$ , $b = 2\text{ m}$ , $d = 0\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 120^\circ$							
Proprietà del materiale: $E = 210\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$							
Frequenze [Hz]	PDQ	Abaqus	Ansys	Straus	Nastran		Pro/Mech
Tipo elemento	-	8-nodi	8-nodi	8-nodi	8-nodi	4-nodi	4-nodi
Mesh	21×21	28×28	28×28	28×28	28×28	50×50	28×28
Num. Nodi	441	2465	2465	2465	2465	2601	841
$f_1$	65.96	65.98	65.99	65.86	64.58	66.01	65.94
$f_2$	76.27	76.29	76.36	76.19	72.51	76.41	76.28
$f_3$	145.21	145.28	145.39	144.94	143.79	145.41	145.18
$f_4$	156.40	156.44	156.74	156.07	152.23	156.52	156.39
$f_5$	162.80	162.91	163.05	162.60	161.05	162.92	162.79
$f_6$	178.67	178.75	178.99	178.51	176.39	178.67	178.66
$f_7$	191.09	191.19	191.38	190.89	189.18	191.21	191.07
$f_8$	212.17	212.28	212.77	212.01	209.07	211.88	212.17
$f_9$	217.27	217.36	217.79	217.03	214.75	217.49	217.26
$f_{10}$	232.68	232.70	233.31	232.57	229.02	233.00	232.66
CPU Time	17 sec	33 sec	13 sec	40 sec	13 sec	8 sec	71 sec
Mesh	27×27	50×50	50×50	50×50	50×50	90×90	50×50
Num. Nodi	729	7701	7701	7701	7701	8281	2601
$f_1$	65.94	65.96	65.99	65.94	64.17	66.00	65.94
$f_2$	76.25	76.28	76.36	76.29	71.67	76.39	76.27
$f_3$	145.19	145.23	145.38	145.23	143.27	145.39	145.18
$f_4$	156.39	156.41	156.73	156.49	151.11	156.69	156.39
$f_5$	162.80	162.86	163.04	162.89	160.52	163.01	162.79
$f_6$	178.67	178.70	178.99	178.83	175.67	178.89	178.66
$f_7$	191.08	191.13	191.37	191.21	188.61	191.34	191.07
$f_8$	212.18	212.22	212.75	212.50	207.97	212.47	212.17
$f_9$	217.28	217.31	217.78	217.53	213.89	217.70	217.26
$f_{10}$	232.67	232.67	233.30	233.06	228.03	233.25	232.66
CPU Time	59 sec	55 sec	48 sec	228 sec	24 sec	21 sec	248 sec
Mesh	31×31	100×100	100×100	100×100	100×100	180×180	100×100
Num. Nodi	961	30401	30401	30401	30401	32761	10201
$f_1$	65.94	65.95	65.99	65.98	63.61	65.99	65.94
$f_2$	76.24	76.28	76.35	76.34	70.44	76.37	76.27
$f_3$	145.19	145.20	145.38	145.34	142.60	145.39	145.18
$f_4$	156.38	156.40	156.72	156.66	149.68	156.73	156.39
$f_5$	162.79	162.83	163.04	163.00	159.81	163.04	162.79
$f_6$	178.67	178.68	178.98	178.94	174.72	178.96	178.66
$f_7$	191.08	191.10	191.37	191.33	187.81	191.38	191.07
$f_8$	212.18	212.19	212.74	212.68	206.64	212.66	212.17
$f_9$	217.27	217.28	217.78	217.71	212.86	217.77	217.26
$f_{10}$	232.67	232.66	233.29	233.24	226.68	233.32	232.66
CPU Time	134 sec	169 sec	254 sec	3467 sec	144 sec	115 sec	1111 sec

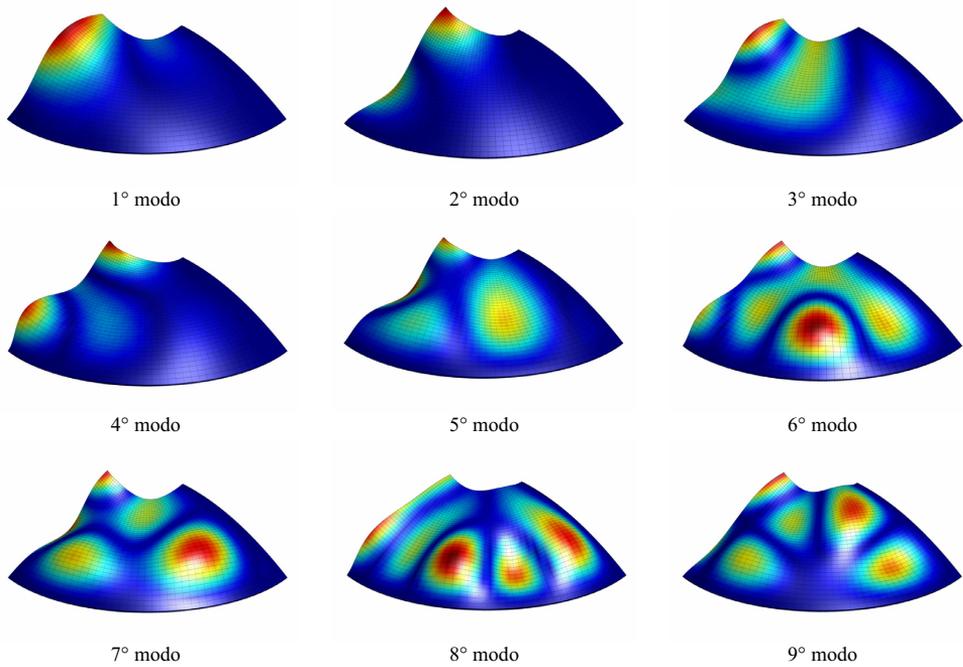


Figura 4.30 – Prime forme modali del pannello a meridiano parabolico di tabella 4.29.

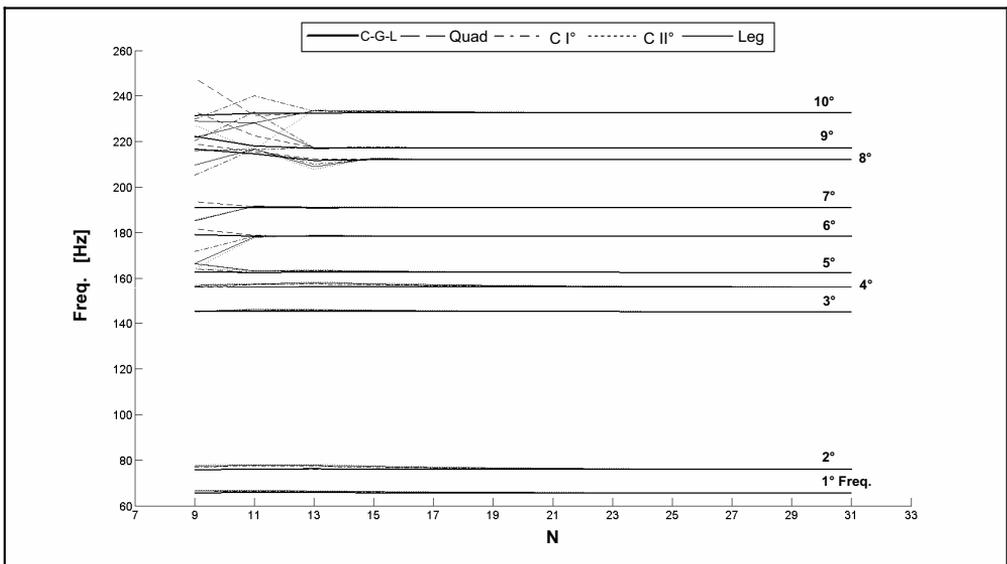


Figura 4.31 – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze del pannello a meridiano parabolico di tabella 4.29 per diverse tipologie di discretizzazione.

**Tabella 4.30** – Prime dieci frequenze di un guscio a meridiano parabolico costituito da una singola lamina di materiale isotropo (F-C).

