

*Alma Mater Studiorum – Università di Bologna*

**DOTTORATO DI RICERCA**

**In FISICA**

**Ciclo XVIII**

**Settore/i scientifico disciplinari di afferenza:**

**FISICA TEORICA E FONDAMENTI DELLA FISICA (FIS/02, FIS/08)**

**Campo gravitazionale uniforme e sistemi di  
riferimento uniformemente accelerati**

**Presentata da: ALBERICI MARCO**

**Coordinatore Dottorato**

**Prof. Fabio Ortolani**

**Relatore**

**Prof. Fiorenzo Bastianelli**

**Esame finale anno 2009**



# Indice

<b>Formalismo e convenzioni</b>	pag. 1
<b>Sommario</b>	pag. 2
<b>Introduzione</b>	pag. 3
<b>1 Geometria della gravitazione</b>	pag. 7
1.1 Coordinate e tensori	pag. 8
1.2 Trasporto parallelo e connessione	pag. 11
1.3 Geodetiche	pag. 15
1.4 Metrica	pag. 17
1.5 Curvatura	pag. 21
1.6 L'equazione di campo	pag. 23
<b>2 Gravità ed accelerazione uniforme</b>	pag. 27
2.1 Riferimenti uniformemente accelerati nella RR	pag. 29
2.2 Principio di equivalenza	pag. 38
2.3 Campo gravitazionale uniforme (metrica di Desloge)	pag. 41
2.4 SR uniformemente accelerato (metrica di Rindler)	pag. 50
2.5 Accelerazione gravitazionale metrica di Rindler	pag. 52
2.6 Accelerazione gravitazionale propria costante	pag. 57
2.7 Accelerazione gravitazionale coordinata costante	pag. 61
2.8 Un confronto con la metrica di Schwarzschild	pag. 63
<b>3 Sistema di riferimento in caduta libera</b>	pag. 67
3.1 Iperboli di Rindler	pag. 69
3.2 Invarianza di Lorentz	pag. 73
3.3 Intervalli di tempo propri	pag. 75
3.4 Distanza radar fra due iperboli di Rindler	pag. 78

3.5 Confronto fra orologi e dilatazione dei tempi	pag. 82
3.6 Dilatazione spaziale	pag. 85
3.7 Accelerazione di gravità	pag. 87
3.8 Proprietà della metrica	pag. 91
<b>4 Deflessione della luce e caduta libera</b>	pag. 95
4.1 Traiettoria di un raggio di luce	pag. 97
4.2 Traiettoria di un corpo in caduta libera	pag. 107
<b>5 Metrica di una distribuzione a simmetria piana</b>	pag. 111
5.1 Il caso bidimensionale	pag. 113
5.2 Il caso quadridimensionale	pag. 115
5.3 Metrica di Rindler	pag. 121
5.4 Metrica di Amundsen	pag. 123
5.5 Metrica di Desloge	pag. 126
5.6 Quale metrica?	pag. 129
5.7 Il teorema di Birkhoff	pag. 137
5.8 Geodetiche	pag. 141
<b>6 Conclusioni</b>	pag. 145
<b>Appendice</b>	pag. 147
Geodetiche nello spazio 4-dimensionale	pag. 147
<b>Bibliografia</b>	pag. 149

# Formalismo e convenzioni

Si assume che il lettore abbia familiarità con i fondamenti della relatività ristretta e generale e con le regole del calcolo tensoriale.

Tuttavia, al fine di fornire un collegamento quanto più diretto possibile con le applicazioni didattiche nelle scuole secondarie, nella maggioranza dei capitoli si è utilizzato volutamente un formalismo piuttosto semplice, che spesso non richiede nozioni avanzate di fisica e di matematica. Si è cercato anche di utilizzare una notazione quanto più possibile omogenea, tuttavia, per fornire un riferimento rapido e per meglio orientare il lettore che desiderasse saltare delle parti, richiameremo qui le convenzioni più frequentemente usate, evidenziando soprattutto quelle meno usuali. Per quanto riguarda molte delle formule della relatività generale, rimandiamo invece al primo capitolo di questa tesi.

- **Unità di misura:** ad esclusione della parte iniziale, nei primi due capitoli, le unità di misura sono quelle del sistema internazionale, al fine di confrontare i risultati con altre pubblicazioni. Inoltre, per alleggerire la notazione, useremo quasi sempre unità  $\hbar = c = 1$ .

## Simbologia essenziale:

- Metrica: segnatura  $(+---)$ ;  $\eta_{00} = 1$ ;  $\eta_{ii} = -1$ .

- Derivata di un tensore  $A^\alpha_{\beta,\mu} = \frac{\partial A^\alpha_\beta}{\partial x^\mu}$

- Derivata covariante di un tensore  $A^\alpha_{\beta;\mu} = A^\alpha_{\beta,\mu} + \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} A^\lambda_\beta - \Gamma^\lambda_{\beta\mu} A^\alpha_\lambda$

- Determinante del tensore metrico:  $g = -\det g_{\mu\nu}$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Per uniformarsi alla simbologia utilizzata nella maggioranza di pubblicazioni, la lettera  $g$  sarà utilizzata molto spesso anche per denotare l'accelerazione di gravità di un campo uniforme. In tale contesto non vi sarà in generale possibilità di confusione.

# Sommario

Il presente lavoro di tesi si propone di affrontare in modo approfondito lo studio dei campi gravitazionali della relatività generale (RG) che producono un'accelerazione uniforme (indipendente dalla quota e dal tempo, in un opportuno sistema di riferimento), di confrontarli con i sistemi di riferimento (SR) accelerati della relatività ristretta (RR), e di indagare sulle possibilità fisiche con cui questi campi gravitazionali possono essere realizzati.

Nel corso di quest'analisi sono stati trovati alcuni aspetti non evidenziati in precedenza nella letteratura scientifica:

- 1) la metrica di Rindler produce un campo che, osservato con misure di tipo radar, appare uniforme a un osservatore solidale con il campo stesso, ovvero con il sistema di riferimento di Rindler, (paragrafo 2.5);*
- 2) a differenza di quanto si trova in bibliografia (1), esiste più di una metrica cui corrisponde un'accelerazione che non dipende dalla coordinata di partenza (paragrafo 2.6).*

Per il campo di Rindler è stata eseguita anche un'analisi approfondita, tramite un'applicazione diretta del principio di equivalenza (PE). La metodologia utilizzata e i risultati sono un contributo originale di questa tesi e sono di grande interesse da un punto di vista didattico (capitoli 3 e 4). L'analisi conferma anche le peculiarità del campo di Rindler dimostrate nel capitolo 2.

Nel corso dell'analisi delle proprietà del campo di Rindler sono stati analizzati in modo operativo i seguenti fenomeni:

- 1) confronto del ritmo di marcia di due orologi che si trovano a una quota differente (paragrafo 3.5);*
- 2) deflessione dei raggi luminosi (paragrafo 4.1);*
- 3) traiettoria di un corpo in caduta libera (paragrafo 4.2).*

Infine, nel capitolo 5, si è indagato sulla forma della metrica di una distribuzione di massa a simmetria planare, tema sul quale non sono emersi per ora aspetti particolarmente originali, ma alcuni interessanti spunti di ricerca (paragrafi 5.6 e 5.7).

# Introduzione

Nel 1915 Albert Einstein pubblicò l'articolo che gettò le basi della teoria della relatività generale (RG). Apparentemente la teoria potrebbe sembrare un'estensione della relatività ristretta (RR), ma in realtà la struttura teorica di base è molto diversa.

La teoria della RR ha una struttura matematica molto semplice ed è fondata concettualmente su alcuni semplici esperimenti ideali (“gedanken experiments”). Questa struttura matematica corrisponde a una geometria piatta dello spazio tempo, come evidenziato da Minkowski. Malgrado questa semplicità, l'accettazione della teoria fu ostacolata dalla difficoltà dei fisici dell'epoca a superare concetti fortemente radicati nella cultura scientifica tradizionale. Grazie però a numerosi esperimenti scientifici di fisica nucleare e fisica delle particelle, fu possibile verificare le predizioni della RR e, negli anni successivi, la teoria venne largamente accettata ed entrò nella cultura scientifica così come anche in quella popolare.

La teoria della RG, ha invece una base matematica molto più sofisticata e, per molti anni, coinvolse solo una fetta piuttosto ristretta di fisici e matematici. La struttura matematica corrisponde ora a una geometria curva dello spazio tempo, in cui la geometria assume un carattere dinamico.

Tuttavia, nei ragionamenti intuitivi che hanno permesso a Einstein di dedurre la RG, il legame con la RR è molto stretto. Questo legame fra le due teorie è rappresentato essenzialmente dal principio di equivalenza (PE). Tale principio assume una rilevanza particolare se il campo gravitazionale non subisce variazioni rapide in modo da poter essere approssimato con un campo uniforme.

Questa è stata una delle ragioni principali per cui ci siamo addentrati nello studio dettagliato dei campi gravitazionali uniformi e dei SR uniformemente accelerati della RR.

Passiamo ora a una descrizione dettagliata dell'organizzazione del lavoro di tesi.

## **Capitolo 1: Geometria della gravitazione**

In questo capitolo introduttivo vengono presentati gli aspetti fondamentali della geometrizzazione dello spazio che sono alla base della teoria della RG. Lo scopo di questo breve riassunto è soprattutto quello di fornire una rapida guida di riferimento che contiene gli strumenti matematici e i concetti fisici più rilevanti utilizzati nella tesi.

## **Capitolo 2: Gravità e accelerazione uniforme**

In questo capitolo, dopo avere riassunto le caratteristiche salienti di un sistema di riferimento uniformemente accelerato della RR e aver illustrato brevemente il significato del PE, si passa all'analisi del lavoro più importante sui campi gravitazionali uniformi, che è quello di Desloge (1). In quest'articolo viene derivata una metrica cui corrisponde un'accelerazione "locale" che non dipende dalla quota di partenza, ma che dipende però dalla velocità della particella stessa.

Dalla nostra analisi è emerso che, utilizzando definizioni differenti di accelerazione (accelerazione propria o accelerazione misurata con metodi radar) è possibile identificare altre metriche in cui l'accelerazione di gravità non dipende dalla quota di partenza.

I contributi originali più importanti riguardano in particolare:

- 1) *paragrafo 2.5 Dimostrazione del fatto che la metrica di Rindler produce un campo in cui la caduta dei corpi appare uniforme a un osservatore solidale con le coordinate e che effettui misure di tipo radar.*
- 2) *paragrafo 2.6 Identificazione e caratterizzazione di una metrica che produce un campo di quadri-accelerazione la cui componente spaziale non dipende dalla quota e nemmeno dalla velocità di partenza. Tale metrica non risulta essere stata studiata in precedenza.*



### Capitolo 3: Sistema di riferimento in caduta libera

Per il campo gravitazionale uniforme, è possibile dedurre alcuni risultati della RG direttamente dal PE<sup>2</sup>. Sulla possibilità di generalizzare questo procedimento si trovano in letteratura autorevoli pareri in senso positivo (2) e negativo (3).

Abbiamo quindi analizzato la possibilità di realizzare un sistema di riferimento in caduta libera cui possa essere applicato il PE in modo non locale: un campo di questo tipo esiste ed è associato alla metrica di Rindler.

Con questo tipo di campo è possibile ricavare le espressioni corrette della dilatazione dei tempi e dello spazio previste dalla teoria della RG, senza fare ricorso al formalismo della RG stessa, e studiare la traiettoria di un corpo in caduta libera. Tale procedimento può avere interessanti applicazioni alla didattica per introdurre ai concetti della RG, o per studiare le caratteristiche di un SR accelerato della RR, ma può anche essere utile per approfondire la comprensione dei fondamenti della teoria.

I contributi originali di questo capitolo riguardano in particolare:

- 1) *paragrafo 3.5 Confronto del ritmo di marcia di orologi che si trovano a differenti altezze. L'esperimento ideale tramite cui due osservatori posti a differenti altezze confrontano i propri orologi è presentato in modo puramente operativo.*
- 2) *paragrafo 3.7 Dimostrazione che un campo di Rindler appare uniforme a un osservatore che si trovi a riposo con le masse che generano il campo stesso e che effettui solo misure di tipo radar.*<sup>3</sup>

Il capitolo si chiude con la discussione di alcune proprietà della metrica di un campo gravitazionale di Rindler, ricavate anche queste in modo “operativo”.

---

<sup>2</sup> Nel 1974 H. E. Price dedusse per primo la formula del redshift gravitazionale (10) dal solo principio di equivalenza.

<sup>3</sup> Questo conferma in modo più rigoroso il risultato provato in modo meno evidente nel corso del secondo capitolo.

## **Capitolo 4: Deflessione della luce e caduta libera**

Nei due paragrafi di questo capitolo, sono state studiate le traiettorie descritte da un raggio luminoso e da un proiettile, come sarebbero osservate da un osservatore a riposo con un campo di Rindler che effettui misure di tipo radar. La metodologia si basa sull'applicazione diretta del PE, così come fatto nel capitolo precedente. La verifica che le traiettorie, ora estese anche a direzioni perpendicolari al campo, non dipendono dalla quota di partenza, costituisce una conferma del risultato dimostrato nei capitoli precedenti, sulle misure di tipo radar effettuate da un osservatore solidale con il campo di Rindler. Le applicazioni presentate in questo capitolo possono essere sicuramente utilizzate nella didattica e rappresentano un contributo originale della tesi, almeno dal punto di vista formale.

## **Capitolo 5: Metrica di una distribuzione a simmetria piana**

Qui sono state analizzate le soluzioni dell'equazione di campo di Einstein che corrispondono a una distribuzione di massa a simmetria planare. Le motivazioni di questo studio risiedono nel fatto che nella fisica newtoniana questo tipo di distribuzione di massa produce un campo gravitazionale uniforme. Dall'analisi dettagliata dell'equazione di campo, emerge in modo chiaro che, nel caso dello spazio fisico (a 3 dimensioni spaziali) con costante cosmologica nulla, esistono due soluzioni distinte, una delle quali è quella di Rindler<sup>4</sup>. Sono stati quindi analizzati gli elementi che potrebbero discriminare quale fra le due soluzioni sia quella associabile a una distribuzione di massa a simmetria planare, ma al momento non sembrano emergere elementi sufficienti per escludere nessuna delle due possibilità.

## **Conclusioni**

In questo capitolo si sintetizza il significato dei risultati più importanti della tesi, si analizzano le possibili linee di ricerca che possono essere intraprese sugli argomenti trattati, e i possibili sviluppi applicativi alla didattica.

---

<sup>4</sup> La metrica di Rindler ha la *caratteristica* di avere curvatura nulla (tensore di Riemann nullo in tutte le sue componenti).

# 1 Geometria della gravitazione

Per affrontare correttamente il tipo di studio che ci siamo proposti, sono necessarie alcune conoscenze di base della RG. In particolare è necessario un richiamo dei concetti geometrici utilizzati nella teoria. Lo scopo di questo capitolo è di richiamare le regole di calcolo e le interpretazioni geometriche fondamentali della teoria.

Alla base dell'interpretazione della teoria della RG, vi è infatti l'assunto secondo il quale nell'universo in cui viviamo lo spazio possa essere curvo. Lo strumento matematico per descrivere un tale tipo di spazio è lo spazio "riemanniano".

Da un punto di vista strettamente matematico, uno spazio riemanniano è una varietà differenziabile dotata di struttura geometrica. Per procedere allo studio della gravitazione come studio della geometria dello spazio, è necessario quindi sviluppare alcuni concetti relativi ad alcuni enti geometrici. In particolare approfondiremo il concetto di campo tensoriale. Daremo invece per acquisiti i concetti e le regole di calcolo della RR.

I tensori possono essere descritti tramite un formalismo assoluto del calcolo differenziale. Con questo formalismo non è necessario specificare il particolare sistema di coordinate scelto e le equazioni hanno una forma che non dipende dal particolare sistema di coordinate utilizzato. Non occorre tuttavia dimenticare che, affinché i fisici possano confrontare la teoria con l'esperienza, è indispensabile in ultima analisi descrivere i campi tensoriali tramite le sue componenti in un particolare sistema di coordinate.

## 1.1 Coordinate e tensori

In uno spazio tempo curvo non esistono sistemi di riferimento privilegiati. La scelta del sistema di coordinate da utilizzare si basa di solito sulla necessità che le soluzioni dell'equazione di campo abbiano la forma più semplice possibile. Molto spesso il sistema di coordinate che porta a una maggiore semplificazione delle formule che descrivono il problema non ha alcuna interpretazione intuitiva.

Solo dopo che il problema è stato risolto completamente tramite l'equazione di campo, risulta possibile un'interpretazione operativa, e qualche volta anche intuitiva del sistema di coordinate utilizzato per descrivere il problema.

Per descrivere un punto dello spazio tempo si utilizza la seguente notazione

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad [1.1.1]$$

dove gli indici sono posti sempre in posizione controvariante (in alto). Assegnato un particolare sistema di coordinate, ogni punto dello spazio tempo sarà quindi descritto da un insieme di 4 numeri.

E' spesso importante e necessario poter eseguire un cambio di coordinate. Affinché questa trasformazione sia fisicamente accettabile, è necessario che la trasformazione sia invertibile. Definita quindi una funzione associata al cambio di coordinate, in cui le nuove coordinate  $x''$  sono funzione delle vecchie coordinate  $x'$

$$x'^\nu = x''^\nu(x'^\mu), \quad [1.1.2]$$

deve essere anche definita una funzione inversa in cui le vecchie coordinate sono funzione delle nuove

$$x^\nu = x^\nu(x'^\mu). \quad [1.1.3]$$

Si definisce vettore controvariante  $V^\nu$  associato al punto  $x^\mu$ , un oggetto con 4 componenti che si trasforma secondo la seguente regola

$$V'^\nu(x'^\alpha) = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} V^\mu(x^\alpha), \quad [1.1.4]$$

e vettore covariante  $V_\nu$  un oggetto con 4 componenti che si trasforma secondo la seguente regola

$$V'_\nu(x'^\alpha) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\nu} V_\mu(x^\alpha). \quad [1.1.5]$$

I differenziali delle coordinate  $dx^\nu$  si trasformano invece come vettori controvarianti

$$dx'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} dx'^\mu, \quad [1.1.6]$$

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dx'^\mu. \quad [1.1.7]$$

Siccome le [1.1.6] e [1.1.7] sono una l'inverso dell'altra, possiamo anche scrivere

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha_\beta. \quad [1.1.8]$$

L'operatore differenziale  $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  si trasforma invece come un vettore covariante:

$$\partial'_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \partial_{\mu} . \quad [1.1.9]$$

I tensori di rango superiore si trasformano secondo la regola seguente

$$V'^{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \dots \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}} V^{\mu\nu\dots\lambda} \quad [1.1.10]$$

$$V'_{\alpha\beta\dots\gamma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \dots \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\gamma}} V_{\mu\nu\dots\lambda} . \quad [1.1.11]$$

Sono inoltre possibili tensori con indici controvarianti e covarianti, ognuno dei quali si trasforma con la regola corrispondente.

Poniamo l'accento inoltre che, a differenza delle trasformazioni di Lorentz della RR, in RG le trasformazioni non sono in generale delle trasformazioni lineari e omogenee. Per questa ragione la coordinata  $x^{\nu}$  non si trasforma come un vettore, ma piuttosto secondo la legge di trasformazione definita dalla [1.1.2].

## 1.2 Trasporto parallelo e connessione

In uno spazio tempo curvo la differenziazione non fornisce una quantità tensoriale. Per dimostrare questo fatto, consideriamo l'espressione di un vettore in due sistemi di coordinate

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\lambda}. \quad [1.2.1]$$

e applichiamo a essa l'operatore differenziale  $\partial_{\beta}$ :

$$\frac{\partial A'_{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x'^{\beta}} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} A_{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} A_{\lambda}. \quad [1.2.2]$$

Analizzando la [1.2.2] si nota che, oltre all'usuale termine di trasformazione dei tensori, compare un termine extra che contiene le derivate seconde delle coordinate.

Per rendersi conto del significato di questo termine consideriamo l'espressione della derivata del vettore

$$A_{\rho,\mu} = \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x^{\mu}} = \lim_{dx^{\mu} \rightarrow 0} \frac{A_{\rho}(x + dx) - A_{\rho}(x)}{dx^{\mu}}. \quad [1.2.3]$$

A numeratore compare una differenza di vettori. Se ci trovassimo in uno spazio piatto, si tratterebbe di una normale differenza e per ottenere il risultato basterebbe sottrarre fra loro le rispettive componenti dei due vettori. In presenza di una curvatura dello spazio invece, per eseguire la differenza fra i due vettori è necessario trasportare uno dei due in modo che l'origine dei due vettori coincida. In geometria curva, tale tipo di trasporto prende il nome di "trasporto parallelo".

Se consideriamo un trasporto infinitesimo, il cambiamento  $\delta A_\rho$  prodotto sul vettore  $A_\rho$  per questo tipo di trasporto sarà una funzione lineare sia di  $dx^\mu$ , che di  $A_\rho$ . Possiamo quindi scrivere

$$\delta A_\rho = \Gamma^\alpha_{\rho\beta} A_\alpha dx^\beta. \quad [1.2.4]$$

I coefficienti  $\Gamma^\alpha_{\rho\beta}$  che compaiono nella [1.2.4] prendono il nome di coefficienti di connessione affine; questo per via del fatto che il trasporto parallelo è una trasformazione di tipo affine.

Come vedremo in seguito, affinché sia possibile approssimare localmente lo spazio curvo con lo spazio piatto, è necessario che i coefficienti di connessione siano simmetrici

$$\Gamma^\alpha_{\rho\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta\rho}. \quad [1.2.5]$$

Per questa ragione, la teoria della RG nella sua versione “classica” è stata sviluppata seguendo questa ipotesi di simmetria.

Se invece i coefficienti di connessioni non sono simmetrici, si dice che siamo in presenza di “torsione” (geometrie di Einstein Cartan).

Torniamo quindi alla derivata [1.2.3] e riscriviamola sottraendo il termine dovuto al trasporto parallelo, nel modo seguente:

$$A_{\rho;\mu} = \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} \frac{A_\rho(x+dx) - A_\rho(x) - \delta A_\rho}{dx^\mu}. \quad [1.2.6]$$

Tale tipo di derivata prende il nome di “derivata covariante” e si indica con il punto e virgola per distinguerla dalla derivata “semplice”. A dispetto del nome, la derivata covariante non ha nulla a che vedere direttamente con la natura covariante o controvariante di un campo vettoriale, ma sta a indicare semplicemente che quello che si ottiene dalla derivazione covariante di un tensore  $A_{\rho;\mu}$ , è a sua volta un tensore (mentre in generale  $A_{\rho,\mu}$  non lo è).



Per questa ragione è più utile scrivere le equazioni utilizzando questo tipo di derivata, in quando le equazioni preserveranno la loro forma tensoriale, indipendentemente dal tipo di coordinate utilizzato per descrivere il problema. Sviluppando i calcoli e tenendo conto della [1.2.4], possiamo scrivere:

$$A_{\rho;\mu} = \frac{\partial A_{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\beta} A_{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu}} = A_{\rho,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu} A_{\alpha}. \quad [1.2.7]$$

Si può dimostrare che per un vettore covariante, la derivata covariante assume invece la seguente forma

$$A^{\rho}_{;\mu} = A^{\rho}_{,\mu} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} A^{\alpha}. \quad [1.2.8]$$

Se un tensore possiede invece più di un indice in posizione covariante o controvariante, nel calcolo della derivata covariante i coefficienti di connessione affine compiano più volte, secondo il seguente schema.

$$A^{\alpha\beta}_{\rho;\mu} = A^{\alpha\beta}_{\rho,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} A^{\lambda\beta}_{\rho} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} A^{\alpha\lambda}_{\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} A^{\alpha\beta}_{\lambda} \quad [1.2.9]$$

I coefficienti di connessione non sono dei tensori (anche se li abbiamo scritti con la stessa simbologia) e per cambio di coordinate si trasformano secondo una legge differente. La legge di trasformazione deve far si che la derivata covariante si comporti come un tensore, ed è la seguente:

$$\Gamma^{\prime\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}}, \quad [1.2.10]$$

che può essere scritta anche nel seguente modo:

$$\Gamma^{\prime\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\prime\sigma}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial^2 x^{\prime\sigma}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\alpha}}. \quad [1.2.11]$$

Eseguiamo ora il seguente cambio di coordinate che fissa l'origine delle coordinate nel punto  $\tilde{x}^\nu$  dove i coefficienti di connessione hanno i valori dati da  $\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu$

$$x^\nu = x^\nu - \tilde{x}^\nu + \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\nu(x^\rho - \tilde{x}^\rho)(x^\sigma - \tilde{x}^\sigma). \quad [1.2.12]$$

Utilizzando questa trasformazione (che non è una semplice traslazione) nella [1.2.11] si verifica che  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ . Tale risultato è una conseguenza matematica della simmetria dei coefficienti di connessione  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$  e vale solamente se il calcolo viene effettuato nel punto  $\tilde{x}^\nu$ .

Questo fatto ha un significato fisico molto importante. Infatti, tramite la trasformazione [1.2.12], è sempre possibile trovare riferimento in cui la derivata covariante e la derivata ordinaria coincidono. In tale riferimento lo spazio è quindi localmente equivalente a quello minkowskiano (si potrebbe anzi dire “puntualmente” piuttosto che “localmente”, per sottolineare che la [1.2.12] vale in un punto piuttosto che in un intorno per quanto piccolo del punto). La possibilità di eseguire questo tipo di trasformazione rappresenta la base matematica del PE.

Vedremo nei prossimi capitoli che l'estensione allo spazio curvo delle leggi della fisica valide in RR (spazio piatto) avviene sostanzialmente sostituendo le derivate normali con le derivate covarianti. Il significato fisico di questo fatto è contenuto nel PE, che ci dice che in ogni punto dello spazio tempo esiste un riferimento in cui localmente valgono le leggi della RR.

### 1.3 Geodetiche

In RG, assume un'importanza molto rilevante il concetto di geodetica. Da un punto di vista fisico una geodetica è una linea di universo lungo la quale si muove una particella libera, non sottoposta cioè ad altre forze ad eccezione di quella gravitazionale. In tal senso si può dire che, nell'ambito della RG, la forza gravitazionale non viene più "catalogata" come una forza, e i suoi effetti vengono studiati come effetto della curvatura dello spazio tempo. La curvatura è stata introdotta tramite l'utilizzo della geometria riemanniana. E' quindi possibile definire l'equazione delle geodetiche con due procedimenti distinti, che portano allo stesso risultato finale.

Il primo procedimento fa ricorso alla geometria affine e al concetto di trasporto parallelo, il secondo si basa sulle proprietà metriche (che non abbiamo ancora definito) dello spazio tempo ed è basato sull'individuazione della traiettoria avente lunghezza estrema.

Seguiamo il primo procedimento e consideriamo un tratto infinitesimo  $dx^\nu$  che fa parte della geodetica che vogliamo determinare. Immaginiamo quindi di trasportare  $dx^\nu$  parallelamente a se stesso di una distanza pari alla sua lunghezza. Il trasporto parallelo produrrà una variazione data da

$$\delta(dx^\nu) = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad [1.3.1]$$

Per ottenere un'equazione differenziale è però necessario che la traiettoria sia parametrizzata. Il parametro deve avere un comportamento monotono (strettamente crescente o decrescente) lungo la traiettoria. Definito  $d\lambda$  l'incremento infinitesimo di tale parametro in corrispondenza all'incremento infinitesimo iniziale  $dx^\nu$ , dividiamo la [1.3.1] per  $d\lambda^2$ . In questo modo otteniamo l'equazione differenziale che definisce una geodetica  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad [1.3.2]$$

Tramite la definizione di una metrica, risulta poi possibile dare un significato fisico al parametro  $\lambda$  e identificarlo con il tempo proprio lungo la geodetica.

## 1.4 Metrica

Nel caso dello spazio piatto, si definisce (in unità con  $c=1$ ) l'intervallo spaziotemporale infinitesimo invariante

$$ds^2 = dt^2 - dx^2, \quad [1.4.1]$$

che può essere scritto anche nel seguente modo

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad [1.4.2]$$

dove  $\eta_{\alpha\beta}$  è la metrica di Minkowski.

Si assume che nello spazio curvo esista una quantità  $g_{\mu\nu}(x)$  funzione delle coordinate (che dimostreremo essere un tensore) che generalizzi la validità della [1.4.2]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad [1.4.3]$$

L'intervallo può essere positivo (intervallo di tipo tempo) negativo (intervallo di tipo spazio) oppure nullo (intervallo di tipo luce), ma in ogni caso tale valore deve risultare invariante.

Dall'ipotesi di invarianza di  $ds^2$ , è facile dimostrare che  $g_{\mu\nu}$  è un tensore.

Infatti, in due sistemi di coordinate differenti avremo:

$$ds'^2 = ds^2 \Rightarrow g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad [1.4.4]$$

da cui si ricava immediatamente la regola di trasformazione di un tensore:

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}. \quad [1.4.5]$$

Avendo dimostrato che  $g_{\mu\nu}$  è un tensore, possiamo definire anche il tensore metrico inverso nel seguente modo

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}. \quad [1.4.6]$$

Si può mostrare anche che esiste sempre una trasformazione di coordinate che rende il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  uguale a  $\eta_{\mu\nu}$  in un punto.

Si tratta in pratica di trovare una trasformazione  $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\mu})$  che renda  $g_{\mu\nu}$  diagonale, e poi “riscalare” i termini che compongono la diagonale

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} = \eta_{\mu\nu}. \quad [1.4.7]$$

Dalla [1.4.3] si vede anche la simmetria del tensore metrico  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ .

La soluzione dell'equazione [1.4.7] ha quindi solo 10 equazioni indipendenti e la sua soluzione ci permette di trovare delle coordinate locali in cui  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

Tuttavia vogliamo sottolineare il fatto che una tale trasformazione è in grado di rendere diagonale il tensore metrico solamente in un punto. Per ricavare una trasformazione che si possa estendere a tutto lo spazio tempo, è necessario che lo spaziotempo sia piatto<sup>5</sup>. In generale, il massimo che si può ottenere è porre in un punto  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  con tutte le sue derivate prime uguali a zero ( $g_{\mu\nu,\lambda} = 0$ ).

In un sistema di riferimento in caduta libera (SRCL) si suppone che la velocità della luce sia costante ( $c=1$  nelle nostre unità) e quindi per un raggio di luce si ha  $ds^2 = 0$ . Siccome la lunghezza di tale intervallo è invariante,  $ds^2$  sarà in questo caso nullo in ogni sistema di riferimento.

---

<sup>5</sup> Uno spazio tempo piatto è caratterizzato dal fatto di avere il tensore di curvatura nullo. Formalizzeremo meglio questo concetto nel prossimo paragrafo quando introdurremo il concetto di curvatura.

Un fisico potrebbe sentirsi frustrato perché abbiamo introdotto il tensore metrico in maniera assiomatica a partire dalle proprietà matematiche. Per completare tale mancanza, definiamo una procedura operativa che permetta, in linea di principio, di determinare sperimentalmente  $g_{\mu\nu}$ .

Invertendo la [1.4.3], possiamo scrivere

$$g_{\alpha\beta} = \frac{ds^2}{dx^\alpha dx^\beta}. \quad [1.4.8]$$

Da questa espressione si vede facilmente che, con una procedura di misure “radar”, è possibile misurare teoricamente il valore di  $ds^2$  in corrispondenza di ciascuno spostamento  $dx^\alpha$ , e determinare in questo modo tutti i coefficienti di  $g_{\mu\nu}$ .

Il tensore metrico può essere utilizzato anche per trasformare le componenti di un tensore da covarianti a controvarianti e viceversa, nel seguente modo.

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu; \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad [1.4.9]$$

Tramite il tensore metrico è anche possibile calcolare il modulo di un vettore covariante o controvariante

$$A^\mu A_\mu = A_\mu A_\nu g^{\mu\nu} = A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}. \quad [1.4.10]$$

Per le leggi di trasformazione dei tensori, tale modulo deve essere invariante; si ha infatti:

$$A'^\mu A'_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} A^\nu A_\lambda = \delta_\nu^\lambda A^\nu A_\lambda = A^\mu A_\mu. \quad [1.4.11]$$

Dalle proprietà del trasporto parallelo, è inoltre possibile dimostrare che la derivata covariante del tensore metrico deve essere identicamente nulla

$$g_{\eta\nu;\gamma} = 0. \quad [1.4.12]$$

Da questo fatto è possibile ricavare una formula per il calcolo dei coefficienti di connessione. Infatti, considerando la seguente espressione

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} g_{\beta\mu} = 0, \quad [1.4.13]$$

permutando ciclicamente gli indici e combinando linearmente le 3 equazioni risultanti, si ottiene la seguente formula:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\mu\rho,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}), \quad [1.4.14]$$

che permette di effettuare il calcolo dei coefficienti di connessione di una determinata metrica  $g_{\mu\nu}$  in modo abbastanza agevole.



## 1.5 Curvatura

Il modo più semplice di evidenziare la curvatura dello spazio consiste probabilmente nel verificare che la derivazione covariante non è in generale un'operazione commutativa.

Consideriamo un campo vettoriale  $V_\mu$  e verifichiamo quanto detto con un calcolo esplicito:

$$\begin{aligned} V_{\mu;\alpha;\beta} &= (V_{\mu,\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} V_\rho)_{;\beta} = \\ &= (V_{\mu,\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} V_\rho)_{,\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} (V_{\sigma,\alpha} - \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} V_\rho) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} (V_{\mu,\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma} V_\rho). \end{aligned} \quad [1.5.1]$$

Il calcolo completo, con i due ordini di derivazione, porta al seguente risultato.

$$\begin{aligned} V_{\mu;\alpha;\beta} &= V_{\mu,\alpha,\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha,\beta} V_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} V_{\rho,\beta} - \Gamma^\sigma_{\mu\beta} V_{\sigma,\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} V_{\mu,\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\mu\sigma} V_\rho + \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} V_\rho \\ V_{\mu;\beta;\alpha} &= V_{\mu,\beta,\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\beta,\alpha} V_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\beta} V_{\rho,\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} V_{\sigma,\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} V_{\mu,\sigma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\mu\sigma} V_\rho + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \Gamma^\rho_{\sigma\beta} V_\rho. \end{aligned}$$

Sottraendo i due termini si ottiene:

$$V_{\mu;\alpha;\beta} - V_{\mu;\beta;\alpha} = (\Gamma^\rho_{\mu\beta,\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha,\beta} + \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \Gamma^\rho_{\sigma\beta}) V_\rho,$$

da cui si vede che in generale

$$V_{\mu;\alpha;\beta} \neq V_{\mu;\beta;\alpha}. \quad [1.5.2]$$

Definendo il tensore di Riemann nel seguente modo

$$R^\rho_{\mu\alpha\beta} = (\Gamma^\rho_{\mu\beta,\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha,\beta} + \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \Gamma^\rho_{\sigma\beta}), \quad [1.5.3]$$

possiamo quindi scrivere

$$V_{\mu;\alpha;\beta} - V_{\mu;\beta;\alpha} = R^{\rho}_{\mu\alpha\beta} V_{\rho}. \quad [1.5.4]$$

L'importanza del tensore di Riemann, risiede anche nel fatto notevole che è l'unico tensore che si può ottenere utilizzando combinazioni lineari delle derivate seconde della metrica. Vedremo nel prossimo paragrafo che questa proprietà è particolarmente importante per ricavare la forma dell'equazione di campo. Il tensore di Riemann gode inoltre di alcune importanti proprietà di simmetria:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}; \quad [1.5.5]$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\beta\nu\alpha} + R_{\mu\alpha\beta\nu} = 0, \quad [1.5.6]$$

e soddisfa a un'identità differenziale nota come identità di Bianchi

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta;\rho} + R^{\mu}_{\nu\rho\alpha;\beta} + R^{\mu}_{\nu\beta\rho;\alpha} = 0. \quad [1.5.7]$$

Contraendo fra loro il primo indice ed il terzo<sup>6</sup> del tensore di Riemann, è possibile ricavare un nuovo tensore a due soli indici, detto tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}, \quad [1.5.8]$$

che soddisfa alla seguente proprietà di simmetria

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad [1.5.9]$$

Un'ulteriore contrazione, da invece luogo ad uno scalare, detto scalare di curvatura.

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} \quad [1.5.10]$$

---

<sup>6</sup> Alcuni autori ottengono il tensore di Ricci contraendo il primo con l'ultimo indice, questo comporta una differenza nel segno del tensore (ed una differenza di segno anche nell'equazione di campo di Einstein).

## 1.6 L'equazione di campo

Nei paragrafi precedenti ci siamo occupati di descrivere aspetti legati alla curvatura dello spazio tempo.

In questo paragrafo affronteremo invece il problema di estendere le leggi fisiche della RR alla RG e soprattutto di stabilire come la materia interagisce con lo spazio e con la sua curvatura.

Per la RG, viene stabilito un principio di “covarianza generale”, che stabilisce che tutte le leggi fisiche possono essere formulate come equazioni covarianti rispetto alle trasformazioni di coordinate.

Formulando le leggi fisiche seguendo questo criterio, esse assumono quindi la stessa forma in qualunque sistema di coordinate.

L'estensione alla RG delle leggi della fisica formulate nella RR, avviene di norma in modo molto semplice, sostituendo a oggetti non covarianti opportune estensioni covarianti. Il caso più semplice e diffuso è rappresentato dalla sostituzione delle derivate ordinarie con quelle covarianti. Durante questo processo sarebbe possibile aggiungere termini ulteriori (ad esempio contenenti termini legati allo scalare di curvatura) che nel limite di spazio piatto spariscono. Tuttavia nell'eseguire questa estensione si adotta il principio di massima semplicità delle leggi fisiche o, come dicono alcuni, di “accoppiamento minimale” (4 p. 232) e si preferisce sempre la forma più semplice fra quelle possibili, fino a quando eventualmente gli esperimenti non richiedessero una forma più complessa delle equazioni.

La deduzione dell'equazione di campo rappresenta la parte della RG dove compare una maggiore novità rispetto alle leggi precedentemente note e la strada con cui si arriva a tale equazione non appare univoca. Cercheremo qui di illustrare quella che ci appare più semplice e intuitiva.

Supponiamo di osservare un fenomeno fisico utilizzando coordinate localmente geodetiche. In tal caso le leggi fisiche saranno descritte localmente dalla RR. In particolare la conservazione dell'impulso e

dell'energia si traduce, a livello relativistico, nella seguente legge di conservazione legata al tensore energia impulso  $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu,\nu}^{\nu} = 0. \quad [1.6.1]$$

L'estensione covariante più semplice è in questo caso la seguente:

$$T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0. \quad [1.6.2]$$

A questo punto, bisogna operare il collegamento con la geometria dello spazio. Infatti, se fino ad ora abbiamo studiato in che modo la curvatura agisce sulla materia, dovremo ora porci il problema di come la materia determina la curvatura dello spazio.

Il modo più naturale appare quello di mettere in relazione il tensore energia impulso con un nuovo tensore  $G_{\mu\nu}$  che sia legato nella maniera più semplice possibile alla geometria dello spazio

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad [1.6.3]$$

Siccome alcuni fenomeni, quali la curvatura, dipendono dalle derivate seconde della metrica, appare necessario che anche questo nuovo tensore debba contenerne le derivate seconde.

Tale tensore non può contenere solo le derivate prime della metrica, perché con queste non è possibile definire una quantità che si trasformi come un tensore (i coefficienti di connessione  $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$  contengono le derivate prime della metrica, ma non si trasformano come tensori).

Per poter procedere oltre è però necessario fare un'ulteriore ipotesi, dettata dal principio di "accoppiamento minimo" che questo tensore possa dipendere dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, ma non da quelle di ordine superiore. In particolare si richiederà che esso dipenda solo linearmente dalle derivate seconde.

Si può dimostrare che l'unico tensore che contiene in modo lineare le derivate seconde della metrica è il tensore di Riemann  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Per avere la massima generalità possibile, occorre però considerare anche il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$ , e lo scalare di curvatura  $R$ . Siccome il nuovo tensore  $G_{\mu\nu}$  che stiamo costruendo è un tensore a due indici, è facile convincersi che la sua forma più generale possibile sarà la seguente:

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad [1.6.4]$$

dove  $a, b, \Lambda$  sono delle costanti da determinare.

A causa della [1.6.2] e della [1.6.3], il tensore di Einstein deve però soddisfare alla seguente relazione

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = 0, \quad [1.6.5]$$

ma siccome  $g^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$ , tale condizione applicata alla [1.6.4] determina la seguente relazione:

$$\left(aR^{\nu}_{\mu} + bg^{\nu}_{\mu}R\right)_{;\nu} = 0. \quad [1.6.6]$$

Applicando l'identità di Bianchi alla [1.6.6] si ottiene inoltre la seguente ulteriore condizione

$$a = -2b.$$

Di conseguenza la forma più generale del tensore di Einstein risulta la seguente:

$$G_{\mu\nu} = a\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad [1.6.7]$$

Non avendo ancora determinato la costante di accoppiamento  $k$  del tensore  $G_{\mu\nu}$  con il tensore energia impulso  $T_{\mu\nu}$ , siamo però liberi di porre  $a=1$ .

E' infine possibile determinare anche il valore della costante  $k$ , richiedendo che nel limite lineare e non relativistico si abbia una corrispondenza della parte temporale del tensore energia impulso  $T_{00}$  con il potenziale Newtoniano. Con questa procedura si trova  $k=8\pi G$  (dove  $G$  è la costante di gravitazione universale) e la forma finale dell'equazione di campo risulta:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad [1.6.8]$$

Il principio di “minimo accoppiamento” imporrebbe di porre  $\Lambda=0$ , ma siccome anche un piccolo valore (non misurabile sperimentalmente su piccole scale quali quella del sistema solare) di tale costante potrebbe avere effetti enormi sull'evoluzione dell'universo, si preferisce di solito conservare questo termine, che prende il nome di “costante cosmologica”.

## 2 Gravità e accelerazione uniforme

Esiste un discreto numero di articoli e di libri che analizzano i sistemi di riferimento uniformemente accelerati (3)(5)(6)(7)(8)(9), ma un numero decisamente minore che analizza le caratteristiche fondamentali del campo gravitazionale uniforme (1)(10)(11).

Sono invece presenti numerose pubblicazioni, di cui alcune piuttosto recenti, che utilizzano un'approssimazione uniforme del campo gravitazionale per descrivere fenomeni relativistici (12)(13)(14)(15)(16)(17).

Una delle analisi più approfondite sui SR accelerati è stata fatta da Desloge e Philpott (7)(8). Noi non entreremo nei dettagli di questa pubblicazione e (paragrafo 2.1) faremo solo un breve riassunto delle proprietà più importanti dei SR accelerati nella RR.

Passeremo quindi a descrivere le peculiarità principali del PE (paragrafo 2.2), che possono costituire un collegamento fra i sistemi uniformemente accelerati della RR e i campi uniformi della RG.

Nei due paragrafi successivi riassumeremo in modo critico le parti più rilevanti dei lavori successivi di Desloge sui campi gravitazionali uniformi e sui SR accelerati (1)(9)(11).

In particolare mostreremo che l'analisi di Desloge relativa al campo gravitazionale uniforme (1) (paragrafo 2.3) si basa sullo studio dell'equazione della geodetica di una particella in caduta libera sottoposta a un'accelerazione "locale" costante (l'accelerazione che misurerebbe un osservatore a riposo con la particella e con il campo gravitazionale prima che inizi la caduta libera). Nella metrica ricavata da Desloge, l'accelerazione non si mantiene però costante durante la caduta della particella stessa.

Si analizzerà poi il caso dello spazio piatto (paragrafo 2.4), visto da un sistema di riferimento uniformemente accelerato.

La metrica che si ricava è quella di Rindler (differente da quella del campo gravitazionale uniforme ricavata da Desloge).

Noi mostreremo invece (paragrafo 2.5) che la metrica di Rindler corrisponde anche a un campo gravitazionale in cui una particella in caduta appare essere sottoposta a un'accelerazione che non dipende dalla quota di partenza, se la sua traiettoria viene misurata con metodi "radar" da un osservatore a riposo con il campo. Mostreremo anche il fatto già noto che, con un opportuno cambio di coordinate su questa metrica, si ottiene un riferimento in cui l'accelerazione propria di una particella libera si mantiene costante durante tutta la caduta.

Nel paragrafo 2.6, ricaveremo anche una metrica in cui la parte spaziale della quadri-accelerazione non dipende dalla quota di partenza e si mantiene costante durante tutta la caduta. Tale metrica, pur essendo estremamente semplice, non mi risulta sia stata catalogata precedentemente.

Per completare lo studio, illustreremo anche come si può ricavare una metrica in cui si ha un'accelerazione che non dipende dalla quota, se l'accelerazione viene misurata utilizzando direttamente le coordinate stesse (paragrafo 2.7).

Alla fine del capitolo (paragrafo 2.8) faremo inoltre un confronto dei procedimenti seguiti nei paragrafi precedenti con la metrica di Schwarzschild, mostrando come si possa dedurre tale metrica richiedendo che l'accelerazione propria di una particella in caduta libera abbia un andamento proporzionale alla forza gravitazionale newtoniana nel caso del campo centrale.

Lo scopo di questo paragrafo è soprattutto quello di fornire spunti di riflessione sulle metodologie impiegate nel capitolo.



## 2.1 Riferimenti uniformemente accelerati nella RR

Nei libri di testo di relatività, non si dedica di solito il giusto spazio ai SR accelerati, lasciando spesso al lettore la sensazione che una trattazione di tali fenomeni non sia nel dominio di competenza della RR. Questo è quantomeno sorprendente, per via del fatto che i SR accelerati sono il punto di partenza utilizzato da Einstein per dedurre la teoria della RG.

Questa mancanza contribuisce inoltre a instaurare la convinzione diffusa che per trattare moti e sistemi di riferimento di tipo accelerato sia indispensabile fare ricorso alla RG.

Il moto uniformemente accelerato (moto iperbolico) è invece un classico esempio di un problema che la RR può trattare in modo completo ed esauriente. Il discorso si potrebbe allargare anche ad altri fenomeni, quali ad esempio il moto circolare, che in molte trattazioni viene affrontato solo da un punto di vista della RG.

Per descrivere le proprietà di un sistema di riferimento accelerato, supporremo l'esistenza di SR inerziali e utilizzeremo le trasformazioni di Lorentz e le formule principali di trasformazioni che ne derivano.

Un concetto molto utile nello sviluppo della RR è il concetto di accelerazione propria (3). Essa è definita come l'accelerazione cui è sottoposto un corpo (supposto puntiforme) rispetto a un SR che si trova istantaneamente a riposo con il corpo stesso (ovvero quel SR che si muove con la stessa velocità istantanea del corpo, ma non è soggetto ad accelerazioni).

Consideriamo quindi un SR inerziale fisso  $K$ , e altri due SR che chiameremo  $S$  e  $S'$ . Il primo di questi è solidale con il corpo in movimento (e non è quindi in generale inerziale), mentre il secondo si trova istantaneamente a riposo con  $S$ , ma non è sottoposto ad accelerazioni (ed è quindi inerziale).

Siccome i nostri interessi futuri in questo lavoro sono legati allo studio di un'accelerazione costante, affronteremo il problema supponendo che l'accelerazione avvenga lungo una direzione fissa e considereremo quindi una sola dimensione spaziale.

Supponiamo che a un certo istante le velocità iniziali di S e di S' siano uguali e valgano  $v$  e che, successivamente, S abbia acquistato una velocità  $u'$  rispetto a S'. Utilizzando la formula di addizione delle velocità della RR, possiamo ricavare la velocità  $u$  di S rispetto a K

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}}. \quad [2.1.1].$$

Conoscendo invece la velocità di S rispetto a K, si può ricavare la velocità di S rispetto a S' tramite la seguente formula inversa:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}. \quad [2.1.2]$$

Differenziando la [2.1.1], ed utilizzando la [2.1.2] per eliminare  $u'$ , si trova la seguente relazione

$$du = (\gamma(u))^{-2} du', \quad [2.1.3]$$

dove abbiamo utilizzato la notazione  $\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ . Supponiamo ora che tale incremento di velocità sia generato da un'accelerazione propria  $g = du'/dt'$ . Siccome S si trova già in movimento rispetto a K, sarà presente un fattore di dilatazione temporale  $dt' = 1/\gamma(u) dt$ . Questo permette di scrivere

$$du' = g \gamma(u)^{-1} dt, \quad [2.1.4]$$

che, inserito nella [2.1.3], fornisce la seguente relazione:

$$g = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{du}{dt}. \quad [2.1.5]$$

La formula appena ricavata è molto interessante, in quanto esprime il modo con cui si trasforma l'accelerazione  $du/dt$ , a partire da un SR in quiete a un SR qualunque.

Inoltre, per due sistemi di riferimento S e S', le cui direzioni di moto coincidono con quella della particella, possiamo scrivere

$$g = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{dt} = \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{du'}{dt'}, \quad [2.1.6]$$

da cui si vede anche che l'accelerazione  $du/dt$  non è un invariante per trasformazioni di Lorentz.

Prendiamo ora in considerazione il caso di un'accelerazione propria costante, e cerchiamo di integrare le equazioni del moto. Per far ciò cominciamo col notare che l'espressione dell'accelerazione [2.1.5] può essere riscritta anche come differenziale esatto

$$g = \frac{d}{dt} [\gamma(u)u]. \quad [2.1.7]$$

Integrando otteniamo la seguente espressione

$$g t = \gamma(u)u + k \quad [2.1.8]$$

che, dopo aver posto  $k = 0$ , può essere riscritta anche come

$$u^2 = \frac{c^2 g^2 t^2}{c^2 + g^2 t^2}.$$

Integrando ulteriormente

$$x = \frac{c^2}{g} \int \sqrt{\frac{\cosh^2(s)}{1 + \cosh^2(s)}} \sinh(s) ds = \frac{c^2}{g} \sinh(s) + k$$

si ottiene il seguente risultato:

$$x = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 - \frac{g^2 t^2}{c^2}} + k, \quad [2.1.9]$$

che porta alla seguente equazione di una iperbole

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{g^2}, \quad [2.1.10]$$

nota come iperbole di Rindler (3).

Nella prima integrazione la costante è stata determinata, richiedendo che sia nulla la velocità al tempo iniziale  $t=0$ . Nella seconda integrazione, la costante è stata invece posta a zero per semplificare i calcoli. La soluzione trovata è però generale, perché una scelta differente della costante comporterebbe solamente una, sempre possibile, traslazione spaziale.

Questo tipo di moto nello spazio  $x t$  è detto “moto iperbolico”, e può essere descritto anche tramite le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{g} \cosh g \tau \\ t = \frac{1}{g} \sinh g \tau \end{cases} \quad [2.1.11]$$

In questa nuova rappresentazione,  $\tau$  rappresenta il tempo proprio misurato da un orologio solidale con i corpi in movimento, che descrivono linee di universo iperboliche, ciascuna caratterizzata da una differente accelerazione propria  $g$ . Il valore di  $\tau$  dipende dall'accelerazione  $g$  dell'iperbole relativa al corpo considerato, ed è misurato a partire dal punto d'intersezione delle iperboli con l'asse delle  $x$ . Per il calcolo di  $\tau$  è sufficiente invertire le formule [2.1.11]

$$\tau = \frac{1}{g} \sinh^{-1} g t. \quad [2.1.12]$$

Un procedimento alternativo consiste nel calcolo esplicito del tempo proprio  $d\tau = \gamma^{-1} dt$  trascorso lungo l'iperbole relativa, tramite il seguente integrale

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad [2.1.13]$$

Proseguendo la caratterizzazione delle iperboli di Rindler, deriviamo rispetto al tempo proprio la forma parametrica riportata nella [2.1.11]

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \sinh g\tau \\ \frac{dt}{d\tau} = \cosh g\tau \end{cases}, \quad [2.1.14]$$

da cui si ricava la seguente relazione fra velocità coordinata  $V$  e tempo proprio  $\tau$

$$V = \frac{dx}{dt} = \tanh g\tau. \quad [2.1.15]$$

Volendo ora definire un sistema di riferimento solidale con il corpo accelerato, è necessario che le sue parti si trovino a riposo fra loro.<sup>7</sup>

Si potrebbe essere tentati di realizzare un tale sistema di riferimento utilizzando un insieme di punti che si muovono tutti con la stessa accelerazione propria, ma spazialmente dislocati in posizioni differenti.

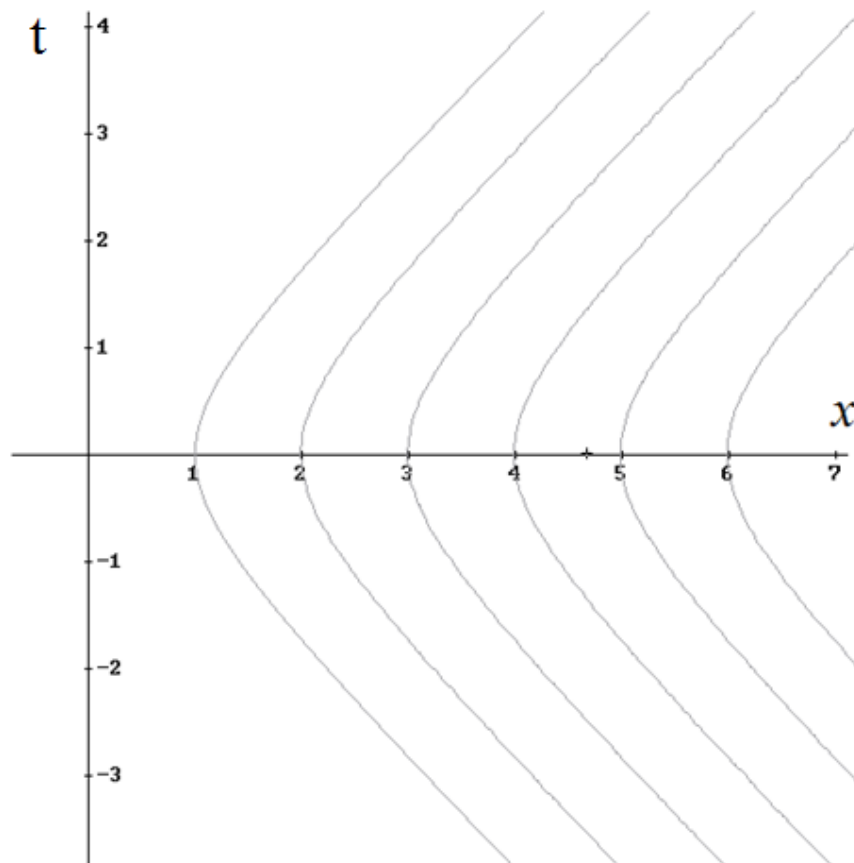


Figura 1

<sup>7</sup> Intendiamo cioè che segnali luminosi scambiati fra ogni coppia di punti di questo riferimento impieghino sempre gli stessi tempi (misurati da un osservatore solidale con il riferimento stesso).

In questo modo avremo a che fare con una famiglia d'iperboli del tipo

$$(x - \Delta x)^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{g^2}, \quad [2.1.16]$$

ciascuna identificata da un differente valore  $\Delta x$ . Procedendo in questo modo si ottiene un insieme di curve aventi tutte la stessa forma, come illustrato in figura 1.

Si trova però che il tempo proprio necessario a un raggio di luce per andare e tornare da un'iperbole all'altra, misurato da un osservatore solidale con un'iperbole di Rindler, non è in questo caso costante, e questo non può essere accettato per definire un SR fisicamente utile.

Si può invece dimostrare (7) che, dato un osservatore che giace su una linea di universo descritta da un'iperbole di Rindler di equazione [2.1.10], esiste un solo insieme di curve che hanno da questa una distanza luce costante (tempo proprio impiegato per andare e tornare da un'iperbole all'altra). L'insieme di queste curve è formato dalle iperboli di equazione [2.1.10] con tutti i possibili valori dell'accelerazione propria  $g$  (da zero ad infinito).

Nella formula [2.1.10] si nota che, modificando il valore dell'accelerazione  $g$ , cambia anche la coordinata  $x_0$  a cui si trova il corpo al tempo  $t = 0$ .

Le iperboli che si ottengono saranno quindi dislocate spazialmente a distanze diverse dall'origine (come illustrato in figura 2) a seconda del valore dell'accelerazione.

Esistono diversi modi di accelerare un corpo esteso, ma solamente se le sue parti seguono questo insieme d'iperboli, sono preservate le distanze relative misurate dagli osservatori in moto. Infatti, il tempo proprio di andata e di ritorno di un raggio di luce che collega due iperboli di Rindler (misurato da un osservatore solidale con una delle due iperboli) si mantiene costante. Si può quindi affermare che, in questo tipo di accelerazione, il moto di un punto determina quello di tutti gli altri punti.

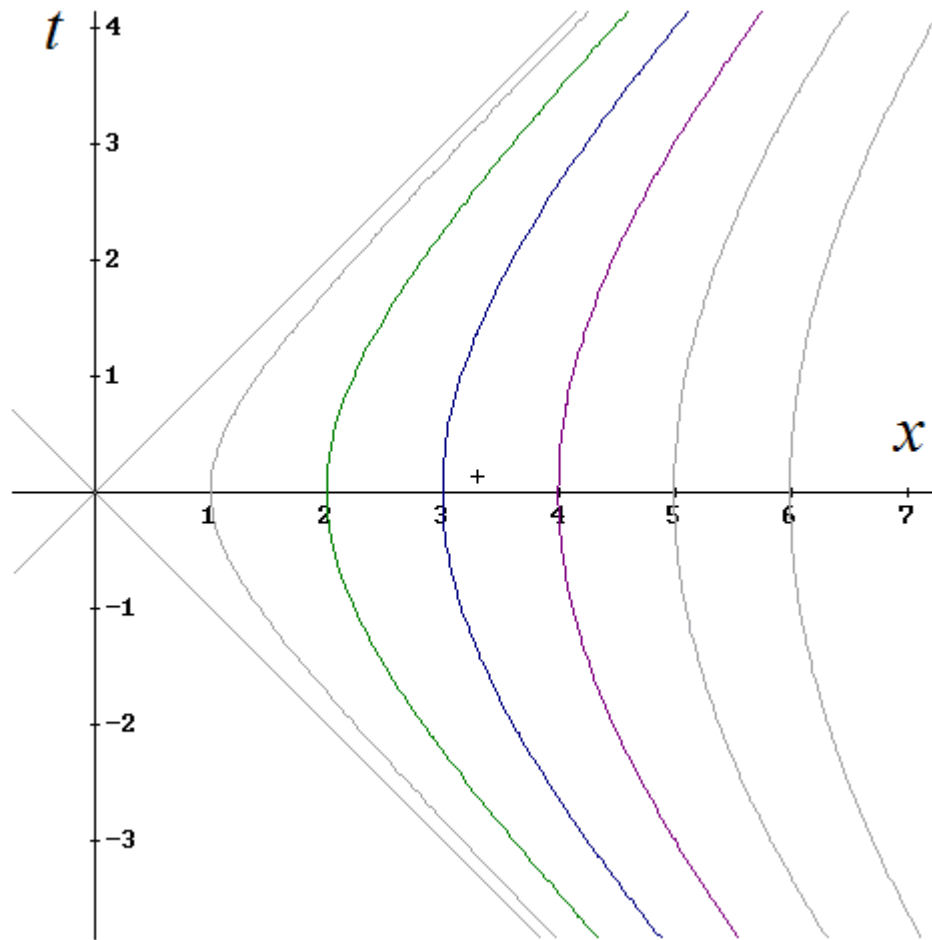


Figura 2

L'insieme di queste iperboli gode anche di altre importanti proprietà<sup>8</sup> fra cui, per esempio, la conservazione dei quadri-volumi (che si ottengono aggiungendo le direzioni spaziali trasversali, la cui lunghezza si suppone inalterata). Considerando quindi un insieme di punti che si muovono seguendo queste iperboli, possiamo definire un SR, che però non gode delle stesse proprietà che caratterizzano un SR non accelerato della RR.

---

<sup>8</sup> Questo tipo di traiettorie iperboliche assume anche un significato essenziale in RG nell'estensione analitica delle coordinate di "Kruskal" (5) per lo studio delle proprietà dei buchi neri.

Per derivare le equazioni del moto di un corpo sottoposto ad accelerazione costante, abbiamo seguito un procedimento che ricalca quello illustrato da Rindler stesso (3). Tale procedimento è un poco laborioso, ma particolarmente utile per la comprensione concettuale. Esiste tuttavia un procedimento più veloce, anche se un poco più formale.

Consideriamo la 4-accelerazione  $a^\mu = \frac{d}{d\tau}u^\mu$  di un corpo, misurata da un sistema inerziale e supponiamo che questa si mantenga costante. Sviluppando i calcoli, si vede facilmente che la 4-accelerazione deve, in questo caso, essere perpendicolare alla 4-velocità

$$\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2a^\mu u_\mu = 0. \quad [2.1.17]$$

Analizzando questa relazione, si nota che in un sistema di riferimento in cui il corpo è a riposo la 4-velocità ha solamente la componente temporale. Ma a causa della ortogonalità espressa dalla [2.1.17], questo implica anche che in questo sistema di riferimento la 4-accelerazione può avere solamente componenti spaziali  $a^\mu = (0, a^1, a^2, a^3)$ .

Nel sistema a riposo con il corpo accelerato, il modulo della 4-accelerazione si calcola quindi semplicemente utilizzando la parte spaziale<sup>9</sup>

$$a^\mu a_\mu = -\left(\frac{d^2 x^i}{dt^2}\right)^2. \quad [2.1.18]$$

Consideriamo ora il caso di un corpo sottoposto a un'accelerazione costante  $a^\mu a_\mu = g^2$ , diretta nella direzione  $x^1$ , e tale che le altre coordinate siano nulle. In tal caso le equazioni del moto, rispetto al riferimento istantaneamente a riposo con il corpo, diventano:

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau}; \quad u^1 = \frac{dx^1}{d\tau}; \quad a^0 = \frac{du^0}{d\tau}; \quad a^1 = \frac{du^1}{d\tau}, \quad [2.1.19]$$

---

<sup>9</sup> Il segno meno è dovuto al fatto che in tutto il lavoro di tesi si è adottata la metrica (+ - - -).



e utilizzando le relazioni

$$u^\mu u_\mu = -1; \quad u^\mu a_\mu = 0 = u^0 a_0 - u^1 a_1; \quad a^\mu a_\mu = g^2, \quad [2.1.20]$$

si trova

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = gu^1; \quad a^1 = \frac{du^1}{d\tau} gu^0. \quad [2.1.21]$$

E' facile verificare che la soluzione di queste due equazioni (con una opportuna scelta delle costanti di integrazione) ci restituisce immediatamente le equazioni delle iperboli di Rindler nella forma parametrica [2.1.11].

## 2.2 Principio di equivalenza.

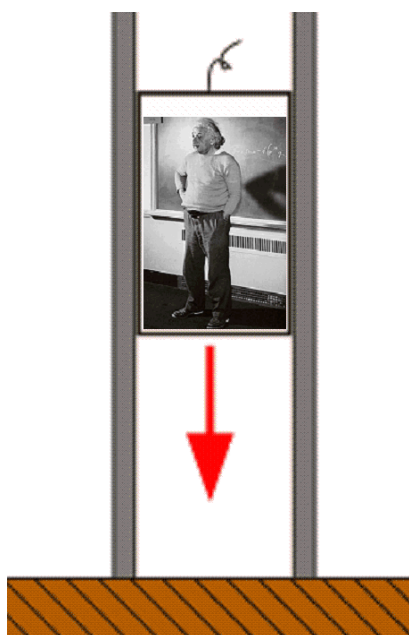
Nel primo capitolo abbiamo visto che, utilizzando il formalismo matematico delle geometrie curve e richiedendo che in assenza di curvatura si ottengano gli stessi risultati della RR, è sostanzialmente possibile dedurre la teoria della RG<sup>10</sup>.

Tuttavia, il punto di partenza intuitivo da cui è partito Einstein è un altro ed è il cosiddetto principio di equivalenza (PE). In una prima formulazione ci si può limitare a prendere in considerazione solamente le interazioni di tipo gravitazionale e il principio si può così sintetizzare:

*Un corpo in caduta libera in un campo gravitazionale non è soggetto ad alcuna forza (nel senso che, essendo solidali con tale corpo, non esiste un modo per misurare un'accelerazione relativa) e si comporta localmente come un sistema di riferimento inerziale della RR.*

La caduta libera è dunque in grado di annullare la forza di gravità, seppure in generale in modo solamente locale.

L'interpretazione originale di questo principio, stabilisce dunque l'equivalenza locale fra un SR inerziale e un sistema di riferimento che si trova in caduta libera in un campo gravitazionale (qui a fianco rappresentato da un ascensore). Da questo principio (PE) inizia il percorso logico che ha portato Einstein alla teoria della RG.



Il principio di equivalenza, come formulato sopra, prende in considerazione solamente la forza gravitazionale e viene di solito detto principio di equivalenza “debole”.

---

<sup>10</sup> L'unica ipotesi aggiuntiva che si deve fare è che valga il “principio di accoppiamento minimo”, secondo il quale le leggi fisiche devono avere la forma più semplice fra quelle possibili.

Se postuliamo invece che l'equivalenza sia più ampia e possa essere applicata anche nel caso in cui siano presenti forze di altra natura, si parla di solito di principio di equivalenza "forte".

Se supponiamo ad esempio che all'interno dell'ascensore in caduta libera, rappresentato nella pagina precedente, siano presenti delle cariche, e se supponiamo che valga il principio di equivalenza forte, allora un osservatore all'interno dell'ascensore in caduta libera (e quindi in moto accelerato rispetto alle masse che generano il campo) non misurerà nessun irraggiamento elettromagnetico (fenomeno invece tipico di una carica accelerata).

Per spiegare alcuni concetti base della RG, alcuni autori ricorrono invece al paragone fra il campo gravitazionale e un SR accelerato in direzione opposta al campo di gravità (14). Si cerca cioè di paragonare gli effetti fisici che si sperimentano trovandosi a bordo di un missile accelerato, con quelli che si hanno se ci si trova a riposo rispetto a un campo gravitazionale.

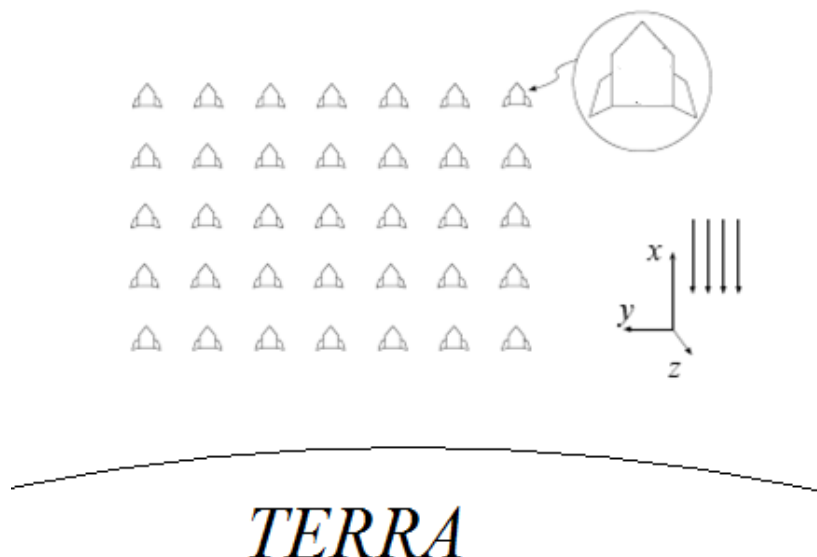


Figura 3

Nel caso di un campo gravitazionale uniforme, come approssimativamente può essere considerato quello terrestre se non ci allontaniamo troppo dalla

superficie, questo paragone sembrerebbe poter spiegare tutti gli effetti previsti dalla RG.

Il valore concettuale di questo ragionamento andrebbe però sempre correlato all'interpretazione fedele del PE, in cui bisogna considerare come sarebbero visti accelerare i corpi a riposo rispetto al campo di gravità da un osservatore in caduta libera.

Se non si opera sempre anche questo passaggio, si rischia, a mio avviso, di confondere chi si sta avvicinando alla materia diffondendo concetti sbagliati, quali ad esempio l'idea che le accelerazioni di origine non gravitazionale possano da sole produrre una dilatazione dei tempi<sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup> Dagli esperimenti con gli acceleratori circolari di particelle, in cui si applica una forza centripeta estremamente intensa, emerge invece al di là di ogni possibile dubbio, che l'accelerazione di per se non produce alcun effetto di dilatazione dei tempi (infatti, la vita media delle particelle non risente per nulla di questo parametro, ma solamente della loro velocità).

## 2.3 Campo gravitazionale uniforme (metrica di Desloge)

Lo scopo di questo paragrafo è di ricavare una metrica associata a un campo gravitazionale uniforme. Per far ciò ripercorreremo la strada seguita dal lavoro più noto su quest'argomento (1).

Tuttavia il procedimento è, fino ad un certo punto, piuttosto generale e lo useremo in seguito per ricavare e studiare delle metriche con caratteristiche differenti.

A causa della simmetria assiale presente in un campo uniforme, considereremo inizialmente una metrica a una sola dimensione spaziale, la cui forma generale è la seguente

$$ds^2 = F(x,t)dt^2 + 2G(x,t)dx dt - H(x,t)dx^2. \quad [2.3.1]$$

Il tensore metrico ha quindi la seguente forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F & G \\ G & -H \end{pmatrix}. \quad [2.3.2]$$

Si può dimostrare che, nel caso di un campo statico, è sempre possibile effettuare una trasformazione di coordinate in modo da diagonalizzare il tensore metrico [2.3.2] e ridurre la [2.3.1] al seguente elemento di linea:

$$d\tau^2 = \alpha^2(x)dt^2 - \beta^2(x)dx^2. \quad [2.3.3]$$

Inoltre, tramite un cambio di coordinate tale che  $\beta(x)dx = dx'$ , ci si può sempre ricondurre a un elemento di linea del tipo

$$d\tau^2 = \alpha^2(x)dt^2 - dx^2. \quad [2.3.4]$$

In questo modo, la conoscenza di  $\alpha(x)$  comporta una caratterizzazione completa della metrica.