Caratteristiche geometriche: $a = 4\text{ m}$ , $c = 1\text{ m}$ , $b = 2\text{ m}$ , $d = 0\text{ m}$ , $R_b = 0\text{ m}$ , $h = 0.1\text{ m}$ , $\vartheta_0 = 360^\circ$							
Proprietà del materiale: $E = 210\text{ GPa}$ , $\nu_{12} = 0.3$ e $\rho = 7800\text{ Kg/m}^3$							
Frequenze [Hz]	PDQ	Abaqus	Ansys	Straus	Nastran		Pro/Mech
Tipo elemento	-	8-nodi	8-nodi	8-nodi	8-nodi	4-nodi	4-nodi
Mesh	21×21	28×28	28×28	28×28	28×28	50×50	28×28
Num. Nodi	441	2408	2408	2408	2408	2550	812
$f_1$	91.24	91.29	91.28	90.76	90.08	91.61	91.21
$f_2$	91.24	91.29	91.28	90.76	90.08	91.61	91.21
$f_3$	131.29	131.39	131.49	129.58	131.08	131.42	131.27
$f_4$	131.29	131.39	131.49	129.58	131.08	131.42	131.27
$f_5$	154.90	155.12	155.29	152.78	154.35	153.92	154.91
$f_6$	154.90	155.12	155.29	152.78	154.35	153.92	154.91
$f_7$	157.99	158.12	158.02	157.65	158.22	158.43	157.99
$f_8$	157.99	158.12	158.02	157.65	158.22	158.43	157.99
$f_9$	169.66	169.84	170.21	167.24	167.59	167.09	169.50
$f_{10}$	169.68	169.84	170.21	167.24	167.59	167.09	169.50
CPU Time	18 sec	34 sec	15 sec	32 sec	12 sec	8 sec	46 sec
Mesh	27×27	50×50	50×50	50×50	50×50	90×90	50×50
Num. Nodi	729	7600	7600	7600	7600	8100	2550
$f_1$	91.24	91.24	91.26	91.09	89.12	91.37	91.21
$f_2$	91.24	91.24	91.26	91.09	89.12	91.37	91.21
$f_3$	131.29	131.30	131.41	130.76	130.15	131.41	131.27
$f_4$	131.29	131.30	131.41	130.76	130.15	131.41	131.27
$f_5$	154.91	154.96	155.12	154.30	153.61	154.72	154.89
$f_6$	154.91	154.96	155.12	154.30	153.61	154.72	154.89
$f_7$	157.99	158.06	158.01	157.89	158.14	158.15	157.99
$f_8$	157.99	158.06	158.01	157.89	158.14	158.15	157.99
$f_9$	169.46	169.52	169.79	168.90	166.68	168.89	169.45
$f_{10}$	169.46	169.52	169.79	168.90	166.68	168.89	169.45
CPU Time	65 sec	56 sec	54 sec	200 sec	41 sec	30 sec	173 sec
Mesh	31×31	100×100	100×100	100×100	100×100	180×180	100×100
Num. Nodi	961	30200	30200	30200	30200	32580	10100
$f_1$	91.24	91.23	91.26	91.22	88.60	91.29	91.21
$f_2$	91.24	91.23	91.26	91.22	88.60	91.29	91.21
$f_3$	131.29	131.28	131.41	131.24	129.69	131.41	131.27
$f_4$	131.29	131.28	131.41	131.24	129.69	131.41	131.27
$f_5$	154.91	154.92	155.10	154.89	153.18	154.99	154.89
$f_6$	154.91	154.92	155.10	154.89	153.18	154.99	154.89
$f_7$	157.99	158.02	158.01	157.98	158.00	158.06	157.99
$f_8$	157.99	158.02	158.01	157.99	158.00	158.06	157.99
$f_9$	169.46	169.47	169.75	169.53	166.05	169.52	169.45
$f_{10}$	169.46	169.47	169.75	169.53	166.05	169.52	169.45
CPU Time	139 sec	201 sec	237 sec	2802 sec	231 sec	226 sec	789 sec

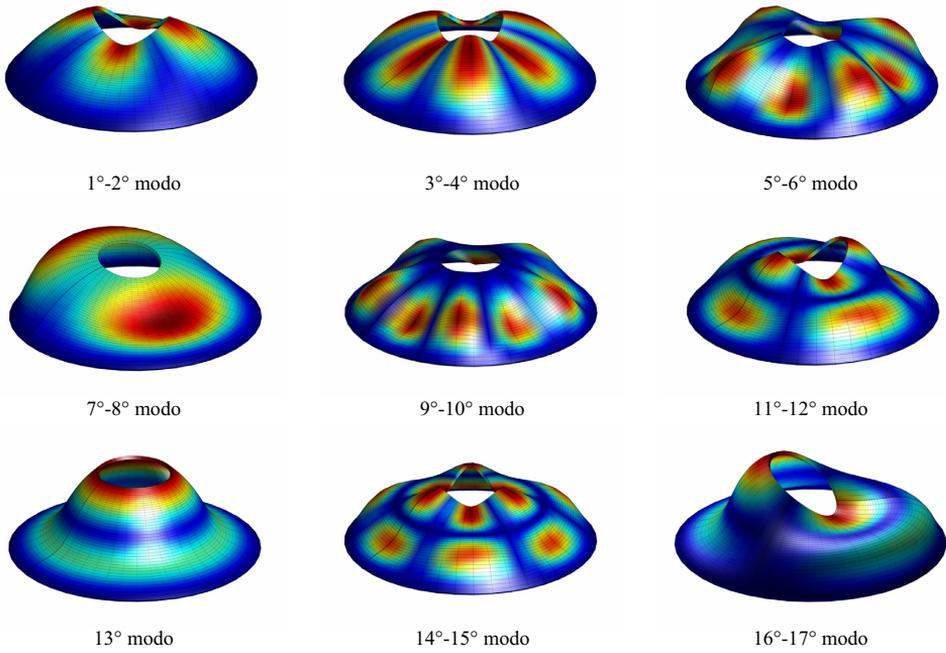


Figura 4.32 – Prime forme modali del guscio toroidale a meridiano parabolico di tabella 4.30.

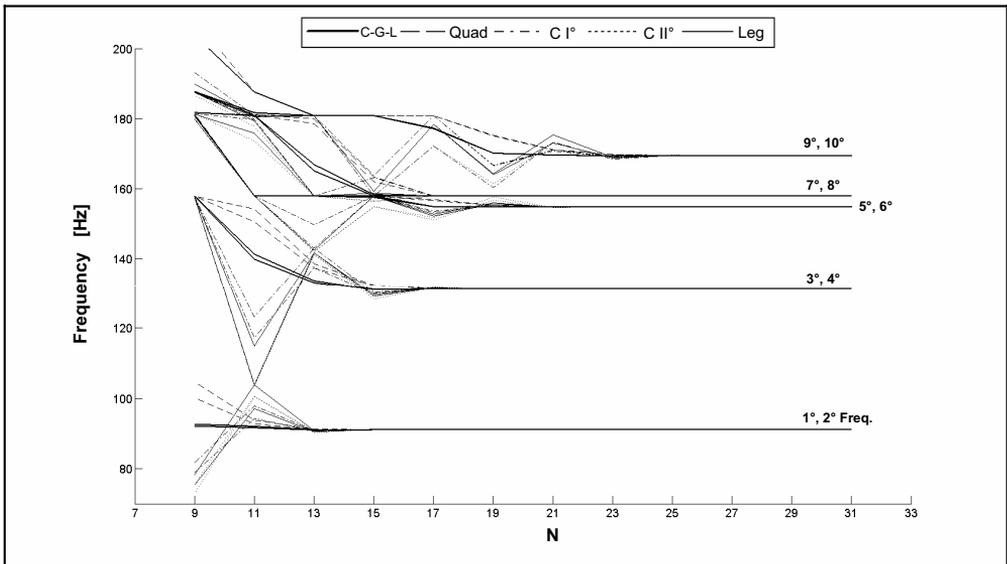


Figura 4.33 – Caratteristiche di convergenza e stabilità per le prime dieci frequenze del guscio a meridiano parabolico di tabella 4.30 per diverse tipologie di discretizzazione.

La curva tratteggiata di figura 4.34 è relativa al tempo complessivo di calcolo della soluzione, mentre la curva a tratto continuo si riferisce al tempo necessario per l'estrazione dei primi 20 autovalori ed autovettori. Si osserva che all'aumentare del numero dei punti di griglia  $N = M$ , e quindi dei gradi di libertà, il tempo di calcolo aumenta in maniera rilevante. D'altro canto, si vuol far rilevare che risultati accurati si ottengono con un basso numero di punti. In particolare, soluzioni con un elevato grado di accuratezza si possono ottenere per valori di  $N = M$  compresi nell'intervallo  $[21,31]$ .