Per fissare le idee, aggiungiamo anche l'ulteriore ipotesi che  $\alpha(0) = 1$ , in modo da avere il limite "minkowskiano" nell'origine del SR<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup> Questa condizione è differente da quella che si adotta per il campo di gravità centrale (metrica di Schwarzschild), dove la condizione al contorno è riferita all'infinito. Dalla

A causa del fatto che il termine legato alle coordinate spaziali si mantiene costante  $\beta(x)=1$ , Desloge definisce il riferimento associato alla metrica [2.3.4] “rigido”. Vogliamo qui sottolineare che questa non è un’ipotesi fisica necessaria, e l’unica ragione che ci spinge a compiere questa scelta è di semplificare la trattazione del problema. Una volta ricavata la metrica sotto questa ipotesi, sarà sempre possibile effettuare un cambio di coordinate (scegliendo un riferimento differente) in cui il termine metrico  $\beta(x)$  dipenda nuovamente dalle coordinate (come avviene ad esempio rispetto alla coordinata radiale della metrica di Schwarzschild).

Facciamo ora alcune considerazioni che ci aiutino a comprendere meglio il significato fisico del termine  $\alpha(x)$ . Fissiamo quindi una quota di riferimento  $x_0$  e, ponendo nell’elemento di linea  $dx = 0$ , si trova

$$\alpha^2(x_0) = \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \quad [2.3.5]$$

e, scelto il verso positivo per lo scorrere dei tempi, si ha

$$\alpha(x_0) = \frac{d\tau}{dt}. \quad [2.3.6]$$

Da questa semplice osservazione si deduce che  $\alpha(x_0)$  rappresenta il rapporto fra il ritmo di marcia di un orologio standard che si trova fermo nel punto di coordinata  $x_0$ , rispetto al ritmo di marcia di un orologio che si trova nell’origine  $x = 0$  delle coordinate.

Esiste anche un altro aspetto degno di nota: ponendo  $d\tau = 0$ , si ricava

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_0} = \alpha(x_0), \quad [2.3.7]$$

da cui si vede che, nelle coordinate scelte, la velocità della luce dipende dalla posizione in cui viene misurata.

---

forma della soluzione generale, vedremo però che questa scelta non sarebbe qui possibile, poiché tale limite non fornisce coefficienti della metrica con valori finiti.

Il termine  $\alpha(x_0)$  rappresenta quindi anche il rapporto della velocità della luce misurata da un osservatore che si trova fermo in  $x_0$ , rispetto alle misure effettuate da un osservatore che si trova nell'origine delle coordinate.

Con le ipotesi fatte in precedenza, si vede che un osservatore fermo in un punto  $x_0$  delle coordinate che definiscono la metrica, misurerà, rispetto a un osservatore che si trova nell'origine, intervalli di tempo proprio che risentono della curvatura dello spazio, secondo la seguente relazione:

$$d\tau = \alpha(x_0) dt . \quad [2.3.8]$$

A causa di questa dilatazione (o contrazione), un osservatore a riposo rispetto alle coordinate e che effettui una misura diretta della velocità e dell'accelerazione troverà i seguenti valori per l'accelerazione e per la velocità misurate "localmente"

$$\text{velocità locale} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{dx}{dt} \Big|_{x=x_0} , \quad [2.3.9]$$

e

$$\text{accelerazione locale} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt} \right) \Big|_{x=x_0} . \quad [2.3.10]$$

Per determinare un collegamento fra la metrica e l'accelerazione di gravità, scriveremo l'equazione della geodetica della particella libera. A tal fine, riportiamo le componenti del tensore metrico e i coefficienti di connessione<sup>13</sup>.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^2(x) & \\ & -1 \end{pmatrix}$	$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{-2}(x) & \\ & -1 \end{pmatrix}$	[2.3.11]
$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx}$	$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = \alpha \frac{d\alpha}{dx}$	

<sup>13</sup> Riportiamo solo il calcolo dei coefficienti di connessione che non sono identicamente nulli

Partendo dall'espressione generale della geodetica descritta da una particella libera [1.3.2]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad [2.3.12]$$

ed utilizzando la metrica [2.3.4] si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \end{cases}. \quad [2.3.13]$$

Analizzando tali equazioni, si può verificare che la soluzione generale dell'equazione relativa alla parte temporale è:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{k}{\alpha^2}, \quad [2.3.14]$$

dove il valore della costante  $k$  può essere determinato fissando le due condizioni seguenti:

$$\left. \frac{dt}{d\tau} \right|_{x=0} = 1; \quad \alpha(0) = 1, \quad [2.3.15]$$

che equivalgono a richiedere che lo spazio sia localmente minkowskiano nell'origine. Si ottiene così la seguente soluzione:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha^2}. \quad [2.3.16]$$

Per vedere che la [2.3.16] è una soluzione ne calcoliamo la derivata rispetto al tempo proprio, ottenendo la seguente espressione:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\alpha^2} \right) = -\frac{2}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{d\tau} = -\frac{2}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{d\tau} \frac{dt}{d\tau}, \quad [2.3.17]$$



che soddisfa identicamente la parte temporale dell'equazione della geodetica.

Inserendo ora la [2.3.16] nell'equazione della parte spaziale della geodetica, si ottiene la seguente equazione che utilizzeremo anche in seguito per discutere e derivare altre metriche.

$$\boxed{\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx}} \quad [2.3.18]$$

Seguendo ora il ragionamento di Desloge, utilizziamo la relazione  $d\tau = \alpha^2 dt$  (che si ricava dalla [2.3.16]) e sviluppiamo il primo termine della [2.3.18]

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha^2} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{\alpha^4} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{\alpha^5} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

In questo modo la parte spaziale dell'equazione delle geodetiche diventa.

$$\frac{1}{\alpha^4} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{\alpha^5} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} = 0. \quad [2.3.19]$$

Utilizziamo ora l'espressione dell'accelerazione "locale" definita dalla [2.3.10], che può essere così sviluppata:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2. \quad [2.3.20]$$

In questo modo, la parte spaziale dell'equazione delle geodetiche può essere così riscritta:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt} \right) - \frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = 0. \quad [2.3.21]$$

Analizziamo ora l'accelerazione iniziale cui è sottoposta la particella nel caso che questa cada con velocità iniziale nulla rispetto alle coordinate<sup>14</sup>. Consideriamo che la traiettoria della particella sia descritta da una legge  $x = x(t)$  e che la caduta abbia inizio al tempo  $t = t_0$ . All'istante iniziale  $t_0$ , la velocità della particella sarà nulla e, posto  $x_0 = x(t_0)$ , possiamo quindi scrivere:

$$\frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dt} \right) \Bigg|_{t=t_0} = \frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{dx}{dt} \Bigg|_{x=x_0} . \quad [2.3.22]$$

Se vogliamo ora che la particella sia sottoposta a un'accelerazione propria iniziale  $-g$  (diretta verso il basso) con un valore che non dipenda dal punto iniziale della caduta  $x_0$ , la relazione

$$-\frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{d\alpha}{dx} \Bigg|_{x_0} = -g$$

dovrà essere valida per ogni valore di  $x_0$ . Una metrica che realizzi questa condizione dovrà quindi soddisfare la seguente equazione differenziale

$$-\frac{1}{\alpha(x)} \frac{d\alpha}{dx} = -g , \quad [2.3.23]$$

la cui soluzione generale è:

$$\alpha(x) = e^{gx+k} . \quad [2.3.24]$$

Imponendo la condizione al contorno  $\alpha(0) = 1$ , si ricava

$$\alpha(x) = e^{gx} , \quad [2.3.25]$$

---

<sup>14</sup> Siccome all'istante in cui inizia la caduta il sistema di riferimento solidale con la particella si trova a riposo con le coordinate, avremo anche che l'"accelerazione locale", misurata da un osservatore solidale con le coordinate sarà istantaneamente uguale all'accelerazione propria della particella.

e sostituendo tale valore di  $\alpha(x)$  nella metrica [2.3.3], si ottiene l'elemento di linea che, secondo Desloge, caratterizza un campo di gravità con accelerazione uniforme:

$ds^2 = e^{2gx} dt^2 - dx^2$	[2.3.26]
$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2gx} & \\ & -1 \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2gx} & \\ & -1 \end{pmatrix}$	

Questa metrica ha la proprietà di avere non nulli il tensore di Riemann il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura. Invece, utilizzando l'equazione di campo con costante cosmologica nulla, si trova che il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$  è nullo in tutte le sue componenti  $G_{\mu\nu} = 0$ <sup>15</sup>.

Vogliamo ora caratterizzare completamente la metrica di Desloge [2.6.2], ricavando le equazioni del moto.

Inserendo il termine metrico  $\alpha(x) = e^{gx}$  nella parte spaziale dell'equazione delle geodetiche e con le opportune semplificazioni si trova:

$$e^{-2gx} \frac{d^2x}{dt^2} - 2ge^{-2gx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + g = 0, \quad [2.3.27]$$

che può essere scritta anche come

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-2gx} \frac{dx}{dt} \right) g = -g. \quad [2.3.28]$$

---

<sup>15</sup> Questa è però una proprietà generale di uno spazio a una sola dimensione spaziale, proprietà che verrà discussa in dettaglio nel paragrafo 5.1 della tesi. Nei paragrafi successivi dello stesso capitolo, si mostrerà anche che, utilizzando un'estensione alle altre dimensioni spaziali del tipo  $ds^2 = e^{2gx} dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , si trova invece un valore non nullo delle componenti relative alle dimensioni spaziali trasversali del tensore di Einstein  $G_{22}$  e  $G_{33}$ .

Integrando la [2.3.28] si ottiene la seguente equazione della traiettoria di una particella in caduta libera

$$x = -\frac{1}{2g} \ln(g^2 t^2 + k_1 t + k_2) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \quad [2.3.29]$$

Per completare la caratterizzazione della metrica, ricaviamo anche i tensori di Riemann e Ricci e lo scalare di curvatura.

I coefficienti di connessione non nulli valgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = e^{-gx} g e^{gx} = g \\ \Gamma_{00}^1 &= \alpha \frac{d\alpha}{dx} = e^{gx} g e^{gx} = g e^{2gx} \end{aligned} .$$

Per il calcolo del tensore di Riemann si può utilizzare la seguente formula (2)

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu, \beta\mu} - g_{\alpha\mu, \beta\nu} + g_{\beta\mu, \alpha\nu} - g_{\beta\nu, \alpha\mu}) + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\nu}^\sigma) \quad [2.3.30]$$

Prima di procedere, notiamo però che nel caso bidimensionale (una dimensione spaziale), esiste una sola componente indipendente del tensore di Riemann e, supposto che questa sia  $R_{0101}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{1}{2} (g_{01, \beta 1} - g_{00, 11} + g_{10, 01} - g_{11, 00}) + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{10}^\eta \Gamma_{10}^\sigma - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{11}^\sigma) = \\ &= \frac{1}{2} (-g_{00, 11}) + g_{00} \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 = -\frac{1}{2} 4g^2 e^{2gx} + e^{2gx} g^2 = -g^2 e^{2gx} \end{aligned} \quad [2.3.31]$$

Tenendo conto delle proprietà di simmetria, si trovano anche le seguenti 4 componenti non nulle

$$R_{1001} = R_{0110} = -R_{0101} = -R_{1010} = g^2 e^{2gx}. \quad [2.3.32]$$

Per il calcolo del tensore di Ricci e dello scalare di curvatura, valgono in questo caso le seguenti formule

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{R_{0101}}{\det g_{\mu\nu}}; \quad R = 2 \frac{R_{0101}}{\det g_{\mu\nu}}, \quad [2.3.33]$$

e, tenendo presente che il determinante del tensore metrico vale  $\det g_{\mu\nu} = -e^{2gx}$ , otteniamo i seguenti valori del tensore di Ricci e dello scalare di curvatura:

$$R_{00} = -e^{2gx} \frac{-g^2 e^{2gx}}{e^{2gx}} = g^2 e^{2gx};$$

$$R_{11} = 1 \frac{-g^2 e^{2gx}}{e^{2gx}} = -g^2;$$

[2.3.34]

$$R = -2 \frac{-g^2 e^{2gx}}{e^{2gx}} = 2g^2.$$

## 2.4 SR uniformemente accelerato (metrica di Rindler)

Per ricavare la metrica associata a un SR accelerato alla “Rindler” molti autori, fra cui lo stesso Desloge (1), partono semplicemente dall’ipotesi che ci si trovi in assenza completa di curvatura.

Richiedendo quindi che si abbia  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ <sup>16</sup>, ed utilizzando la forma della metrica utilizzata nel paragrafo precedente [2.3.3], si trova la condizione

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} = 0, \quad [2.4.1]$$

la cui soluzione generale è

$$\alpha(x) = k_1 + k_2 x. \quad [2.4.2]$$

Affinché la metrica nell’origine si riduca localmente a quella Minkowskiana, poniamo  $\alpha(0) = 1$  e troviamo

$$\alpha(x) = 1 + k_2 x. \quad [2.4.3]$$

Per indagare sulle proprietà di questa metrica utilizziamo l’equazione delle geodetiche [2.3.18]. Studiando il comportamento di una particella che a  $t = t_0$  si trova a riposo con le coordinate nel punto  $x = x_0$ , si ottiene:

$$\left. \frac{d^2 x}{d\tau^2} \right|_{t=t_0} = - \frac{1}{\alpha(x_0)} \left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x=x_0} = - \frac{k_2}{1 + k_2 x_0}, \quad [2.4.4]$$

da cui si vede che l’accelerazione propria della particella, non è uniforme, ma dipende dalla coordinata  $x$ .

---

<sup>16</sup> Il fatto che la metrica sia priva di curvatura, fa sì che dovrà esistere una trasformazione globale di coordinate in grado di trasformare la metrica in quella minkowskiana (vedere par. 1.2). Stiamo quindi cercando delle soluzioni relative allo spazio piatto.

Imponendo che l'accelerazione propria nell'origine abbia un valore determinato  $g(0) = -g$ , possiamo ricavare il valore della costante  $k_2 = g$ , ottenendo la metrica nella forma nota come metrica di Rindler<sup>17</sup>.

$$ds^2 = (1 + gx)^2 dt^2 - dx^2. \quad [2.4.5]$$

Da questa metrica è possibile ricavare in modo abbastanza semplice la traiettoria di una particella in caduta libera. Per far ciò riscriviamo l'equazione della parte spaziale della geodetica [2.3.21] con il valore  $\alpha = 1 + gx$ , nel seguente modo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1 + gx} \frac{dx}{dt} \right) - g \left( \frac{1}{1 + gx} \frac{dx}{dt} \right)^2 + g = 0. \quad [2.4.6]$$

Una prima integrazione porta alla seguente espressione

$$\frac{\frac{1}{1 + gx} \frac{dx}{dt} - 1}{\frac{1}{1 + gx} \frac{dx}{dt} + 1} = k_1 e^{2gt}, \quad [2.4.7]$$

dove  $k_1$  è una prima costante di integrazione. La [2.4.7] può essere quindi riscritta nel seguente modo:

$$\frac{1}{1 + gx} \frac{dx}{dt} = - \frac{k_1 \cdot e^{gt} + e^{-gt}}{k_1 \cdot e^{gt} - e^{-gt}}, \quad [2.4.8]$$

che integrata ulteriormente ci fornisce la seguente soluzione

$$x = - \frac{1}{g} - \frac{k_2 e^{gt}}{1 - k_1 \cdot e^{2gt} - e^{-gt}}. \quad [2.4.9]$$

La [2.4.9] può anche essere scritta nel seguente modo

$$x = - \frac{1}{g} - \frac{1}{A \sinh gt + B \cosh gt}, \quad [2.4.10]$$

con  $A$  e  $B$  costanti arbitrarie.

---

<sup>17</sup> In qualche pubblicazione tale metrica viene denotata “metrica di Møller”. In questa tesi faremo tuttavia sempre riferimento a “Metrica di Rindler”.

## 2.5 Accelerazione gravitazionale metrica di Rindler

In questo paragrafo mostreremo com'è possibile ricavare la metrica di Rindler con due procedimenti che non si basano sulla richiesta che la metrica sia piatta, ma sulle seguenti distinte ipotesi fisiche:

- 1) l'accelerazione misurata con misure di tipo radar non dipenda dalle coordinate,
- 2) una particella in caduta libera sia soggetta a un'accelerazione propria costante che non dipende dalla sua velocità<sup>18</sup>.

Per dedurre la metrica sotto le ipotesi di cui al punto 1), considereremo un osservatore che si trova nell'origine delle coordinate e che effettui delle misure tramite metodi radar (senza cioè inviare un osservatore direttamente sul posto, ma solo inviando e ricevendo segnali luminosi). Secondo questa metodologia, la misura di una lunghezza viene ricondotta alla misura del tempo necessario a percorrere un determinato spazio. Tale osservatore misurerebbe quindi una dilatazione (o contrazione) degli spazi che dipende dalla quota in cui si verifica il fenomeno fisico che sta osservando, tramite la relazione  $dx_{RADAR} = \alpha(x_0)dt$  (in unità  $c=1$ ). Egli vedrebbe inoltre gli orologi (e quindi anche i fenomeni fisici) che si trovano alla quota  $x_0$  marciare con un ritmo dato da

$$dt_{RADAR} = \alpha(x_0)dt$$

Proseguendo con questo ragionamento, siamo portati a concludere che un osservatore che si trova nell'origine delle coordinate troverebbe che le misure da lui effettuate sui fenomeni che si verificano a una quota  $x_0$ , sono legate alle coordinate nel seguente modo

---

<sup>18</sup> In quest'ultimo caso si ottiene in realtà la metrica di Kottler-Whittaker (20), che è però riconducibile a quella di Rindler con un semplice cambio di coordinate.



$$\begin{array}{l} \text{velocità locale} \\ \text{RADAR} \end{array} \Big|_{x=x_0} = \frac{\alpha(x_0) dx}{\alpha(x_0) dt} = \frac{dx}{dt}$$

e

$$\begin{array}{l} \text{accelerazione locale} \\ \text{RADAR} \end{array} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(x) dx}{\alpha(x) dt} \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{d^2x}{dt^2}. \quad [2.5.1]$$

Poste queste definizioni, riprendiamo in considerazione la parte spaziale della geodetica come dedotta nel paragrafo precedente

$$\frac{1}{\alpha^4} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{\alpha^5} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} = 0 \quad [2.5.2]$$

e, in modo analogo, consideriamo l'accelerazione iniziale cui è sottoposta la particella nel caso che sia lasciata cadere con partenza da fermo.

Per fissare le idee, consideriamo che la caduta abbia inizio nel punto  $x_0$  al tempo  $t = t_0$ , e che la particella segua una traiettoria  $x = x(t)$ . In tal caso possiamo omettere il secondo termine della [2.5.2] e scrivere:

$$\frac{1}{\alpha(x_0)} \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=t_0} = - \frac{d\alpha}{dx} \Big|_{x=x_0}. \quad [2.5.3]$$

In tale espressione, il primo termine coincide ora con l'accelerazione locale "radar" [2.5.1] così come da noi definita.

Se vogliamo che la particella sia sottoposta a un'accelerazione "radar" iniziale  $-g$  (diretta verso il basso) con un valore che non dipenda dal punto iniziale della caduta  $x_0$ , dovremo quindi avere:

$$- \frac{d\alpha}{dx} = -g, \quad [2.5.4]$$

Risolvendo la [2.5.4] e con l'usuale condizione al contorno  $\alpha(0) = 1$ , si ottiene immediatamente la metrica di Rindler [2.4.5]<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup> Nel prossimo capitolo, dimostreremo in modo operativo il fatto che un osservatore a riposo con il campo, e che effettua solamente misure, di tipo "radar", rileva

Mostriamo ora come si può ricavare la metrica di Rindler sotto le ipotesi contenute nel punto 2) dell'inizio di questo paragrafo. A tal fine consideriamo questa volta una metrica più generale

$$d\tau^2 = \alpha^2(x) dt^2 - \beta^2(x) dx^2. \quad [2.5.5]$$

Ai fini di una maggiore chiarezza relativa ai calcoli successivi, riportiamo qui le componenti del tensore metrico e dei coefficienti di connessione non nulli.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^2(x) & \\ & -\beta^2(x) \end{pmatrix}$	$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{-2}(x) & \\ & -\beta^{-2}(x) \end{pmatrix}$	[2.5.6]
$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx}$	$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{d\alpha}{dx}$	
$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1}) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx}$		

L'equazione completa della geodetica si scrive quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0 \end{array} \right. . \quad [2.5.7]$$

Considerando l'elemento di linea [2.5.5], possiamo scrivere

$$\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left( 1 + \beta^2 \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right) \quad [2.5.8]$$

---

effettivamente che l'accelerazione dei corpi in caduta libera, non dipende dalla quota iniziale della caduta, ma solamente dalla quota a cui si trova l'osservatore stesso. La trattazione verrà ampliata anche a traiettorie con velocità trasversali, ottenendo i medesimi risultati.

e, sostituendo nella parte spaziale dell' equazione delle geodetiche [2.5.7], otteniamo (18) (19).<sup>20</sup>

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d\alpha}{dx} + \left( \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} \right) \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad [2.5.9]$$

Se consideriamo una particella che a  $t = t_0$  si trova istantaneamente a riposo con le coordinate nel punto  $x = x_0$ , possiamo quindi scrivere:

$$\left. \frac{d^2x}{d\tau^2} \right|_{t=t_0} = - \frac{1}{\alpha(x_0)\beta^2(x_0)} \left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad [2.5.10]$$

Esaminando la parte spaziale della geodetica, vediamo che l'accelerazione propria di una particella è formata da due contributi, il secondo dei quali dipende dalla velocità.

Prima di procedere ulteriormente, facciamo un'ulteriore richiesta che l'accelerazione propria  $d^2x/d\tau^2$  sia costante durante tutta la caduta. Affinché ciò sia vero, è necessario che si abbia identicamente:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx} = 0, \quad [2.5.11]$$

la cui soluzione generale è

$$\alpha(x) = k \cdot \beta^{-1}(x). \quad [2.5.12]$$

Siccome per il limite minkowskiano i due termini devono diventare entrambi unitari, deve essere  $k = 1$ ; abbiamo quindi:

$$\alpha(x) = \beta^{-1}(x). \quad [2.5.13]$$

In questo modo la [2.5.10] si riduce a

$$\left. \frac{d^2x}{d\tau^2} \right|_{t=t_0} = -\alpha(x_0) \left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad [2.5.14]$$

---

<sup>20</sup> Questa forma della geodetica è stata utilizzata anche da Moreau Neutze e Ross, nel riprendere un lavoro di French sull'approssimazione della metrica di Schwarzschild.

Richiedendo ora che l'accelerazione propria  $-g$  sia indipendente dalla quota di partenza e diretta verso il basso, otteniamo:

$$-\alpha \frac{d\alpha}{dx} = -g . \quad [2.5.15]$$

Integrando la [2.5.15] ed utilizzando la condizione  $\alpha(0) = 1$ , otteniamo la seguente espressione:

$$\alpha = (1 + 2gx)^{1/2} , \quad [2.5.16]$$

che con la condizione prima fissata  $\alpha = \beta^{-1}$ , fornisce

$$ds^2 = (1 + 2gx) dt^2 - (1 + 2gx)^{-1} dx^2 , \quad [2.5.17]$$

che è noto come elemento di linea di Kottler-Whittaker (20).

Questa metrica è associata al sistema di riferimento in caduta libera nel campo gravitazionale (21) e, tramite il seguente cambio di coordinate

$$(1 + gx') = (1 + 2gx)^{1/2} , \quad [2.5.18]$$

è riconducibile a quello di Rindler.

Per questioni di completezza, riportiamo un'ulteriore forma della metrica di Rindler, che si ottiene tramite il seguente cambio di coordinate

$$1 + gx = e^{gx'} , \quad [2.5.19]$$

e che porta alla seguente metrica

$$ds^2 = e^{2gx} (dt^2 - dx^2) . \quad [2.5.20]$$

Utilizzando questa metrica, si verifica che in queste coordinate l'accelerazione propria dipende dalla coordinata iniziale del corpo in caduta.

$$\left. \frac{d^2x}{d\tau^2} \right|_{t=0} = - \frac{1}{\alpha(x_0) \beta^2(x_0)} \left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{1}{e^{3gx_0}} g e^{gx_0} = g e^{-2gx_0}$$

## 2.6 Accelerazione gravitazionale propria costante

Nel paragrafo 2.3 abbiamo descritto come, secondo Desloge, si perviene alla metrica di un campo gravitazionale uniforme. Partendo dalla parte spaziale della geodetica, per una metrica generica del tipo  $d\tau^2 = \alpha(x)^2 dt^2 - dx^2$ , eravamo pervenuti alla seguente equazione per la parte spaziale della geodetica [2.3.18]

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx}.$$

Partendo da questa espressione, possiamo richiedere che la parte spaziale  $\frac{d^2x}{d\tau^2}$  dell'accelerazione propria assuma un valore costante  $-g$ . La metrica che soddisfa questa ipotesi si ottiene risolvendo la seguente equazione differenziale

$$-\frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} = -g. \quad [2.6.1]$$

A differenza del ragionamento effettuato da Desloge, questo comporta che l'accelerazione propria sia costante indipendentemente sia dalla quota sia dalla velocità di partenza. Integrando la [2.6.1] si ottiene

$$\alpha^{-2} = -2gx + 2k$$

e, fissando la condizione al contorno  $\alpha(0) = 1$ , otteniamo per la metrica la seguente espressione:

$$ds^2 = (1 - 2gx)^{-1} dt^2 - dx^2. \quad [2.6.2]$$

Stranamente, vista la semplicità, questa metrica non risulta essere stata studiata precedentemente e proveremo a ricavarne le equazioni del moto.

Utilizzando la relazione  $\frac{d\alpha}{dx} = g\alpha^3$ , la parte spaziale dell'equazione delle geodetiche diventa

$$\frac{1}{\alpha^4} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2g}{\alpha^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + g = 0 \quad [2.6.3]$$

e, utilizzando il termine metrico appena ricavato  $\alpha = (1 - 2gx)^{\frac{1}{2}}$ , si ottiene la seguente equazione

$$(1 - 2gx)^2 \frac{d^2x}{dt^2} - 2g(1 - 2gx) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + g = 0. \quad [2.6.4]$$

La soluzione generale della traiettoria  $x = x(t)$  ha una forma analitica piuttosto complessa<sup>21</sup>.

Risulta tuttavia estremamente semplice effettuare l'integrazione dell'equazione della geodetica [2.3.13] rispetto al tempo proprio  $\tau$  ed ottenere la traiettoria della particella in forma parametrica.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -g \quad \Rightarrow \quad x = -g \frac{\tau^2}{2} + A\tau + B \quad A, B \in \mathbb{R} \quad [2.6.5]$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha^2} = 1 - 2gx = g^2\tau^2 - 2gA\tau + 1 - 2gB \quad [2.6.6]$$

$$t = g^2 \frac{\tau^3}{3} - gA\tau^2 + (1 - 2gB)\tau + C$$

Ricercando invece una soluzione che soddisfi alla condizione

$$\frac{dx}{dt} = (1 - 2gx)^{\frac{1}{2}}, \quad [2.6.7]$$

si ottiene la seguente soluzione particolare, dalla forma piuttosto semplice:

---

<sup>21</sup> Esiste una soluzione a valori reali dell'equazione [2.6.4] dalla forma analitica piuttosto complessa che abbiamo ricavato con il programma "Mathematica". La soluzione esplicita non è stata qui riportata, Infatti la sua estrema complessità non permette di dedurre delle proprietà ulteriori.

$$x = \frac{1 - (k - 3gt)^{2/3}}{2g} \quad k \in \mathbb{R}. \quad [2.6.8]$$

che non è però la soluzione generale dell'equazione differenziale [2.6.4].

Vogliamo ora completare la caratterizzazione di questa nuova metrica, tramite lo studio dei coefficienti di connessione e dei tensori della RG.

Dopo aver esplicitato il tensore metrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1-2gx)^{-1} & \\ & -1 \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1-2gx) & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad [2.6.9]$$

passiamo al calcolo dei coefficienti di connessione

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = g(1-2gx)^{1/2} (1-2gx)^{-3/2} = g(1-2gx)^{-1} \\ \Gamma_{00}^1 &= \alpha \frac{d\alpha}{dx} = g(1-2gx)^{-1/2} (1-2gx)^{-3/2} = g(1-2gx)^{-2} \end{aligned} \quad .$$

Nello spazio bidimensionale il tensore di Riemann ha una sola componente indipendente. Scegliendo per il calcolo  $R_{0101}$

$$\begin{aligned} R_{0101} &= \frac{1}{2} (g_{01,\beta 1} - g_{00,11} + g_{10,01} - g_{11,00}) + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{10}^\eta \Gamma_{10}^\sigma - \Gamma_{00}^\eta \Gamma_{11}^\sigma) = \\ &= \frac{1}{2} (-g_{00,11}) - g_{00} \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 = -8g^2 (1-2gx)^{-3} - (1-2gx)^{-1} g^2 (1-2gx)^{-2}, \end{aligned}$$

otteniamo

$$R_{0101} = -9g^2 (1-2gx)^{-3}. \quad [2.6.10]$$

Per il calcolo del tensore di Ricci e dello scalare di curvatura, valgono invece le formule

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{R_{0101}}{\det g_{\mu\nu}}; \quad R = 2 \frac{R_{0101}}{\det g_{\mu\nu}} \quad [2.6.11]$$

e, tenendo presente che il determinante del tensore metrico vale

$$\det g_{\mu\nu} = -(1-2gx)^{-1},$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -(1-2gx)^{-1} \frac{-9g^2(1-2gx)^{-3}}{(1-2gx)^{-1}} = 9g^2(1-2gx)^{-3}; \\
 R_{11} &= \frac{-9g^2(1-2gx)^{-3}}{(1-2gx)^{-1}} = -9g^2(1-2gx)^{-2}; \\
 R &= -2 \frac{9g^2(1-2gx)^{-3}}{(1-2gx)^{-1}} = -18g^2(1-2gx)^{-2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6.12}$$

Da ultimo, per eseguire eventuali confronti con altre espressioni della metrica, notiamo che, effettuando la sostituzione  $1-2gx = e^{-2gx'}$ , l'elemento di linea assume la forma seguente:

$$ds^2 = e^{2gx} dt^2 - e^{-4gx} dx^2
 \tag{2.6.13}$$



## 2.7 Accelerazione gravitazionale coordinata costante

In RG le coordinate servono a dare un “nome” agli eventi che avvengono nell’universo, e non sono legate direttamente a principi fisici <sup>22</sup>. In qualche caso, sfruttando il fatto che esiste una regione in cui gli effetti relativistici si annullano, esiste la possibilità di effettuare un paragone con le formule Newtoniane e capire qualcosa di più sul significato delle coordinate.

Proveremo quindi a ricavare una metrica in cui sia costante l’accelerazione che si ottiene effettuando le derivate, utilizzando direttamente le coordinate del SR scelto, per vedere se risulti una metrica con caratteristiche interessanti, o una metrica eventualmente riconducibile a quelle ricavate in precedenza.

Consideriamo quindi nuovamente la parte spaziale della geodetica per la particella libera

$$\frac{1}{\alpha^4} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{\alpha^5} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^3} \frac{d\alpha}{dx} = 0, \quad [2.7.1]$$

Se supponiamo che la particella, segua una traiettoria  $x = x(t)$ , che abbia velocità iniziale nulla al tempo  $t = t_0$  e posizione iniziale  $x_0 = x(t_0)$ , allora possiamo trascurare il secondo termine della [2.5.2], e abbiamo:

$$\left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_0} = -\alpha(x_0) \left. \frac{d\alpha}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad [2.7.2]$$

---

<sup>22</sup> Vedere ad esempio il testo di H. Stephanie (48). Si può, infatti, sempre eseguire una trasformazione arbitraria da un sistema di coordinate a un altro  $x' = f(x)$ , purché si tratti di una trasformazione biunivoca (se è verificata la condizione  $\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \neq 0$ ).

Richiedendo quindi che l'accelerazione "coordinata"  $\frac{d^2x}{dt^2}$  sia indipendente dalla quota di partenza  $x_0$ , dovremo avere:<sup>23</sup>

$$-\alpha \frac{d\alpha}{dx} = -g, \quad [2.7.3]$$

il cui integrale generale vale

$$\alpha^2 = 2gx + k. \quad [2.7.4]$$

Fissando la costante  $k$  in modo che  $\alpha(0) = 1$ , abbiamo

$$\alpha^2(x) = 1 + 2gx, \quad [2.7.5]$$

e la metrica [2.3.3] diventa

$$ds^2 = (1 + 2gx)dt^2 - dx^2. \quad [2.7.6]$$

Con un opportuno cambio di coordinate ( $1 + 2gx = e^{2gx'}$ ), possiamo riscrivere la [2.7.6] anche nel seguente modo:

$$ds^2 = e^{2gx}dt^2 - e^{4gx}dx^2. \quad [2.7.7].$$

Si può verificare che non esiste nessun cambio di coordinate che porti questa metrica in una di quelle ricavate nei paragrafi precedenti, e ciò conferma che si tratta di una metrica con un significato fisico differente.

Le equazioni del moto si possono invece ricavare dalla seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{1 + 2gx} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + g = 0. \quad [2.7.8]$$

---

<sup>23</sup> Si poteva giungere alla stessa relazione utilizzando anche la formula per le basse velocità  $\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{00,\nu}$  riportata su molti libri di relatività.

## 2.8 Un confronto con la metrica di Schwarzschild

In questo paragrafo, per cercare di approfondire la nostra comprensione intuitiva sull'argomento, vogliamo fare un confronto con la metrica di Schwarzschild, di cui riportiamo esplicitamente i termini del tensore metrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & & & & \\ & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & & & \\ & & -r^2 & & \\ & & & -r^2 \sin^2 \theta & \\ & & & & -1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & & & & \\ & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & & & \\ & & -1/r^2 & & \\ & & & -1/r^2 \sin^2 \theta & \\ & & & & -1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Per far ciò restringiamo la nostra attenzione a un moto che avvenga lungo una direzione radiale. Ponendo  $\theta = 0$  la metrica diventa:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2; \quad [2.8.1]$$

Vogliamo ora vedere come si può dedurre questa proprietà della metrica, a partire da una metrica generica del tipo

$$ds^2 = \alpha^2(x) dt^2 - \beta^2(x) dr^2, \quad [2.8.2]$$

che abbiamo già discusso nel paragrafo 2.5.

Supponendo che il moto avvenga solo nella direzione radiale (il che sarà sicuramente vero nel caso che la partenza avvenga da fermo), possiamo servirci del risultato già ricavato per la parte spaziale dell'equazione della geodetica [2.5.9]. Utilizzando  $r$  al posto di  $x$ , troviamo:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{\alpha\beta^2} \frac{d\alpha}{dr} + \left( \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d\beta}{dr} \right) \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad [2.8.3]$$

Mostriamo ora che è possibile dedurre la parte radiale della metrica di Schwarzschild [2.8.1], richiedendo che siano soddisfatti i seguenti requisiti:

Esiste un sistema di coordinate in cui:

- 1) la metrica è diagonale;
- 2) l'accelerazione radiale propria è indipendente dalla velocità;
- 3) l'accelerazione propria della particella segue la legge di Newton per il campo centrale.

Utilizziamo quindi una metrica diagonale generica [2.8.2].

Analizzando la parte radiale dell'equazione della geodetica [2.8.3] con un procedimento analogo a quello utilizzato nel paragrafo 2.5, si trova facilmente che, affinché l'accelerazione propria sia indipendente dalla velocità radiale, deve essere  $\beta = \alpha^{-1}$ .

Utilizzando questa relazione e studiando il comportamento di una particella che a  $t = 0$  si trova a riposo con il campo in un punto di coordinata radiale  $r = r_0$ , possiamo scrivere

$$\left. \frac{d^2 r}{d\tau^2} \right|_{t=t_0} = -\alpha(r_0) \left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=r_0} . \quad [2.8.4]$$

Supponendo ora che, per ogni valore della distanza radiale  $r$ , l'accelerazione radiale propria sia data dalla formula newtoniana, possiamo scrivere:

$$-\alpha \frac{d\alpha}{dr} = -\frac{GM}{r^2} .$$

Integrando si ottiene

$$\alpha^2 = k - \frac{2GM}{r} , \quad [2.8.5]$$

e, fissando la condizione al contorno  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \alpha(r) = 1$ , si ottiene la metrica di Schwarzschild.<sup>24</sup>

---

<sup>24</sup> Per evidenziare questa proprietà avremo potuto procedere per verifica diretta

$$\left. \frac{d^2 x}{d\tau^2} \right|_{t=0} = -\frac{1}{\alpha\beta^2} \left. \frac{d\alpha}{dr} \right|_{r=r_0} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right)^{-1} r_0^2} \frac{GM}{r_0^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_0^2}\right)^{1/2} = -\frac{GM}{r_0^2}$$

Questo risultato ci sembra degno di rilievo, per via della seguente analogia:

- 1) se richiediamo che l'accelerazione propria non dipenda dalla velocità di caduta e abbia un andamento descritto dalla formula newtoniana per il campo generato da una massa a simmetria sferica, otteniamo la soluzione di Schwarzschild;
- 2) se richiediamo invece che l'accelerazione propria non dipenda dalla velocità di caduta e segua un andamento costante (campo newtoniano uniforme), otteniamo l'elemento di linea di Kottler-Whittaker (che si ottiene dalla metrica di Rindler con un cambio di coordinate).

Questo ci fa ritenere che sia proprio questa metrica a dover essere considerata la corretta "estensione" relativistica del campo gravitazionale newtoniano uniforme.

Esiste anche un'altra analogia importante, che si ottiene prendendo in considerazione il seguente elemento di linea:

$$ds^2 = (1 + 2\phi(r))dt^2 - (1 + 2\phi(r))^{-1} dx^2, \quad [2.8.6]$$

dove  $\phi(r)$  rappresenta il potenziale newtoniano del campo gravitazionale.

Utilizzando questa espressione con il potenziale newtoniano di una massa a simmetria sferica  $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$ , si ottiene la parte radiale della metrica di

Schwarzschild, mentre utilizzando l'espressione newtoniana del potenziale di un campo uniforme  $\phi(r) = g r$ , si ottiene l'elemento di linea di Kottler-Whittaker.



## 3 Sistema di riferimento in caduta libera

Noi sappiamo che i campi gravitazionali reali non sono uniformi, e per questa ragione esistono delle forze di marea che ci obbligano a considerare la validità del PE solo localmente, sia nello spazio sia nel tempo.

Questo comporta che in generale risulti possibile definire un sistema di riferimento in caduta libera (SRCL) con le caratteristiche di sistema di riferimento inerziale (dal punto di vista della RR) solo localmente.

Tuttavia, nel caso di un campo privo di curvatura è possibile definire un SRCL con le caratteristiche di sistema inerziale in tutto lo spazio tempo.

Nel corso del secondo capitolo abbiamo visto che un tale tipo di campo è quello associato alla metrica di Rindler.

In questo capitolo procederemo in modo differente e cercheremo di dedurre la metrica del campo di Rindler, partendo dall'ipotesi di essere in presenza di un campo gravitazionale in cui risulti possibile definire un SRCL con caratteristiche non locali (paragrafo 3.1).

Dimostreremo quindi (paragrafi 3.2, 3.3 e 3.4) che le iperboli di Rindler possiedono tutte le caratteristiche necessarie a descrivere la caduta libera come osservata da un SRCL non locale.

Tramite questo tipo di esercizio ricaveremo in modo operativo la formula della dilatazione (contrazione) dei tempi e delle lunghezze (paragrafi 3.5 e 3.6), proponendo un esperimento ideale di confronto fra il ritmo di marcia di orologi posti a differenti altezze, tramite un procedimento che presenta una notevole valenza didattica.

Dimostreremo quindi (paragrafo 3.7) che un osservatore a riposo con un'iperbole di Rindler che effettua misure di tipo "radar" osserva che la caduta libera dei corpi non dipende dalla quota di partenza.

Infine (paragrafo 3.8) ricaveremo la metrica di Rindler e ne discuteremo le proprietà, confrontandole con quelle della metrica ricavata da Desloge e con la metrica di Schwarzschild.

Gli argomenti trattati in questo capitolo della tesi sono stati esposti in due articoli pubblicati dal sottoscritto su “arxiv” (22)(23).



### 3.1 Iperboli di Rindler

Per semplicità, data la simmetria assiale di un campo uniforme, tratteremo inizialmente questo sistema in uno spazio con una sola dimensione spaziale.

Per impostare il problema, consideriamo le linee di universo descritte da un corpo che si trova a riposo rispetto alle masse che generano un campo gravitazionale caratterizzato da un'accelerazione di gravità  $g$ .

Siccome per il PE il sistema inerziale “proprio” è quello in caduta libera, tali linee di universo vanno riferite rispetto al SRCL, che denoteremo con  $K$ , mentre denoteremo con  $\Sigma$  un sistema di riferimento locale, solidale con il campo gravitazionale (ovvero con le masse che lo generano).

Come abbiamo già discusso nel paragrafo 2.1, si può facilmente dimostrare (3) che la linea di universo di un corpo in caduta libera lungo la direzione  $x$ , e con accelerazione propria  $g$  costante è descritta da un'iperbole di equazione

$$x^2 - c^2 t^2 = \frac{c^4}{g^2}, \quad [3.1.1]$$

dove al solito  $c$  è la velocità della luce e  $t$  il tempo.

Siccome stiamo considerando l'accelerazione rispetto a  $K$ , per applicare il principio di equivalenza dovremo supporre che sia il punto materiale che si trova in  $\Sigma$  a descrivere nello spazio di Minkowski una traiettoria iperbolica descritta dalla equazione [3.1.1]. In questo modo però l'accelerazione di  $\Sigma$  rispetto al SRCL dovrà essere diretta nella direzione opposta alla forza di gravità. Un osservatore che si trova in  $\Sigma$ , osserverà invece le parti di  $K$  descrivere linee di universo in generale più complesse (24)(20).

L'accelerazione propria  $g$  (accelerazione relativa a un sistema di riferimento istantaneamente a riposo) può essere misurata da un osservatore a riposo con il SRCL, quando questo si trova a riposo con  $\Sigma$ . Supporremo che questo avvenga al tempo  $t=0$  e alla coordinata  $x_0$  del SRCL. Al tempo  $t=0$  entrambi i riferimenti ( $\Sigma$  e SRCL) misureranno quindi la stessa accelerazione locale  $g$ . Un osservatore posto in  $\Sigma$  dedurrà l'accelerazione

dalla misura della forza reale cui è sottoposto, mentre un osservatore solidale con il SRCL, misurerà tale accelerazione dalla misura diretta del movimento relativo rispetto a  $\Sigma$ .

Nella trattazione che segue, chiameremo  $x$  “coordinata posizione” e  $t$  coordinata tempo. Gli spazi e i tempi misurati da  $\Sigma$ , saranno invece detti rispettivamente “spazio proprio” e “tempo proprio”.

Dalla equazione [3.1.1] si vede che al tempo  $t=0$  la coordinata spaziale vale  $x_0 = c^2/g$ . Tuttavia da qui in avanti adotteremo unità di misura con  $c=1$ , e quindi scriveremo semplicemente  $x_0 = 1/g$ . Con questo cambio di notazioni, riscriviamo la [3.1.1] nel seguente modo

$$x^2 - t^2 = x_0^2. \quad [3.1.2]$$

Vogliamo ora studiare la linea di universo di un corpo che si trova a un'altezza differente. Per far ciò è indispensabile richiedere che la “distanza radar” (tempo di andata e ritorno di un raggio di luce) misurata da due osservatori a riposo nel campo gravitazionale che si trovano a differenti altezze non dipenda dal tempo, altrimenti due osservatori a riposo con il campo misurerebbero una distanza relativa non costante; ciò sarebbe possibile solo con un campo variabile, di cui non ci occuperemo.

Questa richiesta è soddisfatta se consideriamo che ciascun osservatore descriva un'iperbole di Rindler con un'accelerazione inversamente proporzionale alla coordinata (3). Se consideriamo quindi un secondo osservatore  $\Sigma^+$  solidale con il campo gravitazionale, che si trova a un'altezza  $x_0 + h$ , avremo che esso seguirà un moto iperbolico descritto da un'iperbole di equazione

$$x^2 - t^2 = (x_0 + h)^2. \quad [3.1.3]$$

Da questa equazione si vede che l'accelerazione deve dipendere dalle coordinate. Denoteremo quindi con  $g^+$  l'accelerazione di gravità che si ha alla quota  $x_0 + h$ . Avremo allora:

$$g = \frac{1}{x_0}; \quad g^+ = \frac{1}{x_0 + h}. \quad [3.1.4]$$

Il fatto che l'accelerazione dipende ora dalle coordinate, contraddice il presupposto dell'uniformità del campo, che sembrava un'ipotesi ragionevole di un sistema fisico in cui il PE avesse validità non locale.

Su questo punto troviamo anche la seguente interessante affermazione di G.'t Hooft (25): "The gravitational field strength felt locally ... is inversely proportional to the distance .... Even though our field is constant in the transverse direction and with time, it decrease with height"

Il punto essenziale è che un campo di questo tipo è l'unico candidato per avere un SRCL cui si possa applicare il PE in modo non locale.

Se provassimo infatti a studiare un campo gravitazionale privo di una dipendenza dell'accelerazione dalla quota, avremo che la linea di universo di  $\Sigma^+$  sarebbe descritta dall'iperbole.

$$(x-h)^2 - t^2 = x_0^2, \quad [3.1.5]$$

che è una semplice traslazione spaziale di quella descritta dall'equazione [3.1.6]. In tal caso, come già illustrato nel paragrafo 2.1, la distanza radar misurata da  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$  non sarebbe costante.

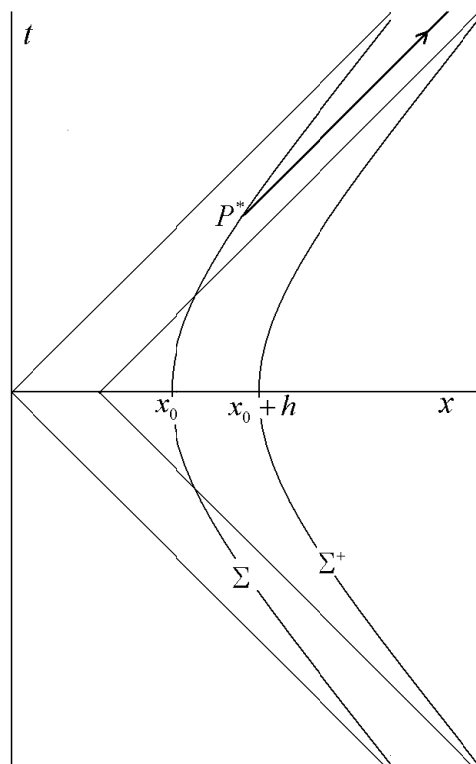


Figura 4

Inoltre sarebbe presente un paradosso ancor più evidente, illustrato dalla figura 4, in cui si nota che, un raggio luminoso inviato da  $\Sigma$  a partire da un generico punto  $P^*$  della sua linea di universo non raggiungerebbe mai  $\Sigma^+$ . Nonostante queste palesi contraddizioni, un campo uniforme di questo tipo è stato studiato in un recente articolo (16) che cita anche il primo articolo (22) del sottoscritto su quest'argomento.

Il campo gravitazionale che noi intendiamo studiare ha invece le seguenti proprietà:

- 1) l'accelerazione locale non dipende dal tempo;
- 2) il PE ha una validità non locale;
- 3) il rapporto fra gli intervalli propri di tempo trascorsi a diverse altezze è costante;
- 4) la distanza radar misurata fra due osservatori che si trovano a diverse altezze è costante.

La proprietà 1) è evidente (in quanto alla base della derivazione delle iperboli di Rindler), mentre le altre sono già state dimostrate, in particolare dal già citato Desloge in un articolo che analizza il comportamento di un SR uniformemente accelerato (8). Nei prossimi paragrafi dimostreremo tali proprietà in un modo alternativo che possiede una maggiore evidenza intuitiva e anche una maggiore valenza didattica.

### 3.2 Invarianza di Lorentz

Poiché le iperboli di Rindler si estendono all'infinito sia nello spazio sia nel tempo, la costruzione del campo gravitazionale svolta fino ad ora, postula una validità non locale del PE (abbiamo infatti assunto come postulato che il SRCL sia un SR della RR). Vogliamo ora completare la dimostrazione verificando l'invarianza di Lorentz, mostrando cioè che anche un SR in moto rettilineo uniforme con velocità  $v$  rispetto a  $K$ , osserva che i corpi solidali con le iperboli sono sottoposti alla stessa accelerazione propria  $g$ .

Per dimostrare questa proprietà è sufficiente applicare una trasformazione di Lorentz di velocità  $v = \operatorname{arctanh} \mathcal{G}$  lungo la direzione  $x$  alle iperboli di Rindler (3)(26)(27) che descrivono il moto di  $\Sigma$ .

Per far questo conviene scrivere le iperboli di Rindler in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 \cosh g\tau \\ t = x_0 \sinh g\tau \end{cases} \quad [3.2.1]$$

L'applicazione di una trasformazione di Lorentz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \mathcal{G} & -\sinh \mathcal{G} \\ -\sinh \mathcal{G} & \cosh \mathcal{G} \end{pmatrix}, \quad [3.2.2]$$

trasforma le iperboli nelle seguenti

$$\begin{cases} x = x_0 \cosh (g\tau - \mathcal{G}) \\ t = x_0 \sinh (g\tau - \mathcal{G}) \end{cases}, \quad [3.2.3]$$

che differiscono da quelle iniziali solo per una traslazione temporale  $\Delta\tau = \mathcal{G}/g$ . L'applicazione di una trasformazione di Lorentz lascia quindi invariata la forma delle iperboli di Rindler.

Notiamo anche che per ogni velocità coordinata  $V = x/t$  (rette passanti per l'origine) esiste un boost di Lorentz che porta tutti gli eventi che si trovano su tale retta sull'asse delle  $x$ . Questo prova la simultaneità iniziale degli eventi che si trovano su tali rette.

### 3.3 Intervalli di tempo propri

Dobbiamo ora calcolare gli intervalli di tempo propri misurati lungo una linea di universo fra due generici istanti  $t_1$  e  $t_2$ .

Per fare ciò utilizziamo l'espressione usuale della RR

$$\tau_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-V^2} dt. \quad [3.3.1]$$

Differenziando le equazioni [3.1.2] e [3.1.3] che definiscono le linee di universo di  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$ , si ottiene  $V = x/t$  ed utilizzando nuovamente tali equazioni per eliminare la  $x$ , si perviene rispettivamente alle seguenti espressioni

$$\tau_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{x_0}\right)^2}} dt = x_0 \int_{\frac{t_1}{x_0}}^{\frac{t_2}{x_0}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du ; \quad [3.3.2]$$

$$\tau_{12}^+ = \int_{t_1^+}^{t_2^+} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{x_0+h}\right)^2}} dt = (x_0+h) \int_{\frac{t_1^+}{x_0+h}}^{\frac{t_2^+}{x_0+h}} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du. \quad [3.3.3]$$

Se ora consideriamo l'intersezione delle due iperboli con due rette di velocità coordinata costante  $t=V_1x$  e  $t=V_2x$  (come illustrato in figura 5), si ottengono due coppie di punti  $P(x,t)$  nello spazio di Minkowski.

Le coordinate di questi punti si possono calcolare abbastanza facilmente.

Utilizzando l'usuale notazione  $\gamma = \sqrt{1-V^2}$ , si trova:

$$P_1 = \frac{\gamma_1}{g}(1, V_1); \quad P_1^+ = \frac{\gamma_1}{g^+}(1, V_1); \quad [3.3.4]$$

$$P_2 = \frac{\gamma_2}{g}(1, V_2); \quad P_2^+ = \frac{\gamma_2}{g^+}(1, V_2), \quad [3.3.5]$$

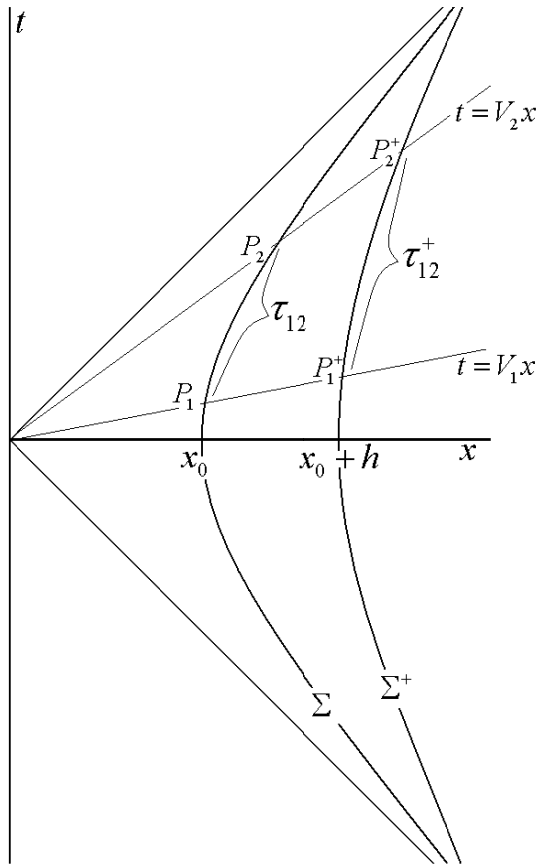


Figura 5

da cui si vede che le coordinate di  $P$  e  $P^+$  sono in una semplice proporzione

$$\frac{t_1^+}{t_1} = \frac{t_2^+}{t_2} = \frac{g}{g^+} = \frac{x_0 + h}{x_0}. \quad [3.3.6]$$

Si può allora vedere che gli estremi di integrazione degli integrali [3.3.2] e [3.3.3] sono uguali e, dividendo fra loro le due equazioni, si ricava

$$\frac{\tau_{12}^+}{\tau_{12}} = \frac{g}{g^+} = \frac{x_0 + h}{x_0}. \quad [3.3.7]$$



Possiamo sintetizzare tale risultato scrivendo che:

*gli intervalli di tempo proprio lungo due iperboli di Rindler, presi fra due eventi avente la stessa velocità coordinata, sono fra loro in una proporzione fissa.*

Siccome gli eventi che hanno la stessa velocità coordinata possono essere considerati simultanei, questo fatto dimostra la proprietà 3) elencata nel paragrafo 3.1.

Ponendo  $\Delta\tau_{12} = \tau_{12}^+ - \tau_{12}$ , l'equazione [3.3.7] può essere scritta anche come

$$\frac{\Delta\tau_{12}}{\tau_{12}} = \frac{\tau_{12}^+ - \tau_{12}}{\tau_{12}} = gh, \quad [3.3.8]$$

che è stata dimostrata da Desloge durante la sua analisi dei sistemi di riferimento uniformemente accelerati (7)(8).

### 3.4 Distanza radar fra due iperboli di Rindler

Consideriamo nuovamente una retta formata da punti aventi la stessa velocità coordinata nello spazio di Minkowski  $t = V \cdot x$ . L'intersezione di questa retta con le iperboli descritte da  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$ , da luogo a due punti aventi coordinate

$$P_V = \frac{\gamma}{g}(1, V); \quad P_V^+ = \frac{\gamma}{g^+}(1, V). \quad [3.4.1]$$

Le rette che descrivono raggi di luce che partono da  $P_V$  e  $P_V^+$  in direzione dell'iperbole opposta su cui si trova l'altro punto, hanno rispettivamente le seguenti equazioni

$$t = x - \gamma \frac{1-V}{g}; \quad t = -x + \gamma \frac{1+V}{g^+}. \quad [3.4.2]$$

Risolvendo il sistema fra tali rette e l'iperbole opposta

$$\left\{ \begin{array}{l} t = x - \gamma \frac{1-V}{g} \\ x^2 - t^2 = \frac{1}{(g^+)^2} \end{array} \right.; \quad \left\{ \begin{array}{l} t = -x + \gamma \frac{1+V}{g^+} \\ x^2 - t^2 = \frac{1}{g^2} \end{array} \right., \quad [3.4.3]$$

si trovano i seguenti punti coordinati

$$P_2 = \frac{\gamma g^+}{2} \left( \frac{1+V}{(g^+)^2} + \frac{1-V}{g^2}, \frac{1+V}{(g^+)^2} - \frac{1-V}{g^2} \right); \quad [3.4.4]$$

$$P_2^+ = \frac{\gamma g}{2} \left( \frac{1+V}{(g^+)^2} + \frac{1-V}{g^2}, \frac{1+V}{(g^+)^2} - \frac{1-V}{g^2} \right). \quad [3.4.5]$$

Nello stesso modo si possono ricavare i punti da cui partono i raggi di luce che arrivano nei punti  $P_V$  e  $P_V^+$ , che hanno rispettivamente le seguenti coordinate

$$P_1 = \frac{\gamma g^+}{2} \left( \frac{1+V}{g^2} + \frac{1-V}{(g^+)^2}, \frac{1+V}{g^2} - \frac{1-V}{(g^+)^2} \right); \quad [3.4.6]$$

$$P_1^+ = \frac{\gamma g}{2} \left( \frac{1+V}{g^2} + \frac{1-V}{(g^+)^2}, \frac{1+V}{g^2} - \frac{1-V}{(g^+)^2} \right). \quad [3.4.7]$$

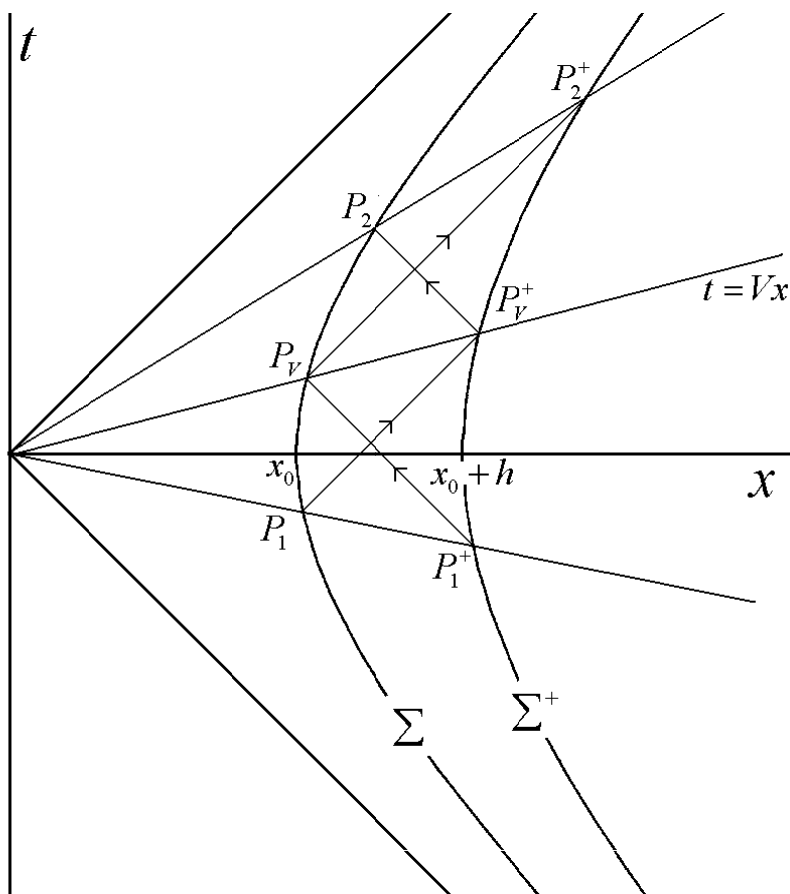


Figura 6

Si vede immediatamente che le coordinate delle coppie di punti  $P_1 P_1^+$  e  $P_2 P_2^+$  differiscono fra loro solamente per un fattore moltiplicativo, e quindi sono allineate con l'origine (come illustrato in figura 6). Abbiamo quindi dimostrato il seguente risultato che, in base alle mie conoscenze, non risulta essere stato dimostrato precedentemente in modo esplicito:

*Raggi di luce che passano attraverso una coppia di eventi aventi la stessa velocità coordinata e che si trovano su due iperboli di Rindler, intersecano le altre iperboli di Rindler in punti aventi la stessa velocità coordinata.*

Questa proprietà non era fra quelle richieste in partenza e semplificherà il confronto operativo del ritmo di marcia di due orologi che si trovano a una quota differente (su due iperboli differenti).

Nel paragrafo 3.1 avevamo dimostrato che per tutti gli eventi con la stessa velocità coordinata esiste una trasformazione di Lorentz che li trasforma in

un riferimento in cui si trovano entrambi sull'asse delle  $x$  a  $t=0$ , dimostrando quindi la loro simultaneità. Con il risultato appena dimostrato, si vede ora chiaramente in che modo due osservatori giacenti su due differenti iperboli di Rindler si scambiano segnali luminosi, e come possano definire il concetto di simultaneità in maniera operativa.

Possiamo ora calcolare il tempo  $\tau_S$  misurato dall'osservatore posto in  $\Sigma$ , affinché un raggio di luce copra la distanza per andare da  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$ , e il relativo tempo di ritorno  $\tau_R$ .

$$\tau_S = \int_{t_V}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{x_0}\right)^2}} dt = x_0 \int_{\frac{t_V}{x_0}}^{\frac{t_2}{x_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du; \quad [3.4.8]$$

$$\tau_R = \int_{t_1}^{t_V} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{x_0}\right)^2}} dt = x_0 \int_{\frac{t_1}{x_0}}^{\frac{t_V}{x_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du. \quad [3.4.9]$$

Dal calcolo si vede che, secondo le misure di  $\Sigma$ , i tempi propri impiegati dalla luce per andare e tornare da  $\Sigma$  a  $\Sigma^+$  sono fra loro uguali e valgono:

$$h_{RAD} = \tau_S = \tau_R = x_0 \ln \frac{x_0 + h}{x_0} = \frac{1}{g} \ln(1 + gh) \quad [3.4.10]$$

Un calcolo del tempo proprio misurato da un osservatore che si trova in  $\Sigma^+$ , porta invece al seguente risultato

$$h_{RAD}^+ = \tau_S^+ = \tau_R^+ = (x_0 + h) \ln \frac{x_0 + h}{x_0} = \frac{1}{g^+} \ln(1 + gh). \quad [3.4.11]$$

Questo è un'altra proprietà importante che, a differenza di Desloge (8)(7), abbiamo qui dimostrato tramite calcolo esplicito.

Possiamo quindi dire che:

*Il tempo proprio impiegato da un raggio di luce per raggiungere un'altra iperbole di Rindler, misurato da un osservatore a riposo con un'iperbole di Rindler, è uguale al tempo di ritorno.*

Con questo abbiamo completato la dimostrazione della proprietà 4) del paragrafo 3.1.

Chiudiamo questo paragrafo con una considerazione importante che ci sarà utile successivamente. Le equazioni [3.4.10] e [3.4.11] ci forniscono il tempo proprio trascorso in  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$  per scambiare un raggio di luce con l'altro osservatore, e quindi anche l'informazione che un osservatore solidale con  $\Sigma$  o  $\Sigma^+$  può dedurre sulla distanza relativa dell'altro. Moltiplicando tale tempo per la velocità della luce ( $c = 1$  nelle nostre unità) otteniamo la distanza radar fra i due osservatori, che abbiamo denotato con  $h_{RAD}$  e  $h_{RAD}^+$ , a seconda che tale misura sia stata effettuata da un osservatore solidale rispettivamente con  $\Sigma$  o con  $\Sigma^+$ .

### 3.5 Confronto fra orologi e dilatazione dei tempi

Abbiamo terminato la dimostrazione di tutte le caratteristiche fisiche del SRCL e possiamo ora finalmente passare alla descrizione di un esperimento ideale in cui due orologi identici si trovano a quote diverse, a riposo con un campo di Rindler.

Com'è consolidata tradizione, assegniamo un nome ai fisici coinvolti nel processo di misura. Chiameremo Alice l'osservatrice posta a riposo con  $\Sigma$  e Bob l'osservatore posto a riposo con  $\Sigma^+$ . I due sperimentatori eseguiranno una misura per confrontare il ritmo di marcia dei propri orologi secondo lo schema illustrato nella figura 7, che riproduce la situazione come verrebbe osservata da un SRCL.

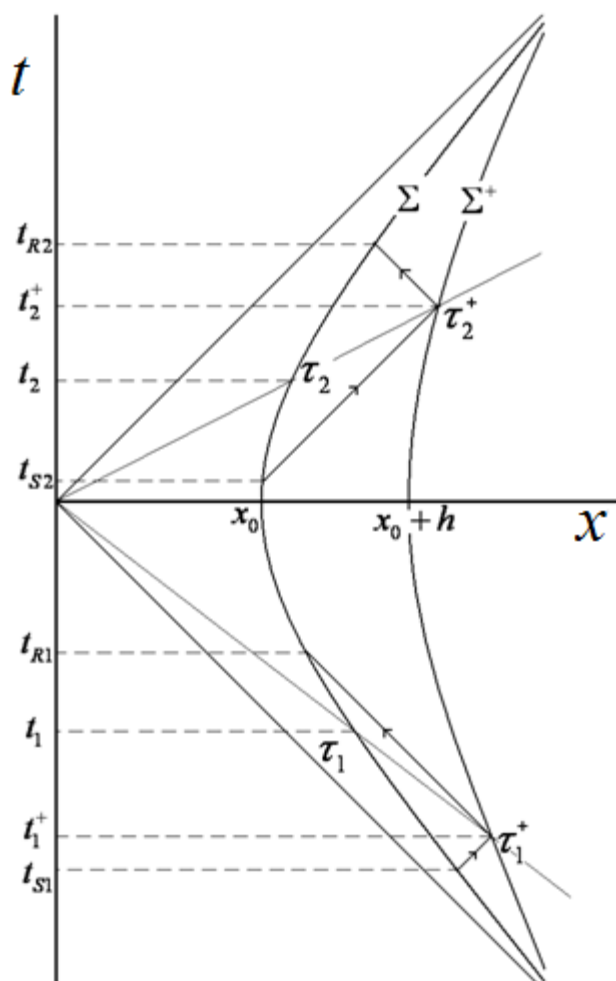


Figura 7

- a) Al tempo  $t_{S1}$  Alice invia un segnale luminoso verso l'alto.
- b) Al tempo  $t_1^+$  il segnale luminoso è ricevuto da Bob. Appena ricevuto il segnale, Bob invia un segnale di ritorno ad Alice e inizia a misurare il tempo che trascorre secondo il suo orologio.
- c) Al tempo  $t_{R1}$  Alice riceve il segnale di ritorno da Bob. Adottando la convenzione di Einstein sulla sincronizzazione degli orologi, riterrà che Bob abbia iniziato la misura quando il suo tempo proprio assumeva il valor medio fra il tempo d'invio e il tempo di ricezione del segnale luminoso scambiati con Bob:  $\tau_1 = \frac{\tau_{S1} + \tau_{R1}}{2}$ , e questo avviene al tempo  $t_1$  delle coordinate del SRCL. Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato l'evento di emissione e di ricezione di un raggio di luce sono allineati con l'origine delle coordinate, e quindi i tempi propri  $\tau_1$  e  $\tau_1^+$  vengono considerati simultanei da entrambi gli osservatori.
- d) Al tempo  $t_{S2}$  Alice invia un secondo segnale luminoso verso Bob per comunicargli che deve terminare il cronometraggio.
- e) Al tempo  $t_2^+$  il segnale è ricevuto da Bob. Appena ricevuto il segnale, Bob legge il tempo trascorso sul suo orologio e invia immediatamente un segnale luminoso di ritorno in direzione di Alice, ed anche l'informazione del tempo trascorso, secondo la misura effettuata con il suo orologio.
- f) Al tempo  $t_{R2}$  Alice riceve il segnale di ritorno da Bob. Alice riterrà che Bob abbia arrestato il cronometro quando il suo tempo proprio assumeva il valor medio fra il tempo d'invio e il tempo di ricezione del secondo segnale scambiato con Bob:  $\tau_2 = \frac{\tau_{S2} + \tau_{R2}}{2}$ , che corrisponde al tempo coordinato  $t_2$ . Anche in questo caso, nello spazio di Minkowski del SRCL, emissione e ricezione del segnale di luce di ritorno sono eventi allineati con l'origine e i tempi propri  $\tau_2$  e  $\tau_2^+$  sono considerati simultanei da entrambi gli osservatori.

Tutte le misure necessarie sono state completate e Alice può confrontare il tempo misurato dal suo orologio con quello misurato da Bob. Si vede immediatamente che nella misura non vi è alcuna dipendenza dagli istanti d'invio e di ricezione del segnale d'inizio e fine misura.

In ogni caso Alice confronterà il tempo proprio  $\tau_{12}^+ = \tau_2^+ - \tau_1^+$ , sotteso dallo stesso angolo centrato nell'origine del SRCL.

Avevamo trovato nell'equazione [3.3.7] che il rapporto fra i tempi vale

$$\frac{\tau_{12}^+}{\tau_{12}} = \frac{g}{g^+} = \frac{x_0 + h}{x_0}, \text{ da cui avevamo ricavato l'equazione [3.3.8], che}$$

esprime lo scarto relativo fra i due orologi rispetto all'orologio posto in  $\Sigma$ .

Alice concluderà quindi che:

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\tau_{12} - \tau_{12}^+}{\tau_{12}} = gh. \quad [3.5.1]$$

Alice può anche assumere come metodologia di misura di confrontare i tempi propri di Bob, facendo riferimento all'intervallo di tempo proprio trascorso fra l'invio (o la ricezione) del primo e del secondo segnale luminoso; questo non comporterebbe alcuna differenza, in quanto Alice non farebbe altro che aggiungere o sottrarre ai tempi propri una quantità costante che quando si considera la differenza dei tempi si cancella.