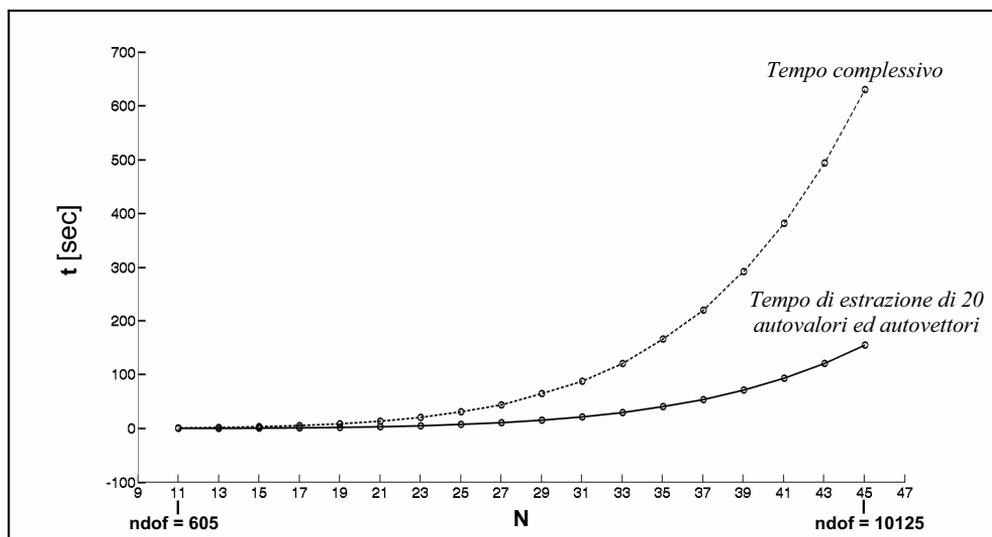


Figura 4.34 – Variazione del tempo di calcolo della soluzione al variare del numero di punti nodali  $N = M$  o del numero di gradi di libertà ( $ndof$ )  $5 \times (N \times M)$ .

I risultati numerici esposti dimostrano e confermano il buon grado di accuratezza e precisione garantiti dal Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale. Insieme a quest'ultimo aspetto, anche la semplicità di implementazione al calcolatore, derivante dall'operare direttamente sulla formulazione forte del problema elastico, e la versatilità della tecnica numerica in parola rappresentano caratteristiche apprezzabili.

**BIBLIOGRAFIA**

- [1] E. Artioli, P. Gould and E. Viola, *A differential quadrature solution for shear-deformable shells of revolution*, Engineering and Structures **27**, 1879-1872, 2005.
- [2] E. Artioli and E. Viola, *Static analysis of shear-deformable shells of revolution via G.D.Q. method*, Structural Engineering and Mechanics **19**, 459-475, 2005.
- [3] E. Artioli and E. Viola, *Free vibration analysis of spherical caps using G.D.Q. numerical solution*, Journal of Pressure Vessel Technology **128**, 370-378, 2006.
- [4] N.M. Auciello and M.A. De Rosa, *Two approaches to the dynamic analysis of foundation beams subjected to subtangential forces*, Computers and Structures **82**, 519-524, 2004.
- [5] R. Bellman and J. Casti, *Differential quadrature and long-term integration*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **34**, 235-238, 1971.
- [6] R. Bellman, B.G. Kashef and J. Casti, *Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations*, Journal of Computational Physics **10**, 40-52, 1972.
- [7] R.E. Bellman and R.S. Roth, *Methods in Approximation*, D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [8] N. Bellomo, *Nonlinear models and problems in applied sciences from differential quadrature to generalized collocation methods*, Mathematical and Computer Modelling **27**, 13-34, 1997.
- [9] N. Bellomo, E. De Angelis, L. Graziano and A. Romano, *Solutions of nonlinear problems in applied sciences by generalized collocation methods and mathematica*, Computers and Mathematics with Applications **41**, 1343-1363, 2001.
- [10] C.W. Bert, S.K. Jang and A.G. Striz, *Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components*, AIAA Journal **26**, 612-618, 1988.
- [11] C.W. Bert, S.K. Jang and A.G. Striz, *Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature*, Computational Mechanics **5**, 217-226, 1989.
- [12] C. Bert and M. Malik, *Differential quadrature method in computational mechanics*, Applied Mechanical Reviews **49**, 1-27, 1996.
- [13] C.W. Bert and M. Malik, *The differential quadrature method for irregular domains and application for plate vibration*, International Journal of Mechanical Sciences **38**, 589-606, 1996.

- [14] C.W. Bert and M. Malik, *Free vibration analysis of tapered rectangular plates by differential quadrature method: a semi-analytical approach*, Journal of Sound and Vibration **190**, 41-63, 1996.
- [15] C.W. Bert and M. Malik, *Free vibration analysis of thin cylindrical shells by the differential quadrature method*, Journal of Pressure Vessel Technology **118**, 1-12, 1996.
- [16] C.W. Bert, X. Wang and A.G. Striz, *Differential quadrature for static and free vibration analyses of anisotropic plates*, International Journal of Solids and Structures **30**, 1737-1744, 1993.
- [17] C.W. Bert, X. Wang and A.G. Striz, *Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method*, Acta Mechanica **102**, 11-24, 1994.
- [18] C.W. Bert, X. Wang and A.G. Striz, *Convergence of DQ method in the analysis of anisotropic plates*, Journal of Sound and Vibration **170**, 140-144, 1994.
- [19] I. Bonzani, *Domain decomposition and discretization of continuum mathematical models*, Computers and Mathematics with Applications **38**, 79-88, 1999.
- [20] C.N. Chen, *Adaptive differential quadrature element refinement analyses of fluids mechanics problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **180**, 47-63, 1999.
- [21] C.N. Chen, *A generalized differential quadrature element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **188**, 553-566, 2000.
- [22] C.N. Chen, *Vibration of prismatic beam on an elastic foundation by the differential quadrature element method*, Computers and Structures **77**, 1-9, 2000.
- [23] C.N. Chen, *Differential quadrature element analysis using extended differential quadrature*, Computers and Mathematics with Applications **39**, 65-79, 2000.
- [24] C.N. Chen, *Vibration of nonuniform shear deformable axisymmetric orthotropic circular plates solved by DQEM*, Composite Structures **53**, 257-264, 2001.
- [25] C.N. Chen, *Differential quadrature finite difference method for structural mechanics problems*, Communications in Numerical Method in Engineering **17**, 423-441, 2001.
- [26] C.N. Chen, *Buckling equilibrium equations of arbitrarily loaded nonprismatic composite beams and the DQEM buckling analysis using EDQ*, Applied Mathematical Modelling **27**, 27-46, 2003.
- [27] C.N. Chen, *Out-of-plane deflection of nonprismatic curved beams structures solved by the DQEM*, Advances in Engineering Software **34**, 297-306, 2003.

- [28] C.N. Chen, *Extended GDQ and related discrete element analysis methods for transient analyses of continuum mechanics problems*, Computers and Mathematics with Applications **47**, 91-99, 2004.
- [29] C.N. Chen, *Dynamic Response of shear-deformable axisymmetric orthotropic circular plate structures solved by the DQEM and EDQ based time integration schemes*, Composite Structures **64**, 339-348, 2004.
- [30] C.N. Chen, *DQEM and DQFDM irregular elements for analyses of 2-D heat conduction in orthotropic media*, Applied Mathematical Modelling **28**, 617-638, 2004.
- [31] C.N. Chen, *DQEM analysis of in-plane vibration of curved beam structures*, Advances in Engineering Software **36**, 412-424, 2005.
- [32] W. Chen, C. Shu, W. He and T. Zhong, *The application of special matrix product to differential quadrature solutions of geometrically nonlinear bending of orthotropic rectangular plates*, Computers and Structures **74**, 65-76, 2004.
- [33] W. Chen, X. Wang and T. Zhong, *The structures of the weighting coefficient matrices of the harmonic differential quadrature and its applications*, Communications in Numerical Method in Engineering **12**, 455-459, 1996.
- [34] W. Chen, T.X. Zhong and S.P. Liang, *On the DQ analysis of geometrically nonlinear vibration of immovably simply-supported beams*, Journal of Sound and Vibration **206**, 745-748, 1997.
- [35] W. Chen, T.X. Zhong and C. Shu, *Lyapunov formulation for efficient solution of the Poisson and convection-diffusion equations by the differential quadrature method*, Journal of Computational Physics **141**, 78-84, 1998.
- [36] W.L. Chen, A.G. Striz and C.W. Bert, *High accuracy plane stress and plate element in the quadrature element method*, International Journal of Solids and Structures **37**, 627-647, 2000.
- [37] W.Q. Chen, C.F. Lü and Z.G. Bian, *A semi-analytical method for free vibration of straight orthotropic beams with rectangular cross-sections*, Mechanics Research Communications **31**, 725-734, 2004.
- [38] W.Q. Chen, C.F. Lü and Z.G. Bian, *A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation*, Applied Mathematical Modelling **28**, 877-890, 2004.
- [39] H. Chung, *Free vibration analysis of circular cylindrical shells*, Journal of Sound and Vibration **74**, 331-350, 1981.