La [3.5.1] era già stata provata da Desloge (11) per i SR uniformemente accelerati, ma senza fare ricorso a un procedimento esplicito, che a nostro avviso ha una notevole valenza didattica.

Chi dovesse non ritenere opportuno utilizzare questo esperimento ideale per introdurre alla dilatazione dei tempi causata dai campi gravitazionali, può invece sicuramente utilizzarlo per descrivere esplicitamente le proprietà di un riferimento accelerato della RR.



### 3.6 Dilatazione spaziale

Risolvendo le equazioni [3.4.10] e [3.4.11], si trova

$$h = x_0 \left( e^{gh_{RAD}} - 1 \right) = x_0 \left( e^{g^+ h_{RAD}^+} - 1 \right), \quad [3.6.1]$$

tramite cui è possibile riscrivere la formula della dilatazione dei tempi<sup>25</sup> nel seguente modo

$$\frac{\tau^+}{\tau} = 1 + gh = e^{gh_{RAD}} = e^{g^+ h_{RAD}^+}. \quad [3.6.2]$$

Questo risultato è consistente con il risultato della RG (21)

$$\frac{v^+}{v^-} = e^{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}, \quad [3.6.3]$$

che esprime il redshift in termini del potenziale gravitazionale newtoniano. Infatti, tenendo presente che nel nostro caso il campo vale  $g(x) = 1/x$ , il calcolo della differenza di potenziale vale:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} g(x) dx = \ln \frac{x_0 + h}{x_0} = \ln(1 + gh), \quad [3.6.4]$$

che inserito nell'equazione [3.6.3] fornisce nuovamente l'equazione della dilatazione dei tempi [3.6.2]. Per un campo gravitazionale uniforme Desloge ha invece provato la seguente espressione

$$\frac{v^+}{v^-} = e^{gh}, \quad [3.6.5]$$

che è formalmente equivalente alla [3.6.2], ma con l'accelerazione di gravità uguale per ciascun osservatore solidale con il campo gravitazionale ( $g = g^+$ ), e con la distanza misurata da un SRCL.

La derivazione della [3.6.5] è basata sulla seguente metrica

---

<sup>25</sup> E' interessante ricavare questo risultato anche seguendo una derivazione basata sulla perdita di energia di una particella quantistica che risale in campo gravitazionale (17) (45) (47).

$$ds^2 = e^{2gh} dt^2 - dh^2, \quad [3.6.6]$$

la cui derivazione è stata illustrata nel paragrafo 2.3.

Per una comprensione più approfondita della dilatazione spaziale, è utile calcolare come vengono misurate le distanze radar da due osservatori a differenti altezze. Dividendo fra loro le equazioni [3.4.10] e [3.4.11], si ricava la seguente espressione, dalla forma analoga a quella della dilatazione temporale<sup>26</sup>

$$\frac{h_{RAD}^+}{h_{RAD}} = \frac{x_0 + h}{x_0} = \frac{g}{g^+}. \quad [3.6.7]$$

E' anche interessante calcolare la distanza infinitesima misurata con metodi radar da due osservatori a riposo con il campo gravitazionale che si trovano a differenti altezze. Denoteremo con  $dh_{RAD}(x)$  una misura effettuata con metodo "radar" di una lunghezza infinitesima che si trova nella coordinata  $x$ , eseguita da un osservatore che si trova a riposo con  $\Sigma$ , e con  $dh_{RAD}^+(x)$  la misura della stessa grandezza, effettuata da un osservatore a riposo con  $\Sigma^+$ . Un calcolo diretto, arrestato al primo ordine ci porta alle seguenti espressioni:

$$dh_{RAD}(x) = x_0 \left( \ln \frac{x_0 + dh}{x_0} - \ln \frac{x_0}{x_0} \right) \approx \frac{x_0}{x} dh, \quad [3.6.8]$$

$$dh_{RAD}^+(x) = (x_0 + h) \left( \ln \frac{x_0 + dh}{x_0} - \ln \frac{x_0}{x_0} \right) \approx \frac{x_0 + h}{x} dh. \quad [3.6.9]$$

Il rapporto delle due distanze radar non dipende dalla coordinata  $x$ , e vale

$$\frac{dh_{RAD}^+}{dh_{RAD}} = \frac{x_0 + h}{x_0} = \frac{g}{g^+} \quad [3.6.10]$$

---

<sup>26</sup> Da questa relazione si vede che il lavoro per unità di massa è lo stesso per un osservatore in  $\Sigma$  ed in  $\Sigma^+$  ( $g h_{RAD} = g^+ h_{RAD}^+$ ).

<sup>27</sup> da cui si vede anche che  $\Sigma$  e  $\Sigma^+$  misurano lo stesso lavoro infinitesimo per unità di massa:  $d\phi = g^+ dh^+ = g dh$ .

### 3.7 Accelerazione di gravità

In questo paragrafo vogliamo confrontare le misure di uno stesso fenomeno fisico, effettuate da Alice ( $\Sigma$ ) e Bob ( $\Sigma^+$ ) tramite metodi radar.

Dalle equazioni [3.6.10] e [3.3.7] si vede che

$$\frac{dh_{RAD}^+(x)}{dh_{RAD}(x)} = \frac{g}{g^+} = \frac{d\tau^+}{d\tau}. \quad [3.7.1]$$

Per la medesima coppia di eventi Alice misurerà quindi intervalli spaziali e temporali in egual proporzione più brevi di quelli misurati da Bob, ottenendo quindi le stesse misure di velocità effettuate da Bob. Tuttavia, passando a una misura dell'accelerazione, il valore misurato da Alice deve essere maggiore, per via del fatto che il suo tempo proprio scorre più lentamente.

Siccome il rapporto fra i tempi propri [3.3.7] è esattamente in proporzione inversa rispetto alle accelerazioni locali, questo fatto sembra comportare che tramite misure di tipo radar Alice dovrebbe trovare che il valore cui è sottoposto un corpo in caduta libera lasciato cadere da un osservatore che si trova in  $\Sigma^+$  vale  $g$  e non  $g^+$ <sup>28</sup>.

Viceversa Bob dovrebbe trovare che l'accelerazione di un oggetto in caduta che si trova in  $\Sigma$  vale  $g^+$ . Generalizzando questo fatto si è portati a concludere che Alice misurerà in tutto lo spazio un valore di accelerazione di gravità  $g$  e che Bob misurerà dappertutto un valore  $g^+$ .

Per dare un supporto rigoroso a questo ragionamento, calcoleremo ora la posizione di un oggetto solidale con il SRCL come viene "visto" dalle misure radar effettuate da un osservatore che si trova in  $\Sigma$ .

Analizziamo quindi la seguente situazione (illustrata in fig.5): al tempo  $t = 0$  un corpo si trova fermo rispetto al SRCL (e quindi in caduta libera

---

<sup>28</sup> Ricordiamo che, a dispetto della notazione  $g^+ < g$ . Si ha, infatti,  $\frac{g^+}{g} = \frac{x_0}{x_0 + h}$ .

rispetto a  $\Sigma$ ) e a una quota  $h^*$ <sup>29</sup> rispetto a un osservatore solidale con  $\Sigma$  stesso.

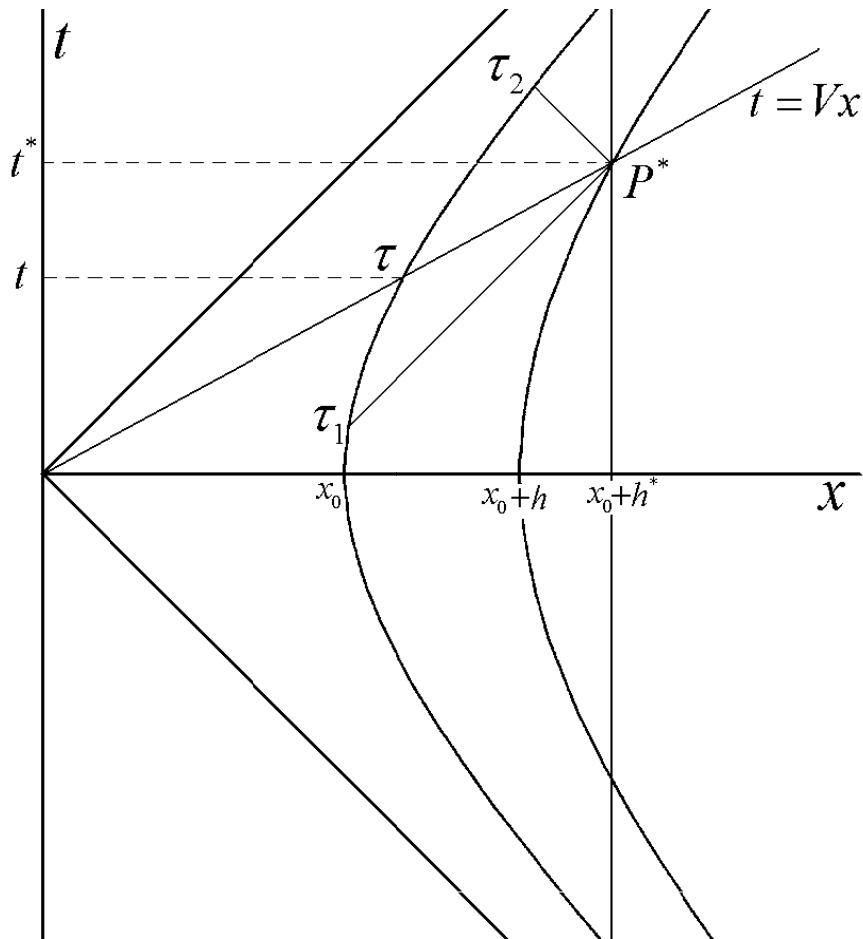


Figura 8

Utilizzando le equazioni [3.3.4] e [3.3.5], si trova che, a  $t = 0$ , la coordinata dell'iperbole che passa per  $P^*(x_0 + h^*, t^*)$  può essere anche scritta come:

$$x_0 + h = (x_0 + h^*)\sqrt{1 - V^2}. \quad [3.7.2]$$

Mettendo questo valore nella equazione [3.4.11], è possibile calcolare la distanza radar misurata da  $\Sigma$  di un corpo che cade da una quota  $h^*$ , come funzione della velocità coordinata, e si ottiene:

<sup>29</sup> il cui valore è però misurato da un osservatore solidale con il SRCL stesso.

$$h_{RAD}(V) = x_0 \ln(1 + gh^*) + \frac{x_0}{2} \ln(1 - V^2). \quad [3.7.3]$$

Utilizziamo ora la relazione [2.1.15] per eliminare la dipendenza dalla velocità coordinata<sup>30</sup>

$$V = \tanh g\tau,$$

e troviamo la seguente equazione del moto di un corpo in caduta libera

$$h_{RAD}(\tau) = h_{RAD}(0) - x_0 \ln(\cosh g\tau). \quad [3.7.4]$$

Derivando rispetto al tempo proprio di  $\Sigma$ , si trova la corrispondente velocità “radar misurata”  $v_{RAD}(\tau) = -\tanh g\tau$ , che ha lo stesso valore, e direzione opposta della velocità coordinata  $V(\tau)$  e non dipende dal punto di partenza della caduta  $h^*$ , ma solamente dal valore  $g$  dell’accelerazione di gravità in  $\Sigma$ . Per questa ragione, un osservatore a riposo con il campo gravitazionale osserverà (tramite misure radar) tutte le parti del SRCL muoversi alla stessa velocità.

E’ possibile anche calcolare l’accelerazione  $a_{RAD}(\tau) = -g \cosh^{-2} g\tau$ , il cui valore non dipende da  $h^*$ . Per  $\tau = 0$  si trova  $a_{RAD}(0) = -g$ , il che conferma il fatto (qualitativamente descritto prima) che, dal punto di vista di un osservatore solidale con  $\Sigma$ , che effettua misure di tipo radar, il campo appare spazialmente uniforme.

Lo stesso ragionamento si applica a un osservatore a riposo con  $\Sigma^+$ , ma in questo caso egli osserverà un’accelerazione d’intensità minore, di valore  $g^+$ .

---

<sup>30</sup> Si può ricavare questa relazione anche con una procedura più legata al processo di misura ideale. E’, infatti, possibile dimostrare che il tempo medio  $\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$  fra l’invio e

il ritorno di un raggio di luce che da  $\Sigma$  arriva nel punto  $P^*$  in cui la velocità coordinata vale  $V$  è  $\tau = \frac{x_0}{2} \ln \frac{1+V}{1-V}$ . Invertendo questa relazione si trova  $V = \tanh g\tau$ .

E' degno d'interesse osservare un'altra peculiarità: muovendosi lungo la direzione  $x$  in un campo di Rindler infinito, l'accelerazione locale  $g$  assume ogni possibile valore. Questo ha un'importante conseguenza.

*Tutti i campi di Rindler infinitamente estesi sono equivalenti.*

A prima vista questa appare una conclusione piuttosto strana, perché sembrerebbe che non vi possa essere una dipendenza dal valore delle masse che generano il campo. Bisogna però ricordare due fatti:

- 1) Il nostro punto di partenza iniziale è puramente ideale, e non abbiamo investigato sul fatto se un tale campo possa essere realizzato in pratica.
- 2) i campi di Rindler, se realizzabili, si potrebbero differenziare l'uno dall'altro per la posizione delle masse che generano il campo. In tal caso i campi si differenzerebbero per il valore dell'accelerazione di gravità sulla superficie delle masse stesse.

Se consideriamo il caso di una stella (massa sferica), la situazione è in parte analoga. Infatti, partendo da un punto qualunque, se dimezziamo la distanza che ci separa dal centro di massa della stella, l'accelerazione quadruplica, in modo indipendente dalla massa della stella. Nel caso di un campo di Rindler, la situazione è simile ma, essendo la legge di tipo diverso, possiamo riformulare la frase nel modo seguente: partendo da un punto qualunque, se dimezziamo la distanza che ci separa dall'origine (orizzonte degli eventi di un campo di Rindler), l'accelerazione di gravità raddoppia. In effetti, alcuni articoli (28)(29) discutono la possibilità di una possibile connessione fra la metrica di Rindler con lo studio delle soluzioni esterne di una massa con distribuzione avente simmetria piana. Approfondiremo questo punto nel capitolo 5 (paragrafo 5.6).

Per quanto è nelle mie conoscenze, la maggioranza delle considerazioni svolte in questo paragrafo non sono state evidenziate prima in altri lavori.

### 3.8 Proprietà della metrica

Partendo dalle proprietà che abbiamo dimostrato nei paragrafi precedenti, vogliamo qui dedurre le proprietà della metrica del campo gravitazionale che abbiamo studiato, per poi eseguire alcuni confronti con altre metriche. Avevamo trovato che il rapporto fra la velocità di “scorrimento” del tempo segnato da due orologi a riposo con il campo gravitazionale era il seguente

$$\frac{\tau(x_0 + h)}{\tau(x_0)} = \frac{x_0 + h}{x_0} = 1 + gh. \quad [3.8.1]$$

Denotando ora la quota  $h$  con la lettera  $x$ , e ponendo l'origine delle coordinate in  $x_0$ , possiamo scrivere la [3.8.1] nel seguente modo

$$\frac{\tau(x)}{\tau(0)} = 1 + gx. \quad [3.8.2]$$

Siccome il campo che stiamo considerando è statico, è possibile limitarsi allo studio di una metrica diagonale

$$ds^2 = A(x)dt^2 - B(x)dx^2. \quad [3.8.3]$$

Considerando il tempo proprio trascorso da un orologio a riposo con il campo gravitazionale  $d\tau = \sqrt{A(x)}dt$ , e confrontando  $d\tau(x)$  con  $d\tau(0)$ , si trova immediatamente che  $A(x) = (1 + gx)^2$ . Allo scopo di trovare l'espressione di  $B(x)$ , è sufficiente mettere in relazione la distanza radar che abbiamo calcolato nell'equazione [3.4.10], con quella che si ricava dai coefficienti della metrica:

$$A(0) \int_0^x \sqrt{\frac{B(u)}{A(u)}} du = \frac{1}{g} \ln(1 + gx). \quad [3.8.4]$$

Ponendo  $A(x) = (1 + gx)^2$  e differenziando, si trova:

$$\frac{\sqrt{B(x)}}{1 + gx} = \frac{1}{1 + gx}, \quad [3.8.5]$$

da cui si ricava  $B(x) = 1$ .

L'elemento di linea della metrica risultante

$$ds^2 = (1 + gx)^2 dt^2 - dx^2, \quad [3.8.6]$$

è quello della metrica di Rindler.

Una deduzione simile a quella qui riportata (basata su PE ma tramite un formalismo differente) si trova anche nella trattazione di Mould (26).

Si può pervenire a tale risultato anche utilizzando la soluzione generale dell'equazione di campo di Einstein per uno spazio piatto (imponendo la condizione  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ ). Rohrlich è stato il primo a mostrare (20) che in questo caso si ha la seguente relazione fra i coefficienti della metrica

$$B(x) = \left( \frac{1}{g} \frac{d}{dx} \sqrt{A(x)} \right)^2. \quad [3.8.7]$$

La metrica di Rindler dell'equazione [3.8.6] è solo un caso particolare della soluzione dell'equazione di campo e, senza ricorrere al PE, non sarebbe possibile scegliere questa soluzione fra le infinite che soddisfano la [3.8.7].

Rohrlich aveva evidenziato che tre di queste infinite soluzioni rivestono un particolare significato fisico (20). La prima di queste fornisce la metrica di Rindler [3.8.6], mentre le altre due danno luogo alle seguenti:

$$ds^2 = (1 + 2gx') dt'^2 - (1 + 2gx')^{-1} dx'^2, \quad [3.8.8]$$

metrica utilizzata da Kottler-Whittaker;

$$ds^2 = e^{2gx''} (dt''^2 - dx''^2), \quad [3.8.9]$$

metrica utilizzata da Lass (30).

Abbiamo tuttavia già mostrato (capitolo 2) che queste metriche si ottengono entrambe da quella di Rindler con un semplice cambio di coordinate, e quindi non descrivono un campo con caratteristiche fisiche differenti.



Confrontiamo ora le metriche sopra ricavate con l'elemento di linea della metrica di Schwarzschild (senza considerare i termini angolari)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad [3.8.10]$$

L'espansione in serie di Taylor arrestata al secondo ordine fornisce la seguente espressione

$$A(x) = B^{-1}(x) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \approx \left(1 - \frac{2GM}{r_0} + \frac{2GM}{r_0^2}(r - r_0) - \frac{2GM}{r_0^3}(r - r_0)^2\right), \quad [3.8.11]$$

che tramite le sostituzioni  $x = r - r_0$  e  $g = \frac{GM}{r_0^2}$  si può così riscrivere:

$$ds^2 = \left(1 - 2gr_0 + 2gx - 2\frac{g}{r_0}x^2\right) dt^2 - \left(1 - 2gr_0 + 2gx - 2\frac{g}{r_0}x^2\right)^{-1} dx^2. \quad [3.8.12]$$

Se è verificata la condizione  $|x| \ll r_0$ , si possono prendere solo i termini al primo ordine

$$ds^2 = (1 - 2gr_0 + 2gx) dt^2 - (1 - 2gr_0 + 2gx)^{-1} dx^2. \quad [3.8.13]$$

E' ora sufficiente effettuare la sostituzione  $x' = x - r_0$ , che corrisponde solamente ad una traslazione dell'origine, per ottenere la metrica di Rindler dell'equazione [3.8.6].

La metrica dell'equazione [3.8.13] è anche detta "Nearly Newtonian Gravitational Field" (31), e viene generalmente derivata dalla metrica di Schwarzschild, per un campo gravitazionale debole. Tuttavia in letteratura si trovano altre derivazioni di questo risultato (18) che si basano sulla località del campo.

L'approssimazione della metrica [3.8.13] va naturalmente presa con "cautela", in quanto ha perso diverse delle caratteristiche peculiari della metrica di Schwarzschild. In particolare il tensore di Riemann è ora nullo dappertutto  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$  (nella metrica di Schwarzschild si ha  $R_{\mu\nu} = 0$ , ma  $R_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0$ ). Vogliamo però sottolineare che questa metrica descrive il limite della bassa gravità, o di un campo gravitazionale locale, della

soluzione di Schwarzschild, e questa sembra essere l'unica possibilità di trovare una buona approssimazione del campo gravitazionale uniforme nell'universo fisico reale.

Partendo invece dalla metrica di Desloge [3.6.6] e operando la trasformazione  $e^{gx} = 1 + gx'$ , si ottiene

$$ds^2 = (1 + gx') dt^2 - (1 + gx')^{-2} dx^2. \quad [3.8.14]$$

Questa metrica non riproduce il "Nearly Newtonian Gravitational Field" della [3.8.13] e i suoi termini del secondo ordine sono differenti da quelli della espansione in serie della metrica di Schwarzschild di equazione [3.8.12].

## 4 Deflessione della luce e caduta libera

Nel 1911 Einstein predisse la deflessione dei raggi luminosi di una stella quando passano vicino al sole, e suggerì che tale deflessione potesse essere osservata durante un'eclisse solare. Questo era il primo esempio di estensione del PE a tutte le leggi fisiche. Il suo calcolo si basava sull'ipotesi di una dilatazione temporale nella direzione radiale e sulla conseguente variazione della velocità della luce. Entrambi questi effetti erano conseguenza diretta del PE. Il calcolo della deflessione totale dava come risultato

$$\alpha = -\frac{2GM}{c^2 R}.$$

Questo valore predice solamente la metà dell'effetto, rispetto alla sua predizione successiva, che concordò con le prime osservazioni (oggi verificate con un errore inferiore all'1%), e questo fu uno dei fattori chiave per l'accettazione della RG.

Sebbene molti autori neghino che in assenza di curvatura si possa parlare di gravità, in letteratura vi sono parecchi lavori in cui, per descrivere problemi nel campo gravitazionale, si fa uso di un riferimento uniformemente accelerato descritto da iperboli di Rindler (26)(17)(14)(15). In particolare, in due di questi articoli (14)(15)<sup>31</sup>, si affrontano e si risolvono problemi fisici utilizzando le iperboli di Rindler nel modo mostrato nel precedente capitolo. Lo studio della deflessione di un raggio luminoso in un campo gravitazionale tramite il PE è stato affrontato da diversi autori sia nel caso di campo uniforme (32)(33), che nel caso di un campo centrale (34)(35).

Nel capitolo precedente abbiamo utilizzato un SRCL in uno spazio di Rindler per dedurre alcuni effetti quali la contrazione (dilatazione) del tempo e dello spazio. Lo studio è stato però sviluppato in uno spazio a una

---

<sup>31</sup> Entrambi usciti successivamente al primo degli articoli dell'autore del presente lavoro di tesi (22).

sola dimensione spaziale. In questo capitolo vogliamo estendere questo studio a uno spazio con le dimensioni trasversali (perpendicolari alla direzione del campo).

Tramite un esperimento ideale (paragrafo 4.1) che può avere interessanti applicazioni alla didattica, determineremo la traiettoria descritta da un raggio di luce emesso con una direzione iniziale perpendicolare al campo, come questa sarebbe osservata da un osservatore solidale con il campo stesso.

Estenderemo quindi questo tipo di approccio allo studio della traiettoria di un oggetto massivo (paragrafo 4.2).

## 4.1 Traiettoria di un raggio di luce

Per affrontare questo problema, esamineremo le traiettorie dei punti solidali con un campo gravitazionale di Rindler, visti da un SRCL.

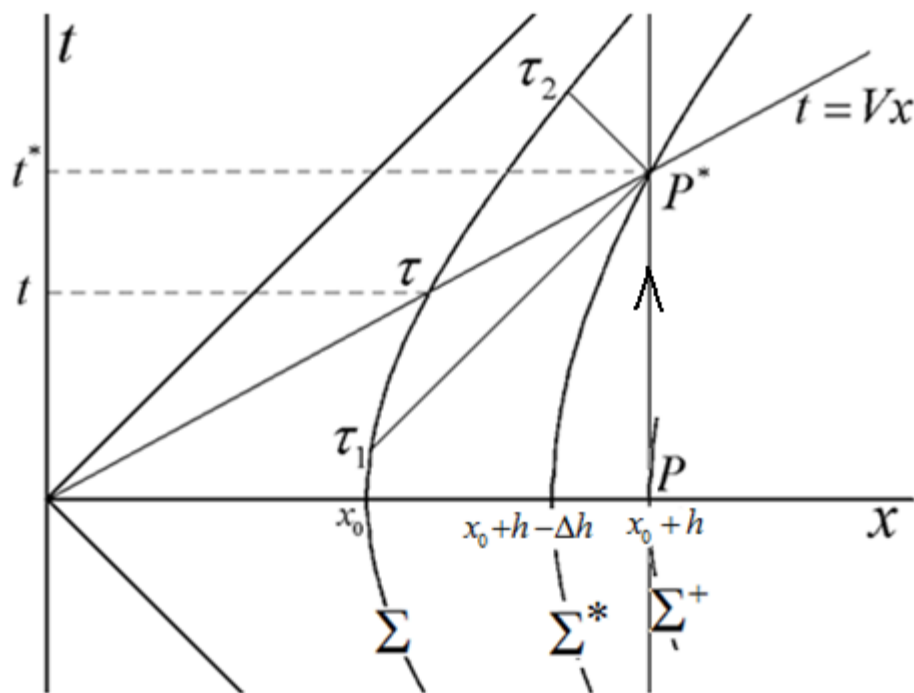


Figura 9

Rispetto alla trattazione svolta nel capitolo precedente, sarà ora necessario estendere le dimensioni dello spazio, aggiungendo almeno una coordinata perpendicolare al campo, che identificheremo con l'asse delle  $y$ , direzione che supporremo non subisca alcuna contrazione (dilatazione)<sup>32</sup>, come previsto dalle trasformazioni della RR che legano un SR uniformemente accelerato a un SR inerziale<sup>33</sup>.

Per fissare le idee, supponiamo che all'istante  $t=0$ , da un punto di coordinate  $y=0$  e  $x=x_0+h$ , sia inviato un raggio luminoso nella direzione  $y$ , come illustrato in figura 9. Per il PE di equivalenza si suppone che il raggio di luce mantenga una direzione costante rispetto al SRCL, e che quindi la coordinata  $x$  rimanga costante. Il raggio di luce perderà invece

<sup>32</sup> Vedremo tuttavia che, passando alle misure di tipo radar effettuate da un osservatore solidale con il campo, questa ipotesi non potrà essere mantenuta.

<sup>33</sup> Vedere ad esempio (27)

“quota” rispetto agli osservatori solidali con il campo gravitazionale, e raggiungerà la quota dell’osservatore posto in  $\Sigma^*$  all’istante di tempo  $t^*$ .

Per visualizzare la situazione in modo corretto, si deve pensare che il raggio luminoso ha una direzione uscente dal foglio, ma inclinata, in modo tale che il segmento  $PP^*$  (illustrato in figura 9) rappresenti la proiezione della linea di universo del raggio di luce nel piano  $x t$ . Allo stesso modo anche le iperboli  $\Sigma$ ,  $\Sigma^*$  e  $\Sigma^+$ , vanno pensate come una proiezione perpendicolare dei corrispondenti iperpiani iperboliche sul piano del foglio.

Affinché il procedimento sia il più generale possibile, vogliamo però verificare che il calcolo del tempo proprio sia indipendente dall’istante in cui il segnale luminoso viene emesso, e imposteremo il calcolo in un modo un poco più complicato.

Facendo ora riferimento alla figura 10, analizziamo la seguente situazione: ad un istante di tempo  $t_1$  (ora arbitrario) viene emesso un raggio di luce con direzione parallela al terreno da un osservatore a riposo con  $\Sigma^+$ .

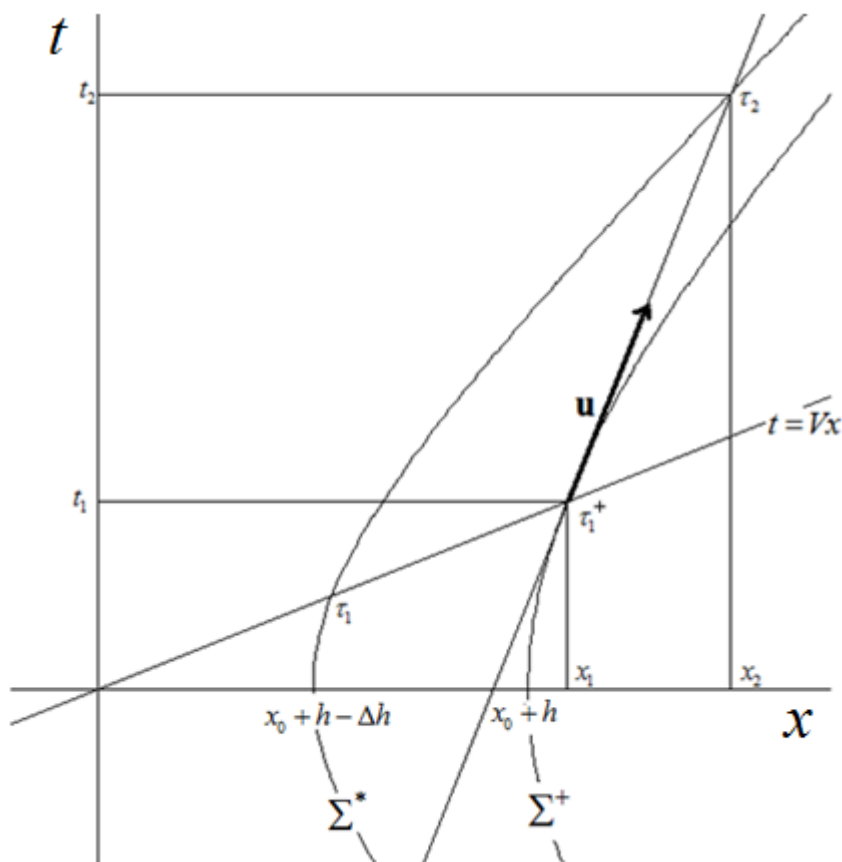


Figura 10

Dalla [2.1.11], sappiamo che la forma parametrica dell'iperboloide su cui si trova  $\Sigma^+$  è:

$$\begin{cases} t = (x_0 + h) \sinh g^+ \tau^+ \\ x = (x_0 + h) \cosh g^+ \tau^+ \end{cases} \quad [4.1.1]$$

Affinché il raggio di luce sia parallelo al terreno (coordinata  $y$ ), la sua direzione nel piano  $x t$  seguirà quella della 4-velocità istantanea di  $\Sigma^+$ , le cui componenti nel piano  $x t$  sono:

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh g^+ \tau_1^+; \quad \frac{dx}{d\tau} = \sinh g^+ \tau_1^+. \quad [4.1.2]$$

Ricordando che  $g^+ = \frac{1}{x_0 + h}$ , e che  $g^+ \tau^+ = g \tau$ , la 4-velocità<sup>34</sup> del raggio di luce può essere scritta nella seguente forma

$$u^\mu = (u^0, u^x, u^y) = (k \cosh g \tau_1, k \sinh g \tau_1, u^y), \quad [4.1.3]$$

dove  $k$  è una costante da determinare.

Tenendo presente che valgono le seguenti condizioni

$$u^0 = 1; \quad u^\mu u_\mu = 0, \quad [4.1.4]$$

possiamo determinare il valore di  $k$  e quello di  $u^y$ , ottenendo:

$$u^\mu = (1, \tanh g \tau_1, 1 / \cosh g \tau_1). \quad [4.1.5]$$

Per il PE la traiettoria del raggio di luce nel SRCL sarà rettilinea e può quindi essere rappresentata tramite l'equazione parametrica di una retta:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + h) \sinh g \tau_1 \\ (x_0 + h) \cosh g \tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \tanh g \tau_1 \\ 1 / \cosh g \tau_1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in R. \quad [4.1.6]$$

Vogliamo ora calcolare il tempo proprio necessario a far sì che il raggio di luce raggiunga un osservatore solidale con  $\Sigma^*$  (che al tempo  $t = 0$  si trova a

---

<sup>34</sup> Per semplicità, rappresenteremo qui i vettori dello spaziotempo 4-dimensionale omettendo la coordinata  $z$ , che supponiamo rimanga costante.

una quota inferiore di una quantità  $\Delta h$ ). Siccome vogliamo riferire le misure a un osservatore che si trova a riposo con il campo (a una quota generica in cui l'accelerazione di gravità vale  $g$ ), ci interessa calcolare il tempo proprio  $\tau_2$  in cui il raggio di luce intersecherà l'iperboloide solidale con  $\Sigma^*$ , la cui equazione è<sup>35</sup>

$$\begin{cases} t = (x_0 + h - \Delta h) \sinh g\tau \\ x = (x_0 + h - \Delta h) \cosh g\tau \end{cases} \quad [4.1.7]$$

Impostiamo quindi la seguente equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} (x_0 + h) \sinh g\tau_1 \\ (x_0 + h) \cosh g\tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \tanh g\tau_1 \\ 1/\cosh g\tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + h - \Delta h) \sinh g\tau_2 \\ (x_0 + h - \Delta h) \cosh g\tau_2 \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \lambda \in R. \quad [4.1.8]$$

Eliminando il parametro  $\lambda$  dalle prime due equazioni, si ottiene:

$$(x_0 + h)(\sinh^2 g\tau_1 - \cosh^2 g\tau_1) = (x_0 + h - \Delta h)(\cosh g\tau_1 \cosh g\tau_2 - \sinh^2 g\tau_1 \sinh g\tau_2),$$

da cui si ricava la seguente relazione fra la differenza dei tempi propri  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  e la differenza di quota  $\Delta h$

$$\frac{x_0 + h}{x_0 + h - \Delta h} = \cosh g\Delta\tau. \quad [4.1.9]$$

Questa relazione è molto importante, perché evidenzia che il tempo proprio impiegato  $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$  non dipende dal tempo proprio  $\tau_1$  in cui è emesso il raggio di luce, ma solo dal rapporto delle quote del punto di partenza e del punto di arrivo del raggio luminoso (iperboloidi  $\Sigma^+$  e  $\Sigma^*$ ).

Siccome siamo interessati a determinare la traiettoria come sarebbe misurata da un osservatore a riposo con il campo che si trova in  $\Sigma$ , esprimiamo  $h$  e  $\Delta h$ , utilizzando le coordinate radar date dalla [3.6.1].

In tal modo la [4.1.9] diventa

$$e^{g\Delta h_{RAD}} = \cosh g\Delta\tau. \quad [4.1.10]$$

---

<sup>35</sup> Ricordiamo che, per le proprietà dimostrate nel capitolo precedente, si ha  $g\tau = g^+\tau^+$ .



Questa formula evidenzia chiaramente che, secondo le misure effettuate da un osservatore che si trova a riposo con il campo, la deflessione verticale misurata con metodi radar ( $\Delta h_{RAD}$ ) non dipende dalla quota cui è stato emesso il raggio di luce, ma solamente dal tempo proprio trascorso e dall'accelerazione cui è soggetto l'osservatore che esegue la misura. Questo fatto è congruente con quanto abbiamo evidenziato nei capitoli precedenti e cioè che rispetto a un osservatore a riposo con le masse che generano il campo, che effettui misure di tipo radar, il campo appare essere spazialmente uniforme.

Per ricavare l'equazione della traiettoria, ci proponiamo ora di calcolare la deflessione nella direzione trasversale al campo  $\Delta y$ .

Analizzando la situazione come viene vista dal SRCL si trova che, nel passare dall'iperboloide  $\Sigma^+$  a  $\Sigma^*$ , il raggio di luce aumenta la propria quota della seguente quantità

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (x_0 + h - \Delta h) \cosh g \tau_2 - (x_0 + h) \cosh g \tau_1,$$

mentre il tempo trascorso vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (x_0 + h - \Delta h) \sinh g \tau_2 - (x_0 + h) \sinh g \tau_1.$$

Nel SRCL, per un raggio di luce (in unità  $c = 1$ ) deve essere soddisfatta la relazione  $\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0$ . Calcolando la distanza percorsa lungo la direzione  $y$ , si trova quindi:

$$\Delta y = \sqrt{2(x_0 + h - \Delta h)(x_0 + h) \cosh g \Delta \tau - (x_0 + h - \Delta h)^2 - (x_0 + h)^2},$$

e tenendo conto della [4.1.9], si ottiene

$$\Delta y = \sqrt{(x_0 + h)^2 - (x_0 + h - \Delta h)^2}. \quad [4.1.11]$$

Volendo esprimere il risultato in termini della distanza radar misurata da un osservatore che si trova in  $\Sigma$  [3.6.1], si ottiene

$$\Delta y = \sqrt{\left(x_0 + \left(e^{gh_{RAD}} - 1\right)\right)^2 - \left(x_0 + x_0 \left(e^{gh_{RAD} - g\Delta h_{RAD}} - 1\right)\right)^2},$$

e quindi

$$\Delta y = x_0 e^{gh_{RAD}} \sqrt{1 - e^{-2g\Delta h_{RAD}}}. \quad [4.1.12]$$

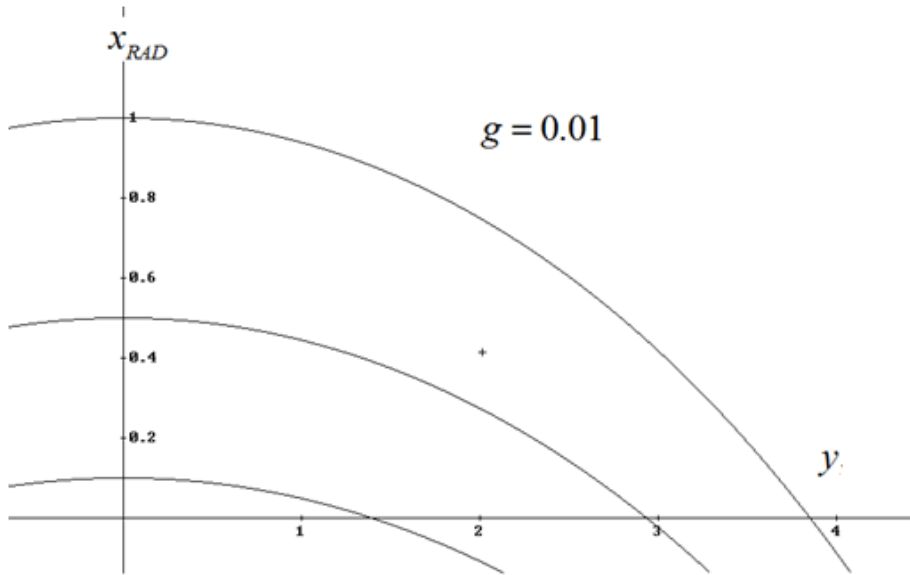
Invertendo questa espressione, è facile ricavare  $\Delta h_{RAD}$ <sup>36</sup>

$$\Delta h_{RAD} = -\frac{1}{2g} \ln\left(1 - e^{-2gh_{RAD}} g^2 \Delta y^2\right). \quad [4.1.13]$$

Considerando un raggio di luce emesso alla quota iniziale  $h_{RAD}$  ed alla coordinata trasversale iniziale  $y = 0$ , è possibile quindi scrivere la seguente equazione della traiettoria

$$x_{rad} = h_{RAD} + \frac{1}{2g} \ln\left(1 - e^{-2gh_{RAD}} g^2 y^2\right), \quad [4.1.14]$$

la cui forma dipende ora dalla quota di partenza  $h_{RAD}$ .



<sup>36</sup> Per confrontare eventualmente con risultati presenti in letteratura può essere utile espandere in serie l'espressione di  $\Delta h_{RAD}$

$$\Delta h_{RAD} = -\frac{1}{2g} \ln\left(1 - e^{-2gh_{RAD}} g^2 \Delta y^2\right) \approx \frac{g e^{-2gh_{RAD}} \Delta y^2}{2} + \frac{g^3 e^{-4gh_{RAD}} \Delta y^4}{4} + O(\Delta y^6)$$

Figura 11

In figura 11 e 12 sono riportate alcune traiettorie con diversi valori della quota di partenza e in figura 13 con diversi valori dell'accelerazione.

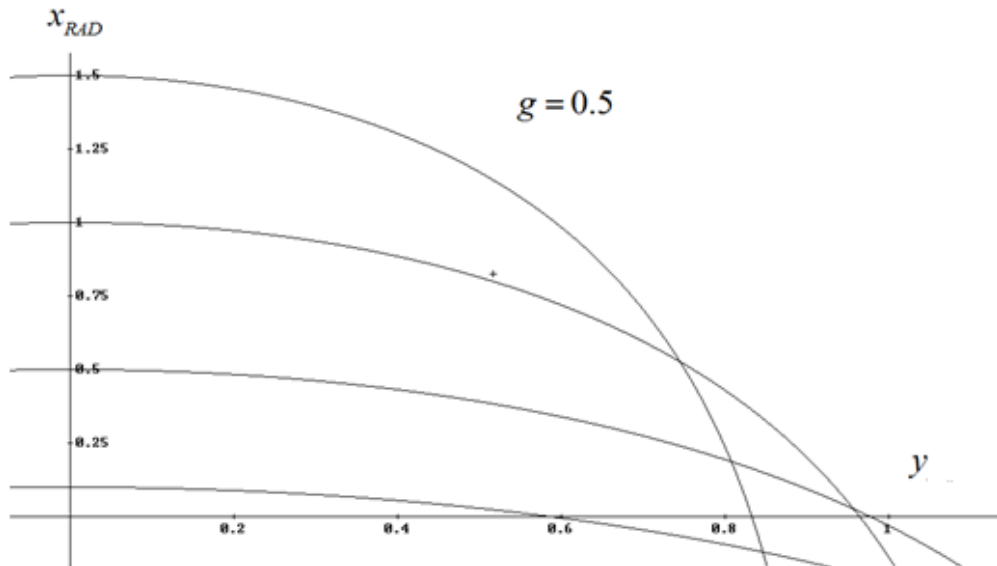


Figura 12

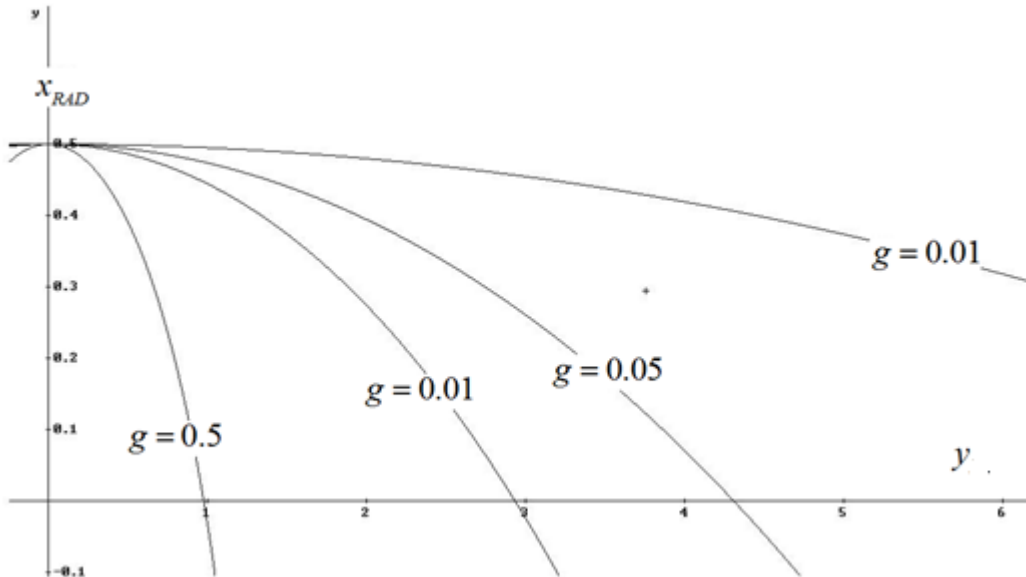


Figura 13

Come risulta evidente dalla figura 12, la situazione non appare accettabile.

Appare infatti evidente una incongruenza con la relazione [4.1.10] precedentemente ricavata, in cui la deflessione verticale  $\Delta h_{RAD}$  dipende solamente dal tempo proprio di caduta e non dall'altezza di partenza.

Per risolvere questa incongruenza è necessario analizzare in modo più approfondito il comportamento della coordinata radiale  $y$ , per la quale avevamo tacitamente assunto  $\Delta y_{RAD} = \Delta y$  (per via del fatto che in RR le coordinate trasversali all'accelerazione rimangono inalterate). Mostriamo invece che per riferirci a misure effettuate con metodi radar esiste invece una differenza fra queste due quantità.

Analizziamo la situazione illustrata in figura 14, dove un osservatore che si trova in  $\Sigma$ , nel punto di coordinata trasversale  $y=0$  emette un raggio di luce lateralmente, in modo che questo possa raggiungere un secondo osservatore che si trova alla medesima quota di  $\Sigma$ , ma con una coordinata laterale  $y$  differente. Affinché questo possa accadere, a causa della deflessione laterale dei raggi di luce (fenomeno che non può essergli sfuggito!), egli deve inviare il raggio un poco verso l'alto.

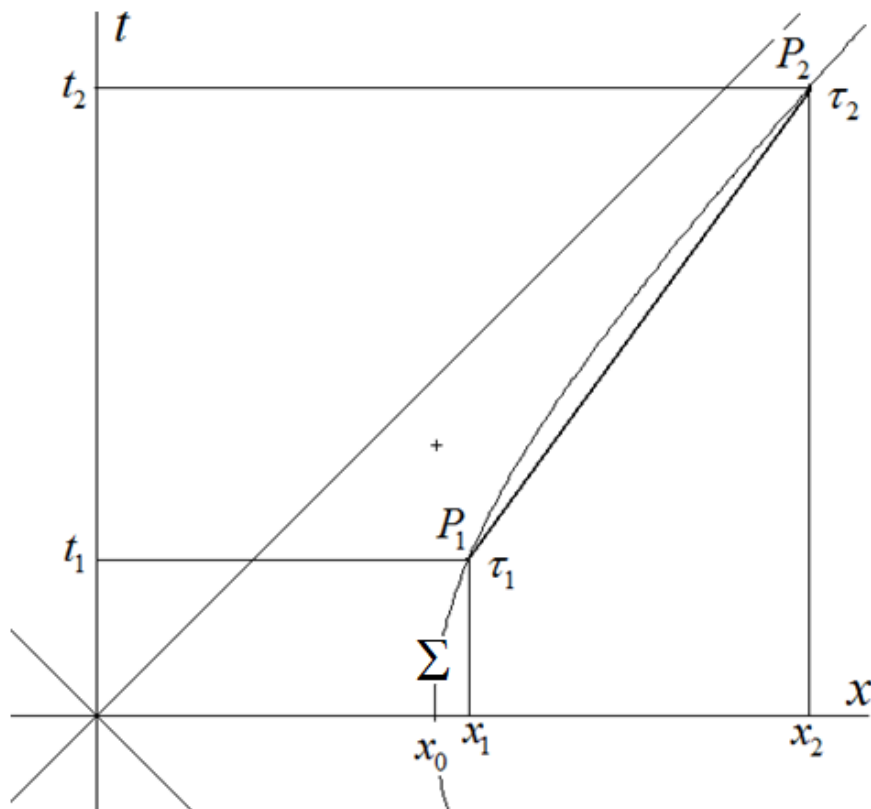


Figura 14

La situazione vista da un osservatore che si trova su SRCL è molto più semplice, per via del fatto che la luce si muove in linea retta, come illustrato in figura 14, dove è evidenziata la proiezione sul piano  $x t$  della traiettoria del raggio di luce che connette due eventi  $P_1$  e  $P_2$ , che si trovano entrambi sul piano iperbolico dell'osservatore  $\Sigma$ .

Facendo riferimento alla figura e tenendo presente la relazione  $\Delta y^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$ , è facile vedere che deve aversi:

$$\Delta y^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = x_0^2 (\sinh g \tau_2 - \sinh g \tau_1) - x_0^2 (\cosh g \tau_1 - \cosh g \tau_2), \quad [4.1.15]$$

da cui si ricava

$$\Delta y^2 = 2x_0^2 (\cosh g \Delta \tau - 1). \quad [4.1.16]$$

Combinando questo risultato con la [4.1.10], si ottiene ora una espressione che non dipende dalla quota di partenza:

$$\Delta y^2 = 2x_0^2 (e^{g \Delta h_{RAD}} - 1). \quad [4.1.17]$$

Esplicitando rispetto alla deflessione verticale  $\Delta h_{RAD}$ , si ottiene<sup>37</sup>:

$$\Delta h_{RAD} = \frac{1}{g} \ln \left( 1 + \frac{g^2 \Delta y^2}{2} \right). \quad [4.1.18]$$

In questa espressione non vi è più una dipendenza della deflessione verticale  $\Delta h_{RAD}$  dall'altezza di partenza  $h_{RAD}$ . Questo risultato è estremamente importante perché conferma il fatto che un osservatore a riposo con il campo di Rindler, che esegue solamente misure di tipo radar, osserva una curvatura della traiettoria dei raggi luminosi che non dipende dalla quota di partenza.

---

<sup>37</sup> Per confrontare eventualmente con risultati presenti in letteratura può essere utile espandere in serie l'espressione di  $\Delta h_{RAD}$

$$\Delta h_{RAD} = \frac{1}{g} \ln \left( 1 + \frac{g^2 \Delta y^2}{2} \right) \approx \frac{g \Delta y^2}{2} - \frac{g^3 \Delta y^4}{8} + O(\Delta y^6)$$

Possiamo quindi finalmente scrivere l'equazione della traiettoria, misurata con metodi radar da un osservatore solidale con il campo, di un raggio di luce emesso in direzione perpendicolare al campo (lungo la direzione dell'asse delle  $y$ ) che parte dalla quota  $h_{RAD}$  e con una coordinata iniziale  $y = 0$

$$x_{RAD} = h_{RAD} - \frac{1}{g} \ln \left( 1 + \frac{g^2 y_{RAD}^2}{2} \right). \quad [4.1.19]$$

In figura 15 abbiamo rappresentato alcuni esempi della traiettoria ottenuta per diversi valori dell'accelerazione.

Dalla [4.1.19], si vede inoltre chiaramente che cambiando la quota di partenza si ottengono solo traiettorie fra loro parallele, e quindi non si "incorre" più nei problemi evidenziati in figura 12

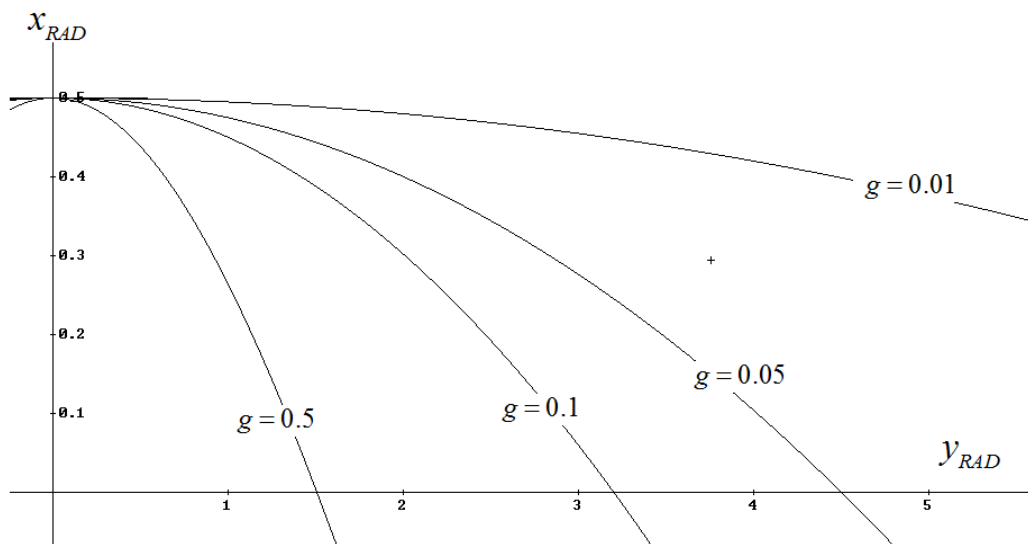


Figura 15

## 4.2 Traiettoria di un corpo in caduta libera

Oltre a diversi articoli (di cui alcuni citati precedentemente) che riguardano in generale anche il problema della definizione di campo uniforme (1)(24)(30)(24)(36), sono apparse molto recentemente alcune pubblicazioni che, si occupano in dettaglio delle traiettorie di una particella in caduta in un campo gravitazionale descritto da una metrica di Rindler (14)(15).

In questo paragrafo vogliamo vedere quali risultati è possibile trovare, utilizzando lo schema di ragionamento e le relazioni matematiche trovate nel capitolo precedente in un campo definito dalla metrica di Rindler.

In particolare vogliamo studiare il moto di un corpo in caduta libera dotato di velocità iniziale non nulla, anche in direzione perpendicolare al campo. Cercheremo di impostare il calcolo della traiettoria, come sarebbe misurata tramite coordinate “radar” eseguite da un osservatore a riposo con il campo.

Considerando, sempre per semplicità, che il moto avvenga nel piano  $x y$ , consideriamo solo 3 componenti non nulle della 4-velocità  $e$ , utilizzando la relazione  $u^\mu u_\mu = -1$ , possiamo scriverle nel seguente modo

$$u = \left( \sqrt{1 - (u^x)^2 - (u^y)^2}, u^x, u^y \right). \quad [4.2.1]$$

Rispetto al SRCL, la traiettoria apparirà ovviamente rettilinea, e possiamo quindi ragionare in modo simile al paragrafo precedente, dove abbiamo trattato la traiettoria di un raggio di luce.

Facendo nuovamente riferimento alla situazione illustrata in figura 9, supponiamo che quando la coordinata  $y$  vale zero la traiettoria del corpo in caduta intersechi l'iperboloide nel punto P1 al tempo proprio  $\tau_1$ .

In questo caso la traiettoria del corpo in caduta libera può essere descritta dalla seguente equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + h) \sinh g\tau_1 \\ (x_0 + h) \cosh g\tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{1 - (u^x)^2 - (u^y)^2} \\ u^x \\ u^y \end{pmatrix} \quad \lambda \in R. \quad [4.2.2]$$

Quando il corpo in caduta, sarà sceso (o salito) di una quantità  $\Delta h$ , rispetto a un osservatore solidale con il campo, la traiettoria intersecherà un iperboloide con accelerazione  $1/(x_0 + h - \Delta h)$ , e sarà “traslata” di una quantità  $\Delta y$ , che dipenderà dal tempo impiegato.

Il sistema di equazioni che descrive il problema è quindi il seguente

$$\begin{pmatrix} (x_0 + h) \sinh g\tau_1 \\ (x_0 + h) \cosh g\tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{1 - (u^x)^2 - (u^y)^2} \\ u^x \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0 + h - \Delta h) \sinh g\tau_2 \\ (x_0 + h - \Delta h) \cosh g\tau_2 \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \lambda \in R, \quad [4.2.3]$$

la cui risoluzione algebrica presenta discrete difficoltà.

Tuttavia, tenendo presente che la traiettoria di un corpo in caduta libera presenta sempre un punto di altezza massima, conviene iniziare lo studio della traiettoria a partire proprio da questo punto. Con questa semplificazione, che non preclude la generalità della soluzione finale, riprendiamo lo schema di ragionamento che abbiamo seguito per la trattazione dei raggi luminosi (figura 10).

La quadri-velocità iniziale del corpo in caduta può essere scritta nel seguente modo

$$u^\mu = (u^0, u^x, u^y) = (k \cosh g\tau_1, k \sinh g\tau_1, u^y), \quad [4.2.4]$$

dove  $k$  è una costante.

Tenendo presente che, in questo caso, dovranno essere rispettate le seguenti condizioni

$$u^y = u_0^y; \quad u^\mu u_\mu = 0, \quad [4.2.5]$$

possiamo determinare il valore di  $k = \sqrt{1 - (u^y)^2}$ .



La 4-velocità risulta quindi:

$$u^\mu = \left( \sqrt{1-(u^y)^2} \cosh g\tau_1, \sqrt{1-(u^y)^2} \sinh g\tau_1, u^y \right). \quad [4.2.6]$$

Anche in questo caso, per il PE, la traiettoria del raggio di luce nel SRCL sarà rettilinea e può quindi essere rappresentata tramite l'equazione parametrica di una retta

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0+h)\sinh g\tau_1 \\ (x_0+h)\cosh g\tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{1-(u^y)^2} \cosh g\tau_1 \\ \sqrt{1-(u^y)^2} \sinh g\tau_1 \\ u^y \end{pmatrix} \quad \lambda \in R \quad [4.2.7]$$

Proseguendo lo stesso schema di ragionamento seguito per il raggio di luce, impostiamo il seguente sistema

$$\begin{pmatrix} (x_0+h)\sinh g\tau_1 \\ (x_0+h)\cosh g\tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{1-(u^y)^2} \cosh g\tau_1 \\ \sqrt{1-(u^y)^2} \sinh g\tau_1 \\ u^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0+h-\Delta h)\sinh g\tau_2 \\ (x_0+h-\Delta h)\cosh g\tau_2 \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \lambda \in R \quad [4.2.8]$$

Dividiamo quindi per  $\sqrt{1-(u^y)^2} \cosh g\tau_1$  il modulo del vettore che fornisce la direzione della retta. L'equazione della retta riparametrizzata è:

$$\begin{pmatrix} (x_0+h)\sinh g\tau_1 \\ (x_0+h)\cosh g\tau_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{1-(u^y)^2} \cosh g\tau_1 \\ \tanh g\tau_1 \\ u^y \\ \sqrt{1-(u^y)^2} \cosh g\tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_0+h-\Delta h)\sinh g\tau_2 \\ (x_0+h-\Delta h)\cosh g\tau_2 \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \mu \in R \quad [4.2.9]$$

che, relativamente al piano  $x t$ , è identica alla trattazione svolta per un raggio luminoso (equazione [4.1.8]).

Possiamo dunque, anche in questo caso, ricavare l'espressione [4.1.9] già trovata nell'analisi della traiettoria di un raggio di luce, che espressa in coordinate radar, porta alla seguente relazione

$$e^{g\Delta h_{RAD}} = \cosh g\Delta\tau.$$

Dunque, anche in questo caso, l'intervallo di tempo proprio impiegato dal corpo in caduta libera dipende solamente dalla differenza di quota espressa in coordinate radar, e non dalla quota di partenza.

Questo prova che, anche per un corpo in caduta libera in un campo di Rindler (con componente della velocità trasversale  $u^y$  in generale non nulla), la deflessione verticale, osservata con misure radar da un osservatore solidale con il campo, non dipende dalla quota di partenza ma solamente dall'accelerazione di gravità  $g$ , cui è sottoposto l'osservatore.

Ci proponiamo di approfondire in futuro questo studio per arrivare all'equazione della traiettoria, possibilmente con un formalismo più semplice, affinché questo tipo di trattazione possa essere facilmente utilizzata per scopi didattici.

## 5 Metrica di una distribuzione a simmetria piana

In questo capitolo vogliamo indagare sulla forma che deve avere la metrica di una distribuzione statica di massa piana infinitamente estesa, per vedere se questa può essere messa in relazione alle metriche relative a un campo gravitazionale uniforme, su cui abbiamo indagato nei precedenti capitoli della tesi. Per far ciò esaminiamo l'equazione di campo di Einstein

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}; \quad k = \frac{8\pi G}{c^4},$$

dove  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$  è il tensore di Einstein,  $T_{\mu\nu}$  il tensore energia impulso, e  $\Lambda$  la costante cosmologica.

Nei paragrafi successivi cercheremo le soluzioni per lo spazio vuoto, imponendo l'annullarsi di tutte le componenti del tensore energia impulso. Assumendo nulla la costante cosmologica  $\Lambda = 0$ , questo equivale a chiedere l'annullamento del tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0.$$

Se consideriamo la traccia di questa espressione, abbiamo anche

$$Tr(G_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) = R - \frac{D}{2}R = 0,$$

dove  $D$  rappresenta le dimensioni dello spaziotempo.

Nel corso di questo capitolo si affronta dapprima il caso bidimensionale (paragrafo 5.1), dove si vede che in assenza di costante cosmologica la soluzione corrisponde alla metrica di Rindler, mentre si ritrova la metrica di Desloge in un caso particolare con la costante cosmologica diversa da zero.

Si passa poi al caso 4-dimensionale (paragrafo 5.2) e si evidenzia che, assumendo nulla la costante cosmologica, sono ammissibili due soluzioni distinte: la metrica di Rindler (paragrafo 5.3) e quella di Amundsen (paragrafo 5.4). Nel paragrafo 5.5 viene poi analizzata un'estensione 4-dimensionale della metrica di Desloge (che non è però una soluzione dell'equazione di campo per una distribuzione a simmetria piana), e se ne studiano le proprietà.

Nei due paragrafi successivi (5.6 e 5.7) si analizzano eventuali elementi che possano far decidere quale metrica corrisponda effettivamente alla distribuzione a simmetria piana, senza però giungere a una risposta definitiva.

Infine (paragrafo 5.8) si analizzano le proprietà delle metriche che abbiamo ricavato in precedenza utilizzando l'equazione delle geodetiche.

## 5.1 Il caso bidimensionale

Nel caso di uno spazio bidimensionale (con una sola dimensione spaziale) con costante cosmologica nulla  $\Lambda = 0$ , la situazione si semplifica notevolmente per via del fatto che si annulla la traccia del tensore di Einstein

$$Tr(G_{\mu\nu}) = R - \frac{2}{2}R = 0. \quad [5.1.1]$$

Questa condizione determina che il tensore di Einstein abbia una sola componente indipendente, così come anche il tensore di Riemann. Considerando che la componente indipendente sia rappresentata da  $R_{0101}$ , il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura diventano rispettivamente:

$$R_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \frac{R_{0101}}{g}; \quad R = -2 \frac{R_{0101}}{g}, \quad [5.1.2]$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \frac{R_{0101}}{g} + \frac{1}{2}2 \frac{R_{0101}}{g} g_{\mu\nu} = 0, \quad [5.1.3]$$

dove con il simbolo  $g$  abbiamo qui denotato il determinante del tensore metrico  $g = -\det g_{\mu\nu}$ . Dall'equazione di campo, si vede quindi immediatamente che risulta nullo, in tutte le sue componenti, anche il tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu} = 0.$$

Nel caso invece che la costante cosmologica non si annulli, si può dimostrare (21) che l'equazione che descrive uno spazio tempo bidimensionale si riduce a

$$R + b\Lambda = 0; \quad b = \text{costante}. \quad [5.1.4]$$

Adottando l'elemento di linea  $ds^2 = \alpha^2(x)dt^2 - dx^2$ , la [5.1.4] diventa

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} - 2b\Lambda\alpha = 0; \quad b = \text{costante}, \quad [5.1.5]$$

che ammette la seguente soluzione generale (37):

$\alpha = C_1 e^{gx} + C_2 e^{-gx}$	$g = (2b\Lambda)^{1/2}; \quad b\Lambda > 0$	[5.1.6]
$\alpha = C_1 \cos(g_1 x) + C_2 \sin(g_1 x)$	$g_1 = (-2b\Lambda)^{1/2} \quad b\Lambda < 0$	
$\alpha = C_1 + C_2 x$	$\Lambda = 0$	

Nel caso in cui la costante cosmologica sia nulla, e ponendo i valori delle costanti  $C_1 = 1$  e  $C_2 = g$  ritroviamo la metrica di Rindler.

Nel caso invece di una costante cosmologica  $\Lambda \neq 0$  e  $b\Lambda > 0$ , ponendo  $C_1 = 1$  e  $C_2 = 0$ , si ottiene la metrica di Desloge (1).

Come si può vedere, nel caso bidimensionale, la situazione è piuttosto chiara. Tuttavia non è possibile estendere queste soluzioni a uno spazio con un numero maggiore di dimensioni, e in particolare allo spaziotempo 4-dimensionale.

## 5.2 Il caso quadridimensionale

Torniamo a occuparci di un mondo a 3 dimensioni spaziali. Il campo che vogliamo studiare è quello che si trova al di fuori di una distribuzione di massa a simmetria piana e infinitamente estesa. Per risolvere l'equazione di campo richiederemo quindi che lo spazio sia vuoto. Tale richiesta implica l'annullamento di tutte le componenti del tensore energia impulso ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) e, nel caso di costante cosmologica nulla  $\Lambda = 0$ , di tutte le componenti del tensore di Einstein  $G_{\mu\nu}$ .

Tuttavia, a differenza dello spazio bidimensionale, l'annullamento della traccia del tensore di Einstein in uno spazio quadridimensionale con costante cosmologica nulla  $\Lambda = 0$ , determina anche l'annullamento dello scalare di curvatura. La condizione di annullamento del tensore di Einstein si riduce quindi semplicemente a quella di annullamento del tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad [5.2.1]$$

relazione di cui cercheremo le soluzioni.

Fissiamo quindi un riferimento in modo che la distribuzione di massa sia perpendicolare all'asse delle  $x$ . Postulando il fatto che il campo sia statico e che non dipenda dalle coordinate trasversali, si ha che la metrica associata può essere scritta in forma diagonale. Per la evidente simmetria del problema, richiederemo inoltre che le coordinate  $y$  e  $z$  siano moltiplicate per lo stesso coefficiente metrico.

L'elemento di linea che intendiamo studiare sarà quindi della forma:

$$ds^2 = A(x)dt^2 - B(x)dx^2 - C(x)(dy^2 + dz^2). \quad [5.2.2]$$

Per semplificare i calcoli risulta però utile riscrivere la metrica nel seguente modo:

$$ds^2 = e^{2p(x)}dt^2 - e^{2q(x)}dx^2 - e^{2u(x)}(dy^2 + dz^2). \quad [5.2.3]$$

Scriviamo anche esplicitamente i coefficienti della metrica, con gli indici covarianti e controvarianti, in modo da controllare meglio i calcoli successivi

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2p(x)} & & & \\ & -e^{2q(x)} & & \\ & & -e^{2u(x)} & \\ & & & -e^{2u(x)} \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2p(x)} & & & \\ & -e^{-2q(x)} & & \\ & & -e^{-2u(x)} & \\ & & & -e^{-2u(x)} \end{pmatrix}. \quad [5.2.4]$$

Per ricavare i coefficienti di connessione, utilizzeremo la seguente espressione

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad [5.2.5]$$

Calcolando i coefficienti di connessione, tenendo conto che  $g_{\alpha\beta,0} = 0$  e che  $\alpha \neq \beta \Rightarrow g_{\alpha\beta} = 0$ , si trova che gli unici termini non nulli sono<sup>38</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (g_{0\alpha,\beta} + g_{0\beta,\alpha}) \\ \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{2} e^{-2p} (2\dot{p} \cdot e^{2p}) = \dot{p} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{\alpha 1,\beta} + g_{\beta 1,\alpha} - g_{\alpha\beta,1}) \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = -\frac{1}{2} e^{-2q} (-2\dot{p} \cdot e^{2p}) = \dot{p} e^{2(p-q)} \end{aligned}$$

---

<sup>38</sup> Da qui in poi utilizzeremo sempre la notazione  $\dot{a} = \frac{da}{dx^1}$ .