- [40] Ö. Civalek, *Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns*, Engineering Structures **26**, 171-186, 2004.
- [41] Ö. Civalek, *Geometrically nonlinear analysis of doubly curved isotropic shells resting on elastic foundation by a combination of harmonic differential quadrature-finite difference methods*, International Journal of Pressure Vessels and Piping **82**, 470-479, 2005.
- [42] Ö. Civalek, *Harmonic differential quadrature-finite differences coupled approaches geometrically nonlinear static and dynamic analysis of rectangular plates on elastic foundation*, Journal of Sound and Vibration **294**, 966-980, 2006.
- [43] Ö. Civalek, *An efficient method for free vibration analysis of rotating truncated conical shells*, International Journal of Pressure Vessels and Piping **83**, 1-12, 2006.
- [44] Ö. Civalek, *Nonlinear analysis of thin rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundation differential by DSC-HQM methods*, Applied Mathematical Modelling **31**, 606-624, 2007.
- [45] F. Civan and C.M. Sliepcevich, *Application of differential quadrature to transport processes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **93**, 206-221, 1983.
- [46] F. Civan and C.M. Sliepcevich, *Differential quadrature for multi-dimensional problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **101**, 423-443, 1984.
- [47] F. Civan and C.M. Sliepcevich, *Application of differential quadrature in solution of pool boiling in cavities*, Proceedings of Oklahoma Academy of Sciences **65**, 73-78, 1985.
- [48] M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari and C.B. Sharma, *Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature rules versus Rayleigh-Ritz method)*, Composite Structures **63**, 69-74, 2004.
- [49] M.A. De Rosa and C. Franciosi, *Exact and approximate dynamic analysis of circular arches using DQM*, International Journal of Solids and Structures **37**, 1103-1117, 2000.
- [50] Y.M. Desai, G.S. Ramtekkar and A.H. Shah, *Dynamic analysis of laminated composite plates using a layer-wise mixed finite element method*, Composite Structures **59**, 237-249, 2003.
- [51] H. Ding, C. Shu, K.S. Yeo and D. Xu, *Simulation of incompressible viscous flows past a circular cylinder by hybrid FD scheme and meshless least square-based*

- finite difference method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **193**, 727-744, 2004.
- [52] H. Ding, C. Shu, K.S. Yeo and D. Xu, *Numerical computation of three-dimensional incompressible viscous flows in the primitive variable form by local multiquadratic differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **195**, 516-533, 2006.
- [53] S.B. Dong, *A block-stodola eigensolution technique for large algebraic systems with non-symmetrical matrices*, International Journal of Numerical Methods in Engineering **11**, 247-267, 1977.
- [54] H. Du, K.M. Liew and M.K. Lim, *Generalized differential quadrature method for buckling analysis*, Journal of Engineering Mechanics **122**, 95-100, 1996.
- [55] H. Du, M.K. Lim and R.M. Lin, *Application of generalized differential quadrature to vibration analysis*, Journal of Sound and Vibration **181**, 279-293, 1995.
- [56] G.A. Evans and K.C. Chung, *Some theoretical aspects of generalized quadrature methods*, Journal of Complexity **19**, 272-285, 2003.
- [57] T.C. Fung, *Solving initial value problems by differential quadrature method – part 1: first-order equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **50**, 1411-1427, 2001.
- [58] T.C. Fung, *Solving initial value problems by differential quadrature method – part 2: second- and higher-order equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **50**, 1429-1454, 2001.
- [59] T.C. Fung, *On equivalence of the time domain differential quadrature method and the dissipative Runge-Kutta collocation method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **53**, 409-431, 2002.
- [60] T.C. Fung, *Stability and accuracy of differential quadrature method in solving dynamic problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **191**, 1311-1331, 2002.
- [61] T.C. Fung, *Imposition of boundary conditions by modifying the weighting coefficient matrices in the differential quadrature method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **56**, 405-432, 2003.
- [62] T.C. Fung, *Generalized Lagrange functions and weighting coefficients formulae for the harmonic differential quadrature method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **57**, 415-440, 2003.

- [63] D.J. Gorman and W. Ding, *Accurate free vibration analysis of completely free symmetric cross-ply rectangular laminated plates*, Composite Structures **60**, 359-365, 2003.
- [64] H.Z. Gu and X.W. Wang, *On the free vibration analysis of circular plates with stepped thickness over a concentric region by the differential quadrature element method*, Journal of Sound and Vibration **202**, 452-459, 1997.
- [65] R.H. Gutierrez and P.A.A. Laura, *Analysis of vibrating, thin, rectangular plates with point supports by the method of differential quadrature*, Ocean Engineering **22**, 101-103, 1995.
- [66] R.H. Gutierrez and P.A.A. Laura, *Vibrations of non-uniform rings studied by means of the differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **185**, 507-513, 1995.
- [67] H. Haftchenari, M. Darvizeh, A. Darvizeh, R. Ansari and C.B. Sharma, *Dynamic analysis of composite shells using differential quadrature method*, Composite Structures **78**, 292-298, 2007.
- [68] J.B. Han and K.M. Liew, *Analysis of annular Reissner-Mindlin plates using differential quadrature method*, International Journal of Mechanical Sciences **40**, 651-661, 1998.
- [69] J.B. Han and K.M. Liew, *Axisymmetric free vibration of thick annular plates*, International Journal of Mechanical Sciences **41**, 1089-1109, 1999.
- [70] J.B. Han and K.M. Liew, *Static analysis of Mindlin plates: the differential quadrature element method (DQEM)*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **177**, 51-75, 1999.
- [71] C.C. Hong and K.C. Jane, *Shear deformation in thermal vibration analysis of laminated plates by the GDQ method*, International Journal of Mechanical Sciences **45**, 21-36, 2003.
- [72] C.C. Hong and K.C. Jane, *Shear deformation in thermal bending analysis of laminated plates by the GDQ method*, Mechanics Research Communications **30**, 175-186, 2003.
- [73] M.H. Hsu, *Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **194**, 1-17, 2005.

- [74] L. Hua and K.Y. Lam, *Frequency characteristics of a thin rotating cylindrical shell using the generalized differential quadrature method*, International Journal of Mechanical Sciences **40**, 443-459, 1998.
- [75] L. Hua and K.Y. Lam, *The generalized quadrature method for frequency analysis of a rotating conical shell with initial pressure*, International Journal of Numerical Methods in Engineering **48**, 1703-1722, 2000.
- [76] L. Hua and K.Y. Lam, *Orthotropic influence on frequency characteristics of rotating composite laminated conical shell by the generalized differential quadrature method*, International Journal of Solids and Structures **38**, 3995-4015, 2001.
- [77] Y.Q. Huang and Q.S. Li, *Bending and buckling analysis of antisymmetric laminates using the moving least square differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **193**, 3471-3492, 2004.
- [78] K.C. Jane and C.C. Hong, *Thermal bending analysis of laminated orthotropic plates by the generalized differential quadrature method*, Mechanics Research Communications **27**, 157-164, 2000.
- [79] S. Jang, C. Bert and A.G. Striz, *Application of differential quadrature to static analysis of structural components*, International Journal of Numerical Methods in Engineering **28**, 561-577, 1989.
- [80] K. Kang and C.W. Bert, *Flexural-torsional buckling analysis of arches with warping using DQM*, Engineering Structures **19**, 247-254, 1997.
- [81] K. Kang, C.W. Bert and A.G. Striz, *Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **181**, 353-360, 1995.
- [82] K.J. Kang, C.W. Bert and A.G. Striz, *Vibration and buckling analysis of circular arches using DQM*, Computers and Structures **60**, 49-57, 1996.
- [83] K. Kang, C.W. Bert and A.G. Striz, *Vibration analysis of horizontally curved beams with warping using DQM*, Journal of Structural Engineering **122**, 657-662, 1996.
- [84] G. Karami and P. Malekzadeh, *Static and stability analyses of arbitrary straight-sided quadrilateral thin plates by DQM*, International Journal of Solids and Structures **39**, 4927-4947, 2002.

- [85] G. Karami and P. Malekzadeh, *A new differential quadrature methodology for beam analysis and the associated differential quadrature element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **191**, 3509-3526, 2002.
- [86] G. Karami and P. Malekzadeh, *Application of a new differential quadrature methodology for free vibration analysis of plates*, International Journal of Numerical Methods in Engineering **56**, 847-868, 2003.
- [87] G. Karami and P. Malekzadeh, *An efficient differential quadrature methodology for free vibration analysis of arbitrary straight-sided quadrilateral thin plate*, Journal of Sound and Vibration **263**, 415-442, 2003.
- [88] G. Karami and P. Malekzadeh, *In-plane free vibration analysis of circular arches with varying cross-sections using differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **274**, 777-799, 2004.
- [89] G. Karami, P. Malekzadeh and S.R. Mohebpour, *DQM free vibration analysis of moderately thick symmetric laminated plates with elastically restrained edges*, Composite Structures **74**, 115-125, 2006.
- [90] G. Karami, P. Malekzadeh and S.A. Shahpari, *A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions*, Engineering Structures **25**, 1169-1178, 2003.
- [91] G. Karami, S.A. Shahpari and P. Malekzadeh, *DQM analysis of skewed and trapezoidal plates*, Composite Structures **59**, 393-402, 2003.
- [92] K.Y. Lam and L. Hua, *Vibration analysis of a rotating truncated circular conical shell*, International Journal of Solids and Structures **34**, 2183-2197, 1997.
- [93] K.Y. Lam and L. Hua, *Influence of initial pressure on frequency characteristics of a rotating truncated circular conical shell*, International Journal of Mechanical Sciences **42**, 213-236, 2000.
- [94] K.Y. Lam and H. Li, *Generalized differential quadrature method for frequency of rotating multilayered conical shell*, Journal of Engineering Mechanics **126**, 1156-1162, 2000.
- [95] K.Y. Lam, H. Li, T.Y. Ng and C.F. Chua, *Generalized differential quadrature method for the free vibration of truncated conical panels*, Journal of Sound and Vibration **251**, 329-348, 2002.
- [96] K.Y. Lam and C.T. Loy, *Free vibrations of a rotating multi-layered cylindrical shell*, International Journal of Solids and Structures **32**, 647-663, 1995.

- [97] K.Y. Lam and W. Qian, *Vibration of thick rotating laminated composite cylindrical shells*, Journal of Sound and Vibration **225**, 483-501, 1999.
- [98] K.Y. Lam, J. Zhang and Z. Zong, *A numerical study of wave propagation in a poroelastic medium by use of localized differential quadrature method*, Applied Mathematical Modelling **28**, 487-511, 2004.
- [99] W. Lanhe, L. Hua and W. Daobin, *Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method*, Composite Structures **68**, 319-330, 2005.
- [100] P.A.A. Laura and R.H. Gutierrez, *Analysis of vibrating circular plates of non uniform thickness by the method of differential quadrature*, Ocean Engineering **22**, 97-100, 1995.
- [101] J.J. Li and C.J. Cheng, *Differential quadrature method for nonlinear vibration of orthotropic plates with finite deformation and transverse shear effect*, Journal of Sound and Vibration **281**, 295-309, 2005.
- [102] K.M. Liew, J.B. Han and Z.M. Xiao, *Differential quadrature method for thick symmetric cross-ply laminates with first-order shear flexibility*, International Journal of Solids and Structures **33**, 2647-2658, 1996.
- [103] K.M. Liew, J.B. Han and Z.M. Xiao, *Vibration analysis of circular Mindlin plates using the differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **205**, 617-630, 1997.
- [104] K.M. Liew, J.B. Han, Z.M. Xiao and H. Du, *Differential quadrature method for Mindlin plates on Winkler foundations*, International Journal of Mechanical Sciences **38**, 405-421, 1996.
- [105] K.M. Liew, Y.Q. Huang and J.N. Reddy, *Moving least squares differential quadrature method and its application to the analysis of shear deformable plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **56**, 2331-2351, 2003.
- [106] K.M. Liew, Y.Q. Huang and J.N. Reddy, *Analysis of general shaped thin plates by the moving least-square differential quadrature method*, Finite Elements in Analysis and Design **40**, 1453-1474, 2004.
- [107] K.M. Liew and F.L. Liu, *Differential quadrature method for vibration analysis of shear deformable annular sector plates*, Journal of Sound and Vibration **230**, 335-356, 2000.

- [108] K.M. Liew and T.M. Teo, *Three-dimensional vibration analysis of rectangular plates based on differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **220**, 577-599, 1999.
- [109] K.M. Liew, T.M. Teo and J.B. Han, *Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three-dimensional vibration analysis of rectangular plates*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **45**, 1831-1848, 1999.
- [110] K.M. Liew, T.M. Teo and J.B. Han, *Three-dimensional static solutions of rectangular plates by variant differential quadrature method*, International Journal of Mechanical Sciences **43**, 1611-1628, 2001.
- [111] K.M. Liew, J.Z. Zhang, T.Y. Ng and S.A. Meguid, *Three-dimensional modelling of elastic bonding in composite laminates layerwise differential quadrature*, International Journal of Solids and Structures **40**, 1745-1764, 2003.
- [112] K.M. Liew, J.Z. Zhang, C. Li and S.A. Meguid, *Three-dimensional analysis of coupled thermo-piezoelectro-mechanical behaviour of multilayered plates using differential quadrature technique*, International Journal of Solids and Structures **42**, 4239-4257, 2005.
- [113] F.L. Liu, *Rectangular thick plates on winkler foundation: differential quadrature element solution*, International Journal of Solids and Structures **37**, 1743-1763, 2000.
- [114] F.L. Liu, *Differential quadrature element method for buckling analysis of rectangular Mindlin plates having discontinuities*, International Journal of Solids and Structures **38**, 2305-2321, 2001.
- [115] F.L. Liu and K.M. Liew, *Differential quadrature element method for static analysis of Reissner-Mindlin polar plates*, International Journal of Solids and Structures **36**, 5101-5123, 1999.
- [116] F.L. Liu and K.M. Liew, *Free vibration analysis of Mindlin sector plates: numerical solutions by differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **177**, 77-92, 1999.
- [117] F.L. Liu and K.M. Liew, *Differential quadrature element method: a new approach for free vibration analysis of polar Mindlin plates having discontinuities*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **179**, 407-423, 1999.
- [118] G.R. Liu and T.Y. Wu, *Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition*, Journal of Sound and Vibration **246**, 461-481, 2001.

- [119] G.R. Liu and T.Y. Wu, *In-plane vibration analyses of circular arches by the generalized differential quadrature rule*, International Journal of Mechanical Sciences **43**, 2597-2611, 2001.
- [120] G.R. Liu and T.Y. Wu, *Application of generalized differential quadrature rule in Blasius and Osanger equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **52**, 1013-1027, 2001.
- [121] G.R. Liu and T.Y. Wu, *Multipoint boundary value problems by differential quadrature method*, Mathematical and Computer Modelling **35**, 215-227, 2002.
- [122] G.R. Liu and T.Y. Wu, *Differential quadrature solutions of eighth-order boundary-value differential equations*, Journal of Computational and Applied Mechanics **145**, 223-235, 2002.
- [123] M. Malik and C.W. Bert, *Vibration analysis of plates with curvilinear quadrilateral platforms by DQM using blending functions*, Journal of Sound and Vibration **230**, 949-954, 2000.
- [124] P. Malekzadeh and G. Karami, *Out-of-plane static analysis of circular arches by DQM*, International Journal of Solids and Structures **40**, 6527-6545, 2003.
- [125] P. Malekzadeh and G. Karami, *Vibration of non-uniform thick plates on elastic foundation by differential quadrature method*, Engineering Structures **26**, 1473-1482, 2004.
- [126] P. Malekzadeh and G. Karami, *Polynomial and harmonic differential quadrature methods for free vibration of variable thickness thick skew plates*, Engineering Structures **27**, 1563-1574, 2005.
- [127] P. Malekzadeh and G. Karami, *Differential quadrature nonlinear analysis of skew composite plates based on FSDT*, Engineering Structures **28**, 1307-1318, 2006.
- [128] P. Malekzadeh and S.A. Shahpari, *Free vibration analysis of variable thickness thin and moderately thick plates with elastically restrained edges by DQM*, Thin-Walled Structures **43**, 1037-1050, 2005.
- [129] M. Meštrovič, *Generalized differential quadrature for the beam with varying cross section*, Fifth World Congress on Computational Mechanics, July 7-12-2002, Vienna, Austria.
- [130] P. Mirfakhraei and D. Redekop, *Buckling of circular cylindrical shells by the differential quadrature method*, International Journal of Pressure Vessels and Piping **75**, 347-353, 1998.