$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1}) = -\frac{1}{2} e^{-2q} (-2\dot{q} \cdot e^{2q}) = \dot{q}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{22,1}) = -\frac{1}{2} e^{-2q} 2\dot{u} e^{2u} = -\dot{u} e^{2(u-q)}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (g_{\alpha 2, \beta} + g_{\beta 2, \alpha})$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (g_{22,1}) = -\frac{1}{2} e^{-2u} (-2\dot{u} \cdot e^{2u}) = \dot{u}$$

In definitiva abbiamo che i coefficienti di connessione non nulli sono:

$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \dot{p}$	$\Gamma_{00}^1 = \dot{p} e^{2(p-q)}$	$\Gamma_{11}^1 = \dot{q}$
$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = -\dot{u} e^{2(u-q)}$	$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \dot{u}$	

Per ricavare il tensore di Riemann si può invece utilizzare la seguente espressione<sup>39</sup>

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu, \beta\mu} - g_{\alpha\mu, \beta\nu} + g_{\beta\mu, \alpha\nu} - g_{\beta\nu, \alpha\mu}) + g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\nu}^\sigma), \quad [5.2.6]$$

mentre contraendo il primo con il terzo indice, si ricava il tensore di Ricci:

$$R_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\alpha\nu, \beta\mu} - g_{\alpha\mu, \beta\nu} + g_{\beta\mu, \alpha\nu} - g_{\beta\nu, \alpha\mu}) + g^{\alpha\mu} g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\eta \Gamma_{\beta\nu}^\sigma).$$

Si può facilmente verificare che tutti i termini non diagonali del tensore di Ricci sono identicamente nulli.

$$\begin{aligned} R_{01} &= R_{10} = g^{\alpha\alpha} g_{\eta\eta} (\Gamma_{1\alpha}^\eta \Gamma_{0\alpha}^\eta - \Gamma_{\alpha\alpha}^\eta \Gamma_{01}^\eta) = \\ &= g^{\alpha\alpha} g_{00} (\Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{0\alpha}^0 - \Gamma_{\alpha\alpha}^0 \Gamma_{01}^0) + g^{\alpha\alpha} g_{11} (\Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{0\alpha}^1 - \Gamma_{\alpha\alpha}^1 \Gamma_{01}^1) + g^{\alpha\alpha} g_{22} (\Gamma_{1\alpha}^2 \Gamma_{0\alpha}^2 - \Gamma_{\alpha\alpha}^2 \Gamma_{01}^2) + g^{\alpha\alpha} g_{33} (\Gamma_{1\alpha}^{31} \Gamma_{0\alpha}^{33} - \Gamma_{\alpha\alpha}^3 \Gamma_{01}^3) = \\ &= g^{00} g_{11} (\Gamma_{10}^1 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^1) = 0 \end{aligned}$$

<sup>39</sup> Vedi ad esempio Weinberg (2), in cui però i segni sono opposti a causa della segnatura della metrica (-+++), diversa da quella adottata nel presente lavoro di tesi (+---).

$$\begin{aligned}
R_{02} = R_{20} = R_{03} = R_{30} &= g^{\alpha\alpha} g_{\eta\eta} \left( \Gamma_{2\alpha}^\eta \Gamma_{0\alpha}^\eta - \Gamma_{\alpha\alpha}^\eta \Gamma_{02}^\eta \right) = \\
&= g^{\alpha\alpha} g_{00} \left( \Gamma_{2\alpha}^0 \Gamma_{0\alpha}^0 - \Gamma_{\alpha\alpha}^0 \Gamma_{02}^0 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{11} \left( \Gamma_{2\alpha}^1 \Gamma_{0\alpha}^1 - \Gamma_{\alpha\alpha}^1 \Gamma_{02}^1 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{22} \left( \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{0\alpha}^2 - \Gamma_{\alpha\alpha}^2 \Gamma_{02}^2 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{33} \left( \Gamma_{2\alpha}^3 \Gamma_{0\alpha}^3 - \Gamma_{\alpha\alpha}^3 \Gamma_{02}^3 \right) = 0 \\
R_{12} = R_{21} = R_{31} = R_{13} &= g^{\alpha\alpha} g_{\eta\eta} \left( \Gamma_{2\alpha}^\eta \Gamma_{1\alpha}^\eta - \Gamma_{\alpha\alpha}^\eta \Gamma_{12}^\eta \right) = \\
&= g^{\alpha\alpha} g_{00} \left( \Gamma_{2\alpha}^0 \Gamma_{1\alpha}^0 - \Gamma_{\alpha\alpha}^0 \Gamma_{12}^0 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{11} \left( \Gamma_{2\alpha}^1 \Gamma_{1\alpha}^1 - \Gamma_{\alpha\alpha}^1 \Gamma_{12}^1 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{22} \left( \Gamma_{2\alpha}^2 \Gamma_{1\alpha}^2 - \Gamma_{\alpha\alpha}^2 \Gamma_{12}^2 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{33} \left( \Gamma_{2\alpha}^3 \Gamma_{1\alpha}^3 - \Gamma_{\alpha\alpha}^3 \Gamma_{12}^3 \right) = 0 \\
R_{23} = R_{23} &= g^{\alpha\alpha} g_{\eta\eta} \left( \Gamma_{3\alpha}^\eta \Gamma_{2\alpha}^\eta - \Gamma_{\alpha\alpha}^\eta \Gamma_{23}^\eta \right) = \\
&= g^{\alpha\alpha} g_{00} \left( \Gamma_{3\alpha}^0 \Gamma_{2\alpha}^0 - \Gamma_{\alpha\alpha}^0 \Gamma_{23}^0 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{11} \left( \Gamma_{3\alpha}^1 \Gamma_{2\alpha}^1 - \Gamma_{\alpha\alpha}^1 \Gamma_{23}^1 \right) + g^{\alpha\alpha} g_{22} \left( \Gamma_{3\alpha}^2 \Gamma_{2\alpha}^2 - \Gamma_{\alpha\alpha}^2 \Gamma_{23}^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Passando ai termini diagonali del tensore di Ricci, abbiamo:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left( g_{\alpha 0, 0\mu} - g_{\alpha\mu, 00} + g_{0\mu, \alpha 0} - g_{00, \alpha\mu} \right) + g^{\alpha\mu} g_{\eta\sigma} \left( \Gamma_{0\alpha}^\eta \Gamma_{0\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\eta \Gamma_{00}^\sigma \right) \\
R_{00} &= -\frac{1}{2} \underbrace{g^{11} (g_{00,11})}_A + \\
&+ g^{00} g_{00} \cdot \left( \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 \right) + g^{00} g_{11} \left( \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{00}^1 \right) + g^{00} g_{22} \left( \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{00}^2 \Gamma_{00}^2 \right) + g_{33} \left( \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{00}^3 \right) + \\
&+ g^{11} g_{00} \left( \underbrace{\Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0}_B - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^0 \right) + g^{11} g_{11} \left( \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \underbrace{\Gamma_{11}^1 \Gamma_{00}^1}_C \right) + g^{11} g_{22} \left( \Gamma_{01}^2 \Gamma_{01}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{00}^2 \right) + g_{33} \left( \Gamma_{01}^3 \Gamma_{01}^3 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{00}^3 \right) + \\
&+ g^{22} g_{00} \left( \Gamma_{02}^0 \Gamma_{02}^0 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{00}^0 \right) + g^{22} g_{11} \left( \Gamma_{02}^1 \Gamma_{02}^1 - \underbrace{\Gamma_{22}^1 \Gamma_{00}^1}_D \right) + g^{22} g_{22} \left( \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{00}^2 \right) + g^{22} g_{33} \left( \Gamma_{02}^3 \Gamma_{02}^3 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{00}^3 \right) + \\
&+ g^{33} g_{00} \left( -\Gamma_{03}^0 \Gamma_{03}^0 \Gamma_{33}^0 \Gamma_{00}^0 \right) + g^{33} g_{11} \left( \Gamma_{03}^1 \Gamma_{03}^1 - \underbrace{\Gamma_{33}^1 \Gamma_{00}^1}_E \right) + g^{33} g_{22} \left( \Gamma_{03}^2 \Gamma_{03}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{00}^2 \right) + g^{33} g_{33} \left( \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{00}^3 \right) \\
R_{00} &= -\frac{1}{2} \underbrace{\left( -e^{-2q} \right) \left( 2\ddot{p} + 4\dot{p}^2 \right) e^{2p}}_A + \underbrace{e^{-2q} e^{2p} \left( -\dot{p}^2 \right)}_B - \underbrace{\dot{q} p e^{2(p-q)}}_C + \underbrace{2e^{-2u} \left( -e^{2q} \right) \left( -i e^{2(u-q)} \right) \left( \dot{p} e^{2(p-q)} \right)}_{D+E} = \\
&= \underbrace{\left( \ddot{p} + 2\dot{p}^2 \right) e^{2(p-q)}}_A - \underbrace{\dot{p}^2 e^{2(p-q)}}_B - \underbrace{\dot{q} p e^{2(p-q)}}_C + \underbrace{2i \dot{p} e^{2(p-q)}}_{D+E} \\
R_{00} &= \left( \ddot{p} + \dot{p}^2 - \dot{p} \dot{q} + 2\dot{p} \dot{u} \right) e^{2(p-q)}. \tag{5.2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\alpha 1,1\mu} - g_{\alpha\mu,11} + g_{1\mu,\alpha 1} - g_{11,\alpha\mu}) + g^{\alpha\mu} g_{\eta\sigma} (\Gamma_{1\alpha}^\eta \Gamma_{1\mu}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\eta \Gamma_{11}^\sigma) \\
R_{11} &= \underbrace{\frac{1}{2} g^{00} (-g_{00,11})}_A + \underbrace{\frac{1}{2} g^{11} (0)}_B + \underbrace{\frac{1}{2} g^{22} (-g_{22,11})}_B + \underbrace{\frac{1}{2} g^{33} (-g_{33,11})}_C + \\
&+ g^{00} g_{00} \left( \underbrace{\Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0}_D \right) + g^{00} g_{11} \left( \Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^1 - \underbrace{\Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1}_E \right) + g^{00} g_{22} (\Gamma_{10}^2 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{00}^2 \Gamma_{11}^2) + g^{00} g_{33} (\Gamma_{10}^3 \Gamma_{10}^3 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{11}^3) + \\
&+ g^{11} g_{00} (\Gamma_{11}^0 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{11}^0) + g^{11} g_{11} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) + g^{11} g_{22} (\Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^2) + g^{11} g_{33} (\Gamma_{11}^3 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{11}^3) + \\
&+ g^{22} g_{00} (\Gamma_{12}^0 \Gamma_{12}^0 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{11}^0) + g^{22} g_{11} \left( \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \underbrace{\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1}_F \right) + g^{22} g_{22} \left( \underbrace{\Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2}_G \right) + g^{22} g_{33} (\Gamma_{12}^3 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{11}^3) + \\
&+ g^{33} g_{00} (\Gamma_{13}^0 \Gamma_{13}^0 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{11}^0) + g^{33} g_{11} \left( \Gamma_{13}^1 \Gamma_{13}^1 - \underbrace{\Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1}_H \right) + g^{33} g_{22} (\Gamma_{13}^2 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{11}^2) + g^{33} g_{33} \left( \underbrace{\Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{11}^3}_I \right) = \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-2p} (2\ddot{p} + 4\dot{p}^2) e^{2p}}_A + \underbrace{2\frac{1}{2} e^{-2u} (-2\ddot{u} - 4\dot{u}^2) e^{2u}}_{B+C} + \underbrace{\dot{p}^2}_D - \underbrace{e^{-2p} e^{2q} \dot{p} e^{2(p-q)} \dot{q}}_E + \underbrace{2e^{-2u} (-e^{2q}) (-\dot{u} e^{2(u-q)}) \dot{q}}_{F+H} + \underbrace{2e^{2u} (-e^{-2u}) (-\dot{u}^2)}_{G+I} \\
&= \underbrace{-\ddot{p} + 2\dot{p}^2}_A - \underbrace{2\ddot{u} + 4\dot{u}^2}_{B+C} + \underbrace{\dot{p}^2}_D + \underbrace{\dot{p}\dot{q}}_E + \underbrace{2\dot{q}\dot{u}}_{F+H} + \underbrace{2\dot{u}^2}_{G+I}
\end{aligned}$$

$$R_{11} = -\ddot{p} - \dot{p}^2 - 2\ddot{u} - 2\dot{u}^2 + \dot{p}\dot{q} + 2\dot{q}\dot{u}. \quad [5.2.8]$$

$$\begin{aligned}
R_{22} = R_{33} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} (g_{\alpha 2,2\alpha} - g_{\alpha\alpha,22} + g_{2\alpha,\alpha 2} - g_{22,\alpha\alpha}) + g^{\alpha\alpha} g_{\eta\eta} (\Gamma_{2\alpha}^\eta \Gamma_{2\alpha}^\eta - \Gamma_{\alpha\alpha}^\eta \Gamma_{22}^\eta) = \\
R_{22} = R_{33} &= \underbrace{\frac{1}{2} g^{11} (-g_{22,11})}_A + \\
&+ g^{00} g_{00} (\Gamma_{20}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{22}^0) + g^{00} g_{11} \left( \Gamma_{20}^1 \Gamma_{20}^1 - \underbrace{\Gamma_{00}^1 \Gamma_{22}^1}_B \right) + g^{00} g_{22} (\Gamma_{20}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{00}^2 \Gamma_{22}^2) + g^{00} g_{33} (\Gamma_{20}^3 \Gamma_{20}^3 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{22}^3) + \\
&+ g^{11} g_{00} (\Gamma_{21}^0 \Gamma_{21}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{22}^0) + g^{11} g_{11} \left( \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 - \underbrace{\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1}_C \right) + g^{11} g_{22} \left( \underbrace{\Gamma_{21}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2}_D \right) + g^{11} g_{33} (\Gamma_{21}^3 \Gamma_{21}^3 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{22}^3) + \\
&+ g^{22} g_{00} (\Gamma_{22}^0 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{22}^0 \Gamma_{22}^0) + g^{22} g_{11} (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^1) + g^{22} g_{22} (\Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2) + g^{22} g_{33} (\Gamma_{22}^3 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{22}^3 \Gamma_{22}^3) + \\
&+ g^{33} g_{00} (\Gamma_{23}^0 \Gamma_{23}^0 - \Gamma_{33}^0 \Gamma_{22}^0) + g^{33} g_{11} \left( \Gamma_{23}^1 \Gamma_{23}^1 - \underbrace{\Gamma_{33}^1 \Gamma_{22}^1}_E \right) + g^{33} g_{22} (\Gamma_{23}^2 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22}^2) + g^{33} g_{33} (\Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{33}^3 \Gamma_{22}^3) = \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2} (-e^{-2q}) (-2\ddot{u} - 4\dot{u}^2) e^{2u}}_A + \underbrace{e^{-2p} e^{2q} \dot{p} e^{2(p-q)} (-\dot{u} e^{2(u-q)})}_B - \underbrace{\dot{q} (-\dot{u} e^{2(u-q)})}_C - \underbrace{(-e^{-2q}) (-e^{2u}) (-\dot{u}^2)}_D - \underbrace{(-e^{-2u}) (-e^{2q}) (-\dot{u} e^{2(u-q)})^2}_E \\
&= \left( \underbrace{-\ddot{u} + 2\dot{u}^2}_A - \underbrace{\dot{p}\dot{u}}_B + \underbrace{\dot{q}\dot{u}}_C + \underbrace{\dot{u}^2}_D - \underbrace{\dot{u}^2}_E \right) e^{2(u-q)}
\end{aligned}$$

$$R_{22} = R_{33} = (-\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - \dot{p}\dot{u} + \dot{q}\dot{u}) e^{2(u-q)}. \quad [5.2.9]$$

Tornando al nostro problema originale di trovare le soluzioni della metrica dello spazio vuoto che soddisfano alla condizione  $R_{\mu\nu} = 0$ , otteniamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} R_{00} = (\ddot{p} + \dot{p}^2 - \dot{p}\dot{q} + 2\dot{p}\dot{u})e^{2(p-q)} = 0 \\ R_{11} = -\ddot{p} - \dot{p}^2 - 2\ddot{u} - 2\dot{u}^2 + \dot{p}\dot{q} + 2\dot{q}\dot{u} = 0 \\ R_{22} = R_{33} = (-\ddot{u} - 2\dot{u}^2 - \dot{p}\dot{u} + \dot{q}\dot{u})e^{2(u-q)} = 0 . \end{cases} \quad [5.2.10]$$

### 5.3 Metrica di Rindler

Consideriamo ora una metrica in cui  $C(x) = e^{2u(x)}$  non dipenda dalle coordinate, e poniamo  $\dot{u} = 0$ .

Si verifica facilmente che, in questo caso, il sistema di equazioni [5.2.10] si riduce a questa unica condizione

$$\dot{p}^2 - \dot{p}\dot{q} + \ddot{p} = 0. \quad [5.3.1]$$

E' tuttavia sempre possibile effettuare una trasformazione di coordinate tale che

$$e^{q(x)} dx = dx', \quad [5.3.2]$$

in modo che la metrica risulti semplicemente del tipo

$$ds^2 = A(x)dt^2 - dx^2 - (dy^2 + dz^2). \quad [5.3.3].$$

Con questa semplificazione, l'equazione [5.3.1] diventa

$$\dot{p}^2 + \ddot{p} = 0. \quad [5.3.4]$$

Integrando due volte la [5.3.4], otteniamo rispettivamente

$$\dot{p} = \frac{1}{x + c_1}; \quad p = \ln(x + c_1) + c_2,$$

da cui si trova la forma generale della metrica

$$ds^2 = (ax + b)^2 dt^2 - dx^2. \quad [5.3.5]$$

Richiedendo che si abbia  $A(0) = 1$ , si può determinare il valore della costante  $b = 1$ , mentre la costante  $a$  dipende in generale dall'intensità del campo. Ponendo  $a = g$  ritroviamo la seguente espressione

$$ds^2 = (1 + gx)^2 dt^2 - dx^2 - (dy^2 + dz^2), \quad [5.3.6].$$

che è l'estensione 4-dimensionale della metrica di Rindler.

Vale però la pena di analizzare il significato del termine  $g$ . Dall'analisi fatta nel capitolo precedente, emerge chiaramente che l'accelerazione locale ha una dipendenza dalla quota. Tuttavia, essendo la scelta della coordinata di partenza  $x_0 = 1/g$  puramente arbitraria, anche il valore di  $g$  non è fissato in modo univoco.

In questo capitolo stiamo, però, cercando di attribuire a questa metrica un significato fisico ben preciso, in corrispondenza di un'ipotetica distribuzione di massa a simmetria planare. Assumeremo quindi, per ora, che l'accelerazione locale valga  $g$  in corrispondenza della localizzazione  $x = 0$  del piano stesso.

A differenza di altre dimostrazioni (20) siamo giunti a questo risultato senza postulare che il tensore di Riemann sia nullo ( $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ ), ma ci siamo limitati a richiedere che sia nullo il tensore di Ricci ( $R_{\mu\nu} = 0$ )<sup>40</sup>. Abbiamo invece postulato che siano costanti le componenti della metrica relative alle dimensioni spaziali perpendicolari al campo  $g_{22} = g_{33} = 1$ . Tale ipotesi sembrerebbe ragionevole per via della simmetria del problema e la natura di tale congettura appare molto simile alle ipotesi che si fanno nella derivazione della metrica di Schwarzschild.

---

<sup>40</sup> In effetti il tensore di Riemann associato alla metrica di Rindler, è comunque nullo in tutte le sue componenti, ma il fatto che la metrica sia stata dedotta senza richiedere questa proprietà, ci sembra un fatto concettualmente degno di rilievo.

## 5.4 Metrica di Amundsen

Vogliamo ora esaminare la soluzione generale che si ottiene senza fare l'ipotesi fatta nel paragrafo precedente che le componenti del tensore metrico associate alle direzioni trasversali siano costanti.

E' sempre possibile "riscalare" la metrica ponendo  $B(x)dx^2 = dx'^2$ , in modo che il termine diagonale associato alla coordinata  $x$  rimanga costante. Poniamo quindi  $\dot{q} = 0$  (ed anche  $q = 0$  per condizioni di limite minkowskiano) e riscriviamo la metrica nel seguente modo

$$ds^2 = e^{2p} dt^2 - dx^2 - e^{2u} (dy^2 + dz^2). \quad [5.4.1]$$

In questo modo, le equazioni [5.2.10] diventano le seguenti:

$$\begin{aligned} \ddot{p} + \dot{p}^2 + 2\dot{p}\dot{u} &= 0 \\ \ddot{p} + \dot{p}^2 + 2\ddot{u} + 2\dot{u}^2 &= 0. \\ \ddot{u} + 2\dot{u}^2 + \dot{p}\dot{u} &= 0 \end{aligned} \quad [5.4.2]$$

Dalla 2° e dalla 3° equazione otteniamo

$$\ddot{p} + \dot{p}^2 - 2\dot{u}^2 - 2\dot{p}\dot{u} = 0,$$

che sostituita nella 1° equazione, porta alla seguente

$$\dot{u}(\dot{u} + 2\dot{p}) = 0. \quad [5.4.3]$$

La soluzione  $\dot{u} = 0$  è stata analizzata nel precedente capitolo e porta alla metrica di Rindler. Studiamo quindi la soluzione che corrisponde all'annullarsi del secondo termine  $\dot{u} + 2\dot{p} = 0$ .

Sostituendo questa condizione nella prima delle equazioni [5.4.2], si ottiene

$$\ddot{p} - 3\dot{p}^2 = 0. \quad [5.4.4]$$

Risolvendo questa equazione, con una doppia integrazione, si ottiene rispettivamente:

$$\dot{p} = \frac{1}{k_1 - 3x} = 0$$

$$p = -\frac{1}{3} \ln(k_1 - 3x) + k_2, \quad [5.4.5]$$

da cui si ricava

$$A(x) = e^{2p} = e^{k_2} (k_1 - 3x)^{-\frac{2}{3}} = (a - 3bx)^{-\frac{2}{3}}. \quad [5.4.6]$$

Imponendo che si abbia il limite minkowskiano nell'origine, si ricava  $a = 1$ , mentre è possibile dimostrare (21) che  $b$  corrisponde all'accelerazione di gravità Newtoniana corrispondente a una distribuzione di massa piana avente densità di massa  $\sigma = 2g$ . Abbiamo quindi:

$$A(x) = e^{2u} = (1 - 3gx)^{-2/3}. \quad [5.4.7]$$

Ricordando infine che  $\dot{u} + 2\dot{p} = 0$ , si trova  $q = +\frac{2}{3} \ln(k_1 - 3x) + k_2$ , e quindi

$$C(x) = e^{2u} = (1 - 3gx)^{4/3}. \quad [5.4.8]$$

In definitiva abbiamo:

$$ds^2 = (1 - 3gx)^{-2/3} dt^2 - dx^2 - (1 - 3gx)^{4/3} (dy^2 + dz^2). \quad [5.4.9]$$

Questa metrica è stata trovata da Amundsen e Grøn (21)<sup>41</sup>, con un ragionamento simile ma un po' meno immediato di quello qui presentato.

---

<sup>41</sup> In realtà la soluzione originale sembra vada fatta risalire a Levi Civita, come affermato dagli stessi autori dell'articolo.



Con un cambio di coordinate, è possibile riscrivere la metrica [5.4.9] in diverse forme interessanti.

Una delle forme più note è quella di Taub (38)

$$ds^2 = (1 - 4gx)^{-1/2} (dt^2 - dx^2) - (1 - 4gx)(dy^2 + dz^2), \quad [5.4.10]$$

che si ottiene con il seguente cambio di coordinate

$$(1 - 3gx) = (1 - 4gx')^{3/4}. \quad [5.4.11]$$

Volendo avere una metrica isotropica è sufficiente eseguire invece il seguente cambio di coordinate, dovuto a Das

$$(1 - 3gx)^{1/3} = 1 - gx', \quad [5.4.12]$$

che porta al seguente elemento di linea:

$$ds^2 = (1 - gx)^{-2} dt^2 - (1 - gx)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad [5.4.13]$$

Un'altra metrica degna di qualche interesse si ottiene con il seguente cambio di coordinate

$$1 - 3gx = e^{-3gx'}. \quad [5.4.14]$$

tramite cui si ottiene il seguente elemento di linea

$$ds^2 = e^{2gx} dt^2 - e^{-6gx} dx^2 - e^{-4gx} (dy^2 + dz^2). \quad [5.4.15]$$

## 5.5 Metrica di Desloge

Analizzando il caso bidimensionale nel primo paragrafo di questo capitolo, abbiamo visto che, assumendo la costante cosmologica nulla  $\Lambda = 0$ , la metrica di Desloge non è una soluzione dell'equazione di campo per lo spazio vuoto. Relativamente allo spaziotempo 4-dimensionale, abbiamo invece trovato due soluzioni corrispondenti allo spazio vuoto ( $R_{\mu\nu} = 0$ ) a simmetria piana. La metrica di Desloge, non essendo riconducibile alle metriche trovate con un semplice cambio di coordinate, deve essere quindi necessariamente associata a uno spazio con tensore di Ricci non nullo. Vogliamo tuttavia verificare questo fatto tramite un calcolo esplicito, anche al fine di capire qualcosa di più sulla possibilità teorica di realizzare un campo di tale tipo. Consideriamo quindi un'estensione 4-dimensionale di tale metrica

$$ds^2 = e^{2gx} dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad [5.5.1]$$

Sappiamo che a questa metrica non può essere associata ad uno spazio vuoto a simmetria piana, del quale abbiamo già trovato tutte le soluzioni, vogliamo però determinare le caratteristiche generali del tensore energia impulso associato alla [5.5.1].

Riportiamo, per chiarezza, i coefficienti della metrica, con gli indici covarianti e controvarianti

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2gx} & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}; \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2gx} & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad [5.5.2]$$

Gli unici termini non nulli dei coefficienti di connessione sono:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{2} e^{-2gx} \cdot (2g \cdot e^{2gx}) = g$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = -\frac{1}{2} \cdot (-2g \cdot e^{2gx}) = g e^{2gx}$$

Per ricavare il tensore di Ricci, utilizziamo la seguente espressione

$$R_{\beta\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}) + g^{\alpha\mu} g_{\eta\sigma} (\Gamma_{\nu\alpha}^{\eta} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\eta} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}), \quad [5.5.3]$$

da cui si può facilmente vedere che tutti i termini non diagonali del tensore di Ricci sono nulli. Per i termini diagonali abbiamo invece:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} (g_{00,11}) + g^{11} g_{00} (\Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0) = \frac{1}{2} (4g^2 e^{2gx}) - e^{2gx} (g^2) = g^2 e^{2gx}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} g^{00} (g_{00,11}) + g^{00} g_{00} (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0) = -\frac{1}{2} e^{-2gx} (4g^2 e^{2gx}) + g^2 = -g^2$$

$$R_{22} = R_{33} = 0$$

Calcolando lo scalare di curvatura si trova

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} = e^{-2gx} g^2 e^{2gx} + g^2 = 2g^2,$$

mentre le componenti non nulle del tensore di Riemann valgono

$$R_{1001} = R_{0110} = -R_{1010} = -R_{0101} = g^2 e^{2gx}. \quad [5.5.4].$$

11

Come si può notare, il tensore di Riemann si annulla solo nell'origine, cosa che invece non avviene per il tensore di Ricci e per lo scalare di curvatura.

Passando al calcolo del tensore di Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  abbiamo:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = g^2 e^{2gx} - \frac{1}{2} 2g^2 e^{2gx} = 0$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} = -g^2 + \frac{1}{2} 2g^2 = 0$$

$$G_{22} = G_{33} = R_{22} - \frac{1}{2} R g_{22} = -\frac{1}{2} 2g^2 (-1) = g^2.$$

Dall'equazione di campo  $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$  si vede quindi che  $T_{00} = T_{11} = 0$ ,  
mentre esistono i due termini  $T_{22} = T_{33} \neq 0$ <sup>42</sup>.

---

<sup>42</sup> Tale risultato si trova anche in un recente articolo (13) che analizzeremo nel prossimo paragrafo.

## 5.6 Quale metrica?

Discriminare quale sia la metrica corretta da adottare per descrivere il campo gravitazionale di una distribuzione di massa piana infinita, sembra tuttora un problema aperto.

Uno dei compiti più complicati è quello di capire il corretto significato delle coordinate della soluzione individuata. Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato che esistono forme diverse della stessa metrica, che differiscono solamente per un cambio di coordinate. Così, a seconda degli autori, la metrica della distribuzione piana relativistica può assumere un nome differente<sup>43</sup>. Tuttavia in questo caso il problema è di scegliere fra due soluzioni diverse, riconducibili alla metrica di Amundsen o a quella di Rindler.

La situazione è stata analizzata anche in un recente lavoro (13), in cui si prendono in considerazione differenti metriche, cercando di discriminare le soluzioni accettabili in base alle proprietà evidenziate dal tensore energia impulso  $T_{\mu\nu}$  all'“avvicinarsi” alla supposta localizzazione del piano.

Nel caso di una distribuzione a simmetria piana, la componente  $T_{00}$  del tensore energia impulso deve avere una discontinuità in corrispondenza della localizzazione del bordo esterno della distribuzione di massa.

Considerando il caso di una massa distribuita uniformemente in un piano di spessore idealmente nullo, e localizzato nel piano  $y z$ , ci si dovrebbe quindi aspettare per il tensore energia-impulso un andamento del tipo

$$T_{00}(x) \propto \delta(x). \quad [5.6.1]$$

Seguendo gli autori dell'articolo, proviamo a supporre che l'estensione 4-dimensionale della metrica di Desloge possa essere la soluzione esatta relativa a una distribuzione di massa piana infinita<sup>44</sup>.

---

<sup>43</sup> Secondo Amundsen (21) la prima soluzione corretta va fatta risalire a Levi Civita, tuttavia molti autori parlano di soluzione di Taub (38), mentre altri ancora attribuiscono allo stesso Amundsen la “paternità” della soluzione corretta.

<sup>44</sup> In realtà, nei paragrafi precedenti, abbiamo mostrato che, per una costante cosmologica nulla, tale soluzione non è associata a uno spazio vuoto.

$$ds^2 = e^{2gx} dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad [5.6.2]$$

Supponendo che il piano massivo coincida con il piano  $yz$ , e sia localizzato in corrispondenza dell'annullarsi della coordinata  $x$ , risulta una situazione geometrica perfettamente simmetrica.

Siccome si suppone che dalla parte opposta del piano la forza di gravità cambi direzione, in modo che sia sempre diretta verso il piano, i coefficienti della metrica dovrebbero essere una funzione pari della coordinata  $x$ . Possiamo ottenere una metrica di questo tipo a partire dalla [5.6.2], considerando il valore assoluto della coordinata perpendicolare al piano (13)

$$ds^2 = e^{2g|x|} dt^2 - (dx^2 + dy^2 - dz^2). \quad [5.6.3]$$

Vogliamo sottolineare che la [5.6.3] non è una estensione matematica della metrica di partenza, ma solo una congettura abbastanza "ragionevole". Ricordiamo anche che stiamo formulando un'ipotesi fisica "limite" che il piano abbia uno spessore nullo.

Vedremo dai risultati che questa estensione della metrica determina (come ci si aspetta) l'apparire di termini descritti dalla funzione  $\delta$  di Dirac che essendo una distribuzione matematica, non può essere impiegata con sicurezza in una teoria non lineare come la RG. Di conseguenza i risultati che ricaveremo andranno presi con una certa cautela.

Calcolando i coefficienti di connessione, si trovano i seguenti valori non nulli:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{2} e^{-2g|x|} \cdot \left( 2g \frac{x}{|x|} \cdot e^{2g|x|} \right) = g \frac{x}{|x|}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = -\frac{1}{2} \cdot \left( -2g \cdot \frac{x}{|x|} e^{2g|x|} \right) = g \frac{x}{|x|} e^{2gx}$$

Prima di passare al calcolo del tensore di Ricci soffermiamoci brevemente sul calcolo della derivata seconda del tensore metrico

$$g_{00,11} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} g_{00} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{2g|x|} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{|x|} \cdot 2g \cdot e^{2g|x|} \right)$$

e, tenendo presente che  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{|x|} \right) = 2\delta(x)$ , otteniamo

$$g_{00,11} = 4g \cdot \delta(x) \cdot e^{2g|x|} + 4g^2 \cdot e^{2g|x|}. \quad [5.6.4]$$

Le componenti non nulle del tensore di Ricci sono:

$$R_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} (g_{00,11}) + g^{11} g_{00} (\Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0) = \frac{1}{2} (4g \cdot \delta(x) \cdot e^{2g|x|} + 4g^2 \cdot e^{2g|x|}) - e^{2g|x|} g^2 = g^2 e^{2g|x|} + 2g\delta(x) \cdot e^{2g|x|}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} g^{00} (g_{00,11}) + g^{00} g_{00} (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0) = -\frac{1}{2} e^{-2g|x|} (\delta(x) \cdot 4g \cdot e^{2g|x|} + 4g^2 e^{2g|x|}) + g^2 = -g^2 - 2g\delta(x) \cdot e^{-2g|x|}$$

Per lo scalare di curvatura si trova quindi:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} = e^{-2g|x|} (g^2 e^{2g|x|} + 2g\delta(x) \cdot e^{2g|x|}) + g^2 + 2g\delta(x) = 2(g^2 + 2g\delta(x)),$$

mentre il tensore di Einstein  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ , assume i seguenti valori:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = g^2 e^{2g|x|} + 2g \cdot \delta(x) \cdot e^{2g|x|} - \frac{1}{2} 2(g^2 + 2g\delta(x)) e^{2g|x|} = 0$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} = -g^2 - 2g\delta(x) + \frac{1}{2} 2(g^2 + 2g\delta(x)) = 0$$

$$G_{22} = G_{33} = R_{22} - \frac{1}{2} R g_{22} = -\frac{1}{2} 2(g^2 + 2\delta(x)g)(-1) = g^2 + 2g\delta(x)$$

Assumendo  $\Lambda = 0$ , il tensore energia impulso risulta legato nel seguente modo al tensore di Einstein

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}, \quad [5.6.5]$$

e si hanno quindi le seguenti espressioni del tensore energia-impulso

$$T_{00} = T_{11} = 0; \quad T_{22} = T_{33} = \frac{c^4}{8\pi G} G_{22} = \frac{c^4}{8\pi G} (g^2 + 2g\delta(x)) .$$

Come si vede, risultano non nulle solo le componenti  $T_{22} = T_{33}$  del tensore energia impulso, mentre risulta nulla la componente  $T_{00}$ , associata alla presenza di massa. In assenza di costante cosmologica, questa soluzione non sembra quindi in nessun modo associabile a una distribuzione di massa a simmetria planare. Inoltre, il tensore energia impulso assume valori non nulli anche al di fuori del piano ( $T_{22} = T_{33} = \frac{g^2 c^4}{8\pi G}$ ).

Passiamo ora allo studio della metrica di Rindler partendo, per semplicità di calcolo, dalla seguente forma

$$ds^2 = e^{2gx} (dt^2 - dx^2) - (dy^2 + dz^2) \quad [5.6.6]$$

e, come nel caso della metrica di Desloge, poniamo la coordinata  $x$  sotto il segno di valore assoluto

$$ds^2 = e^{2g|x|} (dt^2 - dx^2) - (dy^2 + dz^2). \quad [5.6.7]$$

In questo caso la modifica che abbiamo introdotto produce un piccolo cambiamento formale che ha però un importante contenuto sostanziale. Infatti, la metrica di Rindler [5.6.6] è associata globalmente a uno spazio piatto e con un cambio di coordinate è sempre possibile ricondursi a un elemento di linea minkowskiano. Molti autori<sup>45</sup> ritengono quindi che in questo caso non sia possibile parlare della possibilità che la metrica di Rindler possa descrivere un campo gravitazionale. Tuttavia la metrica [5.6.7], seppure identica alla metrica di Rindler per  $x > 0$ , non è più la metrica dello spazio piatto. Abbiamo, infatti, introdotto una discontinuità in corrispondenza dell'origine delle coordinate e un'inversione della

---

<sup>45</sup> Questa metrica non è stata per esempio utilizzata dagli autori dell'articolo citato (13) perché associata a uno spazio "piatto".



coordinata  $x \rightarrow -x$  per  $x < 0$ . In questo modo non esiste più una trasformazione di coordinate globale che trasformi la metrica di Rindler nella metrica minkowskiana. Ciononostante, al di fuori del piano ( $x \neq 0$ ), la metrica di Rindler continua a essere una soluzione dell'equazione di campo per lo spazio vuoto a simmetria piana.

Passando ai calcoli, vediamo che i termini non nulli dei coefficienti di connessione sono i seguenti

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{2} e^{-2g|x|} \cdot \left( 2g \frac{x}{|x|} \cdot e^{2g|x|} \right) = g \frac{x}{|x|} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = -\frac{1}{2} e^{-2g|x|} \cdot \left( -2g \frac{x}{|x|} \cdot e^{2g|x|} \right) = g \frac{x}{|x|} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1}) = -\frac{1}{2} e^{-2g|x|} \cdot \left( -2g \frac{x}{|x|} \cdot e^{2g|x|} \right) = g \frac{x}{|x|} .\end{aligned}$$

Tenendo conto che  $g_{00,11} = 4g \cdot \delta(x) \cdot e^{2g|x|} + 4g^2 \cdot e^{2g|x|}$ , passiamo al calcolo del tensore di Ricci. Le uniche componenti non nulle sono:

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{1}{2} g^{11} (g_{00,11}) + g^{11} g_{00} \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0 - g^{11} g_{11} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} e^{-2g|x|} (4g \cdot \delta(x) \cdot e^{2g|x|} + 4g^2 \cdot e^{2g|x|}) - g^2 - g^2 = 2g \cdot \delta(x) \\ R_{11} &= -\frac{1}{2} g^{00} (g_{00,11}) + g^{00} g_{00} \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 - g^{00} g_{11} \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} e^{-2g|x|} (4g \cdot \delta(x) \cdot e^{2g|x|} + 4g^2 \cdot e^{2g|x|}) + g^2 + g^2 = 2g \delta(x) .\end{aligned}$$

Calcolando lo scalare di curvatura si trova

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} = 2g \delta(x) e^{-2g|x|} - 2g \delta(x) e^{-2g|x|} = 0 ,$$

mentre per il tensore di Einstein abbiamo:

$$G_{00} = R_{00} = 2g \delta(x) \quad G_{11} = R_{11} = 2g \delta(x) \quad G_{22} = G_{33} = 0 .$$

Per il tensore energia-impulso si ottiene quindi:

$$T_{00} = T_{11} = \frac{gc^4}{4\pi G} \delta(x); \quad T_{22} = T_{33} = 0 .$$

In questo caso vediamo che il tensore energia-impulso all'interno del piano ha due termini non nulli, di cui uno associato alla presenza di massa  $T_{00}$ , e uno associato a una pressione perpendicolare al piano stesso ( $T_{11}$ ). Al di fuori del piano il tensore energia impulso risulta invece identicamente nullo in tutte le sue componenti (spazio vuoto).