- [131] T.Y. Ng and K.Y. Lam, *Free vibration analysis of rotating circular cylindrical shells on elastic foundation*, Journal of Vibration and Acoustics **122**, 85-89, 2000.
- [132] T.Y. Ng, H. Li and K.Y. Lam, *Generalized differential quadrature method for the free vibration of rotating composite laminated conical shell with various boundary conditions*, International Journal of Mechanical Sciences **45**, 567-587, 2003.
- [133] T.Y. Ng, H. Li, K.Y. Lam and C.T. Loy, *Parametric instability of conical shells by the generalized differential quadrature method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **44**, 819-837, 1999.
- [134] C.H.W. Ng, Y.B. Zhao and G.W. Wei, *Comparison of discrete convolution and generalized differential quadrature for the vibration analysis of rectangular plates*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **193**, 2483-2506, 2004.
- [135] J.R. Quan and C.T. Chang, *New insights in solving distributed system equations by the quadrature method – I. Analysis*, Computers and Chemical Engineering **13**, 779-788, 1989.
- [136] J.R. Quan and C.T. Chang, *New insights in solving distributed system equations by the quadrature method – II. Numerical experiments*, Computers and Chemical Engineering **13**, 1017-1024, 1989.
- [137] D. Redekop, *Vibration analysis of a torus-cylinder shell assembly*, Journal of Sound and Vibration **277**, 919-930, 2004.
- [138] D. Redekop, *Buckling analysis of an orthotropic thin shell of revolution using differential quadrature*, International Journal of Pressure Vessels and Piping **82**, 618-624, 2005.
- [139] D. Redekop, *Three-dimensional free vibration analysis of inhomogeneous thick orthotropic shells of revolution using differential quadrature*, Journal of Sound and Vibration **291**, 1029-1040, 2006.
- [140] D. Redekop and B. Xu, *Vibrational analysis of toroidal panels using the differential quadrature method*, Thin-Walled Structures **34**, 217-231, 1999.
- [141] C. Shu, *Generalized differential-integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation*, PhD Thesis, University of Glasgow, 1991.
- [142] C. Shu, *Free vibration analysis of composite laminated conical shells by generalized differential quadrature*, Journal of Sound and Vibration **194**, 587-604, 1996.

- [143] C. Shu, *An efficient approach for free vibration analysis of conical shells*, International Journal of Mechanical Sciences **38**, 935-949, 1996.
- [144] C. Shu, *Application of differential quadrature method to simulate natural convection in a concentric annulus*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **30**, 977-993, 1999.
- [145] C. Shu, *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*, Springer: Berlin, 2000.
- [146] C. Shu and W. Chen, *On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates*, Journal of Sound and Vibration **222**, 239-257, 1999.
- [147] C. Shu, W. Chen and H. Du, *Free vibration analysis of curvilinear quadrilateral plates by the differential quadrature method*, Journal of Computational Physics **163**, 452-466, 2000.
- [148] C. Shu, W. Chen, H. Xue and H. Du, *Numerical study of grid distribution effect on accuracy of DQ analysis of beams and plates by error estimation of derivative approximation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **51**, 159-179, 2001.
- [149] C. Shu and Y.T. Chew, *Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems*, Computations in Numerical Methods in Engineering **13**, 643-653, 1997.
- [150] C. Shu and Y.T. Chew, *On the equivalence of generalized differential quadrature and highest order finite difference scheme*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **155**, 249-260, 1998.
- [151] C. Shu, Y.T. Chew, B.C. Khoo and K.S. Yeo, *Application of GDQ scheme to simulate incompressible viscous flows around complex geometries*, Mechanics Research Communications **22**, 319-325, 1995.
- [152] C. Shu, Y.T. Chew and Y. Liu, *An efficient approach for numerical simulation of flows in Czochralski crystal growth*, Journal of Crystal Growth **181**, 427-436, 1997.
- [153] C. Shu, H. Ding and K.S. Yeo, *Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **192**, 941-954, 2003.

- [154] C. Shu, H. Ding and K.S. Yeo, *Solution of partial differential equations by a global radial basis function-based differential quadrature method*, Engineering Analysis with Boundary Elements **28**, 1217-1226, 2004.
- [155] C. Shu and H. Du, *Implementation of clamped and simply supported boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of beams and plates*, International Journal of Solids and Structures **34**, 819-835, 1997.
- [156] C. Shu and H. Du, *A generalized approach for implementation general boundary conditions in the GDQ free vibration analysis of plates*, International Journal of Solids and Structures **34**, 837-846, 1997.
- [157] C. Shu and H. Du, *Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM*, Composites Part B **28B**, 267-274, 1997.
- [158] C. Shu, B.C. Khoo, Y.T. Chew and K.S. Yeo, *Numerical studies of unsteady boundary layer flows past an impulsively started circular cylinder by GDQ and GIQ approaches*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **135**, 229-241, 1996.
- [159] C. Shu and B.E. Richards, *Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **15**, 791-798, 1992.
- [160] C. Shu and C.M. Wang, *Treatment of mixed and nonuniform boundary conditions in GDQ vibration analysis of rectangular plates*, Engineering Structures **21**, 125-134, 1999.
- [161] C. Shu and K.H.A. Wee, *Numerical simulation of natural convection in a square cavity by SIMPLE-generalized differential quadrature method*, Computers and Fluids **31**, 209-226, 2002.
- [162] C. Shu and H. Xue, *Explicit computation of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature*, Journal of Sound and Vibration **204**, 549-555, 1997.
- [163] C. Shu and H. Xue, *Comparison of two approaches for implementing stream function boundary conditions in DQ simulation of natural convection in a square cavity*, International Journal of Heat and Fluid Flow **19**, 59-68, 1998.
- [164] C. Shu and H. Xue, *Solution of Helmholtz equation by differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **175**, 203-212, 1999.
- [165] C. Shu, H. Xue and Y.D. Zhu, *Numerical study of natural convection in an eccentric annulus between a square outer cylinder and a circular inner cylinder*

- using *DQ method*, International Journal of Heat and Mass Transfer **44**, 3321-3333, 2001.
- [166] C. Shu, Q. Yao and K.S. Yeo, *Block-marching in time with DQ discretization: an efficient method for time-dependent problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **191**, 4587-4597, 2002.
- [167] C. Shu, K.S. Yeo and Q. Yao, *On the performance of three iterative methods for solution of GDQ algebraic equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **167**, 1-15, 1998.
- [168] C. Shu and Y.D. Zhu, *Efficient computation of natural convection in a concentric annulus between an outer square cylinder and an inner circular cylinder*, International Journal for Numerical Methods in Fluids **38**, 429-445, 2002.
- [169] Z.A. Siddiqi and A.R. Kukreti, *Analysis of eccentrically stiffened plates with mixed boundary conditions using differential quadrature method*, Applied Mechanical Modelling **22**, 251-275, 1998.
- [170] A.G. Striz, W.L. Chen and C.W. Bert, *Static analysis of structures by the quadrature element method*, International Journal of Solid and Structures **31**, 2807-2818, 1994.
- [171] A.G. Striz, W.L. Chen and C.W. Bert, *Free vibration of plates by the high accuracy element method*, Journal of Sound and Vibration **202**, 689-702, 1997.
- [172] A.G. Striz, X. Wang and C.W. Bert, *Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components*, Acta Mechanica **111**, 85-94, 1995.
- [173] T.M. Teo and K.M. Liew, *A differential quadrature procedure for three-dimensional buckling analysis of rectangular plates*, International Journal of Solids and Structures **36**, 1149-1168, 1999.
- [174] V.S. Thankam, G. Singh, G.V. Rao and A.K. Rath, *Shear flexible element based on coupled displacement field for large deflection analysis of laminated plates*, Computers and Structures **81**, 309-320, 2003.
- [175] S. Tomasiello, *Differential quadrature method: application to initial-boundary-value problems*, Journal of Sound and Vibration **218**, 573-585, 1998.
- [176] S. Tomasiello, *Stability and accuracy of the iterative differential quadrature method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **58**, 1277-1296, 2003.

- [177] S. Tomasiello, *Simulating non-linear coupled oscillators by an iterative differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **265**, 507-525, 2003.
- [178] E. Viola and E. Artioli, *The G.D.Q. method for the harmonic dynamic analysis of rotational shell structural elements*, Structural Engineering and Mechanics **17**, 789-817, 2004.
- [179] E. Viola, E. Artioli and M. Dilena, *Analytical and differential quadrature results for vibration analysis damaged circular arches*, Journal of Sound and Vibration **288**, 887-906, 2005.
- [180] E. Viola, M. Dilena and F. Tornabene, *Analytical and Numerical Results for Vibration Analysis of Multi-stepped and Multi-damaged Circular Arches*, Journal of Sound and Vibration **299**, 143-163, 2007.
- [181] E. Viola and F. Tornabene, *Vibration Analysis of Damaged Circular Arches with Varying Cross-section*, Structural Integrity and Durability **1**, 155-169, 2005.
- [182] E. Viola and F. Tornabene, *Vibration Analysis of Conical Shell Structures Using GDQ Method*, Far East Journal of Applied Mathematics **25**, 23-39, 2006.
- [183] E. Viola and F. Tornabene, *Dynamical Analysis of Spherical Shell Structural Elements Using the First Order Shear Deformation Theory*, Mechanical Vibration: Where do we stand?, CISM courses and lectures **488**, 17-41, ed. by I. Elishakoff, Springer-Wien, New York, 2007.
- [184] J. Wang, K.M. Liew, M.J. Tan and S. Rajendran, *Analysis of rectangular laminated composite plates via FSDT meshless method*, International Journal of Mechanical Sciences **44**, 1275-1293, 2002.
- [185] X. Wang, *Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **196**, 2242-2251, 2007.
- [186] X. Wang and C.W. Bert, *A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates*, Journal of Sound and Vibration **162**, 566-572, 1993.
- [187] X. Wang, C.W. Bert and A.G. Striz, *Differential quadrature analysis of deflection, buckling and free vibration of beams and rectangular plates*, Computers and Structures **48**, 473-479, 1993.
- [188] X. Wang, C.W. Bert and A.G. Striz, *Buckling and vibration analysis of skew plates by differential quadrature method*, AIAA Journal **32**, 886-889, 1994.

- [189] X. Wang, F. Liu, X. Wang and L. Gan, *New approaches in application of differential quadrature method to fourth-order differential equations*, Communications in Numerical Methods in Engineering **21**, 61-71, 2005.
- [190] X.H. Wang and D. Redekop, *Natural frequencies and mode shapes for an orthotropic thin shell of revolution*, Thin-Walled Structures **43**, 735-750, 2005.
- [191] X. Wang, A.G. Striz and C.W. Bert, *Free vibration analysis of annular plates by the DQ Method*, Journal of Sound and Vibration **164**, 173-175, 1993.
- [192] X. Wang, M. Tan and Y. Zhou, *Buckling analyses of anisotropic plates and isotropic skew plates by the new version differential quadrature method*, Thin-Walled Structures **41**, 15-29, 2003.
- [193] X. Wang and Y. Wang, *On non-linear behaviour of spherical shallow shells bonded with piezoelectric actuators by the differential quadrature element method (DQEM)*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **53**, 1477-1490, 2002.
- [194] X. Wang and Y. Wang, *Re-analysis of free vibration of annular plates by the new version of differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **278**, 685-689, 2004.
- [195] X. Wang and Y. Wang, *Free vibration analyses of thin sector plates by the new version of differential quadrature method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **193**, 1133-1141, 2004.
- [196] X. Wang, Y. Wang and Y. Zhou, *Application of a new differential quadrature element method to free vibration analysis of beams and frame structures*, Journal of Sound and Vibration **269**, 1133-1141, 2004.
- [197] X.H. Wang, B. Xu and D. Redekop, *Theoretical natural frequencies and mode shapes for thin and thick curved pipes and toroidal shells*, Journal of Sound and Vibration **292**, 424-434, 2006.
- [198] X. Wang, J. Yang and J. Xiao, *On free vibration analysis of circular annular plates with non-uniform thickness by the differential quadrature method*, Journal of Sound and Vibration **184**, 547-551, 1995.
- [199] Y. Wang, R. Liu and X. Wang, *On free vibration analysis of non-linear piezoelectric circular shallow spherical shells by the differential quadrature element method*, Journal of Sound and Vibration **245**, 179-185, 2001.

- [200] Y. Wang, X. Wang and Y. Zhou, *Static and free vibration analysis of rectangular plates by the new version of the differential quadrature element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **59**, 1207-1226, 2004.
- [201] C.P. Wu and S.J. Chiu, *Thermally induced dynamic instability of laminated composite conical shells*, International Journal of Solids and Structures **39**, 3001-3021, 2002.
- [202] C.P. Wu and C.Y. Lee, *Differential quadrature solution for the three vibration analysis of laminated conical shells with variable stiffness*, International Journal of Mechanical Sciences **43**, 1853-1869, 2001.
- [203] C.P. Wu, Y.C. Hung and J.Y. Lo, *A refined asymptotic theory of laminated conical shells*, European Journal of Mechanics A/Solids **21**, 281-300, 2002.
- [204] C.P. Wu and Y.H. Tsai, *Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells*, European Journal of Mechanics A/Solids **23**, 283-299, 2004.
- [205] T.Y. Wu and G.R. Liu, *A differential quadrature as a numerical method to solve differential equations*, Computational Mechanics **24**, 197-205, 1999.
- [206] T.Y. Wu and G.R. Liu, *Axisymmetric bending solution of shells of revolution by the generalized differential quadrature rule*, International Journal of Pressure Vessels and Piping **77**, 149-157, 2000.
- [207] T.Y. Wu and G.R. Liu, *Free vibration analysis of circular plates with variable thickness by the generalized differential quadrature rule*, International Journal of Solids and Structures **38**, 7967-7980, 2001.
- [208] T.Y. Wu and G.R. Liu, *The generalized differential quadrature rule for fourth-order differential equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **50**, 1907-1929, 2001.
- [209] T.Y. Wu, G.R. Liu, Y.Y. Wang, *Application of the generalized differential quadrature rule to initial-boundary-value problems*, Journal of Sound and Vibration **264**, 883-891, 2003.
- [210] T.Y. Wu, Y.Y. Wang and G.R. Liu, *Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **191**, 5265-5380, 2002.
- [211] X. Wu and W. Kong, *A highly accurate linearized method for free boundary problems*, Computers and Mathematics with Applications **50**, 1241-1250, 2005.

- [212] X. Wu and Y. Shen, *Differential quadrature domain decomposition method for a class of parabolic equations*, Computers and Mathematics with Applications **48**, 1819-1832, 2004.
- [213] B. Xu and D. Redekop, *Natural frequencies of an orthotropic thin toroidal shell of elliptical cross-section*, Journal of Sound and Vibration **293**, 440-448, 2006.
- [214] J.Z. Zhang, T.Y. Ng and K.M. Liew, *Three-dimensional theory of elasticity for free vibration analysis of composite laminates via layerwise differential quadrature modelling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **57**, 1819-1844, 2003.
- [215] H.Z. Zhong, *Free vibration analysis of isosceles triangular Mindlin plates by the triangular differential quadrature*, Journal of Sound and Vibration **237**, 697-708, 2000.
- [216] H. Zhong, *Triangular differential quadrature and its application to elastostatic analysis of Reissner plates*, International Journal of Solids and Structures **38**, 2821-2832, 2001.
- [217] H. Zhong, *Spline-based differential quadrature for fourth order differential equations and its application to Kirchhoff plates*, Applied Mechanical Modelling **28**, 353-366, 2004.
- [218] Y.D. Zhu, C. Shu, J. Qiu and J. Tani, *Numerical simulation of natural convection between two elliptical cylinders using DQ method*, International Journal of Heat and Mass Transfer **47**, 797-808, 2004.
- [219] Z. Zong, *A variable order approach to improve differential quadrature accuracy in dynamic analysis*, Journal of Sound and Vibration **266**, 307-323, 2003.
- [220] Z. Zong and K.Y. Lam, *A localized differential quadrature (LDQ) method and its application to the 2D wave equation*, Computational Mechanics **29**, 382-391, 2002.
- [221] Z. Zong, K.Y. Lam and Y.Y. Zhang, *A multidomain differential quadrature approach to plane elastic problems with material discontinuities*, Mathematical and Computer Modelling **41**, 539-553, 2005.
- [222] G.P. Zou and S.S.E. Lam, *Post-buckling analysis of imperfect laminates using finite strips based on a higher-order plate theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering **56**, 2265-2278, 2003.

\* \* \*

- [223] A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, 1944.

- [224] I.S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1956.
- [225] S.G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, 1981.
- [226] J.L. Sanders, *An Improved First Approximation Theory of Thin Shells*, NASA TR-R24, Washington D.C., 1959.
- [227] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
- [228] W. Flügge, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, 1960.
- [229] A.L. Gol'Denveizer, *Theory of Elastic Thin Shells*, Pergamon Press, 1961.
- [230] V.V. Novozhilov, *Thin Shell Theory*, P. Noordhoff, 1964.
- [231] V.Z. Vlasov, *General Theory of Shells and Its Applications in Engineering*, NASA TT F-99, Washington D.C., 1964.
- [232] H. Kraus, *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, 1967.
- [233] A.W. Leissa, *Vibration of Plates*, NASA SP-160, Washington D.C., 1969.
- [234] A.W. Leissa, *Vibration of Shells*, NASA SP-288, Washington D.C., 1973.
- [235] L.H. Donnel, *Beams, Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1976.
- [236] F.I. Niordson, *Shell Theory*, North-Holland, 1985.
- [237] Š. Markuš, *The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells*, Elsevier, 1988.
- [238] E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells*, Marcel Dekker, 2001.
- [239] P.L. Gould, *Finite Element Analysis of Shells of Revolution*, Pitman Publishing, 1985.
- [240] P.L. Gould, *Analysis of Shells and Plates*, Prentice Hall, 1999.
- [241] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor & Francis, 1999.
- [242] C.M. Wang, J.N. Reddy and K.H. Lee, *Shear Deformable Beams and Plates*, Elsevier, 2000.
- [243] W. Soedel, *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker, 2004.
- [244] H. Li, K.Y. Lam and T.Y. Ng, *Rotating Shell Dynamics*, Elsevier, 2005.
- [245] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press, 2 ed., 2003.
- [246] A.K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*, CRC Press, 1997.
- \* \* \*
- [247] S. Abrate, *Free vibration, buckling, and static deflection of functionally graded plates*, *Composite Science and Technology* **66**, 2383-2394, 2006.