Estendiamo ora questo tipo di approccio alla soluzione di Amundsen [5.4.9]. Per semplicità di calcolo utilizzeremo l'elemento di linea ottenuto nella [5.4.15], ponendo la coordinata  $x$  sotto valore assoluto, come fatto precedentemente negli altri casi esaminati. Esamineremo cioè la seguente metrica:

$$ds^2 = e^{2g|x|} dt^2 - e^{-6g|x|} dx^2 - e^{-4g|x|} (dy^2 + dz^2). \quad [5.6.8]$$

Il calcolo dei coefficienti di connessione non nulli fornisce il seguente risultato

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{00,1}) = \frac{1}{2} e^{-2g|x|} \cdot (2g \cdot e^{2g|x|}) = g \frac{x}{|x|} \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (-g_{00,1}) = -\frac{1}{2} e^{6g|x|} \cdot \left( -2g \cdot \frac{x}{|x|} e^{2g|x|} \right) = g \frac{x}{|x|} e^{8g|x|} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1}) = -\frac{1}{2} e^{6g|x|} \cdot \left( 6g \frac{x}{|x|} \cdot e^{-6g|x|} \right) = -3g \frac{x}{|x|} \\ \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{22,1}) = -\frac{1}{2} e^{6g|x|} \cdot \left( -4g \cdot \frac{x}{|x|} e^{-4g|x|} \right) = 2g \frac{x}{|x|} e^{2g|x|} \\ \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (g_{22,1}) = -\frac{1}{2} e^{4g|x|} \left( 4g \cdot \frac{x}{|x|} e^{-4g|x|} \right) = -2g \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

Passando al calcolo del tensore di Ricci si trovano i seguenti termini non nulli:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2} g^{11} (g_{00,11}) + g^{11} g_{00} (\Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^0) - g^{11} g_{11} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) - g^{22} g_{11} (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1) - g^{33} g_{11} (\Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1) = \\ &= \frac{1}{2} e^{6g|x|} (4g^2 + 4g\delta(x)) e^{2g|x|} - e^{6g|x|} e^{2g|x|} (g^2) - (-3g^2 e^{8g|x|}) - e^{4g|x|} e^{-6g|x|} (2g^2 e^{2g|x|} e^{8g|x|}) - e^{4g|x|} e^{-6g|x|} (2g^2 e^{2g|x|} e^{8g|x|}) \end{aligned}$$

$$R_{00} = 2g\delta(x) e^{8g|x|}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{1}{2} \underbrace{g^{00}(-g_{00,11})}_A + \frac{1}{2} \underbrace{g^{22}(-g_{22,11})}_B + \frac{1}{2} \underbrace{g^{33}(-g_{33,11})}_C + \\
&+ g^{00} g_{00} \left( \underbrace{\frac{\Gamma^0_{10} \Gamma^0_{10}}{D}} \right) + g^{00} g_{11} \left( \underbrace{-\frac{\Gamma^1_{00} \Gamma^1_{11}}{E}} \right) + g^{22} g_{11} \left( \underbrace{-\frac{\Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11}}{F}} \right) + g^{22} g_{22} \left( \underbrace{\frac{\Gamma^2_{12} \Gamma^2_{12}}{G}} \right) + g^{33} g_{11} \left( \underbrace{-\frac{\Gamma^1_{33} \Gamma^1_{11}}{H}} \right) + g^{33} g_{33} \left( \underbrace{\frac{\Gamma^3_{13} \Gamma^3_{13}}{I}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{e^{-2g|x|}(-4g^2 - 4g\delta(x))e^{2g|x|}}_A - 2 \frac{1}{2} \underbrace{e^{4g|x|}(16g^2 - 8\delta(x))e^{-4g|x|}}_{B+C} + \\
&+ \left( \underbrace{\frac{g^2}{D}} \right) - e^{-2g|x|} e^{-6g|x|} \left( \underbrace{3g^2 e^{8g|x|}}_E \right) + e^{4g|x|} e^{-6g|x|} \left( \underbrace{-6ge^{2g|x|}}_F \right) + \left( \underbrace{4g^2}{G} \right) + e^{4g|x|} e^{-6g|x|} \left( \underbrace{+12ge^{2g|x|}}_H \right) + \left( \underbrace{4g^2}{I} \right) =
\end{aligned}$$

$$R_{11} = 6g\delta(x)$$

$$\begin{aligned}
R_{22} = R_{33} &= \frac{1}{2} \underbrace{g^{11}(-g_{22,11})}_A + g^{00} g_{11} \left( \underbrace{-\frac{\Gamma^1_{00} \Gamma^1_{22}}{B}} \right) + g^{11} g_{11} \left( \underbrace{-\frac{\Gamma^1_{11} \Gamma^1_{22}}{C}} \right) + g^{11} g_{22} \left( \underbrace{\frac{\Gamma^2_{21} \Gamma^2_{21}}{D}} \right) + g^{33} g_{11} \left( \underbrace{-\frac{\Gamma^1_{33} \Gamma^1_{22}}{E}} \right) = \\
&= -\frac{1}{2} e^{6g|x|} (16g^2 - 8g\delta(x)) e^{-4g|x|} - e^{-2g|x|} e^{-6g|x|} (-2g^2 e^{8g|x|} e^{2g|x|}) + (6g^2 e^{2g|x|}) + e^{6g|x|} e^{-4g|x|} (4g^2) + e^{4g|x|} e^{-6g|x|} (-4g^2 e^{4g|x|})
\end{aligned}$$

$$R_{22} = R_{33} = 4g\delta(x) e^{2g|x|}$$

Calcolando lo scalare di curvatura si trova

$$R = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + 2g^{22} R_{22} = 2g\delta(x) e^{8g|x|} e^{-2g|x|} - 6g\delta(x) e^{6g|x|} - 2g\delta(x) e^{2g|x|} \cdot 4e^{4g|x|}$$

$$R = -12g\delta(x) e^{6g|x|}$$

Il tensore di Einstein vale quindi:

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = (2 + 6) g\delta(x) = 8g\delta(x)$$

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = (6 - 6) g\delta(x) = 0$$

$$G_{22} = G_{33} = R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = (4 - 6) g\delta(x) = -2g\delta(x) .$$

Le componenti del tensore energia impulso sono dunque le seguenti:

$$T_{00} = \frac{gc^4}{\pi G} \delta(x); \quad T_{11} = 0; \quad T_{22} = T_{33} = -\frac{gc^4}{4\pi G} \delta(x) . \quad [5.6.9]$$

Anche in questo caso il tensore energia-impulso si annulla al di fuori del piano (come ci si aspettava) mentre all'interno sono presenti tre contributi non nulli: uno associato alla presenza di massa ( $T_{00}$ ) e due associati a una pressione in direzione parallela al piano stesso ( $T_{22}$  e  $T_{33}$ ).

Riassumiamo i risultati che abbiamo trovato

	$T_{00}$	$T_{11}$	$T_{22}, T_{33}$
Desloge	0	0	$\frac{c^4}{8\pi G}(g^2 + 2g\delta(x))$
Rindler	$\frac{gc^4}{4\pi G}\delta(x)$	$\frac{gc^4}{4\pi G}\delta(x)$	0
Amundsen	$\frac{gc^4}{\pi G}\delta(x)$	0	$-\frac{gc^4}{4\pi G}\delta(x)$

La metrica di Desloge, in assenza di costante cosmologica, non prevede la presenza di massa, ma la presenza di una densità di pressione, in direzioni parallele al piano, anche nella zona esterna al piano stesso.

Le metriche di Rindler e quella di Amundsen presentano entrambe una densità di massa localizzata nella posizione del piano (come ci si aspettava), ma anche una densità di pressione. Tale pressione ha direzione perpendicolare al piano nel caso della metrica di Rindler, e parallela nel caso di quella di Amundsen. Ad di fuori del piano lo spazio è invece vuoto per entrambe le soluzioni.

Ricordiamo però ancora una volta, che stiamo affrontando lo studio di una situazione fisica non realizzata in natura (piano uniforme infinitamente esteso ed infinitamente sottile), e che abbiamo utilizzato la funzione delta di Dirac in una teoria non lineare (la RG).

Cio non di meno, i risultati appaiono incoraggianti, e sarebbe interessante effettuare ulteriori indagini. Ci proponiamo quindi di proseguire la ricerca (in lavori successivi) studiando a fondo in che modo si trasformano i termini ottenuti per il tensore energia-impulso con un cambio di coordinate, così come effettuando modifiche alla metrica un po' più complesse. Si potrebbe ad esempio provare ad effettuare una modifica alla metrica che cerchi di riprodurre una situazione in cui lo spessore del piano non è nullo.

## 5.7 Il teorema di Birkhoff

In questo paragrafo vogliamo indagare ulteriormente sulla possibilità di discriminare quale delle soluzioni trovate precedentemente sia la metrica da associare ad una distribuzione piana infinita. Per far ciò faremo qualche considerazione un poco più filosofica, collegata al teorema di Birkhoff.

Analizzando l'equazione di campo di Einstein, abbiamo visto che esistono solamente due soluzioni per lo spazio vuoto a simmetria piana: quella associata alla metrica di Amundsen [5.4.9] e quella associata alla metrica di Rindler [5.3.6]. Questo insieme dovrebbe possibilmente ricoprire tutte le possibilità realizzabili in natura.

Ma la metrica di Rindler rappresenta anche un sistema di riferimento accelerato della RR e, tramite una trasformazione di coordinate, tale metrica è riconducibile globalmente alla metrica di Minkowski. Per questa ragione molti autori pensano che la metrica di Rindler non possa descrivere un campo gravitazionale e, seguendo questa linea di ragionamento, concludono che l'unica soluzione che possa essere messa in relazione ad una distribuzione piana infinita sia quindi quella di Amundsen.

Un problema di questo tipo non si pone quando si ricava la metrica di Schwarzschild. Infatti, in questo caso, sapiamo che portandosi ad una distanza infinita lo spazio diventa piatto. Quindi, risolvendo l'equazione ed utilizzando questa condizione al contorno, si riesce a determinare tutte le costanti di integrazione e si ricava una sola soluzione. Inoltre, siccome la metrica ha simmetria centrale, è possibile applicare il teorema di Birkhoff (vedere ad esempio (39) ), che garantisce il fatto che la soluzione trovata deve anche essere stazionaria e asintoticamente stabile<sup>46</sup>.

---

<sup>46</sup> La conclusione che la soluzione deve essere stazionaria ha anche come conseguenza notevole che il campo gravitazionale di una stella pulsante a simmetria sferica deve apparire costante ad osservatori che si trovano al di fuori della zona di "pulsazione", la quale ha come unico effetto quello di mutare la posizione della superficie stellare.

Un'importante conseguenza del teorema di Birkhoff è che, all'interno di una superficie sferica cava e simmetrica, il campo deve annullarsi, e la metrica deve quindi essere quella dello spazio piatto. Questo fa sì che, nel caso di una massa contenuta all'interno di un involucro a simmetria sferica il contributo della massa che forma l'involucro esterno risulta nullo<sup>47</sup>. All'interno del tale guscio (regione  $R_1$  della figura), deve valere quindi la soluzione di Schwarzschild che tiene conto solamente della massa della sfera interna, mentre la soluzione esterna tiene conto di entrambe le masse.

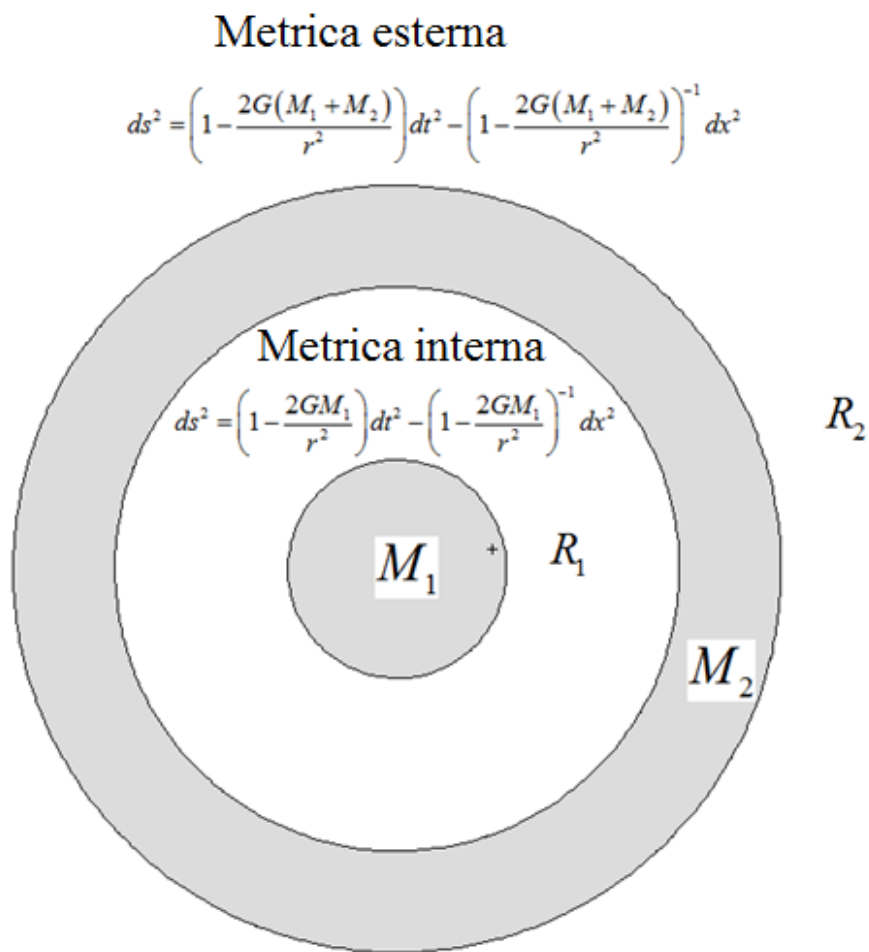


fig.16

<sup>47</sup> Risultato che incidentalmente vale anche nel caso newtoniano.

Cercando una situazione analoga relativa al campo a simmetria piana, analizziamo una situazione fisica associata ad uno spazio vuoto, delimitato da due distribuzioni di massa a simmetria planare (situazione che non mi risulta sia stata analizzata da nessuna autore).

In questo caso non si può applicare il teorema di Birkhoff e nella regione  $R_3$  compresa fra i due piani avremo, in generale, una metrica diversa da quella Minkowskiana, ma una metrica che deve dipendere dalle distribuzioni di massa per superficie  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Potrebbe essere allora che le due soluzioni (Rindler ed Amundsen) siano applicabili ciascuna ad una delle due situazioni fisiche.

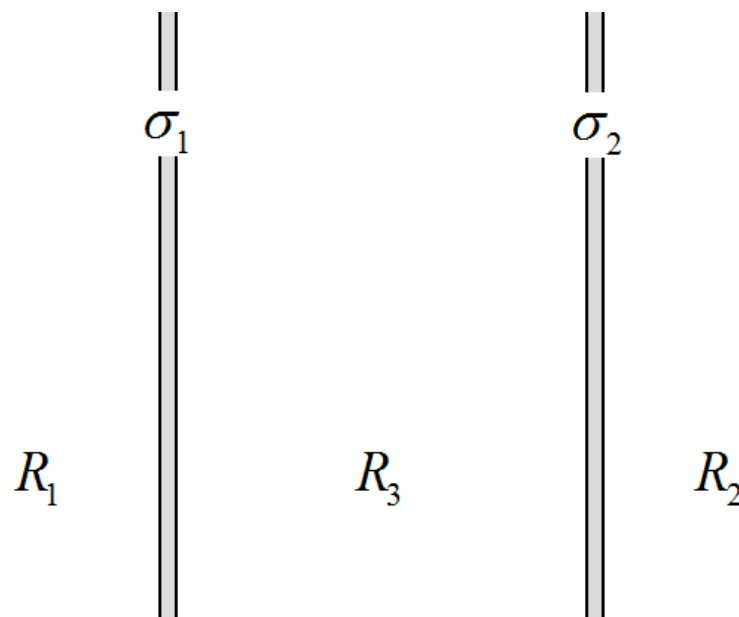


fig. 17

Supponendo quindi  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  (nel caso si abbia  $\sigma_1 = \sigma_2$  si può essere tentati di supporre che la metrica in  $R_3$  sia quella Minkowskiana), nella metrica relativa alla regione  $R_3$  dovrebbero apparire i contributi di  $\sigma_1$  di  $\sigma_2$  e della distanza  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  dai piani. Da questo tipo di ragionamento sembrerebbe plausibile che possano esistere due tipi di soluzioni distinte associate alla regione  $R_3$  e alle regioni  $R_1$  ed  $R_2$ .

Tuttavia esiste un'argomentazione che sembra negare questa possibilità. Pensiamo, infatti, al caso limite in cui la densità di massa di uno dei due piani si riduca a zero; in questo caso la soluzione deve diventare la stessa in entrambe le regioni coinvolte. Questo sembrerebbe, a prima vista, incompatibile con una forma differente delle metriche nelle regioni  $R_1$  e  $R_3$ .

Questo punto resta però poco chiaro e andrebbe probabilmente approfondito, cercando eventualmente di formulare un teorema analogo a quello di Birkhoff per una distribuzione a simmetria piana, teorema di cui non ho trovato traccia in bibliografia.



## 5.8 Geodetiche

Vogliamo ora investigare sulle proprietà delle soluzioni trovate.

Per far ciò scriviamo la forma esplicita di una geodetica di una particella libera per una metrica diagonale generica del tipo [5.2.2]

$$ds^2 = e^{2p} dt^2 - e^{2q} dx^2 - e^{2u} (dy^2 + dz^2).$$

Utilizzando i coefficienti di connessione ricavati nei paragrafi precedenti

$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \dot{p}$	$\Gamma_{00}^1 = \dot{p}e^{2(p-q)}$	$\Gamma_{11}^1 = \dot{q}$
$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = -\dot{u}e^{2(u-q)}$	$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \dot{u}$	

si può scrivere l'equazione delle geodetiche

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + 2\dot{p} \frac{dx}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \dot{p}e^{2(p-q)} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \dot{q} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \dot{u}e^{2(u-q)} \left( \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right) = 0 \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\dot{u} \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} + 2\dot{u} \frac{dx}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} = 0 \end{array} \right. \quad [5.8.1]$$

Possiamo ora verificare nuovamente come si può ricavare la metrica di Rindler estesa a uno spaziotempo 4-dimensionale.

Per far ciò ricaviamo la seguente espressione dall'elemento di linea [5.2.3]

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = e^{-2p} \left( 1 + e^{2q} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + e^{2u} \left( \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 \right) \right). \quad [5.8.2]$$

Che inserito nell'equazione relativa alla coordinata  $x$  delle geodetiche, fornisce

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \dot{p}e^{-2q} + (\dot{p} + \dot{q})\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + (\dot{p} - \dot{q})e^{2(u-q)}\left(\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right) = 0. \quad [5.8.3]$$

Richiedendo che l'accelerazione non dipenda dalla velocità propria verticale  $\frac{dx}{d\tau}$ , vediamo che deve essere  $\dot{p} = -\dot{q}$  che, con le condizioni al contorno, comporta  $p = -q$ .

Utilizzando questa condizione, vediamo se può esistere un campo tale che una particella che parte da ferma dalla posizione iniziale  $x_0 = x(t_0)$  al tempo iniziale  $t_0$  sia soggetta a un'accelerazione  $-g$  e diretta verso il basso. Considerando quindi solamente i primi due termini della [5.8.3], abbiamo

$$\left.\frac{d^2x}{d\tau^2}\right|_{t=t_0} = -\dot{p}e^{2p}\Big|_{x=x_0} = -g, \quad [5.8.4]$$

da cui si vede immediatamente che, affinché l'accelerazione propria non dipenda dalla posizione iniziale  $x_0$ , deve aversi:

$$e^{2p} = a + 2gx. \quad [5.8.5]$$

Utilizzando la condizione al contorno  $e^{2p(0)} = 1$ , e la relazione  $p = -q$ , otteniamo la seguente metrica

$$ds^2 = (1 + 2gx)dt^2 - (1 + 2gx)^{-1}dx^2 - C(x)(dy^2 + dz^2), \quad [5.8.6]$$

dove  $C(x)$  appare essere ora una funzione arbitraria.

Ponendo invece  $C(x) = 1$ , otteniamo l'elemento di linea di Kottler-Whittaker (riconducibile, tramite un cambio di coordinate alla metrica di Rindler [5.3.6]).

Per completezza, verifichiamo che la metrica di Amundsen [5.4.9], inserita nel primo membro della [5.8.3] fornisce una accelerazione propria diretta

verso il basso (rispetto all'orientamento delle coordinate), che diminuisce con l'aumentare della quota, fino alla quota massima,  $x_{\max} = 1/3g$ , in cui l'accelerazione si annulla

$$\left. \frac{d^2x}{d\tau^2} \right|_{t=0} = -\dot{p}e^{2q} \Big|_{x=x_0} = -\frac{g}{1-3gx_0} (1-3gx_0)^{4/3} = -g(1-3gx_0)^{1/3}. \quad [5.8.7]$$

A tale quota è però presente una singolarità della metrica.



## 6 Conclusioni

Dalla nostra analisi sui campi gravitazionali uniformi è emerso che la definizione di campo gravitazionale uniforme ha una certa dose di ambiguità. Abbiamo mostrato (capitolo 2) che, tramite definizioni alternative di accelerazione uniforme, è possibile ricavare metriche differenti da quella dedotta da Desloge (1), che viene di solito citata come la metrica che descrive un campo gravitazionale uniforme. Tale metrica descrive un campo gravitazionale in cui l'accelerazione iniziale (misurata localmente) di una particella in caduta libera non dipende dalla quota di partenza. Il campo associato a questa metrica produce però un'accelerazione che dipende dalla velocità della particella stessa.

In questo lavoro abbiamo invece evidenziato che, tramite una definizione di accelerazione basata su misure di tipo radar, è possibile mostrare che la metrica di Rindler produce un campo gravitazionale che appare uniforme a un osservatore a riposo con le coordinate. Con un cambio di coordinate si ottiene una metrica (elemento di linea di Kottler-Whittaker) in cui l'accelerazione propria è costante durante tutta la traiettoria della particella in caduta. Il SR associato a tali coordinate è quello della stessa particella in caduta libera (20).

Assumendo invece come definizione che il campo uniforme debba essere caratterizzato dal fatto che la parte spaziale della 4-accelerazione assuma lo stesso valore indipendentemente dalla quota si ottiene una nuova metrica che non risulta essere stata studiata in precedenza. In tal caso si trova che il valore della parte spaziale della 4-accelerazione è indipendente anche dalla velocità della particella in caduta libera.

Abbiamo mostrato che, tramite l'applicazione diretta del PE a un campo di Rindler (capitolo 3), è possibile ricavare le formule di dilatazione (contrazione) dei tempi e degli spazi in modo operativo. Questo confronto può essere fatto senza utilizzare il formalismo della RG, ma solo le formule più semplici della RR.

Con la stessa metodologia abbiamo poi mostrato come si possano studiare le traiettorie di un raggio di luce e di un proiettile con direzioni trasversali al campo.

A prescindere dalla rilevanza dello studio del campo gravitazionale uniforme, questo tipo di approccio (in gran parte originale), ha un indubbio valore didattico, e merita di essere approfondito.

In particolare sarebbe interessante indagare ulteriormente sulla possibilità di “realizzare” esperimenti ideali relativi ad altri fenomeni fisici, e sulla possibilità di semplificare ulteriormente i calcoli relativi alla deflessione di un raggio di luce e alla traiettoria di un proiettile.

Riguardo allo studio effettuato sulle soluzioni dell'equazione di campo (con costante cosmologica nulla) di una distribuzione a simmetria piana (capitolo 5), abbiamo mostrato che sono possibili due soluzioni: quella di Rindler e quella di Amundsen (21).

Siccome la soluzione di Rindler corrisponde allo spazio piatto, molti autori preferiscono assumere come corretta la soluzione di Amundsen, che non risulta in alcun modo collegabile alle metriche che generano un campo uniforme, studiate nel 2° capitolo di questa tesi.

Abbiamo tuttavia visto (paragrafo 5.6) che, modificando la metrica di Rindler, è possibile introdurre una discontinuità, in corrispondenza della quale sembra debba aversi un valore non nullo del tensore energia-impulso. Con questo tipo di modifica, la metrica di Rindler sembra dunque poter descrivere un campo gravitazionale, la cui curvatura sarebbe localizzata solamente in corrispondenza della posizione delle masse che generano il campo.

Per queste ragioni, pensiamo sia interessante approfondire lo studio delle soluzioni dell'equazione di campo di una distribuzione di massa a simmetria piana, con particolare riferimento alle problematiche illustrate nei paragrafi 5.6 e 5.7.

# Appendice

## Geodetiche nello spazio 4-dimensionale

Nell'ultimo paragrafo del 5° capitolo abbiamo discusso le proprietà dell'equazione delle geodetiche utilizzando la notazione utilizzata nel capitolo per ricavare la soluzione dello spazio vuoto. Tale notazione non è la più idonea a trattare il problema. La soluzione viene qua riproposta con un formalismo più semplice.

La forma esplicita di una geodetica di una particella libera per una metrica diagonale generica del tipo

$$ds^2 = \alpha^2(x)dt^2 - \beta^2(x)dx^2 - \gamma^2(x)(dy^2 + dz^2)$$

I coefficienti di connessione non nulli sono:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,1}) = \frac{1}{2}\alpha^{-2} \cdot \left(2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dx}\right) = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(-g_{00,1}) = -\frac{1}{2}\beta^{-2} \cdot \left(-2\alpha \frac{d\alpha}{dx}\right) = \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d\alpha}{dx}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1}) = -\frac{1}{2}\beta^{-2} \left(-2\beta \cdot \frac{d\beta}{dx}\right) = \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dx}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(-g_{22,1}) = -\frac{1}{2}\beta^{-2} \left(2\gamma \frac{d\gamma}{dx}\right) = -\frac{\gamma}{\beta^2} \frac{d\gamma}{dx}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,1}) = -\frac{1}{2}\gamma^{-2} \left(-2\gamma \frac{d\gamma}{dx}\right) = \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx}$$

In definitiva l'equazione delle geodetiche assume la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} \frac{dx}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d\alpha}{dx} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - \frac{\gamma}{\beta^2} \frac{d\gamma}{dx} \left( \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right) = 0 \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2 \frac{d\gamma}{dx} \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} = 0 \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} + 2 \frac{d\gamma}{dx} \frac{dx}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} = 0 \end{array} \right.$$

da cui risulta possibile ripetere i ragionamenti effettuati nel secondo capitolo dove avevamo analizzato uno spazio a una sola dimensione spaziale.



# Bibliografia

1. **Desloge, Edward A.** Nonequivalence of a uniformly accelerating reference and a frame at rest in a unif. grav.l field. *Am. J. Phys.* 1989, Vol. 57, 12, pp. 1121-1125.
2. **Weinberg, Steven.** *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* first edition. New York : John Wiley and Sons, 1972. p. 80.
3. **Rinlder, Wolfgang.** *Essential Relativity.* New York : Springer Verlag, 1992. pp. 49-51. Vol. 2nd edition.
4. **Ohanian, Hans and Ruffini, Remo.** *Gravitaizone e Spazio tempo.* Bologna : Zanichelli, 1997.
5. **Rinlder, Wolfgang.** Hyperbolic Motion in Curved Space Time. *Physical Review.* 1960, Vol. 119, 6.
6. **Møller, C.** *The theory of relativity.* s.l. : Oxford at the Clarendon press, 1952.
7. **Desloge, Edward A. and Philpott, R. J.** Uniformly accelerated reference frames in special relativity. *Am. J. Phys.*, 1987, Vol. 55, 3, pp. 252-261.
8. **Desloge, Edward A.** Spatial geometry in a uniformly accelerating reference frame. *Am. J. Phys.* 1989, 57 (7), pp. 598-602 .
9. **Desloge, Edward A** Relativistic Motion of a Free Particle in a Uniform Gravitational Field. *Int. J. Theorl Phys.* Giugno 1990, Vol. 29, 2, pp. 193-208.
10. **Price, H. E.** Gravitational Red-Shift Formula. *Am. J. Phys.* Aprile 1974, Vol. 42, 4, pp. 336-339.
11. **Desloge, Edward A.** The gravitational red shift in a uniform field. *Am. J. Phys.* 1990, Vol. 58, 9, pp. 856-858.
12. **Jones, Preston and Lucas, Wanex F.** The clock paradox in a static homogeneous field. *Found. Phys Lett.* Febbraio 2006, Vol. 19, 1, pp. 75-85.
13. **Jones, Preston, et al.** The general relativistic infinte plan. *Am. J. Phys.* Gennaio 2008, Vol. 76, 1, pp. 73-78.
14. **Price, Richard H.** Projectiles, pendula, and special relativity. *Am. J. Phys.* Maggio 2005, Vol. 73, p. 433.
15. **Price, Richard H. and Burko, Lior M.** Ballistic trajectory: Parabola, ellipse, or what? *Am. J. Phys.* giugno 2005, Vol. 73, 6, pp. 516-520.

16. **Guo, Chao Guang Huang and Han Ying.** A new kind of uniformly accelerated reference frames. *arxiv.org*. [Online] Marzo 2006. [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org).
17. **Fabri, E.** Paradoxes of gravitational redshift. *Eur. J. Phys.* 1994, Vol. 15, pp. 197-203 .
18. **W. Moreau, W., Neutze, R. and Ross, D. K.** The equivalence principle in the Schwarzschild geometry. *Am. J. Phys.* Novembre 1994, Vol. 62, 11.
19. **French, John D.** Pedagogical trick for general relativity. *Am. J. Phys.* giugno 1977, Vol. 45, 6, pp. 580-581.
20. **Rohrlich, F.** The Principle of Equivalence. *Ann. Phys.* 1963, Vol. 22, pp. 169-191.
21. **Amundsen, P. A. and Grøn, Ø.** General static plane-symmetric solutions of the Einstein-Maxwell equation. *Phys. Rev D.* aprile 1983, Vol. 27, 8, pp. 1731-1739.
22. **Alberici, Marco.** Clock rate comparison in a uniform gravitational field. *arxiv.org*. [Online] settembre 2004. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0409033>. gr-qc/0409033.
23. **Alberici, Marco.** Measures and metrics in uniform gravitational fields. *arxiv.org*. [Online] Marzo 2005. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0503092>. gr-qc/0503092.
24. **Hamilton, Dwayne J.** The uniformly accelerated reference frame. *Am. J. Phys.* gennaio 1978, Vol. 46, 1, pp. 83-89.
25. **Hooft, G.'t.** Introduction to general relativity. [Online] Aprile 2002. <http://www.phys.uu.nl/~thoof/lectures/genrel.pdf>.
26. **Mould, A. Richard.** first edition. New York : Springer, 1994. pp. 221-224.
27. **C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler,.** *Gravitation*. first edition. San Francisco : Freeman and Company, 1973. pp. 167-176.
28. **Avakyan, R. M., Chubaryan, E. V. and Yeranyan, A. H.** Homogeneous Gravitational Field in GR. *arXiv*. [Online] [www.arXiv.org/gr-qc/0102030](http://www.arXiv.org/gr-qc/0102030).
29. **Teixeira, A. F.F.** Taub, Rindler, and the static plate. *arXiv*. [Online] 2005. [www.arxiv.org/gr-qc/0502013](http://www.arxiv.org/gr-qc/0502013).
30. **Lass, Harry.** Accelerating Frames of Reference and the Clock Paradox. *Am. J. Phys.* 1963, Vol. 31, 4, pp. 274-276.
31. **C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler.** *Gravitation*. first edition. San Francisco : Freeman and Company, 1973. pp. 445-446.
32. **Moreau, William, Pirdle, Craig and Wood, Joshua.** The rate of deflection of light in an accelerated frame and a gravitational field. *Am. J. Phys.* 1999, Vol. 67, 3, pp. 241-251.

33. **Esteban, W. and Bruckman, E. P.** An alternative calculation of light bending and time delay by a gravitational field. Agosto 1993, Vol. 61, 8, pp. 750-754.
34. **Lathrop, Robert P. and Comer, John D.** Principle of equivalence and the deflection of light by the sun. *Am. J. Phys.* agosto 1978, Vol. 46, 8, pp. 801-803.
35. **Will, Clifford M. and Bodenner, Eremiah.** Deflection of light to the second order: a tool for illustrating principles of general relativity. *Am. J. Phys.* Agosto 2003, Vol. 71, 8, pp. 770-773.
36. **Lapidus, Richard.** Motion of a Relativistic Particle Acted Upon by a Constant Force and a Uniform Gravitational Field. *AJP.* Luglio 1972, Vol. 40, pp. 984-9888.
37. **Eriksen, E. and Grøn, Ø.** Equivalence in Two-, Three-, and Four-Dimensional Space-Times. *Int. J. of Theoretical Physics.* 1992, Vol. 31, 8, pp. 1421-1432.
38. **Taub, A. B.** Empty Space-Times Admitting a Gtee Parameter Group of Motion. *Ann. of Math.* Aprile 1951, Vol. 53, 3, pp. 472-490.
39. **C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler,.** *Gravitation.* San Francisco : Freeman and Company, 1970. p. 843.
40. **Stephani, Hans.** *General Relativity.* Cambridge : Cambridge U.P., 1982. pp. 85-86.
41. **Adler, Carl G. and Brehme, Rober W.** Relativistic solutions to the falling body in a uniform gravitational field. *Am. J. Phys.* Marzo 1991, Vol. 59, 3, pp. 209-214.
42. **Synge, J. L.** *Relativiy "The Special Theory".* Amsterdam : North Holland, 1955. pp. 32-34.
43. **Ferraro, R.** The equivalence principle and the bending of light. *Am. J. Phys.* 2003, Vol. 74, 2.
44. **Einstein, A.** Zur Elektrodynamik bewegter Korper. *Ann. Phys.* 1905, Vol. 17, pp. 891-921.
45. **C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler.** *Gravitation.* first edition. s.l. : Freeman and Company San Francisco, 1973. p. 187.
46. **Stephani, Hans.** *General Relativity.* Cambridge : Cambridge U.P., 1982. pp. 6-7, 14-16.
47. **Schutz, Bernard F.** *A First Course of General Relativity.* first edition. New York : Cambridge University Press, 1986. p. 118.
48. **Stephani, Hans.** *General Relativiy.* Cambridge : Cambridge U.P., 1982. pp. 114-115.