- [248] R.A. Arciniega, J.N. Reddy, *Large deformation analysis of functionally graded shells*, International Journal of Solids and Structures **44**, 2036-2052, 2007.
- [249] R.K. Bhargale, N. Ganesan and C. Padmanabhan, *Linear thermoelastic buckling and free vibration behaviour of functionally graded truncated conical shells*, Journal of Sound and Vibration **292**, 341-371, 2006.
- [250] A.J.M. Ferreira, R.C. Batra, C.M.C. Roque, L.F. Qian and R.M.N. Jorge, *Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method*, Composite Structures **75**, 593-600, 2006.
- [251] R. Kadoli and N. Ganesan, *Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected a temperature-specified boundary condition*, Journal of Sound and Vibration **289**, 450-480, 2006.
- [252] X.Q. He, T.Y. Ng, S. Sivashanker and K.M. Liew, *Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators*, International Journal of Solids and Structures **38**, 1641-1655, 2001.
- [253] K.M. Liew, X.Q. He and S. Kitipornchai, *Finite element method for the feedback control of FGM shells in the frequency domain via piezoelectric sensors and actuators*, Computer methods in Applied Mechanics and Engineering **193**, 257-273, 2004.
- [254] H.M. Navazi, H. Haddadpour and M. Rasekh, *An analytical solution for nonlinear cylindrical bending of functionally graded plates*, Thin-Walled Structures **44**, 1129-1137, 2006.
- [255] T.Y. Ng, K.Y. Lam, K.M. Liew and J.N. Reddy, *Dynamic stability analysis of functionally graded cylindrical shells under periodic axial loading*, International Journal of Solids and Structures **38**, 1295-1309, 2001.
- [256] B.P. Patel, S.S. Gupta, M.S. Loknath and C.P. Kadu, *Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory*, Composite Structures **69**, 259-270, 2005.
- [257] J.L. Pelletier and S.S. Vel, *An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells*, International Journal of Solids and Structures **43**, 1131-1158, 2006.
- [258] S.C. Pradhan, *Vibration suppression of FGM shells using embedded magnetostrictive layers*, International Journal of Solids and Structures **42**, 2465-2488, 2005.

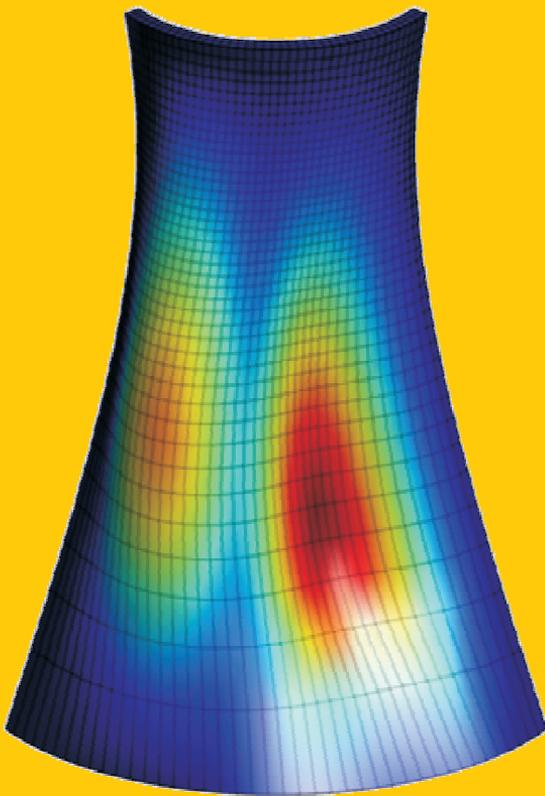
- [259] T. Prakash and M. Ganapathi, *Supersonic flutter characteristics of functionally graded flat panels including thermal effect*, *Composite Structures* **72**, 10-18, 2006.
- [260] M.C. Ray and H.M. Sachade, *Finite element analysis of smart functionally graded plates*, *International Journal of Solids and Structures* **43**, 5468-5484, 2006.
- [261] C.M.C. Roque, A.J.M. Ferreira and R.M.N. Jorge, *A radial basis function for the free vibration analysis of functionally graded plates using refined theory*, *Journal of Sound and Vibration* **300**, 1048-1070, 2007.
- [262] H.S. Shen, *Postbuckling analysis of pressure-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments*, *Engineering Structures* **25**, 487-497, 2003.
- [263] A.H. Sofiyev, *The stability of functionally graded truncated conical shells subjected to aperiodic impulsive loading*, *International Journal of Solids and Structures* **41**, 3411-3424, 2004.
- [264] A.H. Sofiyev, *The stability of compositionally graded ceramic-metal cylindrical shells under aperiodic axial impulsive loading*, *Composite Structures* **69**, 247-257, 2005.
- [265] A.H. Sofiyev, *Thermoelastic stability of functionally graded truncated conical shells*, *Composite Structures* **77**, 56-65, 2007.
- [266] J. Woo and S.A. Meguid, *Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells*, *International Journal of Solids and Structures* **38**, 7409-7421, 2001.
- [267] J. Woo, S.A. Meguid, J.C. Stranart and K.M. Liew, *Thermomechanical postbuckling analysis of moderately thick functionally graded plates and shallow shells*, *International Journal of Mechanical Sciences* **47**, 1147-1171, 2005.
- [268] J. Yang and H.S. Shen, *Free vibration and parametric resonance of shear deformable functionally graded cylindrical panels*, *Journal of Sound and Vibration* **261**, 871-893, 2007.
- [269] A.M. Zenkour, *Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates*, *Applied Mathematical Modelling* **30**, 67-84, 2006.

\* \* \*

- [270] M.R. Spiegel, *Analisi Vettoriale*, ETAS Libri, 1975.
- [271] M.M. Lipshutz, *Geometria Differenziale*, ETAS Libri, 1984.
- [272] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.
- [273] G. Monetato, *Fondamenti di Calcolo Numerico*, Levrotto & Bella, 1990.

- [274] V. Comincioli, *Analisi Numerica*, McGraw-Hill, 1990.
- [275] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4 ed., vol. 1-2, McGraw-Hill, 1991.
- [276] A. Carpinteri, *Calcolo Automatico delle Strutture*, Pitagora, 1997.
- [277] E. Viola, *Scienza delle Costruzioni. Teoria dell'Elasticità*, Pitagora, 1990.
- [278] E. Viola, *Scienza delle Costruzioni. Teoria della Trave*, Pitagora, 1992.
- [279] E. Viola, *Fondamenti di Analisi Matriciale delle Strutture*, Pitagora, 1996.
- [280] E. Viola, *Fondamenti di Dinamica e Vibrazione delle Strutture. Sistemi Discreti*, Pitagora, 2001.
- [281] E. Viola, *Fondamenti di Dinamica e Vibrazione delle Strutture. Sistemi Continui*, Pitagora, 2001.





La presente tesi dottorale scaturisce dall'esperienza maturata nel corso dei tre anni del Dottorato di Ricerca in "Meccanica delle Strutture". Il titolo, *Modellazione e Soluzione di Strutture a Guscio in Materiale Anisotropo*, illustra il tema trattato e la prospettiva seguita nella scrittura della tesi in parola. Il presente elaborato, nato dall'interesse di approfondire temi in parte affrontati nel corso di Scienza delle Costruzioni e nella redazione della tesi di Laurea, si pone come obiettivo quello di analizzare il comportamento dinamico dei gusci moderatamente spessi in materiale anisotropo attraverso l'applicazione del *Metodo Generalizzato di Quadratura Differenziale* (GDQ Method). La trattazione teorica fa riferimento alla teoria di Reissner-Mindlin, nota in letteratura come "*First-order Shear Deformation Theory*" (FSDT).

Una particolare attenzione viene riservata oltre che ai compositi fibrosi e laminati anche ai "*functionally graded materials*" (FGM). Essi risultano materiali non omogenei, caratterizzati da una variazione continua delle proprietà meccaniche lungo una particolare direzione.

La soluzione numerica GDQ viene confrontata con i risultati presenti in letteratura e con quelli forniti e ricavati mediante l'utilizzo di diversi programmi di calcolo strutturale basati sul metodo agli elementi finiti (FEM): Abaqus, Ansys, Nastran, Pro/Mechanica, Straus.

